第9章

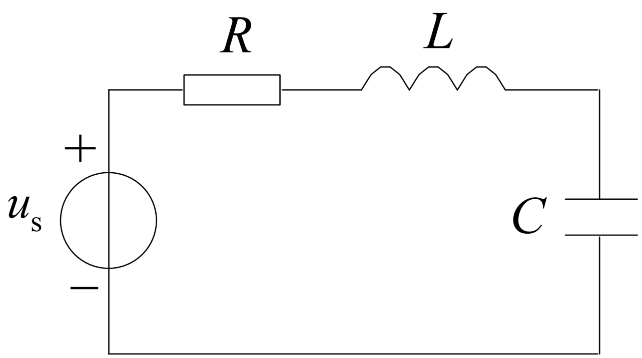
二阶电路的暂态分析

9.1 二阶电路

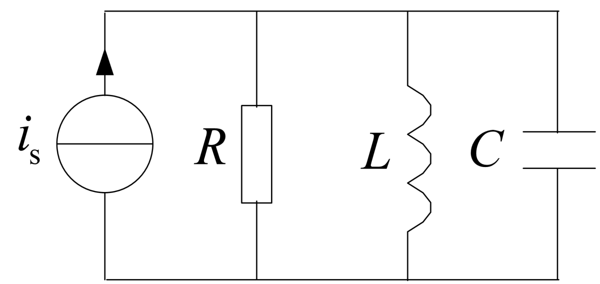
9.2 零输入响应（自然响应）

9.3 直流电源激励下的响应

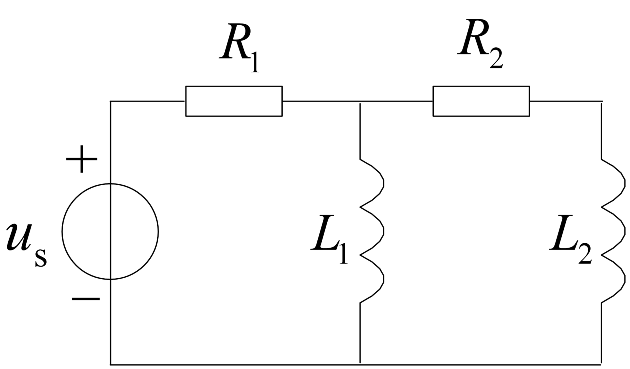
9.1 二阶电路



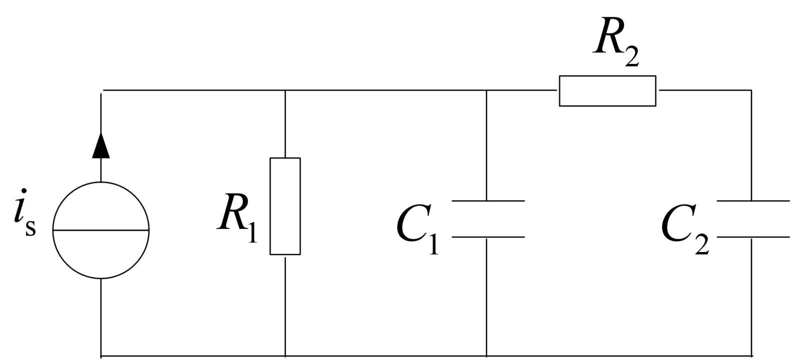
RLC串联电路



RLC并联电路



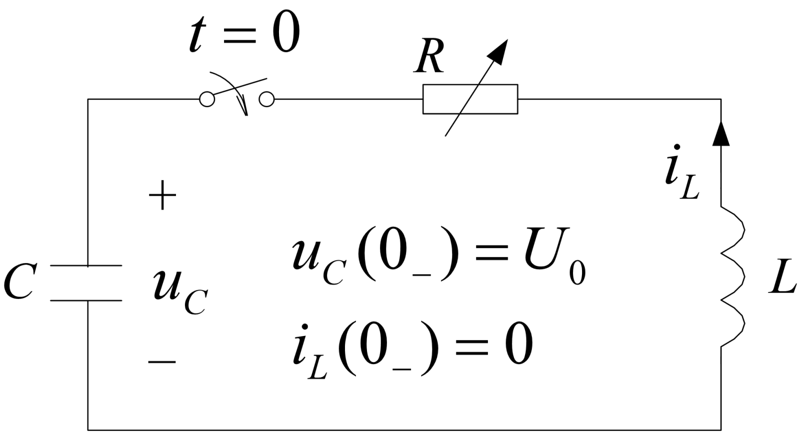
一般二阶RLL电路



一般二阶RCC电路

9.2 二阶电路的零输入响应

——暂态分量的变化规律



$$\begin{cases} \dfrac{d^2u_C}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{1}{LC}u_C = 0 \\ u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0 \\ \left.\dfrac{du_C}{dt}\right|_{0_+} = \dfrac{i_C(0_+)}{C} = \dfrac{i_L(0_+)}{C} = 0 \end{cases}$$

特征方程：

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$LCs^2 + RCs + 1 = 0$$

特征根：

$$s_{1,2} = \frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

令$\alpha = \dfrac{R}{2L}$ (衰减系数)，$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ (谐振角频率)

$$= -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

9.2 二阶电路的零输入响应

——暂态分量的变化规律

特征根：

$$s_{1,2}=\frac{-RC\pm\sqrt{(RC)^2-4LC}}{2LC}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{(\frac{R}{2L})^2-\frac{1}{LC}}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

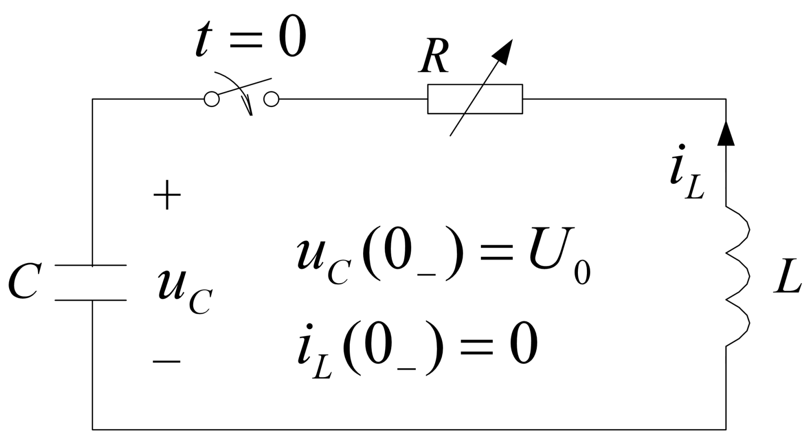
零状态响应的三种情况

（1）$\alpha>\omega_0 \quad \rightarrow R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 两个不相等负实根 过阻尼

（2）$\alpha<\omega_0 \quad \rightarrow R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 两个共轭复根 欠阻尼

（3）$\alpha=\omega_0 \quad \rightarrow R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 两个相等负实根 临界阻尼

9.2 二阶电路的零输入响应——暂态分量的变化规律



Overdamped——过阻尼

(1) $\alpha > \omega_0 \quad \rightarrow R > 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$u_C = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

$$u_C(0_+) = U_0 \rightarrow k_1 + k_2 = U_0$$

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{(0_+)} \rightarrow s_1 k_1 + s_2 k_2 = 0$$

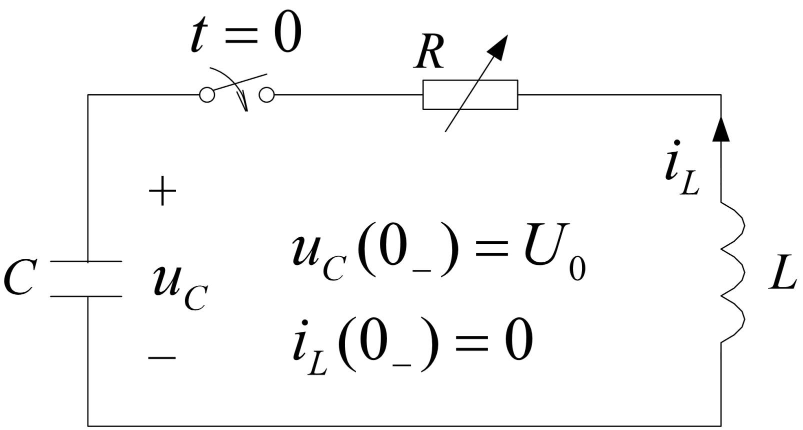
$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{s_2}{s_2 - s_1} U_0 \\ k_2 = \dfrac{-s_1}{s_2 - s_1} U_0 \end{cases}$$

$$\boxed{u_C = \frac{U_0}{s_2 - s_1}(s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t})}$$

$$\boxed{i_L = C\frac{du_c}{dt} = \frac{U_0}{L(s_2 - s_1)}(e^{s_1 t} - e^{s_2 t})}$$

9.2 二阶电路的零输入响应

——暂态分量的变化规律



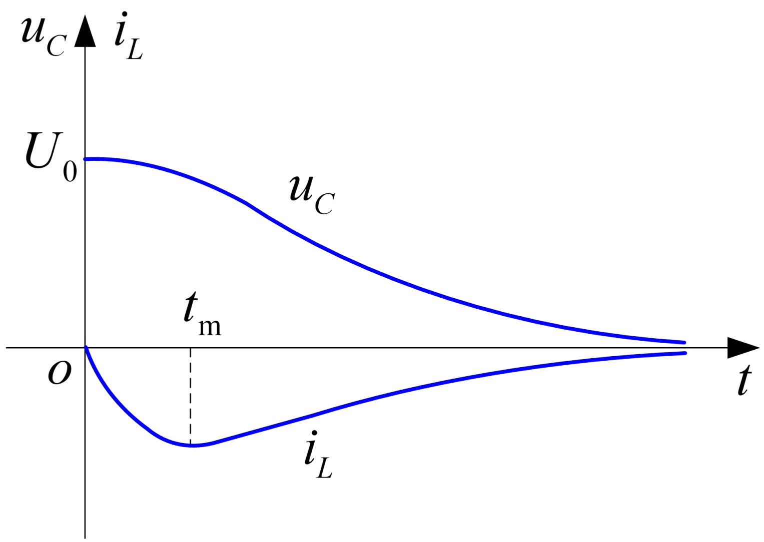
$$\boxed{u_C = \frac{U_0}{s_2 - s_1}(s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t})}$$

$$\boxed{i_L = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = \frac{U_0}{L(s_2 - s_1)}(e^{s_1 t} - e^{s_2 t})}$$

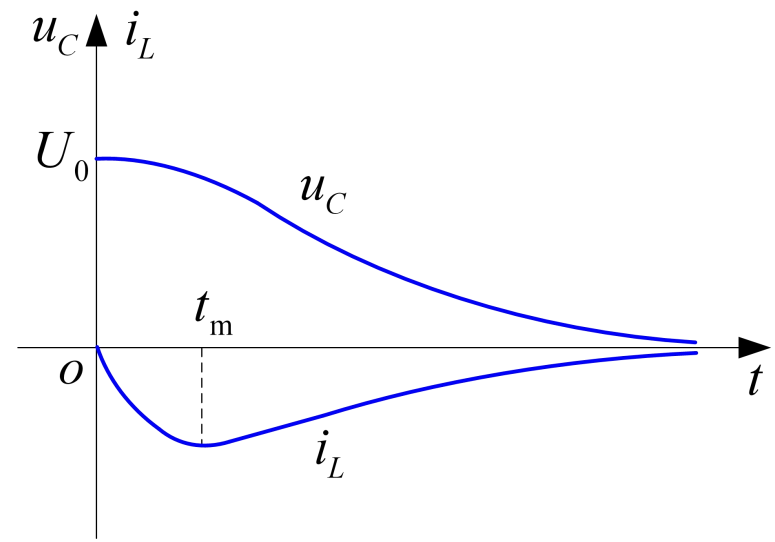
由 $\mathrm{d}i_L/\mathrm{d}t$ 可确定 i_L 为极小时的 t_m .

$$s_1 e^{s_1 t_m} - s_2 e^{s_2 t_m} = 0$$

$$t_m = \frac{\ell n \dfrac{s_2}{s_1}}{s_1 - s_2}$$

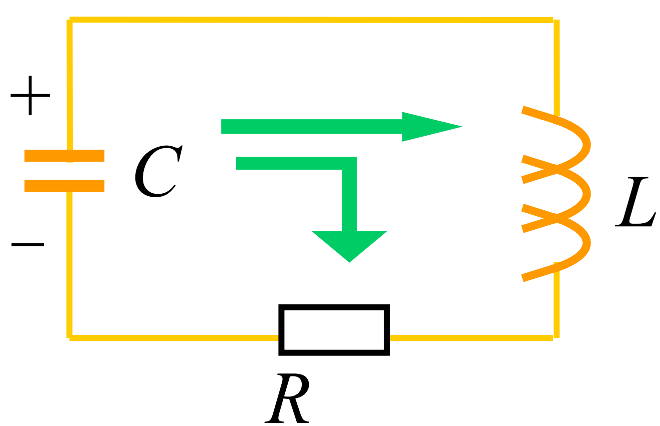


能量转换关系

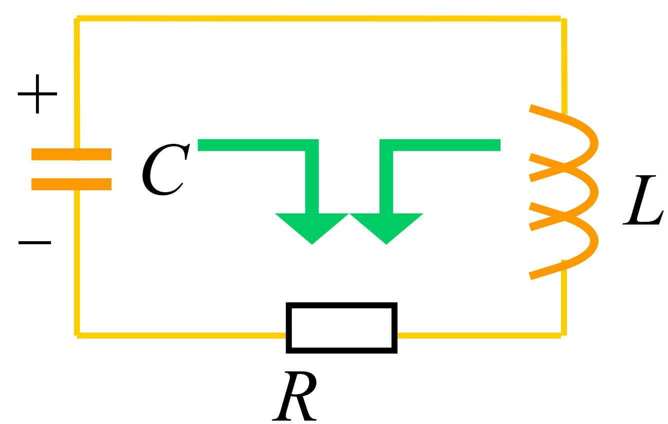


$$t_m = \frac{\ln \frac{s_2}{s_1}}{s_1 - s_2}$$

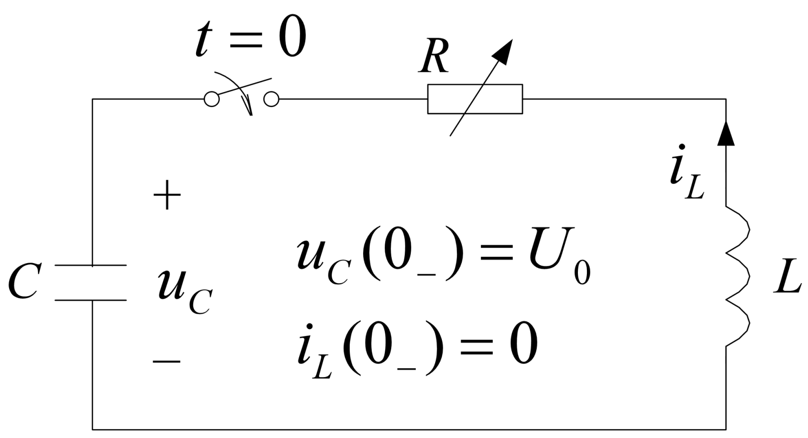
$0 < t < t_m$ u_C减小，i 增加。



$t > t_m$ u_C减小，i 减小.



9.2 二阶电路的零输入响应



underdamped——欠阻尼

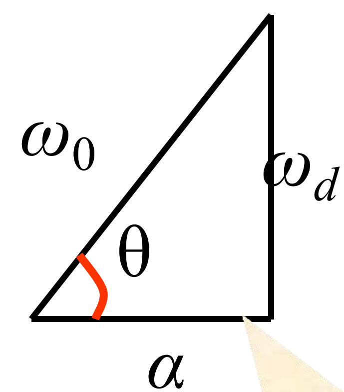
（2） $\alpha < \omega_0 \quad \rightarrow R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$ (固有振荡角频率)

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \mathrm{j}\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm \mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$$

$$u_C = k_1 \mathrm{e}^{s_1 t} + k_2 \mathrm{e}^{s_2 t} = k\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_\mathrm{d} t + \theta)$$

初始条件 $\begin{cases} u_C(0^+) = U_0 \rightarrow k\sin\theta = U_0 \\ \dfrac{du_C}{dt}(0^+) = 0 \rightarrow k(-\alpha)\sin\theta + k\omega_d\cos\theta = 0 \end{cases}$



$$k = \frac{U_0}{\sin\theta}, \quad \theta = arctg\frac{\omega_d}{\alpha}$$

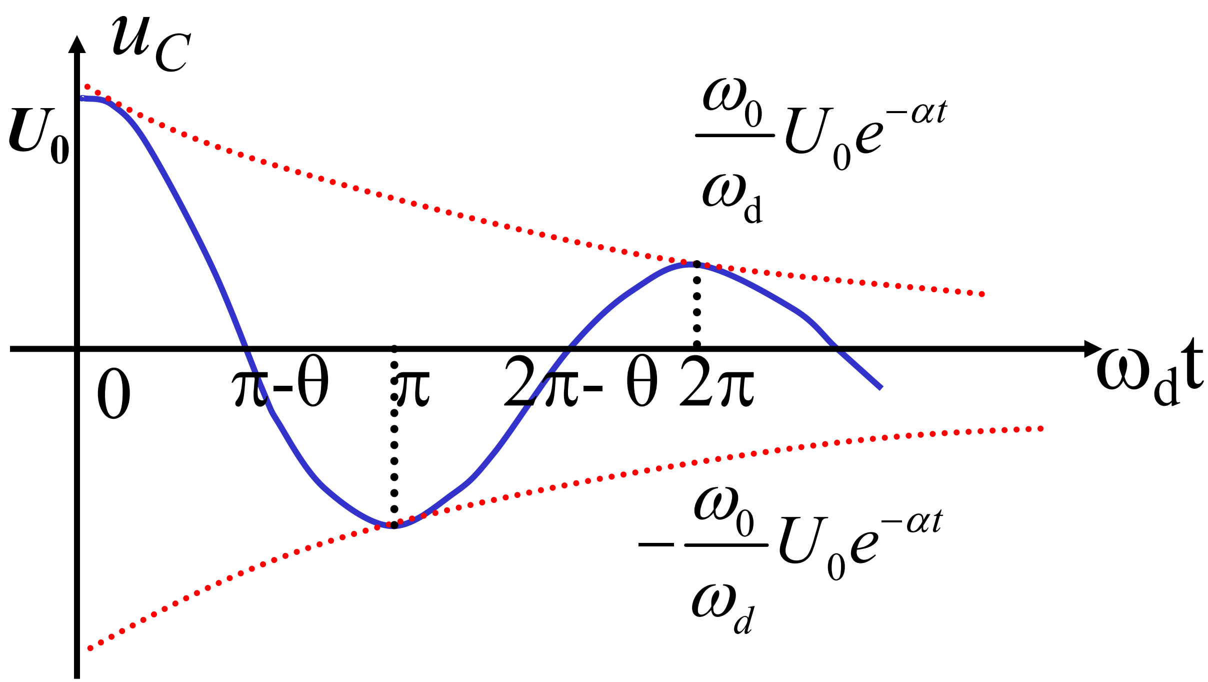
$$\sin\theta = \frac{\omega_d}{\omega_0} \qquad k = \frac{\omega_0}{\omega_d}U_0$$

ω_d，ω_0，α 的关系

$$u_C = \frac{\omega_0}{\omega_d} U_0 e^{-\alpha\ t} \sin(\omega_d t + \theta)$$

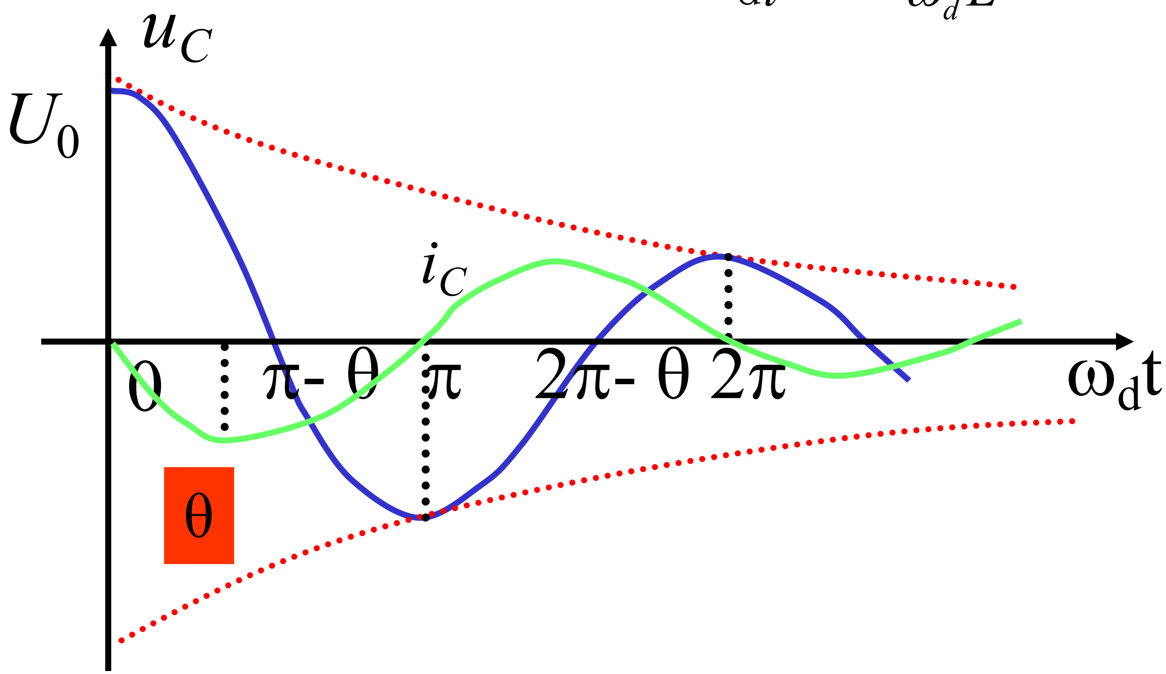
u_C是振幅以$\pm\dfrac{\omega_0}{\omega}U_0$为包络线依指数衰减的正弦函数

t=0 时 $u_c=U_0$ u_C=0：$\omega_d t = \pi-\theta$，$2\pi-\theta$ … $n\pi-\theta$



$$u_C = \frac{\omega_0}{\omega_d} U_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \theta)$$

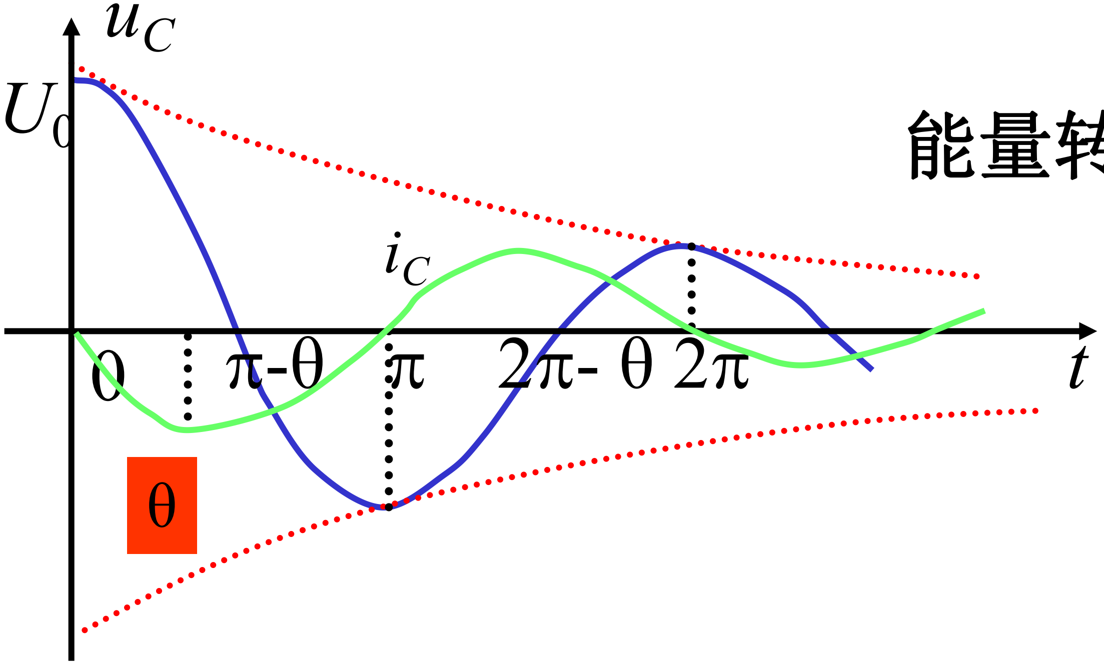
$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\frac{U_0}{\omega_d L} e^{-\alpha t} \sin\omega_d t$$

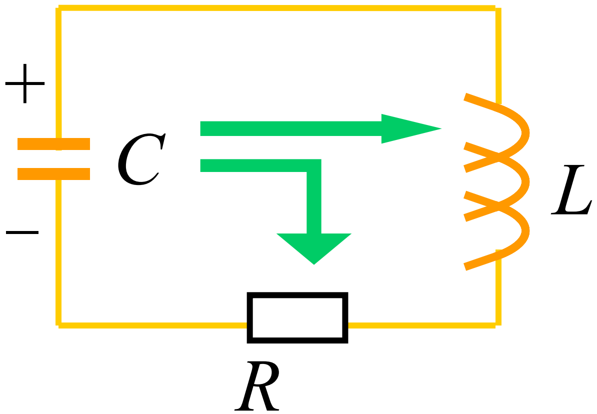


i_c=0： $\omega_d t$ =0， π， 2π　 … nπ ， 为 u_c极值点，

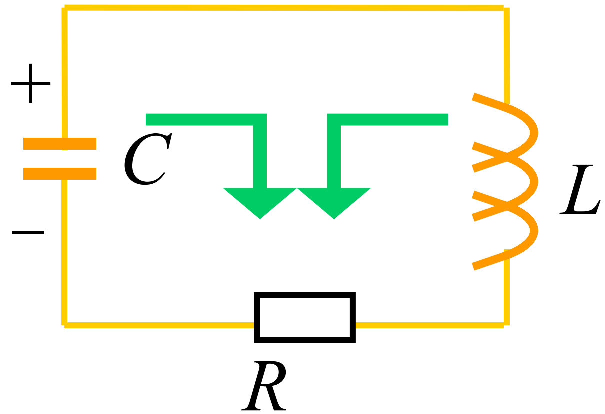
i_c的第一个极值点为$\omega_d t$ =θ。

能量转换关系：

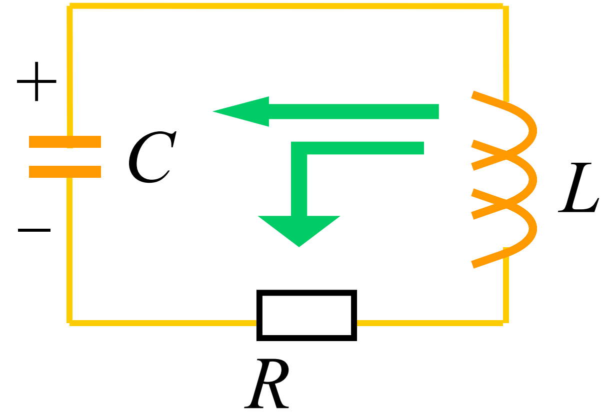




$0 < \omega_d t < \theta$



$\theta < \omega_d t < \pi - \theta$



$\pi - \theta < \omega_d t < \pi$

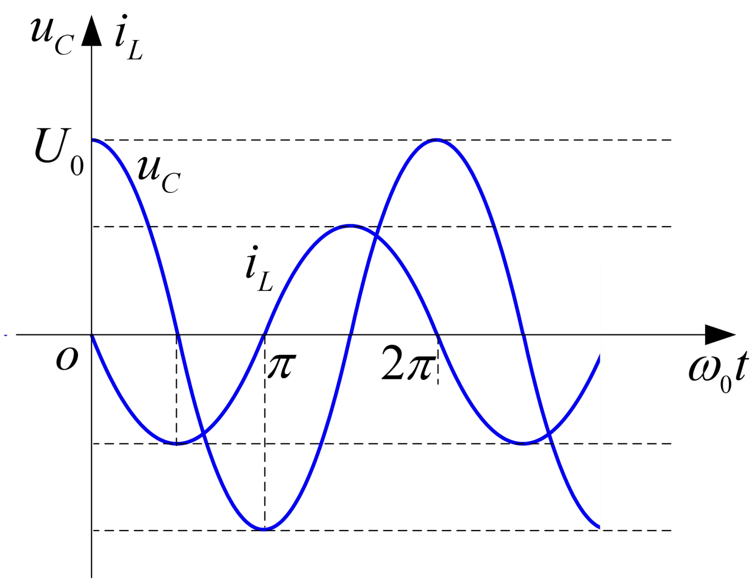
特例：R=0 时

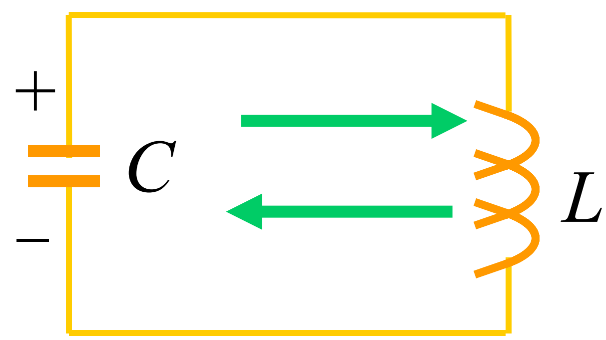
$$\alpha = 0\ ,\quad \omega_d = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\ ,\quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$u_C = U_0 \sin(\omega_0 t + 90^0) = u_L$$

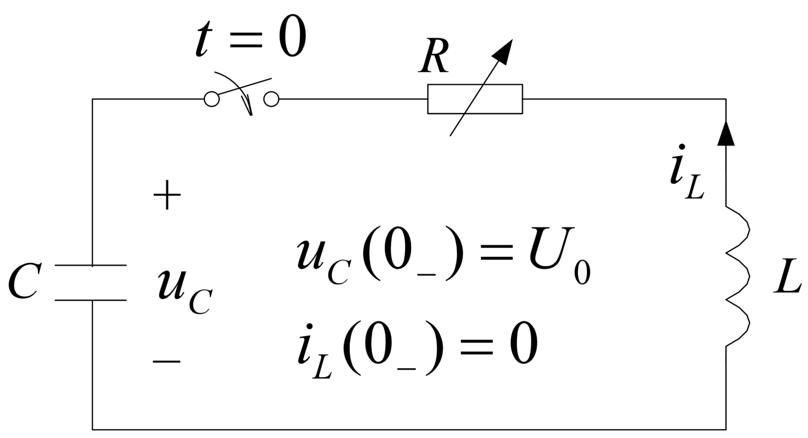
$$i = -\frac{U_0}{\omega_0 L}\sin \omega_0 t$$

→ 等幅振荡





9.2 二阶电路的零输入响应



Critically damped——临界阻尼

(3) $\alpha=\omega_0 \quad \rightarrow R=2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

$$s_{1,2}=-\alpha$$

$$u_C=(k_1+k_2t)\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

$$\text{初始条件}\begin{cases} u_c(0^+)=U_0 \rightarrow k_1=U_0 \\ \dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(0^+)=0 \rightarrow k_1(-\alpha)+k_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1=U_0 \\ k_2=U_0\alpha \end{cases}$$

$$u_C=U_0e^{-\alpha t}(1+\alpha t)$$

$$i_C=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-\frac{U_0}{L}te^{-\alpha t}$$

非振荡电路

小结

可推广应用于一般二阶电路

$R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 过阻尼，非振荡放电

$$u_C=k_1e^{s_1t}+k_2e^{s_2t}$$

$R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 临界阻尼，非振荡放电

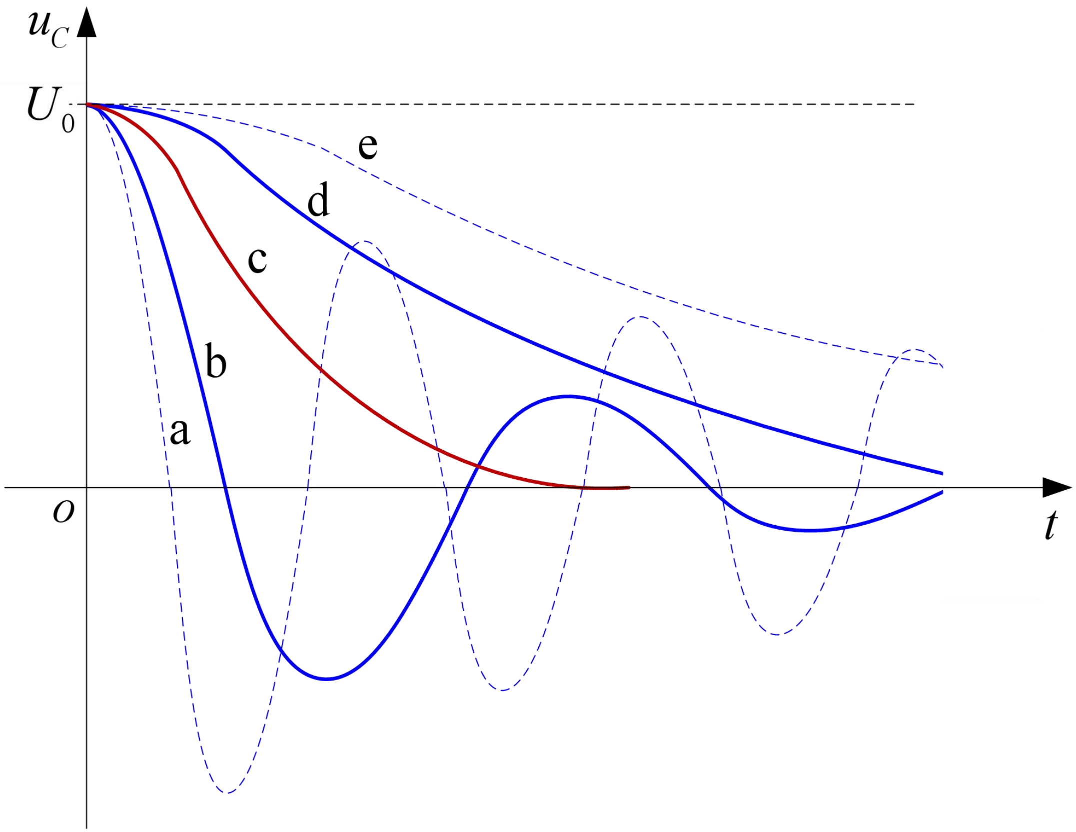
$$u_C=k_1e^{-\alpha t}+k_2te^{-\alpha t}$$

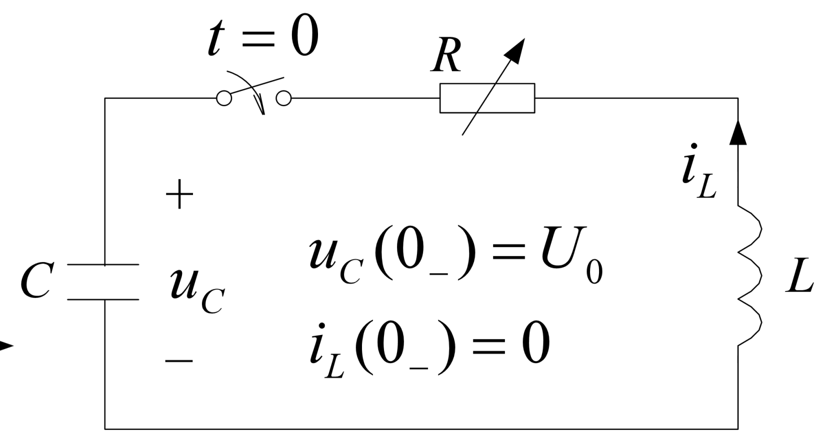
$R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 欠阻尼，振荡放电

$$u_C=ke^{-\alpha t}\sin(\omega_d t+\theta)$$

初始条件 $\begin{cases} u_C(0_+) \\ \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0_+) \end{cases}$ **定常数**

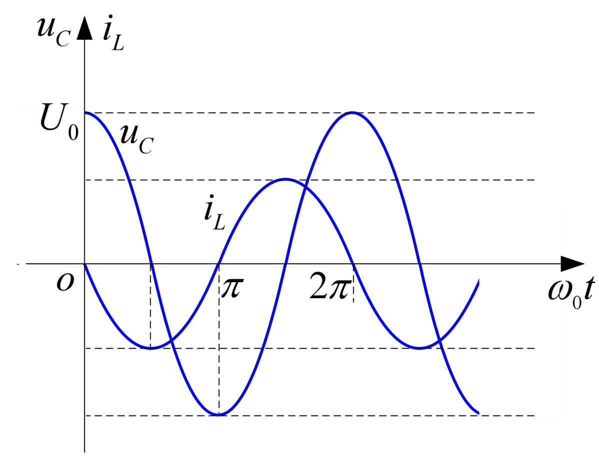
9.2 二阶电路的零输入响应





$$\boxed{R_e > R_d} > \boxed{R_c} > \boxed{R_b > R_a}$$

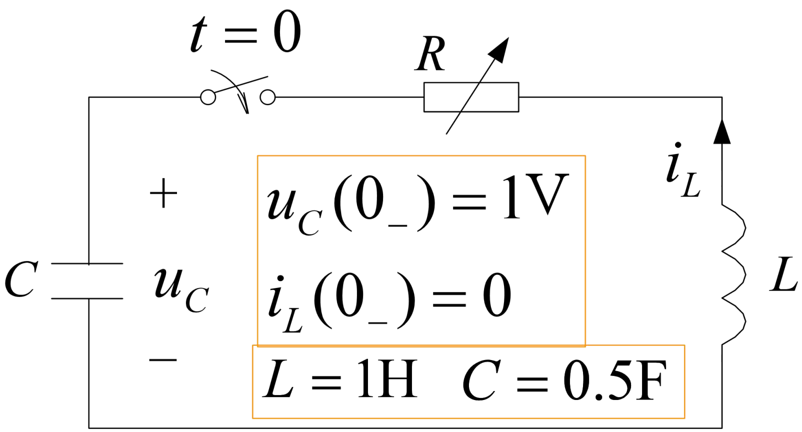
过阻尼　　临界阻尼　　欠阻尼



欠阻尼特例 $R=0$

9.2 二阶电路的零输入响应

——暂态分量的变化规律



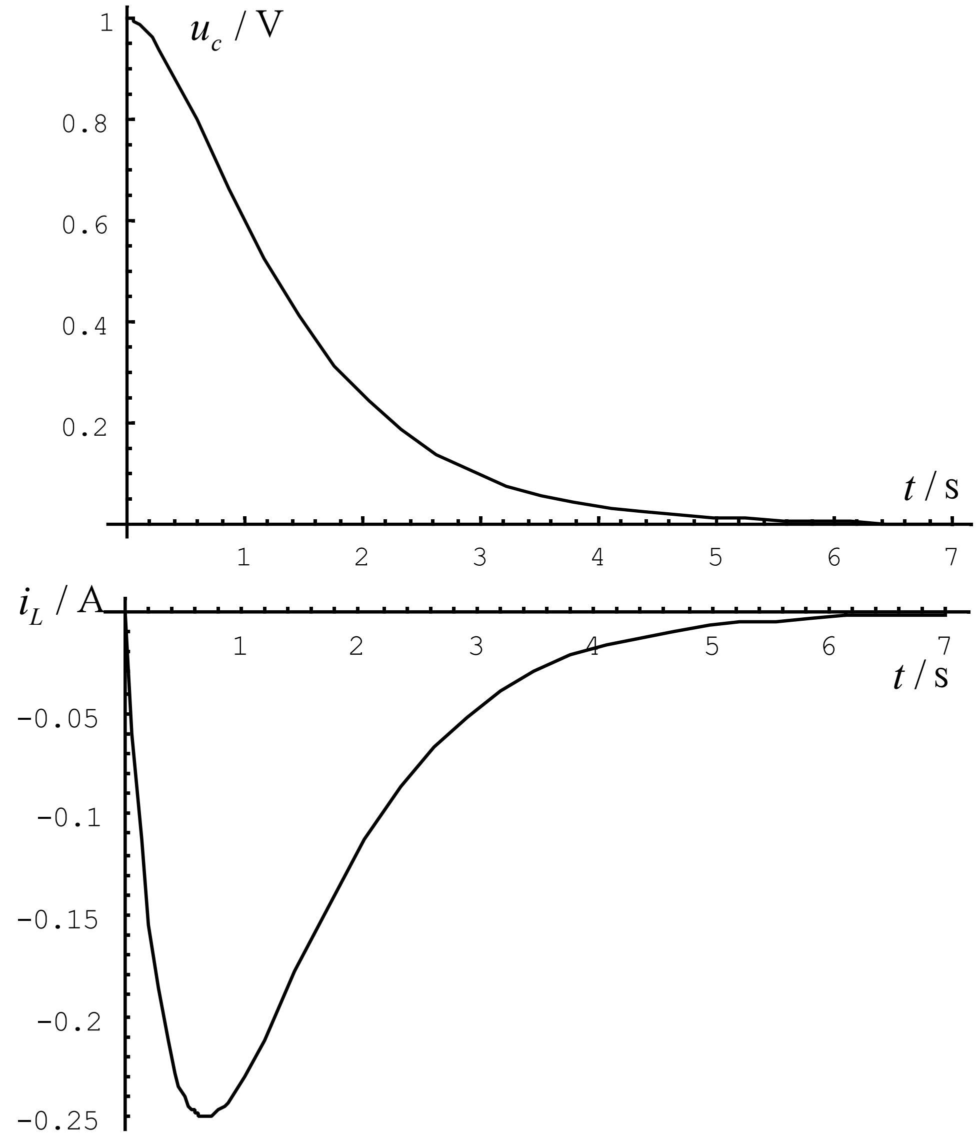
$u_C(0_-)=1\text{V}$

$i_L(0_-)=0$

$L=1\text{H}\quad C=0.5\text{F}$

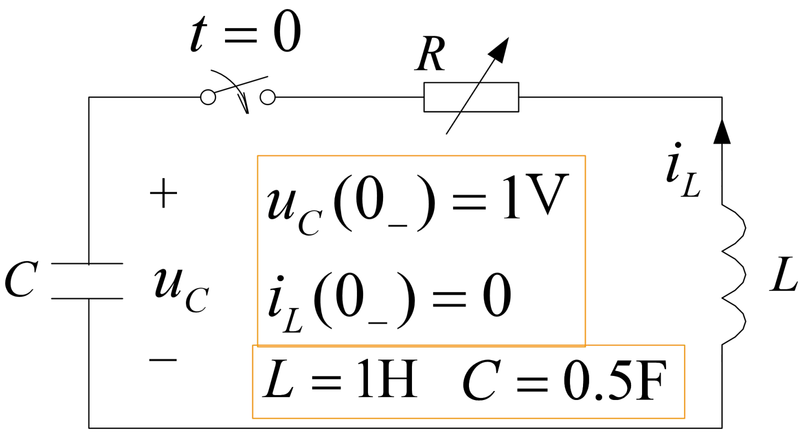
$R=3\Omega$ **过阻尼**

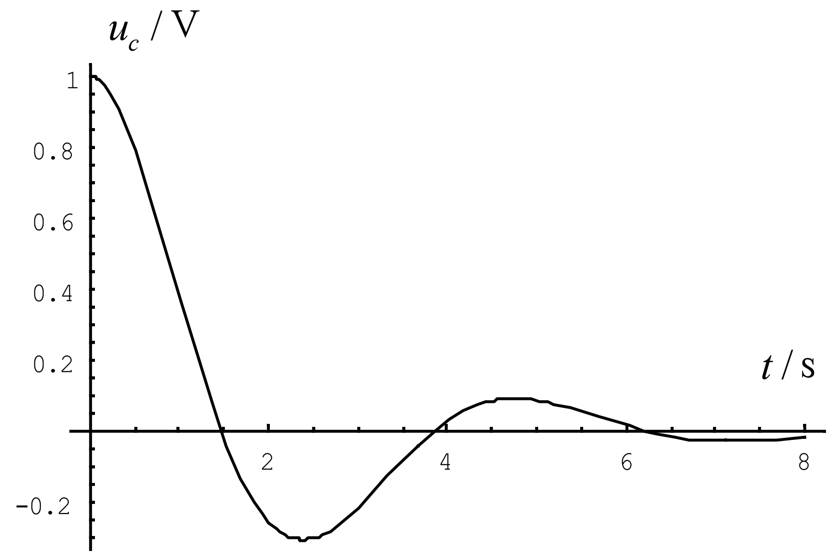
$$\begin{bmatrix} u_c \\ i_L \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (2e^{-t}-e^{-2t})\text{V} \\ (-e^{-t}+e^{-2t})\text{A} \end{bmatrix}$$



9.2 二阶电路的零输入响应

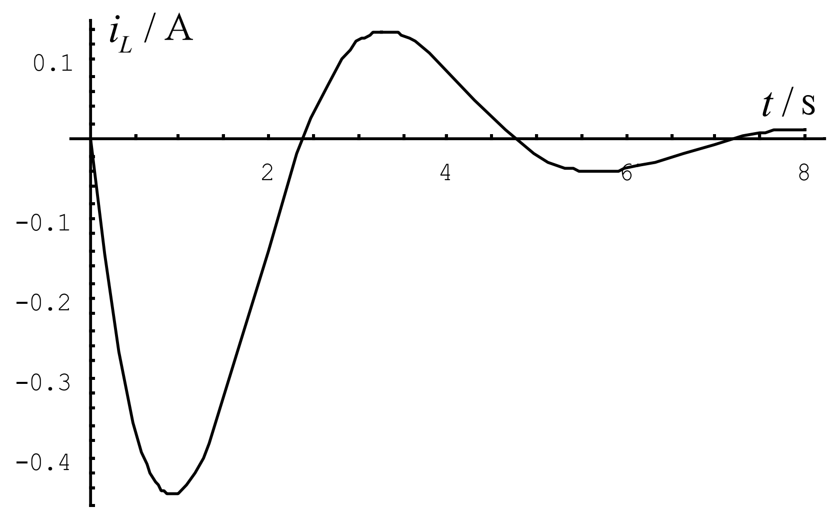
——暂态分量的变化规律





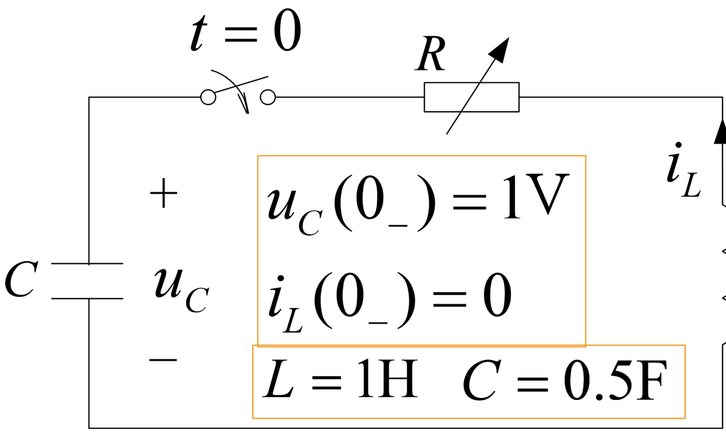
$\boxed{R=1\Omega}$ **欠阻尼**

$$\begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-0.5t}(\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{7}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t)\text{V} \\ (-\frac{2}{\sqrt{7}}e^{-0.5t}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t)\text{A} \end{bmatrix}$$



9.2 二阶电路的零输入响应

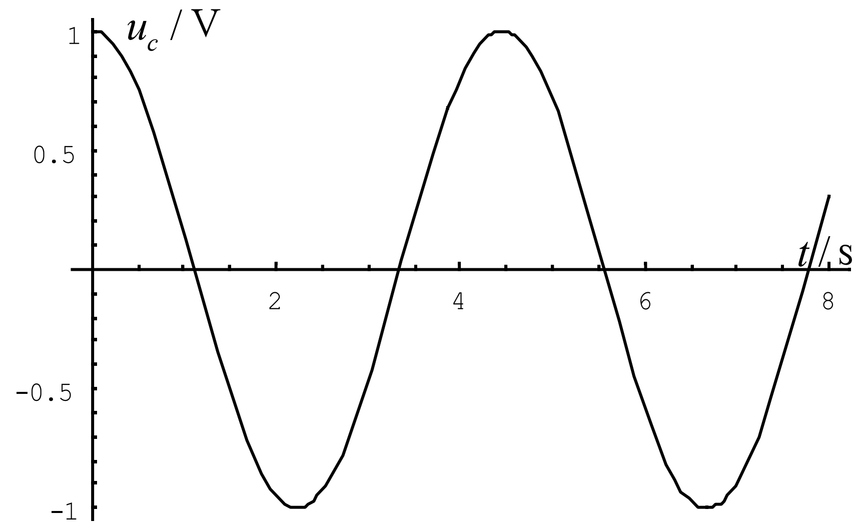
——暂态分量的变化规律



$$u_C(0\_)=1\text{V}$$

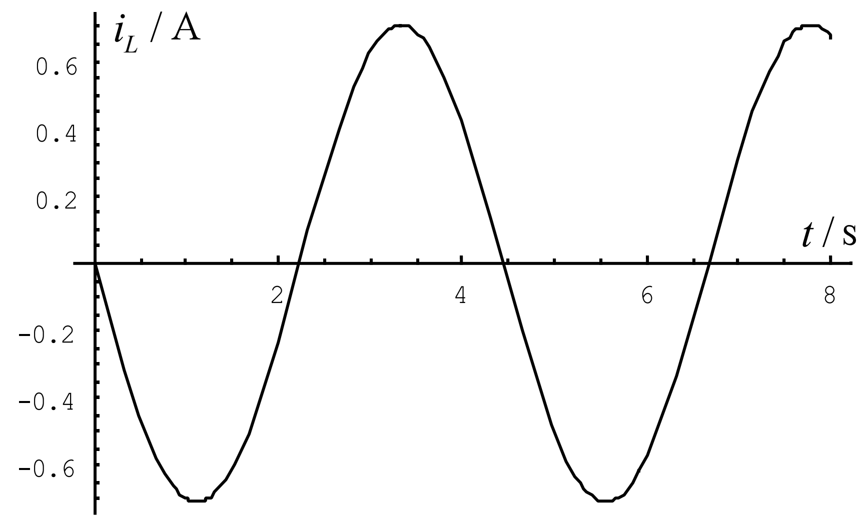
$$i_L(0\_)=0$$

$$L=1\text{H} \quad C=0.5\text{F}$$



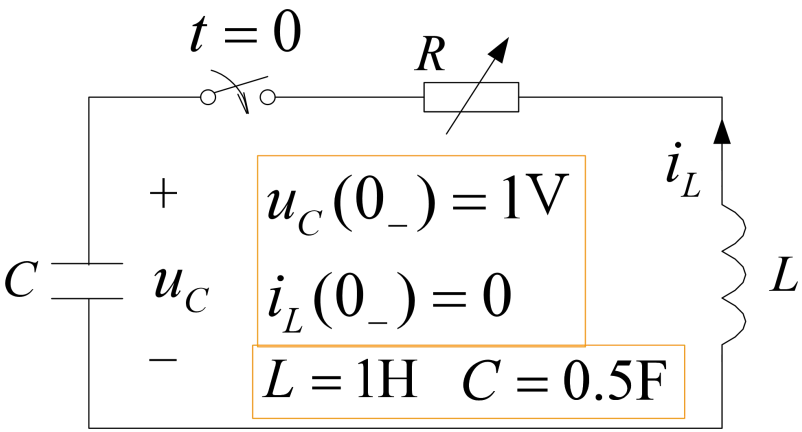
$\boxed{R=0}$ 无阻尼

$$\begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos\sqrt{2}t)\text{V} \\ (-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t)\text{A} \end{bmatrix}$$



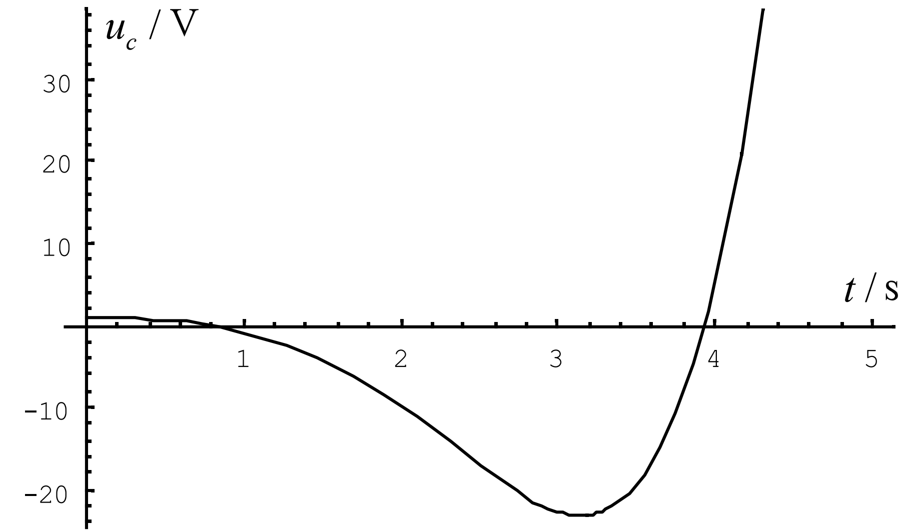
9.2 二阶电路的零输入响应

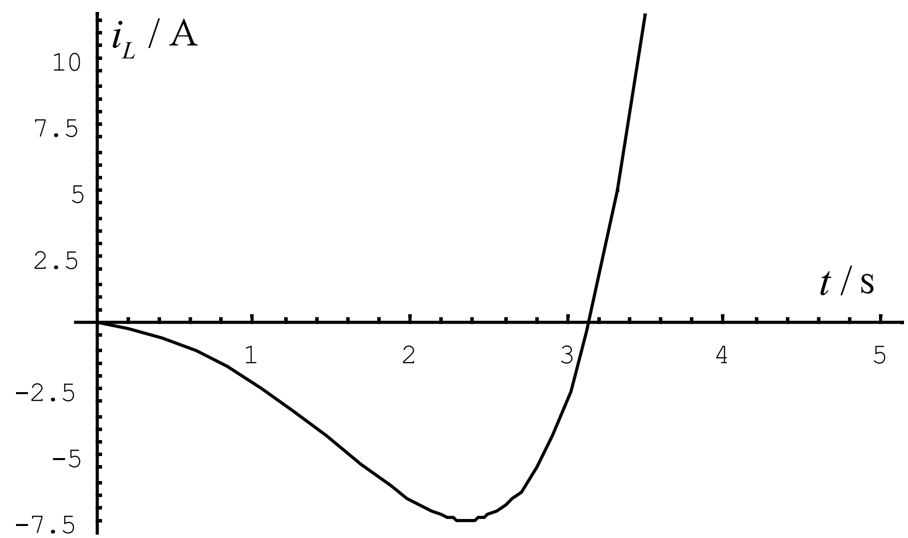
——暂态分量的变化规律



$R=-2\Omega$ 负阻尼

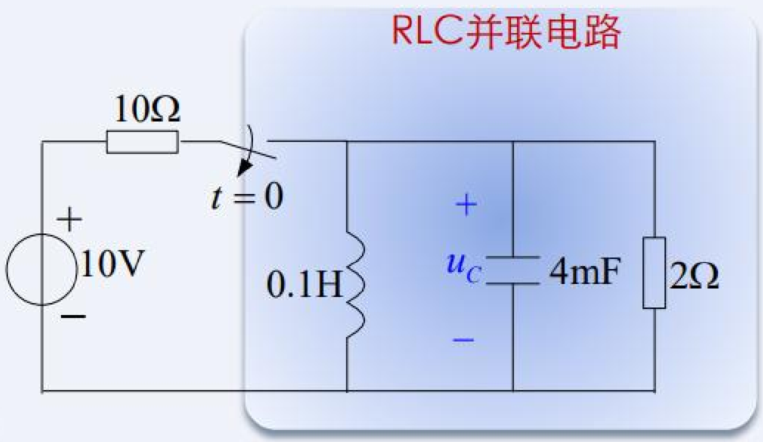
$$\begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t(\cos t-\sin t)\text{V} \\ (-e^t\sin t)\text{A} \end{bmatrix}$$





RLC并联电路（自学+MOOC）

【例 2】 电路在开关打开前处于稳态，写出开关打开后u_C的定性表达式。



$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

与RLC串联电路对偶

$$\alpha = \frac{G}{2C} = \frac{1/2}{2\times 0.004} = 62.5\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.1\times 0.004}} = 50\ \mathrm{rad/s}$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^{\ 2}} = (-25, -100)$$

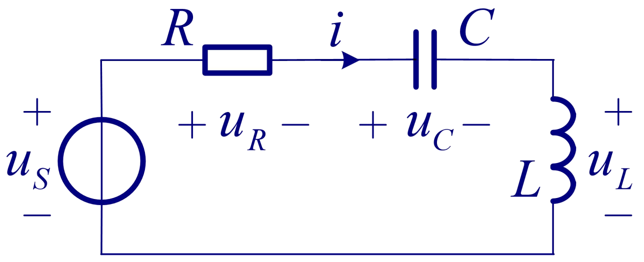
$$u_C = k_1 e^{-25t} + k_2 e^{-100t}$$

9.3 二阶电路的零状态响应

以阶跃响应为例来分析二阶RLC电路的零状态响应。

一、RLC串联电路的阶跃响应

根据KVL和支路电压–电流关系, 可得



$$u_s = U_0 \varepsilon(t)$$

$$LC\frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = U_0$$

二阶常系数线性非齐次微分方程

初始条件为: $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

方程的解为 $u_C = u_{Ch} + u_{Cp}$

齐次解为 $u_{Ch} = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$

特征方程 $LCs^2 + RCs + 1 = 0$

特征根（固有频率）
$$\begin{cases} s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0} \\ s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0} \end{cases}$$

与RLC串联电路零输入响应一样，RLC串联电路的固有频率$s1$和$s2$也可以是两个不相等的负实数，两个相等的负实数，一对共轭复数和一对共轭虚数。

阶跃激励下的稳态分量u_{Cp}=U$_0$

$$u_C = u_{Ch} + u_{Cp} = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + U_0$$

根据初始条件, 有 $\begin{cases} u_C(0_+) = K_1 + K_2 + U_0 = 0 \\ \left.\dfrac{du_C}{dt}\right|_{t=0_+} = K_1 s_1 + K_2 s_2 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad K_1 = \frac{s_2}{s_1 - s_2} \mathrm{U}_0, \quad K_2 = \frac{s_1}{s_2 - s_1} \mathrm{U}_0$$

电容电压为

$$u_C = \left[\frac{1}{s_1 - s_2} (s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) + 1 \right] U_0 \varepsilon(t)$$

RLC串联充电电路也可以区分为:

1. 过阻尼 $\alpha > \omega_0$ 电路参数满足 $R > 2\sqrt{L/C}$

2. 临界阻尼 $\alpha = \omega_0$ $R = 2\sqrt{L/C}$

3. 欠阻尼 $\alpha < \omega_0$ $R < 2\sqrt{L/C}$

4. 无阻尼 $\alpha=0$（即$R=0$）

下面仅讨论过阻尼和欠阻尼两种不同情况的阶跃响应。

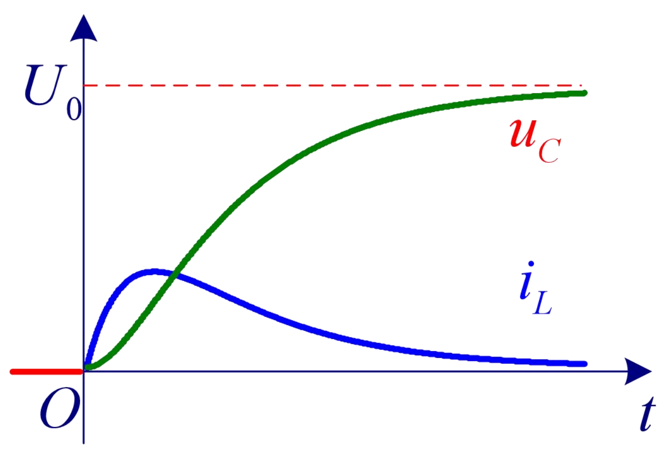
1. 过阻尼

$$u_C=\left[\frac{1}{s_1-s_2}(s_2e^{s_1t}-s_1e^{s_2t})+1\right]U_0\varepsilon(t)$$

$$i_L=i=C\frac{du_C}{dt}=\frac{s_1s_2}{L(s_1-s_2)}(e^{s_1t}-e^{s_2t})U_0\varepsilon(t)$$

由于$s_1<0$、$s_2<0$及$|s_2|>|s_1|$ $\Rightarrow$ $e^{s_1t}-e^{s_2t}>0$

使电容电压u_C和电感电流i_L永远不改变方向。电容元件在全部时间内一直在充电。



2. 欠阻尼

$$\begin{cases} s_1 = -\alpha + \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} = -\alpha + j\omega_d \\ s_2 = -\alpha - \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} = -\alpha - j\omega_d \end{cases}$$

或表示成极坐标形式 $\begin{cases} s_1 = \omega_0 e^{j(90^\circ + \theta)} \\ s_1 = \omega_0 e^{-j(90^\circ + \theta)} \end{cases}$

其中 $\theta = \arctan(\alpha / \omega d)$

阶跃响应电容电压为

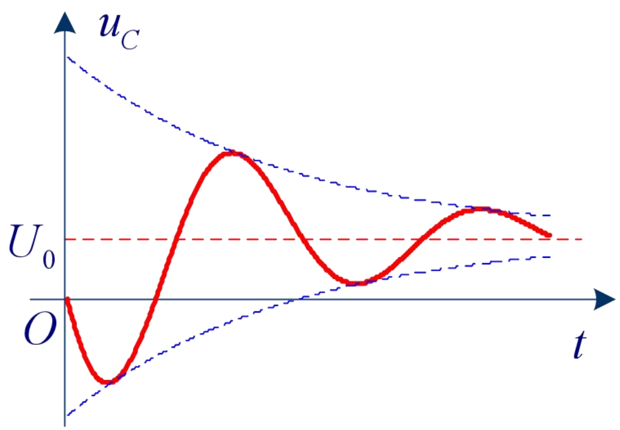
$$u_C = \left\{1 + \frac{1}{2j\omega_d}\omega_0 e^{-\alpha t}\left[e^{j(j\omega_d t - 90^\circ - \theta)} - e^{-j(j\omega_d t - 90^\circ - \theta)}\right]\right\}U_0\varepsilon(t)$$

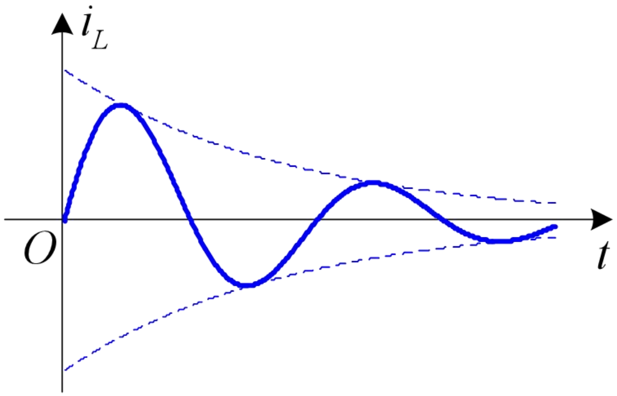
$$= \left[1 + \frac{\omega_0}{\omega_d}e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t - 90^\circ - \theta)\right]U_0\varepsilon(t)$$

$$= \left[1 - \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \theta) \right] U_0 \varepsilon(t)$$

根据电容的电压–电流关系 $i = C du_C / dt$

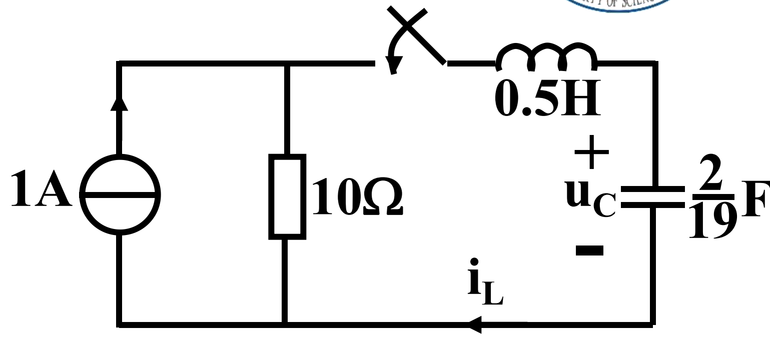
$$i_L = i = (\frac{1}{\omega_d L} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t) U_0 \varepsilon(t)$$





9.3 直流激励下的响应

全响应——二阶电路响应计算



$u_c(0\text{-})=15\text{V}$， $i_L(0\text{-})=0$

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=15\text{V} \qquad i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$$

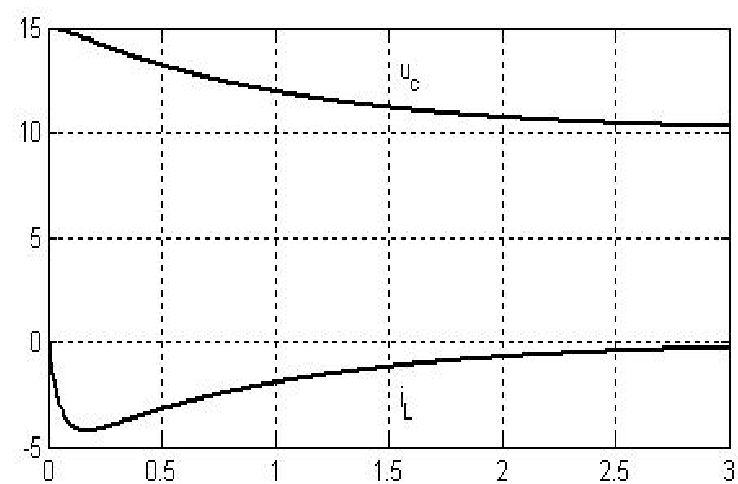
$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=\frac{i_C(0_+)}{C}=\frac{i_L(0_+)}{C}=0$$

$$\text{KVL:}\ \ 0.5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2}{19}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)+10\left(\frac{2}{19}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}-1\right)+u_C=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+20\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+19u_C=190$$

$$p_{1,2}=-10\pm\sqrt{100-19}=\begin{cases}-1\\-19\end{cases}$$

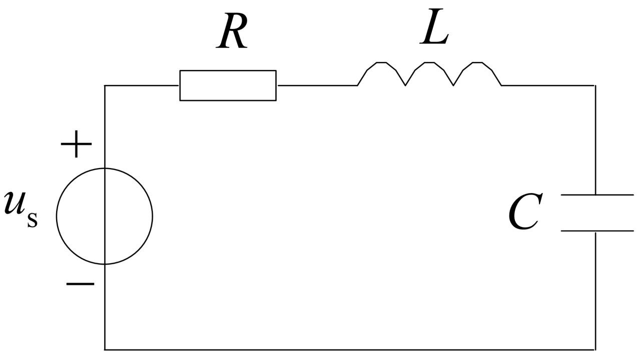
$$u_C=k_1\mathrm{e}^{-t}+k_1\mathrm{e}^{-19t}+10$$



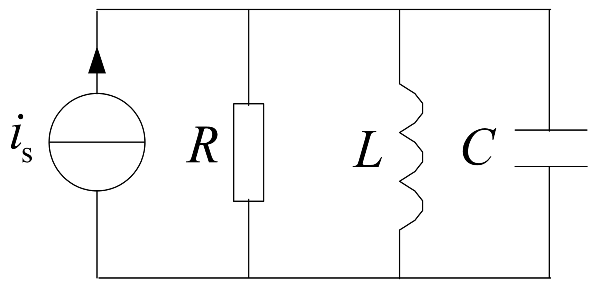
$$k_1=\frac{95}{18} \qquad k_2=-\frac{5}{18} \qquad i_L=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-\frac{95}{18}\mathrm{e}^{-t}+\frac{95}{18}\mathrm{e}^{-19t}$$

一般二阶电路

电路的阶次与独立电源无关。

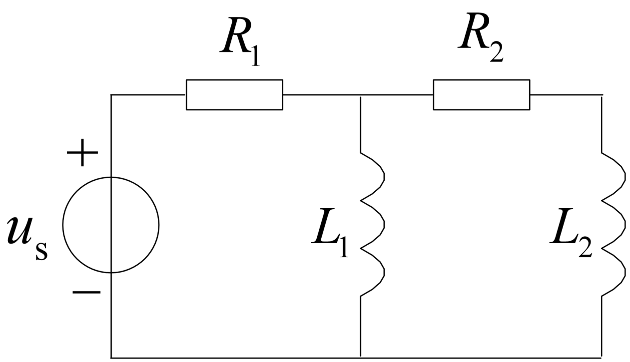


RLC串联电路

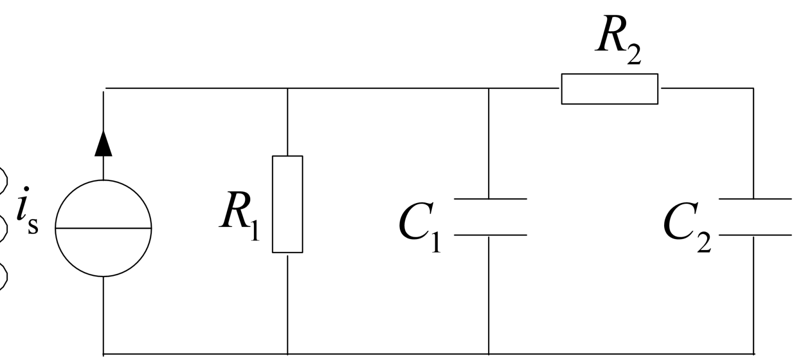


RLC并联电路

RLC串联电路或RLC并联电路，是在独立电源置零后，能够变换为R、L、C串联或R、L、C并联的电路，是工程中最常见的二阶电路。



一般二阶RLL电路



一般二阶RCC电路

在电源置零后，不能变换为R、L、C串联R、L、C并联的二阶电路，统称为一般二阶电路。

一般二阶电路分析思路

确定初始值

$y(0_+)$ $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}$

确定强制分量

$y_{\mathrm{p}}(t)$

直流激励下

$y_{\mathrm{p}}(t) = y(\infty)$

确定自由分量的形式

$y_{\mathrm{h}}(t)$

由固有频率决定

获得固有频率的简单方法:

将换路后电路中的电源置零，列写微分方程，求得特征根。

确定待定常数

$y(t) = y_{\mathrm{p}}(t) + y_{\mathrm{h}}(t)$

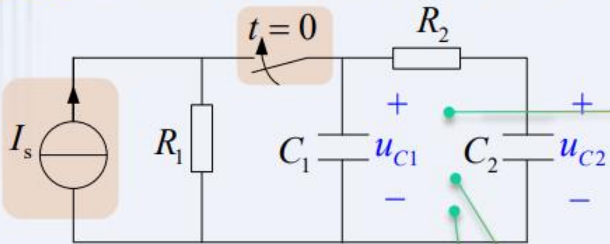
结果校验

定性

画出波形

2. 例题分析

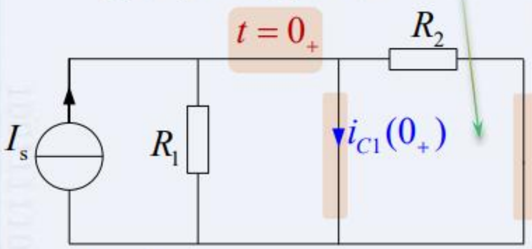
【例】电路在开关闭合前处于零状态，分析开关闭合后的u_{C1}。



确定初始值

$$u_{C1}(0_+)=u_{C1}(0_-)=0$$

$$u_{C2}(0_+)=u_{C2}(0_-)=0$$



$$\left.\frac{du_{C1}}{dt}\right|_{0_+}=\frac{i_{C1}(0_+)}{C_1}=\frac{I_s}{C_1}$$

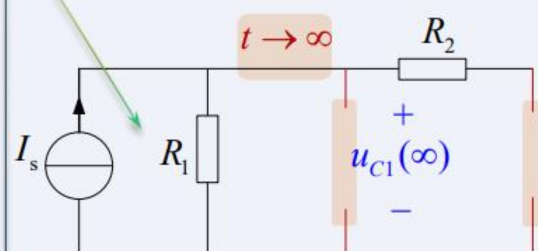
确定待定常数

$$u_{C1}=u_{C1p}+u_{C1h}$$

$$=R_1I_s+k_1e^{s_1t}+k_2e^{s_2t}$$

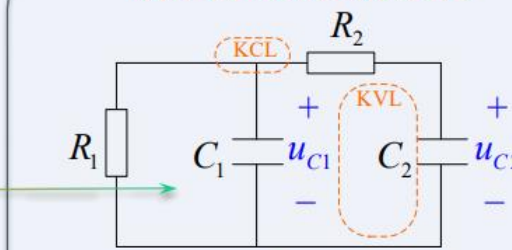
$$\begin{cases}R_1I_s+k_1+k_2=0\\ k_1s_1+k_1s_2=I_s/C_1\end{cases}$$

确定强制分量



$$u_{C1p}=u_{C1}(\infty)=R_1I_s$$

确定自由分量的形式



$$\text{KCL:}\ \frac{u_{C1}}{R_1}+C_1\frac{du_{C1}}{dt}+C_2\frac{du_{C2}}{dt}=0$$

$$\text{KVL:}\ u_{C1}=R_2C_2\frac{du_{C2}}{dt}+u_{C2}$$

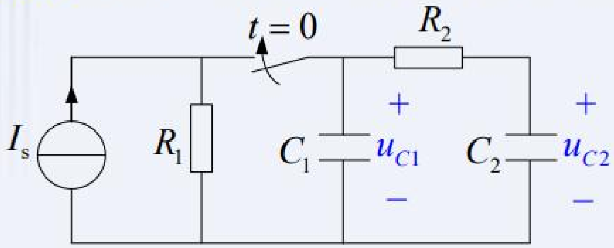
$$\frac{d^2u_{C1}}{dt^2}+\underbrace{\boxed{\frac{R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2}{R_1C_1R_2C_2}}}_{2\alpha}\frac{du_{C1}}{dt}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{R_1C_1R_2C_2}}}_{\omega_0^2}u_{C1}=0$$

$$s_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\quad(\alpha>\omega_0)$$

$$u_{C1h}=k_1e^{s_1t}+k_2e^{s_2t}$$

2. 例题分析

【例】 电路在开关闭合前处于零状态，分析开关闭合后的u_{C1}。



可见，并非所有二阶电路都有过阻尼、临界阻尼、欠阻尼三种状态！

证明：$\alpha > \omega_0$

$$\underbrace{\frac{R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2}{2R_1C_1R_2C_2}}_{\alpha} > \underbrace{\sqrt{\frac{1}{R_1C_1R_2C_2}}}_{\omega_0} \rightarrow$$

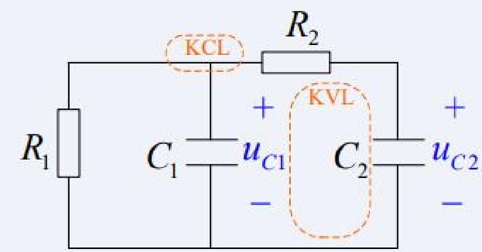
$$R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2 > 2R_1C_1R_2C_2\sqrt{\frac{1}{R_1C_1R_2C_2}} = 2\sqrt{R_1C_1R_2C_2}$$

$$\rightarrow R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2-2\sqrt{R_1C_1R_2C_2} > 0$$

$$\rightarrow (\sqrt{R_1C_1}-\sqrt{R_2C_2})^2+R_1C_2 > 0$$

RCC电路只有过阻尼状态！

确定自由分量的形式



KCL：$\dfrac{u_{C1}}{R_1}+C_1\dfrac{du_{C1}}{dt}+C_2\dfrac{du_{C2}}{dt}=0$

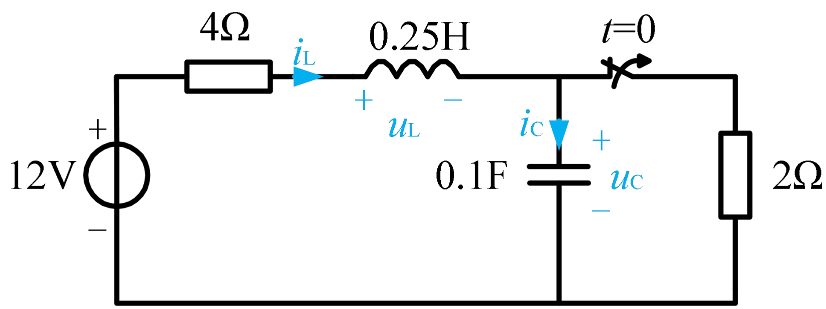
KVL：$u_{C1}=R_2C_2\dfrac{du_{C2}}{dt}+u_{C2}$

$$\frac{d^2u_{C1}}{dt^2}+\underbrace{\frac{R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2}{R_1C_1R_2C_2}}_{2\alpha}\frac{du_{C1}}{dt}+\underbrace{\frac{1}{R_1C_1R_2C_2}}_{\omega_0^2}u_{C1}=0$$

$$s_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\quad(\alpha>\omega_0)$$

$$u_{C1h}=k_1e^{s_1t}+k_2e^{s_2t}$$

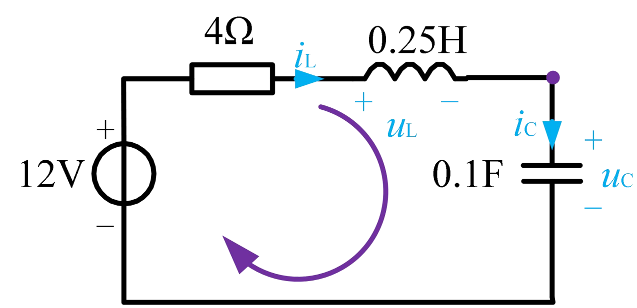
7-36、题7-36图所示的电路在开关打开前处于稳态。确定(1)电路的阶数;(2)$t>0$后的u_c的微分方程、i_L的微分方程;(3)$u_c(0_+)$、$i_L(0_+)$、$i_c(0_+)$、$u_L(0_+)$;(4) $\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{0^+}$、$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+}$;(5)$u_c(\infty)$、$i_L(\infty)$;(6)$u_c(t)(t>0)$;(7)用$u_c(\infty)$检验$u_c(t)$。



题7-36
图

（1）电路中含有两个独立的储能元件，所以是二阶电路

（2）$t>0$后，电路如下：

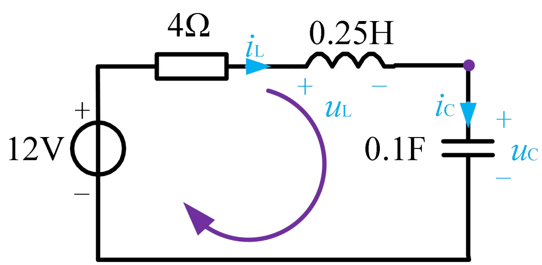


$$\text{KCL、KVL:}\begin{cases} 0.25\dfrac{di_L}{dt}+u_C+4i_L=12 \\ 0.1\dfrac{du_C}{dt}=i_L \end{cases}$$

可以得到微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u_C}{dt^2}+16\dfrac{du_C}{dt}+40u_C=480 \\ \dfrac{d^2i_L}{dt^2}+16\dfrac{di_L}{dt}+40u_C=0 \end{cases}$$

（3）t=0_+时刻电路图如下：



$$u_C(0_+)=u_C(0\_)=4V$$

$$i_L(0_+)=i_L(0\_)=2A$$

$$i_C(0_+)=i_L(0_+)=2A(KCL)$$

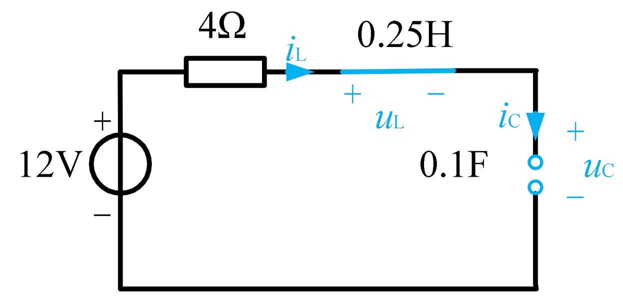
$$u_L(0_+)=12-4\times i_L(0_+)-u_C(0_+)=0V(KVL)$$

（4）根据电容、电感元件电压和电流的关系：

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{0^+}=\frac{1}{C}i_C(0_+)=20V/s$$

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+}=\frac{1}{L}u_L(0_+)=0A/s$$

（5）t=∞时，电路图如下：



所以：$\begin{cases} u_C(\infty)=12V \\ i_L(\infty)=0A \end{cases}$

（6）求$u_C(t)$即是求第二问关于$u_C(t)$的常系数非线性微分方程的解

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+16\frac{du_C}{dt}+40u_C=480$$

二阶，需要求齐次方程的通解和非齐次方程的特解

①齐次方程的通解：

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+16\frac{du_C}{dt}+40u_C=0$$

特征方程为：$s^2+16s+40=0$

特征根：$s_1=-8+2\sqrt{6}\approx-3.1, s_2=-8-2\sqrt{6}\approx-12.9$

通解为：$u_{Ch}=k_1e^{-3.1t}+k_2e^{-12.9t}$

将 $\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{0^+}=20V/s, u_C(0_+)=4V$ 带入其中，得：

$$\begin{cases}k_1+k_2=-8\\-3.1k_1-12.9k_2=20\end{cases}\longrightarrow k_1=-8.49, k_2=0.49$$

齐次方程的通解为：$u_{Ch}=-8.49e^{-3.1t}+0.49e^{-12.9t}$

②非齐次方程的特解：

从上面的微分方程中易看出，一个特解为u_{Cp}=12V

综上 $u_C(t)=u_{Ch}+u_{Cp}=12-8.49e^{-3.1t}+0.49e^{-12.9t}$

（7）第五问已经求出 $u_C(\infty)=12V$

将t=∞带入(6)的结果中：

$u_C(\infty)=12-8.49e^{-\infty}+0.49e^{-\infty}=12V$

结果一致

作 业

- 9.2节：9-5，9-7，9-9
- 9.3节：9-13，9-15