

Предикатно смятане от първи ред

Тодор Дуков

1 Синтаксис

Първо фиксираме едно изброимо множество от променливи Vars .

Нотация. Обикновено елементите на Vars ще означаваме с буквите x, y, z, t, u, v, w с потенциални индекси, примове и така нататък.

След това фиксираме логическите символи \exists, \neg, \vee , помощните символи $(,)$ и $,$ (символът запетая) и символ \doteq за формално равенство, които не са елементи на Vars .

Дефиниция. *Език на предикатното смятане от първи ред (или накратко предикатен език) ще наричаме всяко $\mathcal{L} = \langle \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \# \rangle$, за което:*

- \mathcal{C} е множество, чиито елементи ще наричаме константни символи;
- \mathcal{F} е множество, чиито елементи ще наричаме функционални символи;
- \mathcal{P} е множество, чиито елементи ще наричаме предикатни символи;
- \mathcal{C}, \mathcal{F} и \mathcal{P} са две по две чужди;
- нито един от фиксираните символи не попада в \mathcal{C}, \mathcal{F} или \mathcal{P} , потенциално с изключение на \doteq , който е възможно да е елемент на \mathcal{P} ;
- $\# : \mathcal{F} \cup \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ще наричаме функция на ариност, като винаги $\#(\doteq) = 2$ (ако е добре дефинирано).

Ако $\#(\zeta) = n$, то тогава ще наричаме ζ n -местен функционален/предикатен символ.

Нотация. Обикновено ще използваме:

- буквите a, b, c, d за константни символи;
- буквите f, g, h за функционални символи;
- буквите p, q, r, s за предикатни символи,

като позволяваме да има индекси, примове и така нататък.

Дефиниция. Дефинираме индуктивно понятието терм в предикатен език $\mathcal{L} = \langle \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \# \rangle$:

- всеки елемент на $\mathcal{C} \cup \text{Vars}$ е терм в \mathcal{L} ;
- ако τ_1, \dots, τ_n са термове в \mathcal{L} и $f \in \mathcal{F}$ има свойството $\#(f) = n$, то тогава $f(\tau_1, \dots, \tau_n)$ е терм в \mathcal{L} .

Нотация. Термовете винаги ще бележим с буквата τ с потенциални индекси, примове и така нататък.

Дефиниция. Дефинираме индуктивно понятието формула в предикатен език $\mathcal{L} = \langle \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \# \rangle$:

- за всеки n -местен предикатен символ p и термове τ_1, \dots, τ_n е изпълнено, че $p(\tau_1, \dots, \tau_n)$ е (атомарна) формула в \mathcal{L} ;
- ако φ и ψ са формули в \mathcal{L} , то тогава $\neg\varphi$ и $(\varphi \vee \psi)$ са формули в \mathcal{L} ;
- ако x е променлива и φ е формула в \mathcal{L} , то тогава $\exists x\varphi$ е формула в \mathcal{L} .

Нотация. Формулите винаги ще бележим с буквите φ, ψ, χ с потенциални индекси, примове и така нататък.

Дефиниция. За формула или терм α с $\text{Vars}[\alpha]$ ще бележим множеството от всички променливи, които се срещат в α .

Дефиниция. Всеки терм τ , за който $\text{Vars}[\tau] = \emptyset$, се нарича затворен.

Нотация. Под $\tau[x_1, \dots, x_n]$ ще имаме предвид “ τ е терм с променливи измежду x_1, \dots, x_n ”, тоест $\text{Vars}[\tau] \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

Дефиниция. Дефинираме множеството от свободни променливи $\text{Free}[\varphi]$ за формула φ в предикатен език \mathcal{L} с индукция относно построенето на φ :

- $\text{Free}[p(\tau_1, \dots, \tau_n)] = \bigcup_{i=1}^n \text{Vars}[\tau_i];$
- $\text{Free}[(\varphi \vee \psi)] = \text{Free}[\varphi] \cup \text{Free}[\psi];$
- $\text{Free}[\neg\varphi] = \text{Free}[\varphi];$
- $\text{Free}[\exists x\varphi] = \text{Free}[\varphi] \setminus \{x\}.$

Нотация. За двуместни функционални/предикатни символи ζ въвеждаме записа $\tau_1\zeta\tau_2$ като съкращение на $\zeta(\tau_1, \tau_2)$.

Дефиниция. Всяка формула φ , за която $\text{Free}[\varphi] = \emptyset$, се нарича затворена.

Нотация. Под $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ ще имаме предвид “ φ е формула със свободни променливи измежду x_1, \dots, x_n ”, тоест $\text{Free}[\varphi] \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

Нотация. Нека фиксираме новите символи $\&, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall$. Въвеждаме следните съкращения:

- $(\varphi \& \psi)$ е съкращение за $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$;
- $(\varphi \Rightarrow \psi)$ е съкращение за $(\neg\varphi \vee \psi)$;
- $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ е съкращение за $((\varphi \Rightarrow \psi) \& (\psi \Rightarrow \varphi))$;
- $\forall x$ е съкращение за $\neg\exists x\neg$;
- $\varphi_1 \sigma \dots \sigma \varphi_n$ е съкращение за $(\varphi_1 \sigma (\varphi_2 \sigma (\dots (\varphi_{n-1} \sigma \varphi_n) \dots)))$ за $\sigma \in \{\vee, \&\}$;
- няма да пишем най-външните скоби, ако формулата започва с такива.

2 Семантика

Дефиниция. Структура за предикатен език $\mathcal{L} = \langle \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \# \rangle$ ще наричаме всяко $\mathcal{A} = \langle A, C, F, P \rangle$, за което:

- $A \neq \emptyset$ се нарича универсум или носител на \mathcal{A} ;
- $C \subseteq A$ и за всяко $c \in C$ има $c^{\mathcal{A}} \in C$;
- за всяко $f \in \mathcal{F}$ с $\#(f) = n$ има $f^{\mathcal{A}} \in F$, като $f^{\mathcal{A}} : A^n \rightarrow A$;
- за всяко $p \in \mathcal{P}$ с $\#(p) = n$ има $p^{\mathcal{A}} \in F$, като $p^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$ и в частност $\dot{=}^{\mathcal{A}}$ винаги играе ролята на идентитет (при език с формално равенство).

Нотация. Обикновено структурите ще бележим с ръкописни латински букви $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots, \mathcal{Z}$ с потенциални индекси, примове и така нататък.

Нотация. Вместо да използваме записа $\mathcal{A} = \langle A, C, F, P \rangle$ ще изреждаме всички символи, тоест ще пишем $\mathcal{A} = \langle A, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \dots, f_0^{\mathcal{A}}, f_1^{\mathcal{A}}, \dots, p_0^{\mathcal{A}}, p_1^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$.

Нотация. Универсум на структурата \mathcal{A} ще бележим с $|\mathcal{A}|$.

Нотация. За да няма конфликти между обектния език и метаязика ще използваме $f[x]$ вместо $f(x)$, когато искаме образът на x през f .

Дефиниция. Нека \mathcal{L} е предикатен език и \mathcal{A} е структура за \mathcal{L} . Оценка в структурата \mathcal{A} ще наричаме всяка функция $v : \text{Vars} \rightarrow |\mathcal{A}|$.

Дефиниция. Нека \mathcal{L} е предикатен език, \mathcal{A} е структура за езика \mathcal{L} и v е оценка в \mathcal{A} . С индукция относно построенето на терма τ дефинираме $\tau_v^{\mathcal{A}}$:

- $c_v^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}}$;
- $x_v^{\mathcal{A}} = v[x]$;
- $f(\tau_1, \dots, \tau_k)_v^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{A}}[\tau_{1v}^{\mathcal{A}}, \dots, \tau_{kv}^{\mathcal{A}}]$.

Дефиниция. Нека \mathcal{L} е предикатен език, \mathcal{A} е структура за \mathcal{L} и v е оценка в \mathcal{A} . Тогава $x \in \text{Vars}$ и $a \in |\mathcal{A}|$ дефинираме оценката:

$$v_x^a[y] = \begin{cases} a, & \text{ако } y = x \\ v[y], & \text{иначе} \end{cases}$$

Дефиниция. Нека \mathcal{L} е предикатен език, \mathcal{A} е структура за езика \mathcal{L} и v е оценка в \mathcal{A} . С индукция относно построенето на формулата φ дефинираме $\mathcal{A} \models_v \varphi$:

- $\mathcal{A} \models_v p(\tau_1, \dots, \tau_k) \xleftrightarrow{\text{def.}} \langle \tau_{1v}^{\mathcal{A}}, \dots, \tau_{kv}^{\mathcal{A}} \rangle \in p^{\mathcal{A}};$
- $\mathcal{A} \models_v \neg\varphi \xleftrightarrow{\text{def.}} \mathcal{A} \not\models_v \varphi$ (не е вярно, че $\mathcal{A} \models_v \varphi$);
- $\mathcal{A} \models_v (\varphi \vee \psi) \xleftrightarrow{\text{def.}} \mathcal{A} \models_v \varphi$ или $\mathcal{A} \models_v \psi$;
- $\mathcal{A} \models_v \exists x\varphi \xleftrightarrow{\text{def.}} \text{има } a \in |\mathcal{A}|, \text{ за което } \mathcal{A} \models_{v_x^a} \varphi.$

Дефиниция. Ако за всяка оценка v в структурата \mathcal{A} е изпълнено, че $\mathcal{A} \models_v \varphi$, тогава ще пишем $\mathcal{A} \models \varphi$.

Свойство. Нека \mathcal{L} е предикатен език, \mathcal{A} е структура за \mathcal{L} и v е оценка в \mathcal{A} . Тогава следните са в сила:

- $\mathcal{A} \models_v (\varphi \& \psi) \longleftrightarrow \mathcal{A} \models_v \varphi$ и $\mathcal{A} \models_v \psi$;
- $\mathcal{A} \models_v (\varphi \Rightarrow \psi) \longleftrightarrow \text{ако } \mathcal{A} \models_v \varphi, \text{ то } \mathcal{A} \models_v \psi$;
- $\mathcal{A} \models_v (\varphi \Leftrightarrow \psi) \longleftrightarrow \mathcal{A} \models_v \varphi$ т.с.т.к. $\mathcal{A} \models_v \psi$;
- $\mathcal{A} \models_v \forall x\varphi \longleftrightarrow \text{за всяко } a \in |\mathcal{A}| \text{ имаме } \mathcal{A} \models_{v_x^a} \varphi$;

Свойство. Нека \mathcal{L} е предикатен език, \mathcal{A} е структура за \mathcal{L} , φ е формула в \mathcal{L} и v_1, v_2 са такива оценки в \mathcal{A} , за които за всяко $x \in \text{Free}[\varphi]$ имаме $v_1[x] = v_2[x]$. Тогава:

$$\mathcal{A} \models_{v_1} \varphi \longleftrightarrow \mathcal{A} \models_{v_2} \varphi.$$

Това свойство прави следното съкращение коректно:

Нотация. Нека \mathcal{L} е предикатен език, \mathcal{A} е структура за \mathcal{L} с $a_1, \dots, a_n \in |\mathcal{A}|$. За формула $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ пишем, че $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$, ако има оценка v в \mathcal{A} , за която за всяко $1 \leq i \leq n$ имаме $v[x_i] = a_i$ и $\mathcal{A} \models_v \varphi$.

Дефиниция. Нека \mathcal{A} е структура за предикатния език \mathcal{L} . Казваме, че едно множество $X \subseteq |\mathcal{A}|^n$ е определимо в езика \mathcal{L} , ако има формула φ в \mathcal{L} , за която:

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in X \longleftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n].$$

Дефиниция. Нека Γ е множество от формули в предикатния език \mathcal{L} и \mathcal{A} е структура за \mathcal{L} . Казваме, че \mathcal{A} е модел на Γ и пишем $\mathcal{A} \models \Gamma$, ако за всяко $\varphi \in \Gamma$ е изпълнено, че $\mathcal{A} \models \varphi$.

Дефиниция. Едно множество от формули наричаме изпълнимо, ако за него съществува модел.

Дефиниция. Нека \mathcal{A} и \mathcal{B} са структури за предикатния език \mathcal{L} . Функцията $h : |\mathcal{A}| \rightarrow |\mathcal{B}|$ наричаме изоморфизъм, ако:

- h е биекция;
- $h[c^{\mathcal{A}}] = c^{\mathcal{B}}$ за всеки константен символ c ;
- $h[f^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n]] = f^{\mathcal{B}}[h[a_1], \dots, h[a_n]]$ за всеки функционален символ f и $a_1, \dots, a_n \in |\mathcal{A}|$;
- $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in p^{\mathcal{A}} \iff \langle h[a_1], \dots, h[a_n] \rangle \in p^{\mathcal{B}}$ за всеки предикатен символ p и $a_1, \dots, a_n \in |\mathcal{A}|$.

Ако $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, то тогава h се нарича и автоморфизъм.

Свойство. Нека \mathcal{A} и \mathcal{B} са структури за предикатния език \mathcal{L} и h е изоморфизъм между тях. Тогава за всеки терм $\tau[x_1, \dots, x_n]$, за всяка формула $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ и $a_1, \dots, a_n \in |\mathcal{A}|$:

$$h[\tau^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n]] = \tau^{\mathcal{B}}[h[a_1], \dots, h[a_n]] \text{ и } \mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{B} \models \varphi[h[a_1], \dots, h[a_n]].$$

Свойство. Нека \mathcal{A} е структура за предикатния език \mathcal{L} , h е автоморфизъм (от \mathcal{A} към себе си) и $X \subseteq |\mathcal{A}|^n$. Тогава ако X е определимо, то:

$$\{\langle h[a_1], \dots, h[a_n] \rangle \mid \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in X\} = X.$$