第7章

电感、电容及动态电路

7.1 广义函数 Singularity Functions

7.2 电容 Capacitor

7.3 电感 Inductor

7.4 动态电路的暂态分析概述

电场能量存储和释放——电容（元件）

磁场能量存储和释放——电感（元件）

不消耗能量

无源元件

储能元件

动态电路

动态电路发生结构、参数或激励突变时，电路的响应会从突变前的稳定状态稳态（稳态），历经**渐变过程**，再到新的稳态。

暂态过程或过渡过程

计算与分析暂态过程的响应称为**暂态分析**

计算与分析稳态时的响应称为**稳态分析**

7.1 广义函数Singularity Functions

- Unit step function ——单位 阶跃 函数 $\varepsilon(t)$
- Unit pulse function ——单位 脉冲 函数 $p(t)$
- Unit impulse function ——单位 冲激 函数 $\delta(t)$

问题的引出

$$f_1(t)=\begin{cases} A\cos\omega t & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

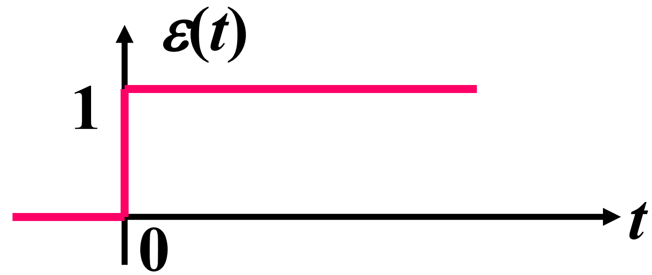
分段函数：数学上不便处理

借助单位阶跃函数和单位冲激函数，可以把分段函数写为单个表达式的广义函数，方便运算

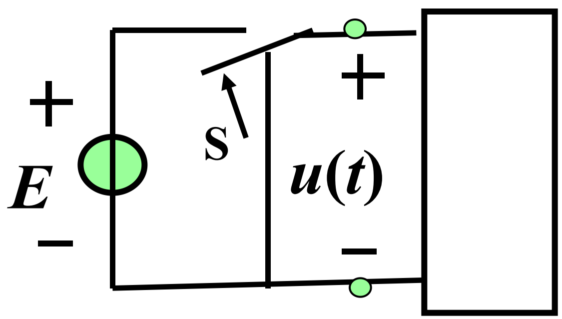
1. 单位阶跃函数(*unit-step function*)

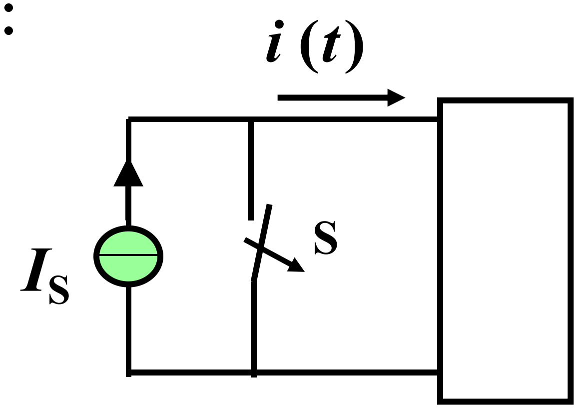
1. 定义

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t>0)\end{cases}$$



用 $\varepsilon(t)$ 来描述开关的动作：

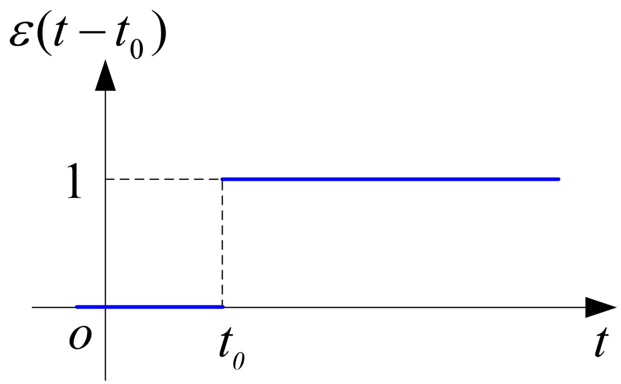




$t=0$ 合S　$u(t)=E\,\varepsilon(t)$

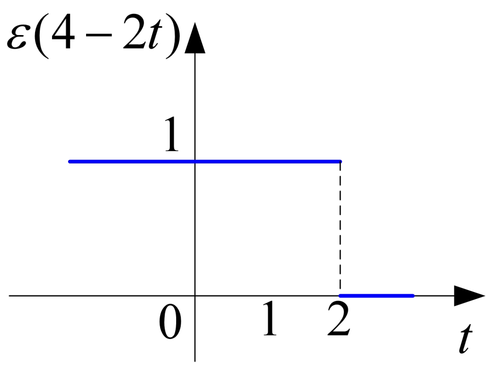
$t=0$ 拉闸　$i(t)=I_S\varepsilon(t)$

单位阶跃函数的延迟



$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & (t<t_0)\\ 1 & (t>t_0)\end{cases}$$

单位阶跃函数的反转



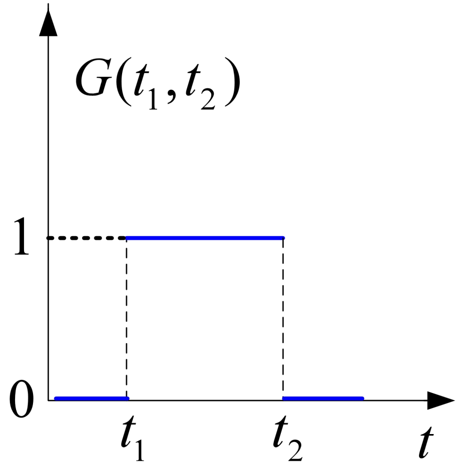
$$\varepsilon(4-2t)=\begin{cases}1 & (t<2)\\ 0 & (t>2)\end{cases}$$

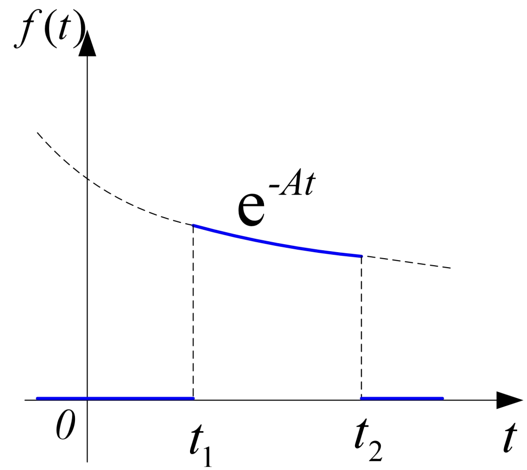
单位阶跃函数的应用——表达波形

$$f_1(t)=\begin{cases}A\cos\omega t & t>0\\ 0 & t<0\end{cases} \longrightarrow f_1(t)=A\cos(\omega t)\varepsilon(t)$$

7.1 广义函数Singularity Functions

闸门函数（Gate function）



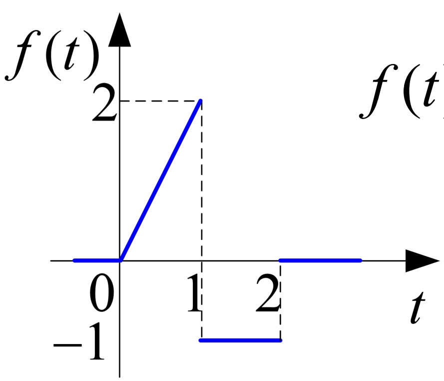


$$G(t_1, t_2) = \varepsilon(t - t_1) - \varepsilon(t - t_2)$$

$$= \varepsilon(t - t_1) \times \varepsilon(t_2 - t)$$

$$f(t) = G(t_1, t_2) e^{-At} = e^{-At}[\varepsilon(t - t_1) - \varepsilon(t - t_2)]$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \phi_k(t) \varepsilon(t - t_k)$$



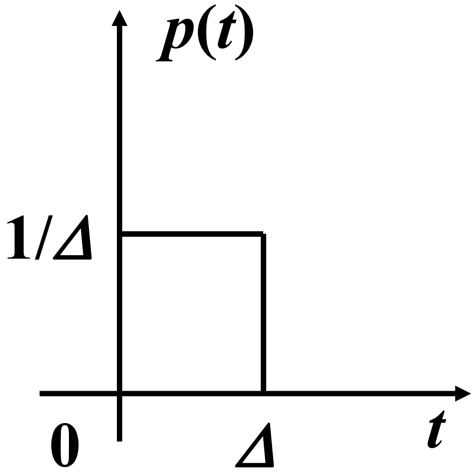
$$f(t) = 2tG(0,1) - G(1,2)$$

$$= 2t[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] - [\varepsilon(t-1) - \varepsilon(t-2)]$$

$$= 2t\varepsilon(t) - (2t+1)\varepsilon(t-1) + \varepsilon(t-2)$$

2. 单位冲激函数

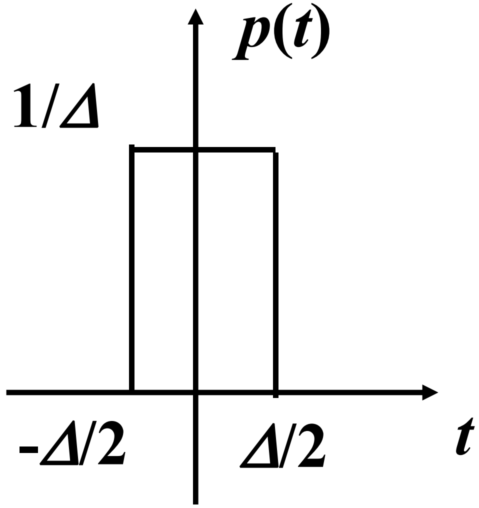
1. 单位脉冲函数 $p(t)$



$$p(t)=\frac{1}{\Delta}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\Delta)]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(t)\mathrm{d}t=1$$

2. 单位冲激函数 $\delta(t)$



$$p(t)=\frac{1}{\Delta}[\varepsilon(t+\frac{\Delta}{2})-\varepsilon(t-\frac{\Delta}{2})]$$

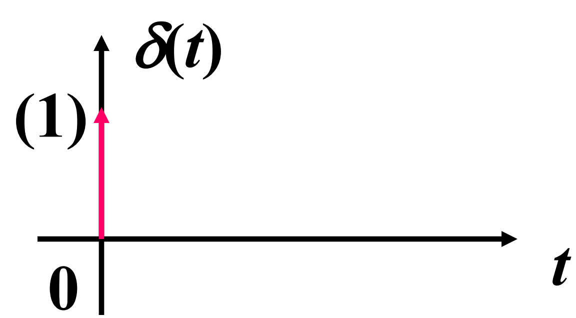
$$\Delta\to 0,\quad \frac{1}{\Delta}\to\infty$$

$$\lim_{\Delta\to 0}p(t)=\delta(t)$$

定义：

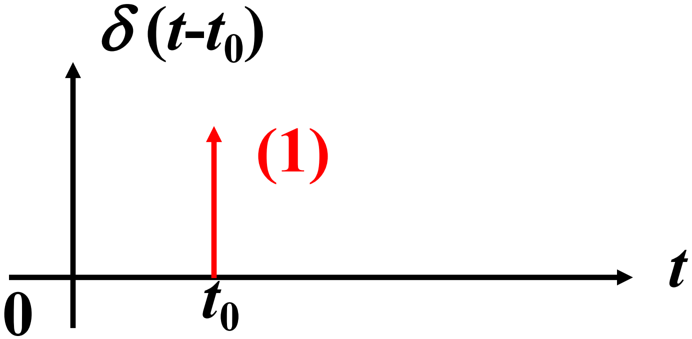
$$\delta(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 0 & (t>0)\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

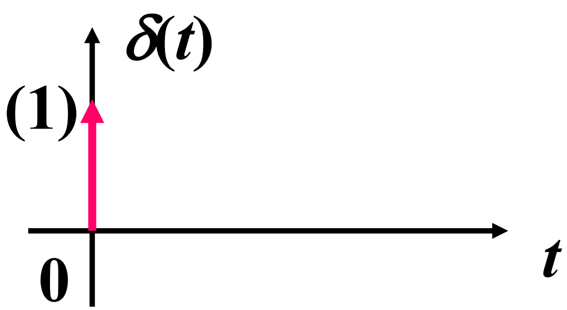


3. 单位冲激函数的延迟 $\delta(t-t_0)$

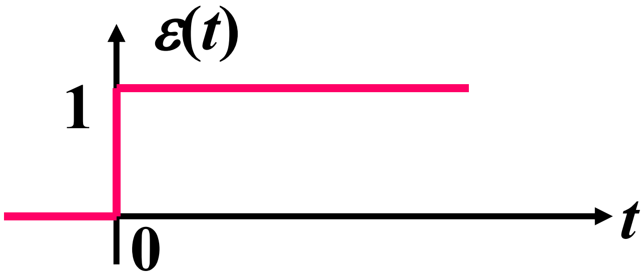
$$\begin{cases} \delta(t-t_0)=0 \quad (t \neq t_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\mathrm{d}t = 1 \end{cases}$$



4. $\delta(t)$与$\varepsilon(t)$的关系



$$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\mathrm{d}t$$



$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon(t)$$

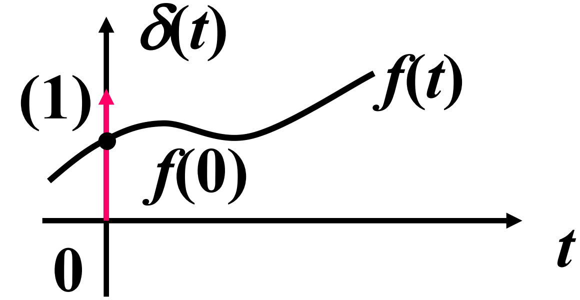
5. δ函数的筛分性（sampling property）

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t = f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t = f(0)$$

$f(0)\delta(t)$

同理有： $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)$$

* $f(t)$在 t_0 处连续



例 $$\int_{-\infty}^{\infty}(\sin t + t)\delta(t-\frac{\pi}{6})\mathrm{d}t$$

$$= \sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}+\frac{\pi}{6} = 1.02$$

广义函数的微分与积分

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\phi_k(t)\varepsilon(t-t_k)$$

微分：

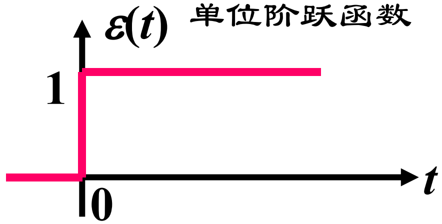
$$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dt}}=\sum_{k=1}^{n}(\phi_k^{'}(t)\varepsilon(t-t_k)+\phi_k(t)\varepsilon^{'}(t-t_k))=\sum_{k=1}^{n}(\phi_k^{'}(t)\varepsilon(t-t_k)+\phi_k(t)\delta(t-t_k))$$

积分：

$$\int_{-\infty}^{t}f(t)dt=\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{t}\phi_k(t)\varepsilon(t-t_k)dt=\sum_{k=1}^{n}[\int_{-\infty}^{t}\phi_k(t)dt]\varepsilon(t-t_k)$$

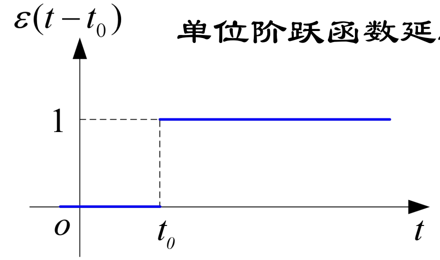
广义函数

单位阶跃函数



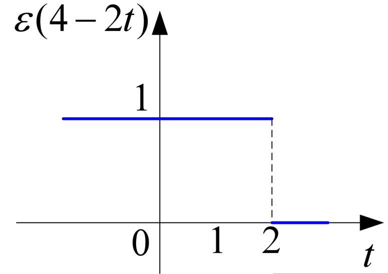
$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t>0)\end{cases}$$

单位阶跃函数延迟



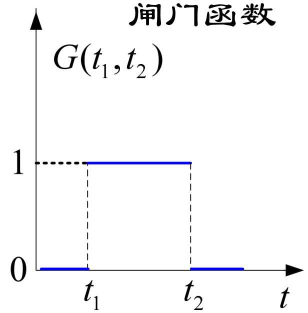
$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & (t<t_0)\\ 1 & (t>t_0)\end{cases}$$

单位阶跃函数反转



$$\varepsilon(4-2t)=\begin{cases}1 & (t<2)\\ 0 & (t>2)\end{cases}$$

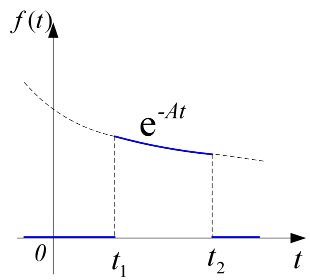
闸门函数



$$G(t_1,t_2)=\varepsilon(t-t_1)-\varepsilon(t-t_2)$$

$$=\varepsilon(t-t_1)\times\varepsilon(t_2-t)$$

闸门函数-截取



$$f(t)=G(t_1,t_2)e^{-At}$$

$$=e^{-At}[\varepsilon(t-t_1)-\varepsilon(t-t_2)]$$

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon(t)&=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\mathrm{d}t\\ \delta(t)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon(t)\end{aligned}}$$

分段波形广义函数

$$\boxed{f(t)=\sum_{k=1}^{n}\phi_k(t)\varepsilon(t-t_k)}$$

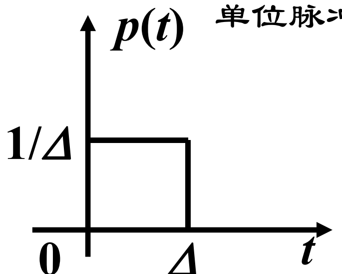
$$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dt}}=\sum_{k=1}^{n}(\phi_k'(t)\varepsilon(t-t_k)+\phi_k(t)\varepsilon'(t-t_k))$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\phi_k'(t)\varepsilon(t-t_k)+\phi_k(t)\delta(t-t_k))$$

$$\int_{-\infty}^{t}f(t)dt=\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{t}\phi_k(t)\varepsilon(t-t_k)dt$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[\int_{-\infty}^{t}\phi_k(t)dt]\varepsilon(t-t_k)$$

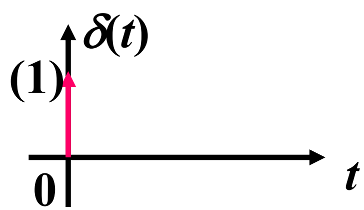
单位脉冲函数



$$p(t)=\frac{1}{\Delta}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\Delta)]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(t)\mathrm{d}t=1$$

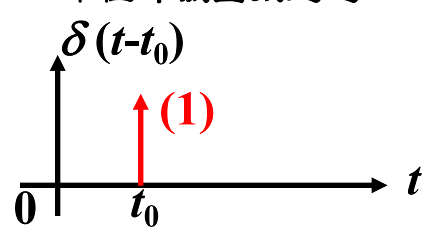
单位冲激函数



$$\delta(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 0 & (t>0)\end{cases}$$

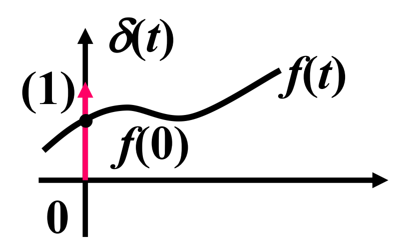
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

单位冲激函数延迟



$$\begin{cases}\delta(t-t_0)=0 & (t\neq t_0)\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=1\end{cases}$$

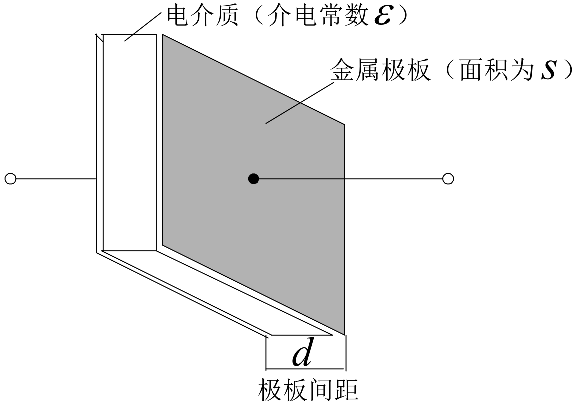
单位冲激函数筛分



$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=f(t_0)$$

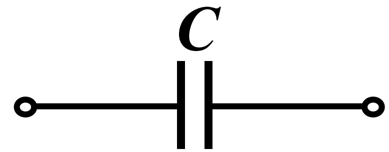
7.2 电容元件 (*capacitor*)

电容器

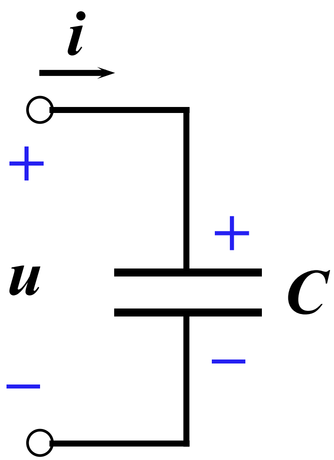


线性非时变电容元件

电路符号



1. 元件特性



描述电容的两个基本变量： u, q

对于线性电容，有： $q = Cu$

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{q}{u}$$

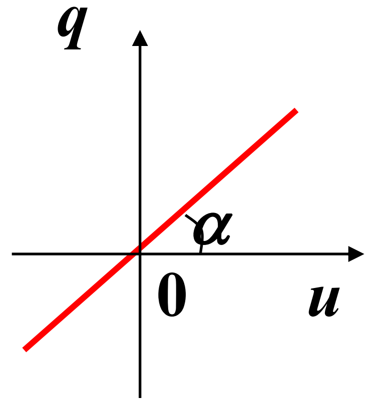
电容 C 的单位：法[拉]，

符号：F (Farad)

常用μF，pF等表示。

电容以电场形式存储能量。

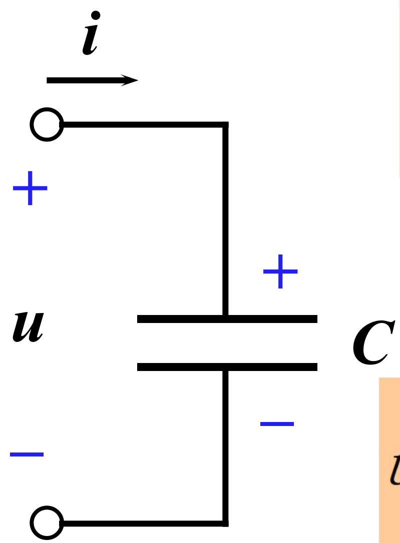
库伏（q-u）特性



$$C \propto \tan\alpha$$

2. 线性电容的电压、电流关系

关联参考方向



$$\boxed{i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}$$

- 电容中的电流与电压变化率成正比
- 电容中变化的电压才能形成电流

$$u(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,\mathrm{d}\tau$$

$$\boxed{u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,\mathrm{d}\tau}$$

初始电压

$$q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t} i\,\mathrm{d}\tau$$

动态元件

记忆元件

电容的电压-电流关系小结：

(1) i的大小与u的变化率成正比，与u的大小无关；

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

(2) 当 u 为常数(直流)时，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t=0 \rightarrow i=0$。电容在直流电路中相当于开路，电容有隔直作用；

(3) 电容元件是一种记忆元件

$$u(t)=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,\mathrm{d}\tau$$

(4) 电压连续性

$$u(t)=u(t_{0-})+\frac{1}{C}\int_{t_{0-}}^{t} i(t)\mathrm{d}t \xrightarrow{i(t_0)\neq\infty} u(t_{0-})=u(t_{0+})$$

(5) 表达式前的正、负号与u，i 的参考方向有关。当

u，i为关联方向时，$i= C\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$；

u，i为非关联方向时，$i= -C\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ 。

3. 电容(储能元件)的储能

$$p_{吸} = ui = u \cdot C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$W_C = \int_{-\infty}^{t} Cu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}Cu^2\Big|_{u(-\infty)}^{u(t)} = \frac{1}{2}Cu^2(t) - \frac{1}{2}Cu^2(-\infty)$$

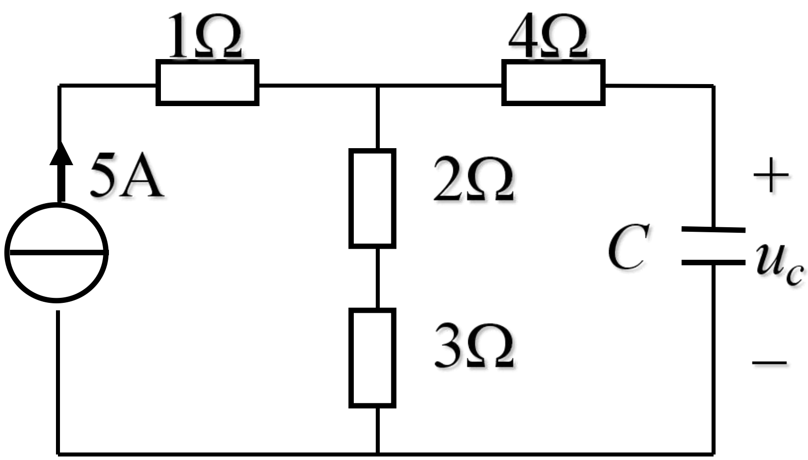
$$\overset{若u(-\infty)=0}{=} \frac{1}{2}Cu^2(t) = \frac{1}{2C}q^2(t) \geq 0$$

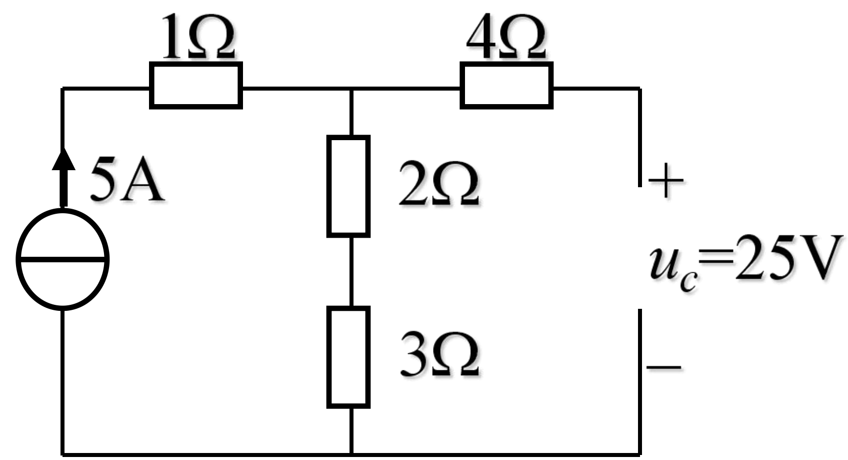
从t_0到 t 电容储能的变化量：

$$W_C = \frac{1}{2}Cu^2(t) - \frac{1}{2}Cu^2(t_0)$$

7.2 电容

Practice　　Find the voltage of the capacitor.

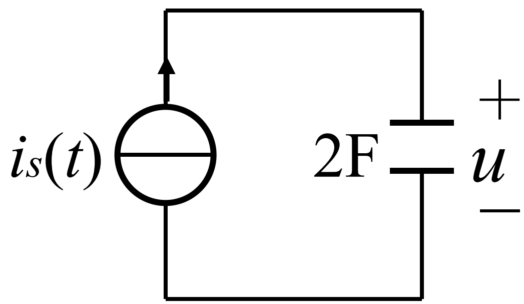


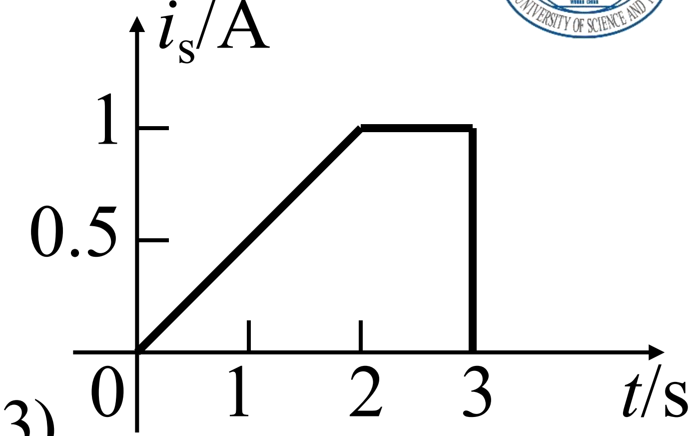


直流稳态电路中的电容相当于开路，其电流为0，电压恒定

Practice Find the voltage of the capacitor. $u_c(0\_) = 0$。

电容电流在t_0处为有限值，电容电压在t_0处连续



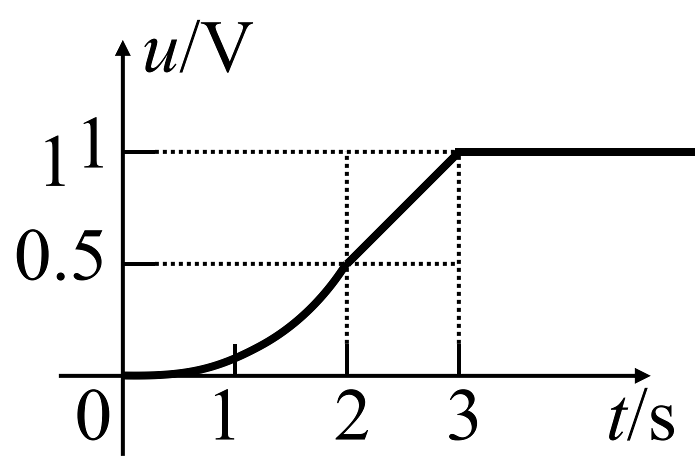


$$i_s(t) = 0.5t\varepsilon(t) + (1-0.5t)\varepsilon(t-2) - \varepsilon(t-3)$$

$$u(t) = u(0\_) + \frac{1}{2}\int_{0-}^{t} i_s dt$$

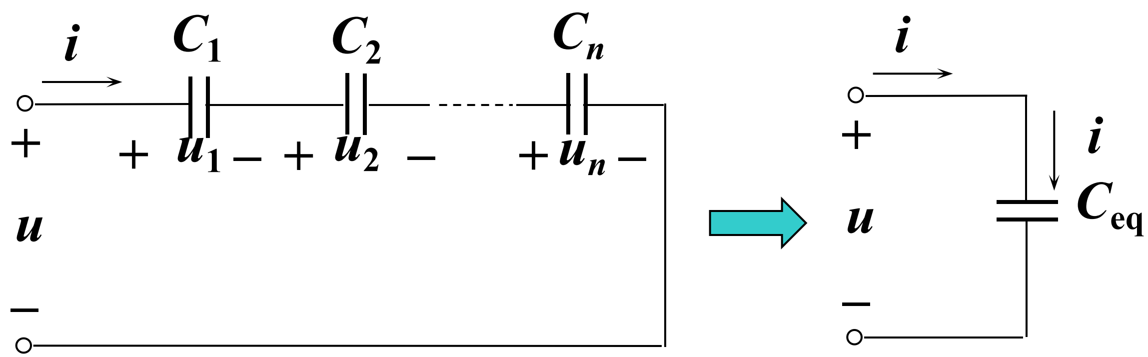
$$= \frac{1}{8}t^2\varepsilon(t) - \frac{1}{2}(\frac{1}{4}t^2 - t + 1)\varepsilon(t-2) - \frac{1}{2}(t-3)\varepsilon(t-3)$$

$$u(t) = \begin{cases} 0\ ; & (\infty < t \le 0) \\ \frac{1}{8}t^2; & (0 < t \le 2) \\ \frac{1}{2}(t-1); & (2 < t \le 3) \\ 1; & (t > 3) \end{cases}$$



4. 电容的串并联

（1）电容的串联



n个电容串联　　　　等效电容

由KVL，有　$u(t)=u_1(t)+u_2(t)+\cdots+u_n(t)$

代入各电容的电压、电流关系式，得

$$u(t)=\frac{1}{C_1}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau+u_1(0)+\frac{1}{C_2}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau+u_2(0)+\cdots+\frac{1}{C_n}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau+u_n(0)$$

$$=\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}\right)\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau+\sum_{k=1}^{n}u_k(0)$$

$$=\frac{1}{C_{\mathrm{eq}}}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau+u(0)$$

等效电容与各电容的关系式为

$$\frac{1}{C_{\mathrm{eq}}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_k}$$

$$u(0)=\sum_{k=1}^{n}u_k(0)$$

结论：n个串联电容的等效电容值的倒数等于各电容值的倒数之和。

当两个电容串联（n=2）时，等效电容值为

$$C_{\mathrm{eq}}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

串联电容分压关系

$$u(t)=\frac{1}{C_1}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau+u_1(0)+\frac{1}{C_2}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau+u_2(0)+\cdots+\frac{1}{C_n}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau+u_n(0)$$

$$=\frac{1}{C_{\mathrm{eq}}}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau+u(0)$$

取简单情形， $u_k(0_-)=0$，

$$\frac{u_k}{u}=\frac{1/C_k}{1/C_{eq}}$$

当两个电容串联（n=2）时，等效电容值为

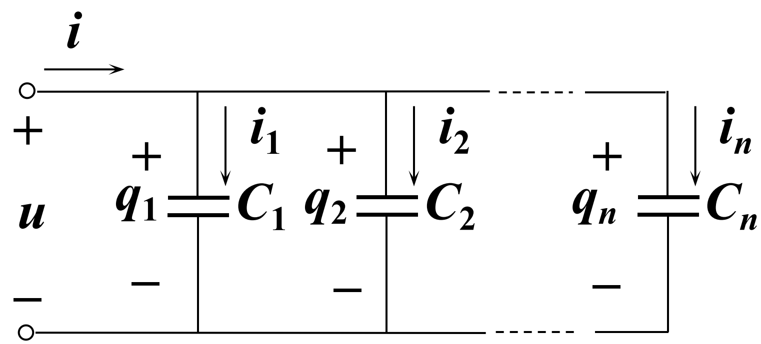
$$C_{\mathrm{eq}}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\qquad \frac{u_1}{u}=\frac{1/C_1}{1/C_{eq}}=\frac{C_2}{C_1+C_2}$$

当各电容初始电压不为零， $u_k(0_-)\neq 0$，

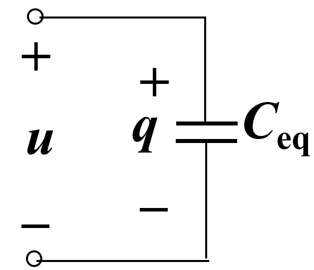
?

p.237 例7-3-3

（2）电容的并联



*n*个电容并联



等效电容

由KCL，有 $i = i_1 + i_2 + \cdots + i_n$

代入各电容的电压、电流关系式，得

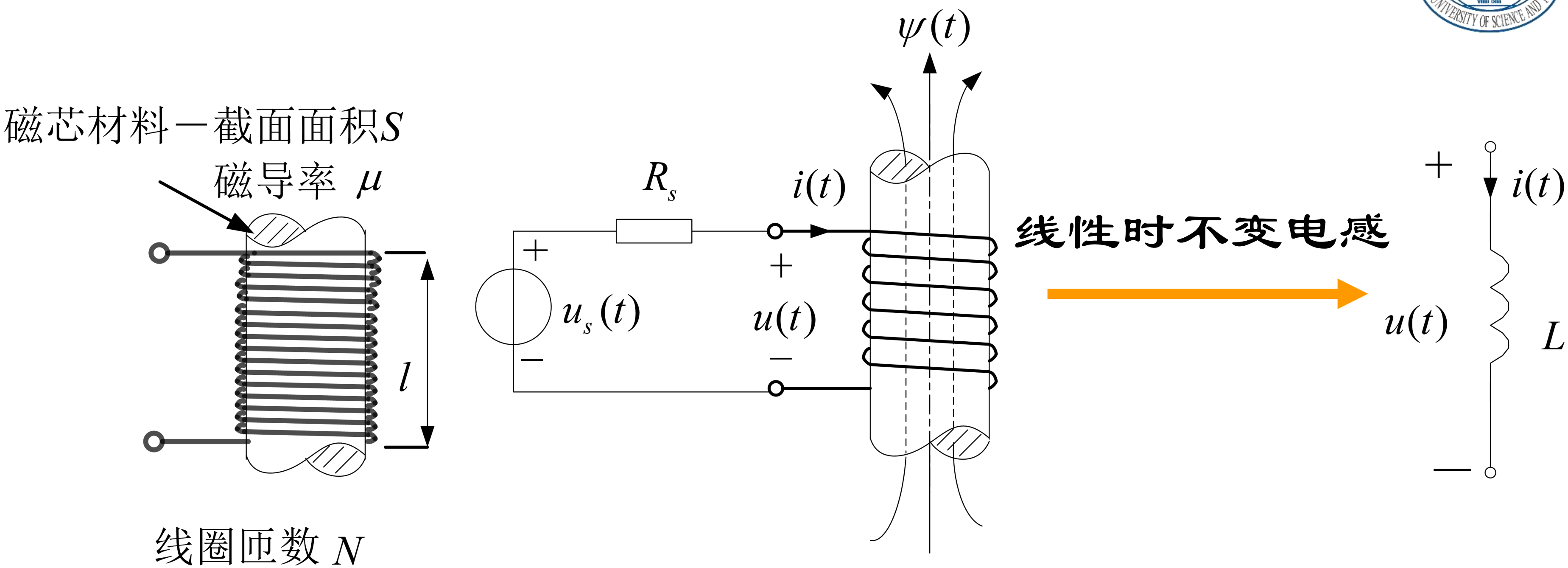
$$\begin{aligned} i(t) &= C_1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + C_2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \cdots + C_n \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \\ &= (C_1 + C_2 + \cdots + C_n) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \\ &= C_{eq} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

等效电容与各电容的关系式为

$$\begin{aligned} C_{eq} &= C_1 + C_2 + \cdots + C_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} C_k \end{aligned}$$

结论：*n*个并联电容的等效电容值等于各电容值之和。

7.3 电感



1. 线性时不变电感元件

$$L \overset{\text{def}}{=} \frac{\Psi}{i}$$

$\Psi = N\,\Phi$ 为电感线圈的磁链单位（Wb）

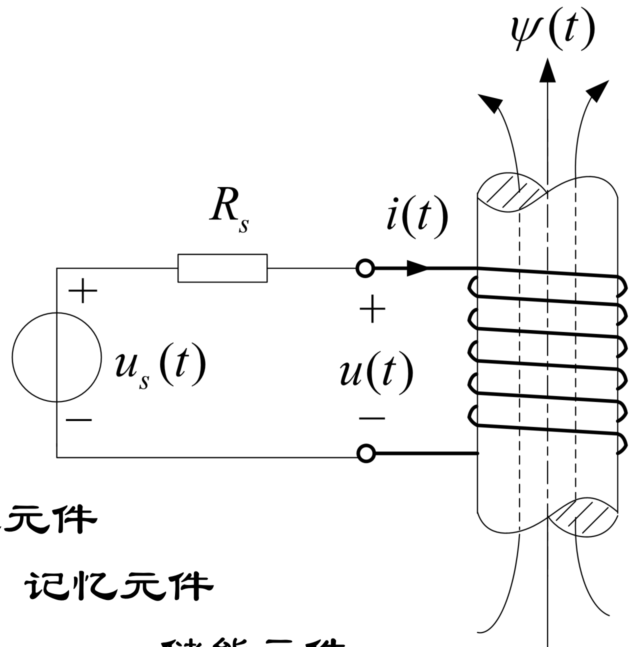
L 称为电感量、自感系数

inductance

L 的单位名称：亨[利] 符号：H （Henry）

电感以<u>磁场形式存储能量</u>。

2. 线性电感电压、电流关系：



由电磁感应定律与楞次定律

$$u = \frac{d\psi}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

$$L \overset{\text{def}}{=} \frac{\Psi}{i}$$

- 线性电感中电压与电流的变化率成正比
- 电流变化产生电压

动态元件

记忆元件

储能元件

初始电流

$$\int_{t_0}^{t}\frac{di}{dt}dt = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u\mathrm{d}\tau = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0} u\mathrm{d}\tau + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} u\mathrm{d}\tau = i(0) + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} u\mathrm{d}\tau$$

$$\boxed{i(t) = i(0) + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} u\mathrm{d}\tau}$$

$$\Psi = \Psi(0) + \int_{0}^{t} u\mathrm{d}\tau$$

电感电压在t_0处为有限值时，电感电流在t_0处连续

电感的电压-电流关系小结：

（1） u的大小与 i 的变化率成正比，与 i 的大小无关；

（2） 当 i 为常数(直流)时，$\mathrm{d}i\ /\ \mathrm{d}t=0 \rightarrow u=0$，
电感在直流电路中相当于短路；

（3） 电感元件是一种记忆元件；

（4）电流连续性

$$i(t)=i(t_{0-})+\frac{1}{L}\int_{t_{0-}}^{t}u(t)\mathrm{d}t \xrightarrow{u(t_0)\neq\infty} i(t_{0-})=i(t_{0+})$$

(5) 当 ***u***，***i*** 为关联方向时，***u*=*L* di / d*t***；

u，***i*** 为非关联方向时，***u*= – *L* di / d*t*** 。

3. 电感的储能

$$p_{吸}=ui=i\,L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

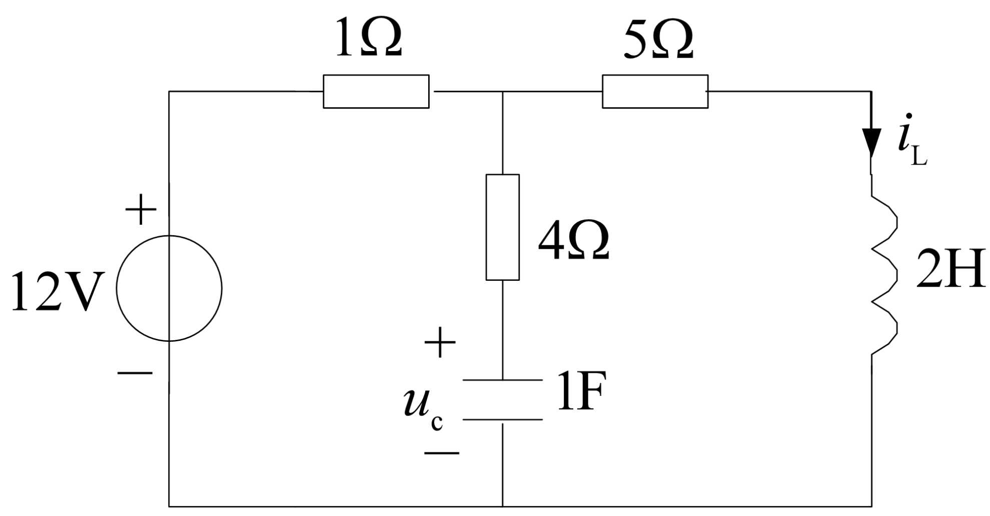
$$W_{吸}=\int_{-\infty}^{t}Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}Li^{2}\Big|_{i(-\infty)}^{i(t)}=\frac{1}{2}Li^{2}(t)-\frac{1}{2}Li^{2}(-\infty)$$

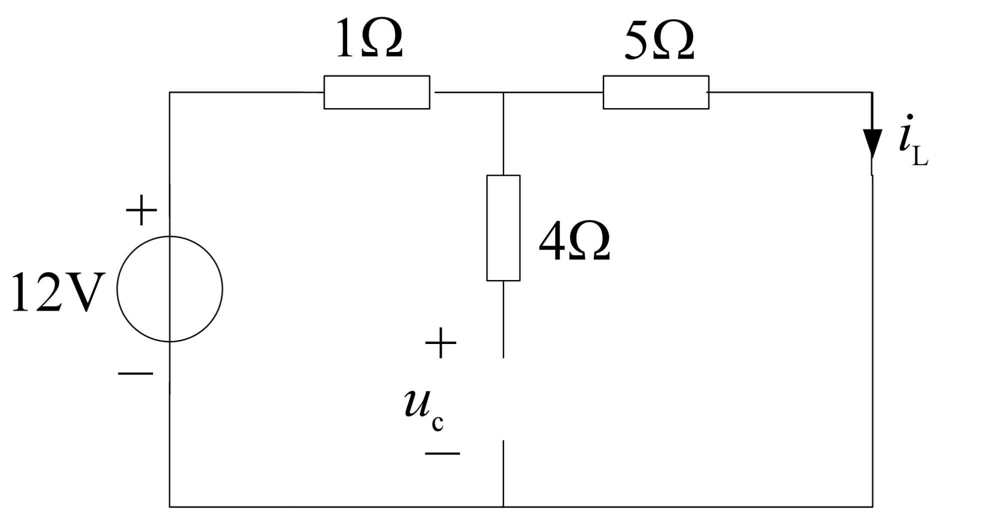
$$\overset{若i(-\infty)=0}{=}\frac{1}{2}Li^{2}(t)=\frac{1}{2L}\Psi^{2}(t)\geq 0$$

从t_0到t电感储能的变化量：

$$W_{L}=\frac{1}{2}Li^{2}(t)-\frac{1}{2}Li^{2}(t_{0})$$

Practice Find the voltage of the capacitor and the current of the inductor.





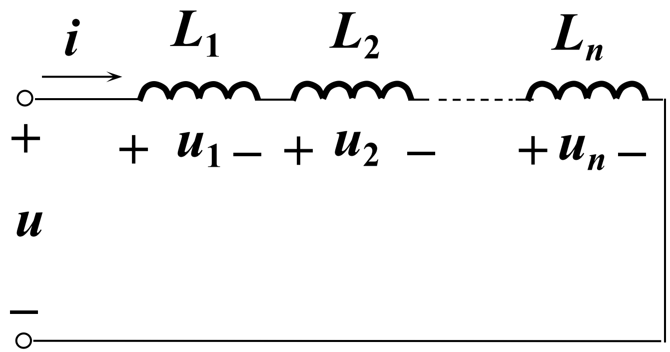
$$i_L = \frac{12}{1+5} = 2\text{A}$$

$$u_c = \frac{5}{1+5} \times 12 = 10\text{V}$$

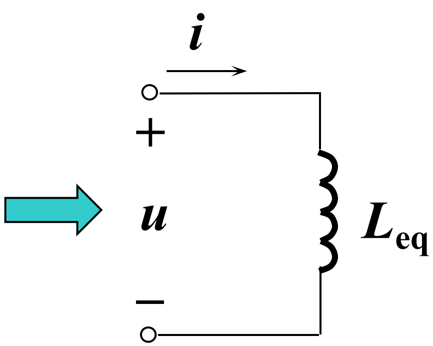
4. 电感的串并联

（1）电感的串联

等效电感初始电流$i_k(0_+)=i_k(0_-)=I_0$



n个电感串联



等效电感

根据KVL和电感的电压电流的关系，有

$$u=u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$$

$$=L_1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+L_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\cdots+L_n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{n}\left(L_k\frac{di}{dt}\right)$$

$$=(L_1+L_2+\cdots+L_n)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{n}(L_k)\times\frac{di}{dt}$$

$$=L_{eq}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

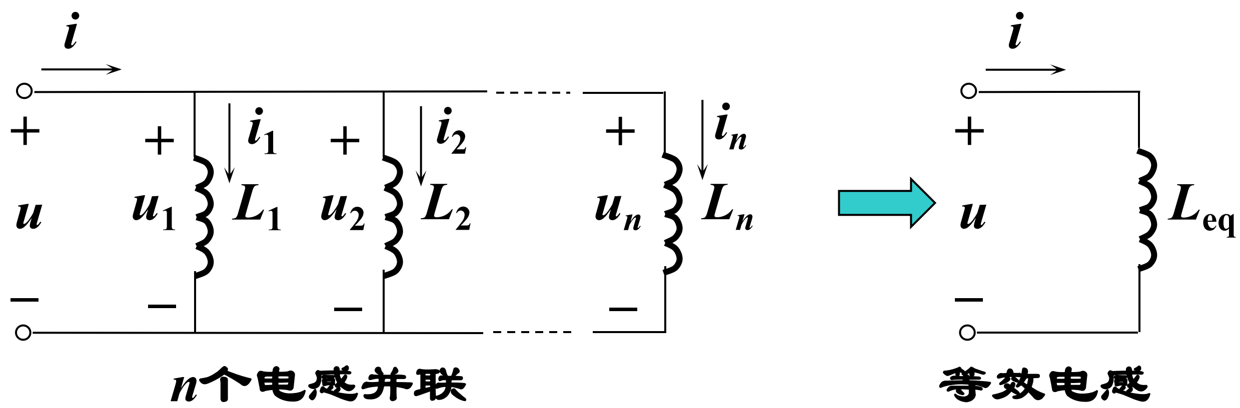
等效电感与各电感的关系式为

$$L_{eq}=L_1+L_2+\cdots+L_n$$

$$=\sum_{k=1}^{n}L_k$$

结论：n个串联电感的等效电感值等于各电感值之和。

(2) 电感的并联



根据KCL及电感的电压与电流的关系式，有

$$i(t)=i_1(t)+i_2(t)+\cdots+i_n(t)$$

$$=\frac{1}{L_1}\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau+i_1(0)+\frac{1}{L_2}\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau+i_2(0)+\cdots+\frac{1}{L_n}\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau+i_n(0)$$

$$=(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+\cdots+\frac{1}{L_n})\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau+i_1(0)+i_2(0)+\cdots+i_n(0)$$

等效电感

$$=\frac{1}{L_{eq}}\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau+i(0)$$

等效电感初始电流

$$i(0_+)=\sum_{k=1}^{n} i_k(0_+)=\sum_{k=1}^{n} i_k(0_-)$$

等效电感与各电感的关系式为

$$\frac{1}{L_{\mathrm{eq}}}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+\cdots+\frac{1}{L_n}$$

$$i(0)=\sum_{k=1}^{n} i_k(0)$$

结论：n个并联电感的等效电感值 的倒数等于各电感值倒数之和。

当两个无储能电感并联（n=2）时，等效电感值为

$$L_{\mathrm{eq}}=\frac{L_1L_2}{L_1+L_2}$$

$$\frac{i_1}{i}=\frac{1/L_1}{1/L_{eq}}=\frac{L_2}{L_1+L_2}$$

有储能？P.247 例7-4-3

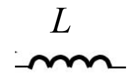
电容、电感小结（1）

- **电容**  单位法[拉]F
- $q = Cu$ 线性非时变电容
- 动态元件——i的大小与u的变化率成正比，与u的大小无关

$$i = C\frac{du}{dt}$$

记忆元件 $$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,\mathrm{d}\tau$$

储能元件 $$W_C = \frac{1}{2}Cu^2(t) - \frac{1}{2}Cu^2(t_0)$$

- **电感**  单位亨[利]H
- $\psi = Li$ 线性非时变电感
- 动态元件——u的大小与i的变化率成正比，与i的大小无关

$$u = \frac{d\psi}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

记忆元件 $$i(t) = i(0) + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} u\,\mathrm{d}\tau$$

储能元件 $$W_L = \frac{1}{2}Li^2(t) - \frac{1}{2}Li^2(t_0)$$

- 当 u 为常数(直流)时，du/dt =0, i=0。电容在直流稳态电路中相当于开路，电容有**隔直**作用。
- 电容电流在t_0处为有限值，电容电压在t_0处连续；电容电流在t_0处为无限大，电容电压在t_0处跳变。

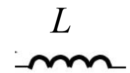
$$u(t_{0+}) = u(t_{0-}) + \frac{1}{C}\int_{t_{0-}}^{t_{0+}} i\,\mathrm{d}\tau$$

- 当 i 为常数(直流)时，di/dt =0, u=0。电流在直流稳态电路中相当于短路，电感有**通直**作用。
- 电感电压在t_0处为有限值，电感电压在t_0处连续；电感电压在t_0处为无限大，电感电压在t_0处跳变。

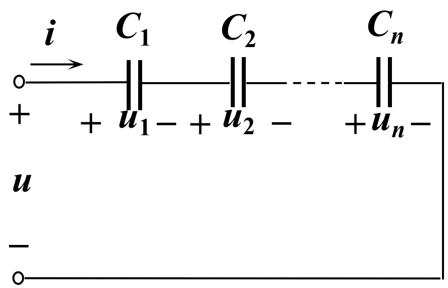
$$i(t_{0+}) = i(t_{0-}) + \frac{1}{L}\int_{t_{0-}}^{t_{0+}} u\,\mathrm{d}\tau$$

电容、电感小结（2）

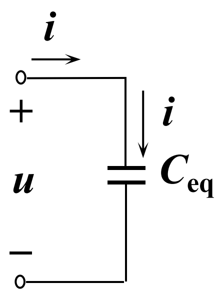
- 电容  单位法[拉]F

- 电感  单位亨[利]H

- 串联



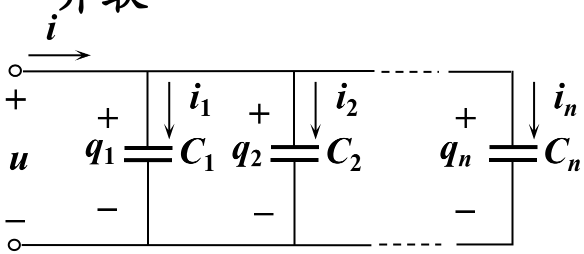
n个电容串联



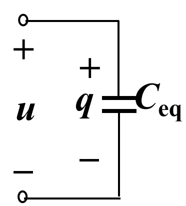
等效电容

$$\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_k}\qquad u(0)=\sum_{k=1}^{n}u_k(0)$$

- 并联



n个电容并联

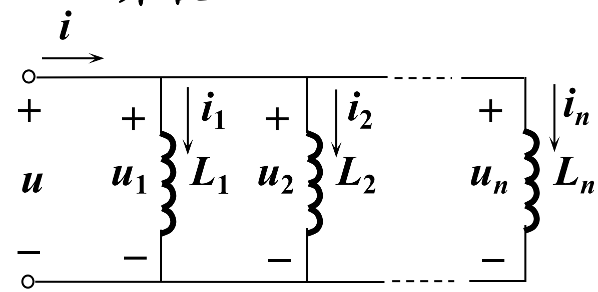


等效电容

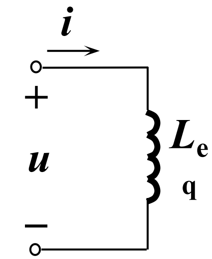
$$C_{eq}=C_1+C_2+\cdots+C_n$$

$$=\sum_{k=1}^{n}C_k$$

- 并联



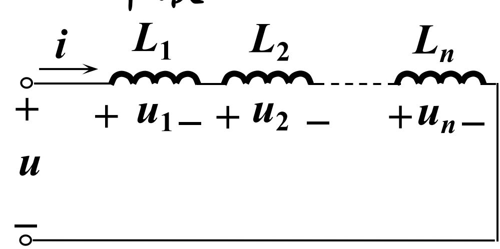
n个电感并联



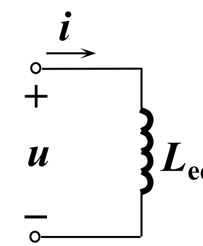
等效电感

$$\frac{1}{L_{eq}}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+\cdots+\frac{1}{L_n}\qquad i(0)=\sum_{k=1}^{n}i_k(0)$$

- 串联



n个电感串联



等效电感

$$L_{eq}=L_1+L_2+\cdots+L_n$$

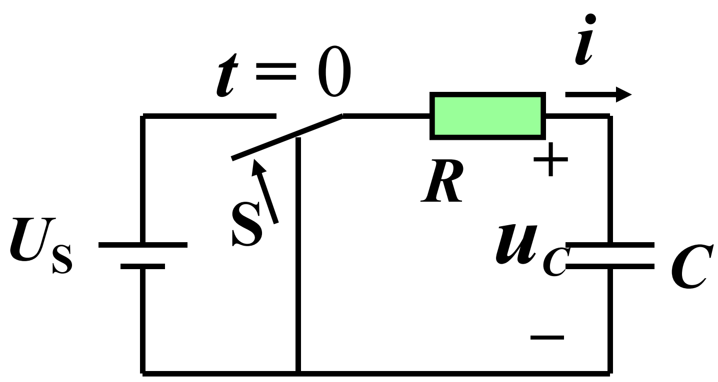
$$=\sum_{k=1}^{n}L_k$$

7.4 动态电路的暂态分析概述

1. 什么是电路的过渡过程

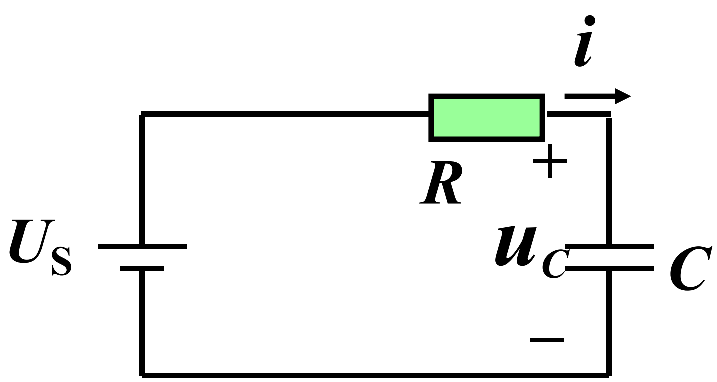
稳态分析

稳定状态



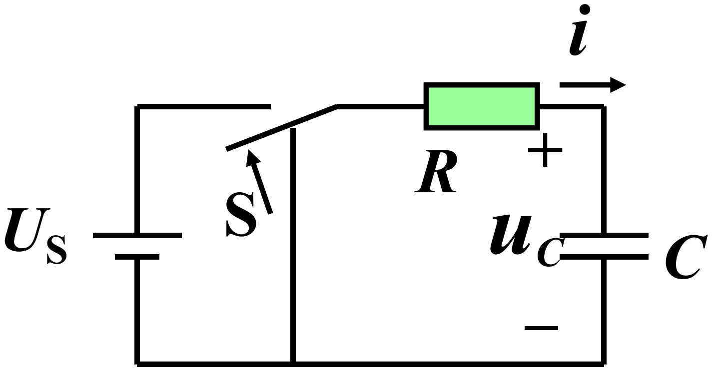
S未动作前

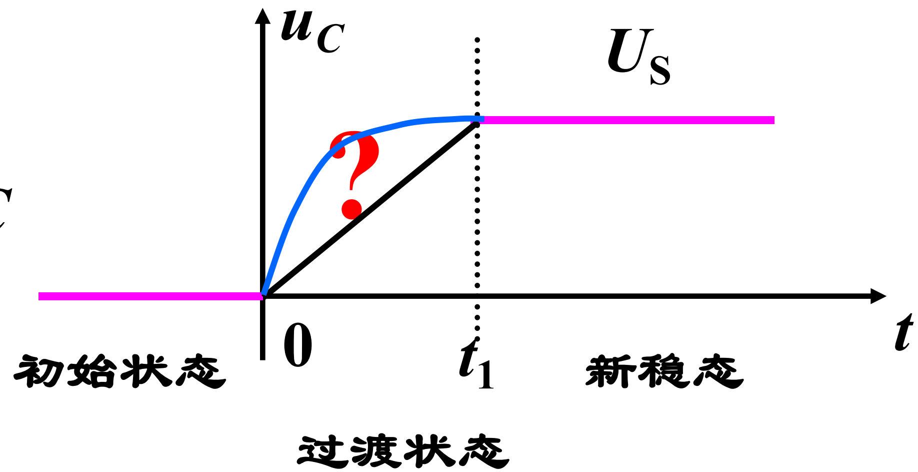
$i = 0$ ，$u_C = 0$



S接通电源后很长时间

$i = 0$ ，$u_C = U_S$





过渡过程：电路由一个稳态过渡到另一个稳态需要经历的过程。

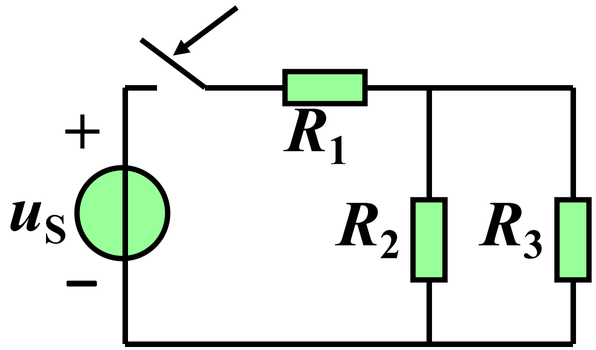
过渡状态（瞬态、暂态）

2. 过渡过程产生的原因

(1) 电路内部含有储能元件

能量的储存和释放都需要一定的时间来完成。

$$p = \frac{\Delta w}{\Delta t}$$



(2) 电路结构发生变化

$\underbrace{\text{支路接入或断开；参数变化}}_{\text{换路}}$

3. 稳态分析和暂态分析的区别

稳　　态	暂　　态
换路发生很长时间后	换路刚刚发生
I_L、U_C 不变	i_L、u_C 随时间变化
代数方程组描述电路	微分方程组描述电路

2. 微分方程 Differential equation

依据：KCL、KVL和元件约束。

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

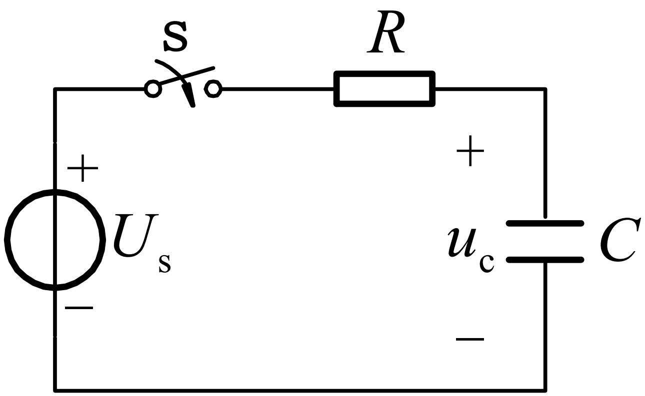
$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u_L \mathrm{d}t + i_L(t_0)$$

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C \mathrm{d}t + u_C(t_0)$$

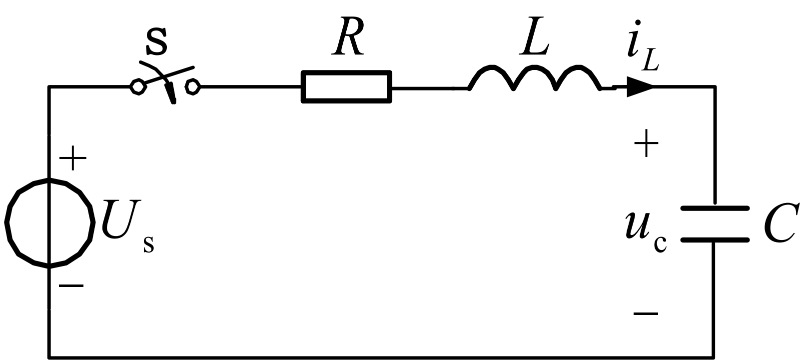
7.4 动态电路的暂态分析概述

2. 微分方程 Differential equation



$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_s \qquad t>0$$

一阶微分方程 → 一阶电路

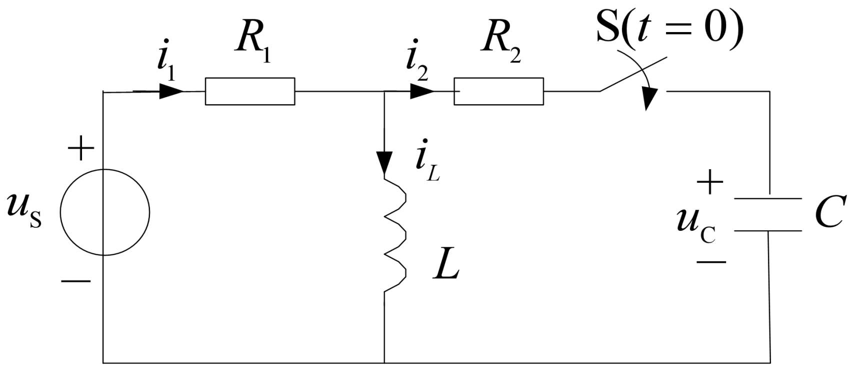


$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)+u_C=U_s \qquad t>0$$

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_s$$

二阶微分方程 → 二阶电路

Practice 列写微分方程



KVL 、KCL:

$$u_\mathrm{s} = R_1\left(i_L + C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right) + \boxed{L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}}$$

$$\boxed{L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}} = R_2C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C$$

$$u_\mathrm{s} = R_1\left(i_L + C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right) + R_2C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = R_1 i_L + (R_1+R_2)C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C$$

$$\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t} = R_1\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + (R_1+R_2)C\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t} = \frac{R_1}{L}\left(R_2C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C\right) + (R_1+R_2)C\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

$$(R_1+R_2)C\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{R_1R_2C}{L}+1\right)\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1}{L}u_C = \frac{\mathrm{d}u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t}$$

n阶线性时不变动态电路的微分方程：

激励 $f(t)$　　　　响应 $y(t)$

$$\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\dots a_{n-1}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+a_n y(t)=f(t)$$

经典法	时域分析法
拉普拉斯变换法	复频域分析法
状态变量法	时域分析法
数值法	

$$\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_1 \frac{\mathrm{d}^{n-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots a_{n-1} \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a_n y(t) = f(t)$$

解的形式： $y(t) = y_h(t) \quad + \quad y_p(t)$

$\downarrow$ 齐次方程通解 $\downarrow$

$\downarrow$ 非齐次方程特解 $\downarrow$

$$y_h(t) = \sum_{a=1}^{n} k_a e^{s_a t}$$

t→∞稳态解

$\downarrow$

$$n = 1: \quad y_h(t) = k_1 e^{s_1 t}$$

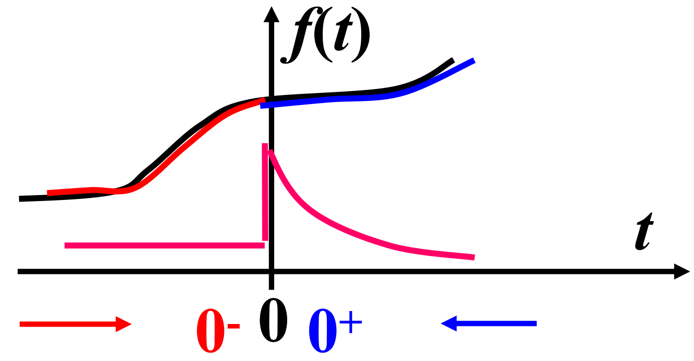
$$n = 2: \quad y_h(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

系数k的确定：初始条件

$$\mathrm{y}(0_+), \left.\frac{dy}{dt}\right|_{0+}, \left.\frac{d^2 y}{dt^2}\right|_{0+}, \ldots\ldots, \left.\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}\right|_{0+}$$

3 动态电路的初始条件

一、$t=0^+$与$t=0^-$的概念



换路在 t=0时刻进行

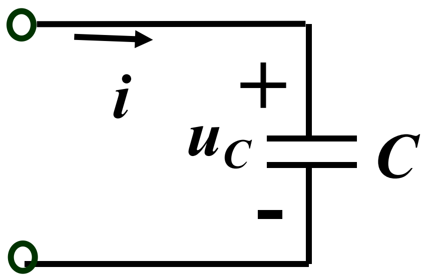
0^- $t=0$ 的前一瞬间

0^+ $t=0$ 的后一瞬间

$$f(0^-)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} f(t) \qquad f(0^+)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t)$$

初始条件就是 $t=0^+$时u， i 及其各阶导数的值。

二、换路定律



$$u_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0^-} i(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=u_C(0^-)+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

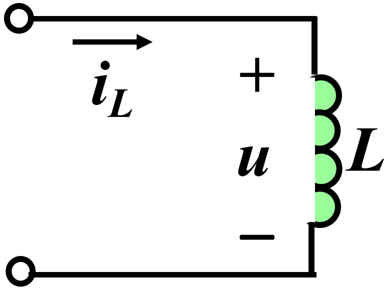
$q=C\,u_C$ $\qquad$ $q(t)=q(0^-)+\int_{0^-}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$

$t=0^+$时刻 $\qquad$ $u_C(0^+)=u_C(0^-)+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{0^-}^{0^+} i(\xi)\mathrm{d}\xi$

$$q(0^+)=q(0^-)+\int_{0^-}^{0^+} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

当$i(\xi)$为有限值时 $\qquad$ $u_C(0^+)=u_C(0^-)$

$\int_{0^-}^{0^+} i(\xi)\mathrm{d}\xi=0$ $\qquad$ $q(0^+)=q(0^-)$ $\qquad$ 电荷守恒



$$u = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \qquad i_L = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$i_L = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0^-} u(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{L}\int_{0^-}^{t} u(\xi))\mathrm{d}\xi$$

$$= i_L(0^-) + \frac{1}{L}\int_{0^-}^{t} u(\xi)d\xi$$

$$\Psi = Li_L \qquad \Psi = \Psi(0^-) + \int_{0^-}^{t} u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

当u为有限值时 $i_L(0^+) = i_L(0^-)$

$\Psi_L(0^+) = \Psi_L(0^-)$ 磁链守恒

换路定律成立的条件!!!

换路定律

$$\begin{cases} q_c(0_+) = q_c(0_-) \\ u_C(0_+) = u_C(0_-) \end{cases}$$

换路瞬间，若电容电流保持为有限值，则电容电压（电荷）换路前后保持不变。

$$\begin{cases} \psi_L(0_+) = \psi_L(0_-) \\ i_L(0_+) = i_L(0_-) \end{cases}$$

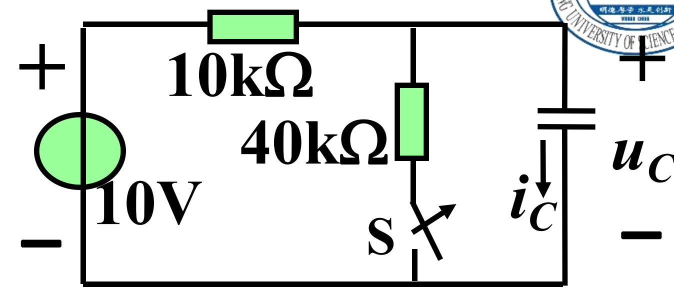
换路瞬间，若电感电压保持为有限值，则电感电流（磁链）换路前后保持不变。

注意 ①电容电流和电感电压为有限值是换路定律成立的条件。

②换路定律反映了能量不能跃变。

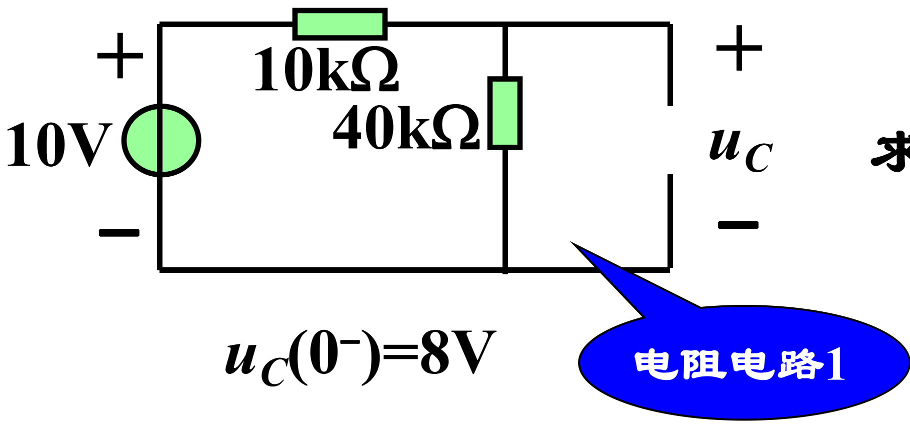
三、电路初始值的确定

例1



求 $i_C(0^+)$。

(1) 由0⁻电路求 $u_C(0^-)$

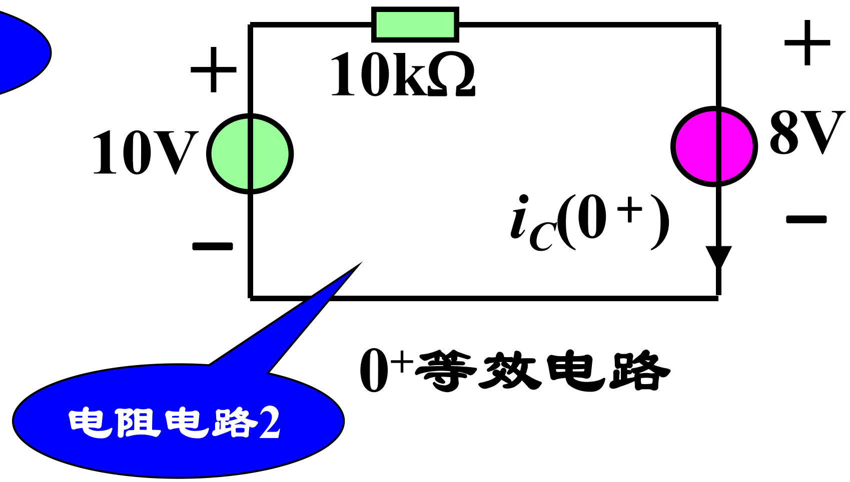


$u_C(0^-)=8\text{V}$

$i_C(0^-)=0\text{A}$

(2) 由换路定律

$$u_C(0^+) = u_C(0^-)=8\text{V}$$



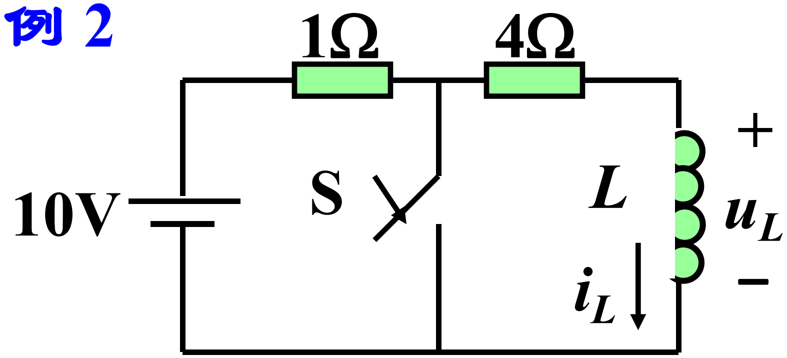
0^+等效电路

(3) 由0^+等效电路求 $i_C(0^+)$

$i_C(0^-)=0 \neq i_C(0^+)$

$$i_C(0^+) = \frac{10-8}{10} = 0.2\text{mA}$$

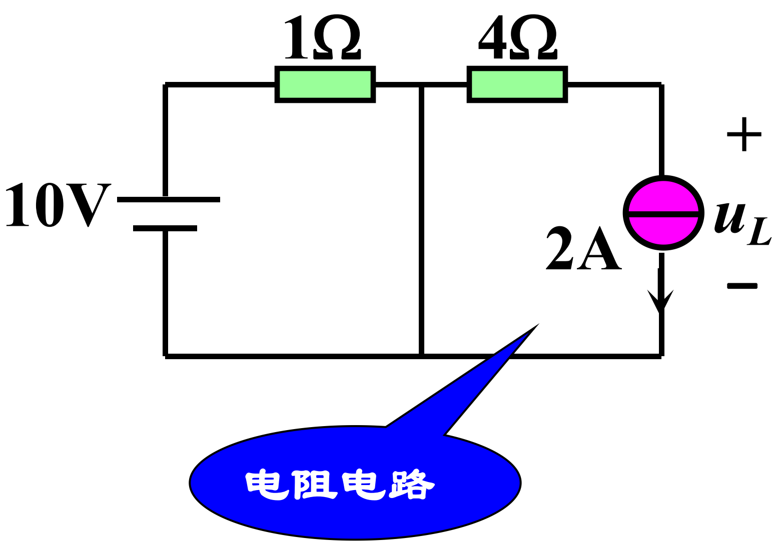
例 2



$t=0$时闭合开关S，求 $u_L(0^+)$。

$\because u_L(0^-)=0 \quad \therefore u_L(0^+) \cancel{=} 0$

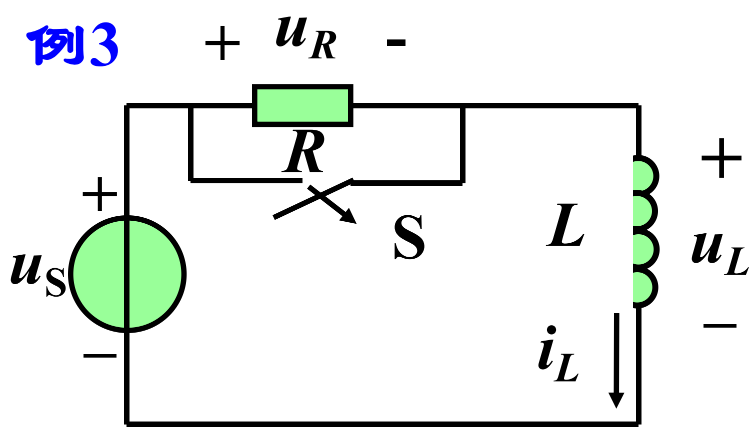
0^+电路



$i_L(0^+)= i_L(0^-) =2A$

$u_L(0^+) = -2\times 4 = -8V$

例3



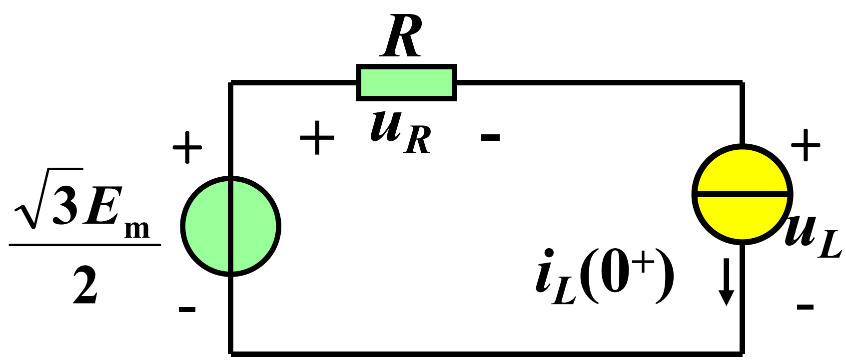
已知 $u_S = E_m \sin(\omega t + 60^\circ)$V,

$$i_L(0^-) = -\frac{E_m}{2\omega L}.$$

求 $i_L(0^+)$, $u_L(0^+)$, $u_R(0^+)$.

(1) $i_L(0^+) = i_L(0^-) = -\dfrac{E_m}{2\omega L}$

(2) 0^+时刻电路:



$$u_R(0^+) = i_L(0^+)R = \frac{-RE_m}{2\omega L}$$

$$u_L(0^+) = \frac{\sqrt{3}E_m}{2} - \frac{-RE_m}{2\omega L}$$

小结——求初始值的步骤:

1. 由换路前电路（稳定状态）求 $u_C(0^-)$ 和 $i_L(0^-)$。

电阻电路(直流)

2. 由换路定律得 $u_C(0^+)$ 和 $i_L(0^+)$。

3. 画出0^+时刻的等效电路。

（1） 画换路后电路的拓扑结构；

（2） 电容（电感）用电压源（电流源）替代。

取0^+时刻值，方向同原假定的电容电压、电感电流方向。

电阻电路

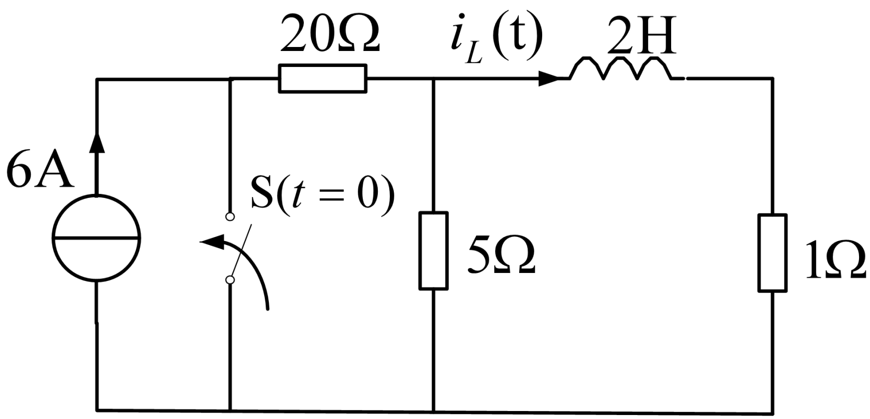
4. 由0^+电路求其它各变量的0^+值。

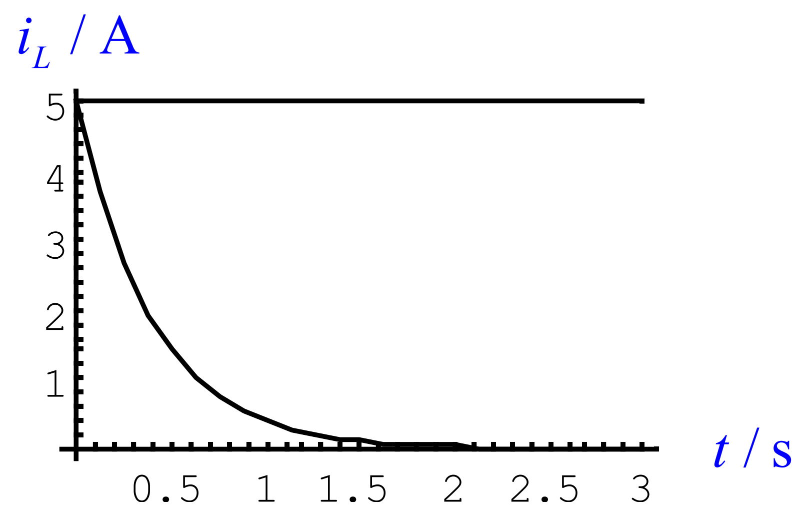
动态电路经典时域分析：

微分方程 Differential equation

初始值 Initial value

→ 方程解 solution





$$2\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+1\times i_L+\frac{5\times 20}{5+20}\times i_L=0$$

$$2\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+5i_L=0$$

$$i_L(0_-)=\frac{5}{1+5}\times 6=5\mathrm{A}$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=5\mathrm{A}$$

$$i_L(t)=ke^{pt}+i_p$$

$$p=-\frac{5}{2} \qquad i_L(t)=ke^{-\frac{5}{2}t} \qquad k=5$$

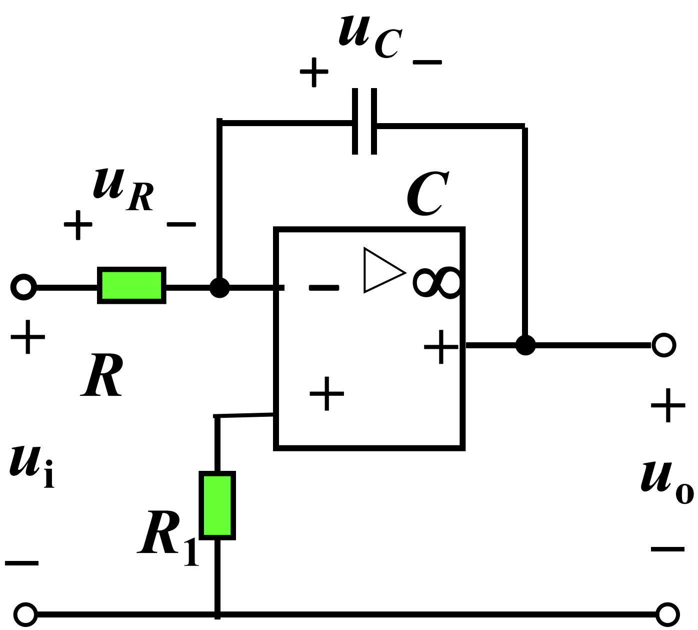
$$i_L(t)=5e^{-\frac{5}{2}t}\ \mathrm{A} \quad t>0$$

暂态分析概述小结

- 动态电路**暂态分析**，就是根据KCL、KVL和VCR建立电路响应的**微分方程**，并确定求解微分方程所需的**初始条件**和**特解稳态值**。
- 动态电路的**初始条件的确定**是动态电路 分析的重点和难点：
- t=0$_-$ 电路中，确定原始状态 $u_c(0_-)$和$i_L(0_-)$；
- 换路后，通常依据**换路规律**确定初始状态 $u_c(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$;
- t=0$_+$ 电路中，确定所需**非状态变量**及其导数的**初始值**。

4. 用Op Amp构成微分器和积分器（不要求）

（1）积分器



$$\frac{u_R}{R}=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

$$u_o=-u_C$$

$$\frac{u_i}{R}=-C\frac{\mathrm{d}u_o}{\mathrm{d}t}$$

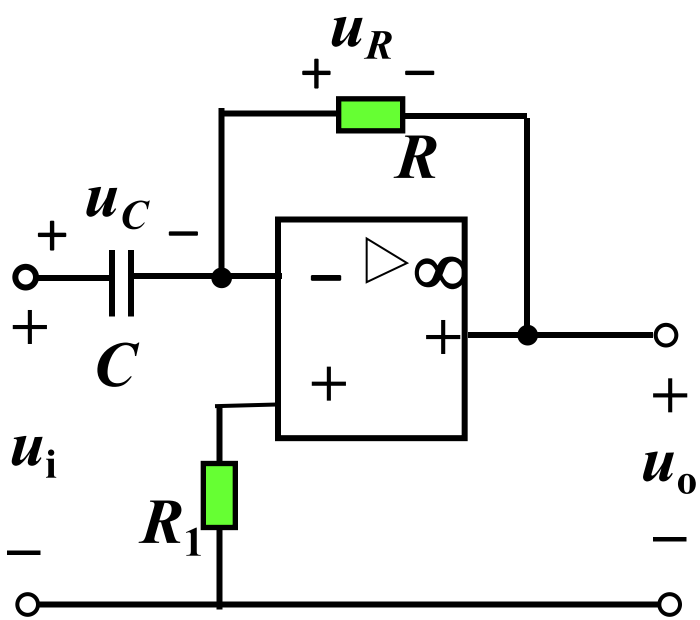
$$u_o=-\frac{1}{RC}\int u_i\mathrm{d}t$$

如果$u_i=U_S$（常数），则

$$u_o=-\frac{U_S}{RC}t$$

线性函数

（2）微分器



$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\frac{u_R}{R}$$

$$u_o=-u_R$$

$$C\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{u_o}{R}$$

$$u_o=-RC\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}$$

如果$u_i = t\,U_S$（线性函数），则

$$u_o=-RCU_S$$

常数

作业

- 7.2节：7-2
- 7.3节：7-15，7-18*
- 7.4节：7-26，7-31*
- 7.5节：7-35、7-36
- 4月2日周六，3-4节交作业。7-18和7-31