期末试题（1）（150 分钟内完成）

一、 填空题（每空 4 分，共 28 分）

1、微分方程 $y''+2y'+8y=0$ 的通解为 ________________________________.

2、设 $z=z(x,y)$ 是由 $f(x+z,yz)=0$ 所确定的函数，其中 f 具有连续且不为零的一阶偏导数，

则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ____________________，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ______________________.

3、函数 $f\left(x,y\right)=x^2-y^2$ 在点 $(1,-1)$ 处沿方向 $\vec{l}=\{1,1\}$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,-1)}=$ ________________.

4、设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，且 $f(x)=\begin{cases}-1,-\pi\le x<0,\\ e^x,0\le x<\pi\end{cases}$，$S(x)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 展开式的和函数，

则 $S(\dfrac{\pi}{2})=$ ______________，$S(\pi)=$ _______________.

5、二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在极坐标系下的二次积分是________________________________.

6、通过原点且与两平面 $x-y+z-1=0$ 和 $x+y-z+2=0$ 的交线平行的直线方程是________________.

7、设 $\mathrm{d}u=(y+2xz)\mathrm{d}x+(x+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+2yz)\mathrm{d}z$，则 $u(x,y,z)=$ _________________________.

二、 判断题(每小题 2 分，共 8 分). 请在正确说法相应的括号中画“ √ ”，在错误说法的括号中画“×”.

8. 若无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也必收敛. ( )

9. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不连续，则偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 处必定不存在. ( )

10. 设 $S:x^2+y^2+z^2=1(z\ge 0)$，S_1 是 S 在第一卦限部分，则 $\iint\limits_{S}xy^2z^3\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1}xy^2z^3\mathrm{d}S$. ( )

11. 设 $|u_n(x)|\le v_n(x)\ (n\in N_+,x\in[a,b])$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上也一致收敛.

（　　）

三、解答题（每小题 6 分，共 12 分）

12. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan(\sqrt{n^2+1}\,\pi)$ 的敛散性，是绝对收敛还是条件收敛?

13. 讨论含参变量积分 $I(x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan(xy)}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ 关于 x 在 $[\delta,+\infty)(\delta>0)$ 上的一致收敛性.

四、计算题（每小题 7 分，共 28 分）

14. $I=\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$， 其中 $D:|x|+|y|\le 1$.

15. #计算曲面积分 $I=\iint\limits_S x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

16. 设 $f(x)$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 内有连续的导函数，曲线积分 $\int_L f^2(x)\sin y\mathrm{d}x+(f(x)-x)\cos y\mathrm{d}y$ 与路径无关，且 $f(0)=0$，求 $f(x)$ 及 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}f^2(x)\sin y\mathrm{d}x+(f(x)-x)\cos y\mathrm{d}y$.

17. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}x^{2n}$ 的收敛域与和函数.

五、证明题（每小题 6 分，共 24 分）

18. 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{e^x+n}$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

19. 证明：由 $z=a$，$z=b$，$y=f(z)$（f 为连续的正值函数）以及 z 轴所围成的平面图形绕 z 轴旋转一周所成的立体对 z 轴的转动惯量（密度为 $\mu=1$）为 $I_z=\dfrac{\pi}{2}\int_a^b f^4(z)\mathrm{d}z$.

20. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2-\{(0,0)\}$ 可微，在 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$. 证明：$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处也可微.

21. 设连续函数列 $\{f_n(x,y)\}$ 在有界闭区域 D 上一致收敛于 $f(x,y)$，证明：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\iint_D f_n(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$