

Examples

De Morgan: $\neg(p \wedge q) \vdash (\neg p \vee \neg q)$

Proof (dynamic-single mode):

1	$\neg(p \wedge q)$	
2	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	
3	$\neg p$	
4	$(\neg p \vee \neg q)$	$\vee I \quad 3$
5	\perp	$\perp I \quad 2, 4$
6	$\neg\neg p$	$\neg I \quad 3 - 5$
7	p	$\neg E \quad 6$
8	$\neg q$	
9	$(\neg p \vee \neg q)$	$\vee I \quad 8$
10	\perp	$\perp I \quad 2, 9$
11	$\neg\neg q$	$\neg I \quad 8 - 10$
12	q	$\neg E \quad 11$
13	$(p \wedge q)$	$\wedge I \quad 7, 12$
14	\perp	$\perp I \quad 1, 13$
15	$\neg\neg(\neg p \vee \neg q)$	$\neg I \quad 2, 14$
16	$(\neg p \vee \neg q)$	$\neg E \quad 15$

Excluded Middle: $\vdash (p \vee \neg p)$

1	$\neg(p \vee \neg p)$	
2	p	
3	$(p \vee \neg p)$	$\vee I \quad 2$
4	\perp	$\perp I \quad 1, 3$
5	$\neg p$	$\neg I \quad 2 - 4$
6	$(p \vee \neg p)$	$\vee I \quad 5$
7	\perp	$\perp I \quad 1, 6$
8	$\neg\neg(p \vee \neg p)$	$\neg I \quad 1 - 7$
9	$p \vee \neg p$	$\neg E \quad 8$

Non-Contradiction: $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$

1	$(p \wedge \neg p)$	
2	p	$\wedge E \quad 1$
3	$\neg p$	$\wedge E \quad 2$
4	\perp	$\perp I \quad 1, 2$
5	$\neg(p \wedge \neg p)$	$\neg I \quad 1 - 4$

Some Natural Deduction Rules

m	p
n	q
o	$(p \wedge q) \quad \wedge I \quad m, n$

m	$(p \wedge q)$
n_1	$p \quad \wedge E \quad m$
n_2	$q \quad \wedge E \quad m$

m	p
n	$(p \vee q) \quad \vee I \quad m$

a	$(p \vee q)$
b	p
c	r
d	q
e	r
f	$r \quad \vee E \quad a, b - c, d - e$