Задачи върху изпълнимост

Тодор Дуков

1 Стандартни структури

Задача 1.1. *Да се докаже, че следното множество от формули е изпълнимо:*

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 : \forall x \neg p(x,x) \mathbin{\&} \forall x \exists y\, p(x,y)\\
&\varphi_2 : \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \mathbin{\&} p(y,z) \Rightarrow p(x,z))\\
&\varphi_3 : \forall x \forall y (p(x,y) \Rightarrow \exists z (p(x,z) \mathbin{\&} p(z,y)))\\
&\varphi_4 : \exists x \forall y (p(x,y) \vee x \doteq y)\\
&\varphi_5 : \exists x \exists y (\neg p(x,y) \mathbin{\&} \neg p(y,x)).
\end{aligned}$$

Задача 1.2. *Да се докаже, че следното множество от формули е изпълнимо:*

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 : \forall x \neg p(x,x)\\
&\varphi_2 : \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \mathbin{\&} p(y,z) \Rightarrow p(x,z))\\
&\varphi_3 : \forall x \forall y (q(x,y) \Rightarrow p(x,y))\\
&\varphi_4 : \forall x \exists y \exists z (q(x,y) \mathbin{\&} q(x,z) \mathbin{\&} y \not\doteq z)\\
&\varphi_5 : \forall x \forall y (p(x,y) \Rightarrow f(x,y) \doteq x)\\
&\varphi_6 : \forall x \forall y \forall z (f(x, f(y,z)) \doteq f(f(x,y),z)).
\end{aligned}$$

Задача 1.3. *Да се докаже, че следното множество от формули е изпълнимо:*

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 : \forall x \neg p(x,x) \mathbin{\&} \forall x \exists y\, p(x,y)\\
&\varphi_2 : \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \mathbin{\&} p(y,z) \Rightarrow p(x,z))\\
&\varphi_3 : \forall x \forall y ((q(x) \Leftrightarrow q(y)) \mathbin{\&} p(x,y) \Rightarrow \exists z ((q(x) \Leftrightarrow \neg q(z)) \mathbin{\&} p(x,z) \mathbin{\&} p(z,y)))\\
&\varphi_4 : \forall x \exists y ((q(x) \Leftrightarrow \neg q(s(x))) \mathbin{\&} s(y) \doteq x)\\
&\varphi_5 : \forall x \forall y (s(x) \doteq s(y) \Rightarrow x \doteq y)
\end{aligned}$$

Задача 1.4. *Да се докаже, че следното множество от формули е изпълнимо:*

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 : \forall x \forall y \forall z (f(x, f(y,z)) \doteq f(f(x,y),z) \ \&\ g(x, g(y,z)) \doteq g(g(x,y),z))\\
&\varphi_2 : \forall x \forall y (f(x,y) \doteq f(y,x)) \ \&\ \exists x \exists y (g(x,y) \not\doteq g(y,x))\\
&\varphi_3 : \forall x \forall y (r(x) \ \&\ r(y) \Rightarrow r(f(x,y)) \ \&\ r(g(x,y)))\\
&\varphi_4 : \forall x (r(x) \Rightarrow r(s(x)))\\
&\varphi_5 : \forall x (s(s(x)) \doteq s(x))\\
&\varphi_6 : \exists x \exists y (r(x) \ \&\ \neg r(y)).
\end{aligned}$$

Задача 1.5. *Да се докаже, че следното множество от формули е изпълнимо:*

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 : \forall x \forall y \forall z (f(x, g(y,z)) \doteq g(f(x,y), f(x,z)))\\
&\varphi_2 : \forall x \forall y (f(x,y) \doteq f(y,x) \ \&\ g(x,y) \doteq g(y,x))\\
&\varphi_3 : \forall x (f(x,x) \doteq x \ \&\ g(x,x) \doteq x)\\
&\varphi_4 : \forall x \forall y (f(x,y) \doteq h(g(h(x), h(y))) \ \&\ h(h(x)) \doteq x \ \&\ h(x) \not\doteq x)\\
&\varphi_5 : \forall x (f(x,a) \doteq a \ \&\ g(x,a) \doteq x)\\
&\varphi_6 : \forall x (g(x,b) \doteq b \ \&\ f(x,b) \doteq x)\\
&\varphi_7 : h(a) \doteq b \ \&\ h(b) \doteq a.
\end{aligned}$$

Задача 1.6. *Да се докаже, че следното множество от формули е изпълнимо:*

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 : \forall x \forall y \forall z (f(x, f(y,z)) \doteq f(f(x,y),z) \ \&\ g(x, g(y,z)) \doteq g(g(x,y),z))\\
&\varphi_2 : \forall x \forall y (f(x,y) \doteq f(y,x)) \ \&\ \exists x \exists y (g(x,y) \not\doteq g(y,x))\\
&\varphi_3 : \forall x \forall y \forall z (g(x, f(y,z)) \doteq f(g(x,y), g(x,z)) \ \&\ g(f(x,y),z) \doteq f(g(x,z), g(y,z)))\\
&\varphi_4 : \forall x \exists y (f(x,y) \doteq a) \ \&\ \exists x \exists y (x \not\doteq a \ \&\ y \not\doteq a \ \&\ g(x,y) \doteq a)\\
&\varphi_5 : \forall x (f(x,a) \doteq x \ \&\ g(x,a) \doteq a \ \&\ g(x,b) \doteq x).
\end{aligned}$$

2 Нестандартни структури

Задача 2.1. *Да се докаже, че следното множество от формули е изпълнимо:*

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 : \forall x \forall y (p(x,y) \Rightarrow \forall z (p(z,x) \lor p(y,z))) \\
&\varphi_2 : \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \;\&\; p(y,z) \Rightarrow \neg p(x,z)) \\
&\varphi_3 : \forall x \forall y (p(x,y) \Rightarrow \neg p(y,x)).
\end{aligned}$$

Задача 2.2. *Да се докаже, че следното множество от формули е изпълнимо:*

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 : \forall x (p(x,x) \Leftrightarrow \neg \exists y\, p(x,y)) \\
&\varphi_2 : \forall x \forall y (p(x,y) \Leftrightarrow \exists z (p(x,z) \;\&\; p(z,y))) \\
&\varphi_3 : \forall x \forall y (p(x,y) \Rightarrow p(f(y), f(x))) \\
&\varphi_4 : \forall x \exists y (p(x,y) \;\&\; p(y, f(y)) \;\&\; p(f(y), f(x))).
\end{aligned}$$

Задача 2.3. *Да се докаже, че следното множество от формули е изпълнимо:*

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 : \forall x (p(x,x) \;\&\; \neg r(x,x)) \\
&\varphi_2 : \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \;\&\; p(y,z) \Rightarrow p(x,z))) \\
&\varphi_3 : \forall x \forall y (p(y, f(x)) \Leftrightarrow \exists z (r(x,z) \;\&\; f(z) \doteq y)) \\
&\varphi_4 : \forall x \forall y \forall z (r(x,z) \;\&\; r(x,y) \;\&\; f(y) \doteq f(z) \Rightarrow y \doteq z) \\
&\varphi_5 : \forall x \exists y\, r(y,x).
\end{aligned}$$

Задача 2.4. *Да се докаже, че следното множество от формули е изпълнимо:*

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 : \forall x \forall y (\neg p(x,x) \;\&\; (p(x,y) \Leftrightarrow \exists z (p(x,z) \;\&\; p(z,y)))) \\
&\varphi_2 : \forall x \forall y ((r(x) \Leftrightarrow r(y)) \Leftrightarrow (p(x,y) \lor p(y,x) \lor x \doteq y)) \\
&\varphi_3 : \forall x \forall y (f(x) \doteq f(y) \Rightarrow x \doteq y) \;\&\; \forall x (r(x) \Leftrightarrow \neg r(f(x))) \\
&\varphi_4 : \forall x \exists y\, p(x,y) \;\&\; \forall x (r(x) \Rightarrow \exists y (f(y) \doteq x)) \\
&\varphi_5 : \forall x (\neg r(x) \Rightarrow \forall y (p(x,y) \Rightarrow \exists z (p(x,z) \;\&\; p(z,y) \;\&\; \neg \exists t (f(t) \doteq z)))).
\end{aligned}$$

3 Теоретични задачи

Забележка. Голяма част от задачите тук изискват знания от лекции, тоест е възможно в този момент читателя да няма апарата, който е нужен за решаването на тези задачи.

Задача 3.1 (Свойство на крайните модели)**.** *Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език, съставен единствено от едноместните предикатни символи $p_1, \dots, p_n$. Да се докаже, че за всяко множество от формули Γ за езика $\mathcal{L}$ е изпълнено, че:*

$$\Gamma \text{ има модел} \longleftrightarrow \Gamma \text{ има краен модел.}$$

Какво можем да извлечем от този резултат за разрешимостта на въпроса за изпълнимост на формули в езика $\mathcal{L}$?

Задача 3.2 (Компактност)**.** *Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език. Да се докаже, че всяко множество от формули Γ за езика $\mathcal{L}$ е изпълнено, че:*

$$\Gamma \text{ е изпълнимо} \longleftrightarrow \text{всяко крайно подмножество на } \Gamma \text{ е изпълнимо.}$$

Упътване. Използвайте факта, че:

$$\Gamma \text{ е изпълнимо} \longleftrightarrow \Gamma \nvdash_{\mathcal{R}} \square.$$

Задача 3.3 (Топологично сортиране)**.** *Да се докаже, че всяка частична наредба може да се разшири до линейна.*

Задача 3.4 (Лема на Kőnig)**.** *Във всяко изброимо дърво, където всеки връх има крайно много деца, има път, който минава през всеки етаж.*

Задача 3.5. *Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език с формално равенство. Да се докаже, че ако едно множество от формули Γ за езика $\mathcal{L}$ има произволно големи крайни модели, то тогава Γ има безкраен модел.*