启明学院

2021～2022 学年第二学期

《微积分（一）》（下）课程期末考试试卷(A 卷) (闭卷)

参考答案

一、填空题（每小题 4 分，共 28 分）

1. $\{1,4y,9z^2\}$ ； 2. $y=C_1e^x+C_2e^{-2022x}$ ； 3. $x-5y+4z-9=0$ ；

4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}}^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ ； 5. $a_2=-\dfrac{1}{\pi}$, $S(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{4}$ ；

6. $\kappa(\pi)=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ； 7. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi a^3$.

二、判断题(每小题 2 分，共 8 分). 请在正确说法相应的括号中画“√ ”，在错误说法的括号中画“×”.

8. √； 9. √； 10. √； 11.×.

三、**计算题（每小题 7 分，共 28 分）**

12. 解：因 $\left|\dfrac{x^2+3xy+y^2}{|x|+|y|}\right|\le\dfrac{5}{2}\dfrac{(x^2+y^2)}{|x|+|y|}=\dfrac{5}{2}(|x|+|y|)\to 0\ \big((x,y)\to(0,0)\big)$， (5 分)

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+3xy+y^2}{|x|+|y|}=0.$ (7 分)

13. 解：$f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}=\dfrac{x}{(2-x)(1+x)}=\dfrac{x}{3}\left(\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{1+x}\right)=\dfrac{x}{3}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}}+\dfrac{1}{1+x}\right)$ (3 分)

$$=\frac{x}{3}\left(\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\right)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-(-1)^n\right)x^{n+1},\quad (-1<x<1).\quad (7\text{ 分})$$

14. 解：锥面 $S: z=\sqrt{x^2+y^2}$ ，其在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}:(x-a)^2+y^2\le a^2$.

计算可得 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}$. 由对称性可得

$$\iint_S (x+y+z)dS=\iint_S (x+z)dS=\iint_{D_{xy}}(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy \qquad (3\text{ 分})$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}(r\cos\theta+r)r\mathrm{d}r=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{16\sqrt{2}}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3\theta+\cos^4\theta)d\theta=\frac{16\sqrt{2}}{3}a^3\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{16\sqrt{2}}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{3\pi}{16}\right)a^3=\frac{(32+9\pi)\sqrt{2}}{9}a^3. \qquad (7\text{ 分})$$

15. 解法 1: 补充曲面 $S_1: z=0\ (x^2+y^2\le 2)$，取上侧. 设 S 与 S_1 围成空间区域 Ω .

由 Gauss 公式及对称性，得

$$I=\iint_S x(x+y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-y^2(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{S+S_1(\text{内})}-\iint_{S_1(\text{上})}$$

$$=-\iiint_\Omega (2x+y^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{x^2+y^2\le 2}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (4\text{ 分})$$

$$=-\frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\le 2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}(\sqrt{2})^4=-\pi. \qquad (7\text{ 分})$$

解法 2:（合一投影法）由曲面 S 的方程知，其上任一点处指向上侧的法向量为 $\{-z_x,-z_y,1\}=\{x,y,1\}$，曲面在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy}: x^2+y^2\le 2$. 所以，

$$I=\iint_{S(\text{下})}x(x+y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-y^2(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{S(\text{上})}[x(x+y^2)\cdot(-z_x)-y^2(z-1)\cdot 1]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{D_{xy}}\{[x(x+y^2)\cdot x-y^2[-\frac{1}{2}(x^2+y^2)]\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\le 2}(\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{1}{2}y^4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(\frac{3}{2}r^2\cos^2\theta\cdot r^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}r^4\sin^4\theta)r\mathrm{d}r=-\pi.$$

(7 分)

四、应用题（每小题 6 分，共 12 分）

16. 解：设两曲面所围区域为Ω，其形心坐标为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，则由对称性可知，

$$\bar{x}=\bar{y}=0，\quad \bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} zdv}{\iiint\limits_{\Omega} dv}. \qquad (2\text{ 分})$$

在球坐标变化下，有

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} zdv}{\iiint\limits_{\Omega} dv}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta}{\iiint\limits_{\Omega} r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta}$$

$$=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^3\mathrm{d}r}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2\mathrm{d}r}$$

$$=\frac{2\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{4}a^4}{2\pi\cdot(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{3}a^3}=\frac{3(2+\sqrt{2})}{16}a.$$

所以，形心坐标为$\left(0,0,\frac{3(2+\sqrt{2})}{16}a\right)$. (6 分)

17. 解：设所要求的点为(x,y,z)，则问题转换为在条件$z=xy-y-1$下，求

$d=\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}$ 的最小值. (2 分)

作拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=(x-1)^2+y^2+z^2+\lambda(z-xy+y+1)$，

由

$$\begin{cases} L_x=2(x-1)-\lambda y=0 \\ L_y=2y-\lambda(x-1)=0 \\ L_z=2z+\lambda=0 \\ L_\lambda=z-xy+y+1=0 \end{cases}$$

当$\lambda=0$时，得$x=1$，$y=z=0$，不满足上述方程组；

当$(x-1)y=0$时，得$z=-1$，$\lambda=-2$，$x=1$，$y=0$；

当$(x-1)y\neq 0$时，解得$\lambda=\pm 2$，经检验，不符合方程. 因此可得唯一驻点$(1,0,-1)$，由

实际问题的意义可知，点$(1,0,-1)$即为所要求的点. (6 分)

五、证明题（每小题 8 分，共 24 分）

18. 证明：记 $F(x,t)= f(x,1+\int_0^t \cos u^2 du)$. 由题设条件知，$F(x,t)$ 在点 $(0,0)$ 附近由一阶连续偏导数，且 $F(0,0)= f(0,1)=0$. 又

$$F_t(x,t)= f_y(x,1+\int_0^t \cos u^2 du)\cdot \cos t^2 ,$$

得 $F_t(0,0)= f_y(0,1)\neq 0$. 由隐函数存在定理知，方程 $F(x,t)= f(x,1+\int_0^t \cos u^2 du)=0$ 在点 $(0,0)$ 附近确定一个隐函数 $t=t(x)$. (5 分)

$$t'(0)=-\frac{F_x(x,t)}{F_t(x,t)}\bigg|_{(0,0)}=-\frac{f_x(x,1+\int_0^t \cos u^2 du)}{f_y(x,1+\int_0^t \cos u^2 du)\cdot \cos t^2}\bigg|_{(0,0)}=-\frac{f_x(0,1)}{f_y(0,1)}. \qquad (8 分)$$

19. 证明：记 $g(x,t)=\dfrac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$，已知 $g(x,t)$ 在 $(1,+\infty)\times[1,+\infty)$ 上连续.

$|g(x,t)|=\left|\dfrac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}\right|\le \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{t^{3/2}}$，而 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{t^{3/2}}\mathrm{d}t$ 收敛，所以 $\int_1^{+\infty} g(x,t)\mathrm{d}t$ 在 $(1,+\infty)$ 上逐点收敛. (2 分)

又 $g_x(x,t)=\dfrac{1}{(1+x^2t^2)(t^2+1)}$ 也在 $(1,+\infty)\times[1,+\infty)$ 上连续，且

$$|g_x(x,t)|=\left|\frac{1}{(1+x^2t^2)(t^2+1)}\right|\le \frac{1}{t^2+1},\quad \forall x\in(1,+\infty),$$

而 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t$ 收敛，由 Weierstrass 判别法知，$\int_1^{+\infty} g_x(x,t)\mathrm{d}t$ 在 $(1,+\infty)$ 上一致收敛. (4 分)

由含参变量积分求导定理可知，$f(x)=\int_1^{+\infty} g(x,t)\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}\mathrm{d}t$ 在 $(1,+\infty)$ 上可导，且 (6 分)

$$f'(x)=\int_1^{+\infty} g_x(x,t)\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2t^2)(t^2+1)}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{x^2-1}\int_1^{+\infty}\left(\frac{x^2}{1+x^2t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{x^2-1}\big(x\arctan(xt)-\arctan t\big)\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{x^2-1}\left(\frac{\pi x}{2}-x\arctan x-\frac{\pi}{4}\right). \qquad (8 分)$$

20. 证明：设曲线 C 所围区域为 D，D_1 为 D 在第一象限的部分． D 关于直线 $y=x$ 对称，由 Green 公式及轮换对称性，有

$$\int_C -yf(x)\,\mathrm{d}x+\frac{x}{f(y)}\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{1}{f(y)}+f(x)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (2\text{ 分})$$

$$=\iint_D\left(\frac{1}{f(x)}+f(x)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (4\text{ 分})$$

$$\geq\iint_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\iint_{D_1}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt[4]{a^4-x^4}}\mathrm{d}y \qquad (6\text{ 分})$$

$$=8\int_0^a\sqrt[4]{a^4-x^4}\,\mathrm{d}x$$

$$=8a\int_0^a\sqrt[4]{1-\left(\frac{x}{a}\right)^4}\,\mathrm{d}x \quad \left(\left(\frac{x}{a}\right)^4=t\right)$$

$$=8a\int_0^1\frac{a}{4}t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}t$$

$$=2a^2B\left(\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right).$$

(8 分)