静电场中的导体和电介质

§6-6　静电场中的导体

将实物按电特性划分：导体、半导体、绝缘体。

1. 导体静电平衡条件

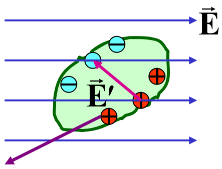
导体在电场中：(1) 导体内的自由电荷，在电场力作用下移动，从而改变原有的电荷分布。(2) 电荷分布的改变，引起电场分布改变。

导体中没有电荷宏观定向运动，从而电场分布不随时间变化，则该导体达到静电平衡。

(1) 导体内部任何一点的场强等于 0 。

(2) 导体表面任何一点的场强都垂直表面 。

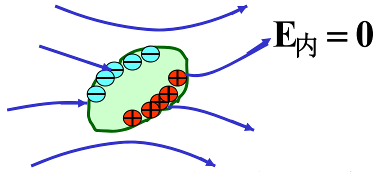
例如：在均匀场放入一导体的情况



表面出现感应电荷

电荷积累到一定程度，在导体内：

$$E' = -E$$



电荷停止运动　达到静电平衡

(1) 导体是等势体。

$\because$导体内任一点 $E=0$　　$\vec{E} = -\nabla V = 0$　　$\therefore\ V_{体内} = 常量$

(2) 导体表面是等势面。

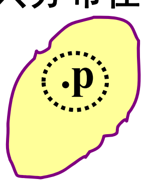
$\because$导体表面上任一点　$E_{切}=0$　　$E_{切} = -\dfrac{\partial V}{\partial \tau} = 0$

$$\therefore\ V_{表面} = 常量$$

2. 导体上电荷分布

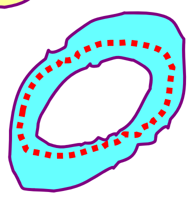
1）静电平衡时，导体内无净电荷，电荷只分布在导体外表面上。

证明：**(1)导体内无空腔**

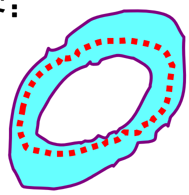


$$\oint \vec{E}_{内} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \therefore \sum q_{内} = 0$$

(2)导体内有空腔，腔内无其它带电体



可以看成已经达到静电平衡的实心导体，从中挖出空腔，由于没有挖去净电荷，不会影响电荷分布，也不影响电场分布。内表面无净电荷。



或者，作包围空腔的高斯面，由于导体中场强为零：

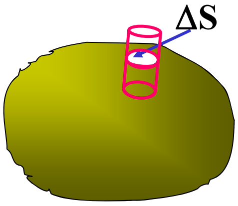
$$\oint \vec{E}_{内} \cdot d\vec{s} = 0 \qquad \therefore \sum q = 0$$

在空腔的内表面也不可能存在等量异号的净电荷，否则在它们自身电场的作用下将出现电荷的定向运动，从而相互抵消。

电荷全分布在导体外表面上，内表面无净电荷。

在静电平衡下，导体为等势体，内部场强为零。

2）导体表面上各处的电荷面密度σ与电场强度E的关系



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{上} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{下} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{侧} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \int_{上} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot \Delta S$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i = \frac{\sigma\cdot\Delta S}{\varepsilon_0} = E\cdot\Delta S \qquad \boxed{\therefore E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

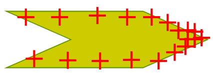
该点处的电场 E，是所有电荷产生的。

3）电荷面密度与导体表面曲率的关系

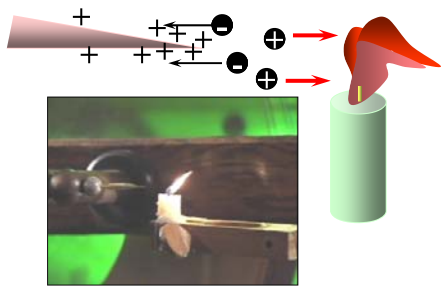
一般导体电荷的分布与 $\begin{cases}\text{导体形状有关} \\ \text{附近其它带电体有关}\end{cases}$

对于孤立导体，实验证明，面电荷密度正比于表面曲率：

$$\sigma \propto \frac{1}{R}$$

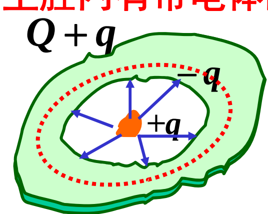


$E \propto \sigma$，表面尖端处，E很大 ⟶ **尖端放电**



3. 静电屏蔽

空腔内有带电体的导体壳

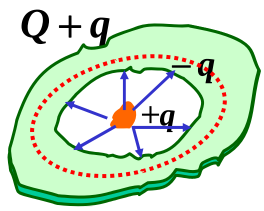


设导体带电荷Q，空腔内有一带电体+q。

高斯定理：$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 \quad \therefore \sum q_i = 0$

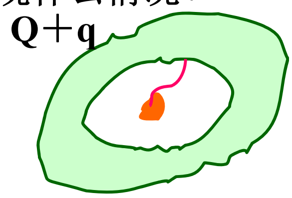
$$q_{内} = -q \qquad q_{外} = Q + q$$

(1)腔内+q所处位置不同，对内外表面电荷分布及电场分布的影响



$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_{内}\ 改变\quad E_{内}\ 改变 \\ q_{内}=-q\ 不变 \\ \sigma_{外}\ 不变\quad E_{外}\ 不变 \\ q_{外}=Q+q\ 不变 \end{array}\right.$$

(2)若将腔内带电体与导体壳连接，会出现什么情况？

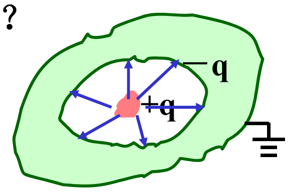


腔内无电荷分布：$E_{内}=0$ ⟶ 屏蔽外场

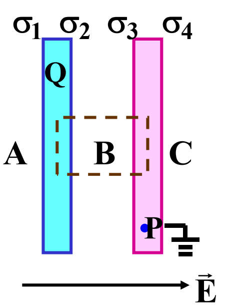
(3)若将导体壳接地，又会出现什么情况？

当腔内有带电体时，将壳接地，腔内带电体的电场对壳外无影响。

屏蔽内场



例1. 一金属平板，面积为S带电Q，在其旁放置第二块同面积的不带电金属板。求 (1)静电平衡时，电荷分布及电场分布。(2)若第二块板接地？忽略边缘效应。



$E_P=0$

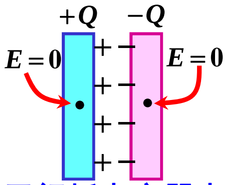
解：(1) $\sigma_1+\sigma_2=\dfrac{Q}{S}$ $\quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{S}=0 \quad \sum q_i=0$

$\sigma_3+\sigma_4=0$ $\quad$ 即：$\sigma_2+\sigma_3=0$

即：$\dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\dfrac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\dfrac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\dfrac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0$

可得：$\sigma_1=\sigma_2=\dfrac{Q}{2S} \quad \sigma_3=-\dfrac{Q}{2S} \quad \sigma_4=\dfrac{Q}{2S}$

$E_A=-\dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S} \quad E_B=\dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S} \quad E_C=\dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}$



平行板电容器电荷分布在内表面

(2)第二板接地 $\sigma_4=0$

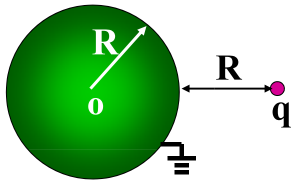
$\sigma_1+\sigma_2=\dfrac{Q}{S} \quad \sigma_2+\sigma_3=0 \quad \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0$

$\sigma_1=0 \quad \sigma_2=\dfrac{Q}{S} \quad \sigma_3=-\dfrac{Q}{S} \quad E_A=E_C=0 \quad E_B=\dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$

例2. 半径为R的金属球距离地面很远，并与地用导线相连接，在与球心相距d=2R处有一点电荷q > 0，问球上的感应电荷q'。

解：金属球是等势体，处处电势：V= 0。

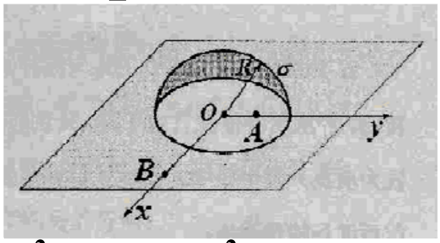
即球心处：V_o= 0。使用电势叠加法：



$$\int_{q'}\frac{dq'}{4\pi\varepsilon_o R}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_o 2R}=0$$

$$\Rightarrow\frac{q'}{4\pi\varepsilon_o R}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_o 2R}=0 \qquad \therefore q'=-\frac{q}{2}$$

例3. 半径为R的半球面上，均匀分布着电荷密度为σ的电荷，OA=R/2，OB=3R/2，求V_{AB}。

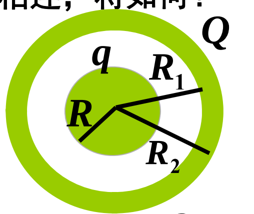


解：根据电势叠加法，半球面产生的电势等于整个球面电势的一半。

$$V_{AB}=\frac{1}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R}-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi R^2\sigma}{4\pi\varepsilon_o R}-\frac{4\pi R^2\sigma}{4\pi\varepsilon_o(3R/2)}\right)=\frac{\sigma R}{6\varepsilon_0}$$

例4. 一个带电金属球半径R，带电量q，放在另一个带电金属球壳内，其内外半径分别为R_1、R_2，球壳带电量为 Q。试求:(1)此系统的电荷、电场分布以及电势。(2)若球壳用导线与地面接通后再断开？（3）再将实心金属球用导线与地面相连，将如何？

解：利用高斯定理、电荷守恒、静电平衡条件、带电体导线相接后等电势的概念。

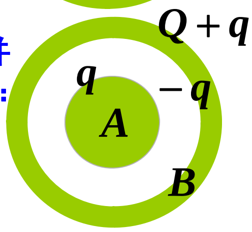


（1）由高斯定理：球壳内表面带电 -q

$$E_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \qquad R<r<R_1$$

$$E_2=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \qquad r>R_2$$

用电势定义法，并设无穷远电势为0：



$$V_A=\int_R^{R_1}\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}dr+\int_{R_2}^{\infty}\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_o r^2}dr$$

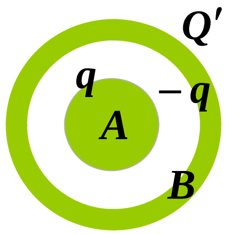
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R_2} \qquad V_B=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R_2}$$

(2)球壳与地相接，设球壳外表面带电Q’：

$$V_B=\int_{R_2}^{\infty}\frac{Q'}{4\pi\varepsilon_o r^2}dr=\frac{Q'}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R_2}=0$$

$$\therefore Q'=0$$

$$V_A=\int_{R}^{R_1}\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1})$$

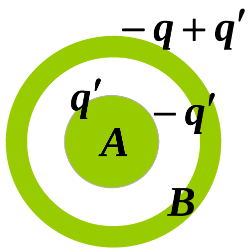


(3)内球与地相接，设内球带电q’：

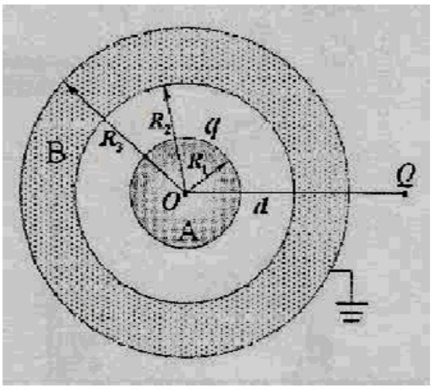
$$V_A=\int_{R}^{R_1}\frac{q'}{4\pi\varepsilon_o r^2}dr+\int_{R_2}^{\infty}\frac{-q+q'}{4\pi\varepsilon_o r^2}dr$$

$$=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_o}(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1})+\frac{-q+q'}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R_2}=0\quad\Rightarrow 可解出\ q'$$

$$V_B=\frac{-q+q'}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R_2}$$



例5. 半径为R_1的导体球A，带电量q，在它外面同心地罩一金属球壳B，球壳B的内、外半径分别为$R_2=2R_1$，$R_3=3R_1$。在距球心d=4R_1处放一电量为Q的点电荷。若球壳B接地，则球壳B的总电量为多少？



解：球壳内表面的带电量为-q，设球壳外表面的带电量为q’。

由于B球接地，A球的电势就是AB之间的电势差：

$$V_O=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2})$$

根据电势叠加原理：

$$V_O=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o R_1}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_o R_2}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_o R_3}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o d}$$

两式相等：

$$\therefore q'=-\frac{R_3}{d}Q=-\frac{3}{4}Q$$

B的总电量：

$$-q+q'=-(q+\frac{3}{4}Q)$$

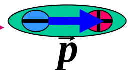
§6-7 静电场中的电介质

电介质 ⟶ 绝缘体(不导电)

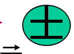
1. 电介质的电结构

每个分子 $\begin{cases} \text{带负电的电子} \to \text{束缚电子} \\ \text{带正电的原子核} \end{cases}$ $\begin{cases} \text{所有负电荷} \to \text{负重心} \\ \text{所有正电荷} \to \text{正重心} \end{cases}$

两类电介质：$\begin{cases} \text{正负重心不重合} \to \\ \text{正负重心重合} \to \end{cases}$



有极分子

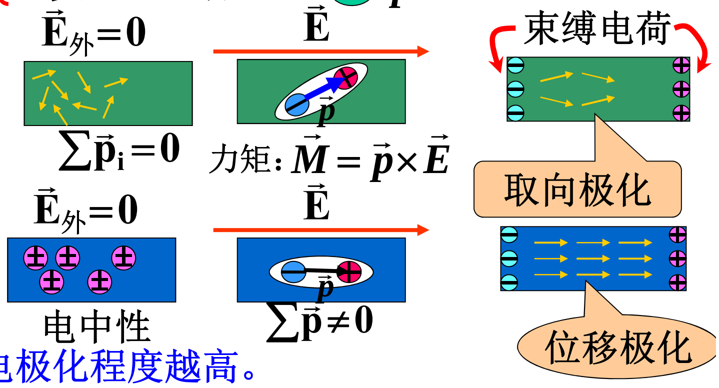


$\vec{p}=0$ 无极分子

2. 电极化现象

1）有极分子

2）无极分子



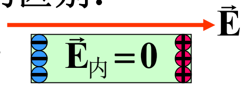
$E_{外}$↑强，电极化程度越高。

电介质的电极化与导体有本质的区别：

电介质：

$\vec{E}_{内}\neq0$

导体：



3. 电极化强度矢量 $\vec{P}$

1）$\vec{P}$ 的定义：$\vec{P}=\dfrac{\sum\vec{p}_i}{\Delta V}$ 单位体积内所有分子的电偶极矩矢量和

2）$\vec{P}$ 与 $\vec{E}$ 成正比 实验证明，对各向同性的线性电介质有：

$$\vec{P}=\chi_e\varepsilon_o\vec{E}$$

χ_e：电极化率（无量钢的纯数）

3）电极穿—电介质的击穿

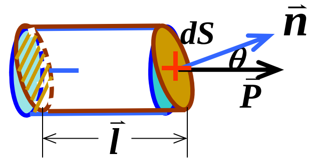
当E↑↑很强时，分子中正负电荷被拉开—> 自由电荷

绝缘体 → 导体 ⟹ 电介质击穿

电介质所能承受不被击穿的最大电场强度 ➡ 击穿场强

例：尖端放电，空气电极穿 E=3 kv/mm

4. 电极化强度与束缚面电荷的关系



端面的电荷量：dq'

（由于电极化而移出端面的电荷）

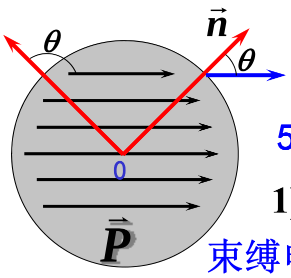
总的电矩：$\left|\sum_i \vec{p}_i\right| = l\,dq' = l\,\sigma' dS$

束缚电荷面密度：σ'

$$\left|\vec{P}\right| = \frac{\left|\sum \vec{p}_i\right|}{\Delta V} = \frac{l\,\sigma' dS}{l\cos\theta\, dS}$$

$$\sigma' = P\cos\theta = \vec{P}\cdot\vec{n}$$

$$dq' = \sigma' dS = P\cos\theta dS = \vec{P}\cdot d\vec{S}$$



$\theta < \pi/2$：极化电荷带正电

$\theta > \pi/2$：极化电荷带负电

5. 有电介质存在时的静电场的计算

1) 环路定理 $\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0}$

束缚电荷$q_{束}$产生的电场与自由电荷$q_{自}$产生的电场相同 $\Longrightarrow$ 保守力场

2）有介质存在时的高斯定理：

在电介质存在空间的电场由 $\left\{\begin{array}{l}\text{自由电荷}\\\text{介质上的}\\\text{束缚电荷}\end{array}\right.$ 共同产生

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S (q_0 + q')$$

自由电荷　束缚电荷

包围在高斯面内的束缚电荷：

$$q' = -\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}$$

在电介质中作高斯面，高斯面外，紧靠高斯面的束缚电荷：

$$dq' = \vec{P}\cdot d\vec{S}$$

（由于电极化而移出高斯面的电荷量）

$$\varepsilon_0 \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \sum_S q_0 - \oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} \quad \Rightarrow \oint_S (\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P})\cdot d\vec{S} = \sum_S q_0$$

定义：电位移矢量 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_S q_0$$

自由电荷

电位移的通量与束缚电荷无关。

- $\vec{P}$、$\vec{D}$、$\vec{E}$ 之间的关系：　$\boxed{\vec{P}=\chi_e\varepsilon_o\vec{E}}$

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon_0\vec{E}+\chi_e\varepsilon_0\vec{E}=(1+\chi_e)\varepsilon_0\vec{E}$$

相对介电常数：$\varepsilon_r=(1+\chi_e)$

$\vec{D}=\varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E}=\varepsilon\,\vec{E}$　　**介电常数：**$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$

$\vec{D}$与$\vec{E}$方向一致

解题一般步骤：

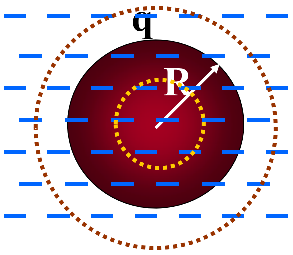
由自由电荷：$q_0\longrightarrow\oint\vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_0\longrightarrow\vec{D}\longrightarrow\vec{E}=\dfrac{\vec{D}}{\varepsilon}$

$\longrightarrow\vec{P}=\chi_e\varepsilon_o\vec{E}\longrightarrow\sigma'=\vec{P}\cdot\vec{n}$

注意：$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$ 是定义式，普遍成立。

$\begin{cases}\vec{D}=\varepsilon\,\vec{E}\\ \vec{P}=\chi_e\varepsilon_o\vec{E}\end{cases}$ **只适用于各向同性的线性均匀介质。**

例1.一个带正电的金属球，半径为R电量为q，浸在油中，油的相对介电常数为ε_r。求E、V、P。



解：电荷只分布在金属球的表面。

r<R：$\oint\vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_i=0$　$\therefore D=0$，$E=0$

r≥R：$\oint\vec{D}\cdot d\vec{S}=D\cdot4\pi r^2=q$

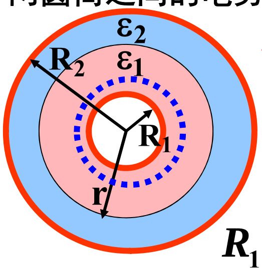
$D=\dfrac{q}{4\pi r^2}$　　$E=\dfrac{D}{\varepsilon}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_o r^2}<\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$V=\int_p^\infty\vec{E}\cdot d\vec{l}\begin{cases}r<R & V=\int_R^\infty\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_o r^2}dr=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_o R}\\ r\ge R & V=\int_r^\infty\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_o r^2}dr=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_o r}\end{cases}$

$r>R$：　$P=\chi_e\varepsilon_o E=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_o E=\left(1-\dfrac{1}{\varepsilon_r}\right)\dfrac{q}{4\pi r^2}$

（1）r不同，各点极化程度不同；（2）空间某点处的E与该点的电介质有关，而该处的V与积分路径上所有电介质有关。

例2.两共轴的导体圆筒内外半径分别为R_1、R_2其间有两层均匀介质，分界面上半径为r，内外层介质的介电常数分别为ε_1、ε_2， 求场强和两圆筒之间的电势差。设内外圆筒电荷线密度为λ、$-\lambda$。



解：高斯定理：$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = 2\pi r_1 L\cdot D_1 = \lambda L$

$$\therefore D_1 = \frac{\lambda}{2\pi r_1} \Rightarrow E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_1 r_1}$$

$$R_1 < r_1 < r: \quad E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_1 r_1}$$

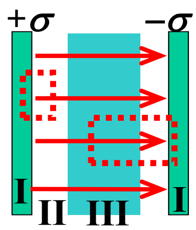
同理：$r < r_2 < R_2: \quad E_2 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_2 r_2}$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon_2 r_2}{\varepsilon_1 r_1}$$

两圆筒电势差：

$$\Delta V = \int_{R_1}^{r} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_1 r_1} dr_1 + \int_{r}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_2 r_2} dr_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_1}\ln\frac{r}{R_1} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_2}\ln\frac{R_2}{r}$$

例3. 平行板电容器充电后，极板上面电荷密度σ，将两板与电源断电以后，再插入ε_r的电介质，计算空隙中和电介质中的 $\vec{E}$、$\vec{D}$、$\vec{P}$



解：极板上电荷面密度不变。

高斯定理： $(D_I + D_{II})\Delta S = \sigma\Delta S \qquad D_I = 0$

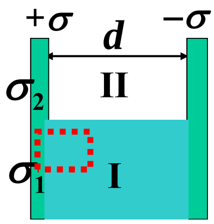
$$\therefore D_{II} = \sigma \quad \Rightarrow E_{II} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$-D_{III}\Delta S = -\sigma\Delta S \quad \Rightarrow D_{III} = \sigma$$

$$\therefore E_{III} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$P = \chi_e\varepsilon_0 E_{III} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = (1 - \frac{1}{\varepsilon_r})\sigma \qquad \therefore \sigma' = P$$

另：若将同样的电介质充满电容器的一半，则两极板之间的电压为多少？

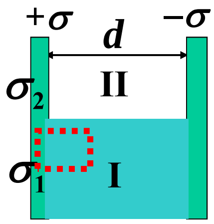


高斯定理：$D_1\Delta S = \sigma_1\Delta S \quad \Rightarrow D_1 = \sigma_1$

$$D_2 = \sigma_2 \quad \Rightarrow E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_r\varepsilon_0} \qquad E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

金属极板为等势体：

$$E_1=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_r\varepsilon_0}\qquad E_2=\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$$



$$\Delta V=\int_+^-\vec{E}\cdot d\vec{l}=Ed=E_1d=E_2d$$

$$\therefore\frac{\sigma_1}{\varepsilon_r}=\sigma_2\qquad \text{电荷不变：}\sigma_1\frac{S}{2}+\sigma_2\frac{S}{2}=\sigma S$$

$$\therefore\sigma_1+\sigma_2=2\sigma\qquad \therefore\sigma_1=\frac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}\sigma,\quad \sigma_2=\frac{2}{1+\varepsilon_r}\sigma$$

$$\Delta V=E_1d=E_2d=\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}d=\frac{2\sigma}{(1+\varepsilon_r)\varepsilon_0}d$$

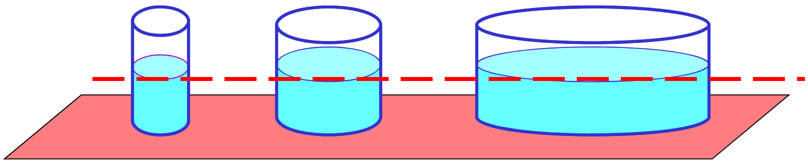
§6-8 电容器的电容

1.孤立导体的电容　若一孤立导体带电+q：

则该导体具有一定的电势 ⟶V　且q↑、V↑

电容：$C=\dfrac{q}{V}$ （与导体的尺寸形状有关）　单位：F(法拉)

电容：$C=\dfrac{q}{V}$ 物理意义：导体每升高单位电势，所需要的电量。



例如：一个带电导体球的电容

$$\because V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o R}\qquad \therefore C=\frac{q}{V}=4\pi\varepsilon_o R$$

地球半径 R=6.4×10⁶m, $C=711\times10^{-6}F=711\mu F$

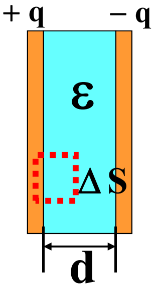
2. 电容器及其电容

电容器：由A、B两个导体组成，带等量异号电荷，可储存电荷和电能。

电容：$C=\dfrac{q}{V_+-V_-}=\dfrac{q}{\Delta V}$　两极板的电势差，不受或可忽略外界的影响。

电容只由极板的几何特性、相对位置、介电常数确定。

例1. 求平行板电容器的电容。平行金属板的面积为S，间距为d，充满介电常数为ε 的电介质。

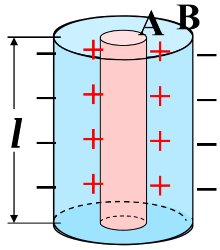


解：高斯定理：$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = D\cdot\Delta S = \sigma\cdot\Delta S \quad \Rightarrow D=\sigma$

$$\therefore E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad \Delta V = \int_{+}^{-} \vec{E}\cdot d\vec{l} = E\cdot d = \frac{\sigma d}{\varepsilon}$$

$$\therefore C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\sigma S}{\Delta V} = \frac{\varepsilon S}{d}$$

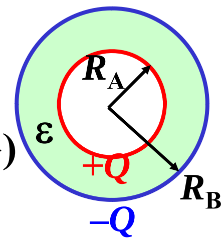
圆柱型电容器的电容：两个半径R_A, R_B同轴金属圆柱面为极板



$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r} \qquad \Delta V = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{R_B}{R_A}$$

$$\lambda = \frac{Q}{l} \qquad C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln R_B / R_A}$$

球形电容器的电容：

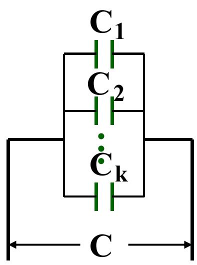


$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

$$\Delta V = \int_{R_A}^{R_B} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_{R_A}^{R_B}\frac{1}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)$$

$$\therefore C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\varepsilon R_A R_B}{R_B - R_A}$$

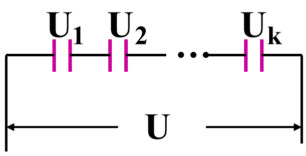
电容的并联、串联。 并联：增大电容



$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q_1 + Q_2 + \cdots}{\Delta V} = C_1 + C_2 + \cdots + C_k$$

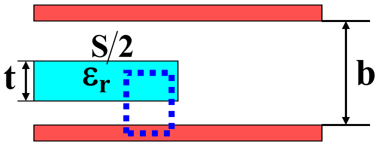
串联：增强耐压

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{U_1 + U_2 + \cdots} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots}$$



但是电容减小： $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_k}$

例2.一平行板电容器，两极板间距为b、面积为S，在其间平行地插入一厚度为t，相对介电常数为ε_r, 面积为S/2的均匀介质板。设极板带电Q，忽略边缘效应。求(1)电容，(2)两极板间的电势差ΔV。



解：（1）等效两电容的并联

左半部： D＝σ

空气中: $E_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}$　介质中: $E_2 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_o}$

$$\Delta V = \int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{l} = E_1(b-t) + E_2 t = \frac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_o}\left[\varepsilon_r b - (\varepsilon_r - 1)\, t\right]$$

$$C_{左} = \frac{\sigma\cdot S/2}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_o\, S/2}{b - \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} t}$$

右半部：$C_{右} = \dfrac{\varepsilon_o S/2}{b}$

$$C = C_{左} + C_{右} = \frac{\varepsilon_o S\left[2\varepsilon_r b - (\varepsilon_r - 1)t\right]}{2b\left[\varepsilon_r b - (\varepsilon_r - 1)t\right]}$$

（2）$\Delta V = \dfrac{Q}{C}$

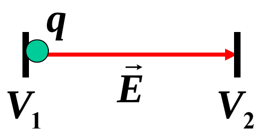
$Q_{左} \neq Q_{右}$

§ 6-9 静电场的能量

一、电荷在外电场中的静电势能（前面已介绍）

点电荷 q_0在其它电荷产生的电场中的电势为: V时，点电荷具有静电势能: $W = q_0 V$

电荷q在电势差（电压）作用下所获得的动能:



静电力所作的功等于电势能增量的负值:

$$A_{12} = -(W_2 - W_1) = \int_1^2 q\vec{E}\cdot d\vec{l} = q\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} = -q(V_2 - V_1)$$

静电力所作的功等于动能增量(动能定理):

$$A_{12} = \Delta E_k = (E_{k2} - E_{k1}) \qquad \therefore \Delta E_k = q(V_1 - V_2)$$

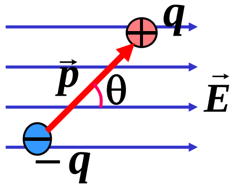
电子（1e）经过1V 电压加速获得的动能: $1eV = 1.6\times 10^{-19} J$

$$(E_{k2} - E_{k1}) = -(W_2 - W_1) \qquad \therefore (E_{k2} + W_2) - (E_{k1} + W_1) = 0$$

即能量守恒

例1. 求一电偶极子 $\vec{p}=q\vec{l}$ 在均匀电场E中的电势能。

解：两电荷的电势能：



$$W=W_{+}+W_{-}=qV_{+}+(-q)V_{-}$$

$$=q\int_{+}^{-}\vec{E}\cdot d\vec{l}=-q\int_{-}^{+}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$=-q\int_{-}^{+}E\cos\theta dl=-qlE\cos\theta=-\vec{p}\cdot\vec{E}$$

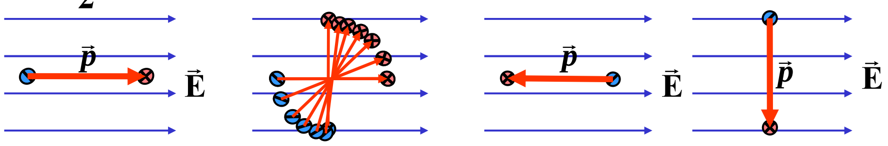
$$W=-pE\cos\theta \qquad \text{力矩：}\vec{M}=\vec{p}\times\vec{E}$$

(1) $\theta=0$ $\cos\theta=1$ $W=-pE$ 能量最低，稳定平衡态 $\vec{F}=0$ $\vec{M}=0$

(2) $\theta=\frac{\pi}{2}$ $\cos\theta=0$ $W=0$ $\vec{F}=0$ $\vec{M}\neq0$ 非平衡态

(3) $\theta=\pi$ $\cos\theta=-1$ $W=pE$ 能量最高，非稳定平衡态 $\vec{F}=0$ $\vec{M}=0$

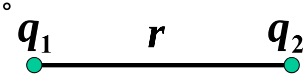
(4) $\theta=\frac{3}{2}\pi$ $\cos\theta=0$ $W=0$ $\vec{F}=0$ $\vec{M}\neq0$ 非平衡态



二、带电体系的静电能（静电势能）

静电能是电荷之间的相互作用能。单一带电体的不同电荷元之间的相互作用静电能：自能；不同带电体之间的相互作用静电能：互能。两者之和为总静电能。

1. 两点电荷的静电能



回顾电势的定义：$V_p=\int_p^{V=0}\vec{E}\cdot d\vec{l}$ 选取无穷远为电势零点

q_1 所在处 q_2 产生的电势：$V_1=\int_r^{\infty}\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_o r^2}dr=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_o r}$

两点电荷的静电势能：$W=q_1V_1=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_o r}$

根据静电势能的定义（选取无穷远为静电势能零点）：q_1从现在位置运动到无穷远，静电力所作的功等于静电势能：

$$A_{1\to\infty}=-(0-W)=\int_p^{W=0}\vec{F}\cdot d\vec{l}=\int_r^{\infty}\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_o r^2}dr=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_o r}$$

q_2 所在处 q_1 产生的电势：$V_2=\int_r^{\infty}\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_o r^2}dr=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_o r}$

两点电荷的静电势能：$W=q_2V_2=\frac{q_2q_1}{4\pi\varepsilon_o r}$

$$W=q_1\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_o r}=q_1V_1=q_2\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_o r}=q_2V_2=\frac{1}{2}(q_1V_1+q_2V_2)$$

静电势能（静电能）属于两个点电荷共同拥有

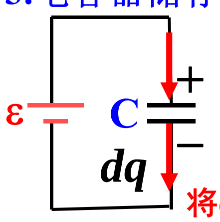
2.电荷系的静电能

点电荷系：$W=\frac{1}{2}\sum q_iV_i$　　连续分布带电体：$W=\frac{1}{2}\int Vdq$

V_i, V 为 q_i, dq 所在处，其它电荷产生的电势。

对于连续分布带电体，由于 dq 无限小，其对电场的影响无穷小，V 可以认为是包括 dq 在内的所有电荷产生的电势。　　静电势能（静电能）由所有电荷共同拥有

3.电容器储存的静电能



电容器的充电过程有电源力（非静电力）参与。

电容器所具有的静电能 W 等于电源力所做的功：

$A_{静电}+A_{非静电}=\Delta E_k=0$　　$A_{静电}=-(W-0)$

$\therefore A_{非静电}=W$ （保守力作功等于势能增量的负值）

将dq的正电荷从负极板移到正极板，静电势能的增量：

$Q=CU$

$$A_{非静电}=W=\int(V_+-V_-)dq=\int_0^Q\frac{q}{C}dq=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$
$$=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU$$

C标志电容器储能的本领。

电容器储存的能量就是静电势能，可以用带电体系静电势能的计算公式：

$$W=\frac{1}{2}\int Vdq=\frac{1}{2}\int_Q V_+dq+\frac{1}{2}\int_{-Q}V_-dq=\frac{1}{2}V_+Q+\frac{1}{2}V_-(-Q)$$

$$=\frac{1}{2}(V_+-V_-)Q=\frac{1}{2}UQ$$ 与上相同

静电场的静电势能储存在电场中。

4.静电场的能量 以平行板电容器为例：

$$C=\frac{\varepsilon S}{d}\qquad U=Ed$$

$$W=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}E^2d^2=\frac{1}{2}\varepsilon E^2Sd=\frac{1}{2}\varepsilon E^2V$$

$V=Sd$ 是电场强度非零的电容器两极板之间的体积。

能量储存在电场中

1）电场能量密度

$$w_e=\frac{W}{V}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$$ 对任意电场均成立

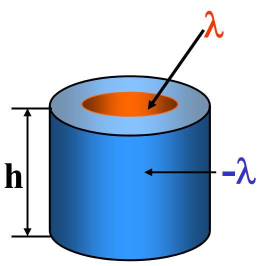
电场的能量密度与介电常数相关，有电介质时的能量密度比真空的能量密度大(在同样电场强度时)，原因是电介质在电极化的过程中同样储存了能量，电场对分子电偶极矩作了功。

2）电场能量 $W=\int_V\frac{1}{2}\varepsilon E^2dV=\int_V\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}dV$

例2. 求一圆柱形电容器的储能W。

设电容器极板半径分别为R_1、R_2

带电线密度分别为λ 、$-\lambda$，



解：方法一：两极板间的电场为：

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o\varepsilon_r r}\qquad dV=2\pi rhdr$$

$$\therefore W=\int\frac{1}{2}\varepsilon_o\varepsilon_r E^2dV=\frac{\lambda^2h}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

极化电荷对应的静电能已经包含在介电常数中，λ反映的是自由电荷的静电能

方法二：电容的静电能：$W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_o\varepsilon_r h}{\ln R_2/R_1}\qquad Q=\lambda h\qquad \therefore W=\frac{\lambda^2h}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

求C的另一方法：E→ $W=\int\frac{1}{2}\varepsilon E^2dV\rightarrow C=\frac{Q^2}{2W}$

例3. 均匀带电球体，半径为R，电荷体密度为ρ，求这一带电球体的静电势能。

解：方法一：

已知场强分布：

$$\begin{cases}\vec{E}_1=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_o}\vec{r} & (r\le R)\\[2ex] \vec{E}_2=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}=\dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r^2}\hat{r} & (r\ge R)\end{cases}$$

由电势定义得：

$$V(r)=\int_r^R E_1dr+\int_R^\infty E_2dr=\int_r^R\frac{\rho r}{3\varepsilon_o}dr+\int_R^\infty\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r^2}dr$$

$$=\frac{\rho}{6\varepsilon_o}(3R^2-r^2)$$

静电势能：$W=\dfrac{1}{2}\int Vdq=\dfrac{1}{2}\int_0^R\dfrac{\rho}{6\varepsilon_o}(3R^2-r^2)\rho\cdot 4\pi r^2dr$

$$\boxed{\rho=\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}}$$

$$=\frac{4\pi}{15\varepsilon_o}\rho^2R^5=\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_o R}$$

$$\boxed{dV=4\pi r^2dr}$$

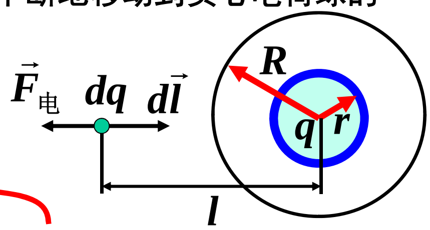
方法二：静电势能就是电场能

$$W=\int_0^R\frac{1}{2}\varepsilon_0E_1^2dV+\int_R^\infty\frac{1}{2}\varepsilon_0E_2^2dV=\frac{4\pi}{15\varepsilon_o}\rho^2R^5$$

方法三：用外力将dq电荷从无穷远不断地移动到实心电荷球的表面，并设无穷远静电势能为零。

动能定理：$dA_{外}+dA_{电}=0$

势能定义：$dA_{电}=-(dW-0)$



$$dA_{外}=-dA_{电}=dW$$

$$W=\int dW=-\int dA_{电}$$ 静电势能的来源为外力做功输入能量

从无穷远移动dq电荷到半径为r的球面上，静电力所做的功：

$$dA_{电}=\int_\infty^r\vec{F}_{电}\cdot d\vec{l}=\int_\infty^r\frac{qdq}{4\pi\varepsilon_0 l^2}dl$$ （功的负值包含在dl中）

$$=-\frac{qdq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$W=-\int dA_{电}=\int_0^R\frac{qdq}{4\pi\varepsilon_0 r}=\int_0^R\frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 r}\rho\cdot 4\pi r^2dr$$

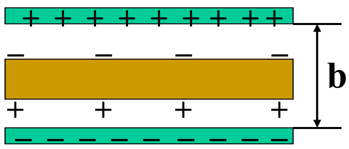
$$\boxed{q=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}\quad \boxed{dq=\rho\cdot 4\pi r^2dr}$$

$$=\frac{4\pi}{15\varepsilon_o}\rho^2R^5$$

例4. 一平行板电容器，两极板间距为b=1.2cm、面积为 $S=0.12m^2$，将其充电到120v的电势差后撤去电源，放入一厚度为t=0.4cm，$\varepsilon_r=4.8$的平板均匀电介质，

求：(1)放入介质后极板的电势差。

(2)放入介质板过程中外界作了多少功？



解：(1)充电后极板带电 Q=CU

放介质前：$C=\dfrac{\varepsilon_0 S}{b}$

则：$Q=1.1\times10^{-8}c$

放介质后：$C'=\dfrac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{\varepsilon_r b-(\varepsilon_r-1)t}$

$U'=\dfrac{Q}{C'}=88\ v$

动能定理：

$A_{外}+A_{电}=\Delta E_k=0$

静电力做功等于静电势能增量的负值：

$\therefore A_{外}=-A_{电}=-[-(W_2-W_1)]=\Delta W$

(2) $A_{外}=\Delta W=W_2-W_1=\frac{1}{2}C'U'^2-\frac{1}{2}CU^2=-1.7\times10^{-7}J<0$

即：外力作负功，电场力作正功。减少的静电势能输出到外界