Chapter 15
周期性非正弦稳态电路

15.2 周期性函数的傅里叶级数

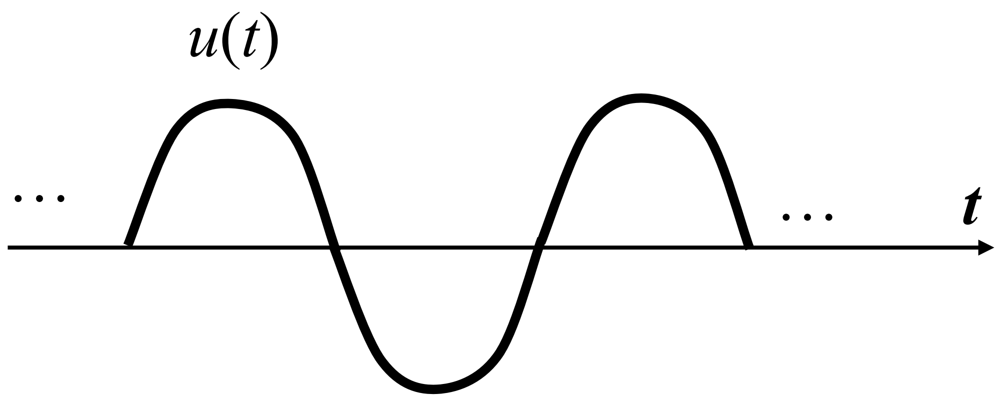
15.3 平均功率和有效值

15.4 周期性非正弦稳态电路分析

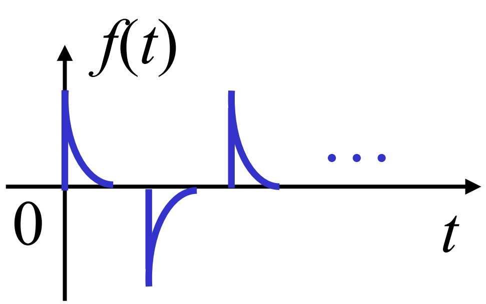
15.2 周期性函数的傅里叶级数

1. 常见的周期非正弦激励信号

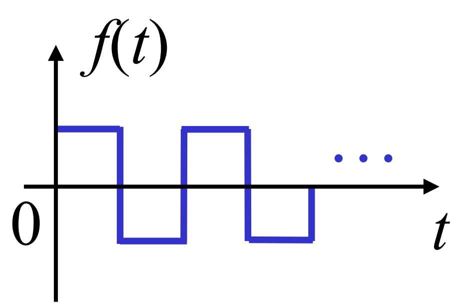
（1）发电机发出的电压波形，不可能是完全正弦的。



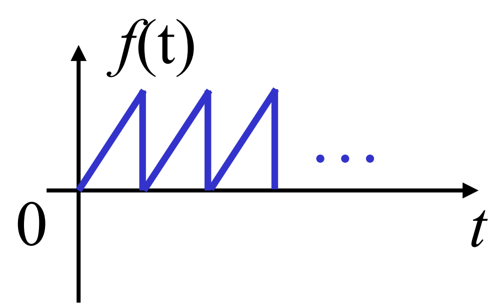
（2）大量脉冲信号均为周期性非正弦信号。



尖脉冲



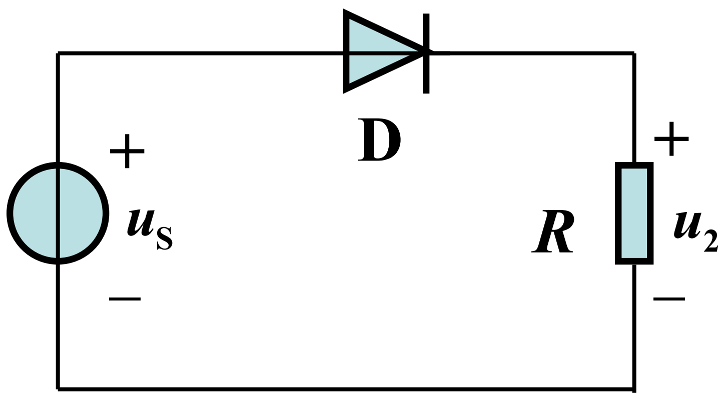
方波

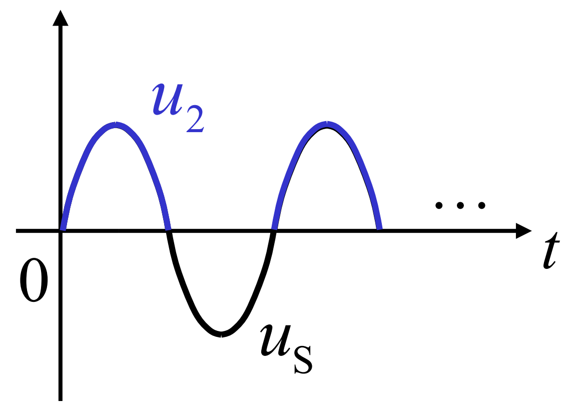


锯齿波

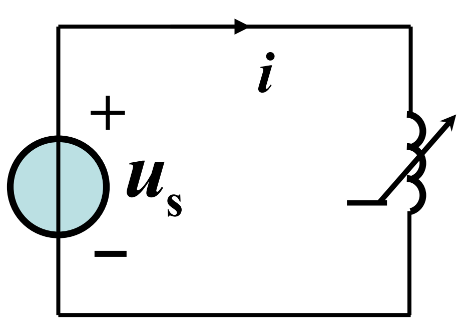
（3）当电路中存在非线性元件时也会产生非正弦电压、电流。

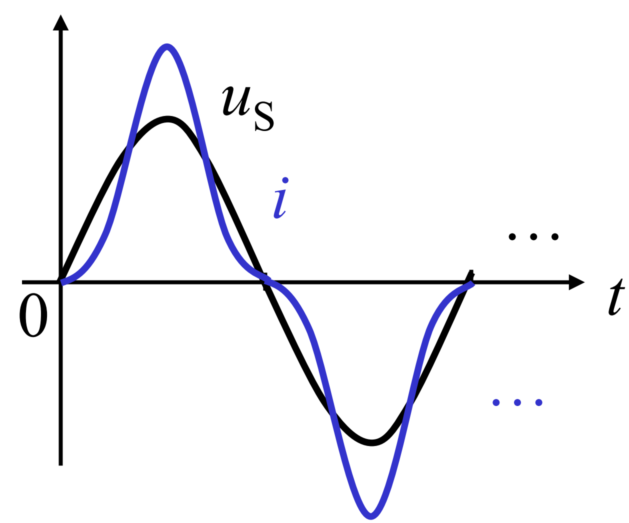
二极管整流电路





非线性电感电路





2. 周期函数的谐波分析——傅里叶级数

周期性非正弦函数$f(t)$：

$$f(t) = f(t + kT) \quad k = 0, 1, 2, 3, \cdots（k为正整数）$$

若满足狄利克雷条件（Dirichlel conditions）：

1）$f(t)$处处单值；

2）$f(t)$在一个周期内只有有限个不连续点；

3）$f(t)$在一个周期内只有有限个极值点；

4）对任意t_0，积分$\int_0^T |f(t)| \mathrm{d}t < \infty$。

则可以分解为无穷多项不同频率的正弦函数之和。

傅里叶级数

周期函数傅里叶级数展开式为

$$f(t)=a_0+(a_1\cos\omega t+b_1\sin\omega t)+(a_2\cos 2\omega t+b_2\sin 2\omega t)+\cdots$$

$$=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos k\omega t+b_k\sin k\omega t]$$

傅里叶系数：课本P45-P46有推导过程

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$ 即$f(t)$在一周期内平均值

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos k\omega t\,\mathrm{d}(\omega t)$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin k\omega t\,\mathrm{d}(\omega t)$$

将同频率余弦项与正弦项合并，$f(t)$还可表示成下式

$$f(t)=a_0+A_1\cos(\omega t+\phi_1)+A_2\cos(2\omega t+\phi_2)+\cdots+A_k\cos(k\omega t+\phi_k)+\ldots\ldots$$

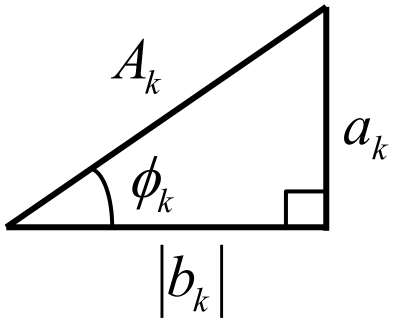
$$=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos(k\omega t+\phi_k)$$

直流分量

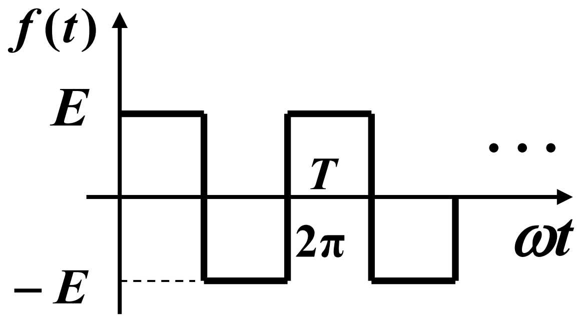
交流分量（谐波）

$$a_k=A_k\cos\phi_k \qquad b_k=-A_k\sin\phi_k$$

$$A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2} \qquad \phi_k=-\arctan\frac{b_k}{a_k}$$



例 求周期函数$f(t)$的傅里叶级数展开式。



解

$$f(t)=\begin{cases} E & (0<t<\dfrac{T}{2}) \\ -E & (\dfrac{T}{2}<t<T) \end{cases}$$ 一个周期内的表达式

$$f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos k\omega t+b_k\sin k\omega t]$$

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t \\ a_k=\dfrac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,\mathrm{d}t \\ b_k=\dfrac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega t\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

求傅里叶系数：

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}}E\mathrm{d}t+\int_{\frac{T}{2}}^{T}-E\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{T}\left[E(\frac{T}{2}-0)+(-E)(T-\frac{T}{2})\right]=0$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos k\omega t\,\mathrm{d}(\omega t)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}E\cos k\omega t\,\mathrm{d}(\omega t)+\int_{\pi}^{2\pi}(-E)\cos k\omega t\,\mathrm{d}(\omega t)\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{E}{k}\sin k\omega t\Big|_0^{\pi}+\frac{-E}{k}\sin k\omega t\Big|_{\pi}^{2\pi}\right]$$

$$=\frac{E}{k\pi}\left[\sin k\pi-\sin 0-(\sin 2k\pi-\sin k\pi)\right]=0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\times \sin k\omega t \, \mathrm{d}(\omega t)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} E\sin k\omega t \, \mathrm{d}(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi} (-E)\sin k\omega t \, \mathrm{d}(\omega t)\right]$$

$$= \frac{E}{k\pi}\left[-\cos k\omega t\Big|_0^{\pi} + \cos k\omega t\Big|_{\pi}^{2\pi}\right]$$

$$= \frac{E}{k\pi}\left[-(\cos k\pi - \cos 0^\circ) + \cos 2k\pi - \cos k\pi\right]$$

$$= \frac{2E}{k\pi}(1-\cos k\pi) = \begin{cases} \dfrac{4E}{k\pi}, & k\text{为奇数} \\ 0, & k\text{为偶数} \end{cases}$$

则 $f(t) = \dfrac{4E}{\pi}\sin\omega t + \dfrac{4E}{3\pi}\sin 3\omega t + \dfrac{4E}{5\pi}\sin 5\omega t + \cdots$

$$= \frac{4E}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \cdots\right)$$

3. 周期函数的频谱

时域表达式：$f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos(k\omega t+\phi_k)$

$$\begin{cases} a_0 & \text{——直流} \\ A_1\cos(\omega t+\phi_1) & \text{——基波} \\ A_k\cos(k\omega t+\phi_k) & \text{——}k\text{波谐波} \begin{cases} k\text{为奇数——奇次谐波} \\ k\text{为偶数——偶次谐波} \end{cases} \\ \phi_k & \text{——初相} \end{cases}$$

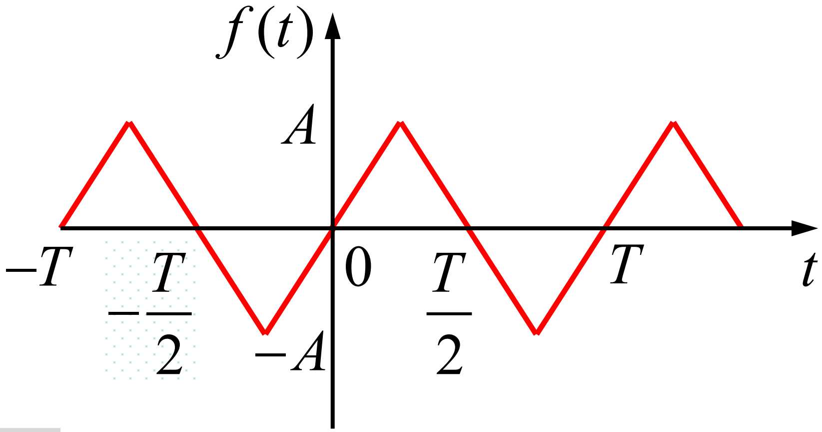
1）幅值频谱 $A_k \sim \omega$

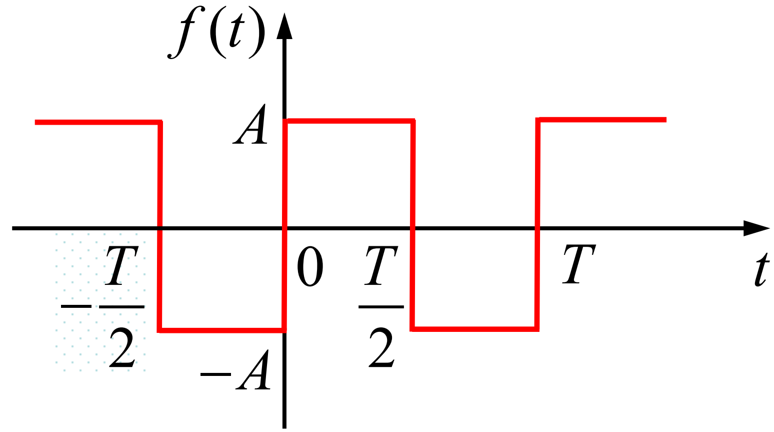
表征非正弦周期波形的各次谐波的**振幅**与频率关系

2）相位频谱 $\phi_k \sim \omega$

表征非正弦周期波形的各次谐波的**相位**与频率关系

例 试作出如图所示三角波和方波的振幅频谱和相位频谱。





解 三角波的傅里叶级数：

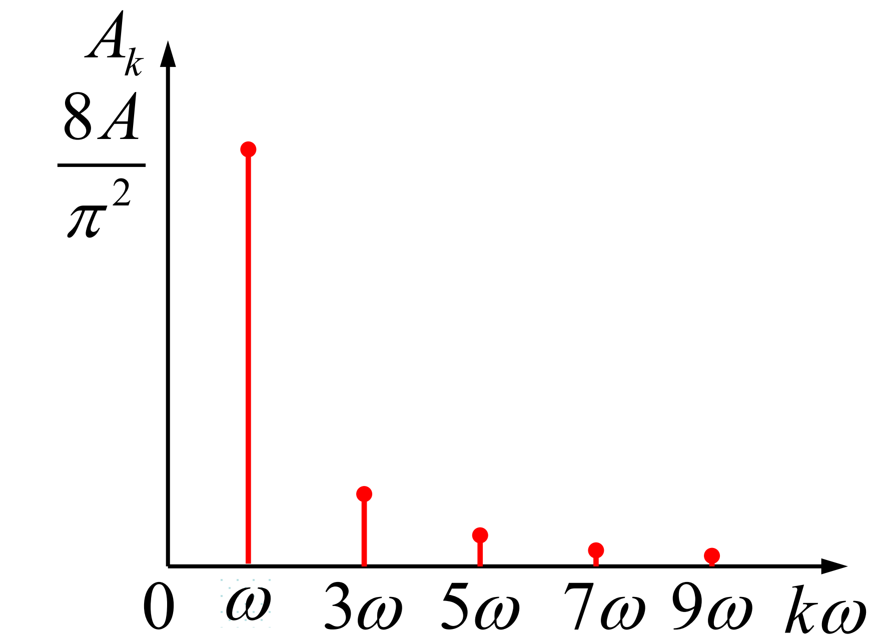
$$f(t)=\frac{8A}{\pi^2}\left(\sin\omega t-\frac{1}{3^2}\sin 3\omega t+\frac{1}{5^2}\sin 5\omega t-\frac{1}{7^2}\sin 7\omega t+\cdots\right)$$

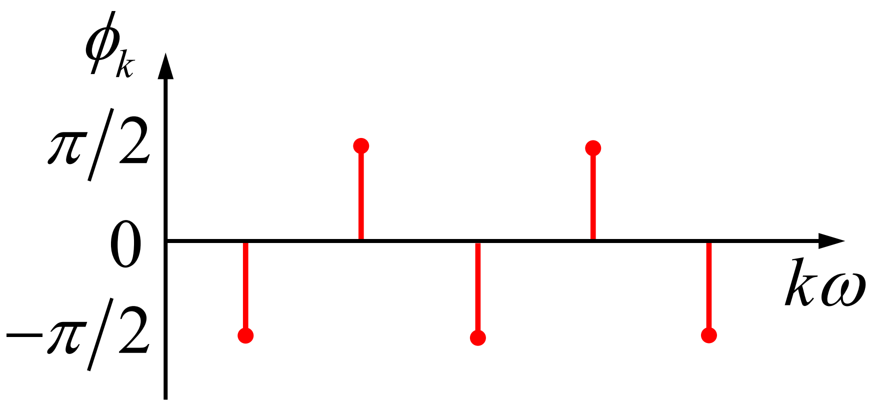
方波的傅里叶级数：

$$f(t)=\frac{4A}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\frac{1}{7}\sin 7\omega t+\cdots\right)$$

三角波

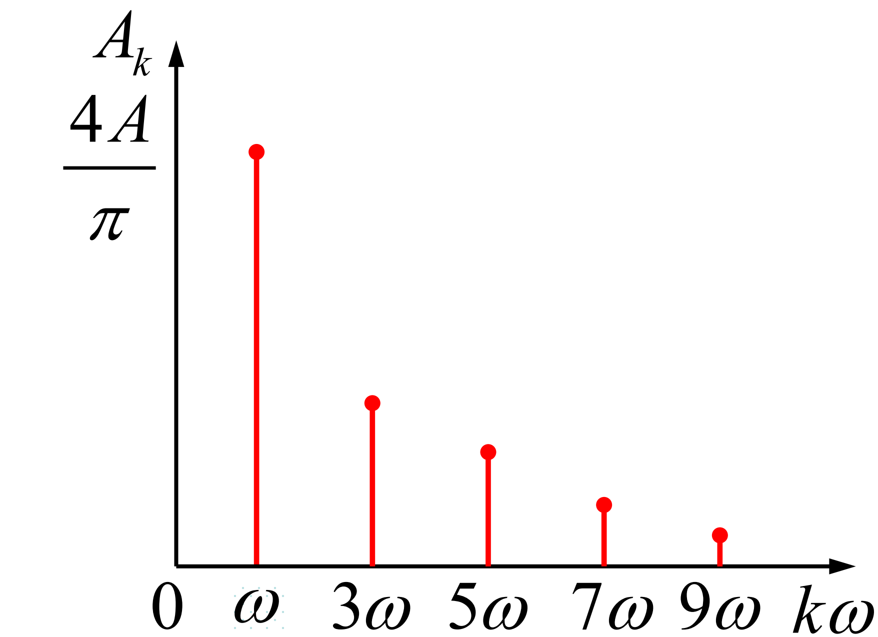
$$f(t)=\frac{8A}{\pi^2}\left(\sin\omega t-\frac{1}{3^2}\sin 3\omega t+\frac{1}{5^2}\sin 5\omega t+\cdots\right)$$

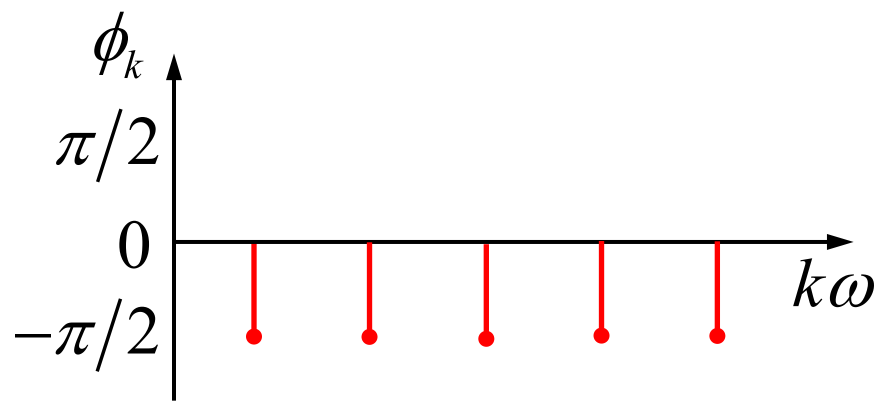




方波

$$f(t)=\frac{4A}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\cdots\right)$$



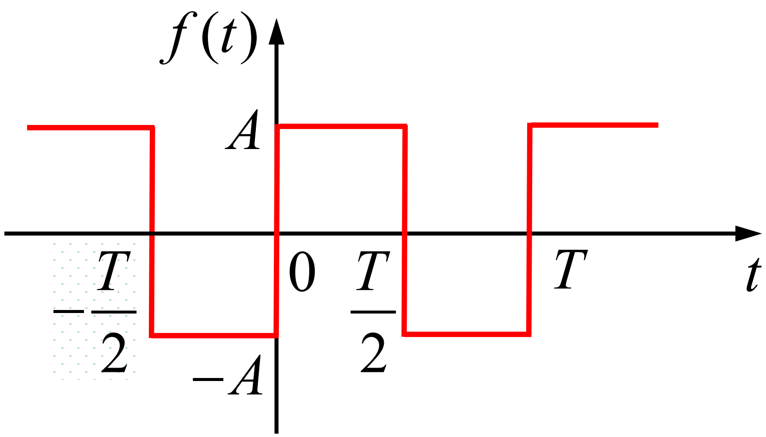


15.3 对称性对傅里叶级数的影响

1. 根据函数奇偶性来判断

奇函数： $f(t)=-f(-t)$ 　　**正弦函数就是奇函数**

奇函数的傅里叶级数展开式**只包含正弦函数项**，不包含余弦函数和常数项。



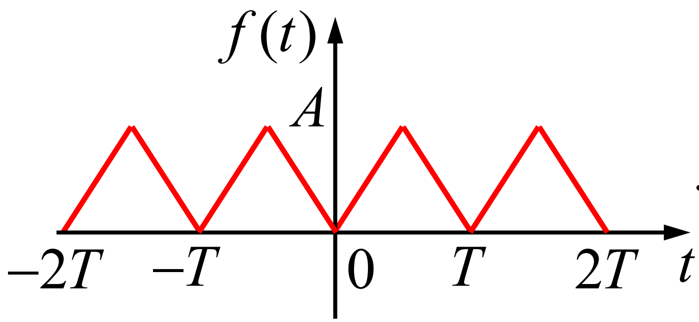
$$f(t)=\frac{4A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\left(2k-1\right)\omega t$$

1. 根据函数奇偶性来判断

偶函数：$f(t)=f(-t)$

余弦函数就是偶函数

偶函数的傅里叶级数展开式**只包含余弦函数项**，不包含正弦函数，**可能含有常数项**。



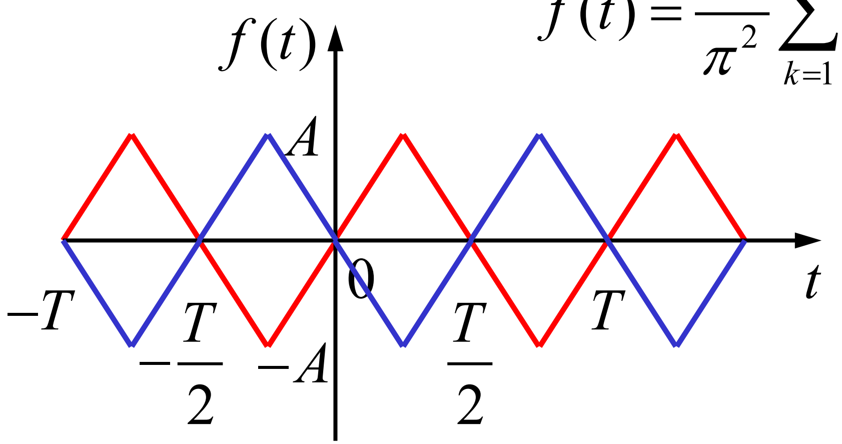
$$f(t)=\frac{A}{2}-\frac{4A}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k-1)\omega t$$

2. 根据半波对称性来判断

半波对称：$f(t)=-f(t\pm\frac{T}{2})$

半波对称函数的傅里叶级数展开式**只包含奇次函数项**，不包含偶次函数项和常数项。

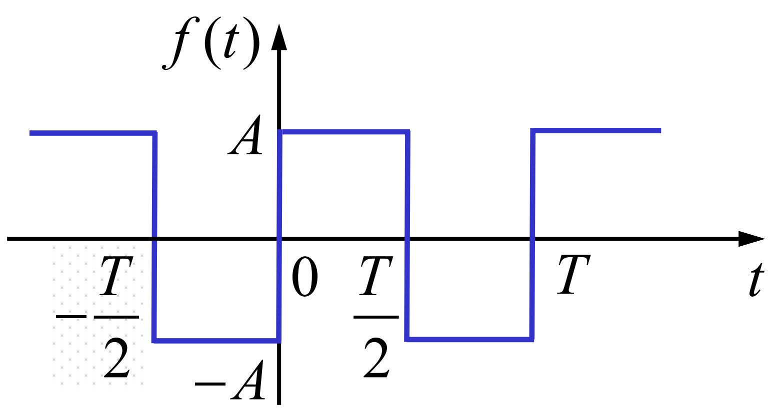
$$f(t)=\frac{8A}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}\sin(2k-1)\omega t$$



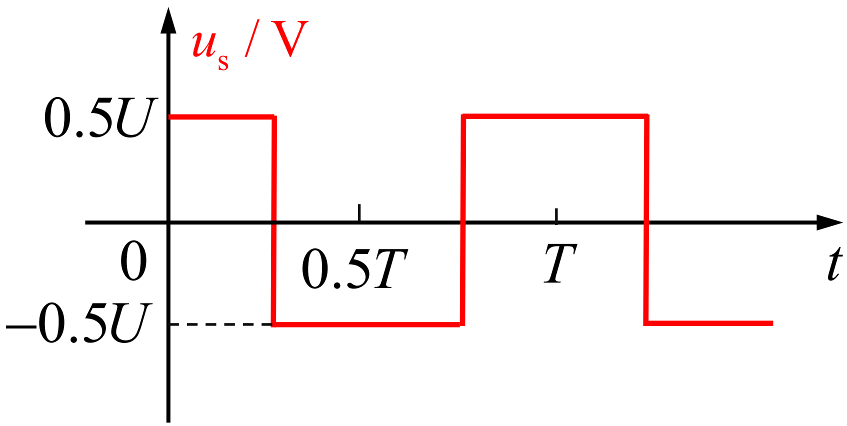
$$f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos k\omega t+b_k\sin k\omega t]$$

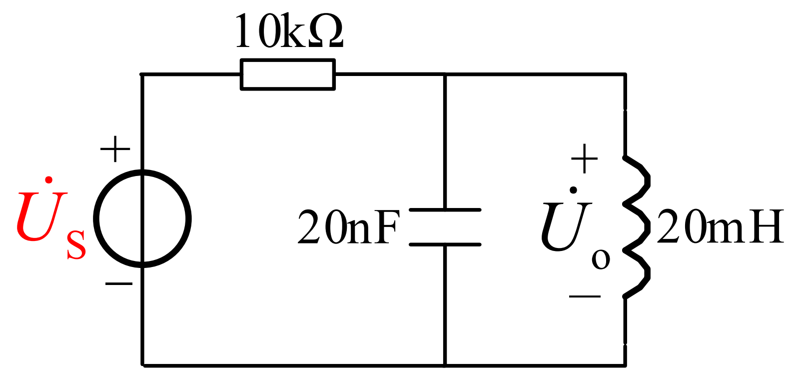
偶函数　　偶函数　　奇函数

- 奇函数的傅里叶级数展开式**只包含奇函数项（正弦函数项）**
- 偶函数的傅里叶级数展开式**只包含偶函数项（常数项、余弦函数项）**
- 平移纵轴（改变时间起点），可以改变函数的奇偶性，但不能改变半波对称性



例 已知：T=0.2π ms，写出u_s的傅里叶级数（保留前四个非零项），判断u_o中第几次谐波占主要部分。





解

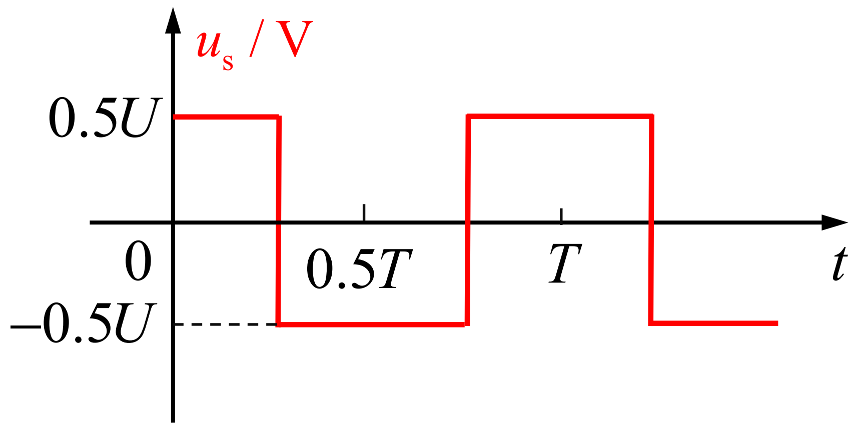
$$u_s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t]$$

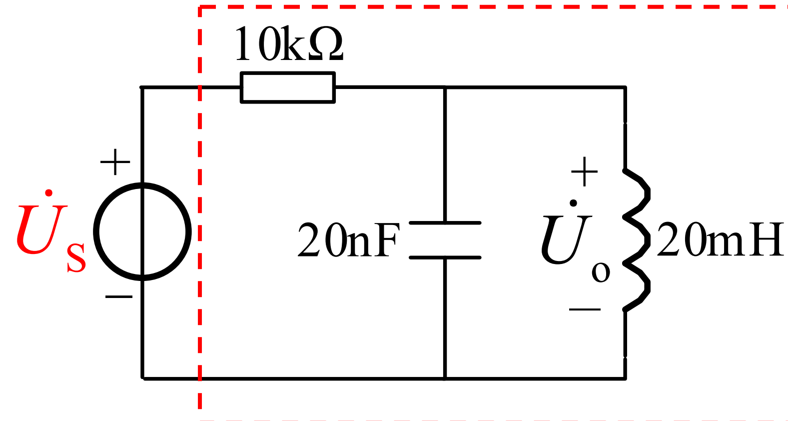
偶函数 $\rightarrow b_k = 0 \quad a_0 = \dfrac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = 0$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T u_s(t)\cos k\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{2U}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2},\ k = 1,3,5,\cdots$$

$$u_s(t) = \frac{2U}{\pi}\sum_{k=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{2}\cos k\omega t$$

例 已知：T=0.2π ms，写出u_s的傅里叶级数（保留前四个非零项），判断u_o中第几次谐波占主要部分。





带通滤波器

解 取u_s前四项：

5次谐波占主要部分

$$u_s(t) \approx \frac{2U}{\pi}\cos\omega t - \frac{2U}{3\pi}\cos 3\omega t + \frac{2U}{5\pi}\cos 5\omega t - \frac{2U}{7\pi}\cos 7\omega t \text{ V}$$

$$\dot{U}_{ok} \to \max \quad |H_L(\omega)| = \left|\frac{\dot{U}_{ok}(\omega)}{\dot{U}_{Sk}(\omega)}\right| \to \max \quad \Rightarrow \text{ 并联谐振}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 5\times 10^4 \text{rad/s} = 5\omega \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 10^4 \text{rad/s}$$

15.4 周期性非正弦稳态电路分析

1. 非正弦周期电压、电流的有效值

设 $u = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} U_k \cos(k\omega t + \phi_k)$

根据有效值定义： $U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 \mathrm{d}t}$

将 u 代入，得

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} U_k \cos(k\omega t + \phi_k)\right]^2 \mathrm{d}t}$$

$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T\left[U_0+\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}U_k\cos(k\omega t+\phi_k)\right]^2\mathrm{d}t}$$

上式积分号中 u^2项展开后有四种类型：

（1）$\frac{1}{T}\int_0^T U_0^2\mathrm{d}t=U_0^2$ 直流分量平方

（2）$\frac{1}{T}\int_0^T U_0\times\sqrt{2}U_k\cos(k\omega t+\phi_k)\,\mathrm{d}t=0$ 直流分量与各次谐波乘积

（3）$\frac{1}{T}\int_0^T\left[\sqrt{2}U_k\cos\left(k\omega t+\phi_k\right)\right]^2\mathrm{d}t=U_k^2$ 各次谐波分量平方

（4）$\frac{1}{T}\int_0^T\sqrt{2}U_k\cos\left(k\omega t+\phi_k\right)\times\sqrt{2}U_m\cos\left(m\omega t+\phi_m\right)\,\mathrm{d}t=0$

不同频率各次谐波两两相乘

由此可得 $U=\sqrt{U_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}U_k^2}=\sqrt{U_0^2+U_1^2+U_2^2+\cdots}$

同理: 非正弦周期电流

$$i=I_0+\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}I_k\cos(k\omega t+\phi_k)$$

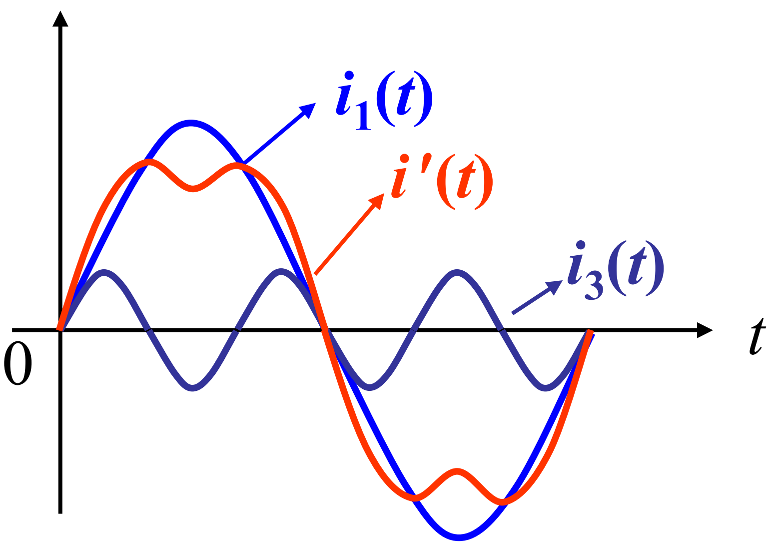
其有效值

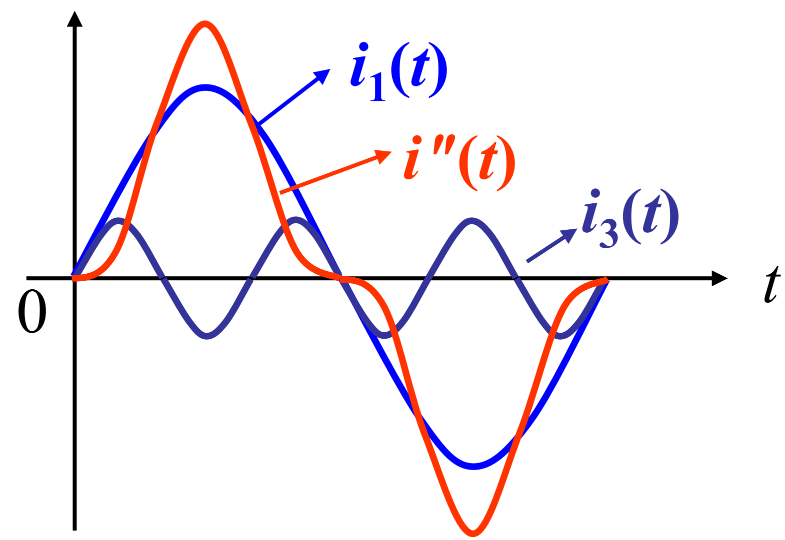
$$I=\sqrt{I_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}I_k^2}=\sqrt{I_0^2+I_1^2+I_2^2+\cdots}$$

注意：

➢ 周期性非正弦电流（或电压）有效值与最大值一般无$\sqrt{2}$倍关系。

➢ 有效值相同的周期性非正弦电压（或电流）其波形不一定相同。





$$i'(t)=i_1(t)+i_3(t) \neq i''(t)=i_1(t)-i_3(t)$$

$$I'=\sqrt{I_1^2+I_3^2} = I''=\sqrt{I_1^2+I_3^2}$$

2. 周期性非正弦电流电路的平均功率

平均功率定义公式与正弦稳态电路相同。

瞬时功率 $p = ui$

平均功率 $P = \dfrac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t = \dfrac{1}{T}\int_0^T ui\mathrm{d}t$

若 $u = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t + \phi_{ku})$ $i = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t + \phi_{ki})$

则

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \left[U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t + \phi_{ku})\right]\left[I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t + \phi_{ki})\right]\mathrm{d}t$$

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T\left[U_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t+\phi_{ku})\right]\left[I_0+\sum_{k=1}^{\infty}I_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t+\phi_{ki})\right]\mathrm{d}t$$

ui 相乘之积分也可分为四种类型：

（1）$\frac{1}{T}\int_0^T U_0 I_0 \mathrm{d}t = U_0 I_0 = P_0$ 直流分量乘积之积分

（2）$\frac{1}{T}\int_0^T U_0\times\sum_{k=1}^{\infty}I_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t+\phi_{ki})\mathrm{d}t=0$

$\frac{1}{T}\int_0^T I_0\times\sum_{k=1}^{\infty}U_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t+\phi_{ku})\mathrm{d}t=0$

直流分量与各次谐波分量乘积之和的积分

（3）$\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty}U_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t+\phi_{ku})I_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t+\phi_{ki})\mathrm{d}t$

$=\sum_{k=1}^{\infty}U_k I_k\cos\varphi_k=\sum_{k=1}^{\infty}P_k$ 同频电压、电流分量乘积之和的积分

其中 $U_k=\frac{1}{\sqrt{2}}U_{\mathrm{m}k}$ $I_k=\frac{1}{\sqrt{2}}I_{\mathrm{m}k}$ $\varphi_k=\phi_{ku}-\phi_{ki}$

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T\left[U_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t+\phi_{ku})\right]\left[I_0+\sum_{k=1}^{\infty}I_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t+\phi_{ki})\right]\mathrm{d}t$$

ui 相乘之积分也可分为四种类型：

(1) $$\frac{1}{T}\int_0^T U_0 I_0 \mathrm{d}t=P_0$$

(2) $$\frac{1}{T}\int_0^T U_0\times\sum_{k=1}^{\infty}I_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t+\phi_{ki})\mathrm{d}t=0$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T I_0\times\sum_{k=1}^{\infty}U_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t+\phi_{ku})\mathrm{d}t=0$$

(3) $$\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}U_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t+\phi_{ku})I_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega t+\phi_{ki})\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{\infty}P_k$$

(4) $$\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{p=1}^{\infty}U_{\mathrm{m}p}\cos(p\omega t+\phi_{pu})\sum_{q=1}^{\infty}I_{\mathrm{m}q}\cos(q\omega t+\phi_{qi})\mathrm{d}t=0$$

$(p\neq q)$

不同频电压、电流分量乘积之和的积分

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T\left[U_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_{\mathrm{m}k}\sin(k\omega t+\phi_{ku})\right]\left[I_0+\sum_{k=1}^{\infty}I_{\mathrm{m}k}\sin(k\omega t+\phi_{ki})\right]\mathrm{d}t$$

则平均功率 $P=\frac{1}{T}\int_0^T uidt$

$$=U_0I_0+U_1I_1\cos\varphi_1+U_2I_2.\cos\varphi_2+\cdots$$

$$=P_0+\sum_{k=1}^{\infty}P_k$$

直流分量产生的功率

各次谐波产生的平均功率和

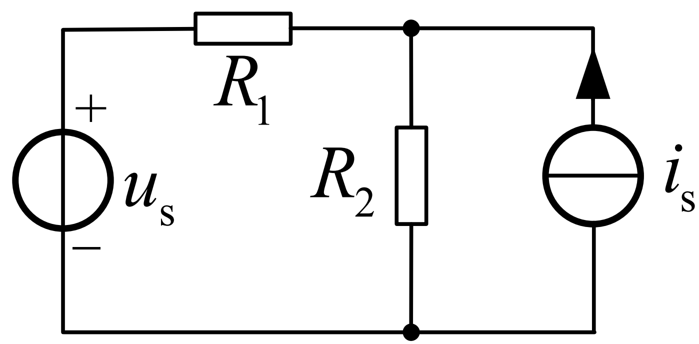
$$U=\sqrt{U_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}U_k^2}\qquad I=\sqrt{I_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}I_k^2}\qquad P=P_0+\sum_{k=1}^{\infty}P_k$$

注意：

- k次谐波电压只能产生k次谐波电流，因此同频率电压电流相乘才形成平均功率。
- 在直流电路中，功率不能直接叠加；周期性非正弦稳态电路中，不同频率电源的平均功率可以叠加。叠加时需注意电流、电压的三角函数、符号相同。

$$p = R\left(i' + i''\right)^2$$

$$= u'i' + \underbrace{u'i'' + u''i'}_{\neq 0} + u''i''$$

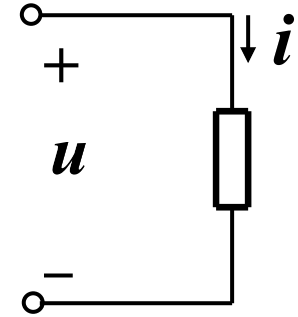


$$\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{p=1}^{\infty} U_{\mathrm{m}p}\cos(p\omega t + \phi_{pu}) \sum_{q=1}^{\infty} I_{\mathrm{m}q}\cos(q\omega t + \phi_{qi})\mathrm{d}t = 0$$

$$\Rightarrow \quad P = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k$$

例 已知：$u = 2 + 10\sin\omega t + 5\sin 2\omega t + 2\sin 3\omega t$

$i = 1 + 2\sin(\omega t - 30^\circ) + \sin(2\omega t - 60^\circ)$



求：电路吸收的平均功率和电压、电流的有效值。

解

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + P_3$$
$$= 2\times 1 + \frac{10\times 2}{2}\cos 30^\circ + \frac{1\times 5}{2}\cos 60^\circ + 0$$
$$= 2 + 8.66 + 1.25$$
$$= 11.9\ \mathrm{W}$$

$$P = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k$$

$$U = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}$$

有效值

$$U = \sqrt{2^2 + \frac{10^2}{2} + \frac{5^2}{2} + \frac{2^2}{2}} = \sqrt{4 + 50 + 12.5 + 2} = 8.28\ \mathrm{V}$$

$$I = \sqrt{1^2 + \frac{2^2}{2} + \frac{1^2}{2}} = \sqrt{1 + 2 + 0.5} = 1.87\ \mathrm{A}$$

3. 周期性非正弦电流电路的计算

采用谐波分析法，其步骤如下：

A. 将周期性非正弦电源分解为傅里叶级数，根据要求取有限项，如无要求，一般取前三或前五项即可；

B. 根据叠加定理，分别计算直流分量和各次谐波激励单独作用时产生的响应；

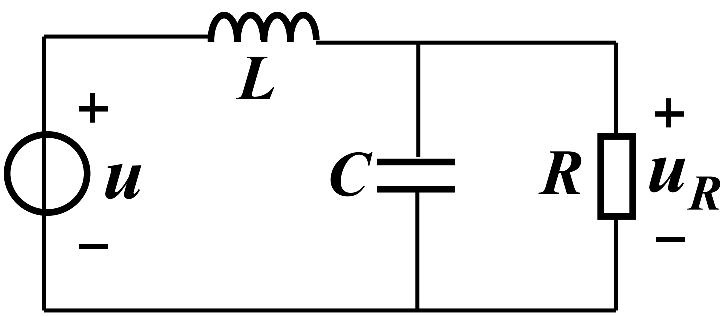
- 直流分量单独作用相当于解直流电路（L短路、C开路）；
- 各次谐波单独作用时均为正弦稳态电路，可采用相量法计算(**要注意电感和电容的阻抗随频率ω的变化而变化**)；

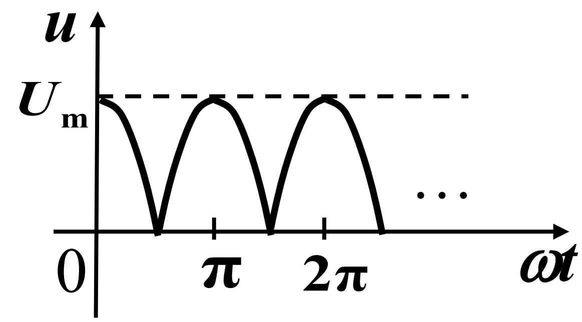
C. 将计算结果以瞬时值形式相加（**各次谐波激励所产生的相量形式响应不能进行相加**，因其频率不同）。

例 图示电路为全波整流滤波电路。其中U_m=157V。L=5H，C=10μF，R=2000Ω，ω=314rad/s。加在滤波器上的全波整流电压u如图所示。

求：（1）电阻R上电压u_R及其有效值U_R 。

（2）电阻R消耗的的平均功率。





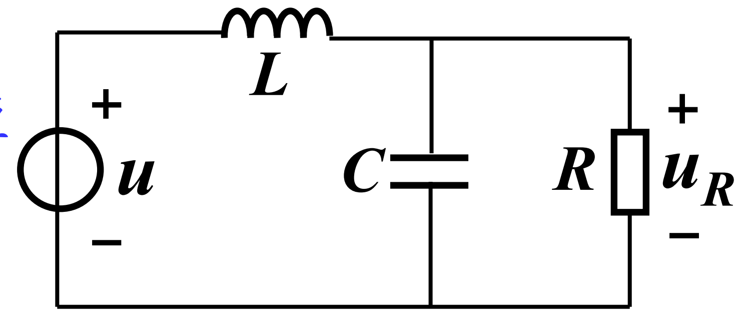
解 （1）上述周期性非正弦电压分解成傅里叶级数为

$$u = \frac{4}{\pi}U_m(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cos 2\omega t - \frac{1}{15}\cos 4\omega t + \cdots)$$

$$= 100 + 66.7\cos 2\omega t - 13.33\cos 4\omega t \text{ V}$$

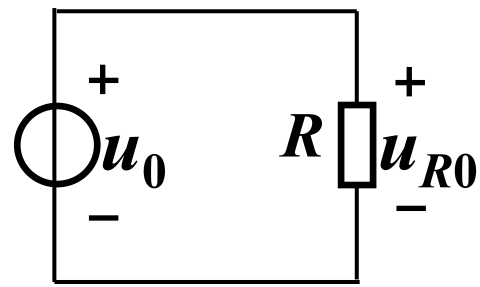
取到四次谐波

（2）计算直流分量和各次谐波分量响应



（A）100V直流电源单独作用

（L短路、C开路）



$$U_{R0} = 100\text{V}$$

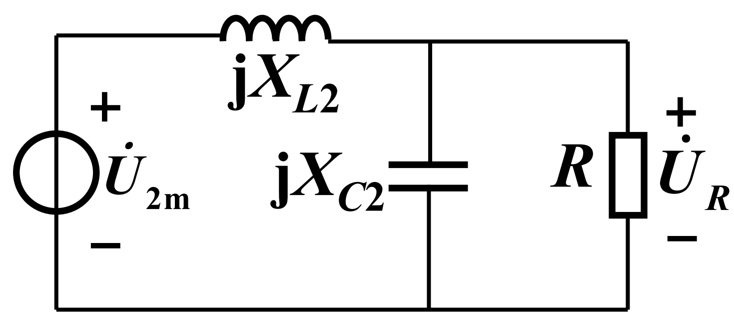
$$P_0 = \frac{U_R^2}{R} = \frac{100^2}{2000} = 5\,\text{W}$$

（B）二次谐波 $u_2 = 66.7\cos 2\omega t\,\text{V}$

$$X_{L2} = 2\omega L = 2\times 314\times 5 = 3140\,\Omega$$

$$X_{C2} = -\frac{1}{2\omega C} = -\frac{1}{2\times 314\times 10\times 10^{-6}}$$

$$= -159\,\Omega$$



$$Z_2 = \mathrm{j}X_{L2} + \frac{R(\mathrm{j}X_{C2})}{R+\mathrm{j}X_{C2}} = \mathrm{j}3140 + \frac{2000\times(-\mathrm{j}159)}{2000-\mathrm{j}159}$$

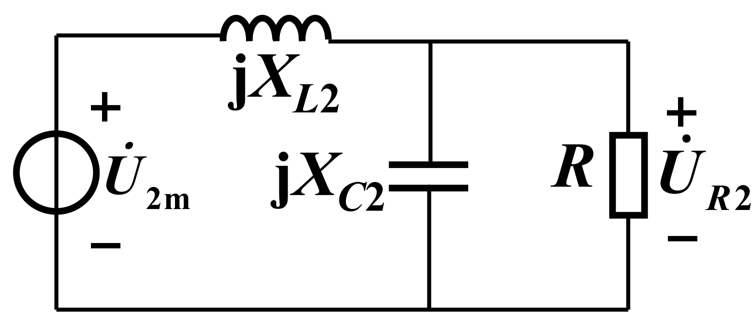
$$= \mathrm{j}3140 + 12.55 - \mathrm{j}158 = 12.55 + \mathrm{j}2982 = 2982\angle 89.76^{\circ}\ \Omega$$

$$\dot{U}_{R2\mathrm{m}} = \frac{\dot{U}_{2\mathrm{m}}}{Z_2}\cdot\frac{R(\mathrm{j}X_{C2})}{R+\mathrm{j}X_{C2}} = \frac{66.7\angle 0^{\circ}}{2982\angle 89.76^{\circ}}\times 158.5\angle -85.46^{\circ}$$

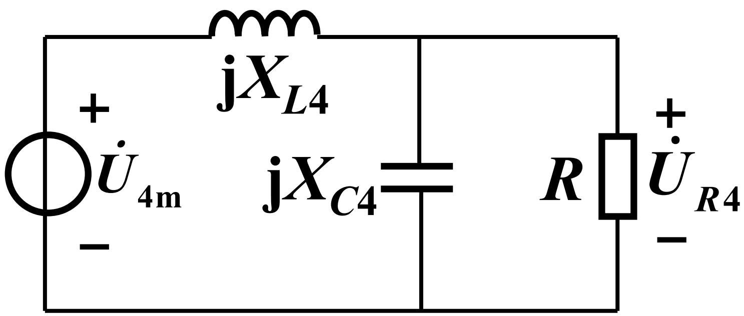
$$= 3.55\angle -175^{\circ}\mathrm{V}$$

$$u_{R2} = 3.55\cos(2\omega t - 175^{\circ})\ \mathrm{V}$$

$$P_2 = \frac{U_{R2}^2}{R} = \frac{3.55^2/2}{2000} = 3.15\times 10^{-3}\ \mathrm{W}$$



（C） 四次谐波单独作用 $u_4 = 13.33\cos 4\omega t$ V



$$Z_4 = \mathrm{j}6280 + \frac{2000(-\mathrm{j}79.5)}{2000 - \mathrm{j}79.5}$$

$$= \mathrm{j}6280 + 3.16 - \mathrm{j}79.3$$

$$= 3.16 + \mathrm{j}6201$$

$$= 6201\angle 90^\circ\ \Omega$$

注意：*L*、*C*阻抗值变化！

$$X_{L4} = 4\omega L = 4\times 314\times 5 = 6280\ \Omega$$

$$X_{C4} = -\frac{1}{4\omega C} = -\frac{1}{4\times 314\times 10\times 10^{-6}} = -79.5\ \Omega$$

$$\dot{U}_{R4\mathrm{m}} = \frac{13.33\angle 0^\circ}{6201\angle 90^\circ}\times 79.4\angle -87.72^\circ = 0.171\angle -178^\circ\ \mathrm{V}$$

$$u_{R4} = 0.171\cos(4\omega t - 178^\circ)\ \mathrm{V} \qquad P_4 = \frac{0.171^2/2}{2000} = 7.31\times 10^{-6}\ \mathrm{W}$$

电阻R上电压的瞬时值为

注意：先写成瞬时值叠加，再求平均值/有效值！

$$u_R = u_{R0} + u_{R2} + u_{R4}$$

$$= 100 + 3.55\cos(2\omega t - 175^\circ) - 0.171\cos(4\omega t - 178^\circ)\text{V}$$

电压u_R的有效值为

$$U_R = \sqrt{100^2 + \frac{3.55^2}{2} + \frac{0.171^2}{2}}$$

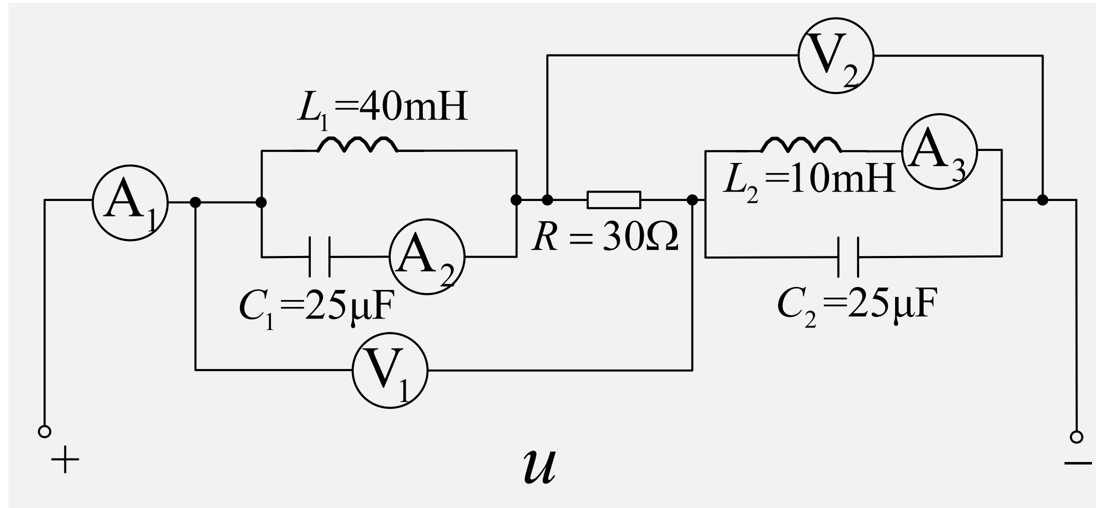
$$= \sqrt{10000 + 6.3 + 0.0146} = 100 \text{ V}$$

电阻R消耗的的平均功率为

$$P = P_0 + P_2 + P_4$$

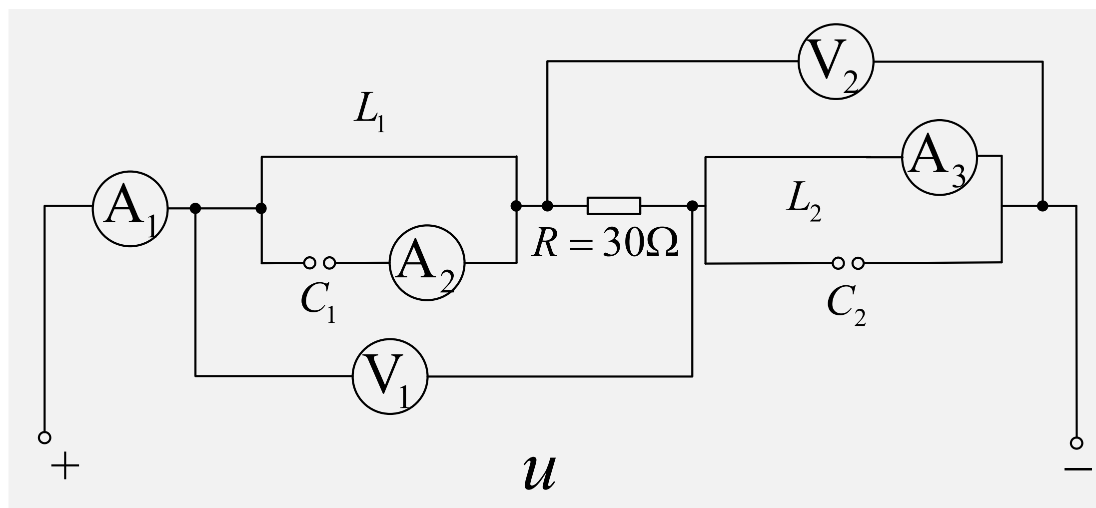
$$= 5 + 3.15\times 10^{-3} + 7.31\times 10^{-6} = 5.003 \text{ W}$$

例 已知u=30+120cos1000t+60cos(2000t+π/4) V。求电路中各表读数。



解 (1) u_0=30V作用

L_1、L_2短路；
C_1、C_2开路。



A_1、A_3读数：

$$i_0 = i_{L20} = u_0 / R = 1\ \text{A}$$

A_2读数：$i_{C10} = 0$

V_1、V_2读数：

$$u_{\text{ad}0} = u_{\text{cb}0} = u_0 = 30\ \text{V}$$

(2) u_1=120cos1000t V作用

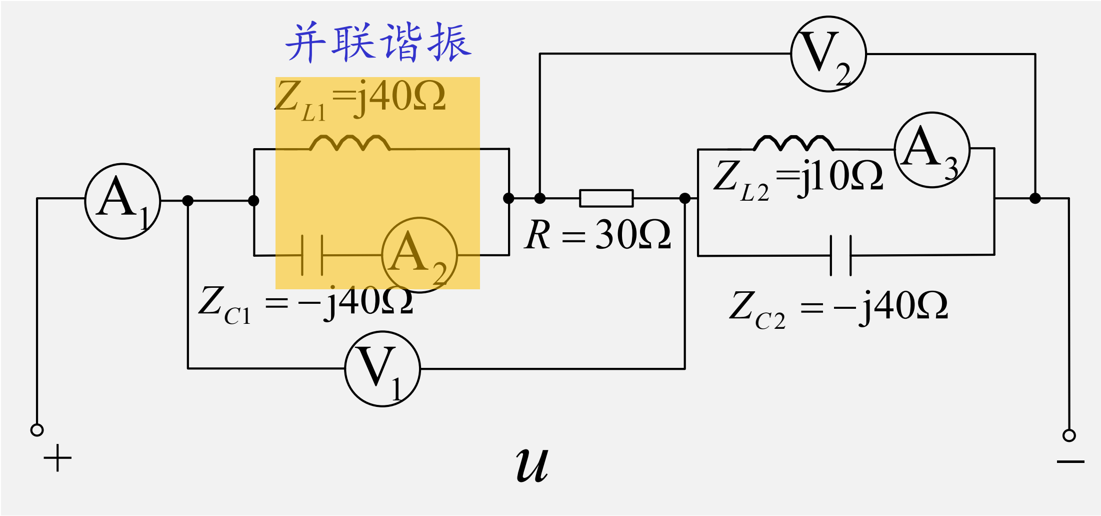
$$j\omega L_1 = j40\Omega$$

$$j\omega L_2 = j10\Omega$$

$$-j\frac{1}{\omega C_1} = -j40\Omega$$

$$-j\frac{1}{\omega C_2} = -j40\Omega$$

$$\dot{U}_1 = 120\angle 0° \text{ V}$$



$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{L21} = 0 \qquad \dot{U}_{cb1} = 0$$

$$\dot{U}_{ad1} = \dot{U}_1 = 120\angle 0° \text{ V}$$

$$\dot{I}_{C11} = j\omega C_1 \dot{U}_1 = \frac{120\angle 0°}{-j40} = 3\angle 90° \text{ A}$$

(3) u_2=60cos(2000t+π/4) V作用

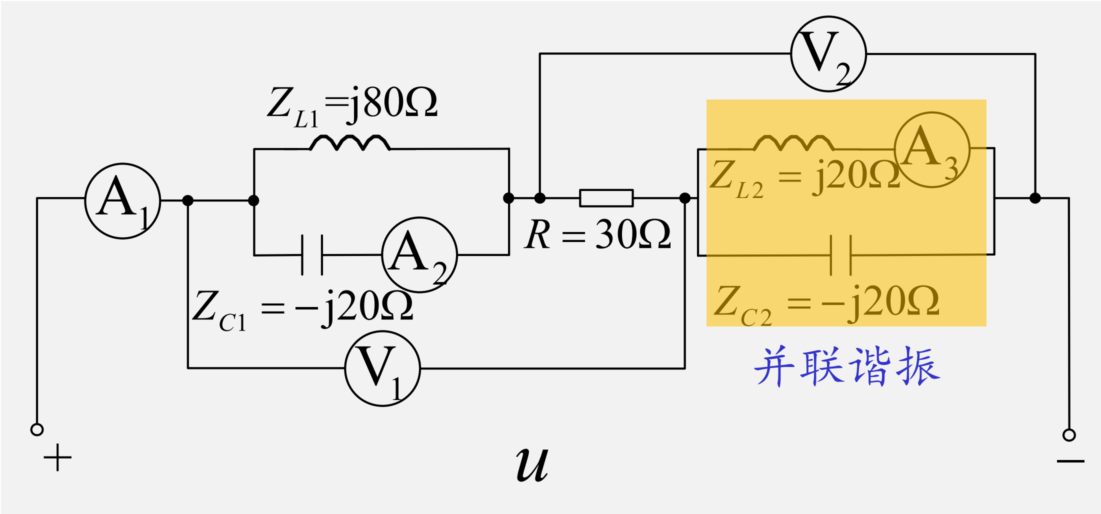
$$j\omega L_1 = j80\Omega$$

$$j\omega L_2 = j20\Omega$$

$$-j\frac{1}{\omega C_1} = -j20\Omega$$

$$-j\frac{1}{\omega C_2} = -j20\Omega$$

$$\dot{U}_2 = 60\angle 45^\circ\ \text{V}$$



$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{C12} = 0 \qquad \dot{U}_{\text{ad2}} = 0$$

$$\dot{U}_{\text{cb}2} = \dot{U}_2 = 60\angle 45^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{I}_{L22} = \frac{\dot{U}_2}{j\omega L_2} = \frac{60\angle 45^\circ}{j20} = 3\angle -45^\circ\ \text{A}$$

所求电压、电流的瞬时值为：

$$i = i_0 + i_1 + i_2 = 1\ \text{A}$$

$$i_{C1} = i_{C10} + i_{C11} + i_{C12} = 3\cos(1000t + 90°)\ \text{A}$$

$$i_{L2} = i_{L20} + i_{L21} + i_{L22} = 1 + 3\cos(2000t - 45°)\ \text{A}$$

$$u_{\text{ad}} = u_{\text{ad0}} + u_{\text{ad1}} + u_{\text{ad2}} = 30 + 120\cos 1000t\ \text{V}$$

$$u_{\text{cb}} = u_{\text{cb0}} + u_{\text{cb1}} + u_{\text{cb2}} = 30 + 60\cos(2000t + 45°)\ \text{V}$$

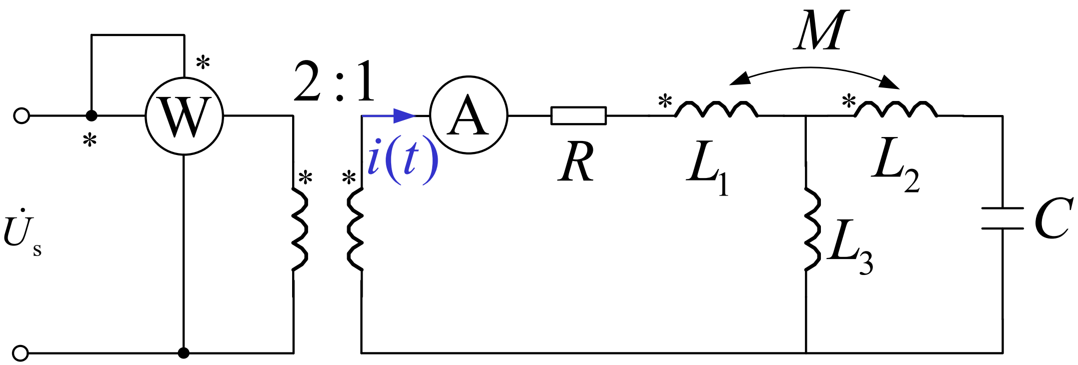
表A_1的读数：	1 A
表A_2的读数：	$3/\sqrt{2}$ =2.12 A
表A_3的读数：	$\sqrt{1^2+\left(3/\sqrt{2}\right)^2}$ =2.12 A
表V_1的读数：	$\sqrt{30^2+\left(120/\sqrt{2}\right)^2}$ =90 V
表V_2的读数：	$\sqrt{30^2+\left(60/\sqrt{2}\right)^2}$ =52 V

例 在图示电路中，$u_s(t)=(300\sqrt{2}\sin\omega t+200\sqrt{2}\sin 3\omega t)$，$R=50\Omega$，$\omega L_1=60\Omega$，$\omega L_2=50\Omega$，$\omega M=40\Omega$，$\omega L_3=20\Omega$， 且电感$L_3$的电流不含基波。计算电流$i(t)$、各表的读数。

正弦稳态电路及功率测量

磁耦合及变压器

叠加定理



解 （1）基波单独作用：

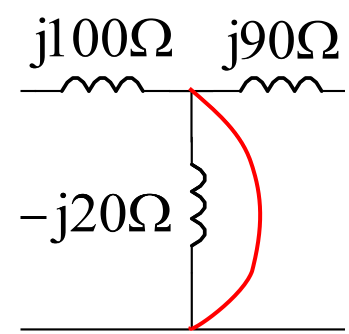
先去耦

电感L_3的电流不含基波

$$\rightarrow \dot{I}_{L3(1)}=0$$

$$\rightarrow \mathrm{j}90-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}=0$$

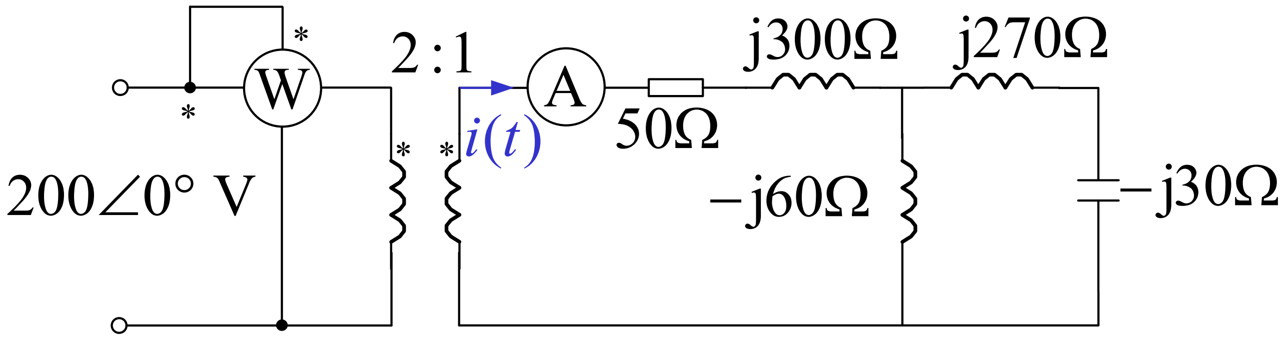
$$\frac{1}{\omega C}=90\Omega$$



$$\dot{I}_{(1)}=\frac{150}{50+\mathrm{j}100}=1.34\angle-63.4^\circ\ \mathrm{A}$$

$$P_{(1)}=RI_{(1)}^2=89.78\ \mathrm{W}$$

（2）3次谐波单独作用：



$$Z_{(3)}=50+\mathrm{j}300+\frac{-\mathrm{j}240\times\mathrm{j}60}{\mathrm{j}240-\mathrm{j}60}=50+\mathrm{j}220\ \Omega$$

$$\dot{I}_{(3)}=\frac{100\angle 0^\circ}{50+\mathrm{j}220}=0.44\angle-77.2^\circ\ \mathrm{A}\qquad P_{(3)}=RI_{(3)}^2=9.68\ \mathrm{W}$$

$$i(t)=1.34\sqrt{2}\sin\left(\omega t-63.4^\circ\right)+0.44\sqrt{2}\sin\left(3\omega t-77.2^\circ\right)\ \mathrm{A}$$

电流表读数： $I=\sqrt{1.34^2+0.44^2}=1.41\ \mathrm{A}$

功率表读数： $P=P_{(1)}+P_{(3)}=99.5\ \mathrm{W}$

$$P=50I^2=50\times1.41^2=99.5\ \mathrm{W}$$

作业

- 15.3节：15-6
- 15.4节：15-8，15-12
- 综合：15-21