Предикатно смятане от първи ред

Тодор Дуков

1 Синтаксис

Първо фиксираме едно изброимо множество от променливи Vars.

Нотация. Обикновено елементите на Vars ще означаваме с буквите x, y, z, t, u, v, w с потенциални индекси, примове и така нататък.

След това фиксираме логическите символи $\exists, \neg, \vee$, помощните символи $($, $)$ и **,** (символът запетая) и символ $\doteq$ за формално равенство, които не са елементи на Vars.

Дефиниция. *Език на предикатното смятане от първи ред (или накратко предикатен език) ще наричаме всяко* $\mathcal{L} = \langle \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \# \rangle$, *за което:*

- $\mathcal{C}$ *е множество, чиито елементи ще наричаме константни символи;*
- $\mathcal{F}$ *е множество, чиито елементи ще наричаме функционални символи;*
- $\mathcal{P}$ *е множество, чиито елементи ще наричаме предикатни символи;*
- $\mathcal{C}, \mathcal{F}$ *и* $\mathcal{P}$ *са две по две чужди;*
- *нито един от фиксираните символи не попада в* $\mathcal{C}, \mathcal{F}$ *или* $\mathcal{P}$*, потенциално с изключение на* $\doteq$*, който е възможно да е елемент на* $\mathcal{P}$*;*
- $\# : \mathcal{F} \cup \mathcal{P} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *ще наричаме функцуя на арност, като винаги* $\#(\doteq) = 2$ *(ако е добре дефинирано).*

Ако $\#(\zeta) = n$*, то тогава ще наричаме* ζ n*-местен функционален/предикатен символ.*

Нотация. Обикновено ще използваме:

- буквите a, b, c, d за константни символи;
- буквите f, g, h за функционални символи;
- буквите p, q, r, s за предикатни символи,

като позволяваме да има индекси, примове и така нататък.

Дефиниция. *Дефинираме индуктивно понятието терм в предикатен език* $\mathcal{L} = \langle \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \# \rangle$*:*

- *всеки елемент на* $\mathcal{C} \cup \mathrm{Vars}$ *е терм в* $\mathcal{L}$*;*
- *ако* $\tau_1, \ldots, \tau_n$ *са термове в* $\mathcal{L}$ *и* $f \in \mathcal{F}$ *има свойството* $\#(f) = n$*, то тогава* $f(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ *е терм в* $\mathcal{L}$*.*

Нотация. Термовете винаги ще бележим с буквата τ с потенциални индекси, примове и така нататък.

Дефиниция. *Дефинираме индуктивно понятието формула в предикатен език* $\mathcal{L} = \langle \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \# \rangle$*:*

- *за всеки* n*-местен предикатен символ* p *и термове* $\tau_1, \ldots, \tau_n$ *е изпълнено, че* $p(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ *е (атомарна) формула в* $\mathcal{L}$*;*
- *ако* φ *и* ψ *са формули в* $\mathcal{L}$*, то тогава* $\neg\varphi$ *и* $(\varphi \vee \psi)$ *са формули в* $\mathcal{L}$*;*
- *ако* x *е променлива и* φ *е формула в* $\mathcal{L}$*, то тогава* $\exists x \varphi$ *е формула в* $\mathcal{L}$*.*

Нотация. Формулите винаги ще бележим с буквите φ, ψ, χ с потенциални индекси, примове и така нататък.

Дефиниция. *За формула или терм* α *с* $\mathrm{Vars}[\alpha]$ *ще бележим множеството от всички променливи, които се срещат в* α*.*

Дефиниция. *Всеки терм* τ*, за който* $\mathrm{Vars}[\tau] = \varnothing$*, се нарича затворен.*

Нотация. Под $\tau[x_1, \ldots, x_n]$ ще имаме предвид “τ е терм с променливи измежду $x_1, \ldots, x_n$”, тоест $\mathrm{Vars}[\tau] \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Дефиниция. *Дефинираме множеството от свободни променливи* $\operatorname{Free}[\varphi]$ *за формула* φ *в предикатен език* $\mathcal{L}$ *с индукция относно построението на* φ*:*

- $\operatorname{Free}[p(\tau_1, \dots, \tau_n)] = \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Vars}[\tau_i]$*;*
- $\operatorname{Free}[(\varphi \vee \psi)] = \operatorname{Free}[\varphi] \cup \operatorname{Free}[\psi]$*;*
- $\operatorname{Free}[\neg\varphi] = \operatorname{Free}[\varphi]$*;*
- $\operatorname{Free}[\exists x \varphi] = \operatorname{Free}[\varphi] \setminus \{x\}$.

Нотация. За двуместни функционални/предикатни символи ζ въвеждаме записа $\tau_1 \zeta \tau_2$ като съкращение на $\zeta(\tau_1, \tau_2)$.

Дефиниция. *Всяка формула* φ*, за която* $\operatorname{Free}[\varphi] = \varnothing$*, се нарича затворена.*

Нотация. Под $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ ще имаме предвид "φ е формула със свободни променливи измежду $x_1, \dots, x_n$", тоест $\operatorname{Free}[\varphi] \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

Нотация. Нека фиксираме новите символи $\&, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall$. Въвеждаме следните съкращения:

- $(\varphi \;\&\; \psi)$ е съкращение за $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$;
- $(\varphi \Rightarrow \psi)$ е съкращение за $(\neg\varphi \vee \psi)$;
- $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ е съкращение за $((\varphi \Rightarrow \psi) \;\&\; (\psi \Rightarrow \varphi))$;
- $\forall x$ е съкращение за $\neg\exists x \neg$;
- $\varphi_1 \,\sigma\, \dots \,\sigma\, \varphi_n$ е съкращение за $(\varphi_1 \,\sigma\, (\varphi_2 \,\sigma\, (\dots (\varphi_{n-1} \,\sigma\, \varphi_n) \dots)))$ за $\sigma \in \{\vee, \&\}$;
- няма да пишем най-външните скоби, ако формулата започва с такива.

2 Семантика

Дефиниция. *Структура за предикатен език* $\mathcal{L} = \langle \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \# \rangle$ *ще наричаме всяко* $\mathcal{A} = \langle A, C, F, P \rangle$*, за което:*

- $A \neq \varnothing$ *се нарича универсум или носител на* $\mathcal{A}$*;*
- $C \subseteq A$ *и за всяко* $c \in \mathcal{C}$ *има* $c^{\mathcal{A}} \in C$*;*
- *за всяко* $f \in \mathcal{F}$ *с* $\#(f) = n$ *има* $f^{\mathcal{A}} \in F$*, като* $f^{\mathcal{A}} : A^n \to A$*;*
- *за всяко* $p \in \mathcal{P}$ *с* $\#(p) = n$ *има* $p^{\mathcal{A}} \in P$*, като* $p^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$ *и в частност* $\doteq^{\mathcal{A}}$ *винаги играе ролята на идентитет (при език с формално равенство).*

Нотация. Обикновено структурите ще бележим с ръкописни латински букви $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots, \mathcal{Z}$ с потенциални индекси, примове и така нататък.

Нотация. Вместо да използваме записа $\mathcal{A} = \langle A, C, F, P \rangle$ ще изреждаме всички символи, тоест ще пишем $\mathcal{A} = \langle A, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \ldots, f_0^{\mathcal{A}}, f_1^{\mathcal{A}}, \ldots, p_0^{\mathcal{A}}, p_1^{\mathcal{A}}, \ldots \rangle$.

Нотация. Универсум на структурата $\mathcal{A}$ ще бележим с $|\mathcal{A}|$.

Нотация. За да няма конфликти между обектния език и метаезика ще използваме $f[x]$ вместо $f(x)$, когато искаме образът на x през f.

Дефиниция. *Нека* $\mathcal{L}$ *е предикатен език и* $\mathcal{A}$ *е структура за* $\mathcal{L}$*. Оценка в структурата* $\mathcal{A}$ *ще наричаме всяка функция* $v : \mathrm{Vars} \to |\mathcal{A}|$.

Дефиниция. *Нека* $\mathcal{L}$ *е предикатен език,* $\mathcal{A}$ *е структура за езика* $\mathcal{L}$ *и* v *е оценка в* $\mathcal{A}$*. С индукция относно построението на терма* τ *дефинираме* $\tau_v^{\mathcal{A}}$*:*

- $c_v^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}}$*;*
- $x_v^{\mathcal{A}} = v[x]$*;*
- $f(\tau_1, \ldots, \tau_k)_v^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{A}}[{\tau_1}_v^{\mathcal{A}}, \ldots, {\tau_k}_v^{\mathcal{A}}]$.

Дефиниция. *Нека* $\mathcal{L}$ *е предикатен език,* $\mathcal{A}$ *е структура за* $\mathcal{L}$ *и* v *е оценка в* $\mathcal{A}$*. Тогава* $x \in \mathrm{Vars}$ *и* $a \in |\mathcal{A}|$ *дефинираме оценката:*

$$v_x^a[y] = \begin{cases} a, & \text{ако } y = x \\ v[y], & \text{иначе} \end{cases}$$

Дефиниция. *Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език, $\mathcal{A}$ е структура за езика $\mathcal{L}$ и v е оценка в $\mathcal{A}$. С индукция относно построението на формулата φ дефинираме $\mathcal{A} \models_v \varphi$:*

- $\mathcal{A} \models_v p(\tau_1, \ldots, \tau_k) \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} \langle {\tau_1}_v^{\mathcal{A}}, \ldots, {\tau_k}_v^{\mathcal{A}} \rangle \in p^{\mathcal{A}}$;
- $\mathcal{A} \models_v \neg\varphi \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} \mathcal{A} \not\models_v \varphi$ *(не е вярно, че $\mathcal{A} \models_v \varphi$);*
- $\mathcal{A} \models_v (\varphi \vee \psi) \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} \mathcal{A} \models_v \varphi$ *или* $\mathcal{A} \models_v \psi$;
- $\mathcal{A} \models_v \exists x \varphi \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow}$ *има $a \in |\mathcal{A}|$, за което $\mathcal{A} \models_{v_x^a} \varphi$.*

Дефиниция. *Ако за всяка оценка v в структурата $\mathcal{A}$ е изпълнено, че $\mathcal{A} \models_v \varphi$, тогава ще пишем $\mathcal{A} \models \varphi$.*

Свойство. *Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език, $\mathcal{A}$ е структура за $\mathcal{L}$ и v е оценка в $\mathcal{A}$. Тогава следните са в сила:*

- $\mathcal{A} \models_v (\varphi \,\&\, \psi) \longleftrightarrow \mathcal{A} \models_v \varphi$ *и* $\mathcal{A} \models_v \psi$;
- $\mathcal{A} \models_v (\varphi \Rightarrow \psi) \longleftrightarrow$ *ако $\mathcal{A} \models_v \varphi$, то $\mathcal{A} \models_v \psi$;*
- $\mathcal{A} \models_v (\varphi \Leftrightarrow \psi) \longleftrightarrow \mathcal{A} \models_v \varphi$ *т.с.т.к.* $\mathcal{A} \models_v \psi$;
- $\mathcal{A} \models_v \forall x \varphi \longleftrightarrow$ *за всяко $a \in |\mathcal{A}|$ имаме $\mathcal{A} \models_{v_x^a} \varphi$;*

Свойство. *Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език, $\mathcal{A}$ е структура за $\mathcal{L}$, τ е терм в $\mathcal{L}$ и v_1, v_2 са такива оценки в $\mathcal{A}$, за които за всяко $x \in \mathrm{Vars}[\tau]$ имаме $v_1[x] = v_2[x]$. Тогава:*

$$\tau_{v_1}^{\mathcal{A}} = \tau_{v_2}^{\mathcal{A}}.$$

Това свойство прави следното съкращение коректно:

Нотация. Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език, $\mathcal{A}$ е структура за $\mathcal{L}$ с $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{A}|$. За терм $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ пишем, $\tau^{\mathcal{A}}[\![a_1, \ldots, a_n]\!]$ вместо $\tau_v^{\mathcal{A}}$, където v е произволна оценка в $\mathcal{A}$, за която за всяко $1 \leq i \leq n$ имаме $v[x_i] = a_i$.

Свойство. *Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език, $\mathcal{A}$ е структура за $\mathcal{L}$, φ е формула в $\mathcal{L}$ и v_1, v_2 са такива оценки в $\mathcal{A}$, за които за всяко $x \in \mathrm{Free}[\varphi]$ имаме $v_1[x] = v_2[x]$. Тогава:*

$$\mathcal{A} \models_{v_1} \varphi \longleftrightarrow \mathcal{A} \models_{v_2} \varphi.$$

Това свойство прави следното съкращение коректно:

Нотация. Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език, $\mathcal{A}$ е структура за $\mathcal{L}$ с $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{A}|$. За формула $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ пишем, че $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, \ldots, a_n]\!]$, ако има оценка v в $\mathcal{A}$, за която за всяко $1 \leq i \leq n$ имаме $v[x_i] = a_i$ и $\mathcal{A} \models_v \varphi$.

Дефиниция. *Нека $\mathcal{A}$ е структура за предикатния език $\mathcal{L}$. Казваме, че едно множество $X \subseteq |\mathcal{A}|^n$ е определимо в езика $\mathcal{L}$, ако има формула φ в $\mathcal{L}$, за която:*

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in X \longleftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, \ldots, a_n]\!].$$

Дефиниция. *Нека Γ е множество от формули в предикатния език $\mathcal{L}$ и $\mathcal{A}$ е структура за $\mathcal{L}$. Казваме, че $\mathcal{A}$ е модел на Γ и пишем $\mathcal{A} \models \Gamma$, ако за всяко $\varphi \in \Gamma$ е изпълнено, че $\mathcal{A} \models \varphi$.*

Дефиниция. *Едно множество от формули наричаме изпълнимо, ако за него съществува модел.*

Дефиниция. *Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са структури за предикатния език $\mathcal{L}$. Функцията $h : |\mathcal{A}| \to |\mathcal{B}|$ наричаме изоморфизъм, ако:*

- *h е биекция;*
- *$h[c^{\mathcal{A}}] = c^{\mathcal{B}}$ за всеки константен символ c;*
- *$h[f^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n]] = f^{\mathcal{B}}[h[a_1], \ldots, h[a_n]]$ за всеки функционален символ f и $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{A}|$;*
- *$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in p^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow \langle h[a_1], \ldots, h[a_n] \rangle \in p^{\mathcal{B}}$ за всеки предикатен символ p и $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{A}|$.*

Ако $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, то тогава h се нарича и автоморфизъм.

Свойство. *Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са структури за предикатния език $\mathcal{L}$ и h е изоморфизъм между тях. Тогава за всеки терм $\tau[x_1, \ldots, x_n]$, за всяка формула $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ и $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{A}|$:*

$$h[\tau^{\mathcal{A}}[\![a_1, \ldots, a_n]\!]] = \tau^{\mathcal{B}}[\![h[a_1], \ldots, h[a_n]]\!] \text{ и } \mathcal{A} \models \varphi \longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\![h[a_1], \ldots, h[a_n]]\!].$$

Свойство. *Нека $\mathcal{A}$ е структура за предикатния език $\mathcal{L}$, h е автоморфизъм (от $\mathcal{A}$ към себе си) и $X \subseteq |\mathcal{A}|^n$. Тогава ако X е определимо, то:*

$$\{\langle h[a_1], \ldots, h[a_n] \rangle \mid \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in X\} = X.$$