$=\lim_{x\to1}(2x+3)+\lim_{x\to2}(2x+3)$

$=5+7=12$

답 12

8 주어진 조건에서

$f(-1)\ge f(0)\ge f(1)=3$

$f(2)=-1$

$-2=f(3)\ge f(4)\ge f(5)$

$g(x)=f(x)+f(x-1)-2x+3$이라 하면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$x_1<x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)\ge f(x_2)$, $f(x_1-1)\ge f(x_2-1)$이므로

$$\begin{aligned}g(x_1)-g(x_2)&=f(x_1)+f(x_1-1)-2x_1+3\\&\quad-\{f(x_2)+f(x_2-1)-2x_2+3\}\\&=f(x_1)-f(x_2)+f(x_1-1)-f(x_2-1)\\&\quad-2(x_1-x_2)\\&>0\end{aligned}$$

$g(x_1)>g(x_2)$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 x축과 오직 하나의 점에서 만난다.

$g(0)=f(0)+f(-1)+3\ge3+3+3>0$

$g(1)=f(1)+f(0)+1\ge3+3+1>0$

$g(2)=f(2)+f(1)-1=-1+3-1>0$

$g(3)=f(3)+f(2)-3=-2-1-3<0$

$g(4)=f(4)+f(3)-5\le-2-2-5<0$

$g(5)=f(5)+f(4)-7\le-2-2-7<0$

$g(2)g(3)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 열린구간 $(2, 3)$에 방정식 $g(x)=0$의 해가 존재한다.

따라서 열린구간 $(2, 3)$에 방정식

$f(x)+f(x-1)=2x-3$의 해가 존재한다.

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 27쪽

1 ⑤ **2** 12 **3** ②

1 $g(x)=f(x)\{f(x)-9\}$라 하자.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1+}g(x)=g(1)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-}g(x)&=\lim_{x\to1-}f(x)\{f(x)-9\}\\&=\lim_{x\to1-}(x+a)(x+a-9)\\&=(a+1)(a-8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+}g(x)&=\lim_{x\to1+}f(x)\{f(x)-9\}\\&=\lim_{x\to1+}(-x+2a)(-x+2a-9)\\&=(2a-1)(2a-10)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(1)&=f(1)\{f(1)-9\}\\&=(-1+2a)(-1+2a-9)\\&=(2a-1)(2a-10)\end{aligned}$$

이므로 $(a+1)(a-8)=(2a-1)(2a-10)$에서

$a^2-7a-8=4a^2-22a+10$

$3a^2-15a+18=0$

$a^2-5a+6=0$

$(a-2)(a-3)=0$

$a=2$ 또는 $a=3$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 5이다.

답 ⑤

참고

$a=2$이면 함수 $f(x)=\begin{cases}x+2 & (x<1)\\-x+4 & (x\ge1)\end{cases}$

$\lim_{x\to1-}f(x)\{f(x)-9\}=\lim_{x\to1-}(x+2)(x-7)=-18$

$\lim_{x\to1+}f(x)\{f(x)-9\}=\lim_{x\to1+}(-x+4)(-x-5)=-18$

$f(1)\{f(1)-9\}=-18$

이므로 함수 $f(x)\{f(x)-9\}$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$a=3$이면 함수 $f(x)=\begin{cases}x+3 & (x<1)\\-x+6 & (x\ge1)\end{cases}$

$\lim_{x\to1-}f(x)\{f(x)-9\}=\lim_{x\to1-}(x+3)(x-6)=-20$

$\lim_{x\to1+}f(x)\{f(x)-9\}=\lim_{x\to1+}(-x+6)(-x-3)=-20$

$f(1)\{f(1)-9\}=-20$

이므로 함수 $f(x)\{f(x)-9\}$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

2 $f(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$이므로

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $a-1$을 갖는다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=x^2-2x+a\ge0$이면

$|f(x)|=f(x)$이고 $f(x)$의 최솟값은

$f(1)=a-1$이므로

$t<f(1)$일 때 $g(t)=0$

$t=f(1)$일 때 $g(t)=1$

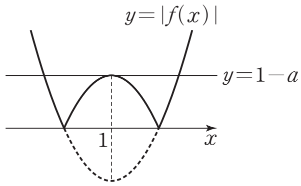
$t>f(1)$일 때 $g(t)=2$

함수 $g(t)$는 $t=f(1)$에서만 불연속이므로 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $f(x)=x^2-2x+a<0$인 실수 x가 존재해야 한다.

즉, $f(1)=a-1<0$이고

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



$t<0$일 때 $g(t)=0$

$t=0$일 때 $g(t)=2$

$0<t<1-a$일 때 $g(t)=4$

$t=1-a$일 때 $g(t)=3$

$t>1-a$일 때 $g(t)=2$

함수 $g(t)$는 $t=0$, $t=1-a$일 때 불연속므로

주어진 조건에 의하여

$0+1-a=4$에서

$a=-3$

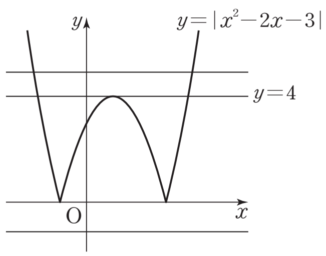
따라서 $f(x)=x^2-2x-3$이므로

$f(a)=f(-3)=9+6-3=12$

답 12

참고

x에 대한 방정식 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 서로 다른 점의 개수와 같다. 그림에서 함수 $y=|x^2-2x-3|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 서로 다른 점의 개수는 t의 값의 범위에 따라 다음과 같다.



$t<0$일 때 $g(t)=0$

$t=0$일 때 $g(t)=2$

$0<t<4$일 때 $g(t)=4$

$t=4$일 때 $g(t)=3$

$t>4$일 때 $g(t)=2$

따라서 함수 $g(t)$는 $t=0$, $t=4$일 때 불연속이다.

3 $\lim_{x\to 3-} f(x-1)=\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}\{-3x(x-1)\}=-6$

$\lim_{x\to 3+} f(x-1)=\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}(x-4)(x-5)=6$

$f(3-1)=f(2)=6$

이므로 함수 $f(x-1)$은 $x=3$에서 불연속이다.

(ⅰ) $a=1$일 때

$\lim_{x\to 3-} f(x-1)f(x-a)=\lim_{x\to 3-} f(x-1)f(x-1)$

$=(-6)^2=36$

$\lim_{x\to 3+} f(x-1)f(x-a)=\lim_{x\to 3+} f(x-1)f(x-1)$

$=6^2=36$

$f(3-1)f(3-1)=\{f(2)\}^2=6^2=36$

이므로 함수 $f(x-1)f(x-1)$은 $x=3$에서 연속이다.

(ⅱ) $a\neq 1$일 때

$\lim_{x\to 3-} f(x-1)f(x-a)=(-6)\times\lim_{x\to 3-} f(x-a)$ …… ㉠

$\lim_{x\to 3+} f(x-1)f(x-a)=6\times\lim_{x\to 3+} f(x-a)$ …… ㉡

$f(3-1)f(3-a)=6f(3-a)$ …… ㉢

$a\neq 1$이면 $f(x-a)$는 $x=3$에서 연속이므로

함수 $f(x-1)f(x-a)$가 $x=3$에서 연속이려면

㉠, ㉡, ㉢의 값이 같아야 한다.

$\lim_{x\to 3-} f(x-a)=\lim_{x\to 3+} f(x-a)=f(3-a)=0$

이어야 한다.

$3-a<2$, 즉 $a>1$일 때

$f(3-a)=-3(3-a)(2-a)=0$에서

$a=2$ 또는 $a=3$

$3-a>2$, 즉 $a<1$일 때

$f(3-a)=(-a-1)(-a-2)=0$에서

$a=-1$ 또는 $a=-2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값은

-2, -1, 1, 2, 3

으로 그 합은 3이다.

답 ②

참고

(ⅰ) $a=-2$일 때

$\lim_{x\to 3-} f(x-1)f(x+2)=-6f(5)=0$

$\lim_{x\to 3+} f(x-1)f(x+2)=6f(5)=0$

$f(3-1)f(3+2)=0$

이므로 $x=3$에서 연속이다.

(ⅱ) $a=-1$일 때

$\lim_{x\to 3-} f(x-1)f(x+1)=-6f(4)=0$

$\lim_{x\to 3+} f(x-1)f(x+1)=6f(4)=0$

$f(3-1)f(3+1)=0$

이므로 $x=3$에서 연속이다.

(ⅲ) $a=1$일 때

$\lim_{x\to 3-} f(x-1)f(x-1)=(-6)^2=36$

$\lim_{x\to 3+} f(x-1)f(x-1)=6^2=36$

$f(3-1)f(3-1)=\{f(2)\}^2=6^2=36$
이므로 $x=3$에서 연속이다.

(iv) $a=2$일 때
$\lim_{x \to 3-} f(x-1)f(x-2)=-6f(1)=0$
$\lim_{x \to 3+} f(x-1)f(x-2)=6f(1)=0$
$f(3-1)f(3-2)=0$
이므로 $x=3$에서 연속이다.

(v) $a=3$일 때
$\lim_{x \to 3-} f(x-1)f(x-3)=-6f(0)=0$
$\lim_{x \to 3+} f(x-1)f(x-3)=6f(0)=0$
$f(3-1)f(3-3)=0$
이므로 $x=3$에서 연속이다.

03 미분계수와 도함수

유제 본문 29~35쪽

1 33 **2** ③ **3** ③ **4** ① **5** ②
6 ④ **7** ⑤

1 $\lim_{x \to -1} \frac{f(x)+3}{x^2-x-2}=4f(-1)$ …… ㉠

㉠에서 $x \to -1$일 때 (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다.
즉, $\lim_{x \to -1}\{f(x)+3\}=0$이고 다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$f(-1)+3=0$에서
$f(-1)=-3$
㉠에서

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x)+3}{x^2-x-2}=\lim_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{(x+1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} \times \lim_{x \to -1} \frac{1}{x-2}$$
$$=f'(-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$f'(-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right)=4f(-1)=-12$이므로
$f'(-1)=36$
따라서 $f(-1)+f'(-1)=-3+36=33$

답 33

2 조건 (가)에서

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{(4+2a+b)-b}{2}$$
$$=2+a=4$$

이므로 $a=2$
조건 (나)에서

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x^2-1}=\lim_{x \to -1} \frac{x^2+ax+b-(1-a+b)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x \to -1} \frac{x^2+ax-1+a}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-1+a)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x \to -1} \frac{x-1+a}{x-1}$$
$$=\frac{-2+a}{-2}$$
$$=0$$