Избрани задачи върху (не)определимост

Тодор Дуков

1 Структури с числов универсум

Задача 1.1. *Разглеждаме предикатния език $\mathcal{L}$, съставен от един триместен предикатен символ p, заедно с $\mathcal{L}$-структурата $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, p^{\mathcal{N}} \rangle$, където:*

$$p^{\mathcal{N}}(n, m, k) \stackrel{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} n + m = k.$$

Да се докаже, че:

а) всяко едно от множествата

$$\{0\},\ \{1\},\ \{3\},\ \{\langle n,\, m \rangle \mid 5 \text{ дели } n - m\}$$

е определимо в $\mathcal{N}$ с формула от езика $\mathcal{L}$;

б) идентитетът е единственият автоморфизъм в $\mathcal{N}$.

Задача 1.2. *Разглеждаме предикатния език $\mathcal{L}$, съставен от един триместен предикатен символ p, заедно с $\mathcal{L}$-структурата $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}^{>0}, p^{\mathcal{M}} \rangle$, където:*

$$p^{\mathcal{M}}(n, m, k) \stackrel{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} n^m = k.$$

Да се докаже, че всяко от следните множества е определимо с формула от езика $\mathcal{L}$:

а) $\{1\}$;

б) $\{\langle n,\, m,\, k \rangle \mid n \cdot m = k\}$;

в) $\{\langle n,\, m,\, k \rangle \mid n + m = k\}$;

г) $\{\langle n,\, m \rangle \mid n < m\}$.

Задача 1.3. *Разглеждаме предикатния език $\mathcal{L}$, съставен от един двуместен функционален символ f и символ $\doteq$ за формално равенство, заедно с $\mathcal{L}$-структурата $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, f^{\mathcal{N}} \rangle$, където:*

$$f^{\mathcal{N}}(n, m) = k \stackrel{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} 3^n(m+1) = k.$$

Да се докаже, че всяко от следните множества е определимо с формула от езика $\mathcal{L}$:

- *а)* $\{0\}$*;*
- *б)* $\{1\}$*;*
- *в)* $\{3^n \mid n \in \mathbb{N}\}$*;*
- *г)* $\{\langle n, m, k \rangle \mid n + m = k\}$.

Да се намерят всички автоморфизми в $\mathcal{N}$.

Задача 1.4. *Разглеждаме предикатния език $\mathcal{L}$, съставен от един триместен предикатен символ p, заедно с $\mathcal{L}$-структурата $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, p^{\mathcal{N}} \rangle$, където:*

$$p^{\mathcal{N}}(n, m, k) \stackrel{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} n - m = k^2.$$

- *а) Да се докаже, че всеки синглетон е определим.*
- *б) Да се определят* $\{\langle n, n \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ *и* $\{\langle n, m \rangle \mid n < m\}$.

Задача 1.5. *Разглеждаме предикатния език $\mathcal{L}$, съставен от един двуместен предикатен символ p, заедно с $\mathcal{L}$-структурата $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, p^{\mathcal{N}} \rangle$, където:*

$$p^{\mathcal{N}}(n, m) \stackrel{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} n + m \geq 3.$$

Да се докаже, че всяко от следните множества е определимо с формула от езика $\mathcal{L}$:

- *а)* $\{0\}$*;*
- *б)* $\{1\}$*;*
- *в)* $\{2\}$.

Задача 1.6. *Разглеждаме предикатния език $\mathcal{L}$, съставен от един едноместен функционален символ f, двуместен функционален символ g и символ $\doteq$ за формално равенство, заедно с $\mathcal{L}$-структурата $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N},\, f^{\mathcal{N}},\, g^{\mathcal{N}} \rangle$, където:*

$$f^{\mathcal{N}}(n) = m \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} n \text{ дава остатък } m \text{ при деление на } 5$$
$$g^{\mathcal{N}}(n, m) = k \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} n \cdot m = k.$$

а) Да се докаже, че всяко едно от множествата

$$\{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{5\}$$

е определимо в $\mathcal{N}$ с формула от езика $\mathcal{L}$.

б) Да се докаже, че съществува естествено число n, което не е определимо в $\mathcal{N}$ с формула от езика $\mathcal{L}$.

в) Да се намерят всички автоморфизми в $\mathcal{N}$.

Задача 1.7. *Разглеждаме предикатния език $\mathcal{L}$, съставен от един триместен предикатен символ p, заедно с $\mathcal{L}$-структурите:*

$$\mathcal{Z} = \langle \mathbb{Z},\, p^{\mathcal{Z}} \rangle,\ \mathcal{Q} = \langle \mathbb{Q},\, p^{\mathcal{Q}} \rangle \text{ и } \mathcal{R} = \langle \mathbb{R},\, p^{\mathcal{R}} \rangle,$$

където за всяко $\mathcal{A} \in \{\mathcal{Z}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}\}$ е изпълнено, че:

$$p^{\mathcal{A}}(a, b, c) \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} a + b = c.$$

Да се докаже, че в структурите $\mathcal{Z}, \mathcal{Q}$ и $\mathcal{R}$ единственото нетривиално множество, което е определимо, е $\{0\}$.

Задача 1.8. *Разглеждаме предикатния език $\mathcal{L}$, съставен от един триместен предикатен символ p, заедно с $\mathcal{L}$-структурите:*

$$\mathcal{Z} = \langle \mathbb{Z},\, p^{\mathcal{Z}} \rangle,\ \mathcal{Q} = \langle \mathbb{Q},\, p^{\mathcal{Q}} \rangle \text{ и } \mathcal{R} = \langle \mathbb{R},\, p^{\mathcal{R}} \rangle,$$

където за всяко $\mathcal{A} \in \{\mathcal{Z}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}\}$ е изпълнено, че:

$$p^{\mathcal{A}}(a, b, c) \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} a \cdot b = c.$$

Да се докаже, че в структурите $\mathcal{Z}, \mathcal{Q}$ и $\mathcal{R}$ единствените нетривиални множества, които са определими, са $\{-1\}, \{0\}$ и $\{1\}$.

Задача 1.9. *Нека с* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *бележим редицата от естествени числа, дефинирана по следния начин:*

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ и } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ за всяко естествено } n.$$

Разглеждаме предикатния език $\mathcal{L}$*, съставен от един двуместен функционален символ* f *и един едноместен предикатен символ* p*, заедно с* $\mathcal{L}$*-структурата* $\mathcal{S} = \langle \mathbb{N},\, f^{\mathcal{S}},\, p^{\mathcal{S}} \rangle$*, където:*

$$f^{\mathcal{S}}(n,m) = k \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} n + F_{m+1} = k$$

$$p^{\mathcal{S}}(n) \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} n \text{ е член на редицата } F.$$

Да се докаже, че в структурата $\mathcal{S}$ *са определими:*

$$\{0\},\ \{1\} \text{ и } \{\langle n,\, n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Вярно ли е, че в $\mathcal{S}$ *е определимо множеството:*

$$\{\langle F_n,\, F_{n+1}\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}?$$

Да се намерят всички автоморфизми в $\mathcal{S}$*.*

Задача 1.10. *Нека с* $\mathbb{Q}^+$ *бележим множеството от всички положителни рационални числа, а с* $\mathcal{F}$ *– множеството от всички функции* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$*. Разглеждаме предикатния език* $\mathcal{L}$*, съставен от два триместни предикатни символа* shift *и* mult*, заедно с* $\mathcal{L}$*-структурата* $\mathcal{S} = \langle \mathbb{Q}^+ \cup \mathcal{F},\, \mathrm{shift}^{\mathcal{S}},\, \mathrm{mult}^{\mathcal{S}} \rangle$*, където:*

$$\mathrm{shift}^{\mathcal{S}}(f,n,g) \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} f, g \in \mathcal{F},\ n \in \mathbb{N} \text{ и за всяко } k \in \mathbb{N} \text{ е изпълнено, че } f(n+k) = g(k)$$

$$\mathrm{mult}^{\mathcal{S}}(f,n,g) \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} f \in \mathcal{F},\ n \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{Q}^+ \text{ и } f(0) = \frac{q}{n}.$$

Да се докаже, че следните множества са определими в $\mathcal{S}$ *с формули от* $\mathcal{L}$*:*

а) $\{0\}$*;*

б) $\{\langle n,\, m,\, k\rangle \in \mathbb{N}^3 \mid n + m = k\}$*;*

в) $\{\langle n,\, m\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq m\}$*;*

г) $\{\langle a,\, b\rangle \in (\mathbb{Q}^+)^2 \mid a \leq b\}$*;*

д) $\{f \in \mathcal{F} \mid \text{за всяко } n \in \mathbb{N} \text{ е изпълнено, че } f(n) \leq f(n+1)\}$*.*

Нека за $X \subseteq \mathbb{R}$ *дефинираме множеството:*

$$\mathrm{Conv}(X) = \{f \in \mathcal{F} \mid \text{съществува } x \in X, \text{ за което } \lim_{n\to\infty} f(n) = x\}.$$

Определими ли са $\mathrm{Conv}(\mathbb{Q}^+)$ *и* $\mathrm{Conv}(\mathbb{R})$*?*

2 Структури с теоретико-множествен универсум

Задача 2.1. *Нека фиксираме крайна азбука* Σ. *Разглеждаме предикатния език* $\mathcal{L}$, *съставен от два триместни предикатен символ* $\circ$ *и* $\sqcap$, *заедно с* $\mathcal{L}$*-структурата* $\mathcal{M} = \langle \mathcal{P}(\Sigma^*),\, \circ^{\mathcal{M}},\, \sqcap^{\mathcal{M}} \rangle$, *където:*

$$\circ^{\mathcal{M}}(L_1, L_2, L_3) \stackrel{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} L_1 \cdot L_2 = L_3$$
$$\sqcap^{\mathcal{M}}(L_1, L_2, L_3) \stackrel{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} L_1 \cap L_2 = L_3.$$

Да се докаже, че всяко от следните множества е определимо с формула от езика $\mathcal{L}$*:*

а) $\{\langle L_1,\, L_2,\, L_3 \rangle \mid L_1 \cup L_2 = L_3\}$;

б) $\{\langle L,\, L^* \rangle \mid L \in \mathcal{P}(\Sigma^*)\}$;

За кои естествени числа n *е определимо множеството* $\{\Sigma^n\}$*?*
Да се определят всички автоморфизми в $\mathcal{M}$.

Задача 2.2. *Разглеждаме предикатния език* $\mathcal{L}$, *съставен от един двуместен предикатен символ* p *и символ* $\doteq$ *за формално равенство, заедно с фамилията от* $\mathcal{L}$*-структури* $\{\mathcal{S}_A\}_{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})}$, *където за всяко* $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$*:*

$$|\mathcal{S}_A| = \mathcal{P}(A)$$
$$p^{\mathcal{S}_A}(X, Y) \stackrel{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} \text{съществува инекция от } X \text{ в } Y.$$

Да се докаже, че за всяко $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *в* $\mathcal{S}_A$ *са определими:*

а) $\{\varnothing\}$;

б) $\{\langle X,\, Y \rangle \mid$ *има биекция от* X *в* $Y\}$;

в) $\{\langle X,\, Y \rangle \mid$ *има сюрекция от* X *в* $Y\}$;

г) за всяко естествено число n, *множеството* $F_{A,n} = \{X \in \mathcal{P}(A) \mid |X| = n\}$.

Измежду всички $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, *които съдържат елемента* 0, *да се намерят тези, за които е вярно, че:*

а) $\{\{0\}\}$ *е определимо в* $\mathcal{S}_A$;

б) $\{A \setminus \{0\}\}$ *е определимо в* $\mathcal{S}_A$.

Да се намерят онези $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, *за които* $\{A\}$ *е определимо в* $\mathcal{S}_A$.

Задача 2.3. *Разглеждаме предикатния език $\mathcal{L}$, съставен от един триместен предикатен символ p, заедно с $\mathcal{L}$-структурата $\mathcal{S} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}),\, p^{\mathcal{S}} \rangle$, където:*

$$p^{\mathcal{S}}(A, B, C) \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} A \cap B = C.$$

Да се докаже, че в $\mathcal{S}$ са определими:

- *а)* $\{\varnothing\}$;
- *б)* $\{\mathbb{N}\}$;
- *в)* $\{\langle A,\, B \rangle \mid A \subseteq B\}$;
- *г)* $\{\langle A,\, B,\, C \rangle \mid A \cup B = C\}$.

Да се докаже, че ако $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \varnothing$ и $A \neq \mathbb{N}$, то $\{A\}$ не е определимо в $\mathcal{S}$.

Задача 2.4. *Сума на две множества от точки в равнината $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ ще наричаме множеството:*

$$A + B = \{\langle a_1 + b_1,\, a_2 + b_2 \rangle \mid \langle a_1,\, a_2 \rangle \in A \text{ и } \langle b_1,\, b_2 \rangle \in B\}.$$

Разглеждаме предикатния език $\mathcal{L}$, съставен от един триместен предикатен символ sum *и един двуместен предикатен символ* check*, заедно с $\mathcal{L}$-структурата $\mathcal{S} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\, \mathrm{sum}^{\mathcal{S}},\, \mathrm{check}^{\mathcal{S}} \rangle$, където:*

$$\mathrm{sum}^{\mathcal{S}}(A, B, C) \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} A + B = C$$
$$\mathrm{check}^{\mathcal{S}}(A, B) \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} A \cap B \neq \varnothing.$$

Да се докаже, че в $\mathcal{S}$:

- *а) равенството на множества от точки е определимо;*
- *б) множествата $\{\{\langle 0,\, 0 \rangle\}\}$ и $\{\mathbb{R}^2\}$ са определими;*
- *в) множеството от всички едноточкови множества е определимо;*
- *г) множеството от централно симетрични множества[1] е определимо.*

Определимо ли е множеството $\{\{\langle 0,\, 1 \rangle, \langle 0,\, -1 \rangle\}\}$ в $\mathcal{S}$?
Кои са автоморфизмите в $\mathcal{S}$?

[1] Множество $A \subseteq \mathbb{R}^2$ е централно симетрично, ако $A = \{\langle -a,\, -b \rangle \mid \langle a,\, b \rangle \in A\}$.

Задача 2.5. *Разглеждаме език* $\mathcal{L}$, *съставен от един предикатен символ* p.
За естествено число $n > 3$, *с* $\mathcal{G}_n$ *означаваме класа от неориентирани графи с точно* n *върха. За граф* $G = \langle V, E\rangle$ *с* $\mathcal{F}(E)$ *означаваме фамилията от онези подмножества* $F \subseteq E$ *от ребра на графа* G, *за които графът* $\langle V, F\rangle$ *е гора, т.е. ацикличен граф. За всеки граф* $G \in \mathcal{G}_n$, *където* $G = \langle V, E\rangle$, *със* $\mathcal{S}_G$ *бележим* $\mathcal{L}$*-структурата, за която:*

$$|\mathcal{S}_G| = \mathcal{F}(E)$$
$$p^{\mathcal{S}_G}(A, B) \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} A \subseteq B.$$

Да се докаже, че за всеки фиксиран граф $G \in \mathcal{G}_n$, *където* $G = \langle V, E\rangle$, *следните множества са определими в* $\mathcal{S}_G$*:*

- *а)* $\{\varnothing\}$;
- *б)* $\{\{e\} \mid e \in E\}$.

Да се докаже, че за всяко $n > 3$ *има затворени формули* $\varphi^{(n)}_{forest}$ *и* $\varphi^{(n)}_{tree}$ *над езика* $\mathcal{L}$, *за които е вярно следното:*

- *а) за всеки граф* $G \in \mathcal{G}_n$, $\mathcal{S}_G \models \varphi^{(n)}_{forest}$ *точно когато* G *е гора;*
- *б) за всеки граф* $G \in \mathcal{G}_n$, $\mathcal{S}_G \models \varphi^{(n)}_{tree}$ *точно когато* G *е дърво.*

В зависимост от броя на ребрата, за кои гори $G \in \mathcal{G}_n$ *е вярно, че всяко ребро на* G *е определимо в* $\mathcal{S}_G$*?*

Задача 2.6. *Нека* $\mathcal{L}$ *е най-много изброим предикатен език и* $\mathcal{A}$ *е* $\mathcal{L}$*-структура с безкраен универсум.*
Да се докаже, че съществува множество, което не е определимо в $\mathcal{A}$ *с формула от* $\mathcal{L}$.

3 Структури с геометричен универсум

Задача 3.1. *Нека с $\mathbb{P}$ бележим множеството от всички точки в равнината, а с $\mathbb{T}$ – множеството от всички (неизродени) триъгълници в равнината. Разглеждаме предикатния език $\mathcal{L}$, съставен от един двуместен предикатен символ p, заедно с $\mathcal{L}$-структурата $\mathcal{M} = \langle \mathbb{P} \cup \mathbb{T},\, p^{\mathcal{M}} \rangle$, където:*

$$p^{\mathcal{M}}(A, t) \stackrel{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} A \in \mathbb{P},\ t \in \mathbb{T} \text{ и } A \in t.$$

Да се докаже, че в $\mathcal{M}$ са определими:

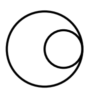
а) $\{\langle A,\, t\rangle \in \mathbb{P} \times \mathbb{T} \mid A \text{ лежи на контура на } t\}$;

б) $\{\langle A,\, t\rangle \in \mathbb{P} \times \mathbb{T} \mid A \text{ е връх на } t\}$;

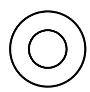
в) $\{\langle A,\, B,\, C,\, D\rangle \mid \text{правите } AB \text{ и } CD \text{ са успоредни } \}$;

д) $\{\langle A,\, B,\, C\rangle \mid A \text{ е среда на отсечката } BC\}$.

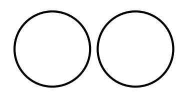
Задача 3.2. *Между два кръга възможностите за взаимни положения са шест:*



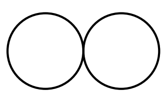
(1) подмножество с допирна точка



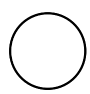
(2) подмножество без допирна точка



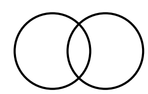
(3) празно сечение



(4) една обща точка на контура



(5) два равни кръга



(6) две общи точки на контура

Разглеждаме предикатния език $\mathcal{L}$, съставен от един двуместен предикатен символ p, заедно с фамилията от $\mathcal{L}$-структури $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in \{1,2,3,4\}}$, където за всяко $i \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$|\mathcal{C}_i| \text{ е множеството от всички кръгове в Евклидовата равнина}$$

$$p^{\mathcal{C}_i}(c_1, c_2) \stackrel{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} c_1 \text{ и } c_2 \text{ са във взаимно положение } (i).$$

Да се докаже, че за всяко $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ в структурата $\mathcal{C}_i$ са определими всички взаимни положения между два кръга.

Задача 3.3. *Разглеждаме предикатния език $\mathcal{L}$, съставен от един четириместен предикатен символ p, заедно с $\mathcal{L}$-структурата $\mathcal{S} = \langle \mathbb{E}_2, p^{\mathcal{S}} \rangle$, където:*

$$p^{\mathcal{S}}(A, B, C, D) \overset{деф.}{\longleftrightarrow} \text{отсечките } AB \text{ и } CD \text{ имат обща точка.}$$

Да се определи кои от следните множества са определими в $\mathcal{S}$:

а) $\{\langle A, B, C, D\rangle \mid$ *отсечката* AB *се съдържа в отсечката* $CD\}$;

б) $\{\langle A, B, C, D\rangle \mid$ *правите* AB *и* CD *са успоредни* $\}$;

в) $\{\langle A, B, C\rangle \mid$ *точката* C *лежи на отсечката* AB *и* $C \neq A, B\}$;

г) $\{\langle A, B, C, D\rangle \mid ABCD$ *е успоредник* $\}$;

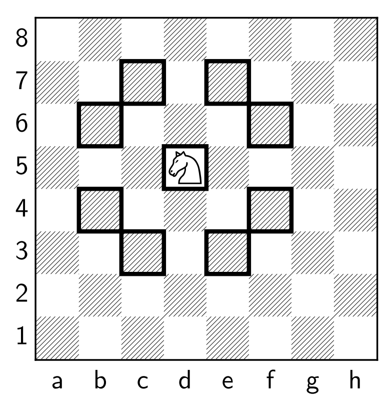
д) $\{\langle A, B, C\rangle \mid C$ *е среда на отсечката* $AB\}$;

е) $\{\langle A, B, C\rangle \mid \measuredangle ABC = 60^\circ\}$.

Задача 3.4. *Разглеждаме предикатния език $\mathcal{L}$, съставен от един двуместен предикатен символ p, заедно с $\mathcal{L}$-структурата $\mathcal{B}$, където:*

$|\mathcal{B}|$ *е множеството от всички полета в шахматна дъска (от* a1 *до* h8*)*

$p^{\mathcal{B}}(a, b) \overset{деф.}{\longleftrightarrow}$ *от полето a с кон може да се стигне до полето b.*



Да се докаже, че в структурата $\mathcal{B}$ са определими:

а) *множеството от ъгловите полета;*

б) *множеството от периферните полета.*

Да се докаже, че в структурата $\mathcal{B}$ не е определимо множеството $\{$a2$\}$.