第二篇　电磁学

电磁学是研究电磁相互作用的学科。

第6章　静电场

§6-1 电荷、库仑定律

一、电荷特性

1. 电荷是物质的基本属性，只有两种电荷。
2. 电荷是量子化的

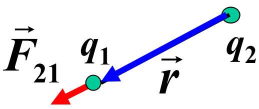
1906-1917年，密立根油滴实验证实了电荷的不连续性。

电荷：$q = ne \begin{cases} e = 1.602\times10^{-19}\text{C} \\ n = \pm1、\pm2、\pm3\ldots \end{cases}$

3. 电量是相对论不变量：与运动速度、参考系无关。
4. 电荷守恒定律：在一个和外界没有电荷交换的系统内，正负电荷的代数和保持不变。

二、库仑定律

1. 点电荷——理想模型
2. 库仑定律



$\vec{r} = r\hat{r}$

真空中两个静止点电荷q_1，q_2之间的相互作用力：$\vec{F}_{21} = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$

3. k 的取值（实验定律中的比例系数）

1）如果关系式中除比例系数以外，其它物理量的单位已经确定，那么只能由实验来确定k值。

如万有引力定律：$F = G\dfrac{M\,m}{r^2}$　（G 有量纲）

2）如果关系式中还有别的量尚未确定单位，则令 $k=1$

如牛顿第二定律：$F = kma = ma$

（力的单位由质量和加速度的单位确定）

库仑定律：

第一种　国际单位制中：$F = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o r^2}$ ⟶ 电荷、长度、力的单位是确定的

由实验确定：

$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o} = 8.988\times10^9\,Nm^2/c^2$

真空介电常数：

$\varepsilon_o = 8.85\times10^{-12}\,C^2/Nm^2$

增加 4π使今后电磁学公式简化

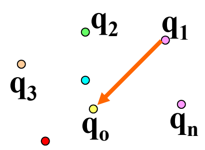
在介质中，介电常数 $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_o$

第二种　CGS静电系电量单位：电量的单位尚未确定

令$k=1$：$F = \dfrac{q_1 q_2}{r^2}$ ⟶ 由力、长度的单位确定电荷单位

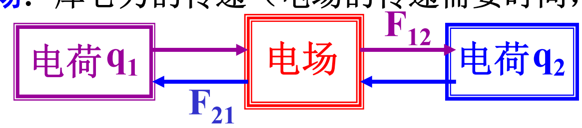
三. 静电力叠加原理

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\cdots+\vec{F}_n=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$$



§6-2 静电场、电场强度

1. 静电场：库仑力的传递（电场的传递需要时间，速度为光速 c ）

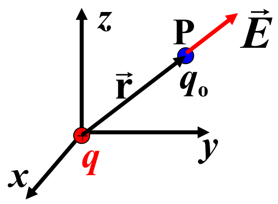


静电场：

A. 对其中的电荷有力的作用；

B. 电场力对移动电荷作功（电场具有能量）

2. 电场强度矢量

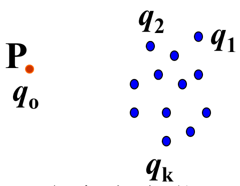


定义：$\vec{E}=\dfrac{\vec{F}}{q_o}$ $\qquad \vec{F}=\dfrac{qq_o}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r}$

P点处的场强：$\vec{E}=\dfrac{\vec{F}}{q_0}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r}$

由于点电荷为理想模型，不会出现 r 趋近0时，场强无穷大的情况。

q_o受合力：$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_k$



（多个点电荷）

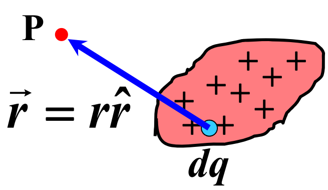
P点的电场：$\vec{E}=\dfrac{\vec{F}}{q_o}=\dfrac{\vec{F}_1}{q_o}+\dfrac{\vec{F}_2}{q_o}+\cdots\dfrac{\vec{F}_k}{q_o}$

$$=\sum_{i=1}^{k}\vec{E}_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_o r_i^2}\hat{r}_i$$ （场强叠加原理）

连续分布的带电体，由电荷元 dq 组成：

$$d\vec{E}=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E}=\int d\vec{E}=\int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r}$$



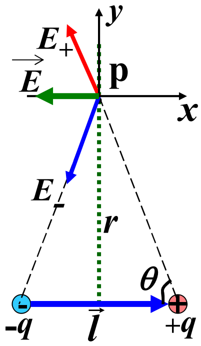
电场是一种物质。 **电场：矢量场**

均匀电场：在不同的空间点，场强大小、方向相同。

例1. 求电偶极子中垂线上任一点的电场强度。

电偶极子：相隔一定距离的等量异号点电荷

$$\vec{p}=q\vec{l}$$ ——电偶极矩



$$E_+=E_-=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o(r^2+\frac{l^2}{4})}\qquad E_y=0$$

$$E=E_x=-2E_+\cos\theta\qquad \cos\theta=\frac{l/2}{\left(r^2+l^2/4\right)^{1/2}}$$

$$\therefore\ E=-\frac{ql}{4\pi\varepsilon_o\left(r^2+l^2/4\right)^{3/2}}$$

当 $r>>l \rightarrow E=-\dfrac{p}{4\pi\varepsilon_o r^3}\qquad \vec{E}=-\dfrac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_o r^3}$

E 与 r^3 成反比，比点电荷电场递减的快

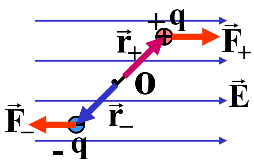
$E\propto ql$，$\vec{p}=q\vec{l}$ 是描述电偶极子属性的物理量

静电场对带电体的作用力:

一个点电荷 q 处在外电场 E 中，q 受到电场力：$\vec{F}=q\vec{E}$

一般的连续分布带电体：$\vec{F}=\int\vec{E}dq\qquad \vec{E}$: dq 处的场强

求一均匀电场中电偶极子的受力：

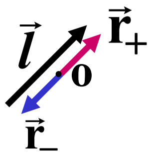


解：受力 $\left.\begin{aligned}\vec{F}_+&=q\vec{E}\\ \vec{F}_-&=-q\vec{E}\end{aligned}\right\}\vec{F}_{合}=\vec{F}_++\vec{F}_-=0$

相对O点的力矩：

$$\vec{M}=\vec{r}_+\times\vec{F}_++\vec{r}_-\times\vec{F}_-=q\vec{r}_+\times\vec{E}-q\vec{r}_-\times\vec{E}$$

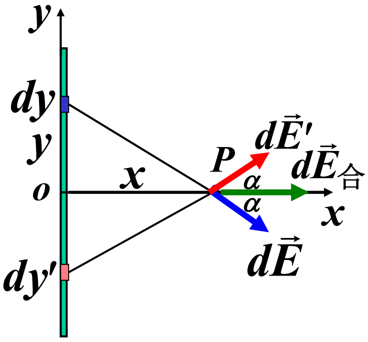
$$=q\left(\vec{r}_+-\vec{r}_-\right)\times\vec{E}=q\vec{l}\times\vec{E}$$



即：$\vec{M}=\vec{p}\times\vec{E}\begin{cases}|\vec{M}|=pE\sin\theta\\ \text{方向是使电偶极子转向电场方向}\end{cases}$

例2. 求均匀带电细棒中垂面上电场分布。

已知：棒长L，线电荷密度 λ



解：$dE=\dfrac{\lambda dy}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+y^2\right)}$

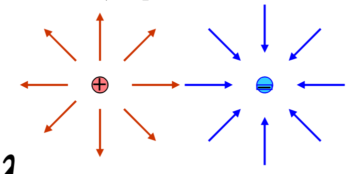
$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$E=\int dE_x=2\int_0^{L/2}\cos\alpha\, dE$$

$$E=\frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_o x\sqrt{x^2+L^2/4}}$$ 方向沿 x 轴

当 $L\to\infty$ (或$L>>x$)，则：

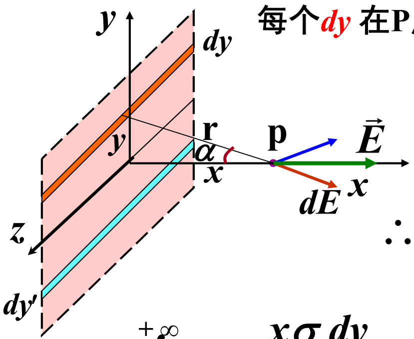
$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\xrightarrow{x=r}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}$$



方向沿径向向外（或向内）$\vec{E}=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}\hat{r}$　　柱对称电场

例3. 一无限大带电平面，面电荷密度σ，求其电场分布。

解：平面可看成无数条宽为 dy 的细线组成



每个dy 在P点产生的场为：

$$\boxed{\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}\hat{r}}$$

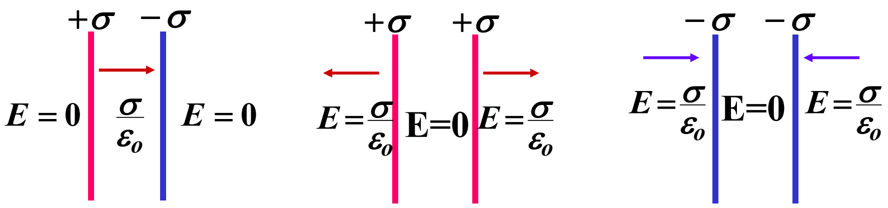
$$dE=\frac{\sigma\, dy}{2\pi\varepsilon_0 r}\qquad \sigma=\frac{dq}{dydz}$$

$$E_y=\int dE_y=0\qquad \lambda=dq/dz=\sigma dy$$

$$\therefore\ E=\int dE_x=\int dE\cos\alpha$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\qquad \cos\alpha=\frac{x}{r}$$

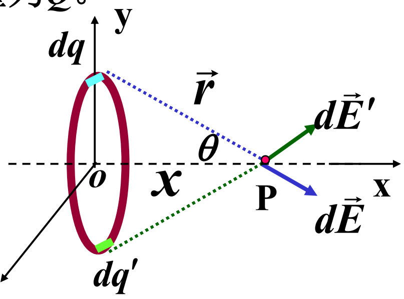
$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sigma\, dy}{2\pi\varepsilon_0\left(x^2+y^2\right)}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$ 方向垂直平面　　均匀场



例4. 求一均匀带电圆环轴线上的电场强度E

已知：圆环半径为R，带电量为Q。

解：在圆环上任取电荷元 dq



$E_{\perp}=0 \qquad d\vec{E}=\dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

$E=E_x \qquad dE_x=dE\cos\theta$

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$

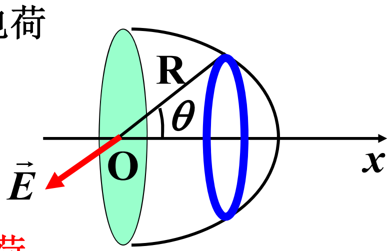
$$E=E_x=\int_{(Q)}\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta=\frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_{(Q)}dq$$

$$E=\frac{xQ}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$$

环心场强 $E=0$

若：$x>>R \quad E=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$ →点电荷　沿 x 轴场强存在极大值

例5. 半径为R的带正电半球面，电荷面密度为 $\sigma=k\cos^2\theta$（k为常数），求球心处的场强。



解：取如图所示的窄环带，其电荷：

$$dq=\sigma 2\pi R\sin\theta\cdot Rd\theta=2\pi kR^2\cos^2\theta\sin\theta d\theta$$

窄环带的场强：

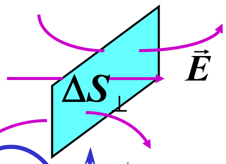
$$dE=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta=\frac{k}{2\varepsilon_0}\cos^3\theta\sin\theta d\theta$$

$$E=\int dE=\frac{k}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\sin\theta d\theta=\frac{k}{8\varepsilon_0}$$

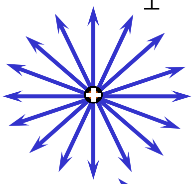
方向沿x 轴负向

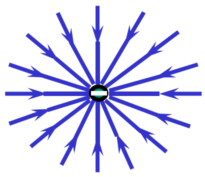
§6-3 静电场的高斯定理

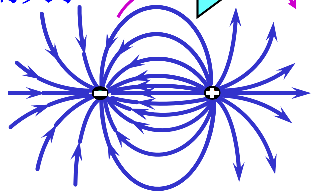
1. 电力线（电场线）切线方向表示电场强度方向



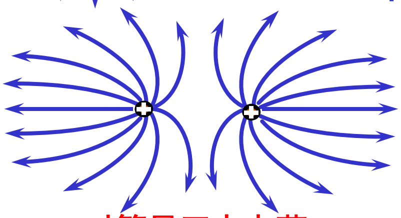
$$E=\frac{\Delta N}{\Delta S_{\perp}}$$ 电力线密度表示电场强度的大小

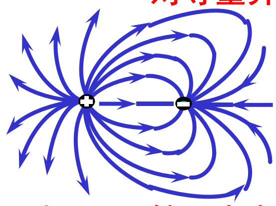






一对等量异号点电荷





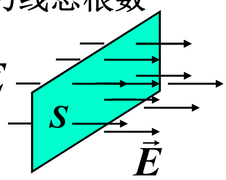
一对等量正点电荷　　　　一对异号不等量点电荷

（1）起于正电荷(或无穷远)止于负电荷(或无穷远)，不形成闭合线，在没有电荷的地方不中断。（2）在没有电荷的空间里，任何两条电力线不会相交。

2. 电通量 Φ_E 定义：通过电场中任一给定面的电力线总根数

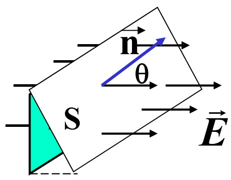
1）均匀电场

(1) S垂直电场或者说面法线 $\vec{n}\parallel\vec{E}$　　$\Phi_E=SE$



(2) 若$\vec{n}$ 与$\vec{E}$ 成 θ 角

$$\Phi_E=SE\cos\theta\begin{cases}\theta<90^{o} & \Phi_E>0\\ \theta>90^{o} & \Phi_E<0\end{cases}$$



2）非均匀电场

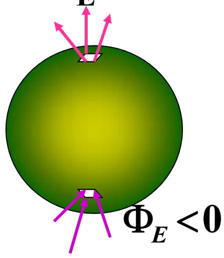
$$d\Phi_E=EdS\cos\theta=\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

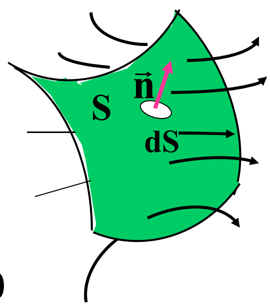
$d\vec{S}$矢量的方向：法线 $\vec{n}$

$$\Phi_E=\int d\Phi_E=\int_s\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

当S为闭合曲面时：

$$\Phi_E=\oint_S\vec{E}\cdot d\vec{S}$$





闭合面的法线：
自内向外为法线的正方向

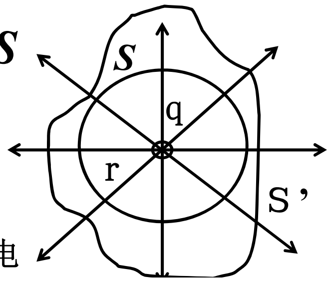
3. 真空中静电场的高斯定理

高斯定理: $\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o}\sum_{S内} q_i = \frac{1}{\varepsilon_o}\int_V \rho \cdot dV$

（1）点电荷的静电场

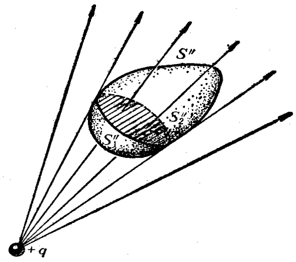
$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S E dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_S dS$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



作任一形状的闭合曲面S'包围q，穿过S'的电力线数目与穿过S面的一样:

$$\Phi_E = \oint_{S'} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



若点电荷q在闭合曲面S'之外:

$$\Phi_E = 0$$

（2）任意带电体系的静电场

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_k$$

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{E}_1\cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{E}_2\cdot d\vec{S} + \cdots + \oint_S \vec{E}_k\cdot d\vec{S}$$

$$= \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \cdots + \Phi_{Ek} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

$\sum_i q_i \rightarrow$ 被包围在 S 面内的那部分电荷的代数和

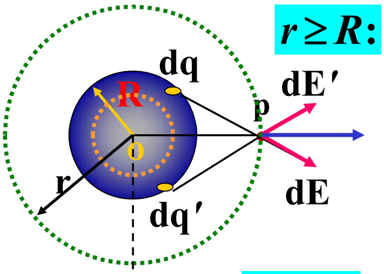
a）封闭面S（高斯面）上的场强，是由全部电荷（S内外）共同产生的。

b）Φ_E只决定于S面包围的电荷，S面外的电荷对Φ_E无贡献。

c）静电场是有源场。

正负电荷就是场源 $\begin{cases} \sum q_i > 0 & \Phi_E > 0 \text{ 电力线穿出} \\ \sum q_i < 0 & \Phi_E < 0 \text{ 电力线穿入} \end{cases}$

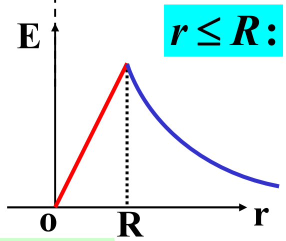
例1.求均匀带电球的电场分布。设半径为R，电量为q。



$r \ge R$: $\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint E dS = E\cdot 4\pi r^2$

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_o}\int_V dq = \frac{1}{\varepsilon_o} q$$

$$\therefore E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \quad \text{方向为} \vec{r}$$



$r \le R$: $\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint E dS = E\cdot 4\pi r^2$

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_o}\int_V dq = \frac{1}{\varepsilon_o}\int_V \rho\cdot dV$$

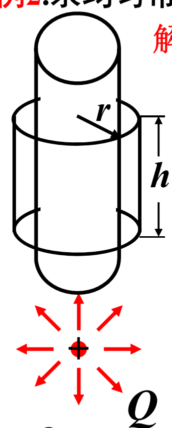
$$= \frac{\rho}{\varepsilon_o}\frac{4}{3}\pi r^3$$

均匀带电球面的内部场强为零

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \therefore E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \quad \therefore E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \quad \text{方向为} \vec{r}$$

可见点电荷的电场在 $r \to 0$ 时，$E \not\to \infty$

例2.求均匀带电的无限长圆柱棒的电场分布，已知电荷线密度λ。



解：$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{侧面} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{上底} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{下底} \vec{E}\cdot d\vec{S}$

$$= \int_{侧面} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\int_{侧面} dS = E\cdot 2\pi r\cdot h$$

$r > R$: $\Phi_E = \frac{\lambda h}{\varepsilon_o}$ $\quad \therefore E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}$

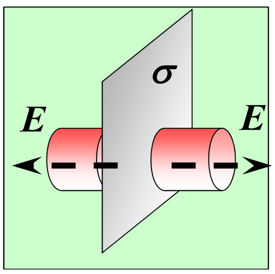
均匀带电圆柱面内部场强为零

$r < R$: $E\cdot 2\pi r h = \frac{\rho}{\varepsilon_o}\pi r^2 h$ $\quad \therefore E = \frac{\rho}{2\varepsilon_o} r$

$$\rho = \frac{Q}{\pi R^2 h}, \quad \lambda = \frac{Q}{h} \quad \therefore \lambda = \rho\pi R^2$$

例3. 计算无限大均匀带电平面的场强分布。(电荷面密度为σ)

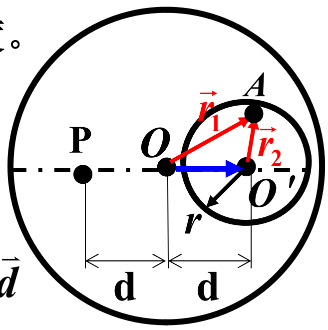
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\Phi_{E底} = 2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



例4. 球体内均匀分布着电荷体密度为ρ的正电荷，求：

（1）球形空腔内任一点处的电场强度。

（2）球体内 P点处的电场强度



解： (1) 空腔内A点的场强：

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{大球} - \vec{E}_{小球} \qquad \overrightarrow{OO'} = \vec{d}$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_1 - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{OO'} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{d}$$

均匀电场

(2) P点场强：

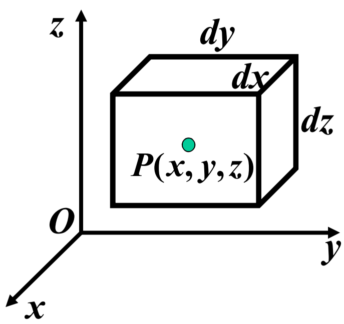
$$\vec{E}_P = \vec{E}_{大球} - \vec{E}_{小球} \qquad \vec{E}_{小球} = -\frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 (2d)^2}\hat{d}$$

$$= -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{d} + \frac{\rho r^3}{12\varepsilon_0 d^3}\vec{d} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^3}{4d^3} - 1\right)\vec{d}$$

4. 高斯定理的微分形式：

P点在体积元 $dxdydz$ 中心

计算穿过体积元的电通量：



$$d\Phi_{上} = \left(E_z + \frac{\partial E_z}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dxdy$$

$$d\Phi_{下} = -\left(E_z - \frac{\partial E_z}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dxdy$$

$$d\Phi_z = d\Phi_{上} + d\Phi_{下} = \frac{\partial E_z}{\partial z}dxdydz$$

同理：

$$d\Phi_x = \frac{\partial E_x}{\partial x}dxdydz$$

$$d\Phi_y = \frac{\partial E_y}{\partial y}dxdydz$$

$$d\Phi = d\Phi_x + d\Phi_y + d\Phi_z$$

$$= \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho dxdydz$$

→（高斯定理）

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

单位体积的电通量

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

梯度算符：$\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$

电场强度的散度：$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ （有源场）

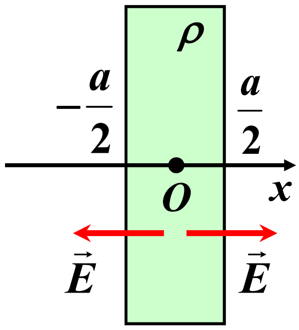
例5. 计算厚度为 a 的无穷大均匀带电平板的电场分布，电荷体密度为 ρ。

解： 根据对称性：$\vec{E}=E_x\vec{i}$ $\quad E_{x=0}=0$

$-\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2}$： $\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\therefore E_x=\frac{\rho}{\varepsilon_0}x+c,\qquad c=0$

$x<-\frac{a}{2},\ x>\frac{a}{2}$ 时： $\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}=0$



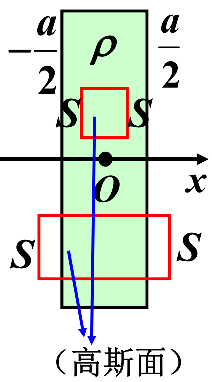
$$E(x)=\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}\quad(x\ge\frac{a}{2}),\qquad E(x)=-\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}\quad(x\le-\frac{a}{2})$$

例6. 计算厚度为 a 的无穷大均匀带电平板的电场分布，电荷体密度为 ρ。

解：根据对称性，电场沿 x 轴方向。

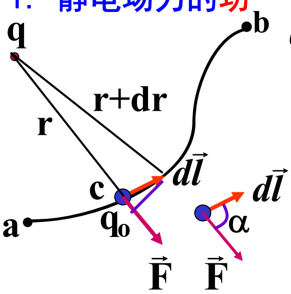
在板内：$|x|<\frac{a}{2}$ $\quad 2ES=\frac{2\rho xS}{\varepsilon_0}\Rightarrow E=\frac{\rho x}{\varepsilon_0}$

在板外：$|x|\ge\frac{a}{2}$ $\quad 2ES=\frac{\rho aS}{\varepsilon_0}\Rightarrow E=\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$



§ 6-4 静电场力作功

1. 静电场力的功



$$dA=\vec{F}\cdot d\vec{l}=Fdl\cos\alpha=Fdr$$

$$A=\int q_o E dr=\int_a^b\frac{q_o q}{4\pi\varepsilon_o r^2}dr=\frac{q_o q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

$$\frac{A}{q_o}=\int\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

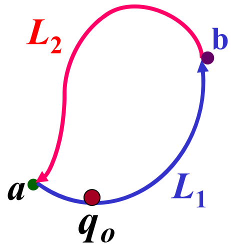
单个点电荷产生的电场中，电场力作功与路径无关。---保守力

点电荷系产生的电场中：

$$A=\int \vec{F}\cdot d\vec{l}=\int q_o\vec{E}\cdot d\vec{l}=q_o\int(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_k)\cdot d\vec{l}$$
$$=q_o\int \vec{E}_1\cdot d\vec{l}+q_o\int \vec{E}_2\cdot d\vec{l}+\cdots+q_o\int \vec{E}_k\cdot d\vec{l}$$

每一项都与路经无关，静电场力作功与路经无关，静电场力是保守力，静电场是保守力场。

2. 环路定理



$$A=\oint q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{a\,(L_1)}^{b} q_o\vec{E}\cdot d\vec{l}+\int_{b\,(L_2)}^{a} q_o\vec{E}\cdot d\vec{l}$$
$$=\int_{a\,(L_1)}^{b} q_o\vec{E}\cdot d\vec{l}-\int_{a\,(L_2)}^{b} q_o\vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$ 静电场的环路定理：场强的环流为0——无旋场。

静电场两个基本性质：
- 高斯定理：有源场
- 环路定理：无旋场

§6-5 静电势能和电势

静电力为保守力，保守力所作的功，等于势能增量的负值：

$$A_{12}=\int_1^2 q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}=-(W_2-W_1)=W_1-W_2$$

$$\frac{A_{12}}{q_0}=\int_1^2\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{W_1}{q_0}-\frac{W_2}{q_0}=V_1-V_2$$ 存在由位置确定的标量函数：电势、电势能

电场中任意点的电势：$V_p=\int_p^{V=0}\vec{E}\cdot d\vec{l}$ 单位：V 或 J/C (伏特或焦耳/库仑)

电势零点选取的一般方法：

a）电荷分布在有限空间，取无穷远为 $V=0$ 点

b）电荷分布在无限空间，取有限远点为 $V=0$ 点

静电势能：$W=q_0V$

点电荷的电势（沿径向积分，无穷远电势为零）：

$$V=\int_r^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\infty}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}$$

1）用定义法求电势：$V_p = \int_p^{V=0} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

2）用叠加法求电势：　一个点电荷的电势：$V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o r}$

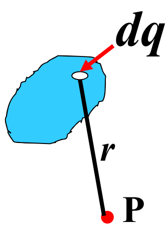
点电荷系的电势：$V_P = \int_P^{V=0\text{处}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^{V=0\text{处}} \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_k\right) \cdot d\vec{l}$

$$= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_o r_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_o r_2} + \cdots + \frac{q_k}{4\pi\varepsilon_o r_k} = \sum_i V_i = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_o r_i}$$

电势叠加原理

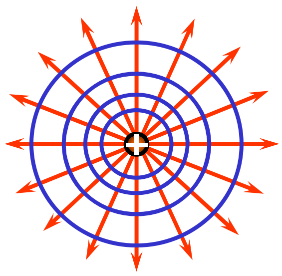
连续带电体的电势：

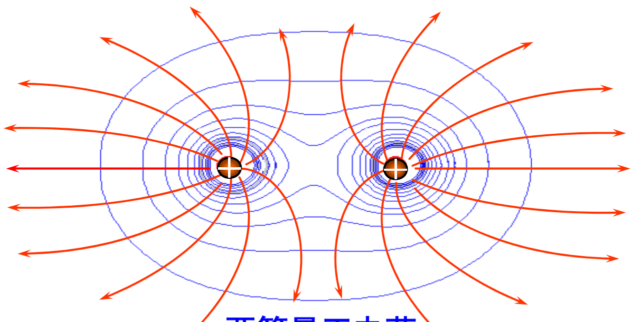
$$V_P = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o r}$$



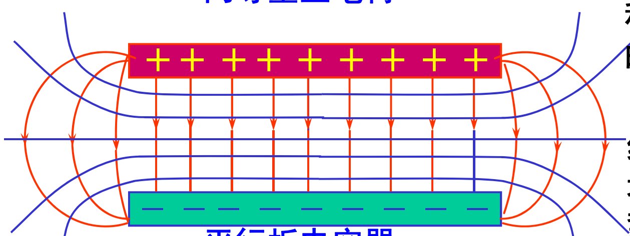
电势是标量，积分是标量叠加。
∴电势叠加比电场叠加要简便。

等势面：等势面确实存在，并能实验测定。





两等量正电荷



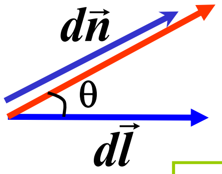
平行板电容器

等势面与电场分布的关系：

(1) 在同一等势面上移动电荷，电场力的功恒等于0。

(2) 等势面与电场线处处正交，且电场线的方向指向电势降低的方向。

电势梯度 $V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} \;\Rightarrow -dV = \vec{E}\cdot d\vec{l}$（微分关系）



$$-dV = Edl\cos\theta$$

$$E\cos\theta = E_l = -\frac{dV}{dl}$$

E 沿某方向的分量等于电势在此方向空间变化率的负值。——等势面密集处电场强。

若 $d\vec{n}$ 沿电场方向：

$$E_n = E = -\frac{dV}{dn}$$

$E_n > 0 \;\Rightarrow \frac{dV}{dn} < 0$（沿电场方向电势下降）

将最大值称为该点的电势梯度

沿垂直电场方向：$\frac{dV}{dl} = 0$

场强单位：V/m=N/C

（伏特/米＝牛顿/库仑）

一般的，若电势函数用直角坐标表示：$V = V(x, y, z)$

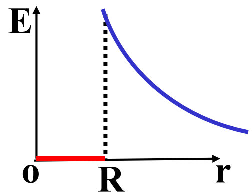
$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right) \qquad \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

例1. 真空中一半径为R的球面，均匀带电Q，求带电球所在空间任意一点P的电势。

解：由高斯定理求电场分布：

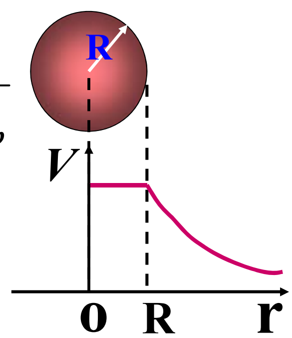
$$\begin{cases} r < R & E = 0 \\ r > R & \vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r} \end{cases}$$



设 r→∞，V=0：

P点处在球外 r>R：

$$V_p = \int_p^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_P^{r=\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\cdot dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r_p}$$



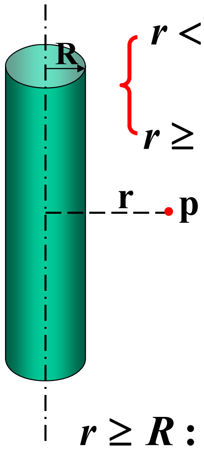
P点处在球内 r<R：

$$V_p = \int_p^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{r=R}^{r=\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R}$$

（球内场强为零，球内等电势）

例2.半径为R的无限长带电圆柱，电荷体密度为ρ，求离轴为r处的电势。解：由高斯定理求得电场：

$$\boxed{V_p = \int_p^{V=0} \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$



$$\begin{cases} r<R & \vec{E} = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_o}\vec{r} \\ r\ge R & \vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}\hat{r} = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{r} \end{cases}$$

$$Q = \pi R^2 L\cdot\rho$$

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \pi R^2\rho$$

若设无穷远电势为零：

$$V_P = \int_P^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty}\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}dr = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{\infty}{r}$$ 无意义

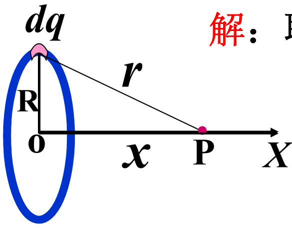
设 r= R处，V= 0：

$$r\ge R:\quad V_P = \int_P^{V=0}\vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_r^{R}\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o r}dr = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\ln\frac{R}{r}$$

$$r<R:\quad V_P = \int_r^R \frac{\rho}{2\varepsilon_o} r\cdot dr = \frac{\rho}{4\varepsilon_o}\left(R^2-r^2\right)$$

$$\boxed{r=0,\quad V_{\max} = \frac{\rho}{4\varepsilon_o}R^2}$$

例3. 计算均匀带电Q的圆环轴线上任意一点P的电势。



解：取环上电荷元dq，其在P点产生的电势：

$$V_p = \int dV = \int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_o r} = \int_Q \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o\sqrt{R^2+x^2}}$$

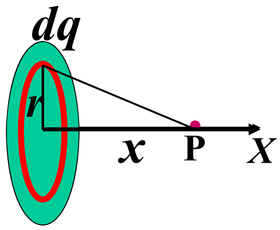
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o\sqrt{R^2+x^2}}$$

相当于点电荷

(1)当x= 0，$V_P = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o R}$（最大） (2)当x >>R，$V_P = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o x}$

(3)若是一带电圆盘？

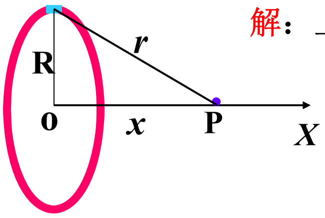
dq=σ2πrdr



$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o\sqrt{r^2+x^2}}$$

$$V = \int_0^R \frac{2\pi\sigma r dr}{4\pi\varepsilon_o\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(\sqrt{R^2+x^2}-x\right)$$

例4.求均匀带电Q,半径为R的圆环轴线上任意一点的场强。



解：上题求出P点的电势：

$$V_P = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o\sqrt{R^2+x^2}}$$

P点的电场：

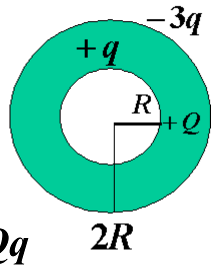
$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_o\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

方向沿 X 轴。

求E的三种方法：

- 点电荷电场叠加：$\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$
- 用高斯定理求对称场。
- 电势梯度法。

例5. 二球面，带电量 -3q、+q，将 +Q 从R处由静止释放，该粒子到达外球面的动能？



解：用高斯定理可求出场强：$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

$$E_k = A = Q\int_R^{2R}\vec{E}\cdot d\vec{r} = Q\int_R^{2R}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{Qq}{8\pi\varepsilon_0 R}$$