Содержание

1. Введение

Рассмотрим некоторый объект, состояние которого в каждый момент времени описывает набор чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathsf{T}}$; пусть мы можем управлять этим объектом, т. е. выбирать некоторый параметр, так или иначе влияющий на состояние объекта. Пусть поведение объекта описывается некоторыми уравнениями, например:

$$x^{k+1} = f\left(k, x^k, u^k\right), \quad k \in \mathbb{Z},\ u^k \text{ — управление.}$$

Другим примером может служить система дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f\left(t, x(t), u(t)\right), \quad t \in \mathbb{R},\ u(t) \text{ — управление.}$$

Наложим геометрические ограничения на множества допустимых управлений:

$u^k \in \mathcal{P}(k)$ в случае дискретного времени,
$u(t) \in \mathcal{P}(t)$ в случае непрерывного времени.

Рассмотрим функционал качества $J\left(u(\cdot)\right)$, который будет оценивать «качество» выбранного управления по некоторому критерию. Нас в дальнейшем будут интересовать задачи нахождения *оптимального управления*, т. е. такого управления, на котором функционал качества достигает экстремума.

Например, в *задаче Майера–Больца* функционал имеет вид

$$J\left(u(\cdot); t_0, x^0\right) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L\left(t, x(t), u(t)\right)\, dt + \varphi(t_1, x(t_1)). \tag{1.1}$$

В дискретном случае функционал (1.1) принимает вид

$$J\left(\{u_k\}_{k=k_0}^{k_1}; k_0, x^{k_0}\right) = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} L\left(k, x^k, u^k\right) + \varphi(k_1, x^{k_1}).$$

1.1. Сведения из дифференциальных уравнений

1.1.1. Условия существования решений задачи Коши

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \\ x(t_0) = x^0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Как известно, для локального существования и единственности решения этой системы достаточно непрерывности и липшицевости правой части по переменной x. Кроме того, справедлива следующая

Теорема 1.1. *Рассмотрим уравнение*

$$\dot{x} = f(x, t), \tag{1.3}$$

где $f(x,t)$ непрерывна в некоторой области A. Тогда для любой компактной области из A существует решение уравнения (1.3), *доходящее до её границы.*

Замечание. Если управление в правой части (1.2) лишь кусочно-непрерывная функция, то полученное решение лишь кусочно-дифференцируемая функция. В таком случае, задача сначала решается на одном промежутке непрерывности правой части, и значение решения в точке разрыва полагается начальным условием для задачи нахождения решения на примыкающем промежутке непрерывности.

В самом широком случае, когда правая часть (1.2) всего лишь измерима, решение понимается в смысле решения по Каратеодори.

Следующий пример показывает, что в условиях теоремы продолжимость решения невозможна.

Пример 1.1. Решением системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

является функция $x(t) = \frac{1}{1-t}$, которая является разрывной в точке $t = 1$.

Понятно, что единственной причиной непродолжимости может быть уход траекторий решений за конечное время на бесконечность. Чтобы исключить подобные ситуации из рассмотрения потребуем, чтобы $\|x(t)\|$ как функция от t росла не быстрее известной ограниченной функции. Для этого оценим скорость роста $\|x(t)\|^2$:

$$\frac{d}{dt}\left(\|x\|^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\langle x(t), x(t)\rangle\right) = 2\langle x(t), f(t, x(t))\rangle .$$

Для продолжимости решений вправо потребуем, чтобы

$$\langle x, f(t,x)\rangle \leqslant C_1\|x(t)\|^2 + C_2, \quad C_1, C_2 > 0. \tag{1.4}$$

Обозначая $y = y(t) = \|x(t)\|^2$, получаем:

$$\dot{y} \leqslant 2C_1 y + 2C_2 \Longleftrightarrow \dot{y} - 2C_1 y \leqslant 2C_2 \quad \Big| \text{ домножим на } e^{-2C_1 t}:$$

$$\dot{y}e^{-2C_1 t} - 2C_1 y e^{-2C_1 t} \leqslant 2C_2 e^{-2C_1 t},$$

$$\frac{d}{dt}\left(y e^{-2C_1 t}\right) \leqslant 2C_2 e^{-2C_1 t} \quad \Big| \text{ интегрируем от } t_0 \text{ до } t:$$

$$y(t)e^{-2C_1 t} - y(t_0)e^{-2C_1 t_0} \leqslant \tfrac{C_2}{C_1}\left(e^{-2C_1 t_0} - e^{-2C_1 t}\right),$$

$$y(t) = \|x(t)\|^2 \leqslant e^{2C_1 t}\left(\tfrac{C_2}{C_1}\left(e^{-2C_1 t_0} - e^{-2C_1 t}\right) + y(t_0)e^{-2C_1 t_0}\right),$$

что гарантирует продолжимость решения.

Применяя неравенство Коши–Буняковского, условие (1.4) можно усилить:

$$\|f(t,x)\| \leqslant C_3 \|x\| + C_4, \quad C_3, C_4 > 0. \tag{1.5}$$

Условие (1.4) называется *условием продолжимости*, а (1.5) — *условием сублинейного роста*, оно гарантирует продолжимость решений в обе стороны.

1.1.2. Формула Коши векторного дифференциального уравнения

Вернемся к рассмотрению задачи (1.2). Рассмотрим однородное уравнение

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t), \\ x(t_0) = x^0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Определение 1.1. Матрица $X(t,\tau) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется фундаментальной матрицей для уравнения (1.6), если

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X(t,\tau)}{\partial t} = A(t)X(t,\tau), \\ X(\tau,\tau) = E. \end{cases}$$

Пусть вектор-столбцы $x^1, x^2, \ldots, x^n$ — фундаментальная система решений уравнения (1.6), составим из них матрицу $\Phi(t)$. При этом

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A(t)\Phi(t).$$

Несложно показать, что $X(t,\tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$. Поэтому решение задачи Коши (1.6) представимо в виде $x(t) = X(t,t_0)x^0$. Это выражение так же называется *формулой Коши* для однородного уравнения.

Отметим, что для матрицы $X(t,\tau)$ выполнено важное свойство, которым мы будем пользоваться в дальнейшем:

$$X(t+T, \tau+T) = X(t,\tau) \quad \forall\, T \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Далее, рассмотрим неоднородное уравнение

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + f(t), \\ x(t_0) = x^0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Будем искать решения в виде $x(t) = F(t)y(t)$, где $F(t)$ — некоторая матрица. Дифференцируя и подставляя в (1.8), получим:

$$\dot{x} = \dot{F}(t)y(t) + F(t)\dot{y}(t) = A(t)F(t)y(t) + f(t),$$
$$\dot{y} = F^{-1}(t)(A(t)F(t) - \dot{F}(t))y(t) + F^{-1}(t)f(t).$$

Выбирая $F(t) = X(t, t_0)$, мы сводим систему (1.8) к системе

$$\begin{cases} \dot{y} = X^{-1}(t, t_0) f(t), \\ y(t_0) = x^0. \end{cases}$$

Таким образом, мы можем выписать в явном виде ответ:

$$y(t) = x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau, t_0) f(\tau)\, d\tau,$$

$$x(t) = X(t, t_0)x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} X(t, t_0) X^{-1}(\tau, t_0) f(\tau)\, d\tau. \tag{1.9}$$

Отметим, что $X(\tau, t_0)$ отображает x^0 в $x(\tau)$, а $X(t, \tau)$ отображает $x(\tau)$ в $x(t)$. В таком случае $x(t) = X(t, \tau)X(\tau, t_0)x^0$. Но в силу единственности решения верно, что $x(t) = X(t, t_0)x^0$. Из этих двух равенств получаем:

$$X(t, \tau)X(\tau, t_0) = X(t, t_0). \tag{1.10}$$

Соотношение (1.10) называется *полугрупповым свойством* фундаментальной матрицы. В частности, при $t = t_0$, получаем $X(t_0, \tau)X(\tau, t_0) = E$. Полугрупповое свойство позволяет записать соотношение (1.9) в виде

$$x(t) = X(t, t_0)x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} X(t, \tau) f(\tau)\, d\tau,$$

называемом *формулой Коши* для неоднородного уравнения.

Конкретно для задачи (1.2), формула Коши имеет вид

$$x(t) = X(t, t_0)x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} X(t, \tau)B(\tau)u(\tau)\, d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} X(t, \tau) f(\tau)\, d\tau.$$

Зададимся теперь вопросом, как найти $\frac{\partial X(t,\tau)}{\partial \tau}$? Для этого запишем:

$$E = X(t, \tau) \cdot X(\tau, t), \text{ продифференцируем по } \tau:$$

$$0 = \frac{\partial X(t, \tau)}{\partial \tau} X(\tau, t) + X(t, \tau)A(\tau)X(\tau, t), \text{ откуда получаем:}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial X(t,\tau)}{\partial \tau} = -X(t, \tau)A(\tau), \\ X(t, t) = E. \end{cases}$$

Если обозначить $S(t, \tau) = X^T(\tau, t)$, то получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial S(t,\tau)}{\partial t} = -A^T(t)S(t, \tau), \\ S(t, t) = E, \end{cases}$$

если $X(t, \tau)$ — фундаментальная матрица для задачи Коши (1.6), то $S(t, \tau)$ — фундаментальная матрица для задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = -A^T(t)s(t), \\ s(t_0) = s^0. \end{cases} \tag{1.11}$$

Системы (1.6) и (1.11) называются сопряженными.

Задача 1. Пусть задано уравнение

$$\dot{x} = A(t)x(t) + f(t).$$

Какая должна быть матрица F в линейной замене переменных, чтобы уравнение приняло вид

$$\dot{y} = B(t)y(t) + g(t),$$

где $B(t)$ — заданная матрица?

2. Непрерывная задача моментов

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad t \in [t_0, t_1], t_0 < t_1, \\ A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}, B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}, f(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \\ x \in \mathbb{R}^{n\times 1}, u \in \mathbb{R}^{m\times 1}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Будем полагать, что A, B и f — непрерывные функции. Если же они измеримы, то задачу стоит понимать «почти всюду», а решение — решением по Каратеодори. Систему, находящуюся в начальном состоянии, необходимо перевести в конечное состояние при некотором управлении $u(t)$:

$$x(t_0) = x^0 \longrightarrow x(t_1) = x^1. \tag{2.2}$$

Задача не имеет однозначного решения, пока не наложены какие-то условия на управление. Рассмотрим следующие ограничения на функцию управления $u(t)$:

$$\|u\|_{\mathcal{L}_2} = \left(\int\limits_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \to \inf. \tag{2.3}$$

Введем константу $\mu \geqslant 0$ такую, что $\|u\|_{\mathcal{L}_2} \leqslant \mu$. Все последующие выкладки проводятся при фиксированном μ. Однако, встает задача, при каком минимальном значении μ исходная задача (2.1), (2.2) разрешима.

2.2. Решение

Запишем формулу Коши для уравнения (2.1):

$$x^1 = X(t_1, t_0)x^0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau + \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1, \tau)f(\tau)\,d\tau.$$

Данное равенство можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} c = x^1 - X(t_1, t_0)x^0 - \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1, \tau)f(\tau)\,d\tau, \\ H(t, \tau) = X(t, \tau)B(\tau), \\ \int\limits_{t_0}^{t_1} H(t_1, \tau)u(\tau)\,d\tau = c. \end{cases} \tag{2.4}$$

Полученная система уравнений (2.4) называется задачей моментов. Рассмотрим множество достижимости данной задачи:

$$\mathcal{X}^0_\mu(t_1, t_0) = \mathcal{X}^0_\mu[t_1] = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^n \colon \exists\, u(\cdot), \|u\|_{\mathcal{L}_2} \leqslant \mu, \int\limits_{t_0}^{t_1} H(t_1, \tau)u(\tau)\,d\tau = \alpha \right\}. \tag{2.5}$$

Замечание. Если взять $x^0 = 0$, $f \equiv 0$, то $\mathcal{X}^0_\mu(t_1, t_0)$ есть множество концов траекторий системы (2.1) в момент времени t_1.

Требуется найти минимальное положительное значение μ, при котором $c \in \mathcal{X}^0_\mu$. Сформулируем и докажем утверждение относительно введенного множества (2.5).

Утверждение 2.1. $\mathcal{X}^0_\mu \in \operatorname{conv} \mathbb{R}^n$, *где* $\operatorname{conv} \mathbb{R}^n$ *есть множество непустых выпуклых компактов в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Для доказательства исходного утверждения необходимо доказать три свойства: выпуклость, ограниченность и замкнутость.

Выпуклость:

Пусть $c^1, c^2 \in \mathcal{X}^0_\mu$, тогда найдутся соответствующие им допустимые управления $u^1(\cdot)$ и $u^2(\cdot)$ такие, что выполнены равенства

$$c^j = \int\limits_{t_0}^{t_1} H(t_1, \tau)u^j(\tau)\,d\tau. \tag{2.6}$$

Пусть $c = \lambda c^1 + (1-\lambda)c^2$ для некоторого $\lambda \in [0,1]$. Требуется выяснить, принадлежит ли вектор c множеству достижимости $\mathcal{X}_\mu^0$.

Рассмотрим управление $u(t) = \lambda u^1(t) + (1-\lambda)u^2(t)$. В силу линейности по управлению интегральных соотношений (2.6), соответствующее интегральное равенство выполнено также для вектора c. Осталось проверить, что управление $u(t)$ является допустимым, а именно, что выполнено неравенство $\|u\|_{\mathcal{L}_2} \leqslant \mu$:

$$\|u\|_{\mathcal{L}_2} \leqslant \lambda \left\|u^1\right\|_{\mathcal{L}_2} + (1-\lambda) \left\|u^2\right\|_{\mathcal{L}_2} \leqslant \mu.$$

Ограниченность:

Рассмотрим следующую цепочку неравенств:

$$\left\| \int\limits_{t_0}^{t_1} H(t_1,\tau)u(\tau)\,d\tau \right\| \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_1} \|H(t_1,\tau)u(\tau)\|\,d\tau \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_1} \|H(t_1,\tau)\| \cdot \|u(\tau)\|\,d\tau \leqslant$$

по неравенству Коши–Буняковского:

$$\leqslant \left(\int\limits_{t_0}^{t_1} \|H(t_1,\tau)\|^2\,d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|u\|_{\mathcal{L}_2} = \|H(t_1,\cdot)\|_{\mathcal{L}_2} \cdot \|u\|_{\mathcal{L}_2} \leqslant \mu \cdot \|H(t_1,\cdot)\|_{\mathcal{L}_2} \leqslant M,$$

где M — некоторая константа. Таким образом, множество $\mathcal{X}_\mu^0$ лежит в шаре с радиусом M, следовательно, ограничено.

Замкнутость:

Пусть имеется некоторая сходящаяся последовательность $\{c^j\} \in \mathcal{X}_\mu^0$: $c^j \to c$. Требуется доказать замкнутость множества $\mathcal{X}_\mu^0$, то есть доказать принадлежность вектора c данному множеству. Для каждого вектора c^j определено соответствующее ему допустимое управление:

$$c^j = \int\limits_{t_0}^{t_1} H(t_1,\tau)u^j(\tau)\,d\tau.$$

Множество допустимых управлений является шаром в функциональном пространстве $\mathcal{L}_2$, следовательно, не является компактным множеством. Поэтому, управление $u(t)$, соответствующее вектору c, не может являться пределом (по норме) функций $u^j(t)$. Введем понятие слабой сходимости.

Определение 2.1. Последовательность функций $u^j(t)$ называется слабо сходящейся к $u(t)$ в пространстве $\mathcal{L}_2$, если $\forall\, g(t) \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \int\limits_{t_0}^{t_1} g(t)u^j(t)\,dt \to \int\limits_{t_0}^{t_1} g(t)u(t)\,dt$.

Отметим, что множество допустимых управлений является слабым компактом в пространстве $\mathcal{L}_2$. Следовательно, без ограничения общности, будем считать, что последовательность $u^j(t)$ имеет слабый предел $u(t)$. В таком случае получаем:

$$c^j = \int\limits_{t_0}^{t_1} H(t_1, \tau) u^j(\tau)\, d\tau \xrightarrow[j \to \infty]{} \int\limits_{t_0}^{t_1} H(t_1, \tau) u(\tau)\, d\tau = c \in \mathcal{X}_\mu^0.$$

Таким образом, утверждение полностью доказано. $\square$

Найдём опорную функцию множества (2.5):

$$\rho\left(\ell \,\middle|\, \mathcal{X}_\mu^0[t_1]\right) = \sup_{c \in \mathcal{X}_\mu^0[t_1]} \langle \ell, c \rangle = \sup_u \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle \ell, H(t_1, \tau) u(\tau) \rangle \, d\tau =$$

$$= \sup_u \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle H^{\mathsf{T}}(t_1, \tau)\ell, u(\tau) \right\rangle d\tau \leqslant \sup_u \int\limits_{t_0}^{t_1} \|h(\tau)\| \cdot \|u(\tau)\| \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sup_u \left(\left[\int\limits_{t_0}^{t_1} \|h(t_1, \tau)\|^2 \, d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int\limits_{t_0}^{t_1} \|u(\tau)\|^2 \, d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \right) =$$

$$= \sup_u \left(\|h\|_{\mathcal{L}_2} \cdot \|u\|_{\mathcal{L}_2} \right) = \mu \cdot \|h\|_{\mathcal{L}_2},$$

где $h(\tau) = H^{\mathsf{T}}(t_1, \tau)\ell$.

Покажем, что данная верхняя оценка опорной функции достижима при некотором управлении. Зная, при каких условиях в приведенных неравенствах достигаются равенства, получаем вид функции управления:

$$u(t) = \lambda H^{\mathsf{T}}(t_1, t)\ell, \quad \lambda = \mathrm{const} \geqslant 0,$$

при этом константа λ такова, что $\|u\|_{\mathcal{L}_2} = \mu$. Если данная норма ненулевая, то параметр λ определяется однозначно. В таком случае функцию $u(t)$ можно записать в следующем виде:

$$u(t) = u_\ell^*(t) = \mu \frac{H^{\mathsf{T}}(t_1, t)\ell}{\|H^{\mathsf{T}}(t_1, \cdot)\ell\|_{\mathcal{L}_2}}.$$

2.2.1. Исследование разрешимости задачи моментов

Задача моментов (2.4) разрешима тогда и только тогда, когда

$$\forall\, \ell \neq 0 \Rightarrow \langle \ell, c \rangle \leqslant \rho\left(\ell \,\middle|\, \mathcal{X}_\mu^0[t_1]\right) = \mu \, \|h\|_{\mathcal{L}_2}, \tag{2.7}$$

что эквивалентно неравенству

$$\mu \geqslant \frac{\langle \ell, c\rangle}{\|h\|_{\mathcal{L}_2}} \Longleftrightarrow \mu \geqslant \mu^0 = \sup_{\ell \neq 0} \frac{\langle \ell, c\rangle}{\|h\|_{\mathcal{L}_2}}. \tag{2.8}$$

Имея в виду, что данный супремум конечен, распишем $\|h\|_{\mathcal{L}_2}$:

$$\|h\|_{\mathcal{L}_2} = \left[\int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle H^\mathsf{T}\ell, H^\mathsf{T}\ell \right\rangle d\tau\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\left\langle \ell, \left(\int\limits_{t_0}^{t_1} H(t_1,\tau)H^\mathsf{T}(t_1,\tau)\, d\tau\right)\ell \right\rangle\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим через $W(t_1, t_0)$ следующее выражение:

$$W(t_1,t_0) = \int\limits_{t_0}^{t_1} H(t_1,\tau)H^\mathsf{T}(t_1,\tau)\, d\tau.$$

Замечание. Для краткости обозначений, везде далее $W = W(t_1, t_0)$.

В новых обозначениях опорная функция множества (2.5) принимает вид:

$$\rho\left(\ell \,\middle|\, \mathcal{X}_\mu^0\right) = \mu\sqrt{\langle \ell, W\ell\rangle}. \tag{2.9}$$

Следовательно, условие (2.8) можно записать следующим образом:

$$\mu \geqslant \mu^0 = \sup_{\langle \ell, W\ell\rangle \neq 0} \frac{\langle \ell, c\rangle}{\sqrt{\langle \ell, W\ell\rangle}} = \sup_{\langle \ell, W\ell\rangle = 1} \langle \ell, c\rangle \Longleftrightarrow \frac{1}{\mu_0} = \inf_{\langle \ell, c\rangle = 1} \sqrt{\langle \ell, W\ell\rangle}. \tag{2.10}$$

Матрица W называется матрицей управляемости. Рассмотрим различные случаи:

1. $|W| \neq 0$.

   Заметим, что W — матрица Грамма строк матрицы H, а т. к. $|W| \neq 0$, то строки $H(t_1, \cdot)$ линейно независимы.

   Для любого ℓ верно, что $\langle \ell, W\ell\rangle \neq 0$, где $\sqrt{\langle \ell, W\ell\rangle}$ — норма.

   μ_0 — норма от c, сопряженная к $\sqrt{\langle \ell, W\ell\rangle}$, выпишем это явно:

   $$\mu_0 = \sup\left\{\, \langle \ell, c\rangle \,|\, \langle \ell, W\ell\rangle = 1 \,\right\} = \sqrt{\langle c, W^{-1}c\rangle}.$$

   Максимум достигается на $\ell^0 = \frac{W^{-1}c}{\sqrt{\langle c, W^{-1}c\rangle}}$, тогда $h^0(t_1,\tau) = H^\mathsf{T}(t_1,\tau)\ell^0$.

   Используя то, что $\langle \ell^0, W\ell^0\rangle = 1$, найдём управление:

   $$u^0(\tau) = \mu^0 \frac{H^\mathsf{T}(t_1,\tau)\ell^0}{\sqrt{\langle \ell^0, W\ell^0\rangle}} = \sqrt{\langle c, W^{-1}c\rangle} H^\mathsf{T}(t_1,\tau)\frac{W^{-1}c}{\sqrt{\langle c, W^{-1}c\rangle}} = H^\mathsf{T}(t_1,\tau)W^{-1}(t_1,\tau)c.$$

Для задачи моментов $\int\limits_{t_0}^{t_1} H(t_1,\tau)u(\tau)\,d\tau = c$ имеем $\Gamma u = c$, тогда $u = \Gamma^{\mathsf{T}}\ell$ (Γ^{T} — сопряженный оператор), отсюда $\Gamma\Gamma^{\mathsf{T}}\ell = c$.

Множество достижимости для этого случая — невырожденный эллипсоид $\mathcal{X}_\mu$. Это случай полной управляемости, то есть если мы решили задачу для $[a,b]$, то можем решить и на $[c,d] \supset [a,b]$ (просто берём управление на $[c,a]$ и $[b,d]$ как угодно, а на $[a,b]$ уже решаем).

2. $|W| = 0$.

   Задача в этом случае является не всегда разрешимой.

$$\begin{aligned}
&\rho\left(\ell \,\middle|\, \mathcal{X}_\mu^0\right) = \mu\sqrt{\langle \ell, W\ell\rangle},\\
&\ell \in \ker W \iff \rho\left(\ell \,\middle|\, \mathcal{X}_\mu^0\right) = 0,\\
&\langle \ell, c\rangle \leqslant \rho\left(\ell \,\middle|\, \mathcal{X}_\mu^0\right).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

   Тогда, если левая часть неравенства (2.11) положительна, а правая равна нулю, то (2.11) не выполнено, поэтому при любом $\mu \geqslant 0$ вектор $c \notin \mathcal{X}_\mu^0$.

На самом деле, $c \in \mathcal{X}_\mu^0 \iff c \in (\ker W)^\perp$. Если мы покажем, что из соотношения $c \in (\ker W)^\perp$ следует $c \in \mathcal{X}_\mu^0$, то $c \notin (\ker W)^\perp \Leftarrow c \notin \mathcal{X}_\mu^0$.

Если $c \in (\ker W)^\perp$, то $\langle \ell, c\rangle \leqslant \rho\left(\ell \,\middle|\, \mathcal{X}_\mu^0\right)$, надо проверить лишь, что $\ell \in (\ker W)^\perp$ (т. к. $\ell = \ell^1 + \ell^2$, где $\ell \in W$, $\ell^1 \in \ker W$, $\ell^2 \in (\ker W)^\perp$).

$$\begin{aligned}
&\langle \ell, c\rangle = \left\langle \ell^2, c\right\rangle,\\
&\rho\left(\ell \,\middle|\, \mathcal{X}_\mu^0\right) = \mu\sqrt{\langle \ell^1 + \ell^2, W\ell^2\rangle} = \mu\sqrt{\langle \ell^1, W\ell^2\rangle + \langle \ell^2, W\ell^2\rangle} =\\
&\qquad = \mu\sqrt{\langle \ell^2, W\ell^2\rangle} = \rho\left(\ell^2 \,\middle|\, \mathcal{X}_\mu^0\right).
\end{aligned}$$

Теперь находим μ_0:

$$\mu_0 = \sup_{\ell \in (\ker W)^\perp} \frac{\langle \ell, c\rangle}{\sqrt{\langle \ell, W\ell\rangle}} = \sup\left\{\, \langle \ell, c\rangle \,\middle|\, \langle \ell, W\ell\rangle = 1, \ell \in (\ker W)^\perp \,\right\}.$$

2.3. Непрерывная задача оптимального управления

2.3.1. Система с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему

$$\begin{cases}
\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\\
A = \mathrm{const} \in \mathbb{R}^{n\times n},\\
B = \mathrm{const} \in \mathbb{R}^{n\times m}.
\end{cases} \tag{2.12}$$

Для неё наша матрица W имеет вид

$$W(t_1,t_0)=\int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1,\tau)BB^\mathsf{T}X^\mathsf{T}(t_1,\tau)\,d\tau=\int\limits_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}BB^\mathsf{T}e^{A^\mathsf{T}(t_1-\tau)}\,d\tau.$$

Изучим $\operatorname{Ker} W$: т. к. $W=W^\mathsf{T}\geqslant 0$, то

$$\ell\in\operatorname{Ker} W\Leftrightarrow \ell^\mathsf{T}W\ell=0=\int\limits_{t_0}^{t_1}(B^\mathsf{T}e^{A^\mathsf{T}(t_1-\tau)}\ell)^\mathsf{T}B^\mathsf{T}e^{A^\mathsf{T}(t_1-\tau)}\ell\,d\tau=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left\|B^\mathsf{T}e^{A^\mathsf{T}(t_1-\tau)}\ell\right\|\,d\tau\Leftrightarrow \ell^\mathsf{T}e^{A(t_1-\tau)}B\equiv 0.$$

Последнее равенство следует, вообще говоря, понимать как равенство почти всюду, но мы будем считать, что все функции достаточно хорошие, и оно выполняется вообще везде.

Утверждение 2.2. *Система с постоянными коэффициентами* (2.12) *вполне управляема (то есть* $|W|\neq 0$*) тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rg} M=n$*, где* M *— матрица, составленная из матриц* $B, AB, \ldots, A^{n-1}B$*:* $M=[B|AB|\ldots|A^{n-1}B]\in\mathbb{R}^{n\times mn}$.

Доказательство. Докажем достаточность условия полного ранга. Предположим обратное: пусть M — матрица полного ранга, но найдётся ненулевой вектор $\ell\in\operatorname{Ker} W$. Тогда $\ell^\mathsf{T}e^{A(t_1-\tau)}B\equiv 0$. Продифференцируем данное равенство $(n-1)$ раз по τ:

$$-\ell^\mathsf{T}e^{A(t_1-\tau)}AB\equiv 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-1)^{n-1}\ell^\mathsf{T}e^{A(t_1-\tau)}A^{n-1}B\equiv 0.$$

Следовательно, вектор $\ell^\mathsf{T}e^{A(t_1-\tau)}$ ортогонален $B, AB, \ldots, A^{n-1}B$, что противоречит условию полного ранга.

Докажем необходимость условия полного ранга. Предположим обратное: пусть $|W|\neq 0$ и $\operatorname{rg} M<n$. Тогда найдётся вектор $\ell\neq 0$ такой, что $\ell^\mathsf{T}\,[B|AB|\ldots|A^{n-1}B]=0$. Рассмотрим представление матричной экспоненты в виде ряда:

$$e^{A(t_1-\tau)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k(t_1-\tau)^k}{k!}.$$

Из теоремы Гамильтона–Кэли следует, что любая степень матрицы является линейной комбинацией её первых $(n-1)$ степеней. Следовательно, данная матричная экспонента тождественно равна нулю, что противоречит условию вырожденности ядра оператора W. $\square$

Определение 2.2. Пара матриц $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ называется *полностью управляемой*, если $\mathrm{rg}[B|AB|\ldots|A^{n-1}B] = n$.

Пример 2.1. Рассмотрим математический маятник, задаваемый уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2 x = u,$$

где x — координата маятника, u — управление.

Выясним, управляема ли данная система. Введем следующие обозначения: $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$. В таком случае исходное уравнение записывается в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 + u. \end{cases} \tag{2.13}$$

В матричном виде (2.12) система такова:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [B|AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, данная система управляема, что согласуется с бытовыми представлениями — с помощью сколь угодно большой силы можно перевести маятник в любое положение и придать ему любую скорость за сколь угодно малое время.

Лемма 2.1. *Пусть* $L = \mathrm{Im}\,([B|AB|\ldots|A^{n-1}B])$. *Тогда* L *инвариантно относительно системы* (2.12)*, то есть выполнено следующее соотношение:*

$$\forall\, x^0 \in L \Rightarrow x(t) \in L \quad \forall\, t, \forall\, u(\cdot).$$

Доказательство. Рассмотрим любой вектор h, ортогональный L. Так как $h \in L^{\perp}$, то $\langle x^0, h\rangle = 0$. Запишем формулу Коши, затем домножим обе части равенство скалярно на h:

$$x(t) = X(t,t_0)x^0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t,\tau)Bu(\tau)\,d\tau = e^{A(t-t_0)}x^0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau,$$

$$\langle x(t), h\rangle = \left\langle e^{A(t-t_0)}x^0, h\right\rangle + \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle e^{A(t-\tau)}Bu(\tau), h\right\rangle\,d\tau,$$

представим матричную экспоненту в виде ряда, затем скалярно умножим на h:

$$e^{A(t-t_0)} = E + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k(t-t_0)^k}{k!},$$

$$\left\langle e^{A(t-t_0)}x^0, h\right\rangle = \underbrace{\langle x^0, h\rangle}_{0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle \frac{A^k(t-t_0)^k}{k!}x^0, h \right\rangle.$$

Так как $x^0 \in L$, то, по теорема Гамильтона–Кэли, $A^k x^0 \in L$ при любом неотрицательном k. Следовательно, скалярное произведение $x(t)$ и h равно нулю, что влечет инвариантность L. $\square$

Теорема 2.1 (О декомпозиции)**.** *Пусть* $\operatorname{rg}[B|AB|\ldots|A^{n-1}B] = r$*. Тогда существует невырожденная матрица* $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *такая, что при замене* $y = Tx$ *система* (2.12) *перейдет в систему*

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + B_1 u, \\ \dot{y}_2 = A_{22}y_2, \\ A_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}, A_{12} \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}, A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}, B_1 \in \mathbb{R}^{r\times m}, \\ \operatorname{rg}\left[B_1|A_{11}B_1|\ldots|A_{11}^{r-1}B_1\right] = r, \end{cases}$$

где вектор-столбец y *составлен из* y_1 *и* y_2*.*

Замечание. Отметим, что пара матриц A_{11} и B_1 является полностью управляемой. Вообще, данная теорема говорит о том, что исходную систему можно представить в виде совокупности управляемой и неуправляемой частей.

Доказательство. Рассмотрим пространство L из леммы, приведенной выше. Размерность L равна r. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_r$ — базис в L. Дополним его векторами $e_{r+1}, \ldots, e_n$ до базиса $\mathbb{R}^n$. В качестве T^{-1} возьмем матрицу, составленную из векторов-столбцов e_k. Покажем, что выполнены следующие равенства:

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \Theta & A_{22} \end{pmatrix}, \quad TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ \Theta \end{pmatrix},$$

нулевые матрицы Θ имеют соответствующие размерности. □

2.3.2. Система с переменными коэффициентами

Важное отличие непрерывных систем с переменными коэффициентами от непрерывных систем с постоянными коэффициентами в том, что в этом случае управляемость может зависеть от рассматриваемого промежутка времени. В то время как в случае постоянных коэффициентов, если система управляема на некотором промежутке, то она управляема и на любом меньшем.

Рассмотрим однородную систему с переменными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}, B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}. \end{cases} \tag{2.14}$$

Согласно полученному ранее результату, система (2.14) является вполне управляемой тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$|W| \neq 0 \Leftrightarrow \forall\, \ell \neq 0 \Rightarrow H^{\mathsf{T}}(t_1,\tau)\ell \neq 0 \Leftrightarrow \forall\, \ell \neq 0 \Rightarrow \ell^{\mathsf{T}} X(t_1,\tau)B(\tau) \neq 0.$$

Теорема 2.2. *Пусть $t^* \in [t_0; t_1]$, матрицы $A(t)$ и $B(t)$ дифференцируемы $(n-1)$ раз в окрестности t^*. Рассмотрим следующий набор матриц:*

$$\begin{cases} L_1(t) = B(t), \\ L_k(t) = A(t)L_{k-1}(t) - \frac{dL_{k-1}(t)}{dt}, k = 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Если $\operatorname{rg}[L_1(t^*)|L_2(t^*)|\ldots|L_n(t^*)] = n$, *то система* (2.14) *вполне управляема.*

Замечание. Если матрицы $A(t)$ и $B(t)$ не зависят от времени, то $L_k = A^{k-1}B$.

Доказательство. Предположим обратное: существует такой ненулевой вектор ℓ, что

$$\ell^{\mathsf{T}} X(t_1,\tau)B(\tau) = \ell^{\mathsf{T}} X(t_1,\tau)L_1(\tau) \equiv 0.$$

Продифференцируем данное равенство по τ, учитывая, что $\frac{\partial X(t_1,\tau)}{\partial \tau} = -X(t_1,\tau)A(\tau)$:

$$-\ell^{\mathsf{T}} X(t_1,\tau)A(\tau)B(\tau) + \ell^{\mathsf{T}} X(t_1,\tau)\frac{\partial B(\tau)}{\partial \tau} \equiv 0 \Leftrightarrow -\ell^{\mathsf{T}} X(t_1,\tau)L_2(\tau) \equiv 0.$$

Используя метод математической индукции, получаем, что $\ell^{\mathsf{T}} X(t_1,\tau)L_n(\tau) \equiv 0$ в окрестности точки t^*. Вектор $\widetilde{\ell} = X^{\mathsf{T}}(t_1,\tau)\ell$ при $\tau = t^*$ ортогонален всем $L_1, \ldots, L_n$, что противоречит условию полного ранга. ☐

2.3.3. Система с периодическими коэффициентами

Рассмотрим систему (2.14) (для простоты считаем $t_0 = 0$) с условием периодичности:

$$\exists T > 0\colon A(t+T) = A(t), B(t+T) = B(t) \quad \forall t. \tag{2.15}$$

Теорема 2.3. *Пусть выполнено условие* (2.15). *Пусть дополнительно $A(t)$ и $B(t)$ являются аналитическими функциями по t, то есть в окрестности каждой точки представляются в виде сходящегося ряда Тейлора. Тогда, если*

$$\operatorname{rg}\left[B(0)|X(T,0)B(0)|\ldots|X^{n-1}(T,0)B(0)\right] = n,$$

то система вполне управляема на любом промежутке времени.

Доказательство. Предположим обратное: существует такой ненулевой вектор ℓ, что

$$\ell^{\mathsf{T}} X(t_1,\tau)B(\tau) \equiv 0, \tau \in [0; t_1] \Rightarrow \ell^{\mathsf{T}} X(t_1,\tau)B(\tau) \equiv 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим следующие значения по времени: $t_1 = T$, $\tau = -kT$, где $k = 0, 1, \ldots$, в таком случае

$$X(T,-kT) = X^{k+1}(T,0),$$
$$0 = \ell^{\mathsf{T}} X(T,-kT)B(-kT) = \ell^{\mathsf{T}} X^{k+1}(T,0)B(0),$$

что противоречит условию полного ранга. ☐

3. Задача моментов в $\mathcal{L}_p$ и $\mathcal{L}_\infty$

Рассмотрим следующую задачу:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t),$$
$$x(t_0) = x^0 \longrightarrow x(t_1) = x^1,$$

где t_0, t_1, x^0, x^1 — фиксированные константы.

В предыдущей главе рассматривалось ограничение на управление по норме в пространстве $\mathcal{L}_2[t_0; t_1]$, задаваемое соотношением (2.3). Однако, минимизирование данного функционала не имеет особого физического смысла. В данной главе будут рассмотрены другие ограничения на управление.

Определение 3.1. Существенным супремумом функции $f(t)$ на множестве T называется следующее выражение:

$$\operatorname*{esssup}_T f = \left\{ \inf_{Z \subseteq T} \sup_{t \in T \setminus Z} f(t) \,\middle|\, \mu(Z) = 0 \right\}, \quad \mu(\cdot) \text{ — мера Лебега на множестве } T.$$

Замечание. Для непрерывных функций выполнено равенство $\sup f = \operatorname{esssup} f$.

Например, вместо функционала (2.3) в некоторых задачах имеет смысл рассматривать следующее ограничение на управление:

$$\operatorname*{esssup}_{[t_0;t_1]} |u| \to \inf. \tag{3.1}$$

В данной главе будут рассмотрены другие два функционала, один из которых задается соотношением (3.1). Везде далее будем рассматривать функциональные пространства на отрезке $[t_0; t_1]$, отождествляя функции, имеющие различия на множестве меры 0.

3.1. Пространство $\mathcal{L}_p$, $1 < p < \infty$

Для начала рассмотрим функциональное пространство $\mathcal{L}_p$ при $p > 1$ и $p < \infty$. Норма (в случае отождествления функций с точностью до меры 0) функции f в данном пространстве задается следующим образом:

$$\|f\|_{\mathcal{L}_p} = \left(\int_{t_0}^{t_1} \|f(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.2}$$

Ограничение на управление введем аналогично задаче в пространстве $\mathcal{L}_2$: $\|u\|_{\mathcal{L}_p} \leqslant \mu$.

Аналогично задаче моментов (2.4), получаем задачу моментов в данном случае. Введем множество достижимости для данного случая:

$$\mathcal{X}_\mu^0(t_1, t_0) = \mathcal{X}_\mu^0[t_1] = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^n \colon \exists\, u(\cdot), \|u\|_{\mathcal{L}_p} \leqslant \mu, \int\limits_{t_0}^{t_1} H(t_1, \tau) u(\tau)\, d\tau = \alpha \right\}. \tag{3.3}$$

Сформулируем и докажем утверждение относительно множества достижимости.

Утверждение 3.1. $\mathcal{X}_\mu^0 \in \operatorname{conv} \mathbb{R}^n$, *где* $\operatorname{conv} \mathbb{R}^n$ *есть множество непустых выпуклых компактов в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Для доказательства исходного утверждения необходимо доказать три свойства: выпуклость, ограниченность и замкнутость.

Все три свойства доказываются аналогично случаю пространства $\mathcal{L}_2$. Отметим, что в силу рефлексивности пространства $\mathcal{L}_p$, единичный ша является слабым компактом, откуда следует замкнутость введенного множества $\mathcal{X}_\mu^0$. □

Найдём опорную функцию множества $\mathcal{X}_\mu^0$:

$$\rho\left(\ell \,\middle|\, \mathcal{X}_\mu^0[t_1]\right) = \sup_{c \in \mathcal{X}_\mu^0[t_1]} \langle \ell, c \rangle = \sup_u \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle \ell, H(t_1, \tau) u(\tau) \rangle\, d\tau =$$

$$= \sup_u \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle H^\mathsf{T}(t_1, \tau)\ell, u(\tau) \right\rangle d\tau \leqslant \sup_u \int\limits_{t_0}^{t_1} \|h(\tau)\| \cdot \|u(\tau)\|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sup_u \left(\left[\int\limits_{t_0}^{t_1} \|h(t_1, \tau)\|^q\, d\tau \right]^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\int\limits_{t_0}^{t_1} \|u(\tau)\|^p\, d\tau \right]^{\frac{1}{p}} \right) =$$

$$= \sup_u \left(\|h\|_{\mathcal{L}_q} \cdot \|u\|_{\mathcal{L}_p} \right) = \mu \cdot \|h\|_{\mathcal{L}_q},$$

где $h(\tau) = H^\mathsf{T}(t_1, \tau)\ell$, значение q определяется из соотношения $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Замечание. При вычислении опорной функции были использованы неравенства Гёльдера и Коши–Буняковского.

Используя условия, при которых в промежуточных неравенствах достигаются равенства, получаем функцию $u_\ell^*(t)$, реализующую супремум:

$$u_\ell^*(t) = \mu \frac{H^\mathsf{T}(t_1, t)\ell}{\|H^\mathsf{T}(t_1, \cdot)\ell\|_{\mathcal{L}_p}^{\frac{q}{p}}} \cdot \left\| H^\mathsf{T}(t_1, t)\ell \right\|^{\frac{q-p}{p}}.$$

Отметим, что множество $\mathcal{X}_\mu^0$ строго выпукло, так как максимизатор $u_\ell^*(t)$ единственный, правда, данное множество не является эллипсоидом, в отличие от случая пространства $\mathcal{L}_2$.

Минимальное значение параметра μ, при котором задача моментов разрешима, находится аналогично случаю пространства $\mathcal{L}_2$:

$$\langle \ell, c\rangle \leqslant \mu \left\|H^{\mathsf{T}}(t_1,\cdot)\ell\right\|_{\mathcal{L}_q},$$

$$\mu^0 = \sup_{\ell\neq 0} \frac{\langle \ell, c\rangle}{\left\|H^{\mathsf{T}}(t_1,\cdot)\ell\right\|_{\mathcal{L}_q}} = \sup\left\{\langle \ell, c\rangle \,\middle|\, \left\|H^{\mathsf{T}}(t_1,\cdot)\ell\right\|_{\mathcal{L}_q} = 1\right\}.$$

Если система вполне управляема, то μ^0 — сопряжённая норма; если нет, то есть условие разрешимости (заметим, что сопряжённая норма в $\mathcal{L}_q$ — это норма в $\mathcal{L}_p$).

Пример 3.1 (Пример разрешимой системы)**.**

$$A = 0, B = \mathrm{const}, |B| \neq 0; \mu^0 = \left\|B^{-1}c\right\|_{\mathcal{L}_p}.$$

Найдём ℓ^0 такое, что $\ell^0 \in \operatorname{Argmax}\left\{\langle \ell, c\rangle \,\middle|\, \left\|H^{\mathsf{T}}\ell\right\|_{\mathcal{L}_q} = 1\right\}$. Тогда $u^0(\tau) = u^{\ell^0}(\tau)$.

3.2. Пространство $\mathcal{L}_\infty$

В зависимости от значения величины p, минимизация нормы управления следующим образом соотносится с физическими характеристиками:

- $p = 1$ — минимизируется топливо (данный случай не рассматривается в курсе, потому что пространство $\mathcal{L}_1$ не рефлексивно, следовательно, задача может не иметь решения).
- $p = 2$ — минимизируется энергия.
- $p = \infty$ — минимизируется сила.

В данном разделе рассматривается последний случай. Норма в пространстве $\mathcal{L}_\infty$ определяется следующим образом:

$$\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} = \operatorname*{esssup}_{[t_0;t_1]} |u|.$$

По аналогии с введенными ранее множествами, рассмотрим множество достижимости $\mathcal{X}_\mu^0$ для данного случая:

$$\mathcal{X}_\mu^0(t_1,t_0) = \mathcal{X}_\mu^0[t_1] = \left\{\alpha \in \mathbb{R}^n \colon \exists\, u(\cdot), \|u\|_{\mathcal{L}_\infty} \leqslant \mu, \int\limits_{t_0}^{t_1} H(t_1,\tau)u(\tau)\,d\tau = \alpha\right\}. \tag{3.4}$$

Сформулируем и докажем утверждение относительно множества достижимости.

Утверждение 3.2. $\mathcal{X}_\mu^0 \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$, *где* $\operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ *есть множество непустых выпуклых компактов в* $\mathbb{R}^n$*.*

Доказательство. Для доказательства исходного утверждения необходимо доказать три свойства: выпуклость, ограниченность и замкнутость.

Выпуклость: Доказывается аналогично случаю $\mathcal{L}_p$.

Ограниченность: Доказывается аналогично случаю $\mathcal{L}_p$.

Замкнутость: Единичный шар в $\mathcal{L}_\infty$, вообще говоря, не является слабо компактным. Рассмотрим последовательность функций u^j:

$$u^j \in \mathcal{L}_\infty, \quad \left\|u^j\right\| \leqslant \mu, \quad c^j = \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1,\tau)B(\tau)u^j(\tau)\,d\tau.$$

Тогда $u^j \in \mathcal{L}_2$ и $\|u^j\|_{\mathcal{L}_2} \leqslant \mu\,|t_1 - t_0|$. В пространстве $\mathcal{L}_2$ последовательность u^j имеет слабый предел: $u^j \xrightarrow[\mathcal{L}_2, j\to\infty]{\text{слабо}} u^0$. По теореме Лебега предел u^0 тоже ограничен: $\|u^0\| \leqslant \mu$. Ещё заметим, что произведение $X(t_1,\tau)B(\tau)$ непрерывно, если функция $B(\tau)$ непрерывна. В итоге:

$$u^0 \in \mathcal{L}_\infty, \quad c^j \xrightarrow[j\to\infty]{} c = \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1,\tau)B(\tau)u^0(\tau)\,d\tau.$$

Таким образом, утверждение полностью доказано. $\square$

Найдём опорную функцию множества достижимости (считаем, что внутренняя норма $\|u(\tau)\|$ евклидова):

$$\rho\left(\ell \,\middle|\, \mathcal{X}^0_\mu[t_1]\right) = \sup_u \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle \underbrace{B^\mathsf{T}(\tau)X^\mathsf{T}(t_1,\tau)\ell}_{s(\tau)}, u(\tau) \right\rangle d\tau \overset{\text{К.–Б.}}{\leqslant} \sup_u \int\limits_{t_0}^{t_1} \|s(\tau)\|\cdot\|u(\tau)\|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \mu \int\limits_{t_0}^{t_1} \|s(\tau)\|\,d\tau = \mu\,\|s(\cdot)\|_{\mathcal{L}_1}.$$

Найдём максимизатор:

$$u^\ell(\tau) = \lambda(\tau)B^\mathsf{T}(\tau)X^\mathsf{T}(t_1,\tau)\ell, \quad \lambda(\tau) \geqslant 0.$$

Хотим показать, что для п. в. $\tau \in \{\,t \mid \|s(t)\| \neq 0\,\}$ верно, что $\|u(\tau)\| = \mu$. Предположим обратное. Тогда $\exists\, A \subseteq \{\,t \mid \|s(t)\| \neq 0\,\} : \mu(A) \neq 0, \forall\, \tau \in A\, \|u(\tau)\| \leqslant \mu - \varepsilon$. Разбиваем исходный интеграл на два: на множестве A и на дополнении A. Тогда он на множестве меры $\mu(A)$ больше максимума. Получили противоречие.

Итак, $u^\ell(\tau) = \mu \dfrac{B^\mathsf{T}(\tau)X^\mathsf{T}(t_1,\tau)\ell}{\|B^\mathsf{T}(\tau)X^\mathsf{T}(t_1,\tau)\ell\|}$.

В конечном счёте,

$$u^\ell(\tau) = \begin{cases} \mu\dfrac{s(\tau)}{\|s(\tau)\|}, & s(\tau) \neq 0, \\ \text{любое}, & s(\tau) = 0. \end{cases}$$

Потенциально, максимум может достигаться не в одной точке.
Тогда

$$\mu^0 = \sup_{\ell\neq 0} \frac{\langle \ell, c\rangle}{\int\limits_{t_0}^{t_1} \|s(\tau)\|\, d\tau}, \quad \ell^0 \in \underset{\text{не } (\|s(\tau)\| \overset{\text{п. в.}}{=} 0)}{\operatorname{Argmax}} \frac{\langle l, c\rangle}{\int\limits_{t_0}^{t_1} \|s(\tau)\|\, d\tau}. \tag{3.5}$$

Необходимое условие оптимальности: $s^0(\tau) = B^\mathsf{T}(\tau)X^\mathsf{T}(t_1,\tau)\ell^0$. Если u^* решает задачу, то $\forall\, \tau\colon s^0(\tau) \neq 0, u^*(\tau) = \dfrac{s^0(\tau)}{\mu\,\|s^0(\tau)\|}$ (утверждение в обратную сторону, вообще говоря, неверно). Или же $u^*(\tau) \in \underset{\|u\|\leqslant\mu}{\operatorname{Argmax}}\, \langle s^0(\tau), u\rangle$, т. е. $\langle s^0(\tau), u^*(\tau)\rangle = \max\limits_{\|u\|\leqslant\mu} \langle s^0(\tau), u\rangle$.

3.3. Принцип максимума Понтрягина

Рассмотрим $\psi(\tau) = X^\mathsf{T}(t_1,\tau)\ell$, рассмотрим сопряжённую систему:

$$\begin{cases} \dot\psi = -A^\mathsf{T}(t)\psi, \\ \psi(t_1) = \ell. \end{cases}$$

Теорема 3.1 (Принцип максимума Понтрягина)**.** *Если u^* решает нашу задачу, то найдется ненулевой вектор ℓ^0 и функция $\psi^0 \not\equiv 0$, что:*

$$\begin{cases} \dot\psi^0 = -A^\mathsf{T}\psi^0, \\ \psi^0(t_1) = \ell^0, \end{cases}$$

и

$$\left\langle B^\mathsf{T}(\tau)\psi^0(\tau), u^*(\tau)\right\rangle \overset{\text{п. в.}}{=} \max_{\|u\|\leqslant\mu} \left\langle B^\mathsf{T}(\tau)\psi^0(\tau), u\right\rangle.$$

Когда можно утверждать, что $s^0(\tau) \neq 0$ всюду?

B, X — хорошие, непрерывные; рассмотрим, когда $s^0(\tau) = B^\mathsf{T}(\tau)X^\mathsf{T}(t_1,\tau)\ell^0 = 0$. Если $s^0(\tau) = 0$ при $\tau \in \left(\tilde t_0, \tilde t_1\right)$, то наша система не является вполне управляемой на $\left(\tilde t_0, \tilde t_1\right)$. Тогда ПМП превращается в достаточное условие путём требования полной управляемости на любом интервале.

Утверждение 3.3. *Пусть матрицы A и B не зависят от времени, пара (A,B) — управляема. В таком случае u^* решает нашу задачу тогда и только тогда, когда $\langle s^0(\tau), u^*(\tau)\rangle \overset{\text{п. в.}}{=} \max\limits_{\|u\|\leqslant\mu} \langle s^0(\tau), u\rangle$.*

Рассмотрим два примера:

Пример 3.2 (Когда всё плохо (а может, несмотря ни на что, очень даже хорошо))**.**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \qquad |u| \leqslant 1.$$

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = E, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задача моментов для данной системы: $\int\limits_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(\tau)\, d\tau = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t_0 = 0, t_1 = 2.$

Скалярно умножим на $\ell(\ell_1, \ell_2)$ и максимизируем:

$$\max_{u(\cdot)} \int\limits_{t_0}^{t_1} (\ell_1 + \ell_2) u(\tau)\, d\tau = 2\mu(\ell_1 + \ell_2),$$

$$\sup_{\ell_1+\ell_2 \neq 0} \frac{\ell_1 + \ell_2}{2\, |\ell_1 + \ell_2|} = \frac{1}{2} = u.$$

То есть сидим и ждём момента.

Множество достижимости является отрезком.

Пример 3.3 (А вот здесь уже кажется и плохо бывает, и хорошо)**.**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= u - 1, \\ \dot{x}_2 &= u + 1, \end{cases} \qquad |u| \leq 1.$$

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u d\tau = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - (t_1 - t_0) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 + t_0 - t_1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \{t_0 = 0; \text{Тогда при } t_1 \neq 1 \text{ задача неразрешима; далее } t_1 = 1\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

То есть при $t_1 = 1$ задача разрешима.

Если же $x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то $\int\limits_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u d\tau = \begin{pmatrix} t_1 - t_0 \\ 1 + t_0 - t_1 \end{pmatrix}.$

Считаем, что $t_0 = 0$. Система разрешима только при $t_1 = 1 - t_1$, т. е. при $t_1 = \dfrac{1}{2}$. Тогда интеграл равен $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $\mu^0 = \sup \dfrac{\frac{1}{2}(l_1 + l_2)}{\frac{1}{2}\, |l_1 + l_2|}$.

4. Задача быстродействия

4.1. Постановка задачи

Преступим к изучению следующего типа задач оптимального управления — *задач быстродействия* — задач перевода системы из начального фиксированного положения в конечное, также фиксированное, положение, за минимальное время.

Пусть наша система описывается следующими условиями:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \\ x(t_0) = x^0, \\ x(t_1) = x^1, \\ u(\tau) \in \mathcal{P}(\tau) \in \operatorname{conv} \mathbb{R}^m, \\ t_1 - t_0 \to \inf, \end{cases} \tag{4.1}$$

где x_0, x_1, t_0 — фиксированы, $A(t), B(t), f(t)$ — непрерывны, а $\mathcal{P}$ непрерывно как многозначное отображение (это требование гарантирует нам, что для любого l $\rho(l|\mathcal{P}(\tau))$ по τ непрерывна [1]).

Отметим, что отказ от требования $u(\tau) \in \mathcal{P}(\tau) \in \operatorname{conv} \mathbb{R}^m$ возможен; в этом случае $\overline{\mathcal{X}_{\mathcal{P}}[t_1]} = \mathcal{X}_{\overline{\mathcal{P}}}[t_1]$. Разумность такого отказа показывает следующий

Пример 4.1. Пусть уравнения (4.1) имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ x(0) = 0, \\ u(\tau) \in [-1, 1]. \end{cases}$$

Тогда множеством достижимости $\mathcal{X}_1$ будет бесконечный треугольник в I и IV координатных четвертях, лежащий внутри прямых $x = t$ и $x = -t$. При этом геометрически ясно, что при замене множества допустимых управлений с отрезка $[-1, 1]$ на двухточечное множество $\{-1, 1\}$ множество достижимости не изменится: любую точку, лежащую внутри $\mathcal{X}_1$, можно соединить с началом координат ломанной, содержащей звенья, параллельные прямым $x = t$ и $x = -t$.

Именно этот прием используется при управлении парусными судами при отсутствии попутного ветра (при этом говорят, что судно *идет галсом*).

Введём множество достижимости

$$\mathcal{X}[t_1] = \mathcal{X}(t_1, t_0, x^0) = \{x = x(t_1, t_0, x^0|u(\cdot)), \qquad u(\tau) \in \mathcal{P}\}.$$

Введём также *трубку достижимости* как[2] $\mathcal{X}[\cdot]$. Её графиком будем называть множество $\mathcal{X}[\cdot] = \{(t, x) : \ x \in \mathcal{X}[t]\}$.

Ключевую роль играет следующее очевидное

[1] В частности, при $m = 1$ множество $\mathcal{P}$ выглядит как $\mathcal{P} = [a(\tau); b(\tau)]$; непрерывность многозначного отображения означает, что $a(\tau), b(\tau)$ — непрерывны.

[2] Следует понимать, что множество достижимости — это множество, а трубка достижимости — это функция, отображающая время на соответствующее множество достижимости.

Утверждение 4.1. *Если $t_1^* - t_0$ — время оптимального взаимодействия, x^*, u^* — соответственно траектория и управление, отвечающие этому времени, то $(t_1^*, x^*(t_1^*)) \in \partial \mathcal{X}[\cdot]$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что если $(t_1^*, x^*(t_1^*)) \notin \partial \mathcal{X}[\cdot]$, то достаточно сместится назад во времени к некоему моменту t_2^* такому, что $(t_2^*, x^*(t_1^*)) \in \partial \mathcal{X}[\cdot]$ (такая точка существует в силу выпуклости и непрерывности); это приводит к противоречию с тем, что $t_1^* - t_0$ — время оптимального взаимодействия. □

Следующий пример показывает, что в криволинейных координатах это утверждение, вообще говоря, неверно.

Пример 4.2. Пусть уравнения (4.1) записаны в полярных координатах и имеют вид

$$\begin{cases} \dot\rho = u_1, \ |u_1| \leqslant 1, \\ \dot\varphi = u_2, \ |u_2| \leqslant 1, \\ \rho(0) = \rho^0 > 0, \\ \phi(0) = \phi^0. \end{cases}$$

Если бы это были декартовы координаты на плоскости, то трубкой достижимости был бы „распухающий квадрат "$\mathcal{X}[t_1] = \{|x - x^0| \leqslant t_1, \ |y - y^0| \leqslant t_2\}$. В нашем случае это будет „распухающий кольцевой сектор », и множество достижимости не будет выпуклым. Это приведет к тому, что если финальная точка будет отвечать углу π, то $(t^*, x^*(t^*)) \notin \partial \mathcal{X}[t_1^*]$.

Введём функцию $\varepsilon[t_1] = d(x^1, \mathcal{X}[t_1])$. Тогда очевидно

Утверждение 4.2. $t_1^* - t_0$ *— время оптимального взаимодействия* $\Leftrightarrow$ t_1^* *— наименьший корень уравнения* $\varepsilon[t_1] = 0, \ t_1 \geqslant t_0$.

При этом стоит иметь ввиду, что если некое множество Z — компакт, то $x \in Z \ \Leftrightarrow d(x, Z) = 0$.

4.2. Свойства множества достижимости

Утверждение 4.3. $\mathcal{X}[t_1] \in \operatorname{conv} \mathbb{R}^n$.

Доказательство. 1. Докажем выпуклость. Пусть $\hat x_1, \ \hat x_2 \ \in \mathcal{X}[t_1]$, u^1, u^2 — отвечающие им управления, $u^1, u^2 \in \mathcal{P}$; тогда для $j = 1, 2$ по формуле Коши имеем

$$\hat x_j = X(t_1, t_0)x^0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1, \tau)[B(\tau)u^j(\tau) + f(\tau)]\, d\tau \tag{4.2}$$

Пусть $\hat x = \lambda \hat x^1 + (1 - \lambda)\hat x^2$, $\ u(\tau) = \lambda u^1(\tau) + (1 - \lambda)u^2(\tau)$. Домножая первое соотношение в (4.2) на λ, а второе — на $1 - \lambda$, и, складывая, получаем, что траектории $\hat x$ отвечает управление $u(\tau) \in \mathcal{P}(\tau)$ (ибо $\mathcal{P}(\tau)$ — выпукло), что и означает выпуклость $\mathcal{X}[t_1]$.

2. Докажем ограниченность. Покажем, что существует такое $c > 0$, что $\mathcal{P}(\tau) \subseteq c \cdot B_1(0)$. Так как $\rho(l|\mathcal{P}(\tau))$ непрерывно по τ, то возьмём $c = \max\limits_{||l||=1, \tau\in[t_0,t_1]} \rho(l|\mathcal{P}(\tau))$.

   Тогда для любых l и любых $\tau \in [t_0, t_1]$ в силу положительной однородности опорной функции $\rho(l|\mathcal{P}(\tau)) \leqslant c\,\|l\|$. Тогда в формуле Коши

$$\hat{x} = X(t_1, t_0)x^0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1, \tau)[B(\tau)u(\tau) + f(\tau)]\,d\tau$$

   все компоненты в правой части ограничены, что даёт ограниченность и левой части.

3. Докажем замкнутость. Пусть $\hat{x}^j \to \hat{x}$. Надо доказать, что $\hat{x} \in \mathcal{X}[t_1]$. Пусть траекториям $\hat{x}^j$ отвечают управления $u^j(\tau) \in \mathcal{P}(\tau)$. Без ограничения общности считаем, что[3] $u^j \xrightarrow[j\to\infty]{\text{слабо в } L_2} u$.

   Докажем, что $u(\tau) \in \mathcal{P}(\tau)$ для почти всех τ. Для произвольных $l(\tau) \in L_2$ и почти всех τ верно соотношение[4]:

$$\left\langle l(\tau), u^j(\tau)\right\rangle \leqslant \rho(l(\tau) \mid \mathcal{P}(\tau)).$$

   Проинтегрируем это соотношение от t_0 до t_1:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle l(\tau), u^j(\tau)\right\rangle\, d\tau \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_1} \rho(l(\tau) \mid \mathcal{P}(\tau))\, d\tau.$$

   Учитывая, что $u^j \xrightarrow[j\to\infty]{\text{слабо в } L_2} u$, получаем:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle l(\tau), u(\tau)\right\rangle\, d\tau \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_1} \rho(l(\tau) \mid \mathcal{P}(\tau))\, d\tau. \tag{4.3}$$

   Итак, предположим противное. Пусть существует подмножество $Z \subseteq [t_0, t_1]$ ненулевой меры, где $u(\tau) \notin \mathcal{P}(\tau)$. Тогда найдутся такие $l(\tau),\ \varepsilon > 0$, что

$$\left\langle l(\tau), u(\tau)\right\rangle > \rho(l(\tau) \mid \mathcal{P}(\tau)) + \varepsilon.$$

   Заменим значения $u(\tau)$ вне Z на ноль; тогда

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle l(\tau), u(\tau)\right\rangle\, d\tau \geqslant \int\limits_{t_0}^{t_1} \rho(l(\tau) \mid \mathcal{P}(\tau))\, d\tau - \varepsilon\mu Z,$$

[3] Т.е., возможно, переходя к подпоследовательностям.

[4] Напоминаем, что если $A \subseteq B$, то $\rho(l|A) \leqslant \rho(l|B)$ для любого l.

что противоречит (4.3). Значит, $u(\tau) \in \mathcal{P}(\tau)$.

Запишем формулу Коши:

$$\hat{x}^j = X(t_1, t_0)x^0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1, \tau)[B(\tau)u^j(\tau) + f(\tau)]\, d\tau.$$

Устремляя $j \to \infty$, получаем:

$$\hat{x} = X(t_1, t_0)x^0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1, \tau)[B(\tau)u(\tau) + f(\tau)]\, d\tau.$$

Так как $u(\tau) \in \mathcal{P}(\tau)$, то $\hat{x} \in \mathcal{X}[t_1]$, что и означает замкнутость $\mathcal{X}[t_1]$.

$\square$

Найдем опорную функцию множества достижимости:

$$\rho(l \mid \mathcal{X}[t_1]) = \sup_{u(\cdot)} \left[\langle l, X(t_1, t_0)\rangle + \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle B^T(\tau)X^T(t_1, \tau)l, u(\tau)\right\rangle\, d\tau + \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle l, X(t_1, \tau)f(\tau)\rangle\, d\tau \right] =$$
$$= \langle l, X(t_1, t_0)\rangle + \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle l, X(t_1, \tau)f(\tau)\rangle\, d\tau + \sup_{u(\cdot)} \left[\int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle B^T(\tau)X^T(t_1, \tau)l, u(\tau)\right\rangle\, d\tau \right]. \tag{4.4}$$

Обозначим для краткости $s(\tau) = B^T(\tau)X^T(t_1, \tau)l$. Для дальнейшего продвижения нам потребуется следующая

Лемма 4.1. $\sup\limits_{u(\cdot)} \left[\int\limits_{t_0}^{t_1} \langle s(\tau), u(\tau)\rangle\, d\tau \right] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sup\limits_{u \in \mathcal{P}} \langle s(\tau), u\rangle\, d\tau.$

Доказательство. Так как $s(\tau)$ — непрерывная функция, то $\sup\limits_{u \in \mathcal{P}(\tau)} \langle s(\tau), u\rangle = \rho(s(\tau) \mid \mathcal{P}(t))$ непрерывно по τ, и, следовательно, интегрируема.

Рассмотрим $\mathrm{Argmax}_{u(\cdot) \in \mathcal{P}(\tau)} \langle s(\tau), u\rangle = \mathcal{P}^*(\tau)$. Проверим, что это многозначное отображение является измеримым. Для этого докажем его полунепрерывность сверху[5]. Так как полунепрерывность сверху равносильна замкнутости графика $\mathcal{P}^*(\tau)$, то нам надо показать, что из $\tau^j \to \tau$, $u^j \to u$, $u^j \in \mathcal{P}^*(\tau^j)$ следует, что $u \in \mathcal{P}^*(\tau)$. Это равносильно соотношениям

$$\left\langle s(\tau^j), u^j\right\rangle = \rho(s(\tau^j) \mid \mathcal{P}(\tau^j)),$$

$$\left\langle l, u^j\right\rangle \leqslant \rho(l \mid \mathcal{P}^*(\tau^j)),$$

[5] Ибо, как известно, полунепрерывность есть достаточное условие измеримости.

для любого l. Тогда

$$\langle s(\tau), u\rangle = \rho(s(\tau) \mid \mathcal{P}(\tau)),$$
$$\langle l, u\rangle \leqslant \rho(l \mid \mathcal{P}^*(\tau)),$$

что верно, и, стало быть, $u \in \mathcal{P}^*(\tau)$, что и дает нам замкнутость графика, следовательно, измеримость.

Воспользуемся *леммой об измеримом селекторе* из курса многозначного анализа: *если многозначное отображение $\mathcal{P}^*$ измеримо, то существует такая измеримая функция (селектор) $u^*(\cdot)$, что $u^*(\tau) \in \mathcal{P}^*(\tau)$ для почти всех τ.*

Для этого селектора $\langle s(\tau), u^*(\tau)\rangle = \rho(s(\tau) \mid \mathcal{P}(\tau))$, интегралы в условии леммы существуют, что влечет достижение точной верхней грани на $u(\tau) \in \mathcal{P}^*(\tau)$, что и требовалось доказать. ☐

Таким образом, мы можем выписать окончательный вид опорной функции:

$$\rho(l \mid \mathcal{X}[t_1]) = \langle l, X(t_1, t_0)\rangle + \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle l, X(t_1, \tau) f(\tau)\rangle \, d\tau + \int\limits_{t_0}^{t_1} \rho(B^T(\tau) X^T(t_1, \tau) l \mid \mathcal{P}(\tau)) \, d\tau.$$

Итак, оптимальное управление доставляет максимум выражению

$$\max_{u \in \mathcal{P}(\tau)} \left\langle B^T(\tau) X^T(t_1, \tau) l, u \right\rangle .$$

Обозначая $\psi(\tau) = X^T(t_1, \tau) l$, получим из (4.4):

$$\rho(l \mid \mathcal{X}[t_1]) = \langle l, \psi(t_0), x_0\rangle + \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle \psi(\tau), f(\tau)\rangle \, d\tau + \int\limits_{t_0}^{t_1} \rho(B^T(\tau)\psi(\tau) | \, \mathcal{P}(\tau)) \, d\tau.$$

При этом $\psi(\tau)$ называют *сопряженной переменной*. Из определения фундаментальной матрицы ясно, что $\psi(\tau)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -A^T(\tau)\psi, \\ \psi(t_1) = l. \end{cases}$$

4.3. Условие максимума

Перейдем теперь непосредственно к решению задачи быстродействия. Выпишем в терминах опорных функций условие $x^1 \in \mathcal{X}[t_1]$:

$$\left\langle l, x^1 \right\rangle \leqslant \rho(l \mid \mathcal{X}[t_1])$$

для любого l, или, в терминах расстояний до множества, $d(x^1, \mathcal{X}[t_1]) = \varepsilon[t_1] = 0$. Фиксируем произвольной число $\hat{\varepsilon}$. Тогда верна следующая цепочка равносильных переходов:

$$d(x^1, \mathcal{X}[t_1]) \leqslant \hat{\varepsilon} \Leftrightarrow x^1 \in \mathcal{X}[t_1] + \hat{\varepsilon} B_1(0) \Leftrightarrow \left\langle l, x^1 \right\rangle \leqslant \rho(l \mid \mathcal{X}[t_1]) + \hat{\varepsilon} \, \|l\| \, .$$

В силу положительной однородности левой и правой части по l, последнее соотношение можно нормировать и записать в виде

$$\sup_{\|l\|=1} \left(\left\langle l, x^1 \right\rangle - \rho(l \mid \mathcal{X}[t_1]) \right) \leqslant \hat{\varepsilon},$$

откуда следует, что $\varepsilon[t_1] = \sup\limits_{\|l\|=1} (\langle l, x^1\rangle - \rho(l \mid \mathcal{X}[t_1]))$. Таким образом, отсюда время быстродействия t_1^* находится как наименьшей корень уравнения $\varepsilon[t_1^*] = 0$.

Возьмём вектор $l^0 \in \operatorname{Argmax}_{\|l\|=1} (\langle l, x^1\rangle - \rho(l \mid \mathcal{X}[t_1]))$. Тогда $\langle l^0, x^1\rangle = \rho(l^0 \mid \mathcal{X}[t_1^*])$, что означает, что x^1 лежит на пересечении опорной гиперплоскости и самого множества. Отсюда $u^*(\tau) = u^{l_0}(\tau)$. Таким образом, мы можем записать необходимое условие максимума:

Если u^* есть управление, доставляющее оптимальное управление, то

$$\left\langle B^T(\tau)\psi(\tau), u^*(\tau) \right\rangle = \max_{u\in\mathcal{P}(\tau)} \left\langle B^T(\tau)\psi(\tau), u \right\rangle. \tag{4.5}$$

Естественно встает вопрос: является ли это условие достаточным? Оказывается, что нет — следующий пример показывает, что условию максимума может удовлетворять вообще любое допустимое управление!

Пример 4.3. Рассмотрим следующую задачу быстродействия:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u - 1, \\ \dot{x}_2 = u + 1, \\ x^0 = [0, 0]^T, \\ x^1 = [-1, 1]^T, \\ |u(t)| \leqslant 1. \end{cases}$$

В этой задаче, $\mathcal{P}(t) \equiv \mathcal{P} = [-1, 1]$. Найдем опорную функцию для этой задачи:

$$\rho(l \mid \mathcal{X}[t_1]) = \int\limits_0^{t_1} \left\langle l, [-1, 1]^T \right\rangle d\tau + \int\limits_0^{t_1} \rho([1, 1]^T l \mid \mathcal{P}(\tau))\, d\tau = t_1(l_2 - l_1) + t_1|l_1 + l_2|.$$

Легко видеть, что это сумма опорных функций одноточечного множества и отрезка. С геометрической точки зрения, множество достижимости есть отрезок, соединяющий на плоскости точки $[-1, -1]^T$ и $[1, 1]^T$, который „ползает“по плоскости. Очевидно, что для быстрейшего достижения точки $[-1, 1]^T$ надо „ползти“вверх по прямой $y = -x$. Тогда в момент $t^* = 1$ мы достигнем финальной точки.

Однако для нахождения оптимального управления нам (формально) надо было бы найти вектор-максимизатор l_0. На эту роль подходят вектора $\frac{1}{\sqrt{2}}[-1, 1]^T$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}[1, -1]^T$. Выпишем условие максимума:

$$\left\langle B^T l^0, u^* \right\rangle = \max_{u\in\mathcal{P}} \left\langle B^T l^0, u \right\rangle,$$

которое в нашем случае принимает вид $0 = 0$.

Хотя приведенный пример показывает редкую для линейных систем ситуацию, стоит поставить вопрос об условиях, позволяющих использовать условие максимума как необходимое и достаточное условие.

4.3.1. Условие нормальности (общности положения)

Рассмотрим частный случай задачи (4.1): пусть A, B — const, а $\mathcal{P}$ — выпуклый многогранник с непустой внутренностью, построенный на точках $u^1, u_2, \ldots, u_M$, причем[6] $u_j \in \partial\mathcal{P},\ j = \overline{1, M}$. Пусть $w = w^{k,l} = u^k - u^l$, где k, l соединены ребром. Потребуем, что бы выполнялось *условие нормальности* (или *условие общности положения*):

Вектора $Bw, ABw, \ldots, A^{n-1}Bw$ линейно независимы.

Отметим, что если $\mathcal{P}$ имеет вид „параллелепипеда“, $\mathcal{P} = \left\{ u \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, a_i \leqslant u_i \leqslant b_i,\ i = \overline{1, m} \right\}$, а матрица B состоит из столбцов $b^1, b^2, \ldots, b^m$, то условие нормальности требует линейной независимости векторов $b^i, Ab^i, \ldots, A^{n-1}b^i$ для всех i, что представляет собой в точности условие полной управляемости.

Роль этого условия раскрывает следующая

Теорема 4.1. *Если выполняется условие нормальности, то условию максимума удовлетворяет единственно управление.*

Доказательство. Покажем, что при $l^0 \neq 0$ существует и при том единственное $u^*(\cdot)$, удовлетворяющее (4.5). Предположим противное, пусть $\hat{u}^1, \hat{u}^2$ удовлетворяют (4.5), и на множестве положительной меры $\hat{u}^1 \neq \hat{u}^2$. Так как $\max\limits_{u \in \mathcal{P}} \left\langle B^T\psi(\tau), u \right\rangle = \rho(B^T\psi(\tau) \mid \mathcal{P})$, то $\left\langle B^T\psi(\tau), \hat{u}^1 - \hat{u}^2 \right\rangle = 0$ для почти всякого τ. Это можно переписать в виде

$$\left\langle B^T e^{-A^T(\tau - t_1)} l^0, w \right\rangle = 0,$$

что равносильно условию $l^{0T} e^{A(t_1 - \tau)} Bw = 0$ на некотором множестве положительной меры. Дифференцируя это тождество, получаем

$$\begin{gathered} l^{0T} e^{A(t_1-\tau)} Bw = 0, \\ -l^{0T} e^{A(t_1-\tau)} ABw = 0, \\ \ldots\ldots \\ (-1)^{n-1} l^{0T} e^{A(t_1-\tau)} A^{n-1} Bw = 0. \end{gathered}$$

Но, ибо $l^0 \neq 0$, получаем противоречие с условием нормальности.

Покажем теперь, что, если управление u удовлетворяет (4.5), то $u \in \mathcal{P}$ почти всюду. Предположим противное: пусть существует интервал времени, на котором $B^T\psi(\tau)$ ортогонален ребру; но это невозможно: дифференцируя, как в первой части доказательства, соотношение $\left\langle B^T\psi(\tau), w \right\rangle = 0$, мы получим противоречие с условием нормальности. Что и требовалось доказать. □

[6]Т.е. все u_j „существенно“влияют на вид многогранника.

Замечание. На самом деле, мы доказали, что условие нормальности гарантирует строгую выпуклость множества достижимости.

Пример 4.4. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1,\ |u_1| \leqslant 1, \\ \dot{x}_2 = u_2,\ |u_2| \leqslant 1. \end{cases}$$

Эта система вполне управляема, но не сильно вполне управляема. Множество достижимости в данном случае — квадрат (т.е. не строго выпуклое). Случай, в котором условие максимума выделяет единственное управление, бывает тогда, когда финальная точка оказывается на углу квадрата (проверьте!).

4.3.2. Условие управляемости при выпуклости множества $\mathcal{P}$

Теорема 4.2. *Пусть $\mathcal{P}$ строго выпукло и имеет непустую внутренность, и выполнено условие полной управляемости,*

$$\mathrm{rg}[B|AB|\cdots|A^{n-1}B] = n.$$

Тогда условие максимума определяет оптимальное управление единственным образом.

Доказательство. Максимум, очевидно, достигается в единственной точке в силу строгой выпуклости; осталось показать, что он ненулевой, т.е. что $B^T\psi(\tau) \neq 0$ на любом интервале. Предположим противное, пусть $B^T\psi(t) \equiv 0$ для любого[7] t. Дифференцируя это тождество и полагая $t = t_1$, получим противоречие с условием полной управляемости. □

5. Задача из множества во множество

5.1. Постановка задачи

Хочется сказать, что множество ω, на котором условие нормальности не выполняется, имеет меру нуль. Рассмотрим иные множества ограничений:

Утверждение 5.1. *Если $\mathcal{P}$ строго выпукло,* $\mathrm{Int}\,\mathcal{P} \neq \varnothing$, $\mathrm{rg}\,[B|AB|\ldots|\,A^{n-1}B] = n$, *то $u^l(\tau)$ выделяется из условия максимума единственным образом.*

Доказательство. Максимум достигается в единственной точке в силу выпуклости. Надо лишь доказать, что $B^T\psi(t) \neq 0$ на любом интервале.

Предположим противное: $B^T\psi(t) \equiv 0, \forall\, t$, тогда: $l^T e^{A(t_1 - t)} B \equiv 0$.

[7]В силу аналитичности.

Продифференцируем обе части $(n-1)$ раз:

$$-l^T e^{A(t_1-t)}AB \equiv 0,$$
$$\vdots$$
$$(-1)^{n-1} l^T e^{A(t_1-t)}A^{n-1}B \equiv 0.$$

Положим $t = t_1$, тогда ненулевой вектор ортогонален всем столбцам, получили противоречие с условием полной управляемости. □

Перейдём к задачам оптимального управления при переходе из множества в множество. Расширим понятие множества достижимости:

$$\mathcal{X}[\tau] = \mathcal{X}\left(\tau, t_0, \mathcal{X}^0\right) = \left\{x : \exists\ u(\cdot), \exists\ x^0 \in \mathcal{X} : x = x\left(\tau, t_0, x^0 \mid u(\cdot)\right)\right\}.$$

А также множества разрешимости:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}[\tau] = \mathcal{W}(\tau, t_1, M) = \left\{x : \exists\ u(\cdot), \exists\ x^1 \in M : x = x\left(\tau, t_1, x^1 \mid u(\cdot)\right)\right\} = \\ = \left\{x : \exists\ u(\cdot), x\left(t_1, \tau, x \mid u(\cdot)\right) \in M\right\}.\end{aligned}$$

5.2. Вспомогательные утверждения

Задача 2. $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t)$, $x(t_0) = x^0 \in \mathcal{X}^0$, $x(t_1) = x^1 \in \mathcal{X}^1$, где $\mathcal{X}^0, \mathcal{X}^1 \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$. x^0 переходит в x^1;$t_1 - t_0 \to \inf$, t_0 — фиксировано, t_1 — свободно (или наоборот), а x^0, x^1 — свободны (их тоже надо указать). Требуется найти t_1^*:
$t_1^* = \inf\left\{t \geqslant t_0 : \mathcal{X}\left(\tau, t_0, \mathcal{X}^0\right) \cap \mathcal{X}^1 \neq \varnothing\right\}$

Отметим, что $\mathcal{X}\left(\tau, t_0, \mathcal{X}^0\right) \cap \mathcal{X}^1 \neq \varnothing \Leftrightarrow d(\mathcal{X}[\tau], \mathcal{X}^1) = 0$.
$d(z_1, z_2) = \inf\left\{\|z_1 - z_2\|,\ z_i \in Z_j,\ j = 1, 2\right\}$.
Введём $\varepsilon\left[\tau\right] = d\left(\mathcal{X}[\tau], \mathcal{X}^1\right)$.

Теорема 5.1. *$t_1^* - t_0$ — время оптимального быстродействия $\Leftrightarrow$ t_1^* — наименьший корень $t_1^* \geqslant t_0$ уравнения $\varepsilon(\tau) = 0, x(t_0) = x^0 \in \mathcal{X}^0$.*

Докажем следующее утверждение:

Утверждение 5.2. *$\mathcal{X}[\tau] \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$.*

Замечание. $\mathcal{X}[\tau]$ — выпуклый компакт, но наиболее существенным является именно то, что он компакт.

Доказательство. Выпуклость доказывается как обычно. *Ограниченность* — из аналогичной теоремы об интеграле. *Замкнутость* — чуть сложнее, надо выбрать подпоследовательность из начальных точек. □

Формула расстояний между компактами:

$$\rho\,(l\,|\,Z_1) < -\rho\,(-l\,|\,Z_2) \Leftrightarrow \max_{z_1\in Z_1}\langle l, z_1\rangle < \min_{z_2\in Z_2}\langle l, z_2\rangle\text{, значит:}$$

$$Z_1\cap Z_2=\varnothing, Z_1, Z_2\in\operatorname{conv}\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \max_{\|l\|=1}[-\rho\,(l\,|\,Z_1)-\rho\,(-l\,|\,Z_2)]>0.$$

Если множество $Z_2=\{z_2\}$, то:

$$\rho\,(-l\,|\,Z_2) = -\langle l, z_2\rangle\,.$$

Воспользуемся индикаторными функциями из выпуклого анализа:

$$\delta_{Z_1\cap Z_2}(z)=\delta_{Z_1}(z)+\delta_{Z_2}(z)\text{, при этом знаем, что } \rho\,(\cdot\,|\,z_j)=(\delta_{z_j}(\cdot))^*.$$

Утверждение 5.3. $d(z,Z)=\sup\limits_{\|l\|=1}[\langle l, z\rangle-\rho\,(l\,|\,Z)]$.

Доказательство. Найдём сопряжённую к расстоянию:

$$\begin{aligned}&\sup_Z[\langle l,z\rangle-d(z,Z)]=\sup_Z[\langle l,z\rangle-\inf_{\zeta\in Z}\|z-\zeta\|]=\sup_Z\sup_{\zeta\in Z}[\langle l,z\rangle-\|z-\zeta\|]=\\&=\{\text{пусть } z-\zeta=y\}=\sup_{\zeta\in Z}\sup_y[\langle l,z+y\rangle-\|y\|]=\\&\qquad\qquad=\rho\,(l\,|\,Z)+\sup_y[\langle l,y\rangle-\|y\|]=\rho\,(l\,|\,Z)+\delta(l\mid B_1(0)).\end{aligned}$$

По теореме Фенхеля–Моро это действительно расстояние. □

Утверждение 5.4. $d(z_1,Z_2)=\min\limits_{z_1\in Z_1}d(z_1,Z_2)=\min\limits_{z_1\in Z_1}\sup\limits_{\|l\|=1}[\langle l,z_1\rangle-\rho\,(l\,|\,Z_2)]$.

Для доказательства потребуется следующая теорема:

Теорема 5.2 (Джон фон Нойманн)**.** *Пусть $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}$, X, Y — выпуклые компакты, $f(x,\cdot)$ — вогнута, $f(\cdot,y)$ полунепрерывна снизу, $f(x,\cdot)$ полунепрерывна сверху, тогда:*

$$\inf_{x\in X}\sup_{y\in Y}=\sup_{y\in Y}\inf_{x\in X}f(x,y).$$

Оставим эту теорему без доказательства.

$$\varepsilon[\tau]=\sup_{\|l\|\leqslant1}\left[-\rho\,(l\,|\,\mathcal{X}[\tau])-\rho\left(-l\,\middle|\,\mathcal{X}^1\right)\right];$$

Найдем опорную функцию:

$$\langle l, x(t)\rangle=\left\langle l, X(t_1,t_0)x^0\right\rangle+\int\limits_{t_0}^{t}\langle l, X(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\rangle\,d\tau+\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle l, X(t,\tau)f(\tau)\rangle\,d\tau;$$

Из предыдущего пункта имеем:

$$\rho\left(l \,\middle|\, \mathcal{X}[t]\right) = \rho\left(X^T(t,t_0)l \,\middle|\, \mathcal{X}^0\right) + \int\limits_{t_0}^{t} \left\langle X^t(t,\tau)l, f(\tau)\right\rangle d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \rho\left(B^T X^T(t,\tau)l \,\middle|\, \mathcal{P}(\tau)\right) d\tau =$$

$$= \rho\left(\psi(t_0) \,\middle|\, \mathcal{X}^0\right) + \int\limits_{t_0}^{t} \langle \psi(\tau), f(\tau)\rangle\, d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \rho\left(B^T\psi(\tau) \,\middle|\, \mathcal{P}(\tau)\right) d\tau;$$

$$\varepsilon\,[t] = \sup_{\|\psi(t_1)\|\leqslant 1} \left[\rho\left(\psi(t_0) \,\middle|\, \mathcal{X}^0\right) - \int\limits_{t_0}^{t} \rho\left(B^T\psi \,\middle|\, \mathcal{P}\right) d\tau - \rho\left(-\psi(t_1) \,\middle|\, \mathcal{X}^1\right)\right], \text{ где } \psi(\tau) = X^T(t,\tau)l.$$

Допустим, что t_1^* численно найдено. Тогда максимизатор l^* — одно из тех направлений, по которым происходит отделение множеств, поэтому l — нормаль.

5.3. Решение задачи

Покажем, что в задаче в обратном времени те же ℓ^* и там перпендикуляр. Покажем это, честно выписав опорную функцию:

$$\rho\left(\ell \,\middle|\, W[t]\right) = \rho\left(\ell \,\middle|\, W(t,t_2^*,\mathcal{X}^1)\right) = \sup_{x^1,u(\cdot)} \left[\langle \ell, x\left(t,t_1^*,x_2 \,|\, u(\cdot)\right)\rangle \,|u(\tau)\in\mathcal{P}(\tau), x^1\in\mathcal{X}^1\right],$$

$$x\left(t,t_1^*,x^1 \,\middle|\, u(\cdot)\right) = X(t,t_1^*)x^1 + \int_{t_1^*}^{t} X(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau =$$

$$= X(t_1,t_1^*)x^1 - \int_{t}^{t_1^*} X(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau.$$

Подставим это в опорную функцию:

$$\rho\left(\ell \,\middle|\, W[t]\right) = \sup_{x^1,u(\cdot)} \left[\left\langle \tilde{\ell}, X(t,t_1^*)x^1\right\rangle + \int_{t}^{t_1^*} \left\langle -\tilde{\ell}, X(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\right\rangle d\tau\right] =$$

$$= \rho\left(X^T(t,t_1^*)\tilde{\ell} \,\middle|\, \mathcal{X}^1\right) + \int_{t}^{t_1} \rho\left(-B^T X^T(t,\tau)\tilde{\ell} \,\middle|\, \mathcal{P}(\tau)\right) d\tau,$$

$$X^T(t,\tau)l = \tilde{\psi}(\tau), \quad \dot{\tilde{\psi}} = -A^T\tilde{\psi}(t) = \tilde{l},$$

$$\ldots = \rho\left(\tilde{\psi}(t_1^*) \,\middle|\, \mathcal{X}^1\right) + \int_{t}^{t_1} \rho\left(-B^T(\tau)\tilde{\psi}(\tau) \,\middle|\, \mathcal{P}(\tau)\right) d\tau,$$

$$\mathcal{X}^0 \cap W[t_0] \neq \varnothing.$$

Итак, у нас было

$$\sup_{\|\psi_1(t)\|=1}\left[-\rho\left(\psi(t_0)\,\middle|\,\mathcal{X}^0\right)-\int_t^{t_1^*}\rho\left(B^T(\tau)\psi(\tau)\,\middle|\,\mathcal{P}(\tau)\right)d\tau-\rho\left(-\psi(t_1)\,\middle|\,\mathcal{X}^1\right)\right]=0$$

Легко видеть, что

$$[\ldots]=-\rho\left(\psi(t_0)\,\middle|\,\mathcal{X}^0\right)-\rho\left(-\psi(t_0)\,|\,W[t_0]\right)$$

(Положим $\tilde{l}=-l\Rightarrow\tilde{\psi}=-\psi$) Равенство $\sup[\ldots]=0$ говорит, что $\mathcal{X}^0\cap W[t_0]\neq\varnothing$, т. к. это можно записать как

$$\sup_{\psi(t_0):\left\|X^T(t_0,t_1^*)\psi(t_0)\right\|=1}\left[-\rho\left(\psi(t_0)\,\middle|\,\mathcal{X}^0\right)-\rho\left(-\psi(t_0)\,|\,W[t_0]\right)\right]=0.$$

И нам без разницы, по чему перебирать, главное, чтобы везде было <0 и в одной точке $=0$. Итак, действительно $\mathcal{X}^0\cap W[t_0]\neq\varnothing$; $\psi(t_0)$ — внешняя нормаль к $\mathcal{X}^0$, $-\psi(t_0)$ — внешняя нормаль к $W[t_0]$. Осталось найти оптимальные управление и траекторию; $u^*(\tau)\equiv u^{l^*}(\cdot)$ — управление, доставляющее максимум в опорной функции, что равносильно принципу максимума:

$$\left\langle B^T\psi(\tau),u^*(\tau)=\max_{u\in\mathcal{P}(\tau)}\left\langle B^T\psi(\tau),u\right\rangle\right\rangle$$

почти всюду. Ситуация с необходимыми и достаточными условиями та же, что и в предыдущей задаче. Тогда при достаточности (?) принципа максимума множество сильно выпукло. Польза условия трансверсальности: при гладком начальном множестве ψ однозначно определяется по начальной точке. Оказывается, что задача некорректна: t_1^* не непрерывно зависит от $\mathcal{X}^0$.

Задача 3. Приведите пример, когда время t_1^* разрывно зависит от $\mathcal{X}^0$.

Указание. Рассмотрите $\dot{x}=Ax+u$ на $\mathbb{R}^2$.

6. Линейно–выпуклые задачи

6.1. Постановка задачи (начало)

В этой лекции мы рассмотрим уже нелинейные задачи, в которых, однако, принцип максимума Понтрягина все еще является необходимым и достаточным условием оптимальности.

Итак, рассмотрим задачи вида:

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t);\tag{6.1}$$

$$u\in\mathcal{P};\tag{6.2}$$

$$x(t_0) = x_0; \tag{6.3}$$

$$J(u(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [g(t, x(t)) + h(t, u(t))]dt + \varphi(x(t_1)) \to \inf . \tag{6.4}$$

Здесь t_1 фиксировано, $x(t_1)$ свободно, $g(t,\cdot), h(t,\cdot), \varphi(\cdot)$ — выпуклые функции, A, B - непрерывны, $\mathcal{P}$ — непрерывное многозначное отображение, g непрерывно по (t, x), h непрерывно по (t, u), φ конечна (т. е. непрерывна).

6.2. Решение задачи

По теореме Фенхеля–Моро

$$g(t, x) = \sup_{\lambda(t)} \left[\langle x(t), \lambda(t)\rangle - g^*(t, \lambda(t))\right]; \tag{6.5}$$

$$\varphi(x) = \sup_{l} \left[\langle x, l\rangle - \varphi^*(l)\right]; \tag{6.6}$$

подставим (6.5), (6.6) в выражение для минимизируемого функционала (6.4):

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sup_{\lambda(t)} \left[\langle x(t), \lambda(t)\rangle - g^*(t, \lambda(t)) + h(t, u(t))\right] dt + \sup_{l} \left[\langle x, l\rangle - \varphi(l)\right] =$$

$$= \sup_{\lambda(t), l} \left\{ \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\langle x(t), \lambda(t)\rangle - g^*(t, \lambda(t)) + h(t, u(t))\right] dt + \langle x, l\rangle - \varphi^*(l) \right\}. \tag{6.7}$$

Распишем $x(t)$ по формуле Коши и подставим в (6.7):

$$J = \sup_{\lambda(t), l} \left\{ \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\left\langle X(t, t_0)x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} X(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \lambda(t) \right\rangle - g^*(t, \lambda(t)) + h(t, u(t)) \right] dt + \right.$$

$$\left. + \left\langle l, X(t, t_0)x^0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \right\rangle - \varphi^*(l) \right\}. \tag{6.8}$$

Поменяем в (6.8) последовательность интегрирования и перепишем скалярные произведения в виде $\langle x^0, \cdot\rangle$ и $\langle u(t), \cdot\rangle$:

$$J = \sup_{\lambda(t),l} \Bigg\{ \Bigg\langle x^0, X^T(t_1,t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_1} X^T(t,t_0)\lambda(t)dt \Bigg\rangle + \int\limits_{t_0}^{t_1} \big\langle B^T(\tau) \big(X^T(t_1,\tau)l + $$

$$+ \int\limits_{\tau}^{t_1} X^T(t,\tau)\lambda(t)dt \Bigg), u(t) \Bigg\rangle + \int\limits_{t^1}^{t_0} \left(-g^*(t,\lambda) + h(t,u(t))\right) dt - \varphi^*(l) \Bigg\}. \quad (6.9)$$

Введём следующее обозначения:

$$\psi(\tau) = X^T(t_1,\tau)l + \int\limits_{\tau}^{t_1} X^T(t,\tau)\lambda(t)dt;$$

тогда $\psi(t)$ удовлетворяет сопряженной системе

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) &= -A^T\psi(t) + \lambda(t), \\ \psi(t_1) &= l. \end{cases} \quad (6.10)$$

С учетом этих обозначений получим

$$J = \sup_{\lambda(t),l} \left\{ \left\langle x^0, \psi(t_0) \right\rangle + \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\left\langle B^T(\tau)\psi(\tau), u(t) \right\rangle - g^*(t,\lambda) + h(t,u(t)) \right) dt - \varphi^*(l) \right\}. \quad (6.11)$$

6.3. Теория минимаксов

Обозначим то, что стоит в фигурных скобках, за Φ, тогда

$$J = \sup_{\lambda(t),l} \Phi, \;\; J^* = \inf_{u(\cdot)} J = \inf_{u(\cdot)} \sup_{\lambda(t),l} \Phi.$$

Функция Φ выпукла по u. Так как функция ψ линейна по l и λ, функция g^* выпукла (значит $-g^*$ вогнута), то Φ вогнута по l, λ.

Теорема 6.1. *Пусть функция $\Phi(x,y)$ выпукла по x и вогнута по y, тогда*

$$\inf_x \sup_y \Phi(x,y) = \sup_y \inf_x \Phi(x,y).$$

Для нашей задачи получим:

$$J^* = \sup_{\lambda(t),l} \left\{ \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\min_{u\in\mathcal{P}} \left[\left\langle B^T(\tau)\psi(\tau), u(t) \right\rangle + h(t,u(t)) \right] - g^*(t,\lambda) \right) dt + \left\langle x^0, \psi(t_0) \right\rangle - \varphi^*(l) \right\}.$$ [redacted]

Определение 6.1. (x^0, y^0) называется седловой точкой функции $f(x,y)$, если $f(x^0, y) \leqslant f(x^0, y^0) \leqslant f(x, y^0)\ \forall\, x, y$.

Теорема 6.2. *1. Если* $\exists\,(x^0, y^0)$ *- седловая точка, то*

$$\min_x \sup_y f(x,y) = \max_y \inf_x f(x,y) = f(x^0, y^0).$$

2. Если

$$\min_x \sup_y f(x,y) = \max_y \inf_x f(x,y),$$

то $\exists\,(x^0, y^0)$ *— седловая точка, причем*

$$x^0 \in \operatorname*{Argmin}_x \sup_y f(x,y),\ \ y^0 \in \operatorname*{Argmax}_y \inf_x f(x,y).$$

6.4. Решение задачи (окончание)

Вернёмся к нашей задаче:

$$J^* = \inf_{u(\cdot)} \sup_{\lambda(\cdot),l} \Phi = \sup_{\lambda(\cdot),l} \inf_{u(\cdot)} \Phi.$$

Пусть sup достигается, пусть $\{\lambda^0(\cdot), l^0\}$ — максимизатор, пусть u^* - оптимальное управление, тогда $(u^*, \{\lambda^0(\cdot), l^0\})$ — седловая точка.

$$\Phi[l, \lambda(\cdot), u^*(\cdot)] \leqslant \Phi[l^0, \lambda^0(\cdot), u^*(\cdot)] \leqslant \Phi[l^0, \lambda^0(\cdot), u(\cdot)];$$

второе неравенство дает нам Принцип Максимума Понтрягина:

$$\left\langle -B^T(t)\psi^0(t), u^*(t) \right\rangle - h(t, u^*(t)) = \max_{u\in\mathcal{P}} \left[\left\langle -B^T(t)\psi^0(t), u(t) \right\rangle - h(t, u(t)) \right].$$

Здесь принцип максимума — необходимое условие. Выясним, при каких условиях он будет являться и достаточным. Запишем функцию Φ, интегрируя систему в обратном времени:

$$\Phi[l, \lambda(\cdot), u^*(\cdot)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\langle x^*(t), \lambda(t) \rangle - g^*(t, \lambda(t)) + h(t, u^*(t)) \right] dt + \langle l, x^*(t_1) \rangle - \varphi^*(l);$$

здесь $x^*(t)$ — оптимальная траектория.

Пусть

$$l^0 \in \operatorname{Argmax} \left[\langle l, x^*(t_1) \rangle - \varphi^*(l) \right]; \tag{6.12}$$

$$\lambda^0(t) \in \operatorname{Argmax} \left[\langle x^*(t), \lambda(t) \rangle - g^*(t, \lambda(t)) \right]. \tag{6.13}$$

Вспомним, что такое субдифференциал:

$$
\begin{gathered}
v \in \partial\varphi(x^*(t_1)) \\
\Updownarrow \\
\varphi(y) \geqslant \varphi(x^*(t_1)) + \langle v, y - x^*(t_1)\rangle \\
\Updownarrow \\
\langle v, x^*(t_1)\rangle - \varphi(x^*(t_1)) \geqslant \langle v, y\rangle - \varphi(y),\ \forall\, y \\
\Updownarrow \\
\langle v, x^*(t_1)\rangle - \varphi(x^*(t_1)) \geqslant \varphi^*(v) \\
\Updownarrow \\
\langle v, x^*(t_1)\rangle - \varphi^*(v) \geqslant \varphi(x^(t_1));
\end{gathered}
$$

отсюда и из теоремы Фенхеля–Моро для функции φ сразу получаем, что (6.12) $\Leftrightarrow l^0 \in \partial\varphi(x^*(t_1))$. Аналогично, (6.13) $\Leftrightarrow \lambda^0(t) \in \partial g(t, x^*(t))$. То есть, для существования максимизатора $(l^0, \lambda^0(\cdot))$ необходимо и достаточно, чтобы субдифференциалы $\partial\varphi(x^*(t_1))$ и $\partial g(t, x * (t))$ были не пусты.

Если функции φ и g дифференцируемы по x и строго выпуклы, то соответствующие субдифференциалы состоят из единственных точек, и мы получаем условия трансверсальности на правом конце:

$$l^0 = \nabla\varphi(x^*(t_1));$$

$$\lambda^0(t) = \nabla_x g(t, x^*(t)).$$

Эти условия вместе с Принципом Максимума Понтрягина являются критерием оптимальности.

7. Приложение

7.1. Формула Коши и фундаментальные матрицы

7.1.1. Формула Коши матричного дифференциального уравнения

Рассмотрим следующее матричное дифференциальное уравнение:

$$
\begin{cases}
\dot{Z} = A(t)Z(t) + Z(t)B(t) + C(t), \quad A, B, C, Z \in \mathbb{R}^{n\times n}, \\
Z(t_0) = Z^0.
\end{cases}
\tag{7.1}
$$

Для данного уравнения рассмотрим два вспомогательных уравнения:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial X(t,\tau)}{\partial t} = A(t)X(t,\tau), \\
X(\tau,\tau) = E,
\end{cases}
\tag{7.2}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \widetilde{X}(t,\tau)}{\partial t} = B^T(t)\widetilde{X}(t,\tau), \\
\widetilde{X}(\tau,\tau) = E.
\end{cases}
\tag{7.3}
$$

Сделаем замену переменных $Z(t) = X(t,t_0)Y(t)$ и подставим в (7.1):

$$\dot{Z} = A(t)X(t,t_0)Y + X(t,t_0)\dot{Y} = A(t)X(t,t_0)Y + X(t,t_0)YB + C, \text{ откуда:}$$
$$\dot{Y}(t) = Y(t)B(t) + X^{-1}(t,t_0)C.$$

Вновь сделаем замену: $Y(t) = U(t)\widetilde{X}^T(t,t_0)$, при подстановке получим:

$$\dot{Y} = YB + X^{-1}C = \dot{U}\widetilde{X}^T + U\widetilde{X}^T B, \text{ откуда:}$$

$$\dot{U}(t) = X^{-1}(t,t_0)C(t)\widetilde{X}^T(t,t_0), \tag{7.4}$$
$$U(t_0) = Y(t_0) = Z^0. \tag{7.5}$$

Итак, итоговая замена имеет вид:

$$Z = X(t,t_0)Y(t) = X(t,t_0)U(t)\widetilde{X}^T(t,t_0).$$

Проинтегрируем уравнение (7.4) от t_0 до t, учитывая (7.5):

$$U(t) = Z^0 + \int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau,t_0)C(\tau)\left(\widetilde{X}^{-1}(\tau,t_0)\right)^T d\tau,$$

домножим сначала на $\widetilde{X}^T(t,t_0)$ справа, затем на $X(t,t_0)$ слева:

$$Y(t) = Z^0\widetilde{X}^T(t,t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} X(t_0,\tau)C(\tau)\widetilde{X}^T(t_0,\tau)\widetilde{X}^T(t,t_0)\,d\tau,$$

$$Z(t) = X(t,t_0)Z^0\widetilde{X}^T(t,t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} X(t,\tau)C(\tau)\widetilde{X}^T(t,\tau)\,d\tau.$$

В данных преобразованиях были использованы полугрупповое свойство и свойство транспонирования произведения матриц. В итоге получаем окончательную формулу Коши для матричного ОДУ:

$$Z(t) = X(t,t_0)Z^0\widetilde{X}^T(t,t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} X(t,\tau)C(\tau)\widetilde{X}^T(t,\tau)\,d\tau. \tag{7.6}$$

7.2. Поиск фундаментальных матриц

7.2.1. Автономный случай

Рассмотрим случай, когда матрица $A = \mathrm{const}$ и $\dot{X} = AX$. Отметим, что из соотношения (1.7) следует, что $X(t,\tau) = X(t-\tau, 0) = X(t-\tau)$.

Рассмотрим теперь следующую задачу:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t), \\ X(0) = E. \end{cases}$$

Ясно, что решением данной задачи является матрица $X(t)$, равная *матричной экспоненте*, то есть $X(t) = e^{At}$, которая определяется, как и для обычной экспоненты, соответствующим рядом:

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}. \tag{7.7}$$

Для корректности определения требуется равномерная сходимость данного ряда.

Лемма 7.1. *Ряд в правой части* (7.7) *сходится равномерно на любом отрезке.*

Доказательство. Для простоты дальнейших рассуждений обозначим коэффициенты матрицы A^k как $\left(a_{ij}^{(k)}\right)$, $i,j = \overline{1,n}$. Так как $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, то все степени матрицы A будут иметь тот же размер.

Нас интересует оценка для $\max\left|a_{ij}^{(k)}\right|$. Пусть $c = \max|a_{ij}|$. Запишем формулу для коэффициентов матрицы A^2:

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}a_{lj} \Rightarrow \left|a_{ij}^{(2)}\right| \leqslant \sum_{l=1}^{n} |a_{il}|\cdot|a_{lj}|, \text{ откуда } \max\left|a_{ij}^{(2)}\right| \leqslant nc^2.$$

Применяя метод математической индукции, получаем оценку для любой степени матрицы A:

$$\max\left|a_{ij}^{(k)}\right| \leqslant n^{k-1}c^k, \quad c = \max|a_{ij}|\,, \; i,j = \overline{1,n}.$$

Далее, $e^{At} = W_{ij}(t)$, где элементы матрицы $W_{ij}(t)$ вычисляются по формуле:

$$w_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k)} t^k}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{k-1}(ct)^k}{k!} = \frac{1}{n}e^{nct},$$

тем самым, по признаку Вейерштрасса, ряд (7.7) сходится равномерно. □

Отметим, что $e^{A\cdot 0} = E$. Проверим свойство дифференцируемости:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kA^k t^{k-1}}{k!} = A\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} = Ae^{At}.$$

Значит, фундаментальная матрица имеет вид $X(t,\tau) = e^{A(t-\tau)}$. Отметим, что для матричной экспоненты выполняются многие свойства обычной экспоненты, например, $e^{As}{\cdot}e^{At} = e^{A(t+s)}$. Данное свойство отражает полугрупповое свойство фундаментальной матрицы.

Считать по определению матричную экспоненту достаточно трудно, что делать? Рассмотрим характеристическое уравнение матрицы A:

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ — собственные значения с кратностями $k_1, \ldots, k_\ell$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} k_i = n$.

Ищем фундаментальную систему решений:

1. $k_j = 1$
   (a) $\lambda_j \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{\lambda_j t} \cdot \upsilon_j$ (где υ_j — собственный вектор);
   (b) $\lambda_j \in \mathbb{C} \Rightarrow e^{\lambda_j t} \cdot \upsilon_j$ с тем только учетом, что экспоненту надо раскладывать на вещественную и мнимую части, а также надо не забывать о том, что комплексные собственные значения могут появляться только одновременно со своим сопряженным $\overline{\lambda_j}$.
2. $k_j \geqslant 2$
   (a) $\lambda_j \in \mathbb{R}$, тогда вклад имеет вид $e^{\lambda_j t} \cdot \sum\limits_{i=1}^{k_j} \dfrac{\upsilon_i t^{i-1}}{(i-1)!}$;
   (b) $\lambda_j \in \mathbb{C}$, тогда надо взять вещественные и мнимые части.

Объединяя полученные решения в фундаментальную матрицу, получаем формулу $e^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)$.

Пример 7.1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Посчитаем $\det A$ и найдём собственные значения:

$$(3-\lambda)(1-\lambda) + 5 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm 2i.$$

Собственный вектор для собственного значения $\lambda_1 = 2 + 2i$ равен $(1 + 2i; -1)^T$. Умножаем найденный вектор на $e^{2t}(\cos 2t + i \sin 2t)$:

$$\begin{pmatrix} 1+2i \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}(\cos 2t + i \sin 2t) = e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} \cos 2t - 2\sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + ie^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 2\cos 2t + \sin 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}.$$

Теперь из соответствующих столбцов-коэффициентов при e^{2t} составляем матрицу M, после этого составляем матрицу B из коэффициентов при $\cos 2t$ матрицы M, находим обратную к B матрицу. Итоговая матрица $e^{At} = e^{2t} \cdot M \times B^{-1}$.

$$M = \begin{pmatrix} \cos 2t - 2\sin 2t & 2\cos 2t + \sin 2t \\ -\cos 2t & -\sin 2t \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$C = M \times B^{-1} = \begin{pmatrix} \cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t & \frac{5}{2}\sin 2t \\ -\frac{1}{2}\sin 2t & \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t \end{pmatrix}, \text{ таким образом:}$$

$$e^{At} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t & \frac{5}{2}\sin 2t \\ -\frac{1}{2}\sin 2t & \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t \end{pmatrix}.$$

К сожалению, для случая, когда $A \neq \mathrm{const}$ не придумано общих методов. Рассмотрим случай $n = 1$:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t),$$

$$\frac{\partial X(t,\tau)}{\partial t} = a(t)X(t,\tau), \quad X(\tau,\tau) = 1, \quad \text{откуда}$$

$$X(t,\tau) = C \cdot \exp\left(\int\limits_{\tau}^{t} a(s)\,ds\right), \text{ из начальных условий } C = 1.$$

Теперь будем считать, что $n > 1$. Интересен вопрос, при каких условиях фундаментальная матрица находится аналогичным выражением

$$X(t,\tau) = \exp\left(\int\limits_{\tau}^{t} A(s)\,ds\right)? \tag{7.8}$$

Проделаем некоторые преобразования:

$$\exp\left(\int\limits_{\tau}^{t} A(s)\,ds\right) = E + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\int\limits_{\tau}^{t} A(s)\,ds\right)^k}{k!},\ \text{продифференцируем по } t:$$

$$\frac{\partial X(t,\tau)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left\{A(t)\left(\int\limits_{\tau}^{t} A(s)\,ds\right)^{k-1} + \int\limits_{\tau}^{t} A(s)\,ds\cdot A(t)\left(\int\limits_{\tau}^{t} A(s)\,ds\right)^{k-2} + \right.$$
$$\left. + \ldots + \left(\int\limits_{\tau}^{t} A(s)\,ds\right)^{k-1} A(t)\right\} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k!}A(t)\left(\int_{\tau}^{t} A(s)\,ds\right)^{k-1}. \quad (7.9)$$

Тем самым, будет верна формула (7.8). Но когда справедлив последний переход в (7.9)? Только тогда, когда $A(t)A(s) = A(s)A(t)$ верно $\forall\, s$ между τ и t.

7.3. Периодические матрицы

Определение 7.1. Матрица $X(T,0)$ называется *матрицей монодромии*, а её собственные значения — *мультипликаторами.*

Утверждение 7.1. *Для того, чтобы ρ являлся мультипликатором системы* (**??**), *необходимо и достаточно, чтобы нашлось ненулевое решение $x(t)$ системы* (**??**), *удовлетворяющее соотношению $x(t+T) = \rho x(t)\ \forall\, t$.*

Доказательство. Необходимость: Если ρ — собственное значение матрицы $X(T,0)$, то $\exists\, \upsilon \neq 0$ — собственный вектор $X(T,0)$:

$$\Phi(T)\upsilon = \rho\upsilon.$$

Пусть $x(t)$ — решение (**??**) при условии $x(0) = \upsilon$. Тогда

$$x(t+T) = \Phi(t+T)\upsilon = \Phi(t)\Phi(T)\upsilon = \rho\Phi(t)\upsilon = \rho x(t).$$

Достаточность: Пусть $x(t+T) = \rho x(t)\ \forall\, t$. Тогда

$$x(t+T) = \Phi(t+T)x(0) = \Phi(t)\Phi(T)x(0),$$
$$x(t+T) = \rho x(t) = \Phi(t)\rho x(0).$$

$\Phi(t)$ невырождена, следовательно, $x(0)$ — собственный вектор $\Phi(T)$, а ρ — собственное значение $\Phi(T)$. $\square$

Отсюда следует, что периодическое решение системы (**??**) существует тогда и только тогда, когда у соответствующей матрицы монодромии существует единичный мультипликатор.

Теорема 7.1 (Флоке)**.** *Для всякой системы* (**??**) *с периодической матрицей найдутся такие матрицы* $\Psi(t)$ *и* $\bar{A} = \mathrm{const}$*, что*

$$\begin{aligned} &\Psi(t+T) = \Psi(t)\ \forall\, t, \\ &|\Psi| \neq 0, \\ &\Phi(t) = \Psi(t)e^{\bar{A}t}. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Доказательство. Конструктивно построим такие $\Psi(t)$ и $\bar{A}$.

Так как $\Phi(t) = X(t,0)$, то $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$, и, если равенство (7.10) выполняется, то

$$\begin{aligned} &\dot{\Phi} = \dot{\Psi}e^{\bar{A}t} + \Psi(t)\bar{A}e^{\bar{A}t} = A(t)\Psi(t)e^{\bar{A}t}, \text{ откуда} \\ &\dot{\Psi} = A(t)\Psi(t) - \Psi(t)\bar{A}. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы выполнялись соотношения

$$\Phi(T) = \Psi(T)e^{\bar{A}T} = \Psi(0)e^{\bar{A}T} \qquad \text{и} \qquad \Psi(0) = E.$$

Тогда $\bar{A}$ найдётся из условия $\Phi(T) = e^{\bar{A}T}$.

Таким образом, для того чтобы найти матрицу $\bar{A}$ нам необходимо „прологарифмировать“ матрицу. В курсе линейной алгебры такая операция не рассматривалась, однако мы можем ввести её в полной аналогии с вещественными числами. Например, логарифм вещественных чисел можно вводить как сумму ряда:

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}z^k}{k}.$$

Соответственно для матриц положим по определению

$$\ln\Phi(t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(\Phi(t) - E).$$

Ниже будет показано, что этот ряд сходится. Тот факт, что $e^{\ln z} = z$ легко проверяется с использованием свойств вещественных рядов.

Итак, $\bar{A} = \dfrac{\ln\Phi(T)}{T}$. Положим $\Psi(t) = \Phi(t)e^{-\bar{A}t}$. Проверим периодичность матрицы $\Psi(t)$: учитывая, что $\Phi(T)e^{-\bar{A}T} = \Psi(0) = E$, получим

$$\Psi(t+T) = \Phi(t+T)e^{-\bar{A}(t+T)} = \Phi(t)\Phi(T)e^{-\bar{A}T}e^{-\bar{A}t} = \Phi(t)e^{-\bar{A}t} = \Psi(t).$$

Требуемое в условии равенство тоже, очевидно, выполняется:

$$\Psi(t)e^{\bar{A}t} = \Phi(t)e^{-\bar{A}t}e^{\bar{A}t} = \Phi(t).$$

Таким образом, все утверждения теоремы справедливы, и теорема доказана. □

Сходимость матричного логарифма. Покажем, что ряд в определении матричного логарифма всегда сходится:

Если A — матрица простой структуры, т. е. $A = T^{-1}\Lambda T$, то $\ln A = T^{-1} \cdot \ln\Lambda \cdot T$, а

$$\ln\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \ln\lambda_n \end{bmatrix},$$

где $\ln\lambda_k$, вообще говоря, комплексные числа.

Если A — произвольная, то

$$A = T^{-1}\begin{bmatrix} L_1(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & L_n\lambda_n \end{bmatrix} T,$$

где L_j — жордановы ящики; прологарифмируем поблочно: учитывая

$$\ln(\lambda_j + x) = \ln\lambda_j + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\lambda_j^k}x^k,$$

получим

$$\ln L_j(\lambda_j) = \ln\left(\lambda_j E + L_j(\lambda_j) - \lambda_j E\right) = \ln\lambda_j E + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\lambda_j^k}\left[L_j(\lambda_j) - \lambda_j E\right]^k.$$

Т. к $[L_j(\lambda_j) - \lambda_j E]$ — нильпотентная матрица, то ряд в правой части обращается в конечную сумму, а, следовательно, исходный ряд сходится, что и требовалось.

Сингулярное разложение матрицы. Это представление нам нужно для выявления качественных свойств системы. Проведём сингулярное разложение матрицы A из (**??**): $A = U\Lambda V$. Тогда

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}U\Lambda VU\Lambda V\ldots U\Lambda V.$$

Если $A = A^T$, то $U = V^T$, т. к. $U^{-1} = U^T$, то $e^A = Ue^\Lambda U^T$ и о собственных значениях e^A можно судить по e^Λ. В теории устойчивости и стабилизации это позволяет судить о поведении системы по собственным значениям $\Phi(t)$ при отсутствии необходимости знания самой $\Phi(t)$ в явном виде.

7.3.1. Сведения из выпуклого анализа

Определение 7.2. Пусть X — пространство с введённым скалярным произведением, $\ell \in X$, $A \subset X$. Тогда *опорной функцией множества* A называется функция

$$\rho\left(\ell \mid A\right) = \sup_{x\in A}\left\langle \ell, x\right\rangle.$$

Геометрический смысл опорной функции достаточно прост: при фиксированном ℓ множество $\{\ell \mid \langle \ell, z\rangle = c = \mathrm{const}\}$ есть гиперплоскости, ортогональные ℓ, сдвинутые от начала координат вдоль ℓ на $\frac{c}{\|\ell\|}$.

Если $\|\ell\| = 1$, то $c = \langle \ell, z\rangle$ есть расстояние от начала координат до гиперплоскости, ортогональной ℓ и проходящей через z.

Получается, что опорная функция множества показывает максимальное расстояние от начала координат до гиперплоскости заданной ориентации, ещё имеющей какие-то общие точки с нашим множеством. Эта наиболее удалённая гиперплоскость называется *опорной гиперплоскостью* $\pi_\ell = \{z \mid \langle \ell, z\rangle = \rho\,(\ell \,|\, Z)\}\,, (\ell \neq 0)$.

Опорная функция обладает следующими свойствами:

1. Она *положительно-однородна*: $\rho\,(\alpha\ell \,|\, Z) = \alpha\rho\,(\ell \,|\, Z)$, $\alpha \geqslant 0$.

2. Она *полуаддитивна*: $\rho\,(\ell^1 + \ell^2 \,|\, Z) \leqslant \rho\,(\ell^1 \,|\, Z) + \rho\,(\ell^2 \,|\, Z)$ (неравенство треугольника).

3. Из первого и второго пунктов следует, что она *выпукла*.

4. Между выпуклыми компактами и $\rho\,(\ell \,|\, Z)$ существует взаимнооднозначное соответствие.

   Действительно, прямо из определения следует, что $\forall\, z \in Z$ имеет место неравенство

   $$\langle \ell, z\rangle \leqslant \rho\,(\ell \,|\, Z)\,, \quad \forall\, \ell \in \mathbb{R}^n. \tag{7.11}$$

   Если же $Z \in \operatorname{conv} \mathbb{R}^n$ (является выпуклым компактом), то справедливо и обратное утверждение, то есть из (7.11) следует, что $z \in Z$. Тогда

   $$Z = \bigcap_{\ell \in real^n} \pi_\ell^-\,, \quad \pi_\ell^- = \{z \mid z \leqslant \rho\,(\ell \,|\, X)\}\,.$$