



# 第7章 小波和多分辨率处理

- 小波变换：一种新的信号处理技术
  - 傅里叶变换的基函数是正弦波，而小波变换的基函数是**小型波**
  - 小波具有**变化的频率和有限的持续时间**
  - 傅里叶变换只提供频率信息，无时间信息
- 小波是**多分辨率理论**这种信号处理和分析方法的基础
  - 多分辨率理论涉及多个分辨率下的信号（或图像）表示与分析。
  - 这种方法的优势是：某种分辨率下无法检测的特性，在另一种分辨率下容易检测
- 本章从多分辨率的角度来审视基于小波的变换。
  - 主要内容集中于离散小波变换的开发和利用



# 第7章 小波和多分辨率处理

---

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

7.6 小波包



# 第7章 小波和多分辨率处理

---

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

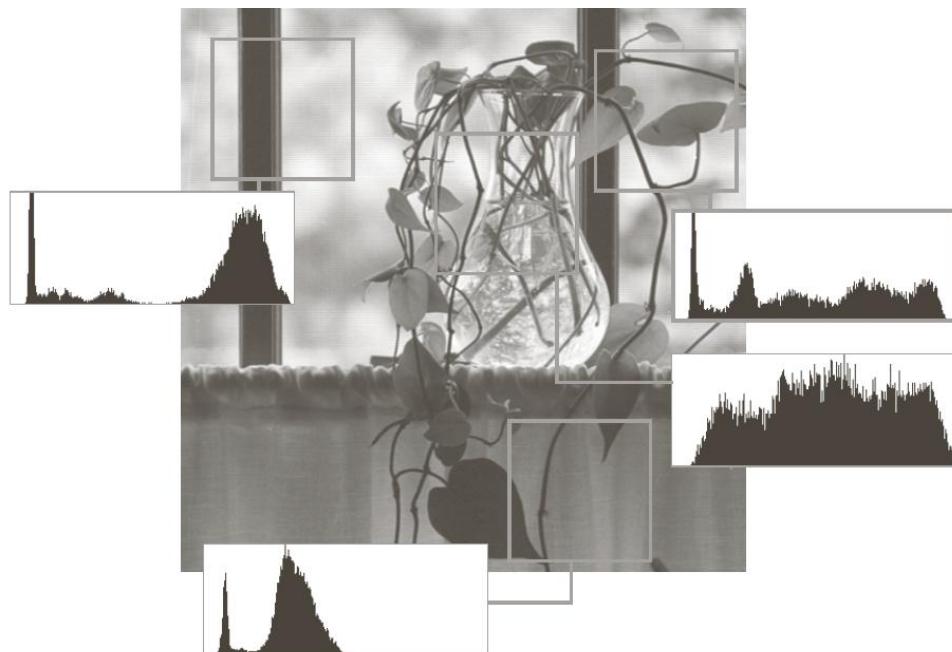
7.5 二维小波变换

7.6 小波包

# 7.1 背景：多分辨率分析（MRA）

## □ 基本动机

- 图像中，区域由相似纹理和灰度级组成，不同区域结合形成物体
- 较小物体适合用较高分辨率分析
- 对于较大物体，用低分辨率分析即可
- 如果图像中同时存在较小物体和较大物体，则可用不同分辨率来研究他们

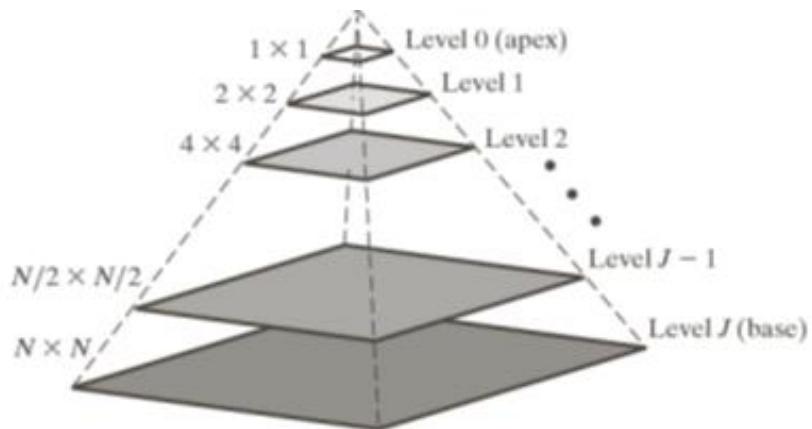


- 图像不同区域的局部直方图差异很大
- 难以对整图用统计模型进行分析

# (1) 图像金字塔

- 图像金字塔：
  - 一系列以金字塔形状排列的、分辨率逐渐降低的图像集合
  - 底部：高分辨率表示；顶部：低分辨率近似
  - 最初用于图像压缩
- $P + 1$  级图像金字塔像素总数是

$$N^2 \left( 1 + \frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^P} \right) \leq \frac{4}{3} N^2$$



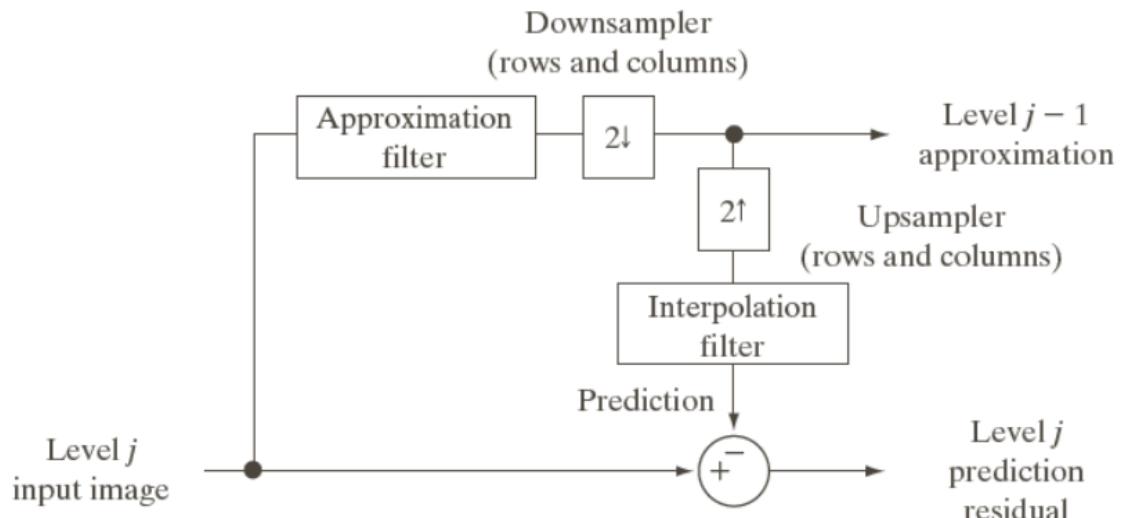
两个问题：

第一，如何构建该金字塔？  
第二，金字塔相邻两级差别是什么？

# (1) 图像金字塔

## □ 创建近似金字塔和残差金字塔

- 步骤一：通过近似滤波器后，2倍下采样，得到第 $j-1$ 级近似
  - ✓ 近似滤波器：邻域平均、高斯低通滤波、无滤波
- 步骤二：由步骤一产生的分辨率降低的近似，2倍上采样，然后通过插值滤波，创建第 $j$ 级输入图像的一个预测
  - ✓ 插值滤波：最近邻、双线性、双三次内插
- 步骤三：计算步骤二的预测图像和步骤一的输入之间的差，即预测残差

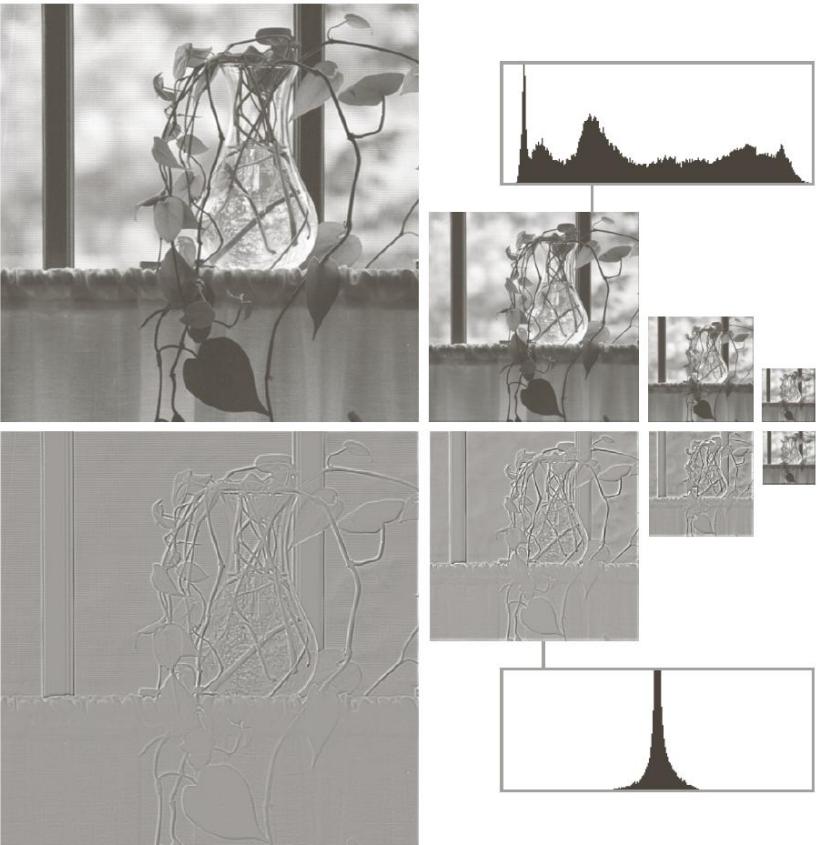


$$f_{2\uparrow}(n) = \begin{cases} f\left(\frac{n}{2}\right), & n \text{ 为偶数} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_{2\downarrow}(n) = f(2n)$$

# (1) 图像金字塔

- 上图：近似金字塔，称为高斯金字塔
  - 因为构建金字塔时使用了高斯滤波器
  - 分辨率越低，细节越少
    - ✓ 低分辨率适合分析大结构或图像整体内容
    - ✓ 高分辨率适合分析单个物体特性
  
- 下图：预测残差金字塔，通常称为拉普拉斯金字塔
  - 直方图分布比较集中，适合用较少比特进行压缩



四级金字塔及它们的直方图

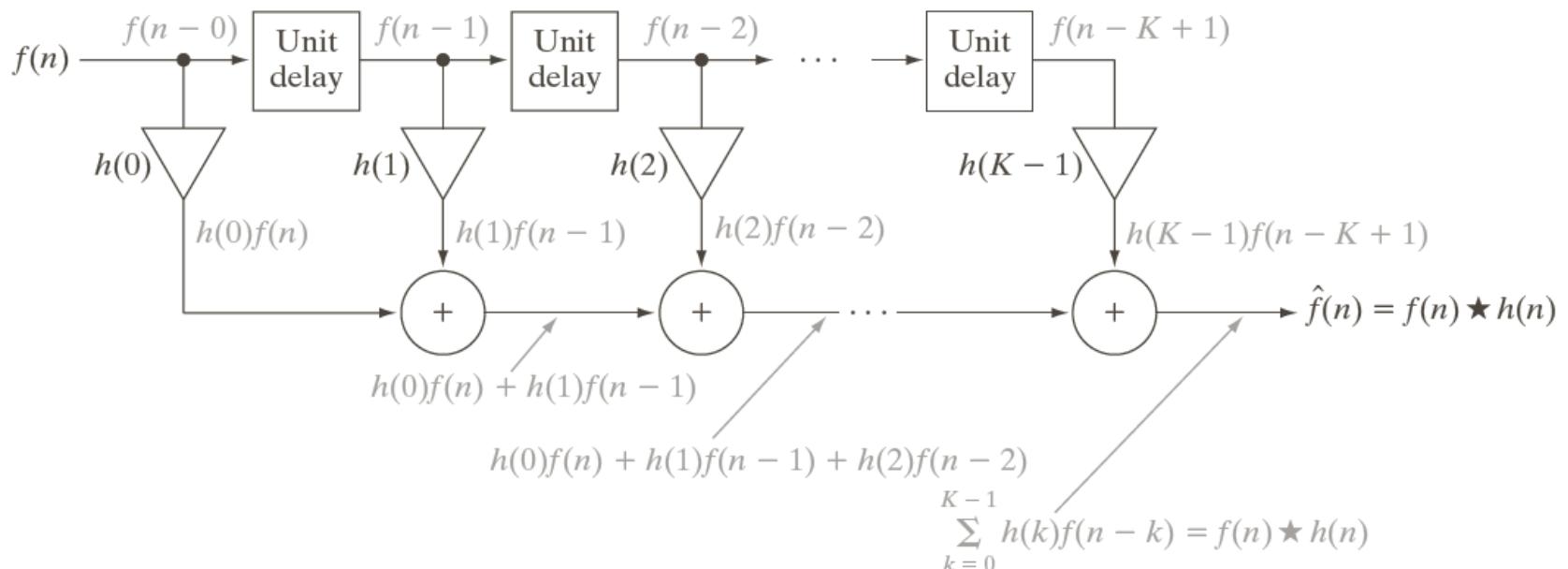
## (2) 子带编码

### 在子带编码中

- 一副图像可**分解**为一组**频带受限**的分量，称为子带
- 子带可以重组在一起，无误差**重建**原始图像

### 数字滤波器

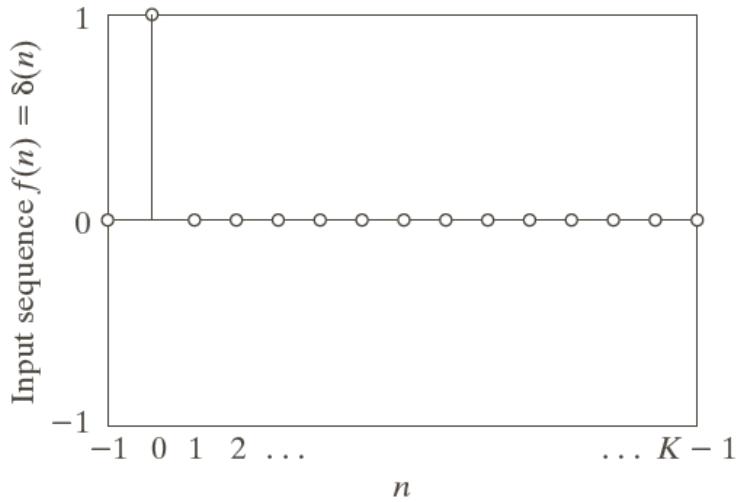
- 三个基本部件：延迟单元、乘法器、加法器
- 最终完成数字信号和滤波器的**卷积运算**



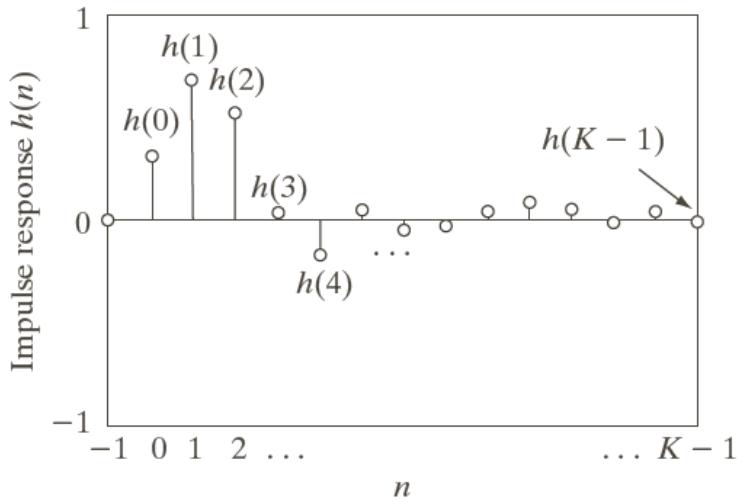
## (2) 子带编码

- 如果输入是离散单位冲激，则输出为滤波器系数

$$\hat{f}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot \delta(n - k) = h(n)$$



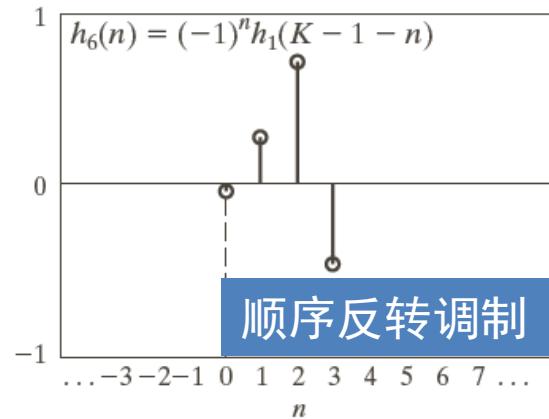
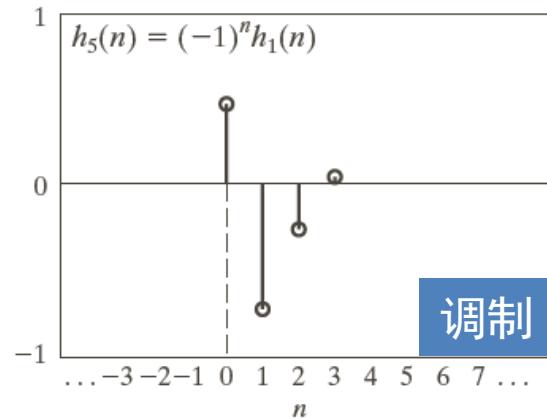
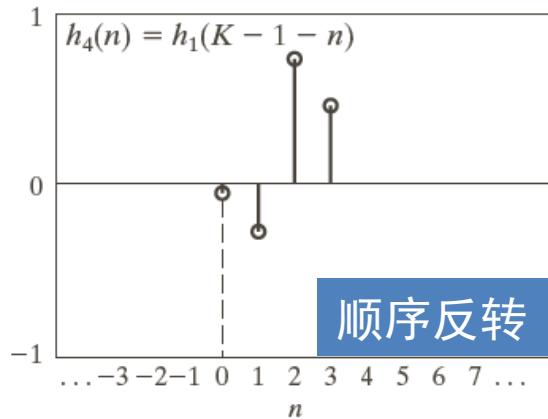
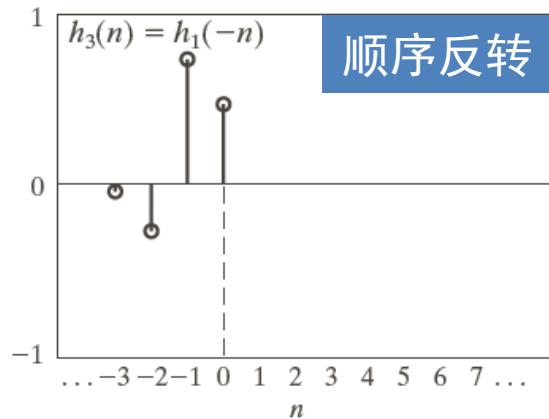
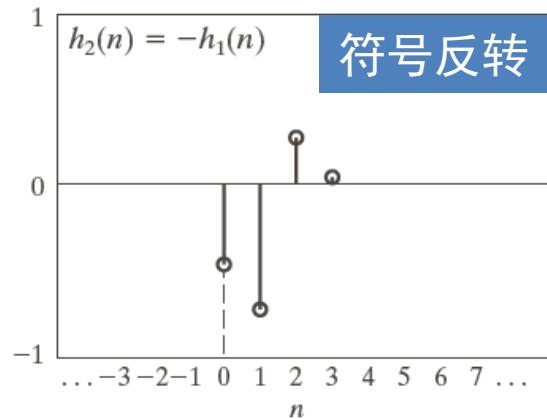
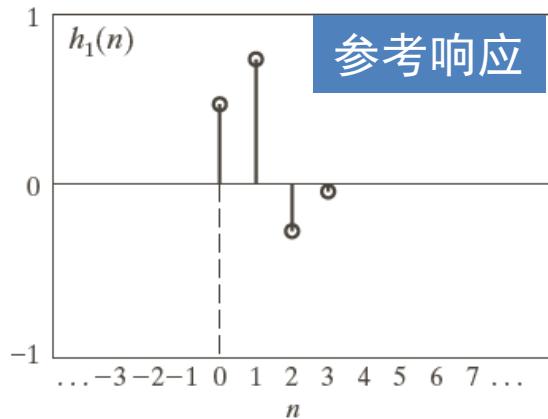
离散单位冲击



滤波器冲击响应

## (2) 子带编码

- 6个功能相关的滤波器的冲激响应：



## (2) 子带编码：两波段子带编码和解码

### □ 分析滤波器组和综合滤波器组串联

- 选择合适滤波器，实现完美重构
  - ✓ 定义**原型**滤波器，由其计算得到其他滤波器
  - ✓ 双正交滤波器，归一化正交滤波器

双正交滤波器

$$g_0(n) = (-1)^n h_1(n)$$

$$g_1(n) = (-1)^{n+1} h_0(n)$$

或

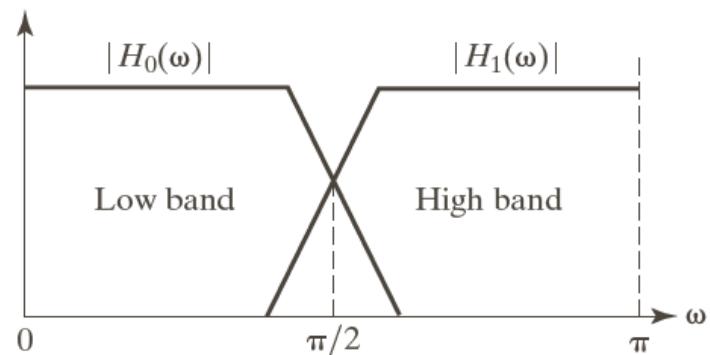
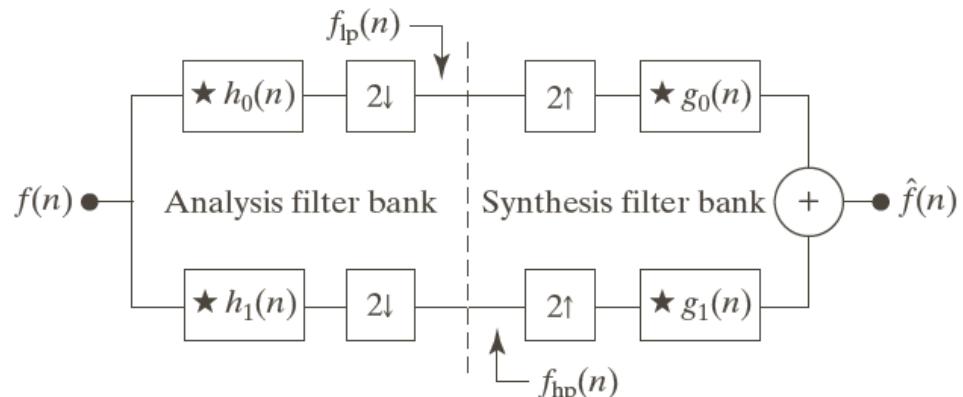
$$g_0(n) = (-1)^{n+1} h_1(n)$$

$$g_1(n) = (-1)^n h_0(n)$$

正交滤波器

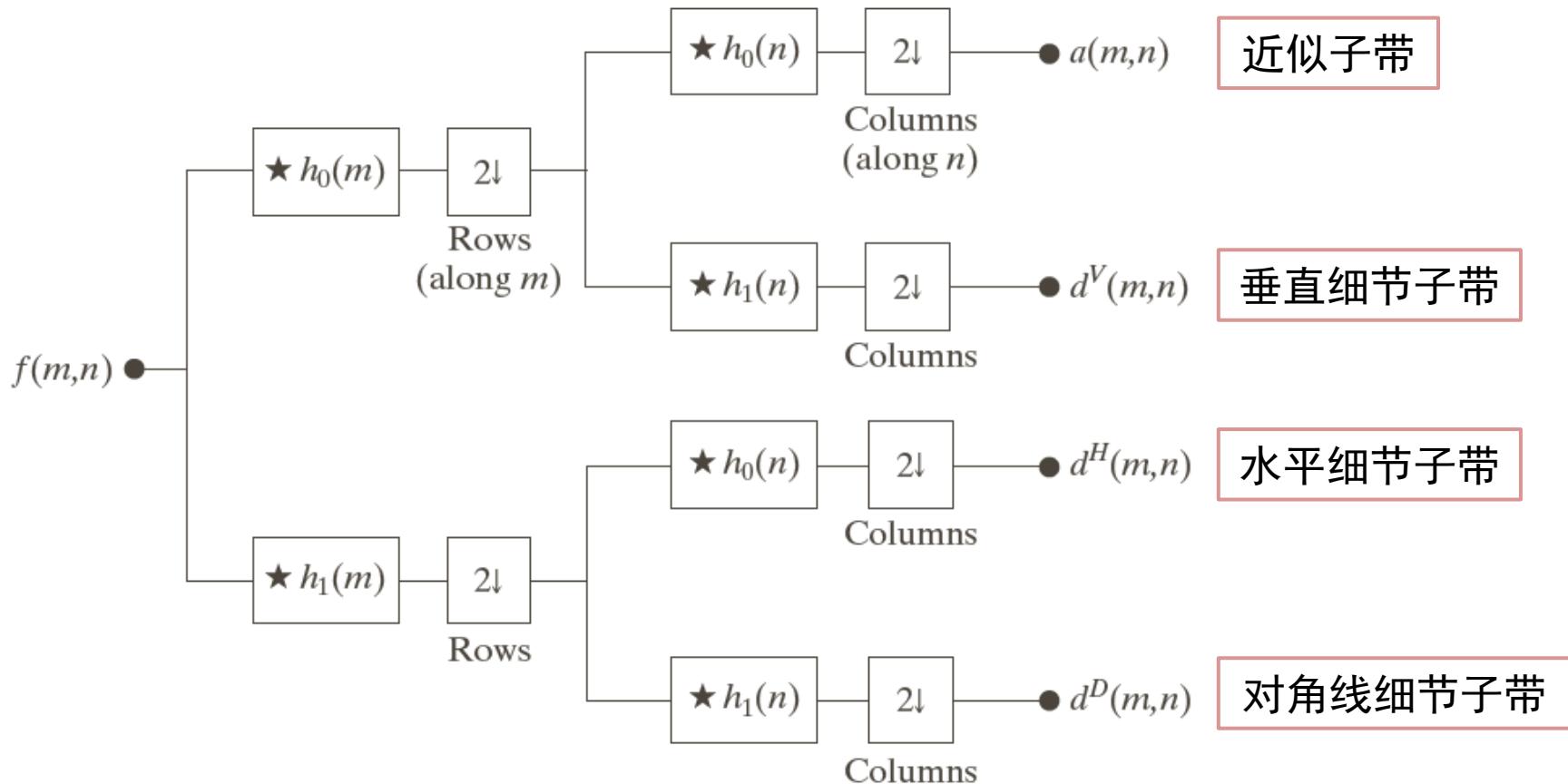
$$g_1(n) = (-1)^n g_0(K - 1 - n)$$

$$h_i(n) = g_i(K - 1 - n), i = \{0,1\}$$



## (2) 子带编码：二维子带编码

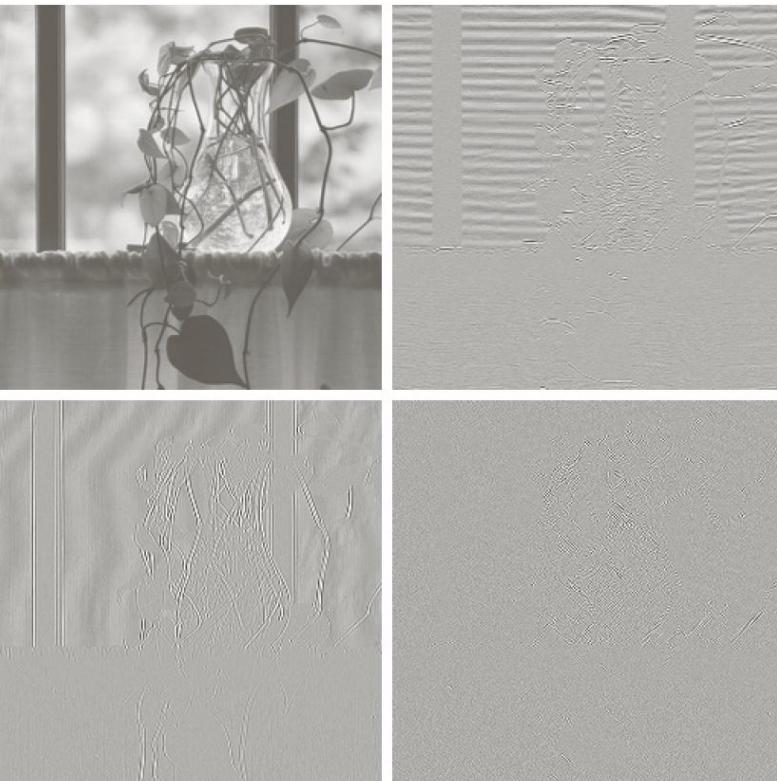
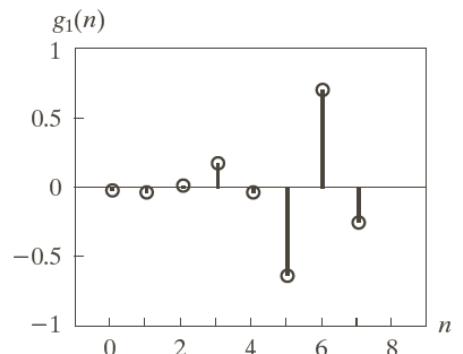
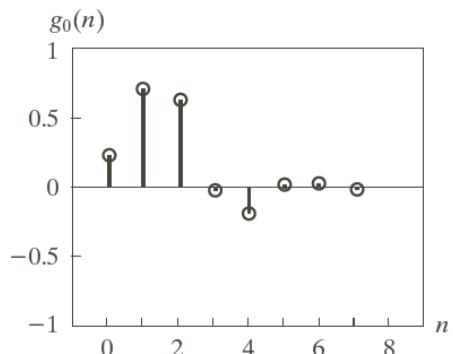
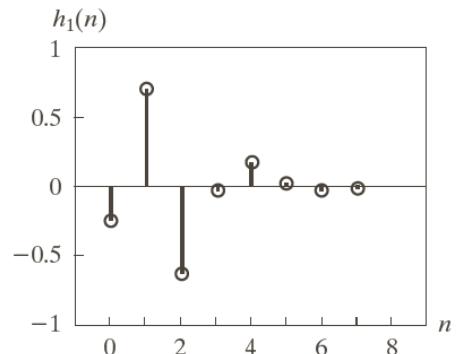
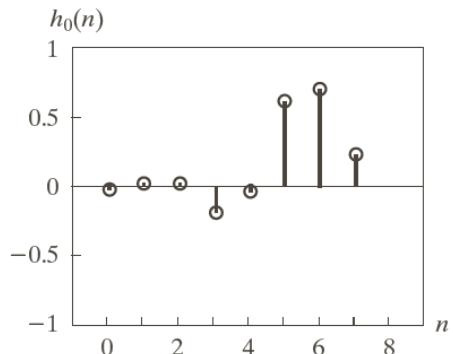
- 将输入图像分解为四个子带图像
  - 每个子带图像还可以分为4个更小子带，更小的子带还可以再分



## (2) 子带编码示例

$n$	$g_0(n)$
0	0.23037781
1	0.71484657
2	0.63088076
3	-0.02798376
4	-0.18703481
5	0.03084138
6	0.03288301
7	-0.01059740

4个8抽头Daubechies归一化  
正交滤波器的冲击响应  
(见公式7.1-14)



子带分离结果，4个子带分别是：  
 (a) 近似子带      (b) 水平细节子带  
 (c) 垂直细节子带      (d) 对角线细节子带



### (3) 哈尔变换 (1910)

#### □ 哈尔(Haar)变换的矩阵表示

$$T = HFH^T$$

$H$ :  $N \times N$  哈尔变换矩阵,  $F$ :  $N \times N$  图像矩阵,  $T$ :  $N \times N$  变换结果

#### □ 哈尔基函数 ( $k = 2^p + q - 1$ , $k = 0, 1, \dots, N - 1$ )

$$h_0(z) = h_{00}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}}, z \in [0,1]$$

$$h_k(z) = h_{pq}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} 2^{p/2}, & (q-1)/2^p \leq z < (q-0.5)/2^p \\ -2^{\frac{p}{2}}, & (q-0.5)/2^p \leq z < q/2^p \\ 0, & \text{其他}, z \in [0,1] \end{cases}$$

#### □ 哈尔矩阵

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

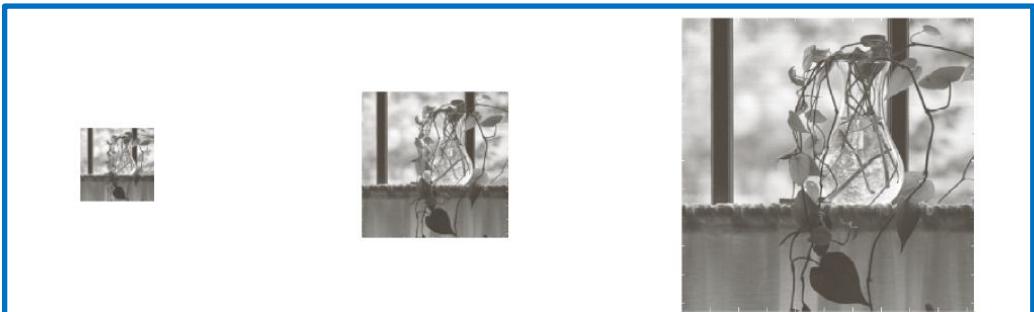
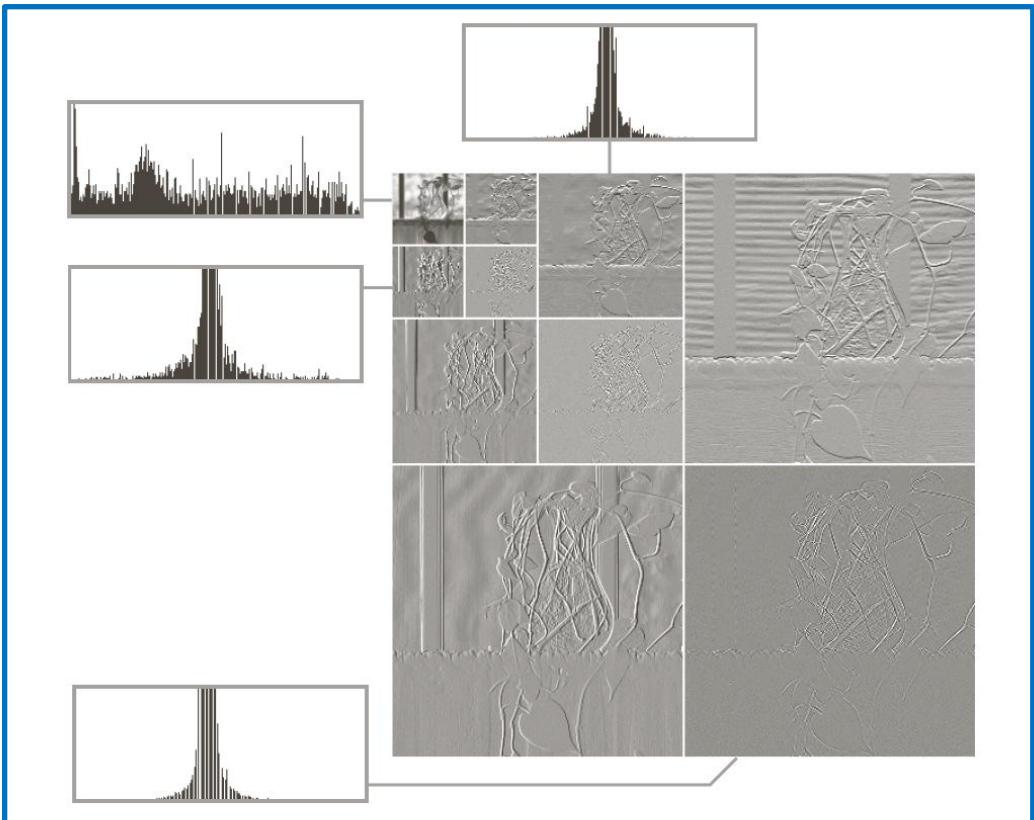
### (3) 哈尔变换

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$H_2$ 的行可用于定义一个2抽头完美重建滤波器组的分析滤波器 $h_0(n)$ 和 $h_1(n)$

每幅子图像描绘了原始图像中空间频率的一个特定频带

由 $H_2$ 哈尔基函数的离散小波变换得到三种不同分辨率的近似图像  
 $(64 \times 64, 128 \times 128, 256 \times 256)$





# 第7章 小波和多分辨率处理

---

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

7.6 小波包



## 7.2 多分辨率展开

- 在多分辨率分析中，**尺度函数**被用于建立一个函数或一幅图像的一系列**近似**
  - 每个**近似**与其最近邻**近似**在分辨率方面都用基2来区分
  - 使用称为**小波**的附加函数（**小波函数**）对相邻**近似**之间的差进行编码
- 基础概念
  - 级数展开
  - 尺度函数
  - 小波函数



# 级数展开

- 信号或函数 $f(x)$ 通常能分解为一系列**展开函数**的线性组合

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \varphi_k(x)$$

- $\alpha_k$ 是实值展开系数， $\varphi_k(x)$ 是实值展开函数
- 如果展开唯一，则称 $\varphi_k(x)$ 为基函数， $\{\varphi_k(x)\}$ 称为基
- 可展开的函数张成了一个函数空间，成为展开集合的闭合跨度：

$$V = \overline{\text{Span}_k\{\varphi_k(x)\}}$$

- 对于任意 $f(x) \in V$ ，利用 $\{\varphi_k(x)\}$ 的对偶函数集合 $\{\tilde{\varphi}_k(x)\}$ ，其展开系数：

$$\alpha_k = \langle \tilde{\varphi}_k(x), f(x) \rangle = \int \tilde{\varphi}_k^*(x) f(x) dx$$



# 尺度函数

- 考虑由**整数平移**和**实数二值尺度**、平方可积函数 $\varphi(x)$ 组成的展开函数集合，即 $\{\varphi_{j,k}(x)\}$ ，其中

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k)$$

$\varphi(x)$ 被称为尺度函数

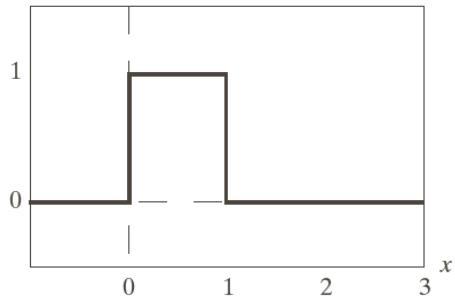
- 选择合适的 $\varphi(x)$ ，可使 $\varphi_{j,k}(x)$ 跨越  $L^2(\mathbf{R})$ ，即所有可度量的、平方可积函数的集合：

$$V_j = \overline{\bigcup_k \text{Span}\{\varphi_{j,k}(x)\}}$$

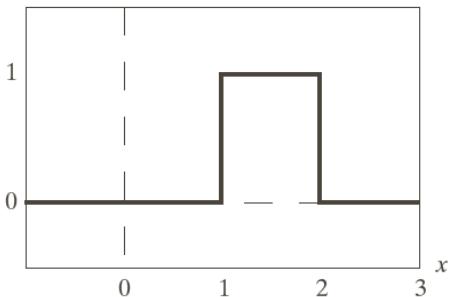
- 增大 $j$ 会增大 $V_j$ 的大小，进而允许子空间中包含具有较小变换的变量或较细的细节函数
  - 随着 $j$ 的增大，用于表示子空间函数的 $\varphi_{j,k}(x)$ 会变窄， $x$ 有较小变化即可分开

# 尺度函数：哈尔尺度函数

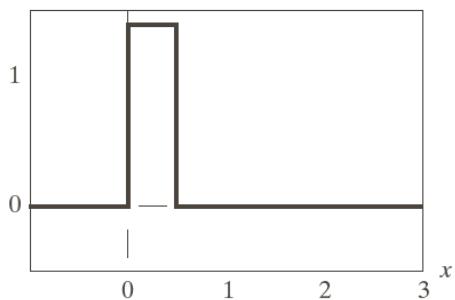
$$\varphi_{0,0}(x) = \varphi(x)$$



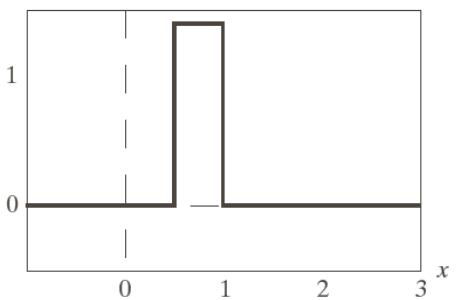
$$\varphi_{0,1}(x) = \varphi(x - 1)$$



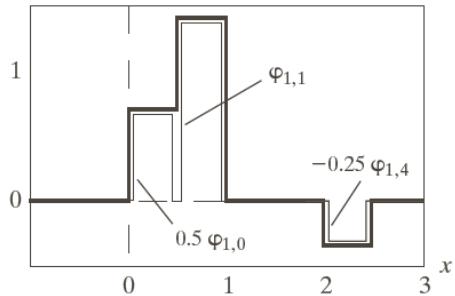
$$\varphi_{1,0}(x) = \sqrt{2} \varphi(2x)$$



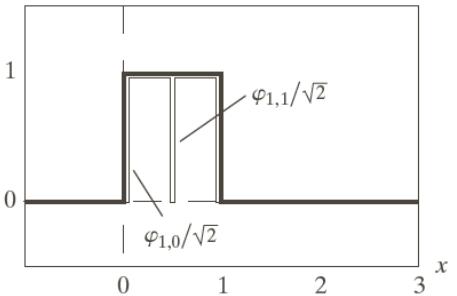
$$\varphi_{1,1}(x) = \sqrt{2} \varphi(2x - 1)$$



$$f(x) \in V_1$$



$$\varphi_{0,0}(x) \in V_1$$



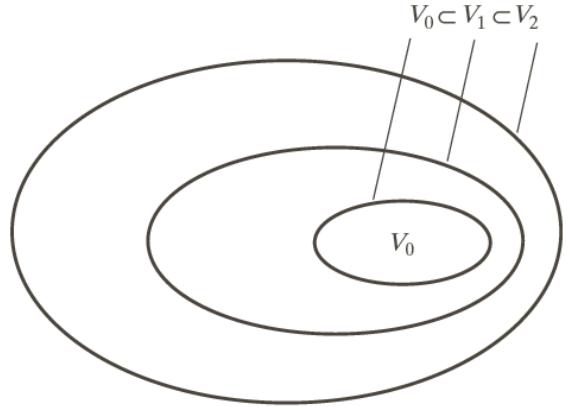
如果  $f(x)$  是  $V_0$  的元素，那么它也是  $V_1$  的元素

# 尺度函数

## □ 多分辨率分析 (MRA) 4个基本要求

- 1: 尺度函数对其整数平移是正交的
- 2: 低尺度的尺度函数跨越的子空间，嵌套在高尺度跨越的尺度空间内，即

$$V_{-\infty} \subset \cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_\infty$$



- 3: 唯一对所有的 $V_j$ 通用的函数是 $f(x) = 0$ 
  - ✓ 没有信息的函数 $V_{-\infty} = \{0\}$
- 4: 任何可度量的、平方可积的函数都可以按任意精度表示
  - ✓ 任意空间的展开函数，都可由相邻较高分辨率空间的展开函数建立

# 小波函数

- 定义小波集合 $\{\psi_{j,k}(x)\}$ :  $\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$
- 小波函数跨越的空间:

$$W_j = \overline{\text{Span}_k \{\psi_{j,k}(x)\}}$$

- 如果函数 $f(x) \in W_j$ , 则有:

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \psi_{j,k}(x)$$

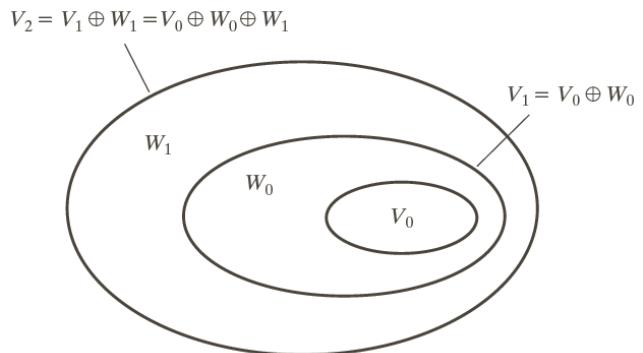
- 尺度函数和小波函数子空间关系

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

- 任意小波函数, 可表示为平移后的双倍分辨率尺度函数的加权和

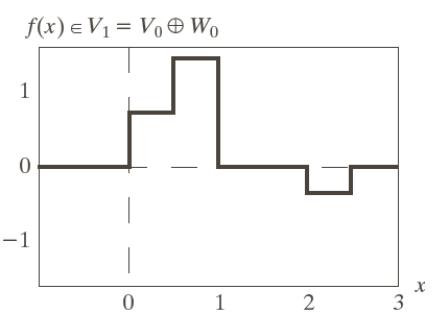
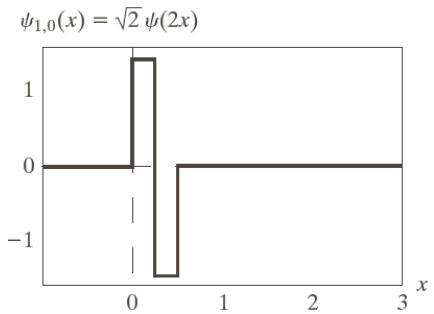
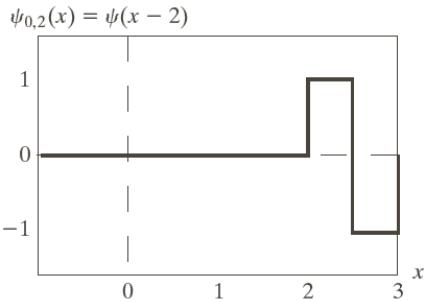
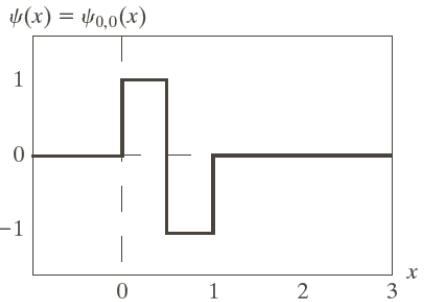
$$\psi(x) = \sum_n h_\psi(n) \sqrt{2} \varphi(2x - n) \quad h_\psi(n) \text{为小波函数系数}$$

可以证明:  $h_\psi(n) = (-1)^n h_\varphi(n)$

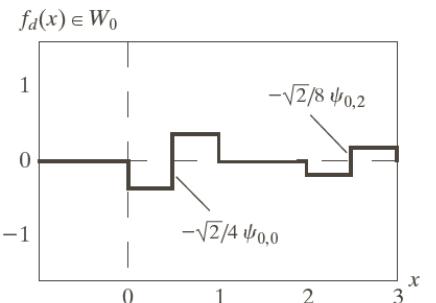
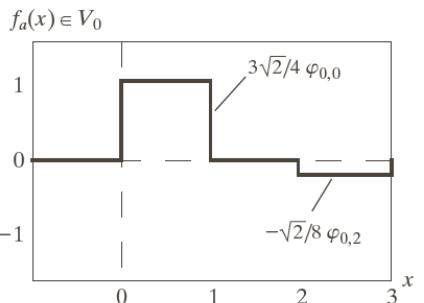


# 小波函数

## □ 哈尔小波函数系数



$$f(x) = f_a(x) + f_d(x)$$





# 第7章 小波和多分辨率处理

---

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

7.6 小波包

# 7.3 一维小波变换

## □ 三种小波变换

- 一般的小波级数展开  $\leftrightarrow$  傅里叶级数展开
- 离散小波变换  $\leftrightarrow$  离散傅里叶变换
- 连续小波变换  $\leftrightarrow$  积分傅里叶变换

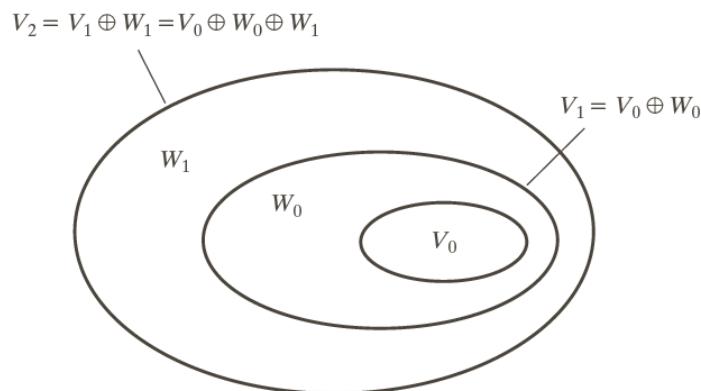
## □ 小波级数展开

$$f(x) = \sum_k c_{j_0}(k) \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k d_j(k) \psi_{j,k}(x)$$

$c_{j_0}(k)$ : 近似或尺度系数；  $d_j(k)$ : 细节或小波系数

$$c_{j_0}(k) = \langle f(x), \varphi_{j_0,k}(x) \rangle = \int f(x) \varphi_{j_0,k}(x) dx$$

$$d_j(k) = \langle f(x), \psi_{j,k}(x) \rangle = \int f(x) \psi_{j,k}(x) dx$$



# 小波级数展开

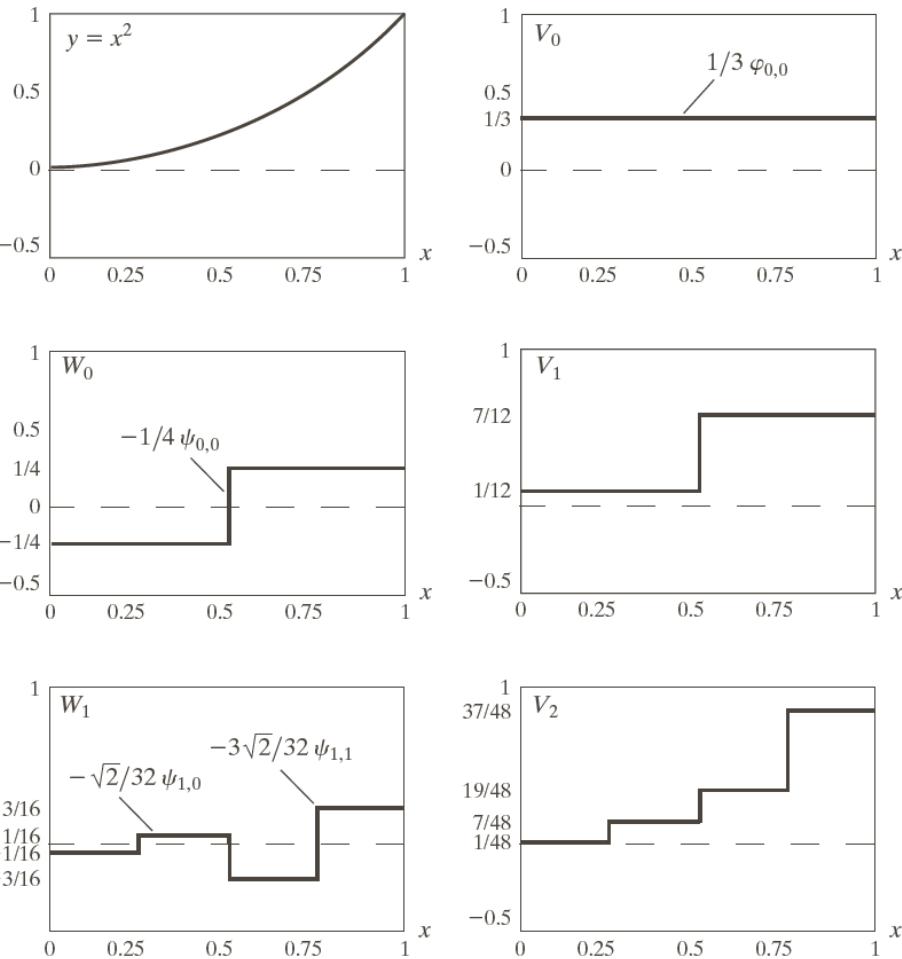
- 随着更高尺度的叠加，近似变得更接近测试函数的精确表示。
- 当 $j \rightarrow \infty$ 时，可实现精确重构表示

$$y = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$c_0(0) = \int_0^1 x^2 \varphi_{0,0}(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$d_0(0) = \int_0^1 x^2 \psi_{0,0}(x) dx = -\frac{1}{4}$$

.....

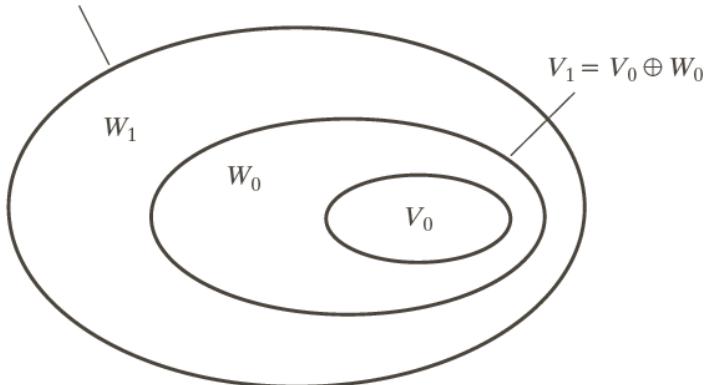


使用哈尔小波的 $y = x^2$ 的小波级数展开

# 离散小波变换 (DWT)

- 如果待展开的函数是离散的（即数字序列），得到的系数就称之为离散小波变换（DWT）

$$V_2 = V_1 \oplus W_1 = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1$$



- 正向DTW系数

近似系数:  $W_\varphi(j_0, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_n f(n) \varphi_{j_0, k}(n)$

细节系数:  $W_\psi(j, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_n f(n) \psi_{j, k}(n), j \geq j_0$

- 反向DWT:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_k W_\varphi(j_0, k) \varphi_{j_0, k}(n) + \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k W_\psi(j, k) \psi_{j, k}(n)$$



# 连续小波变换 (CWT)

- 连续小波变换 (CWT) 将一个连续函数变换为两个变量（平移和尺度）的高冗余度函数
  - 其结果可用于时间-频率分析
- 连续平方可积函数 $f(x)$ 的连续小波变换与实数值小波 $\psi(x)$ 的关系定义为

$$W_\psi(s, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{s,\tau}(x) dx$$

$$\psi_{s,\tau}(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{x - \tau}{s}\right)$$

$s$ : 尺度参数  
 $\tau$ : 平移参数

- 给定 $W_\psi(s, \tau)$ , 连续小波反变换为

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi(s, \tau) \frac{\psi_{s,\tau}(x)}{s^2} d\tau ds$$

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi(\mu)|^2}{|\mu|} d\mu$$

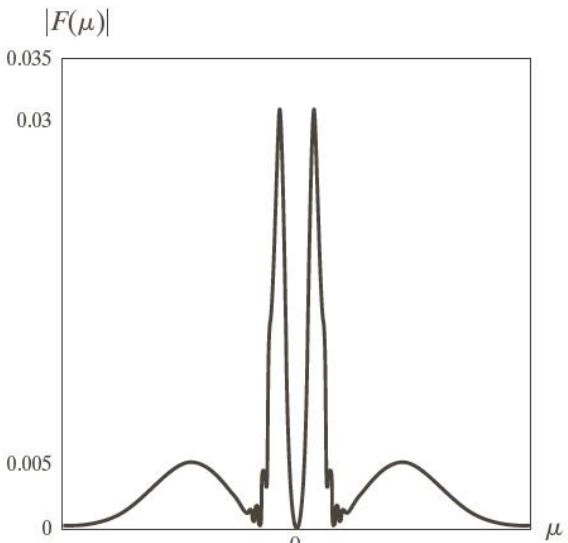
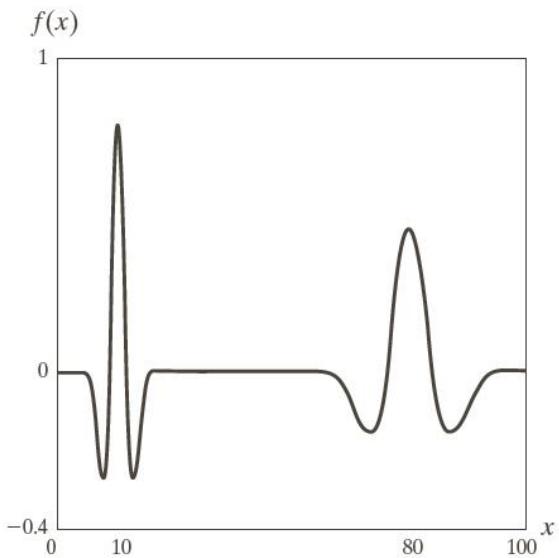


# 连续小波变换 (CWT)

## □ CWT 与 DWT的相似性

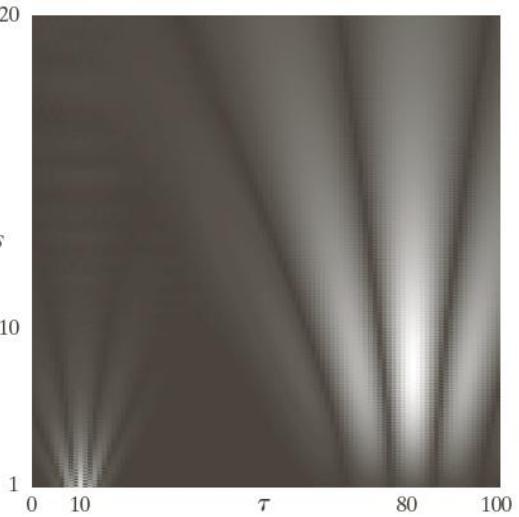
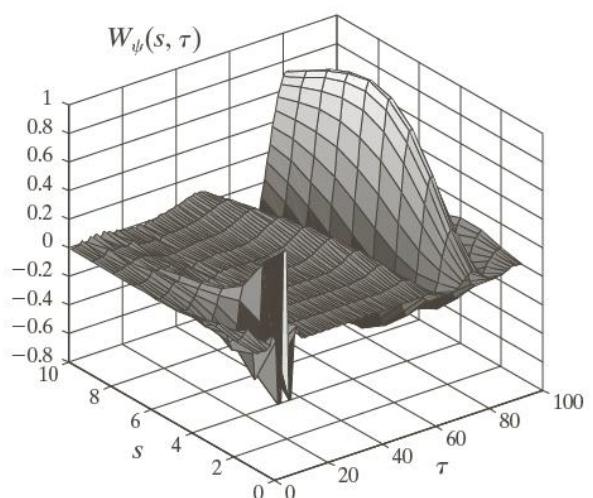
- 连续平移参数  $\tau$  取代了整数平移参数  $k$
- 连续尺度参数  $s$  与二进制参数  $2^j$  相反
  - ✓ 小波尺度与传统意义的频率表示关系是相反的
- 连续小波变换类似于尺度为  $j = -\infty$  的离散小波变换，从而消除了与尺度函数间的联系，因此仅用小波项表示即可
- 与离散变换类似，连续变换的结果为一组系数，度量了  $f(x)$  与基函数的相似性

# 连续小波变换



a  
b  
c  
d

**FIGURE 7.16**  
The continuous wavelet transform (c and d) and Fourier spectrum (b) of a continuous 1-D function (a).



连续小波变换[(c)和(d)]和  
连续一维函数(a)的傅里叶谱(b)

$$f(x) = \psi_{1,10}(x) + \psi_{6,80}(x)$$



# 第7章 小波和多分辨率处理

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

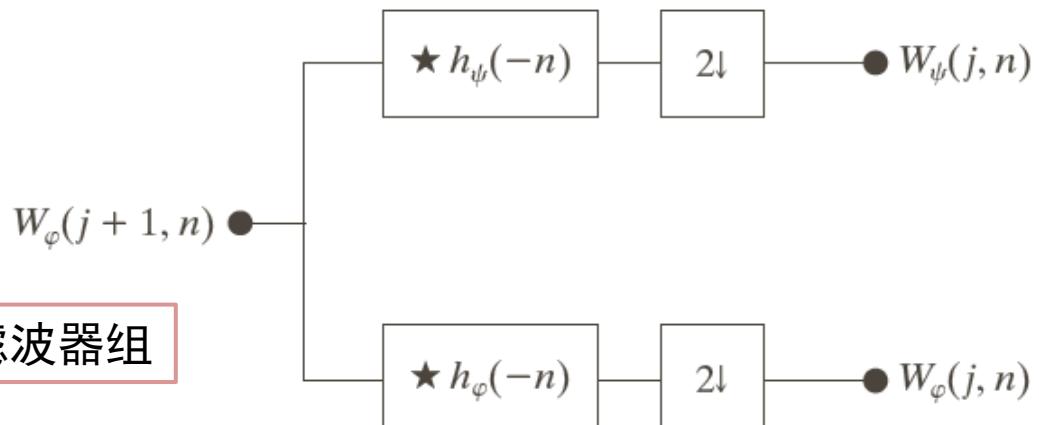
7.6 小波包

## 7.4 快速小波变换

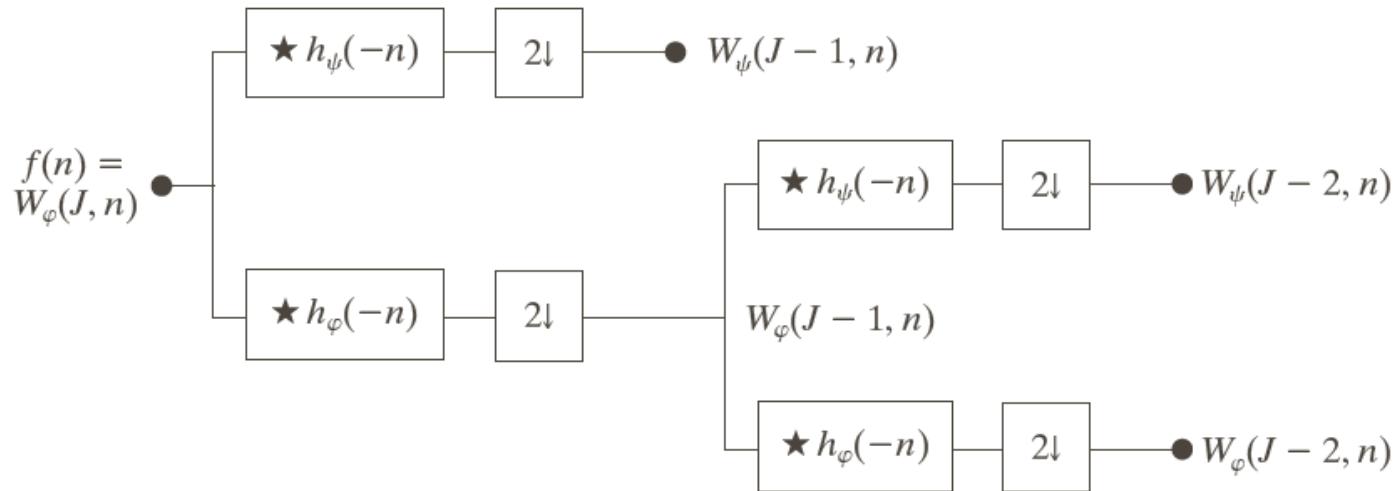
- 快速小波变换（FWT）是实现离散小波变换（DWT）的高效计算，也称Mallat人字形算法
  - 类似于2子带的子带编码
- 相邻尺度的DTW系数之间的关系

$$W_\psi(j, k) = h_\psi(-n) \star W_\varphi(j + 1, n) \Big|_{n=2k, k \geq 0}$$

$$W_\varphi(j, k) = h_\varphi(-n) \star W_\varphi(j + 1, n) \Big|_{n=2k, k \geq 0}$$

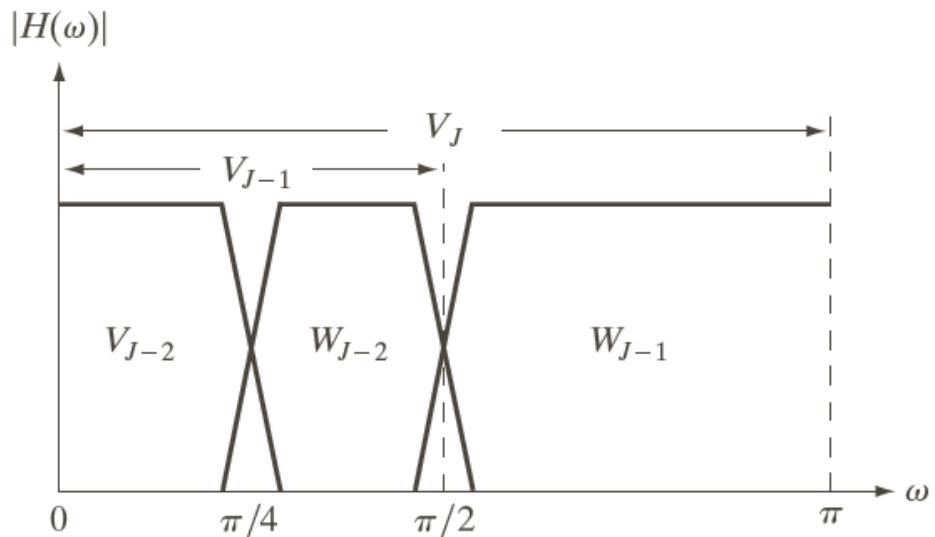


# 7.4 快速小波变换



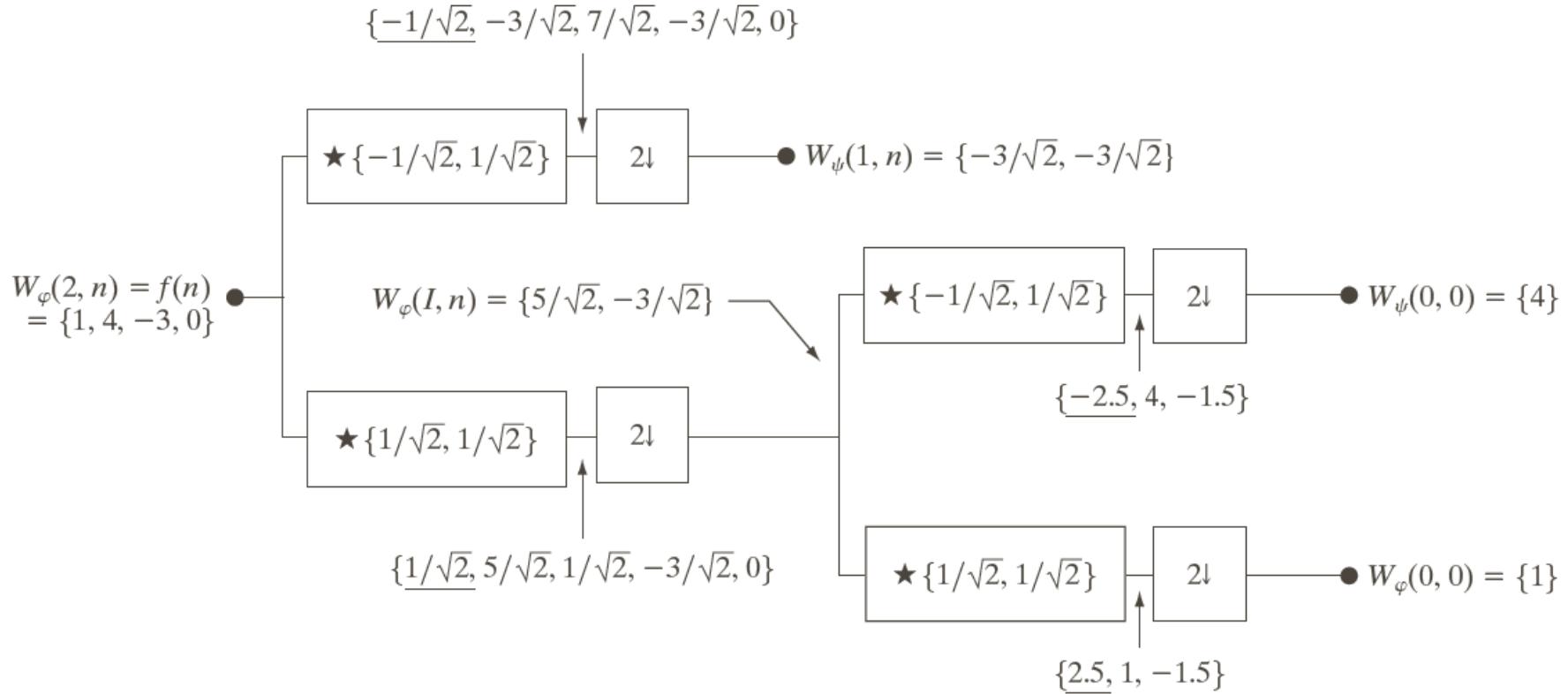
a  
b

**FIGURE 7.18**  
(a) A two-stage or two-scale FWT analysis bank and (b) its frequency splitting characteristics.



- (a) 一个二级或二尺度 FWT分析滤波器组
- (b) 其频谱分离特性

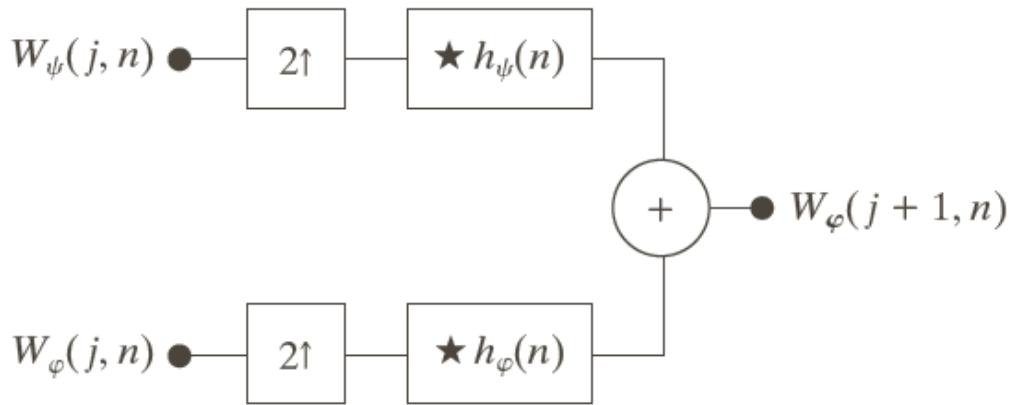
# 7.4 快速小波变换



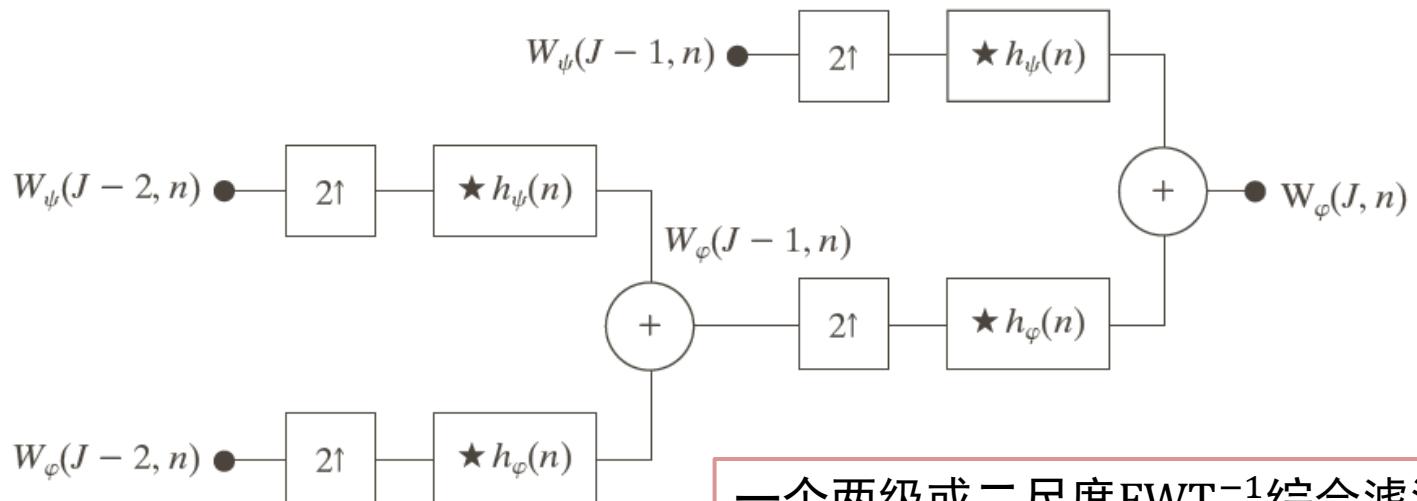
使用哈尔尺度和小波向量计算序列  
 $\{1, 4, -3, 0\}$ 的一个二尺度快速小波变换

# 7.4 快速小波变换：反变换

FWT<sup>-1</sup>综合滤波器组 →



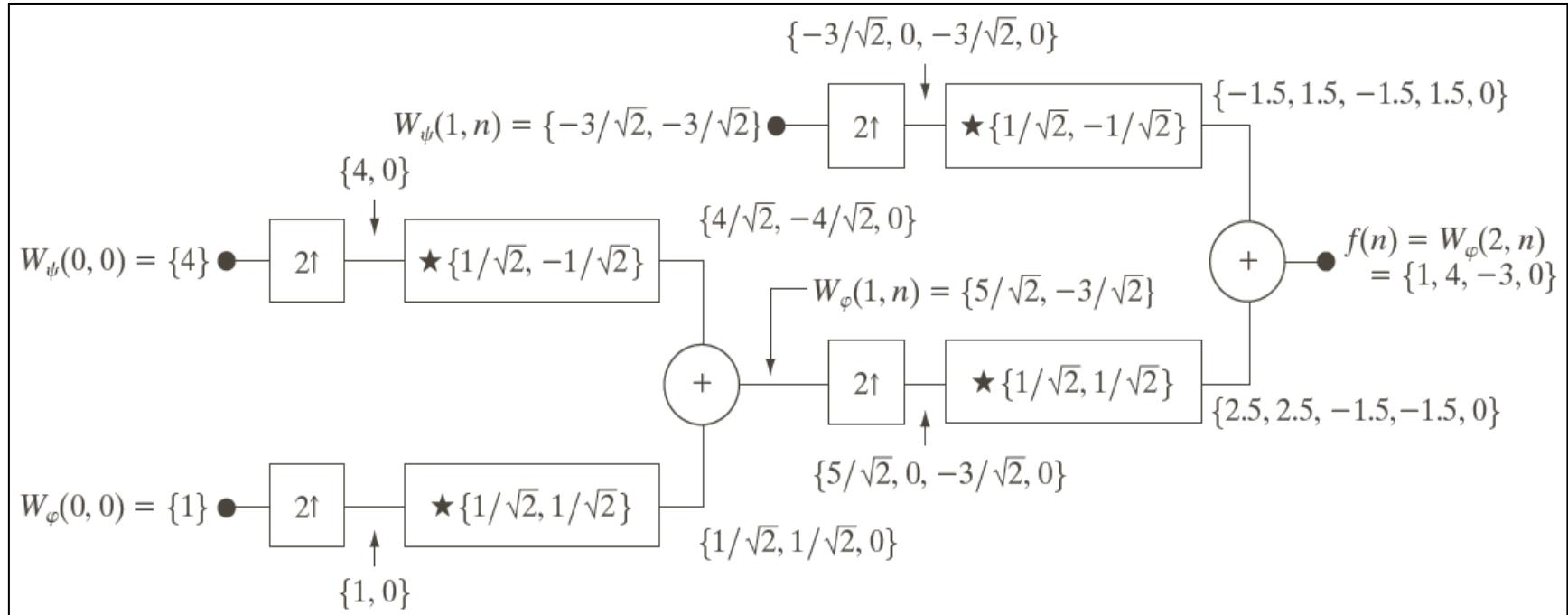
$$W_\varphi(j+1, k) = h_\varphi(k) \star W_\varphi^{2\uparrow}(j, k) + h_\psi(k) \star W_\psi^{2\uparrow}(j, k) \Big|_{k \geq 0}$$



一个两级或二尺度FWT<sup>-1</sup>综合滤波器组

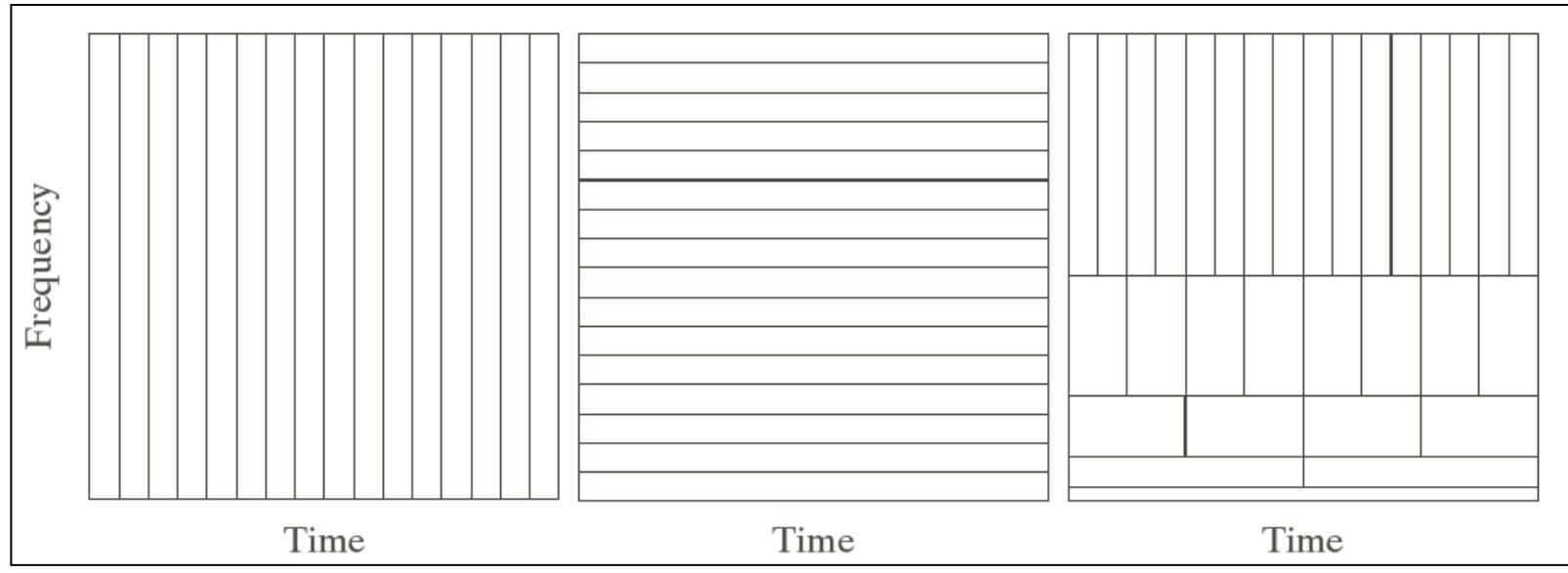
# 7.4 快速小波变换：反变换

- 使用哈尔尺度和小波函数计算序列 $\{1, 4, -1.5, \sqrt{2}, -1, -1.52\sqrt{2}\}$ 的二尺度快速小波反变换



## 7.4 快速小波变换

- 标准时域基指明了事件发生的时刻，但不提供频率信息
- 正弦基指出了发生较长时间的事件中出现的频率，但没有提供时间分辨率
- FWT的时间-频率片中时间和频率分辨率是变化的，但每个片的面积相同



(a) 冲激函数基

(a) 正弦函数(FFT)基

(c) FWT基



# 第7章 小波和多分辨率处理

---

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

7.6 小波包



# 7.5 二维小波变换

- 在二维情况下，需要1个二维尺度函数 $\varphi(x, y)$ 和3个二维小波 $\psi^H(x, y)$ ,  $\psi^V(x, y)$ 和 $\psi^D(x, y)$
- 每个二维小波都是两个一维函数的乘积

可分离尺度函数

$$\varphi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$$

列方向变化（水平边缘）

$$\psi^H(x, y) = \psi(x)\varphi(y)$$

行方向变化（垂直边缘）

$$\psi^V(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$$

对角线方向变化

$$\psi^D(x, y) = \psi(x)\psi(y)$$

# 7.5 二维小波变换

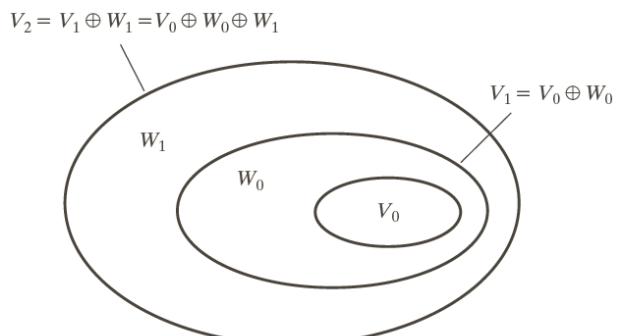
- 大小为  $M \times N$  的图像  $f(x, y)$  的离散小波变换是

$$W_\varphi(j_0, m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \varphi_{j_0, m, n}(x, y)$$

$$W_\psi^i(j, m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \psi_{j, m, n}^i(x, y), \quad i = \{H, V, D\}$$

- $f(x, y)$  离散小波反变换

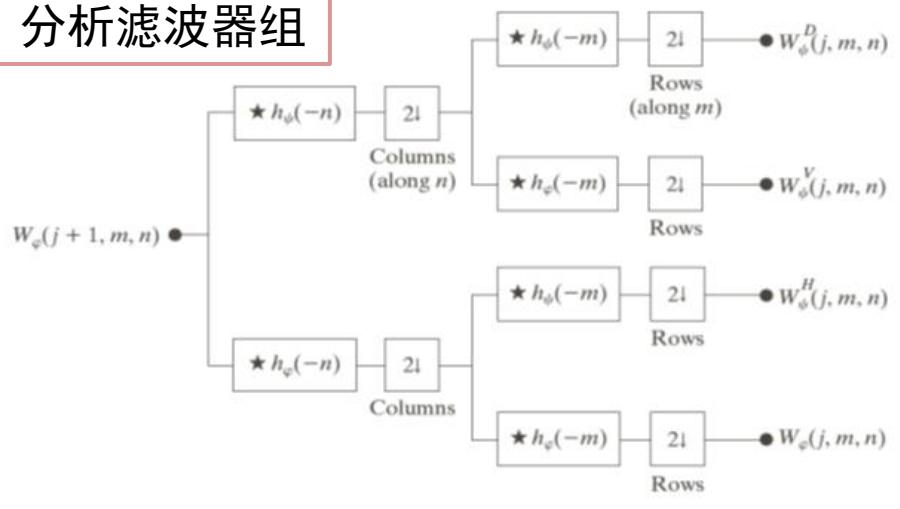
$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_m \sum_n W_\psi(j_0, m, n) \varphi_{j_0, m, n}(x, y) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{i=H, V, D} \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_m \sum_n W_\psi^i(j, m, n) \psi_{j, m, n}^i(x, y) \end{aligned}$$



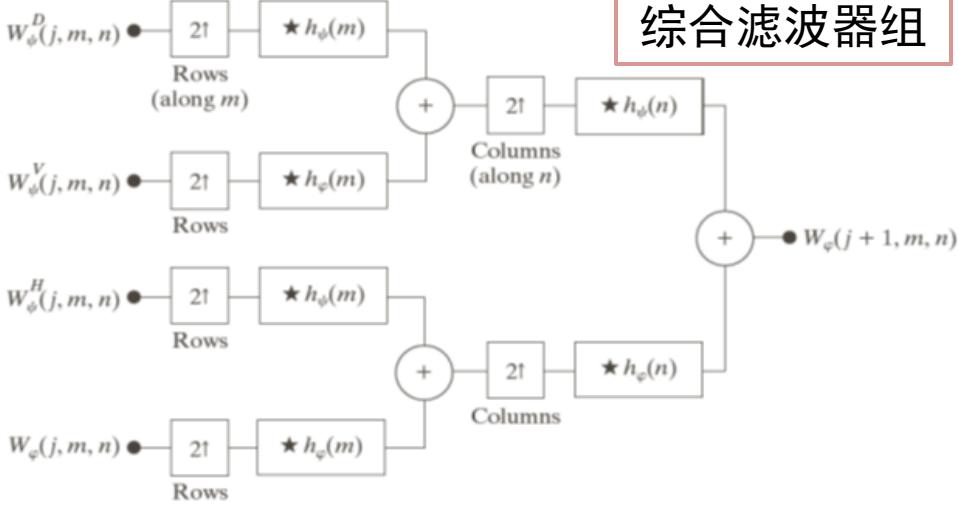
# 7.6 二维小波变换

## □ 二维快速小波变换

分析滤波器组



综合滤波器组



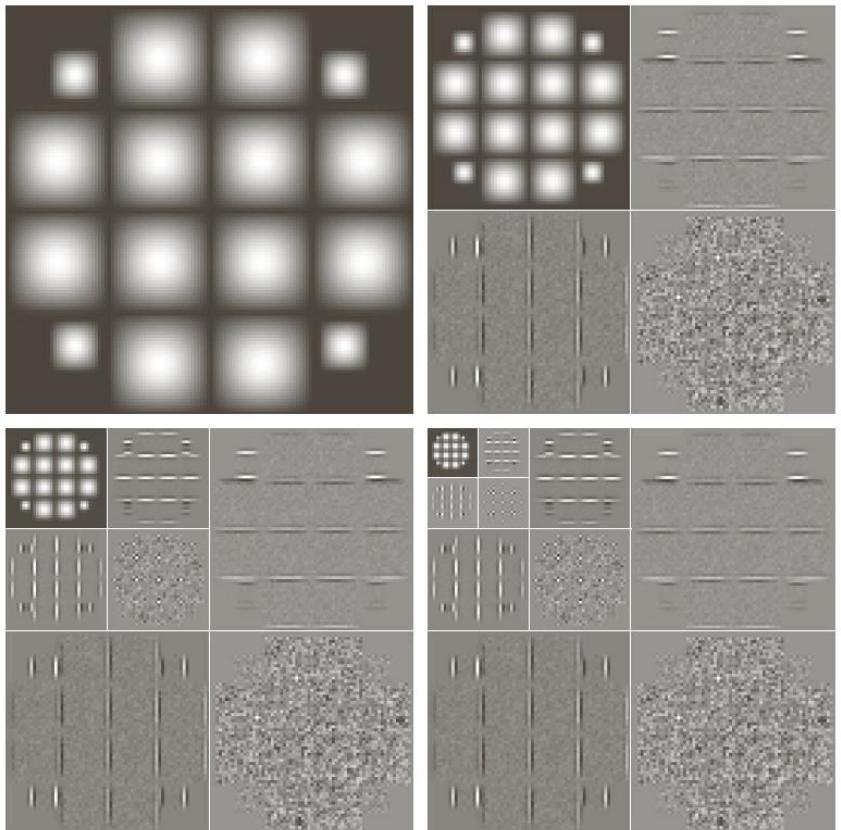
$W_\varphi(j+1, m, n)$

$W_\varphi(j, m, n)$   $W_\psi^H(j, m, n)$

$W_\psi^V(j, m, n)$   $W_\psi^D(j, m, n)$

分解结果

# 7.6 二维小波变换

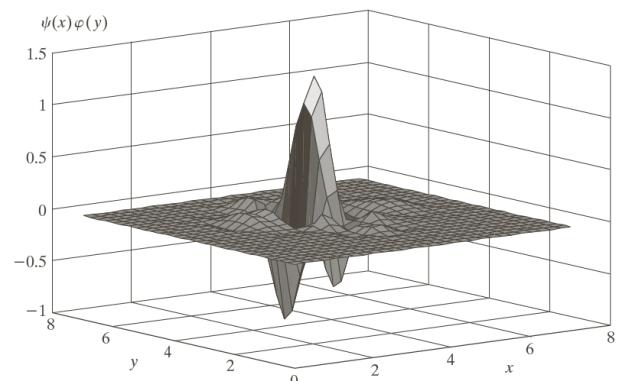
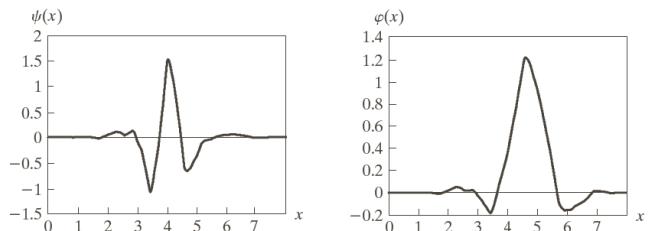
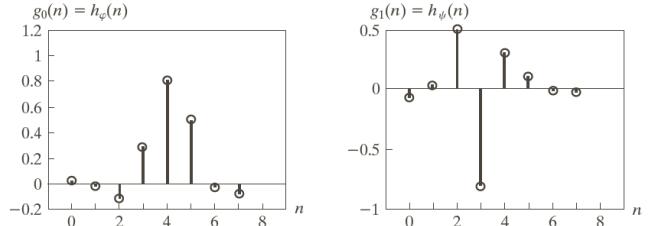
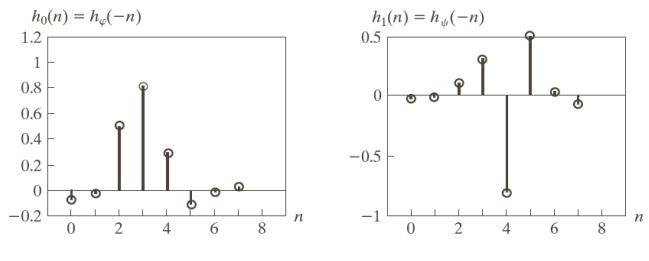


计算二维的三尺度FWT

- (a) 原图像; (b) 一尺度FWT;
- (c) 二尺度FWT; (d) 三尺度FWT

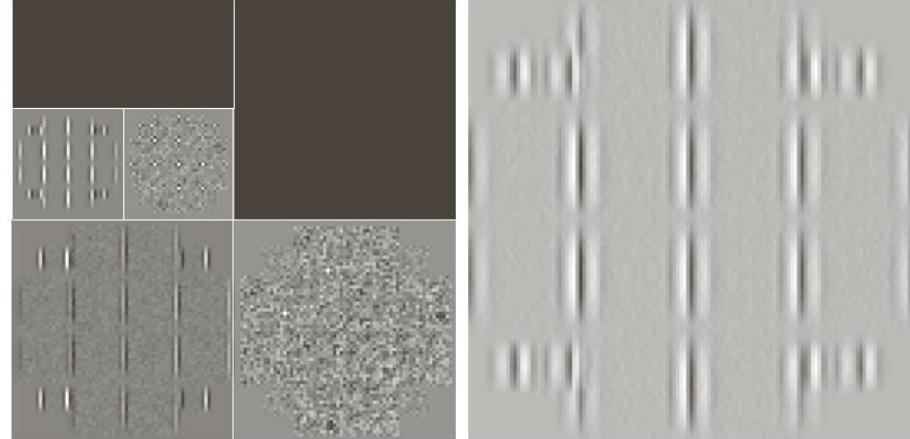
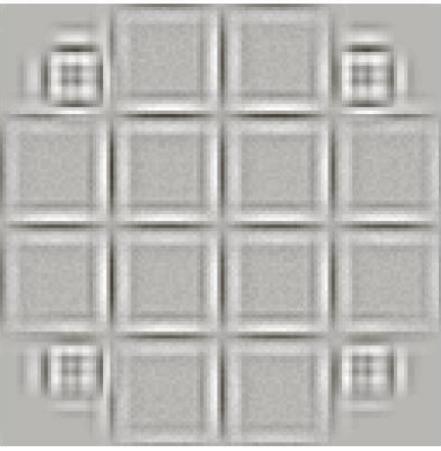
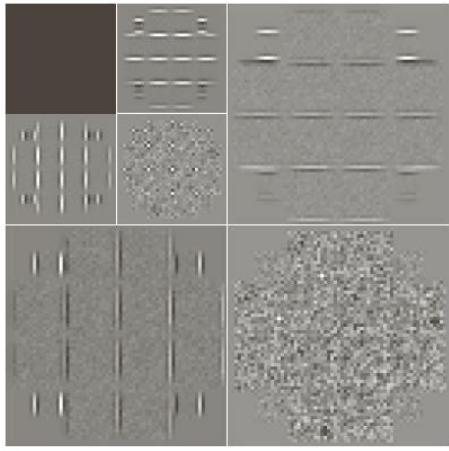
a b  
c d  
e f  
g

**四阶对称小波：**  
 (a)~(b) 重建滤波器；  
 (e) 一维小波；  
 (f) 一维尺度函数；  
 (g) 三个二维小波之一



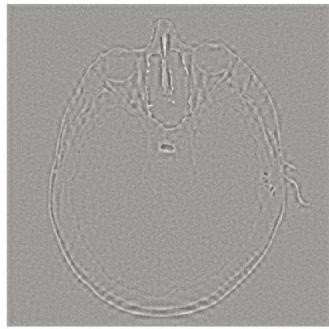
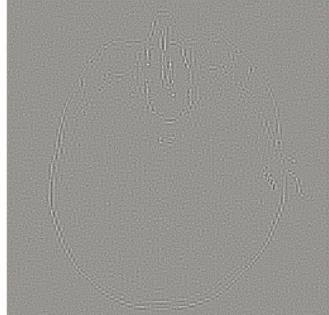
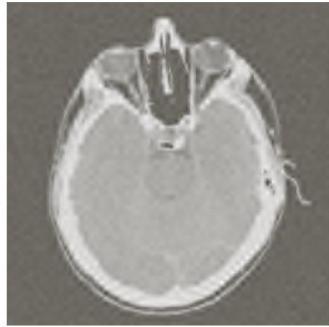
# 7.6 二维小波变换：边缘检测与去噪

a  
b  
c  
d



针对**边缘检测**改进的DWT

- (a) ~ (c) 删除所选系数的二尺度分解
- (b) ~ (d) 相应的重建



为**噪声去除**修改DWT: (a) 人的头部噪声CT图像；  
(b), (c)和(e)对细节系数进行阈值处理后的各种重建；(d)和(f)在(c)和(e)重建过程中所删除的信息



# 第7章 小波和多分辨率处理

---

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

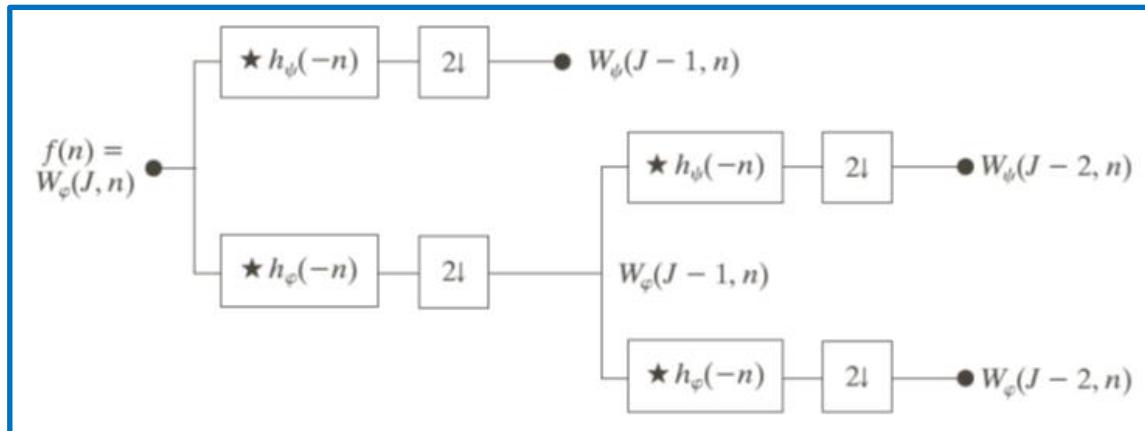
7.5 二维小波变换

7.6 小波包

# 7.6 小波包

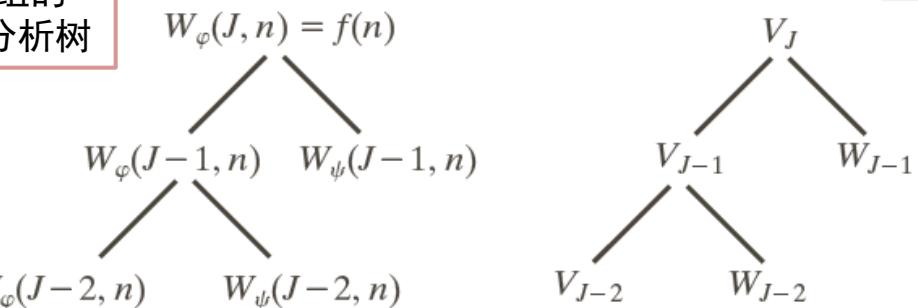
## □ 将小波分解想象为一个二叉树

- 根节点被赋予最高尺度的近似，叶节点继承变换的近似和细节

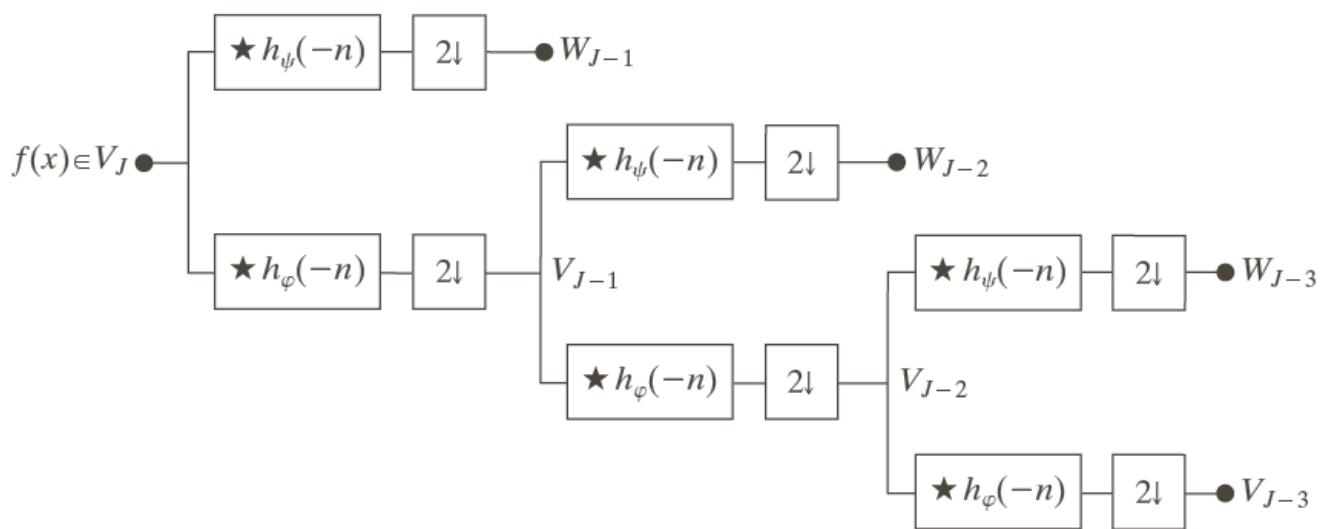


二尺度FWT分析组的  
(a) 系数树和(b) 分析树

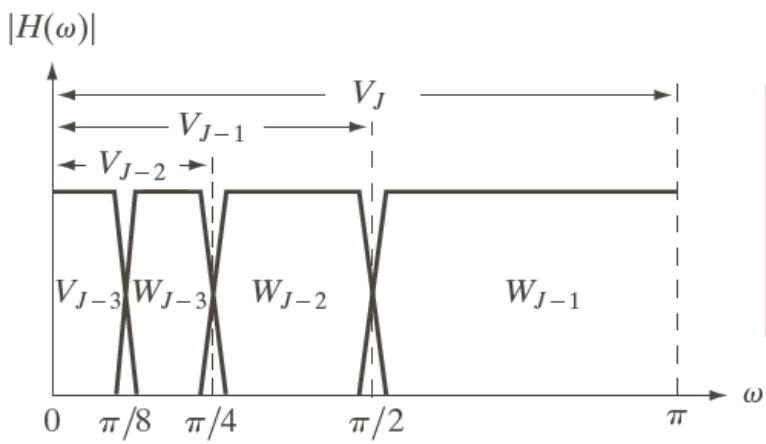
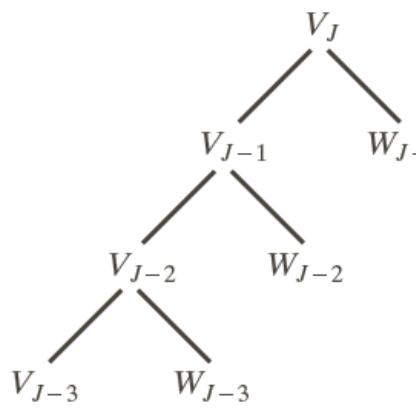
$$W_\varphi(J, n) = f(n)$$



# 7.6 小波包



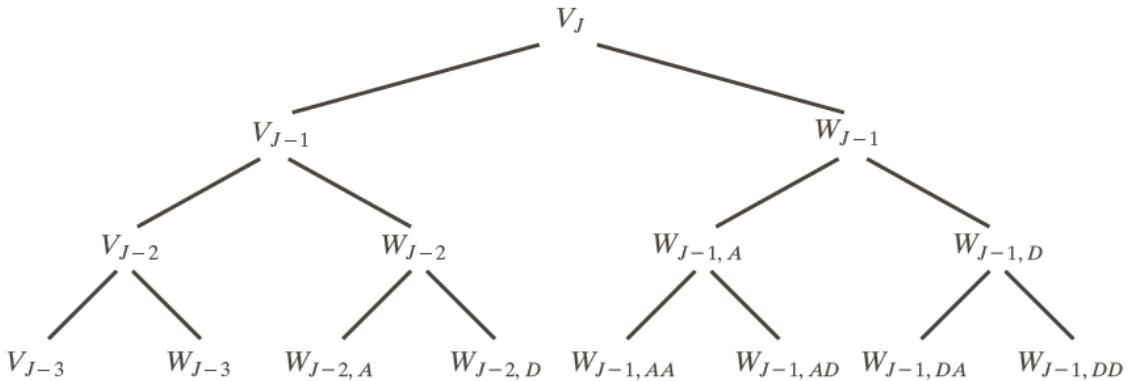
**FIGURE 7.30**  
A three-scale  
FWT filter bank:  
(a) block diagram;  
(b) decomposition  
space tree; and  
(c) spectrum  
splitting  
characteristics.



**三尺度FWT分析组：**  
 (a) 方框图  
 (b) 分解空间树  
 (c) 频谱分离特性

# 7.6 小波包

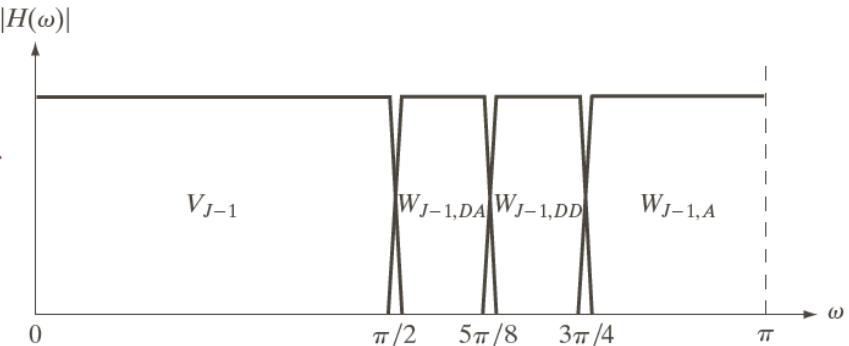
- 在  $W_{J-1}$  上附加近似滤波和细节滤波



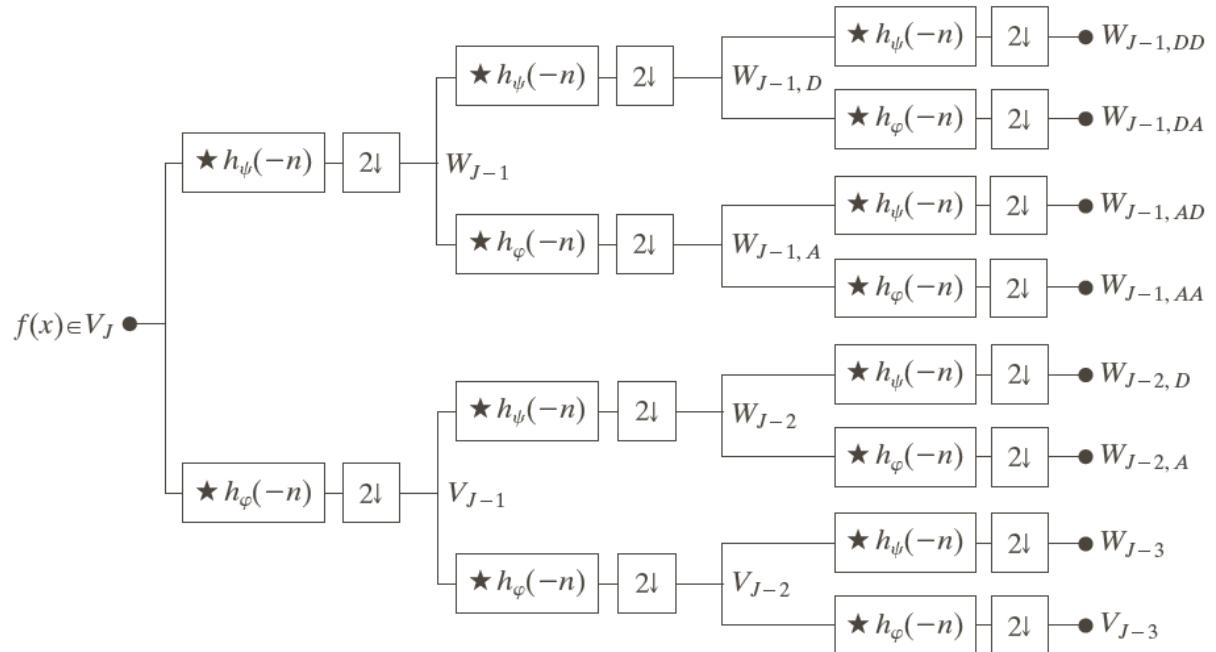
- 上图中的小波包支持26中不同的分解，例如

$$V_J = V_{J-3} \oplus W_{J-3} \oplus W_{J-2,A} \oplus W_{J-2,D} \oplus W_{J-1,AA} \oplus W_{J-1,AD} \oplus W_{J-1,DA} \oplus W_{J-1,DD}$$

$$V_J = V_{J-1} \oplus W_{J-1,A} \oplus W_{J-1,DA} \oplus W_{J-1,DD}$$

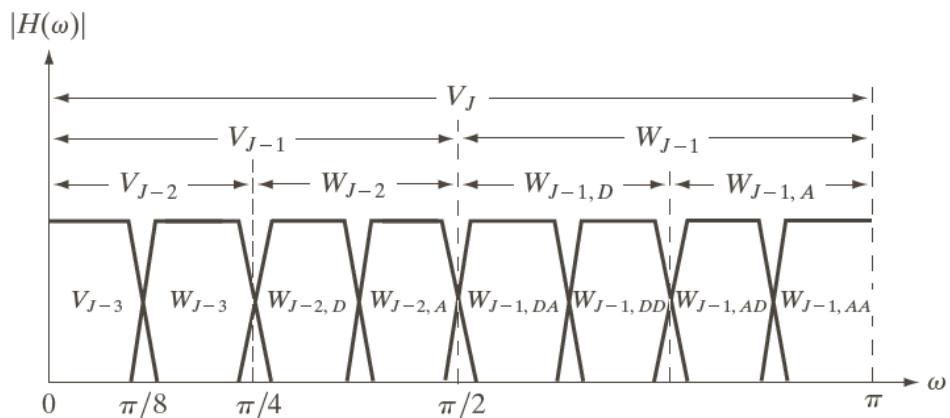


# 7.6 小波包



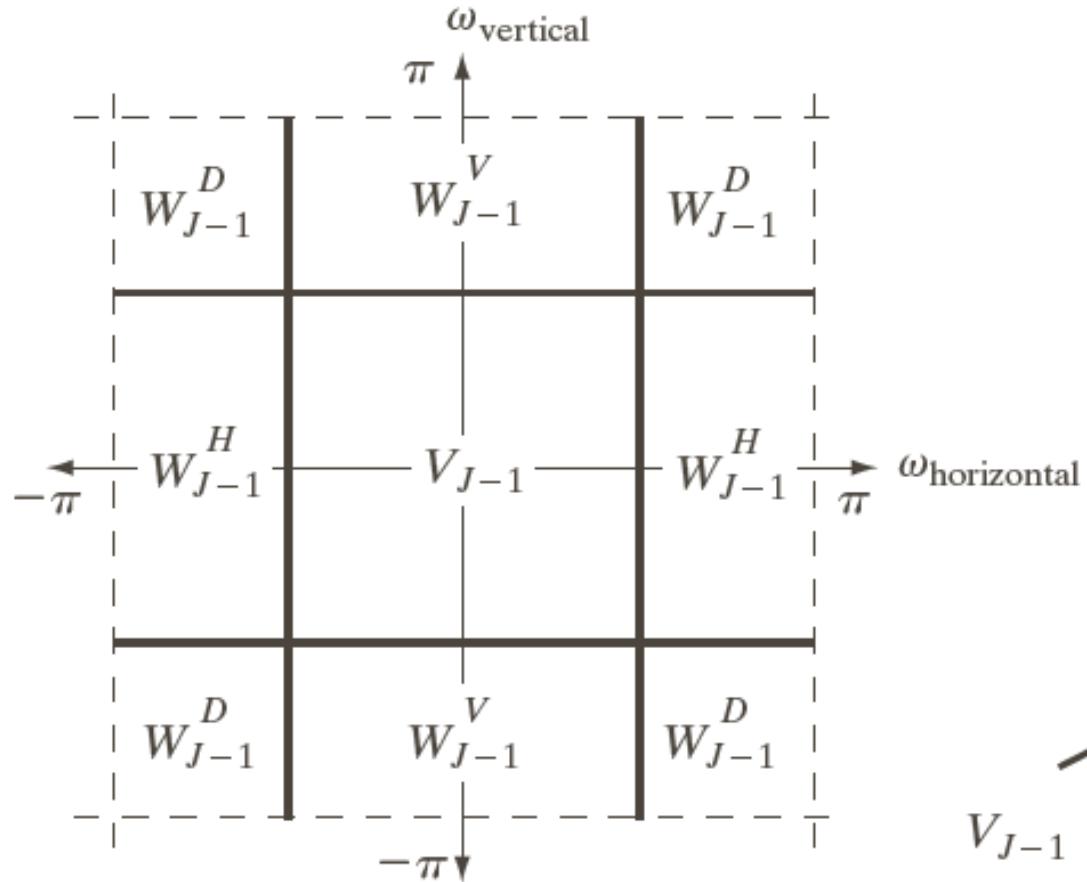
a  
b

**FIGURE 7.32**  
The (a) filter bank and (b) spectrum splitting characteristics of a three-scale full wavelet packet analysis tree.



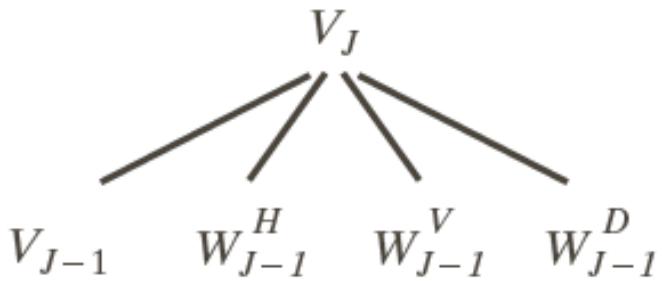
三尺度完全小波包分析树  
(a) 滤波器组  
(b) 频谱分离特性

# 7.6 小波包



a | b

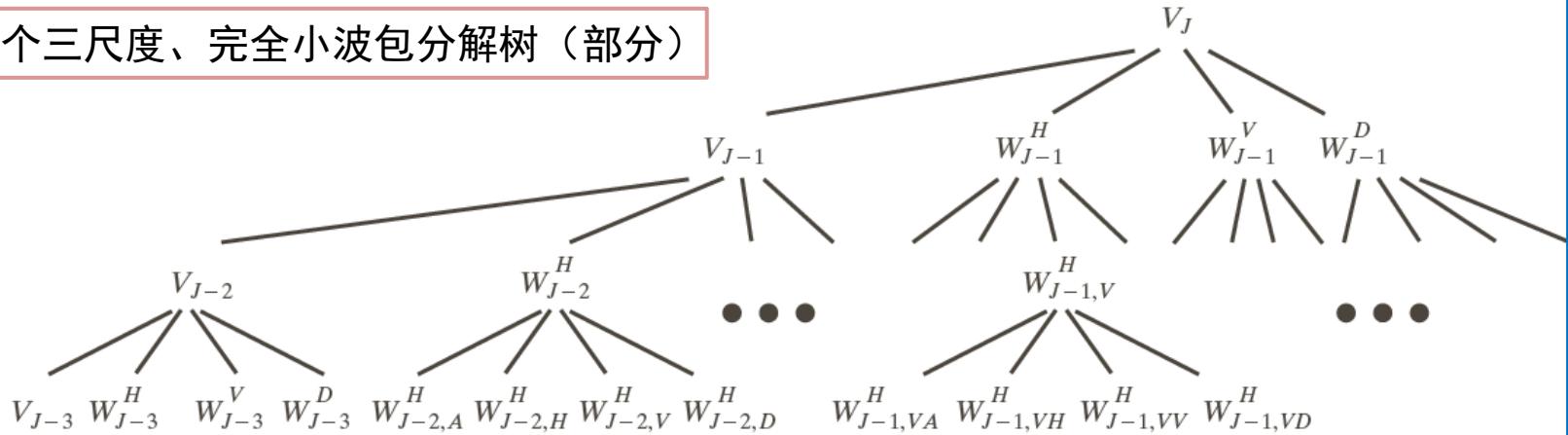
**FIGURE 7.34**  
The first  
decomposition of  
a two-dimensional  
FWT: (a) the  
spectrum and  
(b) the subspace  
analysis tree.



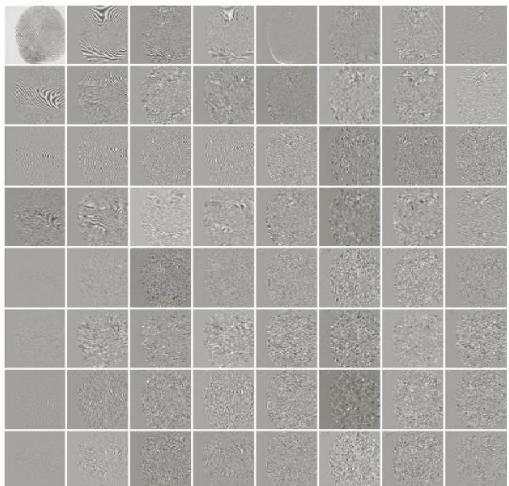
一个二维FWT的第一次分解 (a) 频谱 (b) 子空间分析树

# 7.6 小波包

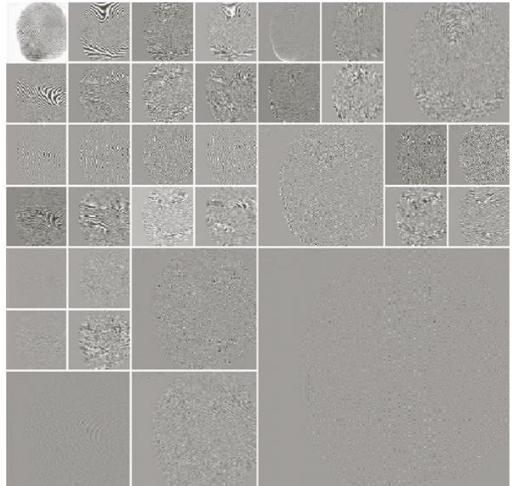
一个三尺度、完全小波包分解树（部分）



a b



(a) 一副扫描的指纹图像  
(b) 该图像的三尺度、全小波包分解



指纹的一种最佳小波分解

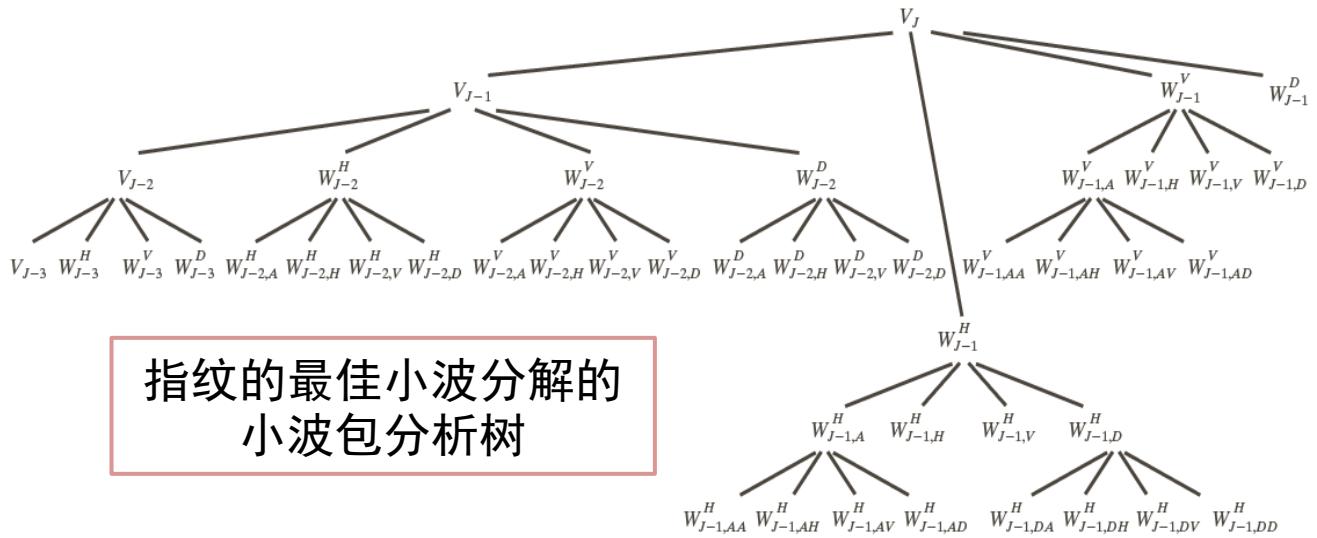
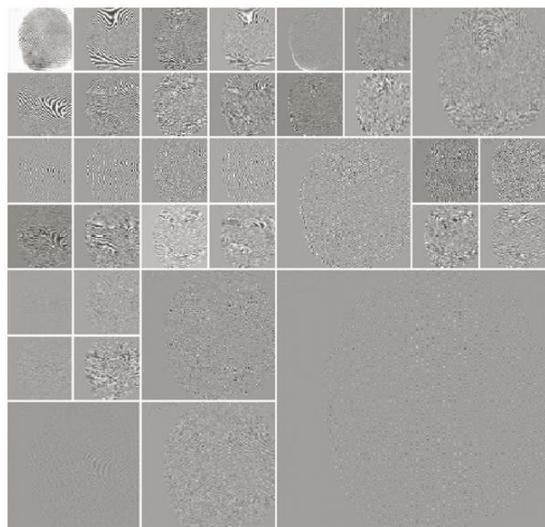
# 7.6 小波包：指纹图像压缩

- 面向指纹图像压缩，定义代价函数，即

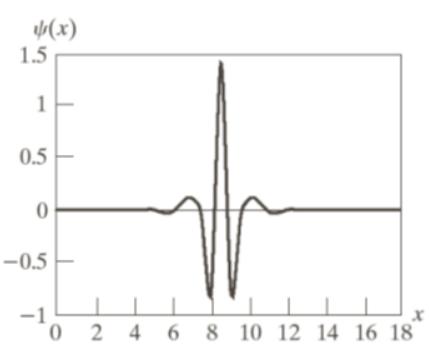
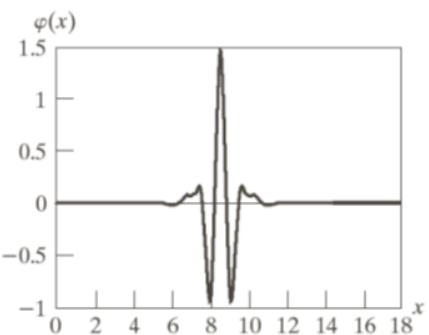
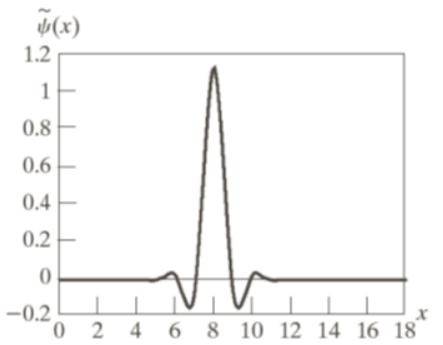
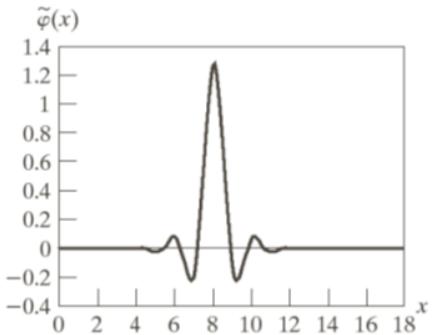
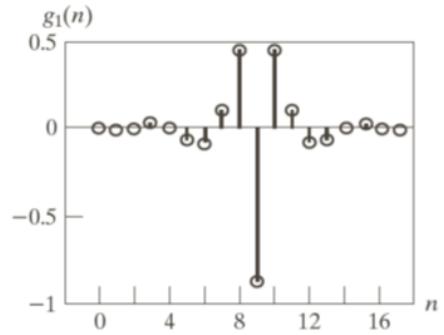
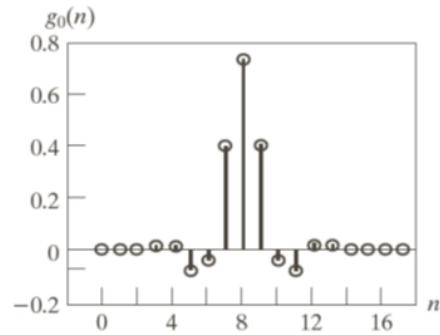
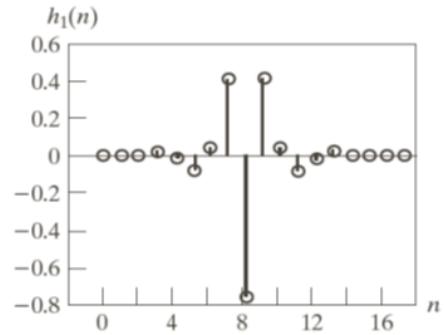
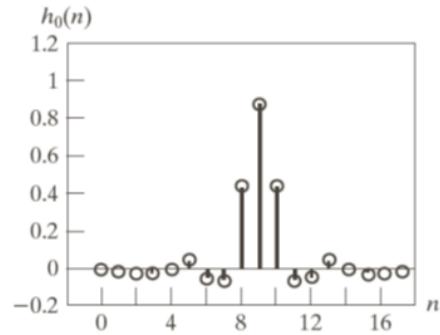
$$E(f) = \sum_{m,n} |f(m,n)|$$

- 父节点分解条件：子节点联合能量小于父节点能量，即

$$E_A + E_A + E_A < E_P$$



# 7.6 小波包



a  
b  
c  
d

e  
f  
g  
h

Cohen Daubechies Feauveau 双正交小波族成员：  
 (a)和(b)分解滤波器系数；(c)和(d)重建滤波器系数；  
 (e)~(h)双正交小波和尺度函数。