期末试题（3）参考答案

一、1. $\{\sin y\sin z, \sin z\sin x, \sin x\sin y\}$；　　2. $(\frac{1}{e}, e)$；　　3. $\frac{1}{2}$；

4. $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos nh}{n}\sin nx, x\in(0,h)\cup(h,\pi]$；

5. $\int_{-1}^{1}dy\int_{-1}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\mathrm{d}x$；　　6. $M=48, m=-16$;　　7. $x^2+y^2=1+4z^2$.

二、　8. ×；　**9.** ×；　**10.** ×；　**11.** √.

三、

12. 解法 1：曲线 L 在 xOy 平面上的投影的方程为 $2x^2+y^2=4$，可得 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t, \\ y=2\sin t, \qquad t\in[0,2\pi] \\ z=2-\sqrt{2}\cos t, \end{cases}$$

$$I=\oint_L ydx+zdy+xdz$$

$$=\int_0^{2\pi}[2\sin t(-\sqrt{2}\sin t)+(2-\sqrt{2}\cos t)2\cos t+\sqrt{2}\cos t\sqrt{2}\sin t]dt$$

$$=-4\sqrt{2}\pi。$$

解法 2：取 S 为曲线 L 在平面 $x+z=2$ 上围成的半径为 2 的圆盘，上侧为正。根据斯托克斯公式得

$$I=\oint_L ydx+zdy+xdz=\iint_S(0-1)dydz+(0-1)dzdx+(0-1)dxdy$$

$$=-\iint_S(\frac{1}{\sqrt{2}}+0+\frac{1}{\sqrt{2}})dS=-\sqrt{2}\iint_S dS=-4\sqrt{2}\pi.$$

13. 解：设 D_1 为 D 在第一象限的部分，化为极坐标形式，有

$$D_1: 0\le r\le\sqrt{2\cos 2\theta},\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$$

再由对称性及极坐标系，得

原式$=\iint_D(x^2+2xy+y^2)dxdy=\iint_D(x^2+y^2)dxdy=4\iint_{D_1}(x^2+y^2)dxdy$

$$=4\iint_{D_1}r^2\cdot rdrd\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{2\cos 2\theta}}r^3dr=\frac{\pi}{2}.$$

四、 14. 解：由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1+(-1)^{n+1}}{(2n+2)!!}\cdot\frac{(2n)!!}{n+(-1)^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+2}=0$，

知，收敛半径 $R=+\infty$，所以收敛域为 $(-\infty,+\infty)$．和函数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+(-1)^n}{(2n)!!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+(-1)^n}{2^n n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{x}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+e^{-\frac{x}{2}}=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+e^{-\frac{x}{2}}=\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

15.解：L 的参数方程为： $x=\cos t, y=\sin t, z=\sin t, t\in[0,2\pi]$

$$\int_L z^2 ds=\int_0^{2\pi} z^2(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sin^2 t\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+(\cos t)^2}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sin^2 t\sqrt{1+\cos^2 t}dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\sqrt{1+\cos^2 t}dt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^2 t}\cdot\sqrt{1+\cos^2 t}d(-\cos t)$$

$$=4\int_0^1\sqrt{1-u^2}\cdot\sqrt{1+u^2}du=4\int_0^1\sqrt{1-u^4}du\quad(u=\cos t)$$

$$=4\int_0^1\sqrt{1-v}\frac{1}{4}v^{-\frac{3}{4}}dv\quad(v=u^4)=\mathrm{B}(\frac{1}{4},\frac{3}{2}).$$

16.解：记 $D: x^2+y^2\le 1$，补充两块平面 $S_1: z=0,(x,y)\in D$，取下侧，

$S_2: z=1,(x,y)\in D$，取上侧，并设 S,S_1,S_2 围成空间区域 V，则由高斯公式及对称性，

$$I=\oiint_{S+S_1+S_2}-\iint_{S_1}-\iint_{S_2}=\iiint_V(x-z)dv-0-\iint_D(x-y)dxdy$$

$$=-\iiint_V zdv=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^1 zdz=-\frac{\pi}{2}\ .$$

17. 解：$P(x,y)=\dfrac{y-1}{x^2+(y-1)^2}$，$Q(x,y)=\dfrac{-x}{x^2+(y-1)^2}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{x^2-(y-1)^2}{[x^2+(y-1)^2]^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$

P、Q 在 L 所围椭圆区域内有奇点 $(0,1)$，作圆 $l: x^2+(y-1)^2=\varepsilon^2$，取逆时针方向，且 $\varepsilon>0$，充分小，使 l 在 L 所围椭圆区域内部. 记 l 与 L 之间的区域为 D，l 所围区域为 D_1，则由格林公式，有

$$I=\int_L-\int_l+\int_l=\int_{L-l}+\int_l$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\int_l\frac{(y-1)dx-xdy}{\varepsilon^2}=0+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_l(y-1)dx-xdy$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_1}(-2)dxdy=\frac{-2}{\varepsilon^2}\iint_{D_1}dxdy=\frac{-2}{\varepsilon^2}\pi\varepsilon^2=-2\pi.$$

五、 18. 证：令 $u_n(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$，$v_n(x)=\arctan\dfrac{x}{n}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 收敛，因而一致收敛.

又对固定的 $x\in(-\infty,+\infty)$，$v_n(x)$ 单调，且 $|v_n(x)|<\dfrac{\pi}{2}$， 即 $v_n(x)$ 对 $x\in(-\infty,+\infty)$ 一致有界，由 Abel 判别法知，原级数一致收敛.

19. 证明：由题设知，$F(x,y,z)=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y),\ (x,y)\in D$，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z},$$

S 的面积为

$$A=\iint_S dS=\iint_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=\iint_D\sqrt{1+\left(-\frac{F'_x}{F'_z}\right)^2+\left(-\frac{F'_y}{F'_z}\right)^2}\,dxdy,$$

$$=\iint\limits_D\frac{\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}}{|F'_z|}\,dxdy$$

20. 证明：由题意知，$f_x(x_0,y_0)=0=f_y(x_0,y_0)$. 对充分小的 h，当

$(x_0+h,y_0)\in N((x_0,y_0))$ 时，有

$$\begin{aligned}f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)&=f_x(x_0,y_0)h+\frac{1}{2!}f_{xx}(x_0+\theta h,y_0)h^2\\&=\frac{1}{2!}f_{xx}(x_0+\theta h,y_0)h^2\ (0<\theta<1).\end{aligned}$$

由于 $f(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的极大值，所以当 h 充分小时，有

$$f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)\le 0,$$

于是
$$f_{xx}(x_0+\theta h,y_0)\le 0.$$

注意到 f_{xx} 的连续性，令 $h\to 0$，即得 $f_{xx}(x_0,y_0)\le 0$. 同理可得 $f_{yy}(x_0,y_0)\le 0$.

综上所得，$f_{xx}(x_0,y_0)+f_{yy}(x_0,y_0)\le 0$.