

Laboratorio de Procesado Digital de Señal

Práctica 6: efectos de la precisión finita en el diseño de filtros digitales

En esta práctica se estudian los efectos que se producen debido a que los números empleados en la implementación de filtros digitales (coeficientes y muestras) se cuantifican al trabajarlos con un microprocesador de precisión finita.

Se facilitan al alumno los valores de los parámetros del filtro IIR con el que se va a trabajar a continuación.

Programa en Matlab los siguientes apartados, comentando el código.

Al finalizar la práctica, suba a la plataforma web de la asignatura (Moodle) un archivo PDF, en el que se responda a los apartados de la práctica y en el que se presenten las figuras que se piden, y un archivo .m, con el código de Matlab con el que se obtienen los resultados.

Cuantificación de los coeficientes de un filtro

Como se ha visto en prácticas anteriores, la cuantificación de las muestras de una señal o de los parámetros de un filtro introduce un error que, en ocasiones, puede derivar en un funcionamiento incorrecto. En este bloque de la práctica se cuantifican los coeficientes de un filtro digital IIR, cuyos efectos se analizan en el último bloque de la práctica.

A partir de los parámetros facilitados al alumno, realice los siguientes apartados.

- a) Obtenga los coeficientes a y b de un filtro IIR paso bajo con las siguientes características:
- Tipo de respuesta: Lowpass
 - Método de diseño: IIR – Elliptic
 - Orden del filtro: M
 - Especificación de frecuencias:
 - Unidades: Hz
 - F_s : F_s
 - F_{pass} : f
 - Especificación de magnitudes:
 - Unidades: dB
 - A_{pass} = A_{pass}
 - A_{stop} = A_{stop}

Para ello puede emplear la herramienta `fdatool` utilizada en prácticas anteriores, o la función `ellip` de Matlab. No olvide seleccionar la opción `Convert to Single Section` del menú `Edit`, antes de exportar el resultado en la herramienta `fdatool`.

- b) Cuantifique los coeficientes a y b con $B = 16$ bits, de los cuales $D = 8$ bits corresponden a la parte decimal. Use las propiedades `'fixed'`, `'round'` y `'saturate'` de la función `quantizer`.

Secciones de Segundo Orden

Una de las maneras de reducir el efecto de la cuantificación de los coeficientes de un filtro digital consiste en reducir el grado del polinomio que forman esos coeficientes. Para ello se puede descomponer dicho polinomio en Secciones de Primer y Segundo Orden, de tal forma que cada coeficiente influye únicamente en una raíz o en un par de raíces complejas conjugadas.

En este bloque de la práctica se van a cuantificar los coeficientes de las Secciones de Segundo Orden del filtro diseñado anteriormente, cuyo efecto se analiza en el último bloque de la práctica.

Realice los siguientes apartados, a partir de los resultados del bloque anterior:

- a) Calcule las Secciones de Segundo Orden del filtro IIR diseñado en el bloque anterior. Para ello puede utilizar la función `tf2sos` de Matlab o la opción `Convert to Second-Order Sections` del menú `Edit` de la herramienta `fdatool`. Tenga en cuenta que, en ambos casos, la matriz de Secciones de Segundo Orden obtenida tiene la siguiente estructura:

$$sos = \begin{bmatrix} b_{01} & b_{11} & b_{21} & 1 & a_{11} & a_{21} \\ b_{02} & b_{12} & b_{22} & 1 & a_{12} & a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{0L} & b_{1L} & b_{2L} & 1 & a_{1L} & a_{2L} \end{bmatrix}$$

Donde $[b_{0i} \ b_{1i} \ b_{2i}]$ representa la i -ésima Sección de Segundo Orden del numerador del filtro, y donde $[1 \ a_{1i} \ a_{2i}]$ representa la i -ésima Sección de Segundo Orden del denominador del filtro.

- b) Cuantifique cada uno de los coeficientes de la matriz de Secciones de Segundo Orden con el mismo cuantificador empleado en el bloque anterior ($B = 16$ bits, $D = 8$ bits).

Raíces en Secciones de Segundo Orden

Otra forma de reducir el efecto de la cuantificación de los coeficientes de un filtro consiste en cuantificar las raíces del filtro, pues el efecto de la cuantificación va a afectar a cada raíz de forma independiente.

En este bloque se cuantifican de las raíces del filtro, cuyo efecto se analiza en el siguiente bloque.

A partir de los resultados del bloque anterior, realice los siguientes apartados:

- a) Calcule las raíces de cada Sección de Segundo Orden del filtro original obtenidas en el bloque anterior.
- b) Cuantifique cada una de las raíces con el mismo cuantificador empleado en los bloques anteriores.

Análisis general

En este bloque se realiza un análisis entre cada uno de los procesos realizados en los bloques anteriores.

Realice los siguientes apartados, a partir de los resultados de los bloques anteriores:

- a) Calcule el error cuadrático medio (ECM) **de las raíces (polos y ceros)** de cada uno de los tres filtros cuantificados, con las raíces del filtro original.

$$ECM = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n |r_i - \hat{r}_i|^2$$

Donde r_i es la raíz i-esima del filtro original, \hat{r}_i es la raíz i-ésima cuantificada, y n es el número de raíces.

Indique el valor obtenido.

- b) Analice las diferencias en la ganancia, en función de la frecuencia, de los cuatro filtros empleados en la práctica (filtro original, filtro con los coeficientes a y b cuantificados, filtro con los coeficientes de las Secciones de Segundo Orden cuantificados, y filtro con las raíces cuantificadas). Exponga y justifique gráficamente las conclusiones extraídas de dicho análisis.

Para la representación de la ganancia deberá obtener la respuesta en frecuencia de cada uno de los filtros anteriores (utilizando la función `freqz` con 50.000 puntos) y representarla en decibelios vs. Hertzios.

- c) Analice las diferencias en la fase, en función de la frecuencia, de los cuatro filtros empleados en la práctica (filtro original, filtro con los coeficientes a y b cuantificados, filtro con los coeficientes de las Secciones de Segundo Orden cuantificados, y filtro con las raíces cuantificadas). Exponga y justifique gráficamente las conclusiones extraídas de dicho análisis.

Para la representación de la fase, utilice la función `unwrap` para eliminar saltos en la fase.

- d) Analice las diferencias en el diagrama de polos y ceros, de los cuatro filtros empleados en la práctica (filtro original, filtro con los coeficientes a y b cuantificados, filtro con los coeficientes de las Secciones de Segundo Orden cuantificados, y filtro con las raíces cuantificadas). Exponga y justifique gráficamente las conclusiones extraídas de dicho análisis.

Para evitar errores en la representación de los diagramas de polos y ceros emplee la función `zplane` con las raíces (polos y ceros) de cada uno de los filtros.

Funciones de Matlab

Consulte la ayuda de Matlab para conocer el significado de cada uno de los argumentos.

| Miscelánea | |
|---|--|
| Borra todas las variables del Workspace; Cerrar todas las figuras abiertas; y Limpiar la ventana de comandos | <code>Clear; close all; clc</code> |
| Muestra el mensaje de texto por pantalla | <code>disp('texto');</code> |
| Devuelve la longitud del vector x | <code>y = length(x);</code> |
| Devuelve el tamaño de x expresado en filas y columnas | <code>y = size(x);</code> |
| Calcula las Secciones de Segundo Orden sos y la ganancia g del filtro caracterizado por sus coeficientes a y b | <code>[sos, g] = tf2sos(b, a);</code> |
| Ordena los elementos del vector x | <code>y = sort(x);</code> |
| Vectores | |
| Generar el vector de valores v entre ini y fin equiespaciados delta | <code>v = ini : delta : fin;</code> |
| Generar el vector v de N valores equiespaciados entre ini y fin (inclusivos) | <code>v = linspace(ini, fin, N);</code> |
| Genera el vector v de N valores NaN | <code>v = NaN(1, N)</code> |
| Representación | |
| Representación en ejes x-y uniendo los puntos | <code>plot(ejex, ejey, '- .');</code> |
| Representación superpuesta de los diagramas de polos y ceros de los filtros caracterizados por los vectores columna de sus ceros z1 y z2 y de sus polos p1 y p2 | <code>zplane([z1 z2], [p1 p2], {'o', 'x'});</code> |
| Congela la figura activa para poder superponer más representaciones | <code>hold on;</code> |
| Activar la rejilla de la representación | <code>grid on;</code> |
| Poner título a la representación | <code>title('Texto');</code> |
| Poner etiqueta en eje x | <code>xlabel('Texto');</code> |
| Muestra una leyenda en la figura, donde se muestran los textos indicados | <code>legend('Texto1', 'Texto2', ...);</code> |

| Filtrado | |
|---|--|
| Diseño de un filtro IIR elíptico | <code>[b, a] = ellip(M, Apass, Astop, f/(Fs/2), 'low');</code> |
| Respuestas | |
| Calcula num puntos de la respuesta en frecuencia H de un filtro caracterizado por los coef. a y b | <code>H = freqz(b, a, num);</code> |
| Calcula num puntos de la respuesta en frecuencia H de un filtro caracterizado por las Secciones de Segundo Orden sos | <code>H = freqz(sos, num);</code> |
| Cuantificación | |
| Generar la escala de cuantificación q con B bits totales para cada nivel, de los cuales D son decimales | <code>q = quantizer('fixed', 'round', 'saturate', [B D]);</code> |
| Transformar un número decimal b en su representación binaria y según la cuantificación q | <code>y = num2bin(q, b);</code> |
| Transformar un número binario b en su representación decimal y según la cuantificación q | <code>y = bin2num(q, b);</code> |
| Matemáticas | |
| Calcula el valor absoluto del número x , o el módulo de éste si es un número complejo | <code>y = abs(x);</code> |
| Calcula el ángulo, en radianes, del número complejo x | <code>y = angle(x);</code> |
| Calcula la parte real del número complejo x | <code>y = real(x);</code> |
| Elimina saltos de $\pm\pi$ en el ángulo x | <code>y = unwrap(x);</code> |
| Calcula las raíces y del polinomio caracterizado por sus coeficientes x | <code>y = roots(x);</code> |
| Calcula el polinomio y a partir de las raíces x | <code>y = poly(x);</code> |
| Calcular el sumatorio de todos los valores del vector x | <code>y = sum(x);</code> |
| Calcula el logaritmo decimal de x | <code>y = log10(x);</code> |
| Número pi | <code>pi</code> |