期末试题（3）(150 分钟内完成)

一、填空题（每空 4 分，共 28 分）

1、设 $\vec{F}=\{\sin x\cos y,\sin y\cos z,\sin z\cos x\}$，则 $rot\vec{F}=$______________________.

2、级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln x+\frac{1}{n}\right)^{n}$ 的收敛域是______________.

3、曲线 $\vec{r}(t)=\{1-\sin t,1-\cos t,t\}$ 的曲率 $\kappa=$____________.

4、函数 $f(x)=\begin{cases}1, 0\le x\le h,\\ 0, h<x\le\pi\end{cases}$ 在 $[0,\pi]$ 上的正弦级数是________________________.

5、交换积分次序后，$\int_{-1}^{1}dx\int_{x^3}^{1}f(x,y)dy=$______________________.

6、函数 $f(x,y)=x^2+y^2+8x$ 在 $D:x^2+y^2\le16$ 上的最大值是____________,

最小值是 ____________.

7、直线 $L:x=2t,y=1,z=t$ 绕 z 轴旋转一周所得的曲面方程是__________________.

二、判断题(每小题 2 分，共 8 分).请在正确说法相应的括号中画“√”，在错误说法的括号中画“×”.

8. 若级数发散，则对其任意加括号后所得级数也必发散. ( )

9. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. ( )

10. 设 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，它关于 xoy 坐标面对称，所以第二型曲面积分

$\iint_S z^{2017}dxdy=0$. ( )

11. 若在点 (x_0,y_0) 的某邻域内 $f(x,y)$ 的两个偏导函数连续，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 沿任意方向的方向导数都存在. ( )

三、解答题（每小题 6 分，共 12 分）

12. 计算 $I=\oint_L ydx+zdy+xdz$，其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=4z$ 与平面 $x+z=2$ 的交线，从 z 轴正向看去为逆时针方向.

13. 设 $D=\{(x,y)\,|\,(x^2+y^2)^2\le 2(x^2-y^2)\}$，求 $\iint_D (x+y)^2dxdy$.

四、计算题（每小题 7 分，共 28 分）

14．求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{(2n)!!}x^n$ 的收敛域及和函数.

15. 设 L 为圆柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=y$ 的交线，计算曲线积分 $\int_L z^2ds$，并将结果用 B 函数表示.

16. 设 S 是圆柱面 $x^2+y^2=1$ 介于平面 $z=0$ 和 $z=1$ 之间部分的外侧，试计算第二型曲面积分 $I=\iint_S (y-z)xdydz+(x-y)zdxdy$.

17. 计算 $I=\int_L \dfrac{(y-1)dx-xdy}{x^2+(y-1)^2}$，其中 L 是椭圆 $x^2+2y^2=4$，沿逆时针方向.

五、证明题（每小题 8 分，共 24 分）

18. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\arctan\dfrac{x}{n}$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内一致收敛.

19.设曲面 S 方程由 $F(x,y,z)=0$ 确定，其中 $F(x,y,z)$ 具有连续的偏导数，且 $F_z'\ne 0$，又 S 可一对一地投影到 xOy 面的区域 D，证明：S 的面积 $A=\iint\limits_D \dfrac{\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}}{|F_z'|}dxdy$.

20. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域 $N((x_0,y_0))$ 内具有二阶连续偏导数，且 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点取得极大值， 证明: $f_{xx}(x_0,y_0)+f_{yy}(x_0,y_0)\le 0$.