华中科技大学 2019～2020 学年第二学期

“ 概率论与数理统计 ”考试试卷(A 卷)

考试方式：闭卷　　考试日期：2020-08-31　　考试时长：150 分钟

院（系）：________________　　专业班级：________________

学　　号：________________　　姓　　名：________________

一、单项选择题(每题 3 分，共 30 分)

1．已知随机变量(X, Y)服从二维正态分布，且$DX \neq DY$，则（　　）.

(A) X与Y一定独立　　(B) X与Y一定不独立

(C) $X+Y$与$X-Y$一定独立　　(D) $X+Y$与$X-Y$一定不独立

2．设随机变量X服从$N(100,100)$，随机抽取一个容量为 10 的样本，令样本均值为Y，则（　　）.

(A) $EY=100, DY=100$　　(B) $EY=100, DY=10$

(C) $EY=10, DY=100$　　(D) $EY=10, DY=10$

3．设随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ x^2-3b, & a<x\le 2\\ c. & x>2\end{cases}$$

则a的值为(　　).

$(A)\ -\sqrt{3}$　　$(B)\ \sqrt{3}$　　$(C)\ 1$　　$(D)\ 0$

4．设随机变量序列$\{X_i, i\ge 1\}$独立且都服从参数为$\frac{1}{2}$的泊松分布，如果常数C使$\lim\limits_{n\to+\infty} P\left\{C\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-X_{2i-1})}{\sqrt{n}}\le x\right\}=\Phi(x)$，其中$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则$C=$(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) $\sqrt{3}$

5. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，$S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，$S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$，$S_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$，则服从$t(n)$分布的随机变量是(　　).

(A) $T_1=\frac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$　(B) $T_2=\frac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$　(C) $T_3=\frac{\overline{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$　(D) $T_4=\frac{\overline{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$

6. 某人向一个目标射击，直到击中r次为止．假设此人每次射击命中目标的概率为p，($0<p<1$)．X为射击停止时未命中目标的次数，则对$k=0,1,2,\cdots$，$P(X=k)=$(　　)

(A) $C_{k+r}^{r}p^r(1-p)^k$　(B) $C_{k+r-1}^{r}p^r(1-p)^k$

(C) $C_{k+r}^{r-1}p^r(1-p)^k$　(D) $C_{k+r-1}^{k}p^r(1-p)^k$

7. 从一批灯泡中随机地抽取n只做寿命试验，测得寿命(单位：小时)分别为$X_1,X_2,\cdots,X_n$，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$．设灯泡的寿命服从正态分布，则灯泡寿命均值的置信水平为 0.95 的置信上限为(　　).

(A) $\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1)$　(B) $\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1)$

(C) $\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.05}(n-1)$　(D) $\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.05}(n-1)$

8. 设随机变量$X\sim N(0,1),Y\sim N(0,1)$，则必有(　　).

(A) $X+Y$服从正态分布　(B) X^2+Y^2服从χ^2分布

(C) X^2,Y^2都服从χ^2分布　(D) $\frac{X^2}{Y^2}$服从 F 分布

9. 设随机变量X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则随着σ的增大，概率 $P(X-\mu<2\sigma)$(　　).

(A) 单调增大　(B) 单调减小　(C) 增减不定　(D) 保持不变

10. 下面表述正确的有(　　)个.

(1) 设A,B为任意两个随机事件，则$A+(B-A)=B$

(2) 连续型随机变量X的概率密度$f(x)$是连续函数

(3) 设$F(x)$是任意一个一维随机变量X的概率分布函数，则$F(x)$的定义域是实数域

(4) 设随机变量X,Y均服从一维正态分布，则随机变量$X+Y$也服从正态分布

(5) 设随机变量(X,Y)服从二维正态分布，且X与Y不相关，则它们独立

(6) 设X,Y的相关系数为1，则存在常数a，b，使$Y=aX+b$

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

．填空题（每空 3 分，共 12 分）

1．设随机变量X_i，$i=1,2$ 的分布列为$P(X_i=-1)=P(X_i=1)=\frac{1}{4}$, $P(X_i=0)=\frac{1}{2}$，满足$P(X_1X_2=0)=1$，则$P(X_1=X_2)=$______________.

2．设随机变量X,Y都服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，且$P(X\le 1,Y\le -1)=\frac{1}{5}$，则$P(X>1,Y>-1)=$______________.

3．在区间 $(0,1)$上随机独立地取出n个数$X_1,X_2,\ldots,X_n$，记最大数与最小数之间距离为S，用Y表示$X_1,X_2,\cdots,X_n$中大于1/3的个数，则$ES=$______________, $DY=$______________.

三、(10 分) 新型冠状病毒的密切接触者是指与确诊或高度疑似病例有过共同的生活或工作的人. 包括办公室的同事，学校里一个班级的学生及班主任老师，同一教室、宿舍的同事、同学，同机的乘客，以及其它形式的直接接触者包括病毒病人的陪护、乘出租车、乘电梯等直接接触者等等. 新型冠状病毒可以通过咽拭子进行核酸检查，但因各种干扰因素影响，检测结果存在一定比例的假阳性和假阴性. 所谓假阴性，是指受测试者是感染者但核酸检测结果为阴性，假阳性是指受测试者不是感染者但核酸检测结果为阳性.

在我国公布的数据中，密切接触者被感染的概率是10%，核酸检测中假阴性比例为20%，假阳性的比例 0.001%. 现对一密切接触者进行核酸检测，求（1）此人的检测结果为阴性的概率；（2）若此人的检测结果为阴性，此人未被感染的概率；(3) 若此人的检测结果为阳性，此人已被感染的概率.

四、(14分) 已知(X,Y)在以点$(0,1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$为顶点的三角形区域上服从均匀分布. 求 (1) 边缘密度$f_X(x), f_Y(y)$，(2) 条件密度$f_{X|Y}(x|y)$，(3) $P\left\{X>\frac{1}{2}\middle|Y>0\right\}$，(4) X,Y是否独立？是否相关？为什么？

五、(12分) 已知随机变量X与Y相互独立，其分布函数分别为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{4}, & 0\le x<1,\\ 1, & 1\le x,\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ y, & 0\le y<1,\\ 1, & y\ge 1.\end{cases}$$

记$Z=Y-X$，其概率分布函数为$F_Z(z)$，求 (1) $F_Z(z)$，(2) DZ，(3) $\mathrm{Cov}(Z,X)$.

六、（10 分）设随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x,y>0, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

求(1) $Z=X+Y$ 的密度函数；(2) $W=(X+Y)/3$ 的密度函数.

七、（12 分）设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases} 2\theta, & 0<x<1, \\ 1-2\theta, & 1\le x<2, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

其中$\theta\in(0,\frac{1}{2})$是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体 X 的简单随机样本，记 N 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$中小于 1 的个数. (1) 求θ的矩估计量$\hat{\theta}_M$; (2)求θ的极大似然估计量$\hat{\theta}_L$; (3)验证$\hat{\theta}_M$和$\hat{\theta}_L$是否具有无偏性.