华中科技大学 2022～2023 学年第二学期

《高等数学（A）》（下）课程期中考试试卷 (闭卷)

院(系) 启明学院 专业班级______ 学号______ 姓名______

考试日期: 2023-04-16　　　　考试时间: 8:30 - 11:00

题号	一	二	三	四	五	总分
满分	24	12	30	16	18	100
得 分						

得 分	
评卷人	

一、 填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1、设 $\vec{a}=\{1,-1,2\}$，则与 $\vec{a}$ 方向相反的单位向量是 $\underline{\dfrac{\{-1,1,-2\}}{\sqrt{6}}}$.

2、微分方程 $y''(x)+k^2y(x)=0$（$k>0$）的通解为 $\underline{y=C_1\cos kx+C_2\sin kx}$.

3、直线 $L:\begin{cases}x+y+z+3=0,\\2x+y-z=0\end{cases}$ 在 xoy 面上的投影直线方程为 $\underline{\begin{cases}3x+2y+3=0,\\z=0\end{cases}}$.

4、函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2e^{-nx}$ 的收敛域为 $\underline{(0,+\infty)}$.

5、设 $z=z(x,y)$ 由方程 $xz^2-yz^3+y-1=0$ 在点 $(1,2,1)$ 附近确定的，则 $z_x(1,2)=\underline{\dfrac{1}{4}}$.

6、设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，$F(x)=f(x,f(x,x))$，则

$F'(x)=\underline{f_1(x,f(x,x))+f_2(x,f(x,x))[f_1(x,x)+f_2(x,x)]}$.

得 分	
评卷人	

二、 单项选择题(每小题 4 分，共 12 分)

7、 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-2$ 处收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$（ B ）.

A．一定条件收敛　　B．一定绝对收敛　　C．一定发散　　D．敛散性不能确定

解答内容不得超过装订线

8、利用变量代换$u=x, v=\dfrac{y}{x}$一定可把方程$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$化为新的方程（ A ）.

A. $u\dfrac{\partial z}{\partial u}=z$　　B. $v\dfrac{\partial z}{\partial v}=z$　　C. $u\dfrac{\partial z}{\partial v}=z$　　D. $v\dfrac{\partial z}{\partial u}=z$

9、函数$u=f(x,y,z)$在点$(0,0,0)$处可微的一个充分条件是(C).

A. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}[f(x,y,z)-f(0,0,0)]=0$　　B. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}[f_x(x,y,z)-f_x(0,0,0)]=0$

C. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{f(x,y,z)-f(0,0,0)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$　　D. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{f(x,y,z)-f(0,0,0)}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}=0$

得　分	
评卷人	

三、计算题（每小题 6 分，共 30 分）

10、求极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^4+x^2+y^2+y^4}$.

解：令$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$(x,y)\to0 \Leftrightarrow r\to0$.　　（2 分）

又　$0\le\left|\dfrac{x^2y}{x^4+x^2+y^2+y^4}\right|=\left|\dfrac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2+r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}\right|\le\dfrac{r}{1+r^2(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}\le r$，　　（4 分）

而$\lim\limits_{r\to0}r=0$，故$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^4+x^2+y^2+y^4}=0.$　　（6 分）

11、求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{4^n(2n-1)}x^{2n}$的和函数.

解：设和函数为$S(x)$，即$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{4^n(2n-1)}x^{2n}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{4^n(2n-1)}x^{2n-1}$.　　（1 分）

令$S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{4^n(2n-1)}x^{2n-1}$，则$S_1'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{4^n}x^{2n-2}=\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-\dfrac{x^2}{4})^{n-1}=\dfrac{1}{4+x^2}, |x|<2$.　（3 分）

$$S_1(x)=S_1(0)+\int_0^x S_1(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{4+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2},\quad |x|<2.$$　　（5 分）

又　$S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{4^n(2n-1)}x^{2n-1}$在$x=\pm2$处也收敛，故

$$S(x)=xS_1(x)=\frac{x}{2}\arctan\frac{x}{2},\quad |x|\le2.$$　　（6 分）

12、设 $z=f(x+y^2,x^2-y)$，且 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1(x+y^2,x^2-y)+2xf_2(x+y^2,x^2-y)$， (2 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}f_1(x+y^2,x^2-y)+2x\frac{\partial}{\partial y}f_2(x+y^2,x^2-y)$$ (4 分)

$$=2yf_{11}-f_{12}+2x(2yf_{21}-f_{22})=2yf_{11}+(4xy-1)f_{12}-2xf_{22}.$$ (6 分)

13、求微分方程 $y'''-y=e^{2x}$ 的通解.

解：特征方程为 $r^3-1=0$，特征根为 $r_1=1$，$r_2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$r_3=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

对应其次方程的通解为:

$$Y=C_1e^x+e^{-\frac{1}{2}x}(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x).$$ (2 分)

因为 $\lambda=2$ 不是特征根，所以可设原方程的一个特解为 $y^*=Ae^{2x}$，带入原方程得

$8Ae^{2x}-Ae^{2x}=e^{2x}$， 解得 $A=\dfrac{1}{7}$，所以 $y^*=\dfrac{1}{7}e^{2x}$. (4 分)

故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1e^x+e^{-\frac{1}{2}x}(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)+\frac{1}{7}e^{2x}.$$ (6 分)

14、将函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2-x}}$ 展开为 Maclaurin 级数.

解：由于

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-x)^n$$ (3 分)

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n,\quad x\in[-1,1)$$

所以

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{2-x}}=\frac{x}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\frac{x}{\sqrt{2}}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(\frac{x}{2})^n\right]$$ (6 分)

$$=\frac{x}{\sqrt{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{\sqrt{2}2^n(2n)!!}x^{n+1},\quad x\in[-2,2)$$

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

四、解答题（每小题 8 分, 共 16 分）

15. 求点 $P(2,-1,1)$ 到直线 $L:\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 的距离.

解：L 的方向向量为 $\vec{s}=\{1,-1,1\}\times\{1,1,1\}=\{2,0,-2\}$.　　(2 分)

在 L 上取一点 $P_1(0,-1,1)$，则 $\overrightarrow{P_1P}=\{2,0,0\}$，$\overrightarrow{P_1P}\times\vec{s}=\{2,0,0\}\times\{2,0,-2\}=\{0,4,0\}$，　　(4 分)

所求距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P}\times\vec{s}\,|}{|\,\vec{s}\,|}=\frac{4}{\sqrt{2^2+0^2+(-2)^2}}=\sqrt{2}\,.$$　　(8 分)

16. 将函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}, x\in[0,\pi]$ 展成正弦级数，并求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ 的和.

解：先将 $f(x)$ 延拓为 $[-\pi,\pi]$ 上的奇函数 $\tilde{f}(x)$，再延拓为 R 上的以 2π 为周期的函数.

则　$a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots)$，

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\,(n=1,2,\cdots)\,,$$　　(4 分)

由延拓后函数的连续性及收敛定理知，

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx,\ x\in(0,\pi]\,.$$　　(7 分)

令 $x=1$，得　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\frac{\pi-1}{2}$.　　(8 分)

得　分	
评卷人	

五、证明题（每小题 6 分，共 18 分）

17、 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\sin(xy)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点 $(0,0)$ 处可微.

证： $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0$，同理 $f_y(0,0)=0$.　　（2 分）

又

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sin(\Delta x\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}},$$

$$\left|\frac{\sin(\Delta x\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|\le\frac{|\Delta x||\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\le|\Delta x|\to 0\ (\rho\to 0),$$　　（5 分）

所以

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=0,$$

由微分的定义知，$f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处可微.　　（6 分）

18、设 $f(x)$ 是偶函数，且在 $x=0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数，又 $f''(0)\neq 0$. 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f(\frac{1}{n})-f(0)\right]$ 绝对收敛.

证：由题设条件及 $f(x)$ 是偶函数，得 $f'(0)=0$.　　（1 分）

再由 Taylor 公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2),$$　　（3 分）

从而

$$f(\frac{1}{n})-f(0)=\frac{1}{2!}f''(0)\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}),$$

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left|f(\frac{1}{n})-f(0)\right|=\frac{1}{2!}|f''(0)|>0,$$　　（5 分）

由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f(\frac{1}{n})-f(0)\right]$ 绝对收敛.　　（6 分）

解答内容不得超过装订线

19、证明函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{x}{n^2})$ 在 $(0,+\infty)$ 上有连续的导函数.

证：当 $x>0$ 时，$\ln(1+\frac{x^2}{n^2})\sim\frac{x^2}{n^2}$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{n^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{x^2}{n^2})$ 收敛， 所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义. （2 分）

记 $u_n(x)=\ln(1+\frac{x}{n^2})$，则 $u_n'(x)=\frac{1}{1+\frac{x}{n^2}}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^2+x}$.

又 $\forall x\in(0,+\infty)$，$|u_n'(x)|=\frac{1}{n^2+x}\le\frac{1}{n^2}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以由 Weierstrass 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛. （4 分）

再由逐项求导定理可知原级数可以逐项求导，即

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x}.$$

再由 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x}$ 的每一项都在 $(0,+\infty)$ 上连续可知，$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续. （6 分）