Оглавление

Глава 1

Введение

Рассмотрим некоторый объект, состояние которого в каждый момент времени описывает набор чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$; пусть мы можем управлять этим объектом, т. е. выбирать некоторый параметр, так или иначе влияющий на состояние объекта. Пусть поведение объекта описывается некоторыми уравнениями, например,

$$x^{k+1} = f(k, x^k, u^k),$$

где k — целое число (дискретное время), u^k — параметр (управление), которое выбираем мы. Другим подобным примером может служить система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)),$$

где t — время, $u(t)$ — управление.

Наложим некоторые геометрические ограничения на множества допустимых управлений: пусть $u^k \in \mathcal{P}(k)$ (или, аналогично, $u(t) \in \mathcal{P}(t)$). Например, таким множеством может быть многоугольник или шар. Эти ограничения происходят из реальной жизни: так, например, при управлении автомобилем, мы можем поворачивать руль не сколь угодно круто, а максимум на некоторый фиксированный угол в ту или иную сторону: $u(t) \in [-\alpha, \alpha]$.

Чтобы еще более сузить класс управлений, введем функционал качества $J(u(\cdot))$, который будет оценивать «пригодность» выбранного управления по некоторому критерию. Нас в дальнейшем будут интересовать задачи нахождения *оптимального управления*, т. е. такого управления, на котором функционал качества достигает экстремума.

Приведем несколько примеров функционалов качества. В *задаче Майера–Больца* функционал имеет вид

$$J(u(\cdot); t_0, x^0) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))dt + \varphi(t_1, x(t_1)). \tag{1.1}$$

Задаче устремления функционала (1.1) к минимуму можно придать содержательную интерпретацию как минимизации затрачиваемого топлива, расходуемого объектом на перемещение, и задаче перевода объекта в заданную точку пространства. В дискретном случае функционал (1.1) принимает вид

$$J(\{u_k\}_{k=k_0+1}^{k_1}; k_0, x^{k_0}) = \sum_{k=k_0+1}^{k_1-1} L(k, x^k, u^k) + \varphi(K_1, x^{k_1}).$$

Другой пример функционала качества:

$$J(u(\cdot); t_0, x^0) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))dt \to \inf_{u(\cdot)}.$$

1.1 Сведения из дифференциальных уравнений

1.1.1 Условия существования решений задачи Коши

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \\ x(t_0) = x^0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Как известно, для локального существования и единственности решения этой системы достаточно непрерывности и липшецевости по x правой части. Кроме того, справедлива следующая

Теорема 1. *Рассмотрим уравнение*

$$\dot{x} = f(x, t), \tag{1.3}$$

где $f(x,t)$ непрерывна в некоторой области A. Тогда для любой компактной области из A существует решение уравнения (1.3)*, доходящее до её границы.*

Замечание 1. Если управление в правой части (1.2) есть лишь кусочно-непрерывная функция, то полученное решение лишь кусочно-дифференцируемая функция. В таком случае, задача сначала решается на одном промежутке непрерывности правой части, и значение решения в точке разрыва кладется начальным условием для задачи нахождения решения на примыкающем промежутке непрерывности.

В самом широком случае, когда правая часть (1.2) всего лишь измерима, решение понимается в смысле решения по Каратеодори.

Следующий пример показывает, что в условиях теоремы может не иметь место продолжимость решения.

Пример 1. Решением системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

является функция

$$x(t) = \frac{1}{1-t},$$

которая является разрывной в точке $t = 1$.

Понятно, что единственной причиной непродолжимости может быть уход траекторий решений за конечное время на бесконечность. Что бы исключить подобные ситуации из рассмотрения, дополнительно потребуем, чтобы $\|x(t)\|$ рос не быстрее известной функции, не уходящей на бесконечность за конечное время. Для этого оценим скорость роста $\|x(t)\|^2$:

$$\frac{d}{dt}\left(\|x\|^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\langle x(t), x(t)\rangle\right) = 2\left\langle x(t), f(t, x(t))\right\rangle.$$

Для продолжимости решений вправо, потребуем, что бы

$$\langle x, f(t,x)\rangle \leqslant C_1||x||^2 + C_2, \tag{1.4}$$

где C_1, C_2 — положительные константы. Обозначая $y = y(t) = \|x(t)\|^2$, получаем:

$$\dot{y} \leqslant 2C_1 y + 2C_2 \Leftrightarrow \dot{y} - 2C_1 y \leqslant 2C_2.$$

Домножим обе части на $e^{-2C_1 t}$:

$$e^{-2C_1 t}\dot{y} - 2C_1 e^{-2C_1 t} y \leqslant 2C_2 e^{-2C_1 t};$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-2C_1 t} y\right) \leqslant 2C_2 e^{-2C_1 t}.$$

Проинтегрируем это соотношение от t_0 до t:

$$e^{-2C_1 t} y(t) - e^{-2C_1 t_0} y(t_0) \leqslant 2C_2 \int\limits_{t_0}^{t} e^{-2C_1 \tau} d\tau = \frac{C_2}{C_1}\left[e^{-2C_1 t_0} - e^{-2C_1 t}\right];$$

Окончательно,

$$y(t) \leqslant e^{2C_1(t-t_0)} y(t_0) + (e^{2C_1(t-t_0)} - 1)\frac{C_2}{C_1},$$

что гарантирует продолжимость решения. Применяя неравенство Коши–Буняковского, условие (1.4) можно усилить и записать в виде

$$\|f(t,x)\| \leqslant C_3\,\|x\| + C_4,$$

где $C_3 > 0$ и $C_4 > 0$. Это условие, называемое *условием сублинейного роста*, гарантирует продолжимость решений в обе стороны.

1.1.2 Формула Коши для векторного линейного дифференциального уравнения

Вернемся к рассмотрению задачи (1.2). Сначала рассмотрим однородное уравнение

$$\dot{x} = A(t)x(t). \tag{1.5}$$

Определение 1. Матрица $X(t,\tau) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется фундаментальной матрицей для уравнения (1.5), если

$$\frac{dX(t,\tau)}{dt} = A(t)X(t,\tau),$$

и, кроме того, $X(\tau,\tau) = E$ (где E — единичная матрица).

Пусть вектор-столбцы $x^1, x^2, \ldots, x^n$ — фундаментальная система решений уравнения (1.5); составим из них матрицу $\Phi(t)$. При этом

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A(t)\Phi(t).$$

Несложно показать, что $X(t,\tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$. Таким образом, в случае задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t), \\ x(t_0) = x^0. \end{cases}$$

решение представимо в виде $x(t) = X(t,\tau)x^0$. Это выражение так же называется *формулой Коши* для однородного уравнения.

Далее, рассмотрим неоднородное уравнение

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + f(t), \\ x(t_0) = x^0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Будем искать решения в виде $x(t) = F(t)y(t)$, где $F(t)$ — некоторая матрица. Тогда, дифференцируя и подставляя в (1.6), получим:

$$\dot{x} = \dot{F}(t)y(t) + F(t)\dot{y}(t) = A(t)F(t)y(t) + f(t),$$

$$\dot{y} = F^{-1}(t)(A(t)F(t) - \dot{F}(t))y(t) + F^{-1}(t)f(t).$$

Выбирая $F(t) = X(t,t_0)$, мы сводим систему (1.6) к системе

$$\begin{cases} \dot{y} = X^{-1}(t,t_0)f(t), \\ y(t_0) = x^0. \end{cases}$$

Таким образом, мы можем выписать в явном виде ответ:

$$y(t) = x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau,t_0)f(\tau)d\tau;$$

$$x(t) = X(t,t_0)x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} X(t,t_0)X^{-1}(\tau,t_0)f(\tau)d\tau. \tag{1.7}$$

Отметим, что $X(\tau,t_0)$ отображает x^0 в $x(\tau)$, а $X(t,\tau)$ отображает $x(\tau)$ в $x(t)$. Тогда $x(t) = X(t,\tau)X(\tau,t_0)x^0$. Но в силу единственности решения $x(t) = X(t,t_0)x^0$ имеем:

$$X(t,\tau)X(\tau,t_0) = X(t,t_0). \tag{1.8}$$

Соотношение (1.8) называется *полугрупповым свойством* фундаментальной матрицы. В частности, при $t = t_0$, получаем $X(t_0,\tau)X(\tau,t_0) = E$. Это позволяет записать соотношение (1.7) в виде

$$x(t) = X(t,t_0)x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} X(t,\tau)f(\tau)d\tau,$$

называемом *формулой Коши* для неоднородного уравнения.

Конкретно для задачи (1.2), формула Коши имеет вид

$$x(t) = X(t,t_0)x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} X(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} X(t,\tau)f(\tau)d\tau.$$

Задача 1. Пусть задано уравнение

$$\dot{x} = A(t)x(t) + f(t).$$

Какая должна быть матрица A_1 в линейной замене переменных, чтобы уравнение приняло вид

$$\dot{x} = B(t)x(t) + f_1(t),$$

где $f_1(t)$ — заданная функция?

1.1.3 Формула Коши для матричного дифференциального уравнения

Рассмотрим следующее матричное дифференциальное уравнение:

$$\begin{cases} \dot{Z} = A(t)Z(t) + Z(t)B(t) + C(t); \\ Z(t_0) = Z^0; \end{cases} \tag{1.9}$$

где $A, B, C, Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Сделаем замену переменных $Z(t) = X(t,t_0)Z_1(t)$ (где $X(t,t_0)$ — фундаментальная матрица) и подставим в (1.9):

$$\dot{Z} = A(t)X(t,t_0)Z_1 + X(t,t_0)\dot{Z}_1 = A(t)X(t,t_0)Z_1 + X(t,t_0)B + C.$$

Сократим на $A(t)X(t,t_0)Z_1$ обе части и избавимся от фундаментальной матрицы при $\dot{Z}_1$:

$$\dot{Z}_1 = Z_1 B + X(t_0,t)C \Rightarrow \dot{Z}_1^T = B^T Z_1^T + C^T X^T(t_0,t).$$

Вновь сделаем замену $Z_1^T = Y^T(t_0,t)Z_2(t)$, при подстановке получим:

$$\dot{Z}_1^T = B^T Y^t(t,t_0) Z_2^T + C^T X^T(t_0,t) \Rightarrow \dot{Z}_2 Y(t,t_0) = X(t_0,t)C \Rightarrow \dot{Z}_2 = X(t_0,t)CY(t_0,t). \tag{1.10}$$

Итак, итоговая замена имеет вид:

$$Z = X(t,t_0)Z_1 = X(t,t_0)Z_2 Y(t,t_0).$$

Проинтегрируем уравнение (1.10):

$$Z_2(t) = Z^0 + \int\limits_{t_0}^{t} X(t_0,\tau)C(\tau)Y(t_0,\tau)d\tau$$

с учетом замены, получим:

$$Z(t) = X(t,t_0)Z^0 Y(t,t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} X(t,\tau)C(\tau)Y(t_0,\tau)Y(t,t_0)d\tau$$

по полугрупповому свойству свернем подынтегральное выражение и получим в итоге окончательную формулу Коши для матричного ОДУ:

$$Z(t) = X(t,t_0)Z^0 Y(t,t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} X(t,\tau)C(\tau)Y(t,\tau)d\tau \tag{1.11}$$

Пример 2. Рассмотрим *уравнение Риккати*:

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + M(t).$$

Для этого уравнения выполняется соотношение $Y^T(t,\tau) = X(t,\tau)$ (Проверьте!). Учитывая это, получаем решение:

$$P(t) = X(t,t_0)P^0 X^T(t,t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} X(t,\tau)MX^T(t,\tau)d\tau.$$

1.2 Поиск фундаментальных матриц

1.2.1 Автономный случай

Рассмотрим случай, когда матрица $A = \mathrm{const}$ и $\dot{X} = AX$. Отметим, что фундаментальная матрица X будет инвариантна относительно смещения во времени, иными словами $X(t,\tau) = X(t-\tau)$. Также верно, что если $x(t)$ — решение, то $x(t+\delta t)$ — тоже будет являться решением. В общем виде решение будет записываться как:

$$x(t) = X(t,\tau)x(\tau)$$

теперь рассмотрим решение $x(t+\Delta t)$:

$$x(t+\Delta t) = X(t+\Delta t, \tau+\Delta t)x(\tau+\Delta t); X(t,\tau) = X(t+\Delta t, \tau+\Delta t) \Rightarrow X(t,\tau) = x(t-\tau)$$

а если взять $\Delta t = -\tau$, то мы получим $X(t,\tau) = X(t-\tau, 0)$, то есть мы с помощью сдвига избавились от τ, ну а теперь возьмем матрицу $X(t,0)$ равную *матричной экспоненте*, то есть $X(t,0) = e^{At}$, которая равна, ровно как и для обычной экспоненты, соответствующему ряду:

$$X(t,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \tag{1.12}$$

Для корректности этого определения требуется равномерная сходимость ряда.

Лемма 2. *Ряд в правой части* (1.12) *сходится равномерно.*

Доказательство. Для простоты дальнейших рассуждений обозначим коэффициенты матрицы A^k, как $\left(a_{ij}^{(k)}\right)$; $\quad i,j = \overline{1,n}$. Так как $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, то все степени матрицы A будут иметь тот же размер.

Нас интересует оценивание $\max|a_{ij}^{(k)}|$. Пусть $\max|a_{ij}| = c$. Запишем формулу для коэффициентов квадрата матрицы A: $a_{ij}^{(2)} = \sum\limits_{l=1}^{n} a_{il}a_{lj} \Rightarrow |a_{ij}^{(2)}| \leqslant \sum\limits_{l=1}^{n} |a_{il}| \cdot |a_{lj}|$, откуда получаем конечную оценку: $\max|a_{ij}^{(2)}| \leqslant nc^2$. Применяя метод математической индукции, мы получим оценку для любой степени матрицы A:

$$\max|a_{ij}^{(k)}| \leqslant n^{k-1}c^k; \quad c = \max|a_{ij}|, \quad i,j = \overline{1,n}.$$

Итак, мажорируем e^{At} с помощью ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}c^k t^k}{k!}$:

$$e^{At} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}c^k t^k}{k!}:$$

Ряд в правой части сходится по признаку Вейерштрасса. □

Отметим, что $e^{A\cdot 0} = E$. Проверим свойство дифференцируемости:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kA^k t^{k-1}}{k!} = A\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} = Ae^{At}.$$

Значит, фундаментальная матрица имеет вид $X(t,\tau) = e^{A(t-\tau)}$.

Отметим, что для матричной экспоненты выполняются многие свойства обычной экспоненты, например $e^{As} \cdot e^{At} = e^{A(t+s)}$. Это свойство отражает полугрупповое свойство фундаментальной матрицы.

Считать по определению матричную экспоненту достаточно трудно, хотя для $n = 2, 3$ это возможно сделать, особенно если вид коэффициентов $\{a_{ij}^{(k)}\}$ зависит от k, и матрицы периодичны.

Задача 2. Найдите e^{At} для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Что же делать, если «в лоб » посчитать экспоненту не удалось? Давайте рассмотрим характеристическое уравнение матрицы A: $|A - \lambda E| = 0$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ — собственные значения с кратностями $k_1, \ldots, k_l$, (напомним, что $k_1 + \ldots + k_l = n$), и далее ищем фундаментальную систему решений:

1. $k_j = 1$
   (a) $\lambda_j \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{\lambda_j t} \cdot \upsilon_j$ (где υ_j — собственный вектор);
   (b) $\lambda_j \in \mathbb{C} \Rightarrow e^{\lambda_j t} \cdot \upsilon_j$ с тем только учетом, что экспоненту надо раскладывать на вещественную и мнимую части, а также надо не забывать о том, что комплексные собственные значения могут появляться только одновременно со своим сопряженным $\overline{\lambda_j}$.
2. $k_j \geqslant 2$
   (a) $\lambda_j \in \mathbb{R}$, тогда вклад имеет вид $\left(\sum_{i=1}^{k_j - 1} \frac{\upsilon_j^{k_j - i} t^{(i-1)}}{(i-1)!} \right) e^{\lambda_j t}$;
   (b) $\lambda_j \in \mathbb{C}$, тогда надо взять вещественные и мнимые части.

Конкатенируя (объединяя) полученные решения в фундаментальную матрицу, имеем $e^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)$.

Пример 3.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

посчитаем $\det A$, и найдём собственные значения: $(3-\lambda)(1-\lambda)+5 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm 2i$ Теперь найдём собственный вектор для собственного значения $\lambda_s = 2+2i$, он равен $(1+2i,\ -1)^T$. После этого умножаем полученный вектор $(1+2i,\ -1)^T$ на $e^{2t}(\cos 2t + i \sin 2t)$, после перемножения, приводим подобные вещественные и мнимые части, итого получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 + 2i \\ -1 \end{pmatrix} * e^{2t}(\cos 2t + i \sin 2t) = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos 2t - 2 \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + ie^{2t} \begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}$$

Теперь из соответствующих столбцов-коэффициентов при e^{2t} составляем матрицу M, после этого составляем матрицу из коэффициентов при $\cos 2t$ — матрица B, считаем обратную к B матрицу, и умножаем $M * B^{-1} = C$, после чего выписываем ответ.

$$M = \begin{bmatrix} \cos 2t - 2\sin 2t & 2\cos 2t + \sin 2t \\ -\cos 2t & -\sin 2t \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad C = M \times B^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t & \frac{5}{2}\sin 2t \\ -\frac{1}{2}\sin 2t & \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t \end{bmatrix}$$

Ответ:

$$e^{At} = e^{2t} \begin{bmatrix} \cos 2t - 2\sin 2t & 2\cos 2t + \sin 2t \\ -\cos 2t & -\sin 2t \end{bmatrix}$$

К сожалению, для случая, когда $A \neq const$ не придумано общих методов. Однако разберем случай, когда $n = 1$. Итак, $\dot{x} = a(t)x$; $\frac{dx}{x} = a(t)dt$. $\Rightarrow X(t,\tau) = \exp\left\{\int\limits_{\tau}^{t} A(s)ds\right\}$.

Интересен вопрос, при каких условиях фундаментальная матрица находится аналогичным выражением, т. е. когда $X(t,\tau) = exp\left\{\int\limits_{\tau}^{t} A(s)\right\} ds$? Для этого дифференцируем по t:

$$X(t,\tau) = \exp\left\{\int A(s)ds\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\int\limits_{\tau}^{t} A(t)ds\right]^k$$

$$\frac{\partial X(t,\tau)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\{A(t)\left[\int\limits_{\tau}^{t} A(s)ds\right]^{k-1} + \left[\int\limits_{\tau}^{t} A(s)ds\right] A(t)\cdot\left[\int\limits_{\tau}^{t} A(s)ds\right]^{k-2} + \ldots$$
$$\ldots + \left[\int\limits_{\tau}^{t} A(s)ds\right]^{k-1} A(t)\} = \quad kA(t)\left[\int_{\tau}^{t} A(s)ds\right]^{k-1} \tag{1.13}$$

Но когда же справедлив последний переход в (1.13)? Только тогда, когда $A(a)A(b) = A(b)A(a)$ верно для $\forall a, b$, что является весьма сильным (и редко встречающимся) условием.

1.2.2 Периодические системы

Определение 2. Если матрица $A(t)$ такова, что $\exists\, T > 0:\ A(t+T) = A(t)\ \forall t$, то $A(t)$ называется *периодической* (с периодом T).

Утверждение 3. *Если $x(\cdot)$ — решение системы*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t), \\ A(t+T) &= A(t)\ \forall t, \end{cases} \tag{1.14}$$

то $x(t+T)$ — тоже решение (1.14).

Доказательство. $\dot{x}(t+T) = A(t+T)x(t+T) = A(t)x(t+T)$ □

Стоит заметить, что из того, что $x(t)$ и $x(t+T)$ — решения (1.14), вообще говоря, не следует, что $x(t) \equiv x(t+T)$. Условия, при которых эти решения совпадают, будут рассмотрены ниже.

Рассмотрим решение (1.14): используя формулу Коши $x(t) = X(t,0)\cdot x(0)$, обозначив $\Phi(t) = X(t,0)$, получим:

$$x(t+T) = \Phi(t+T)x(0).$$

С другой стороны, $x(t)$ есть решение исходной системы с начальным условием $x^0 = x(T)$, поэтому

$$x(t+T) = \Phi(t)x(T) = \Phi(t)\Phi(T)x(0).$$

Отсюда видно, что

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)\cdot\Phi(T).$$

А т. к. $X(t,\tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$, то

$$\Phi(t) = (\Phi(T))^k\Phi(s) \text{ при } t = kT+s, k\in\mathbb{Z}, s\in[0,T].$$

Определение 3. Матрица Φ называется *матрицей монодромии*, а её собственные значения — *мультипликаторами.*

Утверждение 4. *Для того, чтобы ρ являлся мультипликатором системы* (1.14), *необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое $x(t)$ — ненулевое решение* (1.14) *— что за любой период его координаты умножались бы на ρ, то есть $x(t+T) = \rho x(t)\ \forall t$.*

Доказательство. Необходимость: Если ρ — собственное значение Φ, то $\exists\, v \neq 0$ — собственный вектор $\Phi(T)$:

$$\Phi(T)v = \rho v.$$

Возьмём v за начальное условие. Пусть $x(t)$ — решение (1.14) при условии $x(0) = v$. Тогда

$$x(t+T) = \Phi(t+T)v = \Phi(t)\Phi(T)v = \rho\Phi(t)v = \rho x(t).$$

Достаточность: Пусть $x(t+T) = \rho x(t)\ \forall t$. Тогда

$$x(t+T) = \Phi(t+T)x(0) = \Phi(t)\cdot\Phi(T)x(0),$$
$$x(t+T) = \rho x(t) = \Phi(t)\cdot\rho x(0).$$

$\Phi(t)$ невырождена, следовательно $x(0)$ — собственный вектор $\Phi(T)$, а ρ — собственное значение $\Phi(T)$. □

Отсюда следует, что периодическое решение системы (1.14) существует тогда и только тогда, когда у её матрицы монодромии существует единичный мультипликатор.

Теорема 5 (Флоке)**.** *Для всякой системы* (1.14) *с периодической матрицей найдутся такие матрицы* $\Psi(t)$ *и* $\bar{A} = \mathrm{const}$, *что* $\Psi(t+T) = \Psi(t)\ \forall t$, $|\Psi| \neq 0$, *и*

$$\Phi(t) = \Psi(t)e^{\bar{A}t}. \tag{1.15}$$

Доказательство. Конструктивно построим такие $\Psi(t)$ и $\bar{A}$.

Так как $\Phi(t) = X(t,0)$, то $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$, и если равенство (1.15) выполняется, то

$$\dot{\Phi} = \dot{\Psi}e^{\bar{A}t} + \Psi(t)\bar{A}e^{\bar{A}t} = A(t)\Psi(t)e^{\bar{A}t},$$

откуда

$$\dot{\Psi} = A(t)\Psi(t) - \Psi(t)\bar{A}.$$

Потребуем, чтобы $\Phi(T) = \Psi(T)e^{\bar{A}T} = \Psi(0)e^{\bar{A}T}$ и $\Psi(0) = I$. Тогда $\bar{A}$ найдётся из условия $\Phi(T) = e^{\bar{A}T}$.

Таким образом, для того чтобы найти матрицу $\bar{A}$ нам необходимо «прологарифмировать» матрицу. В курсе линейной алгебры такая операция не рассматривалась, однако мы можем ввести её в полной аналогии с вещественными числами. Например, логарифм вещественных чисел можно вводить как сумму ряда $\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}z^k}{k}$. Соответственно для матриц положим по определению

$$\ln \Phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(\Phi(t) - I).$$

Ниже будет показано, что этот ряд сходится. Тот факт, что $e^{\ln z} = z$ легко проверяется с использованием свойств вещественных рядов.

Итак, $\bar{A} = \dfrac{\ln \Phi(T)}{T}$. Положим $\Psi(t) = \Phi(t)e^{-\bar{A}t}$. Проверим периодичность матрицы $\Psi(t)$: учитывая, что $\Phi(T)e^{-\bar{A}T} = \Psi(0) = I$, получим

$$\Psi(t+T) = \Phi(t+T)e^{-\bar{A}(t+T)} = \Phi(t)\Phi(T)e^{-\bar{A}T}e^{-\bar{A}t} = \Phi(t)e^{-\bar{A}t} = \Psi(t).$$

Требуемое в условии равенство тоже, очевидно, выполняется:

$$\Psi(t)e^{\bar{A}t} = \Phi(t)e^{-\bar{A}t}e^{\bar{A}t} = \Phi(t).$$

Таким образом, все утверждения теоремы справедливы, и теорема доказана. □

Сходимость матричного логарифма. Покажем, что ряд в определении матричного логарифма всегда сходится:

Если A — матрица простой структуры, т.е. $A = T^{-1}\Lambda T$, то $\ln A = T^{-1}\ln\Lambda T$, а

$$\ln\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\ln\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \ln\lambda_n\end{bmatrix},$$

где $\ln\lambda_k$ — вообще говоря — комплексные числа.

Если A — произвольная, то

$$A = T^{-1}\begin{bmatrix}L_1(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & L_n\lambda_n\end{bmatrix}T,$$

где L_j — жордановы ящики; прологарифмируем поблочно: учитывая

$$\ln(\lambda_j + x) = \ln\lambda_j + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\lambda_j^k}x^k,$$

получим

$$\ln L_j(\lambda_j) = \ln\left(\lambda_j I + L_j(\lambda_j) - \lambda_j I\right) = \ln\lambda_j I + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\lambda_j^k}\left[L_j(\lambda_j) - \lambda_j I\right]^k.$$

Т. к $[L_j(\lambda_j) - \lambda_j I]$ — нильпотентная матрица, то ряд в правой части обращается в конечную сумму, а следовательно исходный ряд сходится, что и требовалось.

Сингулярное разложение матрицы. Это представление нам нужно для выявления качественных свойств системы. Проведём сингулярное разложение матрицы A из (1.14): $A = U\Lambda V$. Тогда

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}U\Lambda VU\Lambda V\ldots U\Lambda V.$$

И если $A = A^T$, то $U = V^T$, причём т.к. $U^{-1} = U^T$, то $e^A = Ue^{\Lambda}U^T$ и о собственных значениях e^A можно судить по e^{Λ}. В теории устойчивости и стабилизации это позволяет судить о поведении системы по собственным значениям $\Phi(t)$ при отсутствии необходимости знания самой $\Phi(t)$ в явном виде.

Системы с измеримой правой частью. Рассмотрим дискретную систему

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + f(k), k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть пока что $A, B, f \equiv \text{const}$. Тогда

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + f, k \in \mathbb{Z}$$

Рассмотрим сначала однородную систему: $x(k+1) = Ax(k)$. Фундаментальная матрица для неё есть

$$X(k,s), \text{т. ч.} \begin{cases} X(s,s) = I, \\ X(k+1,s) = AX(k,s). \end{cases}$$

Видно, что $X(k,s) = A^{k-s}$. По формуле Коши

$$x(k) = X(k,s)x(s) + \sum_{l=s}^{k-1} X(k,l)[Bu(l) + f],$$

тогда

$$x(k+1) = Ax(k) + Bx(k) + f = A(X(k,s)x(s) + \sum_{l=s}^{k-1} X(k,l)[Bu(l) + f] + Bx(k) + f,$$

и по индукции получим

$$x(k) = A^{k-s}x(s) + \sum_{l=s}^{k-1} A^{k-s-1}[Bu(l) + f].$$

На самом деле, тут матрица X может быть вырожденной, и это понятно, ибо в дискретном случае

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t),$$

$$x(t + \Delta t) - x(t) \approx \Delta t A(t)x(t + \Delta t) \approx [I + \Delta t A]x(t).$$

И в k-ой степени $(I + \Delta t A)^k \to e^A t$ при $\Delta t = \dfrac{t}{k}$, $k \to \infty$.

1.2.3 Сведения из выпуклого анализа

Определение 4. Пусть X — пространство с введённым скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $l \in X$, $A \subset X$. Тогда *опорной функцией множества* A называется функция

$$\rho\,(l \mid A) = \sup_{x \in A} \langle l, x \rangle$$

Геометрический смысл опорной функции достаточно прост: при фиксированном l множество $\{l \mid \langle l, z \rangle = c = \text{const}\}$ есть гиперплоскости, ортогональные l, сдвинутые от начала координат вдоль l на $\dfrac{c}{\|l\|}$.

Если $\|l\| = 1$, то $c = \langle l, z \rangle$ есть расстояние от начала координат до гиперплоскости, ортогональной l и проходящей через z.

Получается, что опорная функция множества показывает максимальное расстояние от начала координат до гиперплоскости заданной ориентации, ещё имеющей какие-то общие точки с нашим множеством. Эта наиболее удалённая гиперплоскость называется *опорной гиперплоскостью* $\pi_l = \{z : \langle l, z \rangle = \rho\,(l \,|\, Z)\}$, $(l \neq 0)$.

Опорная функция обладает следующими свойствами:

1. Она *положительно-однородна*: $\rho\,(\alpha L \,|\, Z) = \alpha\rho\,(l \,|\, Z)\,,\ \alpha \geqslant 0$.

2. Она *полуаддитивна*: $\rho\,(l^1 + l^2 \,|\, Z) \leqslant \rho\,(l^1 \,|\, Z) + \rho\,(l^2 \,|\, Z)$. (неравенство треугольника).

3. Из первого и второго пунктов следует, что она *выпукла*.

4. Между выпуклыми компактами и $\rho\,(l \,|\, Z)$ существует взаимно-однозначное соответствие.

   Действительно: прямо из определения следует, что $\forall z \in Z$ имеет место быть
   $$\langle l, z \rangle \leqslant \rho\,(l \,|\, Z)\,,\ \forall l \in \mathbb{R}^n. \tag{1.16}$$
   Если же $Z \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ (является выпуклым компактом), то справедливо и обратное утверждение, то есть (1.16) $\Rightarrow z \in Z$. И тогда $Z = \bigcap\limits_{l \in R^n} \pi_l^-$, где $\pi_l^- = \{z : z \leqslant \rho\,(l \,|\, X)\}$.

Глава 2

Дискретная задача моментов

2.1 Дискретный процесс управления — часть I

2.1.1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу управления линейной дискретной системой:

$$\begin{gathered} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + f, \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, \\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times 1}, f \in \mathbb{R}^n. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Наша цель — найти управление, переводящее систему из состояния $x(k_0) = x^0$ в состояние $x(k_1) = x^1$ $(k_0 < k_1)$.

Выпишем формулу Коши решения нашей дискретной системы:

$$x(k_1) = X(k_1, k_0)x^0 + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} X(k_1, k)\left[Bu(k) + f\right] = x^1.$$

Обозначим

$$c = x^1 - X(k_1, k_0)x^0 - \sum_{k=k_0}^{k_1-1} X(k_1, k)f.$$

Тогда исходная задача сводится к решению системы из n уравнений с $k_1 - k_0 - 1$ неизвестными $u(k)$ при всех k

$$\sum_{k=k_0}^{k_1-1} X(k_1, k)Bu(k) = c, \tag{2.2}$$

называемой *задачей моментов.*

Мы хотим управлять нашей системой неким оптимальным образом. Будем рассматривать критерий вида
$$\sum_{k=k_0}^{k_1-1} |u(k)|^2 \to \min .$$

Перепишем его в виде
$$\|u\|_E^2 = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} |u(k)|^2 \leqslant \mu^2. \tag{2.3}$$
Мы иногда будем пользоваться эквивалентным неравенством без квадратов
$$\|u\|_E \leqslant \mu. \tag{2.4}$$

Итак, наша задача — найти наименьшее μ, при котором (2.2) имеет решение, удовлетворяющее (2.3), и выписать это (эти?) решение.

2.1.2 Множество достижимости и его свойства

Для решения поставленной задачи нам понадобится понятие множества достижимости.

Определение 5. Будем называть *множеством достижимости* для задачи (2.2), (2.3) следующее множество
$$\mathcal{X}_\mu[k_1, k_0] = \left\{ c \;\middle|\; c = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} X(k_1-1, k)Bu(k) \text{ и } (2.3) \right\} \tag{2.5}$$

Утверждение 6. $\mathcal{X}_\mu[k_1, k_0] \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ *(непустой выпуклый компакт в* $\mathbb{R}^n$*).*

Доказательство. Докажем выпуклость, замкнутость, ограниченность.

Выпуклость: Пусть $c_1, c_2 \in \mathcal{X}_\mu$, значит $\exists\, u_1(\cdot), u_2(\cdot)$, удовлетворяющие (2.3), $c_j = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} X(k_1, k)Bu_j(k)$.

Рассмотрим точки отрезка $c = \lambda c_1 + (1-\lambda)c_2$, $\lambda \in (0, 1)$. Выпуклость равносильна выполнению включения $c \in \mathcal{X}_\mu$ для $\forall\lambda$.

Возьмём $u = \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2$. Легко заметить, что $c = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} X(k_1, l)Bu(k)$, следовательно нам достаточно проверить, что для u выполняется условие (2.3). Это следует из выпуклости евклидовой нормы (вследствие неравенства треугольника):
$$\|u\|_E = \|\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2\| \leqslant \lambda \|u_1\| + (1-\lambda)\|u_2\| \leqslant \lambda\mu + (1-\lambda)\mu = \mu.$$

Ограниченность: В первом условии из определения множества достижимости перейдём к норме
$$\|c\| = \left\| \sum_{k=k_0}^{k_1-1} X(k_1-1, k)Bu(k) \right\| .$$

Оценим норму суммы сверху суммой норм, воспользуемся соотношением $\|XBu\| \leqslant \|XB\|\,\|u\|$ (также именуемое субмультипликативностью матричной нормы). Получили конечную сумму, $\|u\|$ ограничена по требованию оптимальности (2.3), $\|XB\|$ ограничена т. к. XB — фиксированная матрица. В силу указанной цепочки неравенств $\|c\|$ ограничена.

$$\left\|\sum_{k=k_0}^{k_1-1} X(k_1-1,k)Bu(k)\right\| \leqslant \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \|X(k_1-1,k)Bu(k)\| \leqslant \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \|XB\|\,\|u\| \leqslant \sum_{k=k_0}^{k_1-1} C_k\mu.$$

Замкнутость: Для любой фундаментальной последовательности $\{c_j\}$ из $\mathcal{X}_\mu$ возьмём соответствующую последовательность $\{u_j\}$ (они существуют по определению множества достижимости). Все u_j лежат в шаре по условию (2.3). В конечномерном пространстве шар является компактом. А значит существует подпоследовательность $u_{j_m} \to u$ из шара. Т. к. u из шара (удовлетворяет условию (2.3)), то $c = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} X(k_1,k)Bu(k)$ будет лежать в множестве достижимости и будет пределом последовательности $\{c_j\}$. А это и есть замкнутость.

□

То же самое утверждение о выпуклости можно доказать, используя аппарат опорных функций. Покажем это.

Утверждение 7. $\mathcal{X}_\mu[k_1,k_0] \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ *(не пустой выпуклый компакт в* $\mathbb{R}^n$*).*

Доказательство. Рассмотрим опорную функцию множества достижимости.

$$\rho\left(l \mid \mathcal{X}_\mu[k_1,k_0]\right) = \sup_{c\in\mathcal{X}_\mu[k_1,k_0]} \langle l, c\rangle = \sup_{u(k_0),\dots,u(k_1-1)} \left\langle l, \sum_{k=k_0}^{k_1-1} X(k_1-1,k)Bu(k)\right\rangle =$$

$$\sup_{u(k_0),\dots,u(k_1-1)} \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \left\langle \underbrace{B^T X^T(k_1-1,k)l}_{\text{обозначим за } s(k,l)}, u(k)\right\rangle = \sup_{u(k_0),\dots,u(k_1-1)} \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \langle s(k,l), u(k)\rangle. \quad (2.6)$$

Это можно записать в виде $\sup\limits_{u(\cdot)} \langle s(\cdot,l), u(\cdot)\rangle$. Если $u(k)$ — скаляр, то можно составить из него вектор $u(\cdot)$. Если это был вектор, то можно записать для всех k его компоненты в один большой вектор $u(\cdot)$. Если же $u(k)$ — элемент бесконечномерного пространства, то тоже можно как-то аккуратно сделать их него $u(\cdot)$. То есть вся наша теория верна для $u(k)$ любой размерности, но мы пишем все формулы для скаляра, как было указанно в постановке задачи.

Итак,

$$\rho\left(l \mid \mathcal{X}_\mu[k_1,k_0]\right) = \sup_{u(\cdot)} \langle s(\cdot,l), u(\cdot)\rangle.$$

$$u(\cdot) = \frac{\mu s(\cdot)}{\|s(\cdot)\|}; \quad u(k) = \mu\frac{s(k)}{\sqrt{\sum_{k=k_0}^{k_1-1} s^2(k)}}.$$

Следовательно, максимум опорной функции достигается, а значит множество достижимости — компакт.

Отметим, что если максимум достигается, то

$$\rho\left(l \mid \mathcal{X}_\mu[k_1, k_0]\right) = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} s(k)\mu\frac{s(k)}{\sqrt{\sum_{k=k_0}^{k_1-1} s^2(k)}} = \mu\sqrt{\sum_{k=k_0}^{k_1-1} |s(k)|^2}. \tag{2.7}$$

□

2.1.3 Исследование разрешимости задачи моментов

Вернёмся к решению нашей исходной задачи:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + f.$$

Управлением перевести систему из $x(k_0) = x^0$ в $x(k_1) = x^1$ так, чтобы при этом $\|u(\cdot)\|$ была минимально возможной.

Мы свели её к следующей задаче моментов (найти наименьшее μ и соответствующее управление):

$$\sum_{k=k_0}^{k_1-1} X(k_1, k)Bu(k) = c,$$

$$\|u\|_E^2 = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} |u(k)|^2 \leqslant \mu^2.$$

Замечание 2. Следующие утверждения эквивалентны:

- Пара $u(\cdot), \mu$ является решением задачи моментов;
- $c(u) \in \mathcal{X}_\mu$ — множеству достижимости;
- $\langle l, c(u)\rangle \leqslant \mu\sqrt{\sum_{k=k_0}^{k_1-1} |s(k,l)|^2}\ \forall l.$

Из третьего пункта следует, что для решения задачи моментов нам нужно найти наименьшее μ, при котором выполняется соотношение:

$$\mu \geqslant \mu_0 = \sup_{l\neq 0} \frac{\langle l, c\rangle}{\sqrt{\sum_{k=k_0}^{k_1-1} |s(k,l)|^2}}. \tag{2.8}$$

То же самое можно записать так:

$$\mu_0 = \left\{\sup\,\langle l, c\rangle \middle| \sum_{k=k_0}^{k_1-1} |s(k,l)|^2 = 1\right\} \text{ или, что то же, } \frac{1}{\mu_0} = \inf\left\{\sqrt{\sum_{k=k_0}^{k_1-1} |s(k,l)|^2} \middle| \langle l, c\rangle = 1\right\}.$$

Заметим, что μ_0 может быть равным $+\infty$ даже при условии $l \neq 0$ (все s могут стать равными нулю). В таком случае задача моментов не будет иметь решения (не существует требуемых μ).

Получается, что задача моментов не разрешима, когда

$$\sum_{k=k_0}^{k_1-1} |s(k,l)|^2 = 0.$$

Рассмотрим все такие l, при которых выполняется равенство, т. е. рассмотрим

$$l \text{ т. ч. } \forall k |s(k,l)| = 0.$$

Это эквивалентно включению

$$l \in \bigcap_{k=k_0}^{k_1-1} \ker B^T X^T(k_1-1,k),$$

так как $s(k,l) = B^T X^T(k_1-1,k)l$ и для равенства нулю всех k требуется принадлежность l ядрам при всех k.

Пересечение ядер является линейным подпространством (так как каждое из них является линейным подпространством). Возможны два случая:

1. Это подпространство тривиально $\Rightarrow$ sup в (2.8) конечен, μ существует $\Rightarrow$ задача моментов разрешима.

2. Оно нетривиально. Тогда требуется, чтобы c было ортогонально этому пересечению ядер для конечности супремума.

Если

$$c \not\perp \bigcap_{k=k_0}^{k_1-1} \ker B^T X^T(k_1-1,k),$$

то возьмём l из пересечения ядер. Что-то сделаем с каким-то неравенством. Там что-то занулится, а что-то нет. Оно не получается, значит $c \notin \mathcal{X}_\mu[k_1,k_0] \forall \mu$. Задача моментов не разрешима.

Пусть

$$c \perp \bigcap_{k=k_0}^{k_1-1} \ker B^T X^T(k_1-1,k).$$

В этом случае в неравенстве если правая часть ноль, то и левая ноль. Задача моментов разрешима. Интересно, когда правая часть не ноль (подпространство).

$$\bigcap_{k=k_0}^{k_1-1} \ker B^T X^T(k_1-1,k) = \left\{ \left(\underbrace{0,\ldots,0}_{p}, x_{p+1},\ldots,x_n \right) \right\}$$

Тогда для супремума

$$\sup_{l\neq 0} \frac{\langle l, c\rangle}{\sqrt{\sum_{k=k_0}^{k_1-1} |s(k,l)|^2}}$$

достаточно рассмотреть l, у которых $x_{p+1},\ldots,x_n = 0$.

$$\sup_{(l_1\ldots l_p)\neq 0} \frac{\sum\limits_{j=1}^{p} l_j c_j}{\sqrt{\sum_{k=k_0}^{k_1-1} |s(k,l)|^2}}.$$

Тогда знаменатель не равен нулю, супремум достигается, можно брать его по $(l_1 \ldots l_p) \neq 0, \sum\limits_{j=1}^{p} l_j = 1$.

2.1.4 Геометрический смысл (отступление)

Посмотрим на выкладки с геометрической точки зрения. С учётом вышесказанного, для разрешимости задачи моментов (а значит принадлежности c множеству достижимости) ?необходимо? и достаточно, чтобы c было ортогонально пересечению ядер, если это пересечение нетривиально, и любым, если оно тривиально. Следовательно:

$$\mathcal{X}_\mu[k_1,k_0] \subseteq \left(\bigcap_{k=k_0}^{k_1-1} \ker B^T X^T(k_1-1,k)\right)^{\perp}.$$

И при $\forall\mu$ множество достижимости будет находится в этом ортогональном дополнении. И для $\forall c \in (\cap \ker(\ldots))^{\perp}$ найдётся μ, что $\mathcal{X}_\mu[k_1,k_0]$ обхватит c. При этом

$$\lim_{\mu\to\infty} \mathcal{X}_\mu[k_1,k_0] = (\cap \ker(\ldots))^{\perp}.$$

Также оказывается, что $(\cap \ker(\ldots))^{\perp}$ — такая гиперплоскость, относительная внутренность $\mathcal{X}_\mu[k_1,k_0]$ относительно которой не пуста.

2.1.5 Решение задачи моментов

Итак, мы нашли μ_0. Осталось найти управление. Для этого найдём, на каком именно l_0 достигается супремум

$$\mu_0 = \left\{ \sup \langle l, c\rangle \middle| \sum_{k=k_0}^{k_1-1} |s(k,l)|^2 = 1 \right\}.$$

$$\sum_{k=k_0}^{k_1-1} |s(k,l)|^2 = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=k_0}^{k_1-1} |B^T X^T(k_1-1,k)l|^2 = 1.$$

Если ядро нетривиально, то это эллипсоид. Если ядро тривиально — эллипсоидальный цилиндр.

Итак, в выражении для μ_0 можно брать sup по $M^{\perp}$ — эллипсоид в сечении ограничен $\Rightarrow$ супремум достигается.

2.2 Дискретный процесс управления — часть II

2.2.1 Постановка задачи и её решение

Рассмотрим дискретный процесс управления:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + f, \\ x(k_0) = x^0 \longrightarrow x(k_1) = x^1, \\ c = x^1 - X(k_1, k_0)x^0 - \sum\limits_{k=k_0}^{k_1-1} X(k_1-1, k)f, \\ \sum\limits_{k=k_0}^{k_1-1} X(k_1-1, k)Bu(k) = c, \end{cases} \tag{2.9}$$

где $X(k,l) = A^{k-l}$.

Система (2.9) разрешима тогда и только тогда, когда $c \in \left(\bigcap\limits_{k=k_0}^{k_1-1} \operatorname{Ker}\left(B^T X^T(k_1-1,k)\right)\right)^{\perp}$.

Наложим ограничение на величину управления:

$$\sum_{k=k_0}^{k_1-1} (u(k))^2 \leqslant \mu^2. \tag{2.10}$$

Множество достижимости: $\mathcal{X}_\mu[k_1] = \left\{ \sum\limits_{k=k_0}^{k_1-1} X(k_1-1,k)B\,(u(k)) \,\middle|\, (2.10) \right\}$.

Опорная функция рассматриваемого множества выглядит следующим образом:

$$\rho\left(l \,|\, \mathcal{X}_\mu[k_1]\right) = \mu \sqrt{\left\langle l, \left[\sum_{k=k_0}^{k_1-1} X(k_1-1,k)BB^T X^T(k_1-1,k)\right] l \right\rangle},$$

где $[\ldots]$ обозначим за $W(k_1,k_0)$. Минимальное $\mu^0 = \sup_{l\neq 0} \dfrac{\langle l, c\rangle}{\sqrt{\langle l, W(l)\rangle}}$.

Если $\mu^0 < \infty$ (т. е. если задача разрешима), то

$$l^0 \in \operatorname*{Argmax}_{\substack{l \notin \operatorname{Ker} W \\ l \neq 0}} \frac{< \langle l, c\rangle}{\sqrt{\langle l, W(l)\rangle}}; \quad s^0(k) = B^T X^T(k_1-1,k)l^0.$$

Положим $u_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mu^0 \dfrac{s^0(k)}{\|s^0(k)\|}$ — это и есть решение нашей задачи.

Выпишем условия на значение c: $\langle l, c\rangle \leqslant \mu^0\sqrt{\langle l, Wl\rangle}, \langle l^0, c\rangle = \rho\,(l^0 \,|\, \mathcal{X}_{\mu^0})$. Тогда выпишем те множества, на которых находится точка c (в этом нам поможет рисунок):

- c принадлежит множеству достижимости;
- c принадлежит опорной гиперплоскости;
- c принадлежит эллипсоиду.

Следовательно, точка c единственна. $\pi_{l^0} \cap \mathcal{X}_{\mu^0} = \{c\}$.
Распишем u^0 (при условии, что $\|s^0(k)\| = 1$):

$$\mu^0 \sum_{k=k_0}^{k_1-1} X(k_1-1,k)BB^TX^T(k_1-1,k)l^0 = \mu^0 W(k_1,k_0)l^0.$$

Опорная функция $\rho\,(l \,|\, \varepsilon(p,P)) = \langle l, p\rangle + \sqrt{\langle l, Pl\rangle}$.
Из условия касания в точке опорной гиперплоскости $z^* = \dfrac{Pl}{\sqrt{\langle l, Pl\rangle} + p}$.
Мы хотим показать, что $\mu^0 W(k_1,k_0)l^0 = \dfrac{Pl_0}{\sqrt{\langle l_0, Pl_0\rangle} + p}$. Очевидно, что $||s^0|| = 1$ равносильно $\langle l^0, Wl^0\rangle = 1$. Тогда $\mathcal{X}_{\mu^0} = \varepsilon\left(0, (\mu^0)^2\, W\,(k_1,k_0)\right)$, $Pl_0 = (\mu^0)^2 W(k_1,k_0)l^0$. Из этого следует, что $z^* = \mu^0 Wl^0$ (на самом деле всё следует из $\pi_{l^0} \cap \mathcal{X}_{\mu^0} = \{c\}$, мы только подтвердили, что всё так и есть).

Замечание об эллипсоидах. Рассмотрим эллипсоид, задаваемый матрицей $P = P^T \geqslant 0$.
Если $P > 0$, то

$$\left\langle z-p, P^{-1}(z-p)\right\rangle \leqslant 1. \qquad (2.11)$$

Всегда выполнено: $P = U^T\Lambda U$. Приведём эллипсоид к главным осям: $\zeta = U(z-p)$, $z - p = U^T\zeta$. Тогда (2.11) превращается в $\langle \zeta, \Lambda^{-1}\zeta\rangle \leqslant 1$. Поэтому справедливо следующее неравенство:

$$\lambda_{-1}\zeta_1^2 + \ldots + \lambda_{-1}\zeta_n^2 \leqslant 1.$$

Если $\lambda_i = 0$, то $\zeta_i = 0$ (убиваем бесконечность и сохраняем неравенство). Поэтому мы можем считать вырожденный эллипсоид и эллипсоидальный цилиндр предельными случаями.

2.2.2 Геометрическая интерпретация

Введём в рассмотрение следующие матрицы:

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} u(k_0) \\ u(k_0+1) \\ \ldots \\ u(k_1-1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k_1-k_0}$$

$$\mathbb{R}^{n\times(k_1-k_0)} \ni \Gamma = [X(k_1-1,k_0)B\,|\ldots|X(k_1-1,k_1-1)B] = \left[A^{k_1-k_0-1}B\,\middle|\ldots\middle|AB\,\middle|B\right].$$

Тогда (2.9) $\Leftrightarrow \Gamma\bar{u} = c$. Система (2.9) разрешима $\Leftrightarrow c \in \operatorname{Im}\Gamma = \operatorname{Im}\left[A^{\min(k_1-k_0,n)-1}B\,\middle|\ldots\middle|AB\,\middle|B\right]$. В данном соотношении min берётся по той причине, что если $k_1-k_0 > n$, то по теореме Гамильтона–Кэли степени выше $n-1$ к образу ничего нового не добавят. (По теореме Гамильтона–Кэли A — матрица-корень своего характеристического многочлена, поэтому любая её степень выражается через $A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, I$: имеем соотношение $A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \ldots + c_0 I = 0$ или $A^n = -c_{n-1}A^{n-1} - \ldots - c_1 A - c_0 I$).
Минимальное по норме решение представляет собой нормальное псевдорешение:

$$\|\Gamma\bar{u} - c\|^2 \to \min.$$

Минимальное псевдорешение подразумевает также $\|\bar{u}\| \to \min$. Решим вопрос о нахождении данного решения.
Имеем $Ax = b$. Тогда $A^*Ax = A^*b$, причём эта система всегда совместна. Выпишем то же относительно Γ: $\Gamma^T\Gamma\bar{u} = \Gamma^T c$. Отметим, что $\Gamma^T\Gamma = \sum\limits_{k=k_0}^{k_1-1} B^T X^T(k_1-1,k)X(k_1-1,k)B$ — симметрическая и положительно определённая матрица. Заменой её можно свести к диагональной. Решение будем искать в виде $\bar{u} = \Gamma^T l$, тогда

$$\underbrace{\Gamma\Gamma^T}_{W} l = c. \tag{2.12}$$

Рассмотрим два случая.

1. W — невырожденная, тогда $\tilde{l}^0 = W^{-1}c \Leftrightarrow \bar{u} = \Gamma^T W^{-1}c = \Gamma^T\tilde{l}^0$. Но, как мы знаем, $\Gamma^T\tilde{l}^0 = \bar{s}^0 = [s^0(k_0),\ldots,s^0(k_1-1)]^T$.

2. W — вырожденная, тогда $W^{-1} \overset{\text{def}}{=} W^{\oplus}$ — псевдообратная Мура–Пенроуза (обращение нуля на диагонали даёт снова ноль); $l^0 = W^{\oplus}c$.

Разрешимость (2.12) эквивалентна разрешимости $\Gamma\bar{u} = c$, поскольку из линейной алгебры известно, что $\operatorname{Im}\Gamma\Gamma^T = \operatorname{Im}\Gamma$, т. к. $\operatorname{Im}\Gamma\Gamma^T = (\operatorname{Ker}\Gamma\Gamma^T)^\perp$, $\operatorname{Im}\Gamma = (\operatorname{Ker}\Gamma^T)^\perp$. Осталось доказать, что $\operatorname{Ker}\Gamma\Gamma^T = \operatorname{Ker}\Gamma$. Действительно, пусть $\Gamma\Gamma^T l = 0$, $\Gamma^T l \in \operatorname{Ker}\Gamma = (\operatorname{Im}\Gamma^T)^\perp$, но из $\Gamma^T l \in \operatorname{Im}\Gamma^T$ следует, что $\Gamma^T l = 0$, что и требовалось.

Пример 4. Пусть $k_1 - k_0 = 3$,$n = 2$; $\Gamma = [g_1^T, g_2^T]^T$, $\Gamma \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Тогда имеем следующее:

$$\Gamma\bar{v} = c \Leftrightarrow \begin{cases} \langle g_1, \bar{u}\rangle = c_1, \\ \langle g_2, \bar{u}\rangle = c_2. \end{cases}$$

Если g_1, g_2 линейно независимы, то $\Gamma\Gamma^T = W$ — матрица Грама (невырожденная).
Минимальное по норме решение — это пересечение f и плоскости, проходящей через g_1 и g_2.

2.2.3 Вычисление оптимального управления

Зададимся вопросом о том, чему равна норма $\|u_0\| = \mu^0 = ?$

Найдём $\mu^0 = \sup\limits_{\substack{l \in (\operatorname{Ker} W)^\perp \\ l \neq 0}} \dfrac{\langle l, c\rangle}{\sqrt{\langle l, Wl\rangle}}$ — опорная функция некоторого эллипсоида (при условии, что $|W| \neq 0$ — случай полной управляемости). Тогда $\mu^0 = \sup\limits_{\langle l, Wl\rangle = 1} \langle l, c\rangle$.

$$\mu^0 = \sqrt{\langle c, W^{-1}c\rangle}, \quad l_0 = \frac{W^{-1}c}{\sqrt{\langle c, W^{-1}c\rangle}} = \frac{W^{-1}c}{\mu^0}.$$

Тогда μ^0 — это сопряжённая норма.

Если же $|W| = 0$, то внизу полунорма (нет свойства, что $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$).

Глава 3

Непрерывная задача моментов

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)X(t) + B(t)u(t) + f(t); \\ A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m},\ f(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \tag{3.1}$$

Будем полагать, что A, B и f — непрерывные функции. Если же они измеримы, то задачу стоит понимать «почти всюду», а решение — решением по Каратеодори. Систему, находящуюся в начальном состоянии, необходимо привести в конечное состояние:

$$x(t_0) = x^0 \longrightarrow x(t_1) = x^1. \tag{3.2}$$

Задача слишком «свободная», поэтому поставим дополнительное условие:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2\, dt \leqslant \mu^2. \tag{3.3}$$

Это ограничение также можно записать как $\|u\|^2_{\mathcal{L}_2} \leqslant \mu^2$.

Задача 3. Найти минимальное μ, при котором задача (3.1), (3.2) разрешима.

3.2 Решение

По формуле Коши получим:

$$x^1 = X(t_1, t_0)x^0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1,\tau)f(\tau)d\tau.$$

Это утверждение эквивалентно следующей задаче моментов:

$$\begin{cases} c = x^1 - X(t_1, t_0)x^0 - \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1, \tau) f(\tau) d\tau, \\ H(t_1, \tau) = X(t_1, \tau) B(\tau), \\ \int\limits_{t_0}^{t_1} H(t_1, \tau) u(\tau) d\tau = c. \end{cases} \tag{3.4}$$

Введём множество достижимости:

$$\mathcal{X}_\mu(t_1, t_0) = \mathcal{X}_\mu[t_1] = \left\{ \int\limits_{t_0}^{t_1} H(t_1, \tau) u(\tau) d\tau \middle| (3.3) \right\}.$$

Утверждение 8. *$\mathcal{X}_\mu \in \operatorname{conv} \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Для доказательства исходного утверждения необходимо доказать три свойства: выпуклость, ограниченность и замкнутость.

Выпуклость:

$$c^1, c^2 \in \mathcal{X}_\mu \Rightarrow c^j = \int\limits_{t_0}^{t_1} H(t_1, \tau) u^j(\tau) d\tau; \left\| u^j \right\|_{\mathcal{L}_2} \leqslant \mu.$$

Требуется показать, что:

$$c = \lambda c^1 + (1 - \lambda) c^2 \in \mathcal{X}_\mu, \quad \lambda \in (0, 1).$$

Если мы возьмем

$$u(t) = \lambda u^1(t) + (1 - \lambda) u^2(t),$$

то в силу выпуклости нормы имеем:

$$\|u\|_{\mathcal{L}_2} \leqslant \lambda \left\| u^1 \right\|_{\mathcal{L}_2} + (1 - \lambda) \left\| u^2 \right\|_{\mathcal{L}_2} \leqslant \mu.$$

Домножаем c^1 на λ, c^2 на $(1 - \lambda)$, складываем и получаем, что:

$$c = \int\limits_{t_0}^{t_1} H(t_1, \tau) u(\tau) d\tau; \ \|u\|_{\mathcal{L}_2} \leqslant \mu.$$

Таким образом, $c \in \mathcal{X}_\mu$, что и требовалось доказать.

Ограниченность: Воспользуемся неравенством Коши–Буняковского:

$$\left\| \int\limits_{t_0}^{t_1} H(t_1, \tau) u(\tau) d\tau \right\| \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_1} \|H(t_1, \tau)\| \, \|u(\tau)\| \, d\tau \overset{\text{К.–Б.}}{\leqslant} \left(\int\limits_{t_0}^{t_1} \|H(t_1, \tau)\|^2 \, d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \mu \equiv \text{const}.$$

Замкнутость: По-человечески доказать это мы пока не сможем. Этот шар не компактен. В частности, это связано с различием сходимости по норме и покоординатной сходимостью. Но всё-таки приведем доказательство замкнутости:

$$u^j \leftrightarrow c^j \in \mathcal{X}_\mu.$$

Определение 6. $u^j \xrightarrow[j\to\infty]{\text{слабо}} u^0$, если $\forall\ g \in \mathcal{L}_2 : \int\limits_{t_0}^{t_1} g(t)u^j(t)dt \to \int\limits_{t_0}^{t_1} g(t)u^0(t)dt.$

Так как это слабый компакт, то без ограничения общности будем считать, что

$$u^j \xrightarrow[j\to\infty]{\text{слабо}} u,$$

$$c^j = \int\limits_{t_0}^{t_1} H(t_1,\tau)u^j(\tau)d\tau,$$

$$H(t_1,\tau) = \begin{bmatrix} H_1(t_1,\tau) \\ \vdots \\ H_n(t_1,\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

Тогда получим:

$$c_i^j = \int\limits_{t_0}^{t_1} H_i(t_1,\tau)u^j(\tau)d\tau \xrightarrow[j\to\infty]{} \int\limits_{t_0}^{t_1} H_i(t_1,\tau)u(\tau)d\tau = c \in \mathcal{X}_\mu.$$

Найдём опорную функцию:

$$\rho\,(l \,|\, \mathcal{X}_\mu) = \sup_C \left\{ \langle l, c\rangle \,\middle|\, c = \int\limits_{t_0}^{t_1} H(t_1,\tau)u(\tau)d\tau \right\} = \sup_{u(\cdot):(3.3)} \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle l, H(t_1,\tau)u(\tau)\rangle\, d\tau =$$

$$= \sup_{u(\cdot):(3.3)} \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle H^T(t_1,\tau)l, u(\tau)\right\rangle d\tau \overset{\text{К.–Б.}}{\leqslant} \sup_{u(\cdot):(3.3)} \left(\left[\int\limits_{t_0}^{t_1} \|h(t_1,\tau)\|^2\, d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \|u\|_{\mathcal{L}_2} \right) =$$

$$= \mu\, \|h(t_1,\tau)\|_{\mathcal{L}_2},\ \text{где } h(t_1,\tau) = H^T(t_1,\tau).$$

Поэтому $u(t) = \lambda h(t_1,\tau)$, $\lambda = \mathrm{const} \geqslant 0$; sup достигается на $u^*(\tau) = \dfrac{h(t_1,\tau)}{\|h(t_1,\tau)\|}$, если $h(t_1,\tau) \neq 0$.

$\square$

3.2.1 Исследование разрешимости задачи моментов

$$(3.4)\ \text{разрешима} \Leftrightarrow \forall l \neq 0,\ \langle l, c\rangle \leqslant \rho\,(l \,|\, \mathcal{X}_\mu) = \mu\,\|h\|_{\mathcal{L}_2} \Leftrightarrow \mu \geqslant \frac{\langle l, c\rangle}{\|h\|_{\mathcal{L}_2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mu \geqslant \mu^0 = \sup_{l\neq 0} \frac{\langle l, c\rangle}{\|h\|_{\mathcal{L}_2}}.$$

Имея в виду, что sup конечен, распишем $\|h\|_{\mathcal{L}_2}$:

$$\|h\|_{\mathcal{L}_2} = \left[\int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle H^T l, H^T l \right\rangle d\tau \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\left\langle l, \left(\int\limits_{t_0}^{t_1} H(t_1,\tau)H^T(t_1,\tau)d\tau\right) l \right\rangle\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим через $W(t_1,\tau)$ следующее выражение:

$$W(t_1,\tau) = \int\limits_{t_0}^{t_1} H(t_1,\tau)H^T(t_1,\tau)d\tau.$$

Рассмотрим различные случаи:

1. $|W(t_1,t_0)| \neq 0$.

   Заметим, что W — матрица Грамма строк матрицы H, а т. к. $|W| \neq 0$, то строки $H(t_1,\cdot)$ линейно независимы.

   $\forall l$ верно, что $\langle l, Wl\rangle \neq 0$, где $\sqrt{\langle l, Wl\rangle}$ — норма.

   μ_0 — норма от c, сопряженная к $\sqrt{\langle l, Wl\rangle}$, выпишем это явно:

   $$\mu_0 = \sup\{\, \langle l, c\rangle \mid \langle l, Wl\rangle = 1 \,\} = \sqrt{\langle c, W^{-1}c\rangle}.$$

   Максимум достигается на $l^0 = \dfrac{W^{-1}c}{\sqrt{\langle c, W^{-1}c\rangle}}$, тогда $h^0(t_1,\tau) = H^T(t_1,\tau)l^0$.

   Используя то, что $\langle l^0, Wl^0\rangle = 1$, найдём управление:

   $$u^0(\tau) = \mu^0 \frac{H^T(t_1,\tau)l^0}{\sqrt{\langle l^0, Wl^0\rangle}} = \sqrt{\langle c, W^{-1}c\rangle} H^T(t_1,\tau)\frac{W^{-1}c}{\sqrt{\langle c, W^{-1}c\rangle}} = H^T(t_1,\tau)W^{-1}(t_1,\tau)c.$$

   Для задачи моментов $\int\limits_{t_0}^{t_1} H(t_1,\tau)u(\tau)d\tau = c$ имеем $\Gamma u = c$, тогда $u = \Gamma^T l$(Γ^T — сопряженный оператор), отсюда $\Gamma\Gamma^T l = c$.

   Множество достижимости для этого случая — невырожденный эллипсоид $\mathcal{X}_\mu$. W называют матрицей управляемости. Это случай полной управляемости, то есть если мы решили задачу для $[a,b]$, то можем решить и на $[c,d] \supset [a,b]$ (просто берём управление на $[c,a]$ и $[b,d]$ как угодно, а на $[a,b]$ уже решаем).

2. $|W(t_1,t_0)| = 0$.

   Задача в этом случае является не всегда разрешимой.

   $$\begin{gathered}\rho(l|\mathcal{X}_\mu) = \mu\sqrt{\langle l, Wl\rangle},\\ l \in \ker W \Leftrightarrow \rho(l|\mathcal{X}_\mu) = 0,\\ \langle l, c\rangle \leqslant \rho(l|\mathcal{X}_\mu).\end{gathered} \tag{3.5}$$

Тогда если левая часть неравенства (3.5) положительна, а правая равна нулю, то (3.5) не выполнено, поэтому:

$$c \notin (\ker W)^{\perp} \Rightarrow c \notin \mathcal{X}_{\mu},\ \forall \mu.$$

На самом деле, $c \in \mathcal{X}_{\mu} \Leftrightarrow c \in (\ker W)^{\perp}$. Если мы покажем, что $c \in \mathcal{X}_{\mu} \Leftarrow c \in (\ker W)^{\perp}$, то $c \notin (\ker W)^{\perp} \Leftarrow c \notin \mathcal{X}_{\mu},\ \forall \mu$.

Если $c \in (\ker W)^{\perp}$, то $\langle l, c\rangle \leqslant \rho\,(l|\mathcal{X}_{\mu})$, надо проверить лишь, что $l \in (\ker W)^{\perp}$ (т. к. $l = l^1 + l^2$, где $l \in W$, $l^1 \in \ker W$, $l^2 \in (\ker W)^{\perp}$).

$$\langle l, c\rangle = \left\langle l^2, c\right\rangle,$$

$$\rho(l|\mathcal{X}_{\mu}) = \mu\sqrt{\langle l^1 + l^2, Wl^2\rangle} = \sqrt{\langle l^1, Wl^2\rangle + \langle l^2, Wl^2\rangle} = \sqrt{\langle l^2, Wl^2\rangle} = \rho(l^2|\mathcal{X}_{\mu}).$$

Теперь находим μ_0:

$$\mu_0 = \sup_{l \in (\ker W)^{\perp}} \frac{\langle l, c\rangle}{\sqrt{\langle l, Wl\rangle}} = \sup\left\{\, \langle l, c\rangle \,\middle|\, \langle l, Wl\rangle = 1,\ l \in (\ker W)^{\perp} \,\right\}.$$

3.3 Непрерывная задача оптимального управления.

3.3.1 Система с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t),\\ A &= \mathrm{const},\\ B &= \mathrm{const}\,. \end{aligned} \right. \tag{3.6}$$

Для неё наша матрица W имеет вид

$$W(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} X(t_1, \tau) BB^T X^T(t_1, \tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} BB^T e^{A^T(t_1-\tau)}\, d\tau.$$

Изучим $\operatorname{Ker} W$: т. к. $W = W^T \geqslant 0$, то

$$l \in \operatorname{Ker} W \Leftrightarrow l^T W l = 0 = \int_{t_0}^{t_1} (B^T e^{A^T(t_1-\tau)} l)^T B^T e^{A^T(t_1-\tau)} l\, d\tau =$$
$$\int_{t_0}^{t_1} \left\| B^T e^{A^T(t_1-\tau)} l \right\|\, d\tau \Leftrightarrow l^T e^{A(t_1-\tau)} B \equiv 0.$$

Последнее равенство следует, вообще говоря, понимать как равенство почти всюду, но мы будем считать, что у нас все функции достаточно хорошие, и оно выполняется вообще везде.

Утверждение 9. *$|W| \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} M = n$, где $M = [B|AB|\dots|A^{n-1}B]$ — матрица, составленная из матриц $B, AB, \dots, A^{n-1}B$, поставленных в плотную друг к дружке. $M \in \mathbb{R}^{n \times mn}$.*

Доказательство. $\Longleftarrow$ (*Достаточность*): Пойдём от противного: Пусть M — матрица полного ранга, но найдётся $l \in \operatorname{Ker} W$, $l \neq 0$. Тогда $l^T e^{A(t_1-\tau)} B \equiv 0$. Продифференцируем это равенство по τ $n-1$ раз:

$$\begin{aligned} -l^T e^{A(t_1-\tau)} \quad AB \quad &\equiv 0, \\ \dots \\ (-1)^{n-1} l^T e^{A(t_1-\tau)} A^{n-1} B \quad &\equiv 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Но тогда $l^T e^{A(t_1-\tau)} \perp B, AB, \dots, A^{n-1}B$, что противоречит предположению.

$\Longrightarrow$ (*Необходимость*): Опять-таки, предположим противное, т. е. $|W| \neq 0$, но $\operatorname{rang} M < n$. Тогда найдётся вектор $l \neq 0$, т. ч. $l^T B = \dots = l^T A^{n-1} B = 0$. Вспомним теорему Гамильтона–Кэли, которая гласит, что любая матрица является корнем своего характеристического многочлена. Из неё следует, что любая степень матрицы является линейной комбинацией её первых $n-1$ степеней.

Посему $l^T A^k B \equiv 0 \ \forall k \geqslant 0$, а следовательно $l^T e^{A(t_1-\tau)} B \equiv 0$, и $|W| = 0$, что противоречит предположению. □

Условие $\operatorname{rang} M = n$ называется также *полноранговым условием Калмана (?)*. Правда сам Калман занимался не столько управлением, сколько наблюдением за стохастическими процессами. Но это не суть важно =).

Утверждение 10. $\operatorname{Im} W = \operatorname{Im} M$, *или, что то же,* $\operatorname{Ker} W = \{l : l \perp \operatorname{Im} M\}$.

Доказательство. Доказательство идёт по той же самой схеме, что и предыдущее:

$l \perp \operatorname{Im} M \ \Rightarrow \ l \perp B, AB, \dots A^{n-1}B \ \overset{\text{нер. Гамильтона–Кели}}{\Rightarrow} \ l^T e^{A(t-\tau)} B \equiv 0 \ \Rightarrow \ l \in \operatorname{Ker} W$.

Обратно:

$y \in \operatorname{Ker} W \Rightarrow l^T e^{A(t_1-\tau)} \perp B, AB, \dots, A^{n-1}B \Rightarrow l \perp \operatorname{Im}[B|AB|\dots|A^{n-1}B]$. □

Чем непрерывный случай принципиально отличается от дискретного? Тем, что в дискретном случае матрица M выглядела как $[B|\dots|A^{min(k_1-k_0,n)}B]$, ибо у нас было лишь ограниченное число шагов, и их могло просто не хватить.

Определение 7. Пара матриц A, B называется *[полностью(?)] управляемой*, если $\operatorname{rang}[B|AB|\dots|A^{n-1}B] = n$.

Пример 5. Рассмотрим маятник: $\ddot{x} + \omega^2 x = u$. x — координата маятника, u — сила, которую мы к нему прилагаем.

Управляема ли эта система? Сейчас узнаем.

Обозначим $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$. Тогда

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 + u, \end{cases} \tag{3.8}$$

и тогда наши матрицы имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$[B|AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

То есть наша система управляема, что в общем-то согласуется с бытовыми представлениями — с помощью сколь угодно большой силы можно поставить маятник в любое положение и придать ему любую скорость за сколь угодно малое время

Ещё стоит заметить, что, казалось бы, в (3.8) координата маятника не зависит от управления, поэтому на неё нельзя влиять управлением, но, на самом деле, это не так, ибо она зависит от скорости, которая в свою очередь зависит от управления очень даже.

Если система не полностью управляема, то

$$\mathcal{X}[t_1] = \mathcal{X}(t, t_0, x^0) = \{x^1 \mid \exists\, u(\cdot), \exists\, x^0 \in \mathcal{X}^0 : x(t_1, t_0, x^0|u(\cdot)) = x^1\} = \\ = e^{A(t_1-t_0)}\mathcal{X}^0 + \mathrm{Im}[B|\dots|A^{n-1}B],$$

$x^1 \in \mathcal{X}[t_1] \Leftrightarrow \exists\, \mu, \exists\, x^0 \in \mathcal{X}^0 : x^1 - e^{A(t_1-t_0)}x^0 = c \in \mathcal{X}_\mu[t_1]$, а $\bigcup\limits_\mu \mathcal{X}_\mu = \mathrm{Im}[B|\dots|A^{n-1}B]$. Так вот, если $\mathcal{X}^0 = \{x^0\}$, то $\mathcal{X}[t_1]$ — есть линейное многообразие, и можно сказать, что $e^{A(t_1-t_0)}x^0$ — есть центр сплющенного эллипсоида $\mathcal{X}_\mu$, а в остальном всё (???) то же самое. (то же самое, как и что? наборщик недоумевает…).

Приведём следующую немаловажную теорему:

Теорема 11 (о декомпозиции). *Для любой линейной системы с постоянными коэффициентами* (3.6) *найдётся такое [невырожденное] преобразование координат* $y = Tx$ $T \neq 0$, *что* $y = (y^1, y^2)$, $y^1 \in \mathbb{R}^k$, $y^2 \in \mathbb{R}^{n-k}$, *где* $k = \mathrm{rang}[B|AB|\dots|A^{n-1}B]$, *и система преобразуется к виду*

$$\begin{aligned} \dot{y}^1 &= A_{11}y^1 + A_{12}y^2 + B_1u, \\ \dot{y}^2 &= A_{22}y^2, \end{aligned}$$

причём (A_{11}, B) *— полностью управляема.*

Собственно, это теорема (как следует из названия) о декомпозиции системы на полностью управляемую и неуправляемую части. y^2 «плывёт» сам по себе, а y^1 можно привести куда угодно (даже несмотря на добавку $A_{12}y^2$, ибо система для y^1 полностью управляема).

Мы рассматриваем непрерывную систему с постоянными коэффициентами без свободного члена:

Теорема 12 ((о декомпозиции состояния)). *Существует замена*

$$\begin{aligned} &\exists T \in \mathbb{R}^{n\times n}; y = Tx \\ &y = (y^1; y^2)^T, y^1 \in \mathbb{R}^k, y^2 \in \mathbb{R}^{n-k}, \textit{где} \\ &k = \mathrm{rg}[B|AB|\dots|A^{n-1}B], \end{aligned}$$

обладающая свойством:

$\dot{y} = T\dot{x} = TAT^{-1}y + TBu$

$$TAT^{-1} = \tag{3.9}$$

То есть, систему можно записать в виде

$\dot{y}^1 = A_{11}y^1 + A_{12}y^2 + B_1u$

$$\dot{y}^2 = A_{22}y^2 \tag{3.10}$$

3.4 О декомпозиции состояния нелинейной системы (отступление)

Рассмотрим более общую систему, линейную по управлению.

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g_1(x(t))u_1 + \ldots + g_m(x(t))u_m$$

В линейном случае

$$f(x) = Ax$$
$$g_j(x) = B^j$$

Определение 8. Будем называть *скобкой Ли* двух векторных полей следующее ?поле?:

$$[f_1(\cdot), f_2(\cdot)] = \frac{\partial f_1}{\partial x}f_2 - \frac{\partial f_2}{\partial x}f_1.$$

Если $[f_1, f_2] = 0$, то говорят, что поля f_1 и f_2 коммутируют.

В линейном случае

$$[f, g_j] = AB_j$$
$$[f, [f, g_j]] = A_2B_j$$

и коммутируемость полей равносильна коммутируемости (перестановочности) матриц.

Прикладной смысл скобки Ли:

3.5 Доказательство теоремы о декомпозиции состояний для случая постоянных коэффициентов

Рассмотрим пространство $L = \mathrm{Im}(B|AB|\ldots A^{n-1}B)$. Докажем

Лемма 13. *L инвариантно относительно нашей линейной системы с постоянными коэффициентами ?Ссылка?*

Доказательство. Пусть $x^0 \in L$. Это верно, если x^0 имеет вид

$$x^0 = Bv^0 + ABv^1 + \ldots + A^{n-1}Bv^{n-1} \tag{3.11}$$

Выпишем формулу Коши и разложим матричную экспоненту в ряд.

Из теоремы Гамильтона–Кэли следует, что любую степень матрицы можно представить в виде линейной комбинации

Подставим, соберём коэффициенты и получим, что $x(t)$ также представим в виде (3.11), следовательно $x(t) \in L$, что и означает инвариантность L относительно нашей системы. □

3.6 Достаточное условие управляемости для непрерывных систем с переменными коэффициентами

Важное отличие непрерывных систем с переменными коэффициентами от непрерывных с постоянными коэффициентами и рассмотренных дискретных в том, что в этом случае управляемость может зависеть от рассматриваемого промежутка времени. В то время, как в случае постоянных коэффициентов или дискретном, если система управляема на некотором промежутке, то она управляема и на любом меньшем. Только берите управление побольше.

Рассмотрим однородную систему с переменными коэффициентами

Обозначим

$$L_1 = B(t)$$

$$L_k = A(t)L_{k-1}(t) - \frac{dL_{k-1}}{dt}, k = 2, \ldots, n.$$

Теорема 14 ((достаточное условие управляемости для непр. системы))**.** *Если $\exists \bar{t} \in [t_0, t_1]$ такой, что*

$$\mathrm{rg}[L_1(\bar{t})| \ldots |L_n(\bar{t})] = n,$$

то система полностью управляема на $[t_0, t_1]$ (и больших - ??очевидно??).

Доказательство. Вспомним наш критерий управляемости. □

3.7 Достаточное условие управляемости для непрерывных систем с периодическими коэффициентами

Мы рассматриваем ту же систему но уже когда $A(t)$ и $B(t)$ периодические с периодом T.

Потребуем аналитичности $A(t)$ и $B(t)$.

Теорема 15 ((достаточное условие управляемости для непр. системы с периодич. коэффициентами))**.** *Если*

$$\mathrm{rg}[B(t_0)|X(T,0)B(t_0)|\dots|X^{n-1}(T,0)B(t_0)] = n,$$

то система полностью управляема на ?любом? промежутке времени.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\exists\ l \neq 0$ т.ч. $l^T X(t_1,\tau)B(\tau) = 0$

Посмотрим на это равенство в точках $t_0, t_0 - T, \dots, t_0 - (n-1)T$ $\square$

Глава 4

Задача моментов в $\mathcal{L}_p$ и $\mathcal{L}_\infty$

4.1 Пространство $\mathcal{L}_p, 1 < p < \infty$

Рассмотрим случай $\mathcal{L}_p, \quad 1 < p < \infty$. Рассмотрим задачу:

$$\begin{gathered}
\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \\
x(t_0) = x^0 \longrightarrow x(t_1) = x^1, \\
\|u(\cdot)\|_{\mathcal{L}_p} = \left[\int\limits_{t_0}^{t_1} \|u(\cdot)\|^p \, d\tau \right]^{\frac{1}{p}} \to \inf .
\end{gathered}$$

Ограничение на возможные значения управления: $\|u\|_{\mathcal{L}_p} \leqslant M$.
Задача моментов:

$$\begin{gathered}
c = x^1 - X(t_1, t_0)x^0 - \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1, \tau) f(\tau) d\tau, \\
H(t_1, \tau) = X(t_1, \tau)B(\tau), \\
\int\limits_{t_0}^{t_1} H(t_1, \tau)u(\tau) d\tau = c.
\end{gathered}$$

Введём множество достижимости $\mathcal{X}_\mu[t_1, t_0] = \left\{ \int\limits_{t_0}^{t_1} H(t_1, \tau)u(\tau)d\tau \;\middle|\; \|u\|_{\mathcal{L}_p} \leqslant \mu \right\}$.

Утверждение 16. $\mathcal{X}_\mu \in \operatorname{conv} \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Докажем выпуклость, ограниченность и замкнутость нашего множества:
Выпуклость и *ограниченность*:

$$u = \lambda u^1 + (1 - \lambda) u^2 \Rightarrow \|u\|_{\mathcal{L}_p} \leqslant \lambda \left\|u^1\right\|_{\mathcal{L}_p} + (1 - \lambda) \left\|u^2\right\|_{\mathcal{L}_p} \leqslant \mu;$$

Замкнутость: Аналогично случаю $\mathcal{L}_2$, так как пространство $\mathcal{L}_p, 1 < p < \infty$ рефлексивно (единичный шар представляет из себя слабый компакт). $\square$

Найдём опорную функцию:

$$\rho\left(l \mid \mathcal{X}_\mu[t_1]\right) = \sup_{u(\cdot)} \int_{t_0}^{t_1} \langle l, H(t_1,\tau)u(\tau)\rangle \, d\tau = \sup_{u(\cdot)} \int_{t_0}^{t_1} \left\langle H^T(t_1,\tau)l, u(\tau)\right\rangle d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \{\text{Неравенство Коши–Буняковского для внутренней нормы}\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{u(\cdot)} \int_{t_0}^{t_1} \left\|H^T(t_1,\tau)l\right\| \|u(\tau)\| \, d\tau \leqslant \{\text{Неравенство Гёльдера}\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{u(\cdot)} \left[\int_{t_0}^{t_1} \left\|H^T(t_1,\tau)l\right\|^q d\tau\right]^{1/q} \left[\int_{t_0}^{t_1} \|u(\tau)\|^p \, d\tau\right]^{1/p} \leqslant \mu \left\|H^T(t_1,\cdot)l\right\|_{\mathcal{L}_q},$$

где $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$. Чуть ниже понадобится следующее соотношение, которое легко вывести:

$$q - p = \frac{2p - p^2}{p-1}.$$

Неравенство Коши–Буняковского превращается в равенство ровно в том случае, когда $\|u(\tau)\| = \lambda(\tau)\left\|H^T(t_1,\tau)l\right\|$, где $\lambda(\tau) \neq \text{const}$. Неравенство Гёльдера превращается в равенство ровно в том случае, когда $\|u(\tau)\|^p = \tilde{\lambda}\left\|H^T(t_1,\tau)l\right\|^q, \tilde{\lambda} = \text{const}, \tilde{\lambda} \geqslant 0$, т. е. налицо линейная зависимость двух величин. Осталось выявить зависимость между $\lambda(\tau), \tilde{\lambda}$ и μ (а она должна быть, поскольку все неравенства можно превратить в равенства и наша цель по вычислению опорной функции будет достигнута, т. к. мы получим точную верхнюю грань):

$$\|u(\tau)\| = \lambda(\tau)\left\|H^T(t_1,\tau)l\right\|,$$

$$\|u(\tau)\|^p = \lambda^p(\tau)\left\|H^T(t_1,\tau)l\right\|^p = \tilde{\lambda}\left\|H^T(t_1,\tau)l\right\|^q,$$

$$\lambda^p = \tilde{\lambda}\left\|H^T(t_1,\tau)l\right\|^{q-p} = \tilde{\lambda}\left\|H^T(t_1,\tau)l\right\|^{\frac{2p-p^2}{p-1}},$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \|u(\tau)\|^p \, d\tau = \tilde{\lambda}\int_{t_0}^{t_1} \left\|H^T(t_1,\tau)l\right\|^q d\tau,$$

$$\mu^p = \tilde{\lambda}\left\|H^T(t_1,\cdot)l\right\|^q_{\mathcal{L}_q},$$

$$\lambda^p = \mu^p \left[\frac{\left\|H^T(t_1,\tau)l\right\|}{\left\|H^T(t_1,\cdot)l\right\|_{\mathcal{L}_q}}\right]^{\frac{2p-p^2}{p-1}}.$$

Тогда управление, на котором достигается максимум опорной функции в направлении l вычисляется как

$$u^l(\tau) = \mu \left[\frac{\left\|H^T(t_1,\tau)l\right\|}{\left\|H^T(t_1,\cdot)l\right\|_{\mathcal{L}_q}}\right]^{\frac{2p-p^2}{p-1}} H^T(t_1,\tau)l.$$

Соответствующее значение для опорной функции запишется как

$$\rho\left(l \,|\, \mathcal{X}_\mu[t_1]\right) = \mu \left\| H^T(t_1, \cdot) l \right\|_{\mathcal{L}_q}.$$

$\mathcal{X}_\mu$ — строго выпукло, ибо максимизатор один, правда получается уже не эллипсоид. Аналогично, найдём μ^0:

$$\langle l, c\rangle \leqslant \mu \left\| H^T(t_1, \cdot) l \right\|,$$
$$\mu^0 = \sup_{l \neq 0} \frac{\langle l, c\rangle}{\left\| H^T(t_1, \cdot) l \right\|_{\mathcal{L}_q}} = \sup \left\{ \langle l, c\rangle \;\middle|\; \left\| H^T(t_1, \cdot) l \right\|_{\mathcal{L}_q} = 1 \right\}.$$

Если система вполне управляема, то μ^0 — сопряжённая норма; если нет, то есть условие разрешимости (заметим, что сопряжённая норма в $\mathcal{L}_q$ — это норма в $\mathcal{L}_p$).

Пример 6 (Пример разрешимой системы)**.**

$$A = 0, B = \mathrm{const}, |B| \neq 0; \mu^0 = \left\| B^{-1} c \right\|_{\mathcal{L}_p}.$$

Найдём l^0: $l^0 \in \operatorname{Argmax} \left\{ \langle l, c\rangle \;\middle|\; \left\| H^T l \right\|_{\mathcal{L}_q} = 1 \right\}$. Тогда $u^0(\tau) = u^{l^0}(\tau)$.

4.2 Пространство $\mathcal{L}_\infty$

Философское отступление: в зависимости от значения величины p минимизация нормы управления следующим образом соотносится с физическими характеристиками:

- $p = 1$ — минимизируем топливо (этот случай мы не рассматриваем, потому что пространство $\mathcal{L}_1$ не рефлексивно, и задача может не иметь решения);
- $p = 2$ — минимизируем энергию;
- $p = \infty$ — минимизируем силу.

Займёмся теперь управлением с минимальной силой. Норма в $\mathcal{L}_\infty$ по определению вводится как

$$\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{esssup}_{\tau \in [t_0, t_1]} \|u(\tau)\| = \operatorname*{vraimax}_{\tau \in [t_0, t_1]} \|u(\tau)\| = \inf_{E : \mu(E) = 0} \sup_{[t_0, t_1] \setminus E} \|u(\tau)\|,$$

т. е. существенный супремум (супремум, который вычисляется почти всюду на отрезке).

Введём множество достижимости: $\mathcal{X}_\mu[t_1] = \left\{ \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \right\}$.

Утверждение 17. $\mathcal{X}_\mu[t_1] \in \operatorname{conv} \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Докажем выпуклость, ограниченность и замкнутость множества достижимости:
Выпуклость: Доказывается аналогично случаю $\mathcal{L}_p$;
Ограниченность: Доказывается аналогично случаю $\mathcal{L}_p$;
Замкнутость: Единичный шар в $\mathcal{L}_\infty$, вообще говоря, не является слабо компактным. Рассмотрим последовательность функций u^j:

$$u^j \in \mathcal{L}_\infty, \ \left\|u^j\right\| \leqslant \mu, \ c^j = \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1,\tau)B(\tau)u^j(\tau)d\tau.$$

Тогда $u^j \in \mathcal{L}_2$ и $\|u^j\|_{\mathcal{L}_2} \leqslant \mu|t_1 - t_0|$. В пространстве $\mathcal{L}_2$ со сходимостью всё в порядке: $u^j \xrightarrow[\mathcal{L}_2, j\to\infty]{\text{слабо}} u^0$. По теореме Лебега предел u^0 тоже ограничен: $\|u^0\| \leqslant \mu$. Ещё заметим, что произведение $X(t_1,\tau)B(\tau)$ непрерывно, если функция $B(\tau)$ непрерывна. В итоге:

- $u^0 \in \mathcal{L}_\infty$;
- $c^j \xrightarrow[j\to\infty]{} c = \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1,\tau)B(\tau)u^0(\tau)d\tau.$

□

Найдём опорную функцию множества достижимости (считаем, что внутренняя норма $\|u(\tau)\|$ евклидова):

$$\rho\left(l \,|\, \mathcal{X}_\mu[t_1]\right) = \sup_{u(\cdot)} \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle \underbrace{B^T(\tau)X^T(t_1,\tau)l}_{s(\tau)}, u(\tau) \right\rangle d\tau \overset{\text{К.–Б.}}{\leqslant} \sup_{u(\cdot)} \int\limits_{t_0}^{t_1} \|s(\tau)\| \cdot \|u(\tau)\|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \mu \int\limits_{t_0}^{t_1} \|s(\tau)\|\, d\tau = \mu \left\|s(\cdot)\right\|_{\mathcal{L}_1}.$$

Найдём максимизатор:

$$u^l(\tau) = \lambda(\tau)B^T(\tau)X^T(t_1,\tau)l, \quad \lambda(\tau) \geqslant 0.$$

Хотим показать, что для п. в. $\tau \in \{\, t \,|\, \|s(\tau)\| \neq 0 \,\}$ верно, что $\|u(\tau)\| = \mu$. Предположим противное. Тогда $\exists A \subseteq \{\, t \,|\, \|s(\tau)\| \neq 0 \,\} : \mu(A) \neq 0, \forall \tau \in A \, \|u(\tau)\| \leqslant \mu - \varepsilon$. Разбиваем исходный интеграл на два: на множестве A и на дополнении A. Тогда он на множестве меры $\mu(A)$ больше максимума. Получили противоречие.
Итак, $u^l(\tau) = \mu \dfrac{B^T(\tau)X^T(t_1,\tau)l}{\|B^T(\tau)X^T(t_1,\tau)l\|}$.
В конечном счёте,

$$u^l(\tau) = \begin{cases} \mu\dfrac{s(\tau)}{\|s(\tau)\|}, & s(\tau) \neq 0, \\ \text{любое}, & s(\tau) = 0. \end{cases}$$

Потенциально, максимум может достигаться не в одной точке.
Тогда

$$\mu^0 = \sup_{l \neq 0} \frac{\langle l, c \rangle}{\int\limits_{t_0}^{t_1} \|s(\tau)\| \, d\tau}, \quad l^0 \in \operatorname*{Argmax}_{\text{не } (\|s(\tau)\| \overset{\text{п. в.}}{=} 0)} \frac{\langle l, c \rangle}{\int\limits_{t_0}^{t_1} \|s(\tau)\| \, d\tau}.$$

Необходимое условие оптимальности: $s^0(\tau) = B^T(\tau) X^T(t_1, \tau) l^0$. Если u^* решает задачу, то $\forall \tau : s^0(\tau) \neq 0, u^*(\tau) = \dfrac{s^o(\tau)}{\mu \|s^0(\tau)\|}$ (утверждение в обратную сторону, вообще говоря, неверно). Или же $u^*(\tau) \in \operatorname*{Argmax}_{\|u\| \leqslant \mu} \langle s^0(\tau), u \rangle$, т. е. $\langle s^0(\tau), u^*(\tau) \rangle = \max\limits_{\|u\| \leqslant \mu} \langle s^0(\tau), u \rangle$.

4.3 Принцип максимума Понтрягина

Рассмотрим $\psi(\tau) = X^T(t_1, \tau) l$, рассмотрим сопряжённую систему

$$\begin{cases} \dot{\psi} &= -A^T(t)\psi, \\ \psi(t_1) &= l. \end{cases}$$

Теорема 18 (Принцип максимума Понтрягина, ПМП). *u^* решает нашу задачу $\Rightarrow$ $\exists\, l^0 \neq 0 : \exists\, \psi^0 \not\equiv 0 :$ $\begin{cases} \dot{\psi}^0 &= -A^T \psi, \\ \psi^0(t_1) &= l^0 \end{cases}$ и*

$$\left\langle B^T(\tau)\psi^0(\tau), u^*(\tau) \right\rangle \overset{\textit{п. в.}}{=} \max_{\|u\| \leqslant \mu} \left\langle B^T(\tau)\psi^0(\tau), u \right\rangle.$$

Доказательство. □

Когда можно утверждать, что $s^0(\tau) \neq 0$ всюду?

B, X — хорошие, непрерывные; рассмотрим, когда $s^0(\tau) = B^T(\tau) X^T(t_1, \tau) l^0 = 0$. Если $s^0(\tau) = 0$ при $\tau \in (\tilde{t_0}, \tilde{t_1})$, то наша система не является вполне управляемой на $(\tilde{t_0}, \tilde{t_1})$. Тогда ПМП превращается в достаточное условие путём требования полной управляемости на любом интервале.

Утверждение 19. $A = \mathrm{const}, B = \mathrm{const}$*, пара* (A, B) *— управляема. Тогда u^* решает нашу задачу $\Leftrightarrow \langle s^0(\tau), u^*(\tau) \rangle \overset{\textit{п. в.}}{=} \max\limits_{\|u\| \leqslant \mu} \langle s^0(\tau), u \rangle$.*

Рассмотрим два примера:

Пример 7 (Когда всё плохо (а может, несмотря ни на что, очень даже хорошо))**.**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= u, \\ \dot{x}_2 &= u, \end{cases} \quad |u| \leqslant 1.$$

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$A = E, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача моментов: $\int\limits_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u d\tau = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 2.$$

Скалярно умножим на $l(l_1, l_2)$ и максимизируем: $\max\limits_{u(\cdot)} \int\limits_{t_0}^{t_1} (l_1 + l_2) u(\tau) d\tau = 2\mu(l_1 + l_2)$,

$$\sup_{l_1 + l_2 \neq 0} \frac{l_1 + l_2}{2\,|l_1 + l_2|} = \frac{1}{2} = u.$$

То есть сидим и ждём момента.
Множество достижимости является отрезком.

Пример 8 (А вот здесь уже кажется и плохо бывает, и хорошо)**.**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= u - 1, \\ \dot{x}_2 &= u + 1, \end{cases} \qquad |u| \leqslant 1.$$

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u d\tau = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - (t_1 - t_0) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 + t_0 - t_1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \{t_0 = 0; \text{Тогда при } t_1 \neq 1 \text{ задача неразрешима; далее } t_1 = 1\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

То есть при $t_1 = 1$ задача разрешима.
Если же $x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то $\int\limits_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u d\tau = \begin{pmatrix} t_1 - t_0 \\ 1 + t_0 - t_1 \end{pmatrix}$.

Считаем, что $t_0 = 0$. Система разрешима только при $t_1 = 1 - t_1$, т. е. при $t_1 = \dfrac{1}{2}$. Тогда интеграл равен $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $\mu^0 = \sup \dfrac{\frac{1}{2}(l_1 + l_2)}{\frac{1}{2}\,|l_1 + l_2|}$.

Глава 5

Задача быстродействия

5.1 Постановка задачи

Преступим к изучению следующего типа задач оптимального управления — *задач быстродействия* - задач перевода системы из начального фиксированного положения в конечное, также фиксированное, положение, за минимальное время.

Пусть наша система описывается следующими условиями:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \\ x(t_0) = x^0, \\ x(t_1) = x^1, \\ u(\tau) \in \mathcal{P}(\tau) \in \operatorname{conv} \mathbb{R}^m, \\ t_1 - t_0 \to \inf, \end{cases} \tag{5.1}$$

где x_0, x_1, t_0 - фиксированы, $A(t), B(t), f(t)$ — непрерывны, а $\mathcal{P}$ непрерывно как многозначное отображение (это требование гарантирует нам, что для любого l $\rho(l|\mathcal{P}(\tau))$ по τ непрерывна[1]).

Отметим, что отказ от требования $u(\tau) \in \mathcal{P}(\tau) \in \operatorname{conv} \mathbb{R}^m$ возможен; в этом случае $\overline{\mathcal{X}_{\mathcal{P}}[t_1]} = \mathcal{X}_{\overline{\mathcal{P}}}[t_1]$. Разумность такого отказа показывает следующий

Пример 9. Пусть уравнения (5.1) имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ x(0) = 0, \\ u(\tau) \in [-1, 1]. \end{cases}$$

Тогда множеством достижимости $\mathcal{X}_1$ будет бесконечный треугольник в I и IV координатных четвертях, лежащий внутри прямых $x = t$ и $x = -t$. При этом геометрически ясно, что при замена множества допустимых управлений с отрезка $[-1, 1]$ на

[1] В частности, при $m = 1$ множество $\mathcal{P}$ выглядит как $\mathcal{P} = [a(\tau), b(\tau)]$; непрерывность многозначного отображения означает, что $a(\tau), b(\tau)$ - непрерывны.

двухточечное множество $\{-1, 1\}$ не изменит множества достижимости: любую точку, лежащую внутри $\mathcal{X}_1$, можно соединить с началом координат ломанной, содержащей звенья, параллельные прямым $x = t$ и $x = -t$.

Именно этот прием используется при управлении парусными судами при отсутствии попутного ветра (при этом говорят, что судно *идет галсом*).

Введём множество достижимости

$$\mathcal{X}[t_1] = \mathcal{X}(t_1, t_0, x^0) = \{x = x(t_1, t_0, x^0|u(\cdot)),\ u(\tau) \in \mathcal{P}\}.$$

Введём также *трубку достижимости* как[2] $\mathcal{X}[\cdot]$. Её графиком будем называть множество $\mathcal{X}[\cdot] = \{(t, x) :\ x \in \mathcal{X}[t]\}$.

Ключевую роль играет следующее очевидное

Утверждение 20. *Если $t_1^* - t_0$ — время оптимального взаимодействия, x^*,u^* — соответственно траектория и управления, отвечающие этому времени, то $(t_1^*, x^*(t_1^*)) \in \partial\mathcal{X}[\cdot]$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что если $(t_1^*, x^*(t_1^*)) \notin \partial\mathcal{X}[\cdot]$, то достаточно сместится назад во времени к некоему моменту t_2^*, такому, что $(t_2^*, x^*(t_1^*)) \in \partial\mathcal{X}[\cdot]$ (такая точка существует в силу выпуклости и непрерывности); это приводит к противоречию с тем, что $t_1^* - t_0$ - время оптимального взаимодействия. $\square$

Следующий пример показывает, что в криволинейных координатах это утверждение, вообще говоря, неверно.

Пример 10. Пусть уравнения (5.1) записаны в полярных координатах и имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\rho} = u_1,\ |u_1| \leqslant 1, \\ \dot{\varphi} = u_2,\ |u_2| \leqslant 1, \\ \rho(0) = \rho^0 > 0, \\ \phi(0) = \phi^0. \end{cases}$$

Если бы это были декартовы координаты на плоскости, то трубкой достижимости был бы «распухающий квадрат»$\mathcal{X}[t_1] = \{|x - x^0| \leqslant t_1,\ |y - y^0| \leqslant t_2\}$. В нашем же случае это будет «распухающий кольцевой сектор», и множество достижимости не будет выпуклым. Это приведет к тому, что если финальная точка будет отвечать углу в π, то $(t^*, x^*(t^*)) \notin \partial\mathcal{X}[t_1^*]$.

Введём функцию $\varepsilon[t_1] = d(x^1, \mathcal{X}[t_1])$. Тогда очевидно

Утверждение 21. $t_1^* - t_0$ *- время оптимального взаимодействия* $\Leftrightarrow$ t_1^* *— наименьший корень уравнения* $\varepsilon[t_1] = 0,\ t_1 \geqslant t_0$.

При этом стоит иметь ввиду, что если некое множество Z — компакт, то $x \in Z \ \Leftrightarrow d(x, Z) = 0$.

[2] Следует понимать, что множество достижимости — это множество, а трубка достижимости — это функция, отображающее время на соответствующее множество достижимости.

5.2 Свойства множества достижимости

Утверждение 22. $\mathcal{X}[t_1] \in \operatorname{conv} \mathbb{R}^n$.

Доказательство. 1. Докажем выпуклость. Пусть $\hat{x}_1,\ \hat{x}_2\ \in \mathcal{X}[t_1]$, u^1, u^2 — отвечающие им управления, $u^1, u^2 \in \mathcal{P}$; тогда для $j = 1, 2$ по формуле Коши имеем

$$\hat{x}_j = X(t_1, t_0)x^0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1, \tau)[B(\tau)u^j(\tau) + f(\tau)]d\tau \tag{5.2}$$

Пусть $\hat{x} = \lambda\hat{x}^1 + (1-\lambda)\hat{x}^2,\ u(\tau) = \lambda u^1(\tau) + (1-\lambda)u^2(\tau)$. Домножая первое соотношение в (5.2) на λ, а второе — на $1-\lambda$, и, складывая, получаем, что траектории $\hat{x}$ отвечает управление $u(\tau) \in \mathcal{P}(\tau)$ (ибо $\mathcal{P}(\tau)$ — выпукло), что и означает выпуклость $\mathcal{X}[t_1]$.

2. Докажем ограниченность. Покажем, что существует такое $c > 0$, что $\mathcal{P}(\tau) \subseteq c \cdot B_1(0)$. Так как $\rho(l|\mathcal{P}(\tau))$ непрерывно по τ, то возьмём $c = \max\limits_{||l||=1, \tau\in[t_0,t_1]} \rho(l|\mathcal{P}(\tau))$.

   Тогда для любых l и любых $\tau \in [t_0, t_1]$ в силу положительной однородности опорной функции $\rho(l|\mathcal{P}(\tau)) \leqslant c\,\|l\|$. Тогда в формуле Коши

   $$\hat{x} = X(t_1, t_0)x^0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1, \tau)[B(\tau)u(\tau) + f(\tau)]d\tau$$

   все компоненты в правой части ограничены, что даёт ограниченность и левой части.

3. Докажем замкнутость. Пусть $\hat{x}^j \to \hat{x}$. Надо доказать, что $\hat{x} \in \mathcal{X}[t_1]$. Пусть траекториям $\hat{x}^j$ отвечают управления $u^j(\tau) \in \mathcal{P}(\tau)$. Без ограничения общности считаем, что[3] $u^j \xrightarrow[j\to\infty]{\text{слабо в } L_2} u$.

   Докажем, что $u(\tau) \in \mathcal{P}(\tau)$ для почти всех τ. Для произвольных $l(\tau) \in L_2$ и почти всех τ верно соотношение[4]:

   $$\left\langle l(\tau), u^j(\tau) \right\rangle \leqslant \rho(l(\tau) \mid \mathcal{P}(\tau)).$$

   Проинтегрируем это соотношение от t_0 до t_1:

   $$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle l(\tau), u^j(\tau) \right\rangle\ d\tau \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_1} \rho(l(\tau) \mid \mathcal{P}(\tau))\ d\tau.$$

[3] Т. е., возможно, переходя к подпоследовательностям.

[4] Напоминаем, что если $A \subseteq B$, то $\rho(l|A) \leqslant \rho(l|B)$ для любого l.

Учитывая, что $u^j \xrightarrow[j\to\infty]{\text{слабо в } L_2} u$, получаем:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \langle l(\tau), u(\tau)\rangle \; d\tau \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_1} \rho(l(\tau) \mid \mathcal{P}(\tau)) \; d\tau. \tag{5.3}$$

Итак, предположим противное. Пусть существует подмножество $Z \subseteq [t_0, t_1]$ ненулевой меры, где $u(\tau) \notin \mathcal{P}(\tau)$. Тогда найдутся такие $l(\tau),\ \varepsilon > 0$, что

$$\langle l(\tau), u(\tau)\rangle > \rho(l(\tau) \mid \mathcal{P}(\tau)) + \varepsilon.$$

Заменим значения $u(\tau)$ вне Z на ноль; тогда

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \langle l(\tau), u(\tau)\rangle \; d\tau \geqslant \int\limits_{t_0}^{t_1} \rho(l(\tau) \mid \mathcal{P}(\tau)) \; d\tau - \varepsilon\mu Z,$$

что противоречит (5.3). Значит, $u(\tau) \in \mathcal{P}(\tau)$.

Запишем формулу Коши:

$$\hat{x}^j = X(t_1, t_0)x^0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1, \tau)[B(\tau)u^j(\tau) + f(\tau)]d\tau.$$

Устремляя $j \to \infty$, получаем:

$$\hat{x} = X(t_1, t_0)x^0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1, \tau)[B(\tau)u(\tau) + f(\tau)]d\tau.$$

И, так как $u(\tau) \in \mathcal{P}(\tau)$, то $\hat{x} \in \mathcal{X}[t_1]$, что и означает замкнутость $\mathcal{X}[t_1]$.

□

Найдем опорную функцию множества достижимости:

$$\rho(l \mid \mathcal{X}[t_1]) = \sup_{u(\cdot)} \left[\langle l, X(t_1, t_0)\rangle + \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle B^T(\tau)X^T(t_1, \tau)l, u(\tau)\right\rangle \; d\tau + \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle l, X(t_1, \tau)f(\tau)\rangle \; d\tau \right] =$$

$$\langle l, X(t_1, t_0)\rangle + \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle l, X(t_1, \tau)f(\tau)\rangle \; d\tau + \sup_{u(\cdot)} \left[\int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle B^T(\tau)X^T(t_1, \tau)l, u(\tau)\right\rangle \; d\tau \right]. \tag{5.4}$$

Обозначим для краткости $s(\tau) = B^T(\tau)X^T(t_1, \tau)l$. Для дальнейшего продвижения нам потребуется следующая

Лемма 23. $\sup\limits_{u(\cdot)} \left[\int\limits_{t_0}^{t_1} \langle s(\tau), u(\tau)\rangle \; d\tau \right] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sup\limits_{u \in \mathcal{P}} \langle s(\tau), u\rangle \; d\tau.$

Доказательство. Так как $s(\tau)$ — непрерывная функция, то $\sup\limits_{u\in\mathcal{P}(\tau)} \langle s(\tau), u\rangle = \rho(s(\tau) \mid \mathcal{P}(t))$ непрерывно по τ, и, следовательно, интегрируема.

Рассмотрим $\mathrm{Argmax}_{u(\cdot)\in\mathcal{P}(\tau)} \langle s(\tau), u\rangle = \mathcal{P}^*(\tau)$. Проверим, что это многозначное отображение является измеримым. Для этого докажем его полунепрерывность сверху[5]. Так как полунепрерывность сверху равносильна замкнутости графика $\mathcal{P}^*(\tau)$, то нам надо показать, что из $\tau^j \to \tau$, $u^j \to u$, $u^j \in \mathcal{P}^*(\tau^j)$ следует, что $u \in \mathcal{P}^*(\tau)$. Это равносильно соотношениям

$$\left\langle s(\tau^j), u^j\right\rangle = \rho(s(\tau^j) \mid \mathcal{P}(\tau^j)),$$
$$\left\langle l, u^j\right\rangle \leqslant \rho(l \mid \mathcal{P}^*(\tau^j)),$$

для любого l. Тогда

$$\langle s(\tau), u\rangle = \rho(s(\tau) \mid \mathcal{P}(\tau)),$$
$$\langle l, u\rangle \leqslant \rho(l \mid \mathcal{P}^*(\tau)),$$

что верно, и, стало быть, $u \in \mathcal{P}^*(\tau)$, что и дает нам замкнутость графика, и, следовательно, измеримость.

Воспользуемся *леммой об измеримом селекторе* из курса многозначного анализа: *если многозначное отображение $\mathcal{P}^*$ измеримо, то существует такая измеримая функция (селектор) $u^*(\cdot)$, что $u^*(\tau) \in \mathcal{P}^*(\tau)$ для почти всех τ.*

Для этого селектора $\langle s(\tau), u^*(\tau)\rangle = \rho(s(\tau) \mid \mathcal{P}(\tau))$, интегралы в условии леммы существуют, что влечет достижение точной верхней грани на $u(\tau) \in \mathcal{P}^*(\tau)$, что и требовалось доказать. □

Таким образом, мы можем выписать окончательный вид опорной функции:

$$\rho(l \mid \mathcal{X}[t_1]) = \langle l, X(t_1, t_0)\rangle + \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle l, X(t_1, \tau) f(\tau)\rangle \ d\tau + \int\limits_{t_0}^{t_1} \rho(B^T(\tau) X^T(t_1, \tau) l \mid \mathcal{P}(\tau))\ d\tau.$$

Итак, оптимальное управление доставляет максимум выражению

$$\max_{u\in\mathcal{P}(\tau)} \left\langle B^T(\tau) X^T(t_1, \tau) l, u\right\rangle.$$

Обозначая $\psi(\tau) = X^T(t_1, \tau) l$, получим из (5.4):

$$\rho(l \mid \mathcal{X}[t_1]) = \langle l, \psi(t_0), x_0)\rangle + \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle \psi(\tau), f(\tau)\rangle \ d\tau + \int\limits_{t_0}^{t_1} \rho(B^T(\tau)\psi(\tau) |\ \mathcal{P}(\tau))\ d\tau.$$

При этом $\psi(\tau)$ называют *сопряженной переменной*. Из определения фундаментальной матрицы ясно, что $\psi(\tau)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -A^T(\tau)\psi, \\ \psi(t_1) = l. \end{cases}$$

[5] Ибо, как известно, полунепрерывность есть достаточное условие измеримости.

5.3 Условие максимума

Перейдем теперь непосредственно к решению задачи быстродействия. Выпишем в терминах опорных функций условие $x^1 \in \mathcal{X}[t_1]$:

$$\left\langle l, x^1 \right\rangle \leqslant \rho(l \mid \mathcal{X}[t_1])$$

для любого l, или, в терминах расстояний до множества, $d(x^1, \mathcal{X}[t_1]) = \varepsilon[t_1] = 0$. Фиксируем произвольной число $\hat{\varepsilon}$. Тогда верна следующая цепочка равносильных переходов:

$$d(x^1, \mathcal{X}[t_1]) \leqslant \hat{\varepsilon} \Leftrightarrow x^1 \in \mathcal{X}[t_1] + \hat{\varepsilon} B_1(0) \Leftrightarrow \left\langle l, x^1 \right\rangle \leqslant \rho(l \mid \mathcal{X}[t_1]) + \hat{\varepsilon}\, \|l\|\, .$$

В силу положительной однородности левой и правой части по l, последнее соотношение можно нормировать и записать в виде

$$\sup_{\|l\|=1} \left(\left\langle l, x^1 \right\rangle - \rho(l \mid \mathcal{X}[t_1]) \right) \leqslant \hat{\varepsilon},$$

откуда следует, что $\varepsilon[t_1] = \sup\limits_{\|l\|=1} (\langle l, x^1 \rangle - \rho(l \mid \mathcal{X}[t_1]))$. Таким образом, отсюда время быстродействия t_1^* находится как наименьшей корень уравнения $\varepsilon[t_1^*] = 0$.

Возьмём вектор $l^0 \in \operatorname{Argmax}_{\|l\|=1} (\langle l, x^1 \rangle - \rho(l \mid \mathcal{X}[t_1]))$. Тогда $\langle l^0, x^1 \rangle = \rho(l^0 \mid \mathcal{X}[t_1^*])$, что означает, что x^1 лежит на пересечении опорной гиперплоскости и самого множества. Отсюда $u^*(\tau) = u^{l_0}(\tau)$. Таким образом, мы можем записать необходимое условие максимума:

Если u^* есть управление, доставляющее оптимальное управление, то

$$\left\langle B^T(\tau)\psi(\tau), u^*(\tau) \right\rangle = \max_{u \in \mathcal{P}(\tau)} \left\langle B^T(\tau)\psi(\tau), u \right\rangle . \tag{5.5}$$

Естественно встает вопрос: является ли это условие достаточным? Оказывается, что нет — следующий пример показывает, что условию максимума может удовлетворять вообще любое допустимое управление!

Пример 11. Рассмотрим следующую задачу быстродействия:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u - 1, \\ \dot{x}_2 = u + 1, \\ x^0 = [0, 0]^T, \\ x^1 = [-1, 1]^T, \\ |u(t)| \leqslant 1. \end{cases}$$

В этой задаче, $\mathcal{P}(t) \equiv \mathcal{P} = [-1, 1]$. Найдем опорную функцию для этой задачи:

$$\rho(l \mid \mathcal{X}[t_1]) = \int\limits_0^{t_1} \left\langle l, [-1, 1]^T \right\rangle + \int\limits_0^{t_1} \rho([1, 1]^T l \mid \mathcal{P}(\tau))\, d\tau = t_1(l_2 - l_1) + t_1|l_1 + l_2|.$$

Легко видеть, что это сумма опорных функций одноточечного множества и отрезка. С геометрической точки зрения, множество достижимости есть отрезок, соединяющий на плоскости точки $[-1,-1]^T$ и $[1,1]^T$, который «ползает»по плоскости. Очевидно, что для быстрейшего достижения точки $[-1,1]^T$ надо «ползти»вверх по прямой $y=-x$. Тогда в момент $t^*=1$ мы достигнем финальной точки.

Однако для нахождения оптимального управления нам (формально) надо было бы найти вектор-максимизатор l_0. На эту роль подходят вектора $\frac{1}{\sqrt{2}}[-1,1]^T$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}[1,-1]^T$. Выпишем условие максимума:

$$\left\langle B^T l^0, u^* \right\rangle = \max_{u \in \mathcal{P}} \left\langle B^T l^0, u \right\rangle,$$

которое в нашем случае принимает вид $0=0$.

Хотя приведенный пример показывает редкую для линейных систем ситуацию, стоит поставить вопрос о условиях, позволяющих использовать условие максимума как необходимое и достаточное условие.

5.3.1 Условие нормальности (общности положения)

Рассмотрим частный случай задачи (5.1): пусть A, B — const, а $\mathcal{P}$ — выпуклый многогранник с непустой внутренностью, построенный на точках $u^1, u_2, \ldots, u_M$, причем[6] $u_j \in \partial\mathcal{P},\ j=\overline{1,M}$. Пусть $w = w^{k,l} = u^k - u^l$, где k, l соединены ребром. Потребуем, что бы выполнялось *условие нормальности* (или *условие общности положения*):

Вектора $Bw, ABw, \ldots, A^{n-1}Bw$ линейно независимы.

Отметим, что если $\mathcal{P}$ имеет вид «параллелепипеда», $\mathcal{P} = \left\{ u \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, a_i \leqslant u_i \leqslant b_i,\ i=\overline{1,m} \right\}$, а матрица B состоит из столбцов $b^1, b^2, \ldots, b^m$, то условие нормальности требует линейной независимости векторов $b^i, Ab^i, \ldots, A^{n-1}b^i$ для всех i, что представляет собой в точности условие полной управляемости.

Роль этого условия раскрывает следующая

Теорема 24. *Если выполняется условие нормальности, то условию максимума удовлетворяет единственно управление.*

Доказательство. Покажем, что при $l^0 \neq 0$ существует и при том единственное $u^*(\cdot)$, удовлетворяющее (5.5). Предположим противное, пусть $\hat{u}^1, \hat{u}^2$ удовлетворяют (5.5), и на множестве положительной меры $\hat{u}^1 \neq \hat{u}^2$. Так как $\max\limits_{u \in \mathcal{P}} \left\langle B^T\psi(\tau), u \right\rangle = \rho(B^T\psi(\tau) \mid \mathcal{P})$, то $\left\langle B^T\psi(\tau), \hat{u}^1 - \hat{u}^2 \right\rangle = 0$ для почти всякого τ. Это можно переписать в виде

$$\left\langle B^T e^{-A^T(\tau - t_1)} l^0, w \right\rangle = 0,$$

[6] Т. е. все u_j «существенно»влияют на вид многогранника.

что равносильно условию $l^{0T}e^{A(t_1-\tau)}Bw = 0$ на некотором множестве положительной меры. Дифференцируя это тождество, получаем

$$l^{0T}e^{A(t_1-\tau)}Bw = 0,$$

$$-l^{0T}e^{A(t_1-\tau)}ABw = 0,$$

$$\cdots\cdots$$

$$(-1)^{n-1}l^{0T}e^{A(t_1-\tau)}A^{n-1}Bw = 0.$$

Но, ибо $l^0 \neq 0$, получаем противоречие с условием нормальности.

Покажем теперь, что, если управление u удовлетворяет (5.5), то $u \in \mathcal{P}$ почти всюду. Предположим противное: пусть существует интервал времени, на котором $B^T\psi(\tau)$ ортогонален ребру; но это невозможно: дифференцируя, как в первой части доказательства, соотношение $\left\langle B^T\psi(\tau), w\right\rangle = 0$, мы получим противоречие с условием нормальности. Что и требовалось доказать. □

Замечание 3. На самом деле, мы доказали, что условие нормальности гарантирует строгую выпуклость множества достижимости.

Пример 12. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \ |u_1| \leqslant 1, \\ \dot{x}_2 = u_2, \ |u_2| \leqslant 1. \end{cases}$$

Эта система вполне управляема, но не сильно вполне управляема. Множество достижимости в данном случае — квадрат (т. е. не строго выпуклое). Случай, в котором условие максимума выделяет единственное управление, бывает тогда, когда финальная точка оказывается на углу квадрата (проверьте!).

5.3.2 Условие управляемости при выпуклости множества $\mathcal{P}$

Теорема 25. *Пусть $\mathcal{P}$ строго выпукло и имеет непустую внутренность, и выполнено условие полной управляемости,*

$$\mathrm{rg}[B|AB|\cdots|A^{n-1}B] = n.$$

Тогда условие максимума определяет оптимальное управление единственным образом.

Доказательство. Максимум, очевидно, достигается в единственной точки в силу строгой выпуклости; осталось показать, что он ненулевой, т. е. что $B^T\psi(\tau) \neq 0$ на любом интервале. Предположим противное, пусть $B^T\psi(t) \equiv 0$ для любого[7] t. Дифференцируя это тождество и полагая $t = t_1$, получим противоречие с условием полной управляемости. □

[7] В силу аналитичности.

Глава 6

Задача из множества во множество

6.1 Постановка задачи

Хочется сказать, что множество ω, на котором условие нормальности не выполняется, имеет меру нуль. Рассмотрим иные множества ограничений:

Утверждение 26. *Если $\mathcal{P}$ строго выпукло,* $\operatorname{Int}\mathcal{P} \neq \varnothing$, $\operatorname{rg}[B|AB|\ldots|\,A^{n-1}B] = n$, *то $u^l(\tau)$ выделяется из условия максимума единственным образом.*

Доказательство. Максимум достигается в единственной точке в силу выпуклости. Надо лишь доказать, что $B^T\psi(t) \neq 0$ на любом интервале.

Предположим противное: $B^T\psi(t) \equiv 0, \forall t$, тогда: $l^T e^{A(t_1-t)}B \equiv 0$.

Продифференцируем обе части $(n-1)$ раз:

$$-l^T e^{A(t_1-t)}AB \equiv 0,$$
$$\vdots$$
$$(-1)^{n-1} l^T e^{A(t_1-t)}A^{n-1}B \equiv 0.$$

Положим $t = t_1$, тогда ненулевой вектор ортогонален всем столбцам, получили противоречие с условием полной управляемости. □

Перейдём к задачам оптимального управления при переходе из множества в множество. Расширим понятие множества достижимости:

$$\mathcal{X}[\tau] = \mathcal{X}\left(\tau, t_0, \mathcal{X}^0\right) = \left\{x : \exists\, u(\cdot), \exists\, x^0 \in \mathcal{X} : x = x\left(\tau, t_0, x^0 \mid u(\cdot)\right)\right\}.$$

А также множества разрешимости:

$$\mathcal{W}[\tau] = \mathcal{W}(\tau, t_1, M) = \left\{x : \exists\, u(\cdot), \exists\, x^1 \in M : x = x\left(\tau, t_1, x^1 \mid u(\cdot)\right)\right\} = \\ = \left\{x : \exists\, u(\cdot), x\left(t_1, \tau, x \mid u(\cdot)\right) \in M\right\}.$$

6.2 Вспомогательные утверждения

Задача 4. $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t)$, $x(t_0) = x^0 \in \mathcal{X}^0$, $x(t_1) = x^1 \in \mathcal{X}^1$, где $\mathcal{X}^0, \mathcal{X}^1 \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$. x^0 переходит в x^1;$t_1 - t_0 \to \inf$, t_0 — фиксировано, t_1 — свободно (или наоборот), а x^0, x^1 — свободны (их тоже надо указать). Требуется найти t_1^*:
$t_1^* = \inf\{t \geqslant t_0 : \mathcal{X}(\tau, t_0, \mathcal{X}^0) \cap \mathcal{X}^1 \neq \varnothing\}$

Отметим, что $\mathcal{X}(\tau, t_0, \mathcal{X}^0) \cap \mathcal{X}^1 \neq \varnothing \Leftrightarrow d(\mathcal{X}[\tau], \mathcal{X}^1) = 0$.
$d(z_1, z_2) = \inf\{\|z_1 - z_2\|,\ z_i \in Z_j,\ j = 1, 2\}$.
Введём $\varepsilon[\tau] = d(\mathcal{X}[\tau], \mathcal{X}^1)$.

Теорема 27. *$t_1^* - t_0$ — время оптимального быстродействия $\Leftrightarrow$ t_1^* — наименьший корень $t_1^* \geqslant t_0$ уравнения $\varepsilon(\tau) = 0, x(t_0) = x^0 \in \mathcal{X}^0$.*

Докажем следующее утверждение:

Утверждение 28. $\mathcal{X}[\tau] \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$.

Замечание 4. $\mathcal{X}[\tau]$ — выпуклый компакт, но наиболее существенным является именно то, что он компакт.

Доказательство. Выпуклость доказывается как обычно. *Ограниченность* — из аналогичной теоремы об интеграле. *Замкнутость* — чуть сложнее, надо выбрать подпоследовательность из начальных точек. □

Формула расстояний между компактами:

$$\rho(l \mid Z_1) < -\rho(-l \mid Z_2) \Leftrightarrow \max_{z_1 \in Z_1} \langle l, z_1 \rangle < \min_{z_2 \in Z_2} \langle l, z_2 \rangle, \text{ значит:}$$

$$Z_1 \cap Z_2 = \varnothing, Z_1, Z_2 \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \max_{\|l\|=1} [-\rho(l \mid Z_1) - \rho(-l \mid Z_2)] > 0.$$

Если множество $Z_2 = \{z_2\}$, то:

$$\rho(-l \mid Z_2) = -\langle l, z_2 \rangle.$$

Воспользуемся индикаторными функциями из выпуклого анализа:

$$\delta_{Z_1 \cap Z_2}(z) = \delta_{Z_1}(z) + \delta_{Z_2}(z), \text{ при этом знаем, что } \rho(\cdot \mid z_j) = (\delta_{z_j}(\cdot))^*.$$

Утверждение 29. $d(z, Z) = \sup\limits_{\|l\|=1} [\langle l, z \rangle - \rho(l \mid Z)]$.

Доказательство. Найдём сопряжённую к расстоянию:

$$\sup_Z [\langle l, z \rangle - d(z, Z)] = \sup_Z [\langle l, z \rangle - \inf_{\zeta \in Z} \|z - \zeta\|] = \sup_Z \sup_{\zeta \in Z} [\langle l, z \rangle - \|z - \zeta\|] =$$
$$= \{\text{пусть } z - \zeta = y\} = \sup_{\zeta \in Z} \sup_y [\langle l, z + y \rangle - \|y\|] =$$
$$= \rho(l \mid Z) + \sup_y [\langle l, y \rangle - \|y\|] = \rho(l \mid Z) + \delta(l \mid B_1(0)).$$

По теореме Фенхеля–Моро это действительно расстояние. □

Утверждение 30. $d(z_1, Z_2) = \min\limits_{z_1 \in Z_1} d(z_1, Z_2) = \min\limits_{z_1 \in Z_1} \sup\limits_{\|l\|=1} [\langle l, z_1 \rangle - \rho\,(l \,|\, Z_2)]$.

Для доказательства потребуется следующая теорема:

Теорема 31 (Джон фон Нойманн). *Пусть $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, X, Y — выпуклые компакты, $f(x,\cdot)$ — вогнута, $f(\cdot, y)$ полунепрерывна снизу, $f(x,\cdot)$ полунепрерывна сверху, тогда:*

$$\inf_{x\in X} \sup_{y \in Y} = \sup_{y\in Y} \inf_{x \in X} f(x,y).$$

Оставим эту теорему без доказательства.

$$\varepsilon[\tau] = \sup_{\|l\| \leqslant 1} \left[-\rho\,(l \,|\, \mathcal{X}[\tau]) - \rho\left(-l \,\middle|\, \mathcal{X}^1\right)\right];$$

Найдем опорную функцию:

$$\langle l, x(t) \rangle = \left\langle l, X(t_1, t_0) x^0 \right\rangle + \int\limits_{t_0}^{t} \langle l, X(t,\tau) B(\tau) u(\tau) \rangle \, d\tau + \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle l, X(t,\tau) f(\tau) \rangle \, d\tau;$$

Из предыдущего пункта имеем:

$$\rho\,(l \,|\, \mathcal{X}[t]) = \rho\left(X^T(t, t_0) l \,\middle|\, \mathcal{X}^0\right) + \int\limits_{t_0}^{t} \left\langle X^t(t,\tau) l, f(\tau) \right\rangle d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \rho\left(B^T X^T(t,\tau) l \,\middle|\, \mathcal{P}(\tau)\right) d\tau =$$

$$= \rho\left(\psi(t_0) \,\middle|\, \mathcal{X}^0\right) + \int\limits_{t_0}^{t} \langle \psi(\tau), f(\tau) \rangle \, d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \rho\left(B^T \psi(\tau) \,\middle|\, \mathcal{P}(\tau)\right) d\tau;$$

$$\varepsilon\,[t] = \sup_{\|\psi(t_1)\| \leqslant 1} \left[\rho\left(\psi(t_0) \,\middle|\, \mathcal{X}^0\right) - \int\limits_{t_0}^{t} \rho\left(B^T \psi \,\middle|\, \mathcal{P}\right) d\tau - \rho\left(-\psi(t_1) \,\middle|\, \mathcal{X}^1\right)\right], \text{ где } \psi(\tau) = X^T(t,\tau) l.$$

Допустим, что t_1^* численно найдено. Тогда максимизатор l^* — одно из тех направлений, по которым происходит отделение множеств, поэтому l — нормаль.

6.3 Решение задачи

Покажем, что в задаче в обратном времени те же l^* и там перпендикуляр. Покажем это, честно выписав опорную функцию:

$$\rho\,(l \,|\, W[t]) = \rho\left(l \,\middle|\, W(t, t_2^*, \mathcal{X}^1)\right) = \sup_{x^1, u(\cdot)} \left[\langle l, x\,(t, t_1^*, x_2 \,|\, u\,(\cdot)) \rangle \,| u(\tau) \in \mathcal{P}(\tau), x^1 \in \mathcal{X}^1\right],$$

$$x\left(t, t_1^*, x^1 \,\middle|\, u(\cdot)\right) = X(t, t_1^*) x^1 + \int_{t_1^*}^{t} X(t,\tau) B(\tau) u(\tau) d\tau =$$

$$= X(t_1, t_1^*) x^1 - \int_{t}^{t_1^*} X(t,\tau) B(\tau) u(\tau) d\tau.$$

Подставим это в опорную функцию:

$$\rho\,(l\,|\,W[t]) = \sup_{x^1,u(\cdot)}\left[\left\langle \tilde{l}, X(t,t_1^*)x^1\right\rangle + \int_t^{t_1^*}\left\langle -\tilde{l}, X(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\right\rangle d\tau\right] =$$

$$= \rho\left(X^T(t,t_1^*)\tilde{l}\,\middle|\,\mathcal{X}^1\right) + \int_t^{t_1}\rho\left(-B^TX^T(t,\tau)\tilde{l}\,\middle|\,\mathcal{P}(\tau)\right)d\tau,$$

$$X^T(t,\tau)l = \tilde{\psi}(\tau), \quad \dot{\tilde{\psi}} = -A^T\tilde{\psi}(t) = \tilde{l},$$

$$\ldots = \rho\left(\tilde{\psi}(t_1^*)\,\middle|\,\mathcal{X}^1\right) + \int_t^{t_1}\rho\left(-B^T(\tau)\tilde{\psi}(\tau)\,\middle|\,\mathcal{P}(\tau)\right)d\tau,$$

$$\mathcal{X}^0\cap W[t_0]\neq\varnothing.$$

Итак, у нас было

$$\sup_{\|\psi_1(t)\|=1}\left[-\rho\left(\psi(t_0)\,\middle|\,\mathcal{X}^0\right) - \int_t^{t_1^*}\rho\left(B^T(\tau)\psi(\tau)\,\middle|\,\mathcal{P}(\tau)\right)d\tau - \rho\left(-\psi(t_1)\,\middle|\,\mathcal{X}^1\right)\right] = 0$$

Легко видеть, что

$$[\ldots] = -\rho\left(\psi(t_0)\,\middle|\,\mathcal{X}^0\right) - \rho\left(-\psi(t_0)\,|\,W[t_0]\right)$$

(Положим $\tilde{l} = -l \Rightarrow \tilde{\psi} = -\psi$) Равенство $\sup[\ldots] = 0$ говорит, что $\mathcal{X}^0\cap W[t_0]\neq\varnothing$, т. к. это можно записать как

$$\sup_{\psi(t_0):\left\|X^T(t_0,t_1^*)\psi(t_0)\right\|=1}\left[-\rho\left(\psi(t_0)\,\middle|\,\mathcal{X}^0\right) - \rho\left(-\psi(t_0)\,|\,W[t_0]\right)\right] = 0.$$

И нам без разницы, по чему перебирать, главное, чтобы везде было < 0 и в одной точке $= 0$. Итак, действительно $\mathcal{X}^0\cap W[t_0]\neq\varnothing$; $\psi(t_0)$ — внешняя нормаль к $\mathcal{X}^0$, $-\psi(t_0)$ — внешняя нормаль к $W[t_0]$. Осталось найти оптимальные управление и траекторию; $u^*(\tau)\equiv u^{l^*}(\cdot)$ — управление, доставляющее максимум в опорной функции, что равносильно принципу максимума:

$$\left\langle B^T\psi(\tau), u^*(\tau) = \max_{u\in\mathcal{P}(\tau)}\left\langle B^T\psi(\tau), u\right\rangle\right\rangle$$

почти всюду. Ситуация с необходимыми и достаточными условиями та же, что и в предыдущей задаче. Тогда при достаточности (?) принципа максимума множество сильно выпукло. Польза условия трансверсальности: при гладком начальном множестве ψ однозначно определяется по начальной точке. Оказывается, что задача некорректна: t_1^* не непрерывно зависит от $\mathcal{X}^0$.

Задача 5. Приведите пример, когда время t_1^* разрывно зависит от $\mathcal{X}^0$.

Указание 1. Рассмотрите $\dot{x} = Ax + u$ на $\mathbb{R}^2$.

Глава 7

Линейно–выпуклые задачи

7.1 Постановка задачи (начало)

В этой лекции мы рассмотрим уже нелинейные задачи, в которых, однако, принцип максимума Понтрягина все еще является необходимым и достаточным условием оптимальности.

Итак, рассмотрим задачи вида:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t); \tag{7.1}$$

$$u \in \mathcal{P}; \tag{7.2}$$

$$x(t_0) = x_0; \tag{7.3}$$

$$J(u(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [g(t, x(t)) + h(t, u(t))]dt + \varphi(x(t_1)) \to \inf . \tag{7.4}$$

Здесь t_1 фиксировано, $x(t_1)$ свободно, $g(t, \cdot), h(t, \cdot), \varphi(\cdot)$ — выпуклые функции, A, B - непрерывны, $\mathcal{P}$ — непрерывное многозначное отображение, g непрерывно по (t, x), h непрерывно по (t, u), φ конечна (т. е. непрерывна).

7.2 Решение задачи

По теореме Фенхеля–Моро

$$g(t, x) = \sup_{\lambda(t)} \left[\langle x(t), \lambda(t)\rangle - g^*(t, \lambda(t))\right]; \tag{7.5}$$

$$\varphi(x) = \sup_{l} \left[\langle x, l\rangle - \varphi^*(l)\right]; \tag{7.6}$$

подставим (7.5), (7.6) в выражение для минимизируемого функционала (7.4):

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sup_{\lambda(t)} \left[\langle x(t), \lambda(t)\rangle - g^*(t, \lambda(t)) + h(t, u(t))\right] dt + \sup_{l} \left[\langle x, l\rangle - \varphi(l)\right] =$$

$$= \sup_{\lambda(t), l} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \left[\langle x(t), \lambda(t)\rangle - g^*(t, \lambda(t)) + h(t, u(t))\right] dt + \langle x, l\rangle - \varphi^*(l) \right\}. \quad (7.7)$$

Распишем $x(t)$ по формуле Коши и подставим в (7.7):

$$J = \sup_{\lambda(t), l} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \left[\left\langle X(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^{t} X(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \lambda(t) \right\rangle - g^*(t, \lambda(t)) + h(t, u(t)) \right] dt + \right.$$

$$\left. + \left\langle l, X(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^{t_1} X(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \right\rangle - \varphi^*(l) \right\}. \quad (7.8)$$

Поменяем в (7.8) последовательность интегрирования и перепишем скалярные произведения в виде $\langle x^0, \cdot\rangle$ и $\langle u(t), \cdot\rangle$:

$$J = \sup_{\lambda(t), l} \left\{ \left\langle x^0, X^T(t_1, t_0) + \int_{t_0}^{t_1} X^T(t, t_0)\lambda(t)dt \right\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \left\langle B^T(\tau) \left(X^T(t_1, \tau)l + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \int_{\tau}^{t_1} X^T(t, \tau)\lambda(t)dt \right), u(t) \right\rangle + \int_{t^1}^{t_0} \left(-g^*(t, \lambda) + h(t, u(t))\right) dt - \varphi^*(l) \right\}. \quad (7.9)$$

Введём следующее обозначения:

$$\psi(\tau) = X^T(t_1, \tau)l + \int_{\tau}^{t_1} X^T(t, \tau)\lambda(t)dt;$$

тогда $\psi(t)$ удовлетворяет сопряженной системе

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\psi}(t) & = & -A^T\psi(t) + \lambda(t), \\ \psi(t_1) & = & l. \end{array} \right. \quad (7.10)$$

С учетом этих обозначений получим

$$J = \sup_{\lambda(t), l} \left\{ \left\langle x^0, \psi(t_0) \right\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \left(\left\langle B^T(\tau)\psi(\tau), u(t) \right\rangle - g^*(t, \lambda) + h(t, u(t)) \right) dt - \varphi^*(l) \right\}. \quad (7.11)$$

7.3 Теория минимаксов

Обозначим то, что стоит в фигурных скобках, за Φ, тогда

$$J = \sup_{\lambda(t),l} \Phi, \;\; J^* = \inf_{u(\cdot)} J = \inf_{u(\cdot)} \sup_{\lambda(t),l} \Phi.$$

Функция Φ выпукла по u. Так как функция ψ линейна по l и λ, функция g^* выпукла (значит $-g^*$ вогнута), то Φ вогнута по l, λ.

Теорема 32. *Пусть функция $\Phi(x, y)$ выпукла по x и вогнута по y, тогда*

$$\inf_x \sup_y \Phi(x, y) = \sup_y \inf_x \Phi(x, y).$$

Для нашей задачи получим:

$$J^* = \sup_{\lambda(t),l} \left\{ \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\min_{u \in \mathcal{P}} \left[\left\langle B^T(\tau)\psi(\tau), u(t) \right\rangle + h(t, u(t)) \right] - g^*(t, \lambda) \right) dt + \left\langle x^0, \psi(t_0) \right\rangle - \varphi^*(l) \right\}.$$

Определение 9. (x^0, y^0) называется седловой точкой функции $f(x, y)$, если $f(x^0, y) \leqslant f(x^0, y^0) \leqslant f(x, y^0)$ $\forall x, y$.

Теорема 33. *1. Если $\exists (x^0, y^0)$ - седловая точка, то*

$$\min_x \sup_y f(x, y) = \max_y \inf_x f(x, y) = f(x^0, y^0).$$

2. Если

$$\min_x \sup_y f(x, y) = \max_y \inf_x f(x, y),$$

то $\exists (x^0, y^0)$ — седловая точка, причем

$$x^0 \in \operatorname*{Argmin}_x \sup_y f(x, y), \;\; y^0 \in \operatorname*{Argmax}_y \inf_x f(x, y).$$

7.4 Решение задачи (окончание)

Вернёмся к нашей задаче:

$$J^* = \inf_{u(\cdot)} \sup_{\lambda(\cdot),l} \Phi = \sup_{\lambda(\cdot),l} \inf_{u(\cdot)} \Phi.$$

Пусть sup достигается, пусть $\{\lambda^0(\cdot), l^0\}$ — максимизатор, пусть u^* - оптимальное управление, тогда $(u^*, \{\lambda^0(\cdot), l^0\})$ — седловая точка.

$$\Phi[l, \lambda(\cdot), u^*(\cdot)] \leqslant \Phi[l^0, \lambda^0(\cdot), u^*(\cdot)] \leqslant \Phi[l^0, \lambda^0(\cdot), u(\cdot)];$$

второе неравенство дает нам Принцип Максимума Понтрягина:

$$\left\langle -B^T(t)\psi^0(t), u^*(t)\right\rangle - h(t, u^*(t)) = \max_{u\in\mathcal{P}} \left[\left\langle -B^T(t)\psi^0(t), u(t)\right\rangle - h(t, u(t))\right].$$

Здесь принцип максимума — необходимое условие. Выясним, при каких условиях он будет являться и достаточным. Запишем функцию Φ, интегрируя систему в обратном времени:

$$\Phi[l, \lambda(\cdot), u^*(\cdot)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\langle x^*(t), \lambda(t)\rangle - g^*(t, \lambda(t)) + h(t, u^*(t))\right] dt + \langle l, x^*(t_1)\rangle - \varphi^*(l);$$

здесь $x^*(t)$ — оптимальная траектория.

Пусть

$$l^0 \in \mathrm{Argmax}\left[\langle l, x^*(t_1)\rangle - \varphi^*(l)\right]; \tag{7.12}$$

$$\lambda^0(t) \in \mathrm{Argmax}\left[\langle x^*(t), \lambda(t)\rangle - g^*(t, \lambda(t))\right]. \tag{7.13}$$

Вспомним, что такое субдифференциал:

$$\begin{gathered} v \in \partial\varphi(x^*(t_1)) \\ \Updownarrow \\ \varphi(y) \geqslant \varphi(x^*(t_1)) + \langle v, y - x^*(t_1)\rangle \\ \Updownarrow \\ \langle v, x^*(t_1)\rangle - \varphi(x^*(t_1)) \geqslant \langle v, y\rangle - \varphi(y),\ \forall y \\ \Updownarrow \\ \langle v, x^*(t_1)\rangle - \varphi(x^*(t_1)) \geqslant \varphi^*(v) \\ \Updownarrow \\ \langle v, x^*(t_1)\rangle - \varphi^*(v) \geqslant \varphi(x^(t_1)); \end{gathered}$$

отсюда и из теоремы Фенхеля–Моро для функции φ сразу получаем, что (7.12) $\Leftrightarrow l^0 \in \partial\varphi(x^*(t_1))$. Аналогично, (7.13) $\Leftrightarrow \lambda^0(t) \in \partial g(t, x^*(t))$. То есть, для существования максимизатора $(l^0, \lambda^0(\cdot))$ необходимо и достаточно, чтобы субдифференциалы $\partial\varphi(x^*(t_1))$ и $\partial g(t, x*(t))$ были не пусты.

Если функции φ и g дифференцируемы по x и строго выпуклы, то соответствующие субдифференциалы состоят из единственных точек, и мы получаем условия трансверсальности на правом конце:

$$l^0 = \nabla\varphi(x^*(t_1));$$

$$\lambda^0(t) = \nabla_x g(t, x^*(t)).$$

Эти условия вместе с Принципом Максимума Понтрягина являются критерием оптимальности.