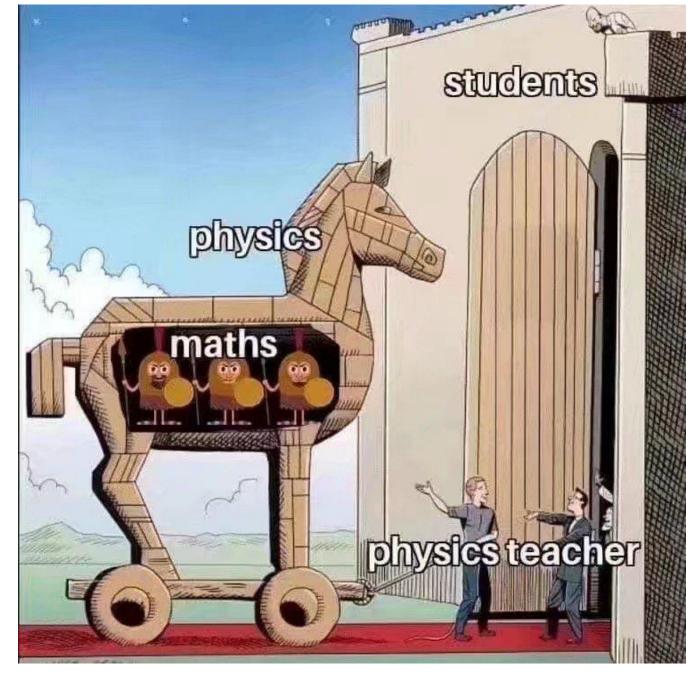
第8章

一阶电路的暂态分析

- 8.2 零输入响应 Zero-input response
- 8.3 直流电源激励下的响应
 - 8.3.1 直流电源激励的RC电路
 - 8.3.2 直流电源激励的RL电路
 - 8.3.3 RC电路的方波响应
 - 8.4 正弦电源激励下的RC电路
 - 8.6 线性非时变特性





一阶电路暂态分析



零输入响应

典路后外加激励为零,仅由动态元件初始储能产生的电压和电流。

零状态响应

→ 动态元件初始能量为零,由*t* >0电路中外加激励作用所产生 的响应。

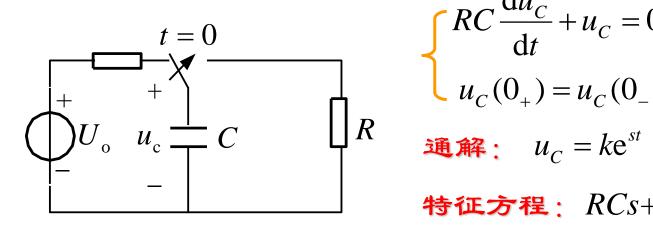
全响应

电路的初始状态不为零,同时 又有外加激励源作用时电路中 产生的响应。

8.2 零输入响应 Zero-input response



1. RC 电路



$$\begin{cases} RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 & t > 0 \\ u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0 \end{cases}$$

特征方程: RCs+1=0

特征根: $S = -\frac{1}{RC}$

$$u_C = k e^{-\frac{1}{RC}t}$$

代入初始值:
$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$$
 可得: $k = U_0$

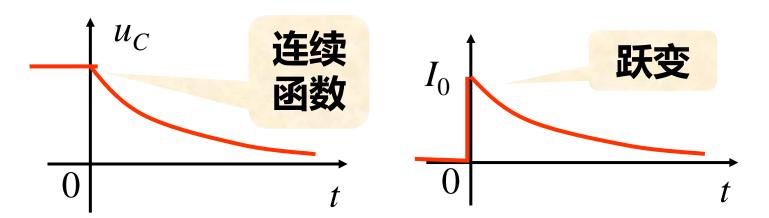
最终可得:
$$u_c = U_o e^{-\frac{1}{RC}t}$$

最终可得:
$$u_c = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \qquad t > 0 \qquad i = \frac{u_C}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$



几点规律:

①电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数;



②响应的衰减快慢与RC有关;

令 $\tau = RC$, 称 τ 为一阶电路的时间常数

$$[\tau] = [RC] = [欧] [法] = [欧] \left[\frac{\cancel{\text{c}}}{\cancel{\text{c}}} \right] = [\varSigma] \left[\frac{\cancel{\text{c}}}{\cancel{\text{c}}} \right] = [\varPsi]$$

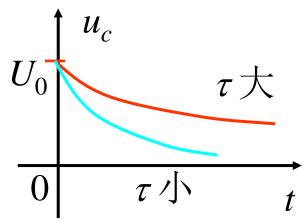


$\tau = RC$

时间常数τ的大小反映了电路过渡过程时间的长短

τ大→过渡过程时间长

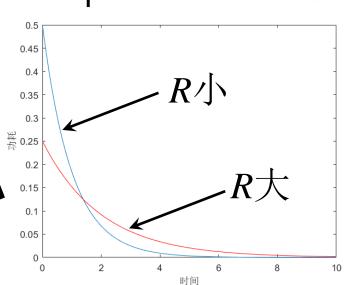
τ小→过渡过程时间短



电压初值一定:

C 大(R一定) $W=Cu^2/2$ 储能大

R 大(C一定) i=u/R 放电电流小





			2 au		
$u_c = U_0 e^{-\frac{t}{ au}}$	U_0	$U_0 e^{-1}$	$U_0 e^{ ext{-}2}$	$U_0 e^{-3}$	$U_0 e^{-5}$
			$0.135U_{0}$		

a. τ :电容电压衰减到原来电压36.8%所需的时间。 工程上认为, 经过 3τ - 5τ , 过渡过程结束。

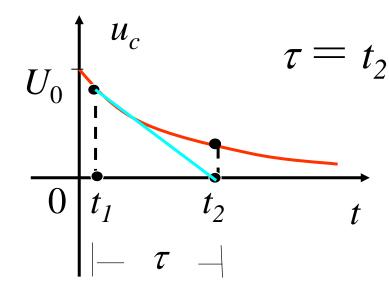


b. 时间常数 τ 的几何意义:

$$u_{\rm C} = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

tı时刻曲线的斜率等于

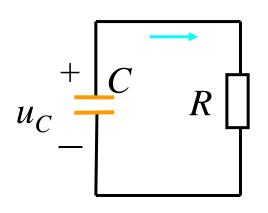
$$\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t_{1}} = -\frac{U_{0}}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\Big|_{t_{1}} = -\frac{1}{\tau}u_{\mathrm{C}}(t_{1}) = \frac{u_{\mathrm{C}}(t_{1}) - 0}{t_{1} - t_{2}}$$



工程上寻找时间常数的方法!



③能量关系



电容不断释放能量,直到全 部被电阻吸收消耗完毕.

设
$$u_C(0_+)=U_0$$

设 $u_C(0_+)=U_0$ 电容放出能量: $\frac{1}{2}CU_0^2$

电阻吸收 (消耗) 能量:

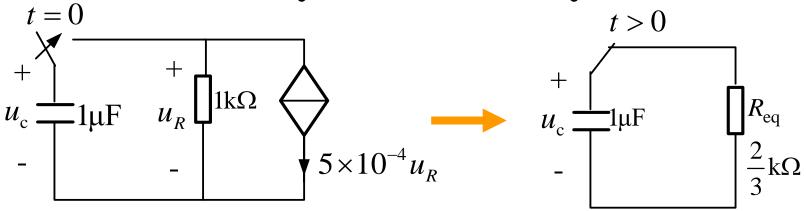
$$W_R = \int_0^\infty i^2 R dt = \int_0^\infty \left(\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 R dt$$

$$= \frac{U_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{U_0^2}{R} \left(-\frac{RC}{2} e^{-\frac{2t}{RC}}\right) \Big|_0^\infty = \frac{1}{2} C U_0^2$$

8.2 零输入响应 Zero-input response



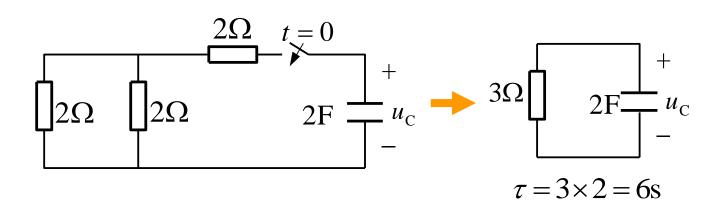
Example: Assume $u_c(0-)=10$ V. Find u_c for t>0.

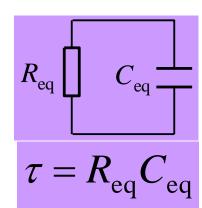


$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 10V$$

 $\tau = 1 \times \frac{2}{3} \times 10^{-3} s$

$$u_C(t) = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 10e^{-1500t}V$$

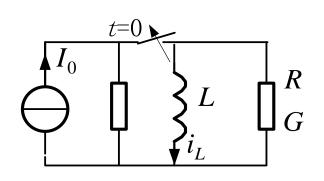


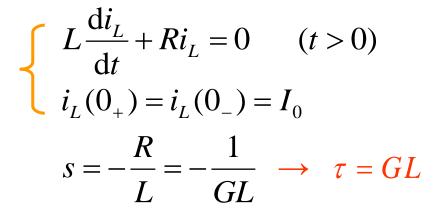


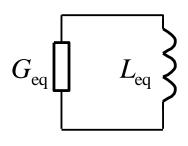
8.2 零输入响应 Zero-input response



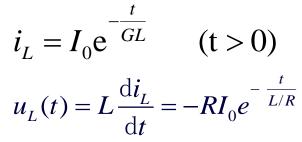
2. RL 电路

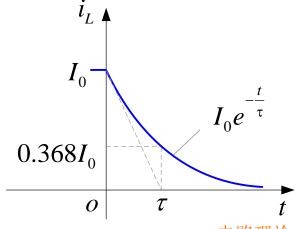


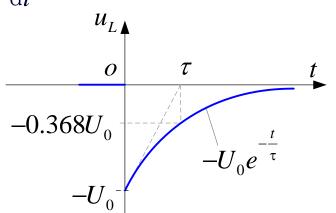




$$au = G_{
m eq} L_{
m eq}$$









$$\tau = L/R$$

 $\tau = I/R$ 称为一阶RL电路时间常数

$$[\tau] = \left[\frac{L}{R}\right] = \left[\frac{\bar{9}}{\bar{y}}\right] = \left[\frac{\bar{+}}{\bar{y} \cdot \bar{y}}\right] = \left[\frac{\dot{+} \cdot \bar{\psi}}{\bar{y} \cdot \bar{y}}\right] = \left[\frac{\dot{+} \cdot \bar{\psi}}{\bar{y}}\right] = \left[\frac{\dot{+} \cdot$$

时间常数 τ 的大小反映了电路过渡过程时间的长短 τ 大 \rightarrow 过渡过程时间长 τ 小 \rightarrow 过渡过程时间短



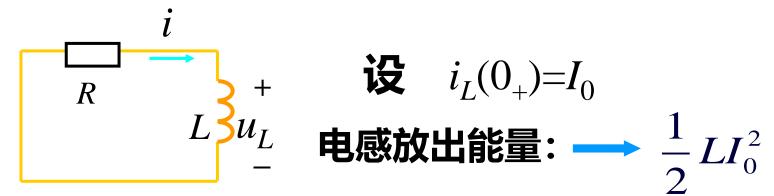
物理含义 电流初值 $i_L(0)$ 一定:

L大 $W=Li_1^2/2$ 起始能量大 R小 $P=Ri^2$ 放电过程消耗能量小

放电慢, ⋷大



电感不断释放能量被电阻吸收 直到全部消耗完毕。



电阻吸收(消耗)能量:-

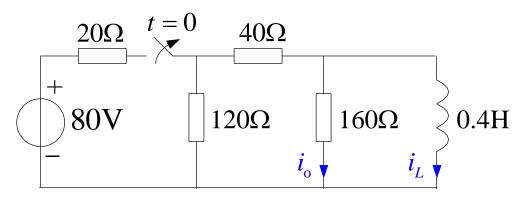
$$W_R = \int_0^\infty i^2 R dt = \int_0^\infty (I_0 e^{-\frac{t}{L/R}})^2 R dt$$

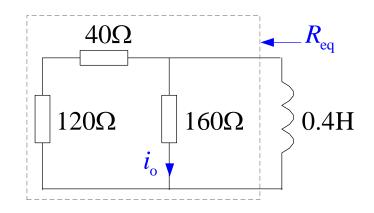
$$=I_0^2 R \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{L/R}} dt = I_0^2 R \left(-\frac{L/R}{2} e^{-\frac{2t}{RC}}\right) \Big|_0^\infty = \frac{1}{2} L I_0^2$$

8.2 零输入响应 Zero-input response



2. RL 电路





$$R_{\rm eq} = 80\Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R_{\text{eq}}} = \frac{0.4}{80} = 5 \times 10^{-3} \text{s}$$

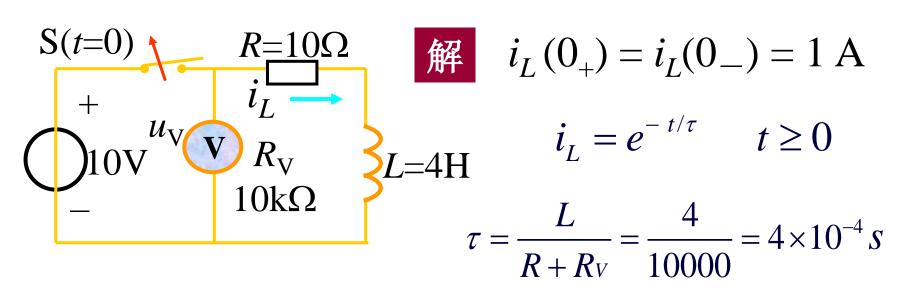
$$i_{I}(0_{-}) = 1.2A$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1.2A$$

$$i_{0}(0_{+}) = -\frac{(120+40)}{(120+40)+160} \times i_{L}(0_{+}) = -0.6A$$

$$i_{o} = i_{o}(0_{+})e^{-\frac{t}{\tau}} = -0.6e^{-200t}$$
 A $(t>0)$





$$u_V = -R_V i_L = -10000 e^{-2500t} \quad t \ge 0$$

$$u_V(0_+) = -10000V$$

造成 🔻 损坏。



小结

①一阶电路的零输入响应是由储能元件的初值引起的响应, 都是由初始值衰减为零的指数衰减 函数;

$$y(t) = y(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$RC$$
电路 $u_C(0_+) = u_C(0_-)$ $i_L(0_+) = i_L(0_-)$



②衰减快慢取决于时间常数 τ;



R为与动态元件相连的一端口电路的等效电阻

- ③同一电路中所有响应具有相同的时间常数;
- ④一阶电路的零输入响应和初始值成正比, 称为零输入线性。

8.3直流电源激励下的响应



8.3.1直流电源激励下的RC电路

8.3直流电源激励下的响应



直流电源激励下的一阶电路通解:

$$y(t) = [y(0_+) - y(\infty)]e^{-\frac{1}{\tau}t} + y(\infty)$$

分析一阶电路问题转为求解电路的三个要素的问题。

8.3.1 一阶电路的零状态响应



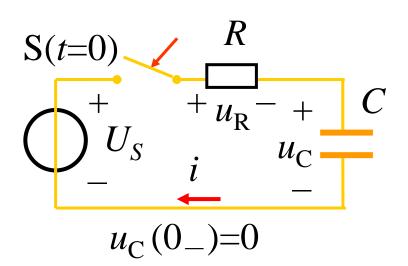
零状态响应

- ◆ 动态元件(电容或电感)初始能量为零,由t>0 电路中外加激励作用所产生的响应;
- ◆ 对应的微分方程为非齐次方程;
- ◆ 方程的初始条件为0 (零状态)。

数学问题:求解初始条件为()的非齐次微分方程!



1.RC电路的零状态响应

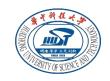


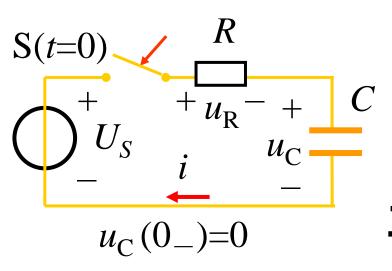
方程:

$$RC\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} + u_{\mathrm{C}} = U_{\mathrm{S}}$$

解的形式为:

$$u_c(t) = [u_c(0_+) - u_c(\infty)]e^{-\frac{1}{\tau}t} + u_c(\infty)$$





$$u_c(t) = [u_c(0_+) - u_c(\infty)]e^{-\frac{1}{\tau}t} + u_c(\infty)$$

三要素:

$$u_c(0_+) = u_c(0_-) = 0$$

$$u_c(\infty) = U_s$$

$$\tau = RC$$

$$u_{\rm C} = U_{\rm S} - U_{\rm S} e^{-\frac{t}{RC}} = U_{\rm S} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \qquad (t \ge 0)$$

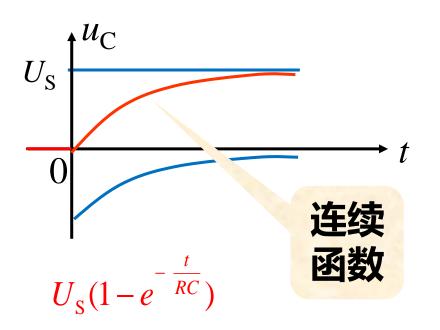
从以上式子可以得出:

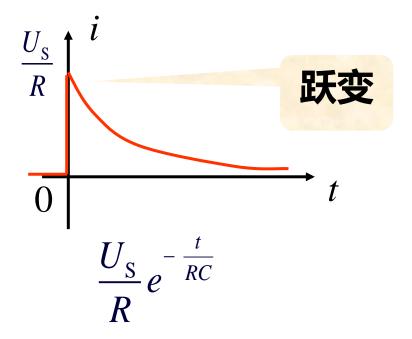
$$i = C \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} = \frac{U_{\mathrm{S}}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$



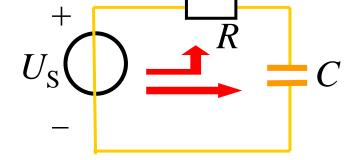


①电压、电流是随时间按同一指数规律变化的函数:





- ②响应变化的快慢,由时间常数 $\tau = RC$ 决定; τ 大,
 - 充电慢, τ小充电就快;
- ③响应与外加激励成线性关系;



④能量关系

电源提供能量:
$$\int_0^\infty U_{\rm S} i \mathrm{d}t = U_{\rm S} q = C U_{\rm S}^2$$

电阻消耗能量:
$$\int_0^\infty i^2 R \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(\frac{U_S}{R} e^{-\frac{I}{RC}}\right)^2 R \, \mathrm{d}t$$

电容储存能量:
$$\frac{1}{2}CU_{\mathrm{S}}^2$$
 $=\frac{1}{2}CU_{\mathrm{S}}^2$

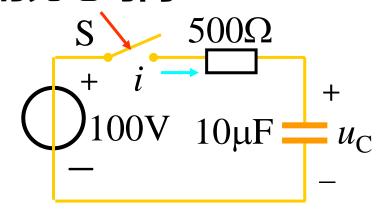
电源提供的能量一半消耗在电阻上,一半转换 成电场能量储存在电容中。





解 (1)这是一个RC电路零 状态响应问题, 有:

$$\tau = RC = 500 \times 10^{-5} = 5 \times 10^{-3} \,\mathrm{s}$$



$$u_{\rm C} = U_{\rm S}(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = 100(1 - e^{-200t}) V \quad (t \ge 0)$$

$$i = C \frac{du_{C}}{dt} = \frac{U_{S}}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = 0.2e^{-200t} A$$

(2)设经过 t_1 秒, $u_C = 80V$

$$80 = 100(1 - e^{-200t_1}) \rightarrow t_1 = 8.045 \text{ms}$$

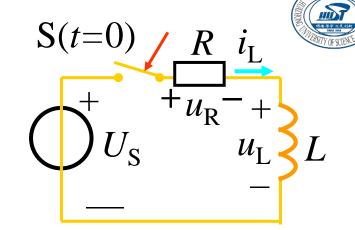
2. RL电路的零状态响应

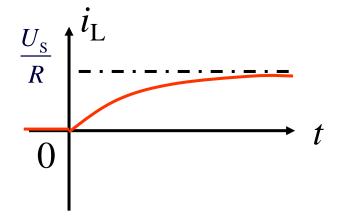
已知 $i_L(0_-)=0$,电路方程为:

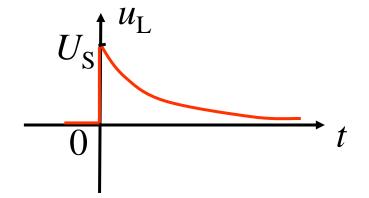
$$L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} + Ri_{\mathrm{L}} = U_{\mathrm{S}}$$

$$i_{\rm L} = \frac{U_{\rm S}}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

$$u_{\rm L} = L \frac{\mathrm{d}i_{\rm L}}{\mathrm{d}t} = U_{\rm S} e^{-\frac{R}{L}t}$$







8.3.2 一阶电路的全响应



全响应

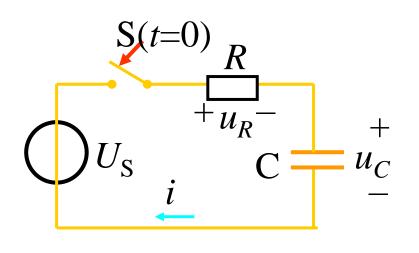


口 初值非零

口 外部有独立激励

1. 全响应

以RC电路为例, 电路微分方程:



$$RC \frac{du_{C}}{dt} + u_{C} = U_{S}$$

$$+ u_{C}$$

$$+ u_{C}$$

$$+ u_{C}$$

$$+ u_{C}$$

$$+ u_{C}$$

$$+ u_{C} = U_{S}$$

$$u_{c} = U_{s} + Ae^{\frac{-t}{\tau}} = U_{s} + (U_{0} - U_{s})e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \ge 0$$

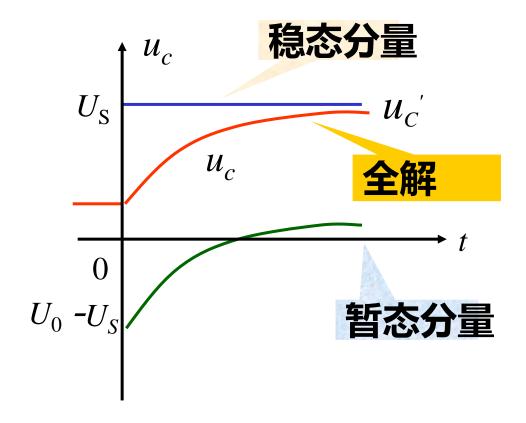
强制分量(稳态分量)

自由分量(暂态分量)



2. 全响应的两种分解方式

①着眼于电路的两种工作状态 → 物理概念清晰 全响应 = 强制分量(稳态分量)+自由分量(暂态分量)





②着眼于因果关系 — 便于叠加计算

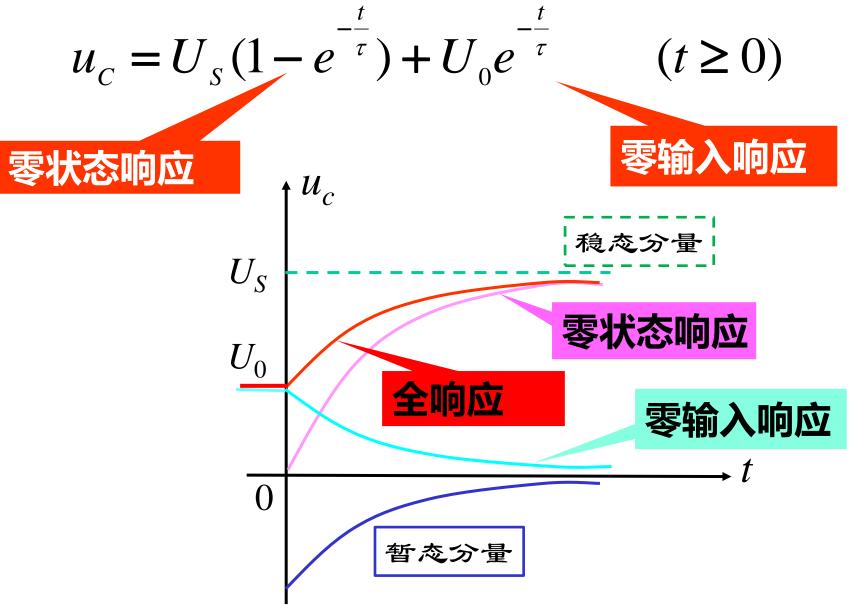
$$u_{c} = U_{s}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_{0}e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t \ge 0)$$

零状态响应

零输入响应

全响应 = 零状态响应 + 零输入响应







Practice Find u_c for t>0.

1. 微分方程+初始条件

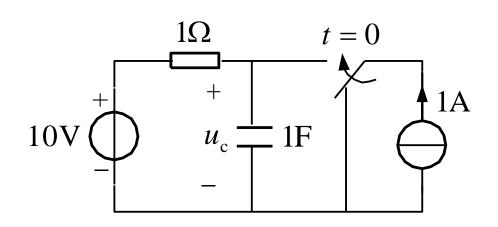
2. 三要素法:

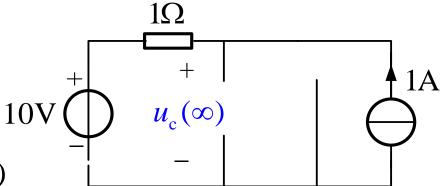
$$u_C(0_+) = 10V$$

$$u_C(\infty) = 11V$$

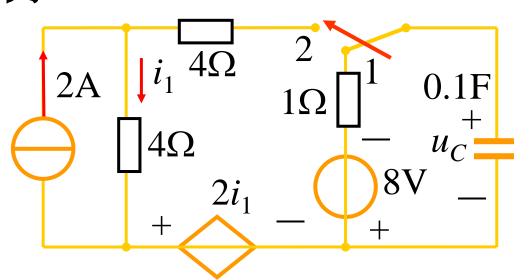
$$\tau = 1 \times 1 = 1$$
s

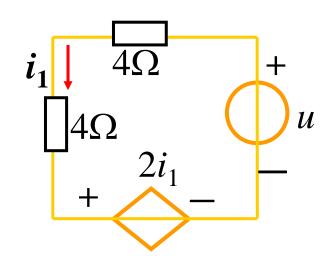
$$u_c(t) = [u_c(0_+) - u_c(\infty)]e^{-\frac{1}{\tau}t} + u_c(\infty)$$





例 已知: t=0时开关由 $1\to 2$,求换路后的 $u_C(t)$





解 三要素为:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = -8V$$

 $u_C(\infty) = 4i_1 + 2i_1 = 6i_1 = 12V$

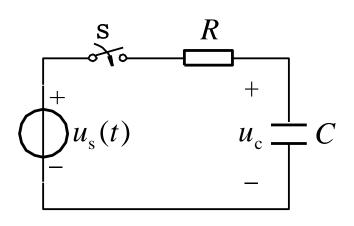
$$u = 10i_{1} \to R_{eq} = u / i_{1} = 10\Omega \longrightarrow \tau = R_{eq}C = 10 \times 0.1 = 1s$$
$$u_{C}(t) = u_{C}(\infty) + [u_{C}(0^{+}) - u_{C}(\infty)]e^{-t/\tau}$$

$$u_{\rm C}(t) = 12 + [-8 - 12]e^{-t} = 12 - 20e^{-t}V$$

2023/4/11 电路理论 32

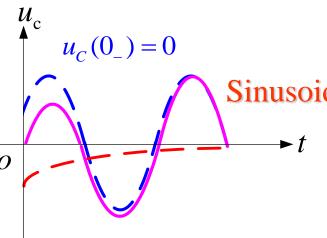
8.4正弦电源激励下的RC电路





$$u_{\rm s}(t) = U_{\rm m} \sin(\omega t + \phi)$$

$$u_{c}(0_{-}) = U_{0}$$



$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = u_s \qquad t > 0$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$$

$$u_C = k e^{-\frac{1}{RC}t} + u_{CP}$$

$$u_{CP} = A_{\rm m} \sin(\omega t + \theta)$$

$$\begin{cases} A_{\rm m} = \frac{U_{\rm m}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \\ \theta = \phi - \operatorname{arctg} \omega RC \end{cases}$$

Sinusoidal steady-state

$$u_{C} = (U_{0} - A_{m} \sin \theta)e^{-\frac{1}{RC}t} + A_{m} \sin(\omega t + \theta)$$
Transient Steady-state
component component

8.4正弦电源激励下的RC电路



$$u_{C} = (U_{0} - A_{m} \sin \theta)e^{-\frac{1}{RC}t} + A_{m} \sin(\omega t + \theta)$$
Transient Steady-state
component component

在零状态下,U0=0

$$u_C = -A_{\rm m} \sin \theta e^{-\frac{1}{RC}t} + A_{\rm m} \sin(\omega t + \theta)$$

当
$$\theta = \phi - \operatorname{arctg} \omega RC = 0$$
时

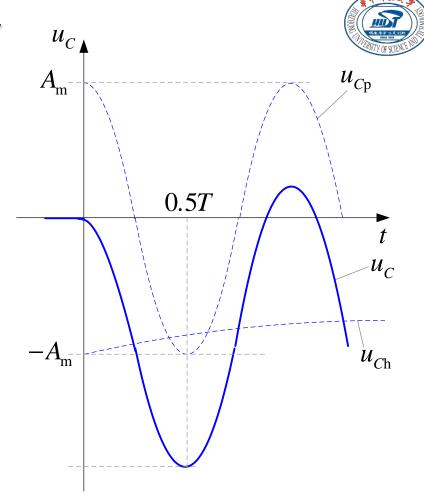
暂态分量的值为零,说明电压响应中没有暂态分量,也就 没有过渡过程,电路从换路一开始,就直接进入稳态。这是一种特殊情况。

8.4正弦电源激励下的RC电路

在零状态下, U₀=0

$$u_C = -A_{\rm m} \sin \theta e^{-\frac{1}{RC}t} + A_{\rm m} \sin(\omega t + \theta)$$

且当电路的时间常数 RC 远大于输入电源的周期时,则从换路起,经过半个周期左右的时间,电压的暂态分量衰减极为有限,暂态分量与稳态分量的叠加结果为



$$u_c \approx -A_m + A_m \sin 3\pi / 2 = -2A_m$$

这说明如果当电压的稳态分量经过极大值时换路,而电路的时间常数又大,则换路后电压的最大瞬时绝对值接近于稳态电压振幅的2倍。在工程中要注意电容器的耐压。

2023/4/11 电路理论 35



线性非时变电路:

- 除独立电源外,元件是线性、非时变元件。
- 线性非时变动态电路的微分方程是常系数线性微分方程。

线性特性:

1. 齐次性

若激励变为原来的k倍,则响应也相应的变为原来的k倍

如:

- 零状态响应,激励U_s与响应分量U_s(1 e^{-t/RC})成正比



线性特性: 2. 可加性

若激励 $x_1(t)$ 的响应为 $y_1(t)$, 激励 $x_2(t)$ 的响应为 $y_2(t)$, 则激励 $x_1(t) + x_2(t)$ 的响应为 $y_1(t) + y_2(t)$, 如:

● 全响应中电容初始电压U₀和直流电压源U_s共同激励的响应, 等于各自单独激励的响应之叠加

综合上述两点,线性非时变电路的线性特性体现为:

若激励 $x_1(t)$ 的响应为 $y_1(t)$,激励 $x_2(t)$ 的响应为 $y_2(t)$,则激

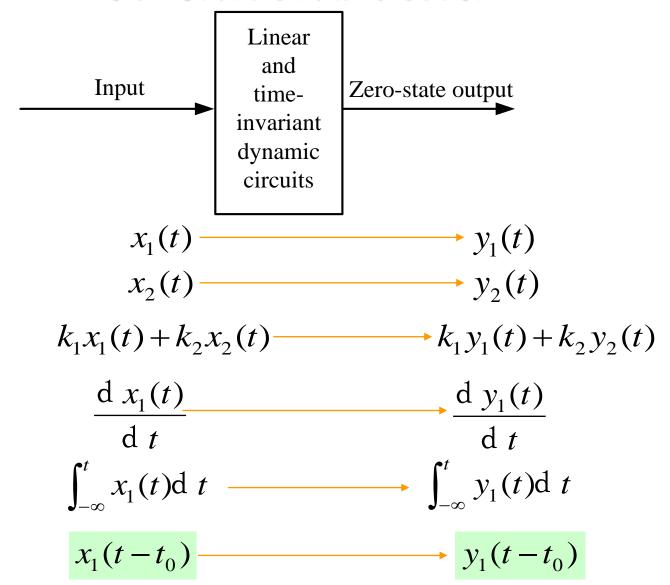
非时变特性:

线性非时变电路零状态响应的非时变特性体现为:

若激励 $x_1(t)$ 的响应为 $y_1(t)$,则激励 $x_1(t-t_0)$ 的响应为 $y_1(t-t_0)$



零状态响应与激励间的关系





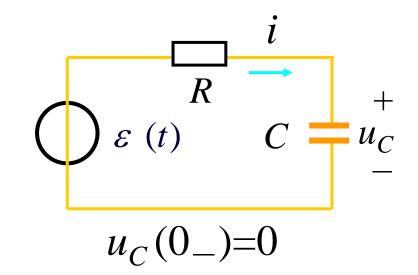




激励为单位阶跃函数时,电路中产生的零状态响应。

$$u_C(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$



注意

$$i = e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon (t)$$
 和 $i = e^{-\frac{t}{RC}}$ $t > 0$ 的区别

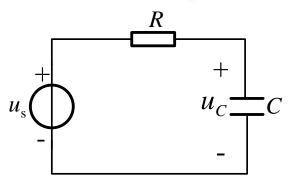


Practice: Find the zero-state response u_c .

$$u_{s} = [3\varepsilon(t) - 3\varepsilon(t - 5)]V$$

$$u_C = 3s(t) - 3s(t-5)$$

$$s(t) = [(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)]V$$



$$\begin{array}{c|c}
u_s \\
\hline
3V \\
\hline
0 \\
\hline
5s \\
t
\end{array}$$

$$u_{c} = \left[3(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t) - 3(1-e^{-\frac{t-5}{RC}})\varepsilon(t-5)\right]V$$

0<*t*<5: Zero-state response

$$u_C = 3(1 - e^{-\frac{t}{RC}})V$$

t>5: Zero-input response

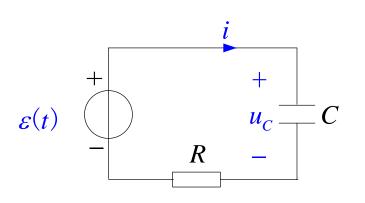
$$u_C(5-) = 3(1-e^{-\frac{5}{RC}}) = u_C(5+)$$

$$u_C(t) = 3(1-e^{-\frac{5}{RC}})e^{-\frac{t-5}{RC}}V$$

8.7冲激响应计算



单位阶跃响应与单位冲激响应



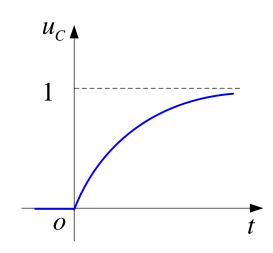
$$s(t)$$
:

$$u_C = (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \varepsilon(t)$$

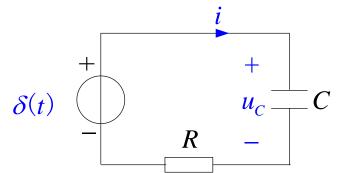
s(t):

$$u_{C} = (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \varepsilon(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$

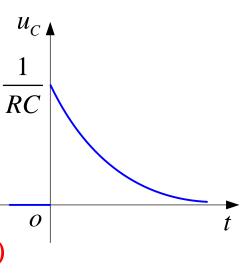


$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}$$



$$u_C(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$

$$i(t) = -\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) + \frac{1}{R}\delta(t)$$



8.7冲激响应计算



Practice: Find the impulse response i_L .

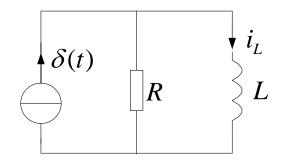
由阶跃响应获得冲激响应

$$s(t) = i_{L}(t) = i_{L}(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)$$

$$= (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)$$

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\delta(t) + \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$$

$$= \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$$

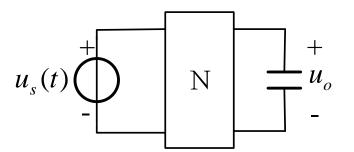


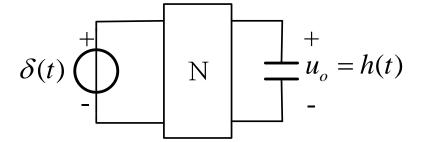
$$abla = rac{L}{R}$$

Practice:不含独立源的线性时不变网络N的零输入响应



为 $e^{-t}\mathcal{E}(t)$ V: 原始储能不变,电压源 $u_s(t) = \delta(t)$ V 激励下的全响 应为 $3 e^{-t} \mathcal{E}(t) V_o$ 试确定 $u_s(t) = \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t-1) V$ 下的零状态响应。

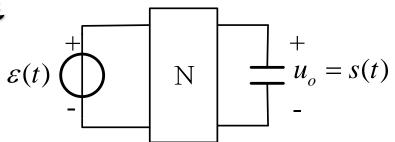




电压源 $u_s(t) = \delta(t) \vee$ 激励下的零状态

响应为:

$$h(t) = (3e^{-t} - e^{-t})\varepsilon(t) = 2e^{-t}\varepsilon(t)$$



$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t) dt = \int_{-\infty}^{t} 2e^{-t} \varepsilon(t) dt = (\int_{0}^{t} 2e^{-t} dt) \varepsilon(t) = (2 - 2e^{-t}) \varepsilon(t)$$

$$u_o(t) = (2 - 2e^{-t})\varepsilon(t) - [2 - 2e^{-(t-1)}]\varepsilon(t-1)$$

电路理论 2023/4/11 43

作业



• 8.2节: 8-2

• 8.3节: 8-13

• 8.5节: 8-37

• 8.6节: 8-41

• 8.7节: 8-48