

杂题选讲

hzwer

PekingUniversity

2017 年 7 月 28 日



① 数学

概率论

选择题

悖论

随机转移状态机: 马尔可夫链

ATM Machine

On Sum of Fractions

NOIP2014. 解方程

分解质因数

SDOI2012Longge 的问题

概率论

选择题

悖论

随机转移状态机：马尔可夫链

ATM Machine

On Sum of Fractions

NOIP2014. 解方程

分解质因数

SDOI2012Longge 的问题

不确定性有三种可能的来源:

1. 被建模系统内在的随机性。例如，大多数量子力学的解释，都将亚原子粒子的动力学描述为概率的。我们还可以创建一些我们假设具有随机动态的理论情境，例如一个假想的纸牌游戏，在这个游戏中我们假设纸牌真正混洗成了随机顺序。

不确定性有三种可能的来源:

1. 被建模系统内在的随机性。例如，大多数量子力学的解释，都将亚原子粒子的动力学描述为概率的。我们还可以创建一些我们假设具有随机动态的理论情境，例如一个假想的纸牌游戏，在这个游戏中我们假设纸牌真正混洗成了随机顺序。
2. 不完全观测。即使是确定的系统，当我们不能观测到所有驱动系统行为的变量时，该系统也会呈现随机性。例如，在 Monty Hall 问题中，一个游戏节目的参赛者被要求在三个门之间选择并且赢得放置在选中门后的奖金。两扇门通向山羊，第三扇门通向一辆汽车。选手选择所导致的结果是确定的，但是站在选手的角度，结果是不确定的。

不确定性有三种可能的来源:

1. 被建模系统内在的随机性。例如，大多数量子力学的解释，都将亚原子粒子的动力学描述为概率的。我们还可以创建一些我们假设具有随机动态的理论情境，例如一个假想的纸牌游戏，在这个游戏中我们假设纸牌真正混洗成了随机顺序。
2. 不完全观测。即使是确定的系统，当我们不能观测到所有驱动系统行为的变量时，该系统也会呈现随机性。例如，在 Monty Hall 问题中，一个游戏节目的参赛者被要求在三个门之间选择并且赢得放置在选中门后的奖金。两扇门通向山羊，第三扇门通向一辆汽车。选手选择所导致的结果是确定的，但是站在选手的角度，结果是不确定的。

3. 不完全建模。当我们使用一些必须舍弃某些观测信息的模型时，舍弃的信息会导致模型的预测出现不确定性。例如，假设我们制作了一个机器人，它可以准确地观察周围每一个对象的位置。如果预测这些对象将来的位置时机器人采用的是离散化的空间，那么离散化使得机器人立即变得不能确定对象的精确位置：每个对象都可能处于它被观察到占据的离散单元的任何位置。

3. 不完全建模。当我们使用一些必须舍弃某些观测信息的模型时，舍弃的信息会导致模型的预测出现不确定性。例如，假设我们制作了一个机器人，它可以准确地观察周围每一个对象的位置。如果预测这些对象将来的位置时机器人采用的是离散化的空间，那么离散化使得机器人立即变得不能确定对象的精确位置：每个对象都可能处于它被观察到占据的离散单元的任何位置。

$$E(X + Y) = EX + EY$$

- PekingUniversity

① 数学

概率论

选择题

悖论

随机转移状态机: 马尔可夫链

ATM Machine

On Sum of Fractions

NOIP2014. 解方程

分解质因数

SDOI2012Longge 的问题

1. (选择题) 1. A、B、C、D 四人玩扑克牌游戏，A、C 两人同盟，B、D 两人同盟。将除去大小王的 52 张牌随机分发给四人（每人获得 13 张牌）后，下面哪种情况的可能性更大一些？
- A. A、C 两人手中都没有梅花
- B. A、C 两人手中囊括了所有的梅花
- C. 上述两种情况的出现概率相同

2. (选择题) 同时抛掷 10 枚硬币, 出现下面哪种情况的可能性更大一些?
- A. 正面朝上的硬币数量为偶数
 - B. 正面朝上的硬币数量为奇数
 - C. 上述两种情况的出现概率相同

3. (选择题) 把一副洗好的牌 (共 52 张) 背面朝上地摆成一摞, 然后依次翻开每一张牌, 直到翻出第一张 A。那么, 下面哪种情况的可能性更大一些?

- A. 再下一张牌是黑桃 A
- B. 再下一张牌是黑桃 2
- C. 上述两种情况的出现概率相同

4. (选择题) A、B 两人为一件小事争执不休，最后决定用抛掷硬币的办法来判断谁对谁错。不过，为了让游戏过程更刺激，两人决定采用这样一种方案：连续抛掷硬币，直到最近三次硬币抛掷结果是“正反反”或者“反反正”。如果是前者，那么 A 获胜；如果是后者，那么 B 获胜。理论上，下面哪种情况的可能性更大一些？

- A. A 获得游戏的胜利
- B. B 获得游戏的胜利
- C. 上述两种情况的出现概率相同

① 数学

概率论

选择题

悖论

随机转移状态机: 马尔可夫链

ATM Machine

On Sum of Fractions

NOIP2014. 解方程

分解质因数

SDOI2012Longge 的问题

一些有趣的悖论

祖父母悖论、费米悖论、电车难题
猫-果酱永动机?

传个教

1. 无神论者不能证明上帝不存在

传个教

1. 无神论者不能证明上帝不存在
帕斯卡赌注

传个教

1. 无神论者不能证明上帝不存在
帕斯卡赌注
2. 钟表匠理论

传个教

1. 无神论者不能证明上帝不存在
帕斯卡赌注
2. 钟表匠理论
向上递归

传个教

1. 无神论者不能证明上帝不存在
帕斯卡赌注
2. 钟表匠理论
向上递归
3. 取象比类

芝诺悖论

1. 悖论 a: 跑得快的人（甲）永远也追不上跑得慢的人（乙），因为每当甲追到乙之前所在的位置的时候，乙就已经前进了一些了，所以甲永远也追不上乙。
2. 悖论 b: 运动不存在，因为要从甲地到达乙地，必须先到达两地的中间点，要到达中间点，必须要先到达 $1/4$ 点，这个过程永远也结束不了，所以运动是不可能的。
3. 悖论 c: 飞矢不动，因为一只飞矢在任何时刻都占据了一个确定的位置，即在任何时刻它都不是移动的，所以飞矢就是不动的。

双信封悖论

现有信封 A 和 B，它们里面都装着钱，已知其中一个的金额是另一个的两倍（但是不知道具体金额是多少，有可能是 1 元或者是 1 亿或者更多）。现在让你任挑其中一个信封，你将得到里面的钱。

也就是说，假如你选择了信封 A，打开之后得到 100 元，那么另外一个信封 B 里面的钱可能是 50 元，也可能是 200 元。

双信封悖论

现有信封 A 和 B，它们里面都装着钱，已知其中一个的金额是另一个的两倍（但是不知道具体金额是多少，有可能是 1 元或者是 1 亿或者更多）。现在让你任挑其中一个信封，你将得到里面的钱。

也就是说，假如你选择了信封 A，打开之后得到 100 元，那么另外一个信封 B 里面的钱可能是 50 元，也可能是 200 元。

在你打开信封之前或者打开信封之后，你都可以改变主意要求换成另外一个信封。

双信封悖论

现有信封 A 和 B，它们里面都装着钱，已知其中一个的金额是另一个的两倍（但是不知道具体金额是多少，有可能是 1 元或者是 1 亿或者更多）。现在让你任挑其中一个信封，你将得到里面的钱。

也就是说，假如你选择了信封 A，打开之后得到 100 元，那么另外一个信封 B 里面的钱可能是 50 元，也可能是 200 元。

在你打开信封之前或者打开信封之后，你都可以改变主意要求换成另外一个信封。

那么，你会交换信封吗？或者说，你的最佳策略是什么？

永远都是换另外一个信封的更加有利???

双信封悖论

现有信封 A 和 B，它们里面都装着钱，已知其中一个的金额是另一个的两倍（但是不知道具体金额是多少，有可能是 1 元或者是 1 亿或者更多）。现在让你任挑其中一个信封，你将得到里面的钱。

也就是说，假如你选择了信封 A，打开之后得到 100 元，那么另外一个信封 B 里面的钱可能是 50 元，也可能是 200 元。

在你打开信封之前或者打开信封之后，你都可以改变主意要求换成另外一个信封。

那么，你会交换信封吗？或者说，你的最佳策略是什么？

永远都是换另外一个信封的更加有利???

生日悖论

- 生日悖论: 如果一个房间里有 23 个或 23 个以上的人, 那么至少有两个人的生日相同的概率要大于 50%. 对于 60 或者更多的人, 这种概率要大于 99%.
- 生日攻击: 一个 40 比特长的消息摘要是很不安全的, 因为仅仅用 2^{20} 次随机 Hash 可至少以 1/2 的概率找到一个碰撞. 为了抵抗生日攻击, 通常建议消息摘要的长度至少应取为 128 比特, 此时生日攻击需要约 2^{64} 次 Hash. 安全的 Hash 标准的输出长度选为 160 比特是出于这种考虑.
- 一句话: 如果你在 n 个数中随机选数, 那么最多选 \sqrt{n} 次就能以大概率选到相同的数
- BZOJ-3098

① 数学

概率论

选择题

悖论

随机转移状态机: 马尔可夫链

ATM Mechine

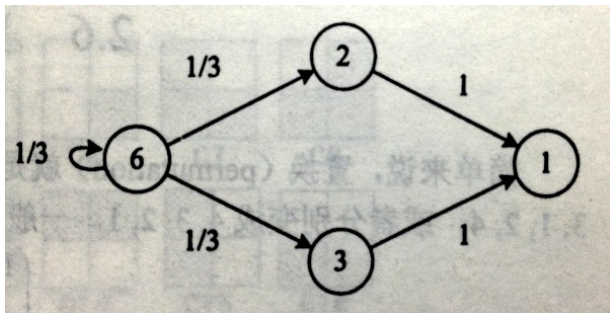
On Sum of Fractions

NOIP2014. 解方程

分解质因数

SDOI2012Longge 的问题

- 给出一个正整数 N , 每次可以在不超过 N 的素数中随机选择一个 p , 如果 p 是 N 的约数, 则 $N := N/p$, 否则 N 不变
- 问平均情况下需要多少次随机选择, 才能把 N 变成 1?



- $f(6) = 1 + f(6) \times 1/3 + f(3) \times 1/3 + f(2) \times 1/3$

- 图是 DAG, 可以直接算. 边界: $f(1)=0$
- 不是 DAG 怎么办? 高斯消元

① 数学

概率论

选择题

悖论

随机转移状态机: 马尔可夫链

ATM Mechine

On Sum of Fractions

NOIP2014. 解方程

分解质因数

SDOI2012Longge 的问题

ATM Machine

Alice 忘记自己在银行里存了多少钱, 只记得是闭区间 $[0, k]$ 内的一个整数

每次取钱, Alice 会取 y 的钱, 如果余额足够则被取出, 否则会被警告一次

若警告次数超过 w 次, Alice 就会被警察抓走

在不被警察抓走的前提下, Alice 采取最优策略, 问期望尝试取钱多少次能够取完 Alice 存的所有钱

$1 \leq k, w \leq 2000$

样例

1 1 1.0 4 2 2.4 20 3 4.5

题解

$f(i,j)$ 表示有 i 元以内的钱, j 次 warning 的机会
然后枚举询问点 k , 有 t 种可能 warning, 那么转移给 $f(t-1,j-1)$
有 $i-k+1$ 种可能取钱, 转移给 $f(i-t,t)$
边界 j 为 1 的情况, 有 k 元钱需要询问 $k+1$ 次

1 数学

概率论

选择题

悖论

随机转移状态机: 马尔可夫链

ATM Machine

On Sum of Fractions

NOIP2014. 解方程

分解质因数

SDOI2012Longge 的问题

On Sum of Fractions

定义函数

- $v(n)$ 表示小于或等于 n 最大的素数
- $u(n)$ 表示大于 n 最小的素数

计算

$$\sum_{i=2}^n \frac{1}{v(i)u(i)}$$

多组数据，其中 $2 \leq n \leq 10^9$ 。

Source: Codeforces 396B. On Sum of Fractions

On Sum of Fractions

$$\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots$$

On Sum of Fractions

$$\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots$$

$$\frac{1}{2 \times 3} + \frac{5-3}{3 \times 5} + \frac{7-5}{5 \times 7} + \frac{11-7}{7 \times 11} + \cdots$$

On Sum of Fractions

$$\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots$$

$$\frac{1}{2 \times 3} + \frac{5-3}{3 \times 5} + \frac{7-5}{5 \times 7} + \frac{11-7}{7 \times 11} + \cdots$$

$$\frac{b-a}{ab} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

On Sum of Fractions

$$\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots$$

$$\frac{1}{2 \times 3} + \frac{5-3}{3 \times 5} + \frac{7-5}{5 \times 7} + \frac{11-7}{7 \times 11} + \cdots$$

$$\frac{b-a}{ab} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

1 数学

概率论

选择题

悖论

随机转移状态机: 马尔可夫链

ATM Mechine

On Sum of Fractions

NOIP2014. 解方程

分解质因数

SDOI2012Longge 的问题

NOIP2014. 解方程

已知多项式方程：

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$$

求这个方程在 $[1, m]$ 内的整数解。

其中 n 和 m 均为正整数。

NOIP2014. 解方程

已知多项式方程：

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$$

求这个方程在 $[1, m]$ 内的整数解。

其中 n 和 m 均为正整数。

$$1 \leq n \leq 100, |a_i| \leq 10^{10000}, a_n \neq 0, 1 \leq m \leq 10^6。$$

NOIP2014. 解方程

暴力验证 $[1, m]$ 内的整数?

NOIP2014. 解方程

暴力验证 $[1, m]$ 内的整数?

如何验证? 系数太大了……

NOIP2014. 解方程

暴力验证 $[1, m]$ 内的整数?

如何验证? 系数太大了……

取模!

NOIP2014. 解方程

暴力验证 $[1, m]$ 内的整数?

如何验证? 系数太大了……

取模!

如果 $x = x_0$ 的时候这个方程成立, 那么将其两边对任意数 p 取模后仍然成立。但是反之则不一定。

NOIP2014. 解方程

然而……一个个验证要验证的个数太多了……

NOIP2014. 解方程

然而……一个个验证要验证的个数太多了……
但是方程的解不会超过 n 个!

NOIP2014. 解方程

然而……一个个验证要验证的个数太多了……

但是方程的解不会超过 n 个！

如果 $x = x_0$ 的时候，在对 p 取模后方程不成立，那不原方程必然不成立！

NOIP2014. 解方程

然而……一个个验证要验证的个数太多了……

但是方程的解不会超过 n 个！

如果 $x = x_0$ 的时候，在对 p 取模后方程不成立，那不原方程必然不成立！

用比较小的质数验证几个，先排除大部分！

① 数学

概率论

选择题

悖论

随机转移状态机: 马尔可夫链

ATM Mechine

On Sum of Fractions

NOIP2014. 解方程

分解质因数

SDOI2012Longge 的问题

分解质因数

给定一个数 n ，求其的质因数分解，有 T 组数据。

分解质因数

给定一个数 n ，求其的质因数分解，有 T 组数据。
对于 20% 的数据， $n \leq 1000000$, $T \leq 100000$

分解质因数

给定一个数 n ，求其的质因数分解，有 T 组数据。

对于 20% 的数据， $n \leq 1000000$, $T \leq 100000$

对于 50% 的数据， $n \leq 10000000$, $T \leq 100000$

分解质因数

给定一个数 n ，求其的质因数分解，有 T 组数据。

对于 20% 的数据， $n \leq 1000000$, $T \leq 100000$

对于 50% 的数据， $n \leq 10000000$, $T \leq 100000$

对于 100% 的数据， $n \leq 300000000$, $T \leq 1000000$

分解质因数

给定一个数 n ，求其的质因数分解，有 T 组数据。

对于 20% 的数据， $n \leq 1000000$, $T \leq 100000$

对于 50% 的数据， $n \leq 10000000$, $T \leq 100000$

对于 100% 的数据， $n \leq 300000000$, $T \leq 1000000$

① 数学

概率论

选择题

悖论

随机转移状态机: 马尔可夫链

ATM Machine

On Sum of Fractions

NOIP2014. 解方程

分解质因数

SDOI2012Longge 的问题

SDOI2012Longge 的问题

$$\text{求 } \sum_{i=1}^n \gcd(i, n)$$
$$1 \leq n \leq 2^{30}$$

题解

枚举 n 的约数 k ，令 $s(k)$ 为满足 $\gcd(m, n) = k, (1 \leq m \leq n)$ 的个数，则 $\text{ans} = \sum (k * s(k))$ (k 为 n 的约数)

因为 $\gcd(m, n) = k$ ，所以 $\gcd(m/k, n/k) = 1$ ，于是 $s(k) = \text{euler}(n/k)$

ϕ 可以在根号的时间内求出