Задачи върху изпълнимост

Тодор Дуков

1 Стандартни структури

Задача 1.1. *Да се докаже, че следното множество от формули е изпълнимо:*

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1 : \forall x \neg p(x,x) \mathbin{\&} \forall x \exists y\, p(x,y)\\
&\varphi_2 : \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \mathbin{\&} p(y,z) \Rightarrow p(x,z))\\
&\varphi_3 : \forall x \forall y (p(x,y) \Rightarrow \exists z (p(x,z) \mathbin{\&} p(z,y)))\\
&\varphi_4 : \exists x \forall y (p(x,y) \lor x \doteq y)\\
&\varphi_5 : \exists x \exists y (\neg p(x,y) \mathbin{\&} \neg p(y,x)).
\end{aligned}
$$

Задача 1.2. *Да се докаже, че следното множество от формули е изпълнимо:*

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1 : \forall x \neg p(x,x)\\
&\varphi_2 : \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \mathbin{\&} p(y,z) \Rightarrow p(x,z))\\
&\varphi_3 : \forall x \forall y (q(x,y) \Rightarrow p(x,y))\\
&\varphi_4 : \forall x \exists y \exists z (q(x,y) \mathbin{\&} q(x,z) \mathbin{\&} y \not\doteq z)\\
&\varphi_5 : \forall x \forall y (p(x,y) \Rightarrow f(x,y) \doteq x)\\
&\varphi_6 : \forall x \forall y \forall z (f(x, f(y,z)) \doteq f(f(x,y),z)).
\end{aligned}
$$

Задача 1.3. *Да се докаже, че следното множество от формули е изпълнимо:*

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1 : \forall x \neg p(x,x) \mathbin{\&} \forall x \exists y\, p(x,y)\\
&\varphi_2 : \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \mathbin{\&} p(y,z) \Rightarrow p(x,z))\\
&\varphi_3 : \forall x \forall y ((q(x) \Leftrightarrow q(y)) \mathbin{\&} p(x,y) \Rightarrow \exists z ((q(x) \Leftrightarrow \neg q(z)) \mathbin{\&} p(x,z) \mathbin{\&} p(z,y)))\\
&\varphi_4 : \forall x \exists y ((q(x) \Leftrightarrow \neg q(s(x))) \mathbin{\&} s(y) \doteq x)\\
&\varphi_5 : \forall x \forall y (s(x) \doteq s(y) \Rightarrow x \doteq y)
\end{aligned}
$$

Задача 1.4. *Да се докаже, че следното множество от формули е изпълнимо:*

$$\varphi_1 : \forall x \forall y \forall z (f(x, f(y,z)) \doteq f(f(x,y),z) \;\&\; g(x, g(y,z)) \doteq g(g(x,y),z))$$
$$\varphi_2 : \forall x \forall y (f(x,y) \doteq f(y,x)) \;\&\; \exists x \exists y (g(x,y) \not\doteq g(y,x))$$
$$\varphi_3 : \forall x \forall y (r(x) \;\&\; r(y) \Rightarrow r(f(x,y)) \;\&\; r(g(x,y)))$$
$$\varphi_4 : \forall x (r(x) \Rightarrow r(s(x)))$$
$$\varphi_5 : \forall x (s(s(x)) \doteq s(x))$$
$$\varphi_6 : \exists x \exists y (r(x) \;\&\; \neg r(y)).$$

Задача 1.5. *Да се докаже, че следното множество от формули е изпълнимо:*

$$\varphi_1 : \forall x \forall y \forall z (f(x, g(y,z)) \doteq g(f(x,y), f(x,z)))$$
$$\varphi_2 : \forall x \forall y (f(x,y) \doteq f(y,x) \;\&\; g(x,y) \doteq g(y,x))$$
$$\varphi_3 : \forall x (f(x,x) \doteq x \;\&\; g(x,x) \doteq x)$$
$$\varphi_4 : \forall x \forall y (f(x,y) \doteq h(g(h(x), h(y))) \;\&\; h(h(x)) \doteq x \;\&\; h(x) \not\doteq x)$$
$$\varphi_5 : \forall x (f(x,a) \doteq a \;\&\; g(x,a) \doteq x)$$
$$\varphi_6 : \forall x (g(x,b) \doteq b \;\&\; f(x,b) \doteq x)$$
$$\varphi_7 : h(a) \doteq b \;\&\; h(b) \doteq a.$$

Задача 1.6. *Да се докаже, че следното множество от формули е изпълнимо:*

$$\varphi_1 : \forall x \forall y \forall z (f(x, f(y,z)) \doteq f(f(x,y),z) \;\&\; g(x, g(y,z)) \doteq g(g(x,y),z))$$
$$\varphi_2 : \forall x \forall y (f(x,y) \doteq f(y,x)) \;\&\; \exists x \exists y (g(x,y) \not\doteq g(y,x))$$
$$\varphi_3 : \forall x \forall y \forall z (g(x, f(y,z)) \doteq f(g(x,y), g(x,z)) \;\&\; g(f(x,y),z) \doteq f(g(x,z), g(y,z)))$$
$$\varphi_4 : \forall x \exists y (f(x,y) \doteq a) \;\&\; \exists x \exists y (x \not\doteq a \;\&\; y \not\doteq a \;\&\; g(x,y) \doteq a)$$
$$\varphi_5 : \forall x (f(x,a) \doteq x \;\&\; g(x,a) \doteq a \;\&\; g(x,b) \doteq x).$$

2 Нестандартни структури

Задача 2.1. *Да се докаже, че следното множество от формули е изпълнимо:*

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1 : \forall x \forall y (p(x, y) \Rightarrow \forall z (p(z, x) \lor p(y, z)))\\
&\varphi_2 : \forall x \forall y \forall z (p(x, y) \;\&\; p(y, z) \Rightarrow \neg p(x, z))\\
&\varphi_3 : \forall x \forall y (p(x, y) \Rightarrow \neg p(y, x)).
\end{aligned}
$$

Задача 2.2. *Да се докаже, че следното множество от формули е изпълнимо:*

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1 : \forall x (p(x, x) \Leftrightarrow \neg \exists y\, p(x, y))\\
&\varphi_2 : \forall x \forall y (p(x, y) \Leftrightarrow \exists z (p(x, z) \;\&\; p(z, y)))\\
&\varphi_3 : \forall x \forall y (p(x, y) \Rightarrow p(f(y), f(x)))\\
&\varphi_4 : \forall x \exists y (p(x, y) \;\&\; p(y, f(y)) \;\&\; p(f(y), f(x))).
\end{aligned}
$$

Задача 2.3. *Да се докаже, че следното множество от формули е изпълнимо:*

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1 : \forall x (p(x, x) \;\&\; \neg r(x, x))\\
&\varphi_2 : \forall x \forall y \forall z (p(x, y) \;\&\; p(y, z) \Rightarrow p(x, z)))\\
&\varphi_3 : \forall x \forall y (p(y, f(x)) \Leftrightarrow \exists z (r(x, z) \;\&\; f(z) \doteq y))\\
&\varphi_4 : \forall x \forall y \forall z (r(x, z) \;\&\; r(x, y) \;\&\; f(y) \doteq f(z) \Rightarrow y \doteq z)\\
&\varphi_5 : \forall x \exists y\, r(y, x).
\end{aligned}
$$

Задача 2.4. *Да се докаже, че следното множество от формули е изпълнимо:*

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1 : \forall x \forall y (\neg p(x, x) \;\&\; (p(x, y) \Leftrightarrow \exists z (p(x, z) \;\&\; p(z, y))))\\
&\varphi_2 : \forall x \forall y ((r(x) \Leftrightarrow r(y)) \Leftrightarrow (p(x, y) \lor p(y, x) \lor x \doteq y))\\
&\varphi_3 : \forall x \forall y (f(x) \doteq f(y) \Rightarrow x \doteq y) \;\&\; \forall x (r(x) \Leftrightarrow \neg r(f(x)))\\
&\varphi_4 : \forall x \exists y\, p(x, y) \;\&\; \forall x (r(x) \Rightarrow \exists y (f(y) \doteq x))\\
&\varphi_5 : \forall x (\neg r(x) \Rightarrow \forall y (p(x, y) \Rightarrow \exists z (p(x, z) \;\&\; p(z, y) \;\&\; \neg \exists t (f(t) \doteq z)))).
\end{aligned}
$$