Lista de Exercícios 1 - Algoritmos I

Rita Rezende Borges de Lima
Matrícula: 2020065317

April 9, 2021

1. a) Verdadeiro,

   b) Falso, caso isso fosse possível P1 será resolvível em tempo polinomial, logo P1 $\in$ P. Como P1 $\in$ NP-completo e P1 é arbitrário, P = NP, entretanto, isso gera uma contradição já que no enunciado nos é dito para assumir que P $\neq$ NP.

   c) Verdadeiro, o problema de cobertura de vértices é um problema NP-Completo, conseguimos reduzir este a todas desta mesma classe, logo caso o problema fosse resolvido polinomialmente, P = NP.

   d) Falso, P2 só será NP-completo caso seja NP, contudo como isso não é especificado P2 pode ser NP-difícil.

   e) Falso, nada podemos afirmar a respeito de P2 se P1 $\in$ NP-completo e P2 $\leq_p$ P1. P2 pode ser polinomial ou não, e dessa forma só seria P2 $\in$ NP-completo se P = NP.

   f) Verdadeiro, como P1 $\in$ NP-completude, P1 $\leq_p$ P2 $\leq_p$ P3, e todos são NP, por transitividade P3 $\in$ NP-completude.

   g) Falso, P1 pode ser apenas polinomial e ainda assim seria possível fazer uma redução para P2 $\in$ NP-completude.

2.

Lemma 0.1. *Partindo do pressuposto que o problema do conjunto independente é NP-completo, o problema da Clique também é NP-completo.*

Proof. É simples perceber que o problema da clique está em NP, dado os k vértices da solução S, basta verificar se existe uma aresta entre cada possível combinação entre estes vértices, ou seja, $\forall$ (u, v) $\in$ S X S, (u, v) $\in$ A. Logo a verificação fará k*(k-1) operações e será de complexidade polinomial.

Agora mostraremos que Conjunto Independente $\leq_p$ Clique. Considere um grafo G com uma clique de k vértices, pela definição de clique sabemos que cada um destes nós tem uma aresta entre si, ou seja, ao calcularmos o grafo complementar de G, não existirá nenhuma aresta entre eles o que configura um conjunto independente de vértices. Como o cálculo do grafo complementar é polinomial, quadrático em uma matriz de adjacência, é possível resolver o problema do Conjunto Independente com o problema da clique associado a uma operação polinomial, e assim concluimos que Conjunto Independente $\leq_p$ Clique.

Como Conjunto Independente $\leq_p$ Clique e Conjunto Independe $\in$ NP-completude, Clique $\in$ NP-completude.

□

3.

Lemma 0.2. *Partindo do pressuposto que o problema de coloração de grafos é NP-completo, o problema da alocação de frequências também é NP-completo.*

Proof. É simples perceber que o problema da alocação de frequências está em NP, Para verificarmos uma solução basta iterarmos sobre todos os transmissores e para cada um destes olhar sua respectiva frequência na solução verificando se esta não é igual a de nenhum outro transmissor par deste, desta forma a verificação da solução é linear no número de transmissores e pares e por consequência polinomial.

Agora mostraremos que Coloração de Grafos $\leq_p$ Alocação de Frequências. Primeiro iremos mapear cada um dos transmissores como vértices em um grafo G = (V, E) onde as arestas são os pares de transmissores muito próximos e cada cor será representada como uma frequência. Para resolvermos o problema de Coloração de Grafos com k cores cada transmissor poderá ter no máximo k frequências iguais. Como dois transmissores próximos não podem ter a mesma frequências entre as k possíveis, e dois vértices vizinhos não podem ter a mesma cor entre as k possíveis, percebemos que ao modelar o e adicionar condições ao problema de Alocação de Frequência encontramos um problema exatamente igual ao de Coloração de Grafos, assim tornando a redução possível. Desta forma concluimos que Coloração de Grafos $\leq_p$ Alocação de Frequências.

Como Coloração de Grafos $\leq_p$ Alocação de Frequências e e Coloração de Grafos $\in$ NP-completude, Alocação de Frequências $\in$ NP-completude.

□

4.

Lemma 0.3. *Partindo do pressuposto que o problema de Ciclo Hamiltoniano é NP-completo, o problema do Caminho Hamiltoniano também é NP-completo.*

Proof. É simples perceber que o Caminho Hamiltoniano está em NP. Para verificarmos uma solução basta iterarmos sobre todos os vértices em G verificando se estes aparecem uma única vez na solução, depois seguindo os vértices pela ordem da solução devemos verificar se vértices consecutivos tem uma aresta entre si, caso a solução satisfaça as duas condições ela é válida. Dessa forma a verificação é linear e desta forma, polinomial.

Agora mostraremos que Ciclo Hamiltoniano $\leq_p$ Caminho Hamiltoniano. Um ciclo hamiltoniano pode ser descrito como um caminho hamiltoniano adicionado de uma aresta entre o vértice inicial e o final, desta maneira podemos instanciar um caminho hamiltoniano e testar todas as arestas, com o intuito de fechar o ciclo. Esta última operação é linear na quantidade de arestas de maneira que a redução é polinomial e portanto concluimos que Ciclo Hamiltoniano $\leq_p$ Caminho Hamiltoniano.

Como Ciclo Hamiltoniano $\leq_p$ Caminho Hamiltoniano e e Ciclo Hamiltoniano $\in$ NP-completude, Caminho Hamiltoniano $\in$ NP-completude.

□

5.

Lemma 0.4. *Partindo do pressuposto que o problema de Caminho Hamiltoniano é NP-completo, o problema do Caminho Mais Longo também é NP-completo.*

Proof. É simples perceber que o problema do Caminho Mais Longo está em NP. Para verificarmos uma solução basta iterarmos sobre todos os vértices da Solução, S, conferindo se os vértices desta aparecem uma única vez na solução, depois conferindo se $|S| >= k$. Dessa forma a verificação é linear e desta forma, polinomial.

Agora mostraremos que Caminho Hamiltoniano $\leq_p$ Caminho Mais Longo. Como o Caminho Mais Longo não permite a repetição de vértices, o Caminho Hamiltoniano, caso este exista no grafo, será o Caminho Mais Longo de um grafo, Assim, com k = vértices - 1, o problema do Caminho Mais Longo informa se existe ou não um Caminho Hamiltoniano. Portanto concluimos que Caminho Hamiltoniano $\leq_p$ Caminho Mais Longo.

Como Caminho Hamiltoniano $\leq_p$ Caminho Mais Longo e e Caminho Hamiltoniano $\in$ NP-completude, Caminho Mais Longo $\in$ NP-completude.

□