期末试题（2）（150 分钟内完成）

一、填空题（每空 4 分，共 28 分）

1. 用 Beta 函数表示积分 $\int_0^2 (2-x)^{\frac{1}{4}} x^{\frac{3}{4}} dx =$ _______________.

2、级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\ln x)^n$ 的收敛域与和函数分别是___________和______________.

3、曲面 $z = 2x^2 + y^2 - xy$ 在点 $(1,1,2)$ 处的法线方程为_________________________.

4、函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$ 的 $Fourier$ 级数是__________________________.

5、设 $(x^{2015} + 4xy^3)\mathrm{d}x + (ax^2y^2 - 2y^{2016})\mathrm{d}y$ 在整个 xOy 面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，则 a

$=$ ____.

6、设 L 是圆周 $x^2 + y^2 = 1$，则 $\int_L (x-y)^2 ds \ =$ ______________.

7、设 L 为曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y \\ z = y \end{cases}$，从 z 轴正向看为顺时针，则 $\oint_L y^2 dx + xydy + xzdz =$_____.

二．判断题（每小题 2 分，共 8 分）．请在正确说法相应的括号中画“√ ”，在错误说法的括号中画“×”．

8. 若级数收敛，则其重排后的级数也必收敛，其和不变． (   )

9. 若函数 $f(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 都在区域 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连续，且 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛， 则 $\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} f_y(x,y)dx$． (   )

10. 若向量函数 $\vec{F}$ 在区域 Ω 上有二阶连续偏导数，则 $div(rot\vec{F}) = 0$． (   )

11. 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 沿任意方向的方向导数都存在，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微．

(   )

三、证明题（每小题 6 分，共 12 分）

12. 用定义证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(x+y^2)=1$.

13. 设 Ω 为上半球体 $x^2+y^2+z^2\le 1\,(z\ge 0)$，函数 f 在 Ω 上连续．证明：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(z)dxdydz=\pi\int_0^1 f(z)(1-z^2)dz\,.$$

四、计算题（每小题 7 分，共 28 分）

14．求函数 $f(x)=x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的 Maclaurin 展开式.

$$(\text{已知}\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n,\ \ x\in(-1,1)).$$

15. 设 $D=[0,1]\times[0,1]$，计算 $\iint\limits_{D}(x+y)\operatorname{sgn}(x-y)dxdy$.

16. 求密度均匀（$\mu=1$）的半球面 $\Sigma: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 对于 z 轴的转动惯量.

17. 计算 $I=\int_L(e^x\sin y-2(x+y))\mathrm{d}x+(e^x\cos y-x)\mathrm{d}y$，$L$ 是从原点 $O(0,0)$ 沿折线 $y=|x-1|-1$ 至点 $A(2,0)$ 的折线段.

五、证明题（每小题 8 分，共 24 分）

18. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 对于 x 在 $(0,2\pi)$ 内闭一致收敛.

19. 已知函数 $z=z(x,y)$ 满足 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$．设 $u=x$，$v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$，$\varphi=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$．证明：对函数 $\varphi=\varphi(u,v)$，成立 $\frac{\partial\varphi}{\partial u}=0$.

20. 设 Ω 为空间二维单连通区域，三元向量函数 $\vec{F}\in C^1(\Omega)$．证明：对 Ω 内任一闭曲面 Σ 都有 $\oiint\limits_{\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{n}dS=0$ 的充分必要条件是在 Ω 内恒有 $\nabla\cdot\vec{F}=0$，其中 $\vec{n}$ 为 Σ 的单位法向量.