Предикатно смятане от първи ред

Тодор Дуков

1 Синтаксис

Първо фиксираме едно изброимо множество от променливи Vars.

Нотация. Обикновено елементите на Vars ще означаваме с буквите x, y, z, t, u, v, w с потенциални индекси, примове и така нататък.

След това фиксираме логическите символи $\exists, \neg, \lor$, помощните символи $($, $)$ и **,** (символът запетая) и символ $\doteq$ за формално равенство, които не са елементи на Vars.

Дефиниция. *Език на предикатното смятане от първи ред (или накратко предикатен език) ще наричаме всяко $\mathcal{L} = \langle \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \# \rangle$, за което:*

- *$\mathcal{C}$ е множество, чиито елементи ще наричаме константни символи;*
- *$\mathcal{F}$ е множество, чиито елементи ще наричаме функционални символи;*
- *$\mathcal{P}$ е множество, чиито елементи ще наричаме предикатни символи;*
- *$\mathcal{C}, \mathcal{F}$ и $\mathcal{P}$ са две по две чужди;*
- *нито един от фиксираните символи не попада в $\mathcal{C}, \mathcal{F}$ или $\mathcal{P}$, потенциално с изключение на $\doteq$, който е възможно да е елемент на $\mathcal{P}$;*
- *$\# : \mathcal{F} \cup \mathcal{P} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ще наричаме функцяя на арност, като винаги $\#(\doteq) = 2$ (ако е добре дефинирано).*

Ако $\#(\zeta) = n$, то тогава ще наричаме ζ n-местен функционален/предикатен символ.

Нотация. Обикновено ще използваме:

- буквите a, b, c, d за константни символи;
- буквите f, g, h за функционални символи;
- буквите p, q, r, s за предикатни символи,

като позволяваме да има индекси, примове и така нататък.

Дефиниция. *Дефинираме индуктивно понятието терм в предикатен език* $\mathcal{L} = \langle \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \# \rangle$*:*

- *всеки елемент на* $\mathcal{C} \cup \mathrm{Vars}$ *е терм в* $\mathcal{L}$*;*
- *ако* $\tau_1, \ldots, \tau_n$ *са термове в* $\mathcal{L}$ *и* $f \in \mathcal{F}$ *има свойството* $\#(f) = n$*, то тогава* $f(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ *е терм в* $\mathcal{L}$*.*

Нотация. Термовете винаги ще бележим с буквата τ с потенциални индекси, примове и така нататък.

Дефиниция. *Дефинираме индуктивно понятието формула в предикатен език* $\mathcal{L} = \langle \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \# \rangle$*:*

- *за всеки* n*-местен предикатен символ* p *и термове* $\tau_1, \ldots, \tau_n$ *е изпълнено, че* $p(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ *е (атомарна) формула в* $\mathcal{L}$*;*
- *ако* φ *и* ψ *са формули в* $\mathcal{L}$*, то тогава* $\neg\varphi$ *и* $(\varphi \vee \psi)$ *са формули в* $\mathcal{L}$*;*
- *ако* x *е променлива и* φ *е формула в* $\mathcal{L}$*, то тогава* $\exists x \varphi$ *е формула в* $\mathcal{L}$*.*

Нотация. Формулите винаги ще бележим с буквите φ, ψ, χ с потенциални индекси, примове и така нататък.

Дефиниция. *За формула или терм* α *с* $\mathrm{Vars}[\alpha]$ *ще бележим множеството от всички променливи, които се срещат в* α*.*

Дефиниция. *Всеки терм* τ*, за който* $\mathrm{Vars}[\tau] = \varnothing$*, се нарича затворен.*

Нотация. Под $\tau[x_1, \ldots, x_n]$ ще имаме предвид "τ е терм с променливи измежду $x_1, \ldots, x_n$", тоест $\mathrm{Vars}[\tau] \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Дефиниция. *Дефинираме множеството от свободни променливи* $\mathrm{Free}[\varphi]$ *за формула* φ *в предикатен език* $\mathcal{L}$ *с индукция относно построението на* φ*:*

- $\mathrm{Free}[p(\tau_1, \dots, \tau_n)] = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Vars}[\tau_i]$*;*
- $\mathrm{Free}[(\varphi \vee \psi)] = \mathrm{Free}[\varphi] \cup \mathrm{Free}[\psi]$*;*
- $\mathrm{Free}[\neg\varphi] = \mathrm{Free}[\varphi]$*;*
- $\mathrm{Free}[\exists x\varphi] = \mathrm{Free}[\varphi] \setminus \{x\}$.

Нотация. За двуместни функционални/предикатни символи ζ въвеждаме записа $\tau_1\zeta\tau_2$ като съкращение на $\zeta(\tau_1, \tau_2)$.

Дефиниция. *Всяка формула* φ*, за която* $\mathrm{Free}[\varphi] = \varnothing$*, се нарича затворена.*

Нотация. Под $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ ще имаме предвид "φ е формула със свободни променливи измежду $x_1, \dots, x_n$", тоест $\mathrm{Free}[\varphi] \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

Нотация. Нека фиксираме новите символи $\&, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall$. Въвеждаме следните съкращения:

- $(\varphi \mathbin{\&} \psi)$ е съкращение за $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$;
- $(\varphi \Rightarrow \psi)$ е съкращение за $(\neg\varphi \vee \psi)$;
- $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ е съкращение за $((\varphi \Rightarrow \psi) \mathbin{\&} (\psi \Rightarrow \varphi))$;
- $\forall x$ е съкращение за $\neg\exists x\neg$;
- $\varphi_1 \,\sigma\, \dots \,\sigma\, \varphi_n$ е съкращение за $(\varphi_1 \,\sigma\, (\varphi_2 \,\sigma\, (\dots(\varphi_{n-1} \,\sigma\, \varphi_n)\dots)))$ за $\sigma \in \{\vee, \&\}$;
- няма да пишем най-външните скоби, ако формулата започва с такива.

2 Семантика

Дефиниция. *Структура за предикатен език* $\mathcal{L} = \langle \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \# \rangle$ *ще наричаме всяко* $\mathcal{A} = \langle A, C, F, P \rangle$, *за което:*

- $A \neq \varnothing$ *се нарича универсум или носител на* $\mathcal{A}$*;*
- $C \subseteq A$ *и за всяко* $c \in \mathcal{C}$ *има* $c^{\mathcal{A}} \in C$*;*
- *за всяко* $f \in \mathcal{F}$ *с* $\#(f) = n$ *има* $f^{\mathcal{A}} \in F$, *като* $f^{\mathcal{A}} : A^n \to A$*;*
- *за всяко* $p \in \mathcal{P}$ *с* $\#(p) = n$ *има* $p^{\mathcal{A}} \in F$, *като* $p^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$ *и в частност* $\doteq^{\mathcal{A}}$ *винаги играе ролята на идентитет (при език с формално равенство).*

Нотация. Обикновено структурите ще бележим с ръкописни латински букви $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots, \mathcal{Z}$ с потенциални индекси, примове и така нататък.

Нотация. Вместо да използваме записа $\mathcal{A} = \langle A, C, F, P \rangle$ ще изреждаме всички символи, тоест ще пишем $\mathcal{A} = \langle A, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \dots, f_0^{\mathcal{A}}, f_1^{\mathcal{A}}, \dots, p_0^{\mathcal{A}}, p_1^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$.

Нотация. Универсум на структурата $\mathcal{A}$ ще бележим с $|\mathcal{A}|$.

Нотация. За да няма конфликти между обектния език и метаезика ще използваме $f[x]$ вместо $f(x)$, когато искаме образът на x през f.

Дефиниция. *Нека* $\mathcal{L}$ *е предикатен език,* $\tau[x_1, \dots, x_n]$, $\mathcal{A}$ *е структура за* $\mathcal{L}$ *и* $a_1, \dots, a_n \in |A|$. *С индукция относно построението на* τ *дефинираме* $\tau^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!]$*:*

- $c^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!] = c^{\mathcal{A}}$*;*
- $x_i^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!] = a_i$*;*
- $f(\tau_1, \dots, \tau_k)^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!] = f^{\mathcal{A}}[\tau_1^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!], \dots, \tau_k^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!]]$.

Дефиниция. *Нека* $\mathcal{L}$ *е предикатен език,* $\varphi[x_1, \dots, x_n]$, $\mathcal{A}$ *е структура за* $\mathcal{L}$ *и* $a_1, \dots, a_n \in |A|$. *Дефинираме* $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, \dots, a_n]\!]$ *индуктивно:*

- $\mathcal{A} \models p(\tau_1, \dots, \tau_k)[\![a_1, \dots, a_n]\!] \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} \langle \tau_1[\![a_1, \dots, a_n]\!], \dots, \tau_k[\![a_1, \dots, a_n]\!] \rangle \in p^{\mathcal{A}}$*;*
- $\mathcal{A} \models \neg\varphi[\![a_1, \dots, a_n]\!] \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} \mathcal{A} \not\models \varphi[\![a_1, \dots, a_n]\!]$ *(не е вярно, че* $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, \dots, a_n]\!]$*);*
- $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[\![a_1, \dots, a_n]\!] \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} \mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, \dots, a_n]\!]$ *или* $\mathcal{A} \models \psi[\![a_1, \dots, a_n]\!]$*;*
- $\mathcal{A} \models \exists x_i \varphi[\![a_1, \dots, a_n]\!] \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow}$ *има* $a \in |\mathcal{A}|$, *за което* $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_n]\!]$.

Дефиниция. *Ако за всяко* $a_1, \dots, a_n \in |\mathcal{A}|$ *е изпълнено, че* $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, \dots, a_n]\!]$, *тогава ще пишем* $\mathcal{A} \models \varphi$.

Свойство. *Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език, $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$, $\mathcal{A}$ е структура за $\mathcal{L}$ и $a_1, \ldots, a_n \in |A|$. Тогава следните са в сила:*

- $\mathcal{A} \models (\varphi \;\&\; \psi)[\![a_1, \ldots, a_n]\!] \longleftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, \ldots, a_n]\!]$ *и* $\mathcal{A} \models \psi[\![a_1, \ldots, a_n]\!]$;
- $\mathcal{A} \models (\varphi \Rightarrow \psi)[\![a_1, \ldots, a_n]\!] \longleftrightarrow$ *ако* $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, \ldots, a_n]\!]$, *то* $\mathcal{A} \models \psi[\![a_1, \ldots, a_n]\!]$;
- $\mathcal{A} \models (\varphi \Leftrightarrow \psi)[\![a_1, \ldots, a_n]\!] \longleftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, \ldots, a_n]\!]$ *т.с.т.к.* $\mathcal{A} \models \psi[\![a_1, \ldots, a_n]\!]$;
- $\mathcal{A} \models \forall x_i \varphi[\![a_1, \ldots, a_n]\!] \longleftrightarrow$ *за всяко* $a \in |\mathcal{A}|$ *имаме* $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n]\!]$.

Дефиниция. *Нека $\mathcal{A}$ е структура за предикатния език $\mathcal{L}$. Казваме, че едно множество $X \subseteq |\mathcal{A}|^n$ е определимо в езика $\mathcal{L}$, ако има формула φ в $\mathcal{L}$, за която:*

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in X \longleftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, \ldots, a_n]\!].$$

Дефиниция. *Нека Γ е множество от формули в предикатния език $\mathcal{L}$ и $\mathcal{A}$ е структура за $\mathcal{L}$. Казваме, че $\mathcal{A}$ е модел на Γ и пишем $\mathcal{A} \models \Gamma$, ако за всяко $\varphi \in \Gamma$ е изпълнено, че $\mathcal{A} \models \varphi$.*

Дефиниция. *Едно множество от формули наричаме изпълнимо, ако за него съществува модел.*

Дефиниция. *Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са структури за предикатния език $\mathcal{L}$. Функцията $h : |\mathcal{A}| \to |\mathcal{B}|$ наричаме изоморфизъм, ако:*

- h *е биекция;*
- $h[c^{\mathcal{A}}] = c^{\mathcal{B}}$ *за всеки константен символ c;*
- $h[f^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n]] = f^{\mathcal{B}}[h[a_1], \ldots, h[a_n]]$ *за всеки функционален символ f и $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{A}|$;*
- $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in p^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow \langle h[a_1], \ldots, h[a_n] \rangle \in p^{\mathcal{B}}$ *за всеки предикатен символ p и $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{A}|$.*

Ако $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, то тогава h се нарича и автоморфизъм.

Свойство. *Нека h е изоморфизъм между структурите $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ за предикатния език $\mathcal{L}$. Тогава за всеки терм τ, всяка формула φ и $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{A}|$:*

$\tau^{\mathcal{A}}[\![a_1, \ldots, a_n]\!] = \tau^{\mathcal{B}}[\![h[a_1], \ldots, h[a_n]]\!]$ *и* $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, \ldots, a_n]\!] \longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\![h[a_1], \ldots, h[a_n]]\!]$.

Свойство. *Нека $\mathcal{A}$ е структура за предикатния език $\mathcal{L}$, h е автоморфизъм (от $\mathcal{A}$ към себе си) и $X \subseteq |\mathcal{A}|^n$. Тогава ако X е определимо, то:*

$$\{\langle h[a_1], \ldots, h[a_n] \rangle \mid \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in X\} = X.$$