(Не)определимост и изпълнимост – 2024/2025

Тодор Дуков

1 (Не)определимост

Задача 1.1. *Нека фиксираме крайна непразна азбука Σ, която има n елемента. Разглеждаме предикатния език $\mathcal{L}$, съставен от един триместен предикатен символ p и един двуместен предикатен символ q, заедно със $\mathcal{L}$-структурата $\mathcal{M} = \langle \mathcal{P}(\Sigma^*), p^{\mathcal{M}}, q^{\mathcal{M}} \rangle$, където:*

$$p^{\mathcal{M}}(L_1, L_2, L_3) \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} L_1 \cdot L_2 = L_3$$
$$q^{\mathcal{M}}(L_1, L_2) \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} L_1 \subseteq L_2.$$

Да се докаже, че:

- *а) ако $n = 1$, то за всеки регулярен език L, множеството $\{L\}$ е определимо;*
- *б) ако $n \geq 2$, то има регулярни езици, които не са определими.*

Задача 1.2. *Разглеждаме предикатния език $\mathcal{L}$, съставен от един триместен предикатен символа p и един двуместен предикатен символ q, заедно с $\mathcal{L}$-структурата $\mathcal{S}_n = \langle S_n \cup \{1, \ldots, n\}, p^{\mathcal{S}_n}, q^{\mathcal{S}_n} \rangle$, където n е просто число и:*

$$p^{\mathcal{S}_n}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in S_n \text{ и } \sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_3$$
$$q^{\mathcal{S}_n}(\sigma, i) \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} i \in \{1, \ldots, n\}, \sigma \in S_n \text{ и } \sigma(i) \neq i.$$

Да се докаже, че в $\mathcal{S}_n$ са определими:

- *а) $\{\varepsilon\}$;*
- *б) за всяко $1 \leq k \leq n$, множеството от пермутации с ред k;*
- *в) множеството от всички неразложими цикли;*
- *г) $\{\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \mid \sigma_1$ и σ_2 имат еднакъв цикличен строеж $\}$.*

Да се открие колко автоморфизма има в $\mathcal{S}_n$.

Задача 1.3. *Нека с* $\mathcal{F}$ *бележим множеството всички функции* $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$*. За всяко* $f \in \mathcal{F}$ *дефинираме* $\mathrm{int}_n(f)$ *с рекурсия по* n*:*

- $\mathrm{int}_0(f) = [0, 1]$*;*
- *ако* $\mathrm{int}_n(f) = [a, b]$ *и* $f(n) = 0$*, тогава* $\mathrm{int}_{n+1}(f) = [a, \frac{a+b}{2}]$*;*
- *ако* $\mathrm{int}_n(f) = [a, b]$ *и* $f(n) = 1$*, тогава* $\mathrm{int}_{n+1}(f) = [\frac{a+b}{2}, b]$*.*

Лесно се вижда, че за всяко $f \in \mathcal{F}$*,* $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{int}_n(f)$ *е добре дефинирано множество, което има точно един елемент. Нека този елемент бележим с* $\mathrm{num}(f)$*. Сега нека за* $r \in [0, 1]$ *дефинираме множеството:*

$$\mathrm{Func}(r) = \{f \in \mathcal{F} \mid \mathrm{num}(f) = r\}.$$

Разглеждаме предикатния език $\mathcal{L}$*, съставен от един двуместен предикатен символ* p*, два триместни предикатни символа* q *и* r*, заедно с* $\mathcal{L}$*-структурата* $\mathcal{A} = \langle \mathcal{F} \cup \mathbb{N}, p^{\mathcal{A}}, q^{\mathcal{A}}, r^{\mathcal{A}} \rangle$*, където:*

$$p^{\mathcal{A}}(f, n) \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} f \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N} \text{ и } f(n) = 1$$

$$q^{\mathcal{A}}(f, n, m) \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} n, m \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F} \text{ и за всяко } k \geq n \text{ е изпълнено, че } f(k + m) = f(k)$$

$$r^{\mathcal{A}}(f, g, n) \overset{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} f, g \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N} \text{ и } f(n + 1) = g(n).$$

Да се докаже в структурата $\mathcal{A}$ *са определими множествата:*

а) $\mathrm{Func}(0)$*;*

б) $\mathrm{Func}(1)$*;*

в) $\mathrm{Func}(\frac{1}{2})$*;*

г) за всяко естествено n*, множеството* n*;*

д) за всяко рационално $q \in [0, 1]$*, множеството* $\mathrm{Func}(q)$*.*

Да се открие колко автоморфизма има в $\mathcal{A}$*.*

2 Изпълнимост

Задача 2.1. *Да се докаже, че следното множество от формули е изпълнимо:*

$$\varphi_1 : \forall x \forall y \forall z (f(x, f(y, z)) \doteq f(f(x, y), z) \ \&\ f(x, y) \doteq f(y, x))$$
$$\varphi_2 : \forall x \forall y \forall z (g(x, g(y, z)) \doteq g(g(x, y), z) \ \&\ g(x, y) \doteq g(y, x))$$
$$\varphi_3 : \forall x \forall y (p(x) \ \&\ p(y) \Rightarrow p(f(x, y)))$$
$$\varphi_4 : \forall x \forall y (p(x) \Rightarrow p(g(x, y)))$$
$$\varphi_5 : \forall x \forall y (p(g(x, y)) \Rightarrow p(x) \vee p(y))$$
$$\varphi_6 : \exists x \exists y (p(x) \ \&\ \neg p(y)) \ \&\ \exists x \exists y (f(x, y) \not\doteq g(x, y))$$

Задача 2.2. *Да се докаже, че следното множество от формули е изпълнимо:*

$$\varphi_1 : \forall x \forall y \forall z (f(x, f(y, z)) \doteq f(f(x, y), z) \ \&\ f(x, y) \doteq f(y, x))$$
$$\varphi_2 : \forall x \forall y \forall z (g(x, g(y, z)) \doteq g(g(x, y), z) \ \&\ g(x, y) \doteq g(y, x))$$
$$\varphi_3 : \forall x \forall y \forall z (g(x, f(y, z)) \doteq f(g(x, y), g(x, z)))$$
$$\varphi_4 : \exists x \exists y \forall z (x \not\doteq y \ \&\ f(x, z) \doteq z \ \&\ g(y, z) \doteq z)$$
$$\varphi_5 : \forall x (g(x, x) \doteq x)$$
$$\varphi_6 : \exists x \exists y \exists z (x \not\doteq y \ \&\ y \not\doteq z \ \&\ x \not\doteq z)$$

Задача 2.3. *Да се докаже, че следното множество от формули е изпълнимо:*

$$\varphi_1 : \forall x \, p(x, x)$$
$$\varphi_2 : \forall x \forall y (p(x, y) \ \&\ p(y, x) \Rightarrow x \doteq y)$$
$$\varphi_3 : \forall x \forall y \forall z (p(x, y) \ \&\ p(y, z) \Rightarrow p(x, z))$$
$$\varphi_4 : \exists x \exists y (q(x) \ \&\ \neg q(y))$$
$$\varphi_5 : \forall x \forall y (q(y) \ \&\ p(x, y) \Rightarrow q(x))$$
$$\varphi_6 : \forall x \forall y (q(x) \ \&\ q(y) \Rightarrow \exists z (p(x, z) \ \&\ p(y, z) \ \&\ q(z)))$$

Задача 2.4. *Разглеждаме следните формули:*

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 : \forall x(q(x) \Rightarrow p(x))\\
&\varphi_2 : \forall x \forall y(p(x) \mathbin{\&} p(y) \Rightarrow p(f(x,y))) \mathbin{\&} \forall x(p(x) \Rightarrow p(g(x)))\\
&\varphi_3 : \forall x(g(x) \not\doteq x)\\
&\varphi_4 : \exists x \exists y(f(x,y) \not\doteq f(y,x)) \mathbin{\&} \exists x \exists y \exists z(f(x,f(y,z)) \not\doteq f(f(x,y),z))\\
&\psi_n : \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \left(\mathop{\&}_{1 \le i < j \le n} (x_i \not\doteq x_j) \mathbin{\&} \mathop{\&}_{1 \le i \le n} q(x_i) \right)\\
&\chi_n : \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \left(\mathop{\&}_{1 \le i < j \le n} (x_i \not\doteq x_j) \mathbin{\&} \mathop{\&}_{1 \le i \le n} (p(x_i) \mathbin{\&} \neg q(x_i)) \right)\\
&\theta_n : \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \left(\mathop{\&}_{1 \le i < j \le n} (x_i \not\doteq x_j) \mathbin{\&} \mathop{\&}_{1 \le i \le n} \neg p(x_i) \right).
\end{aligned}$$

Да се докаже, че е изпълнимо множеството от формули:

$$\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \cup \{\psi_n \mid n \ge 2\} \cup \{\chi_n \mid n \ge 2\} \cup \{\theta_n \mid n \ge 2\}.$$

Задача 2.5. *Разглеждаме следните формули:*

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 : \forall x \forall y \forall z(g(x,g(y,z)) \doteq g(g(x,y),z))\\
&\varphi_2 : \forall x \forall y(g(x,y) \doteq g(y,x))\\
&\varphi_3 : \forall x \forall y(p(x) \mathbin{\&} \neg p(y) \Rightarrow f(x,y,y) \doteq a)\\
&\varphi_4 : \forall x \forall y \forall z(p(x) \mathbin{\&} \neg p(y) \mathbin{\&} \neg p(z) \Rightarrow g(f(x,y,z), f(x,z,y)) \doteq a)\\
&\varphi_5 : \forall x \forall y \forall z \forall t(p(x) \mathbin{\&} p(y) \mathbin{\&} \neg p(z) \mathbin{\&} \neg p(t) \Rightarrow f(g(x,y),z,t) \doteq g(f(x,z,t), f(y,z,t)))\\
&\psi_n : \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n(\mathop{\&}_{1 \le i < j \le n} (x_i \not\doteq x_j) \mathbin{\&} \mathop{\&}_{1 \le i \le n} p(x_i))\\
&\chi_n : \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n(\mathop{\&}_{1 \le i < j \le n} (x_i \not\doteq x_j) \mathbin{\&} \mathop{\&}_{1 \le i \le n} \neg p(x_i)).
\end{aligned}$$

Да се докаже, че е изпълнимо множеството от формули:

$$\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\} \cup \{\psi_n \mid n \ge 2\} \cup \{\chi_n \mid n \ge 2\}.$$