第11章
正弦稳态电路的功率

11.2 瞬时功率

11.3 有功功率与无功功率

11.4 视在功率及功率因数

11.5 复功率及功率守恒

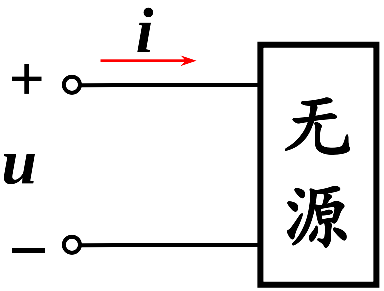
11.6 功率因数校正

11.7 最大有功功率传输

11.8 有功功率测量

11.2 瞬时功率

1. 定义 元件或一端口网络在时刻t的功率，称为瞬时功率



$$u(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t$$

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

$$p(t)=ui=\sqrt{2}U\sin\omega t\cdot\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

$$=2UI\sin\omega t\sin(\omega t-\varphi)$$

$$=UI[\cos\varphi-\cos(2\omega t-\varphi)]$$

$$=UI\cos\varphi-UI\cos(2\omega t-\varphi)$$

消耗功率　　交换功率

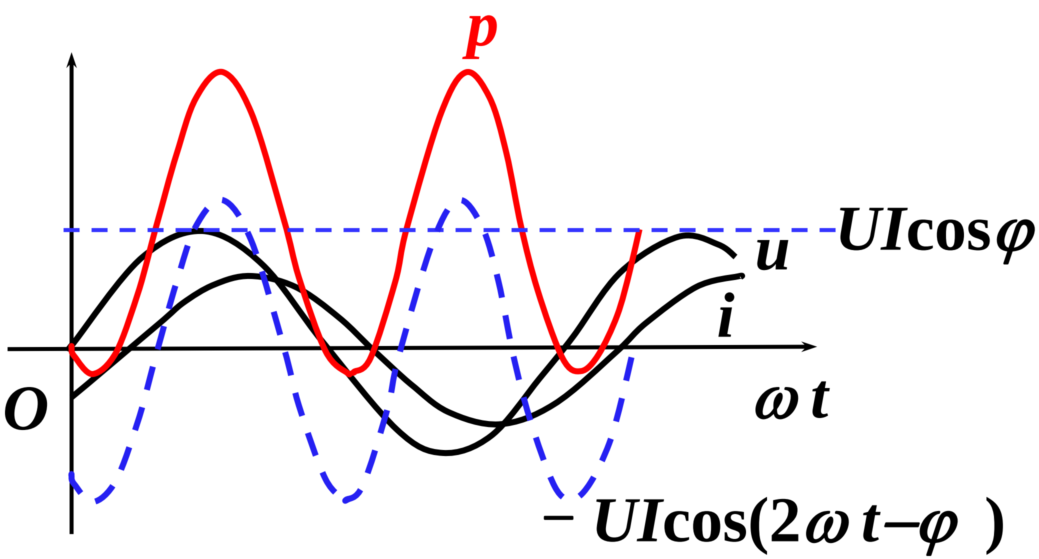
第1表达式

单位：瓦[特]，符号**W**

瞬时功率守恒：

电路中所有元件在任一瞬间吸收的功率代数和为零。

$$p(t) = UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t - \varphi)$$



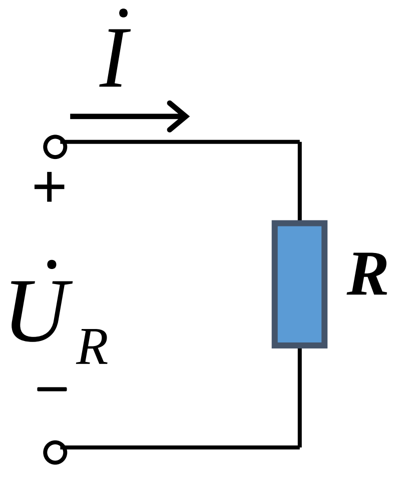
恒定部分

可逆部分

- p有时为正，有时为负；
- $p>0$，电路吸收功率；
- $p<0$，电路发出功率。

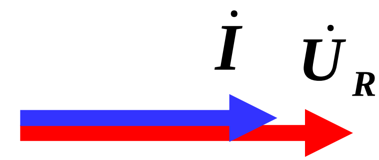
2. 电阻的瞬时功率

电阻总是吸收功率



$$u(t) = \sqrt{2}U_R \sin \omega t$$

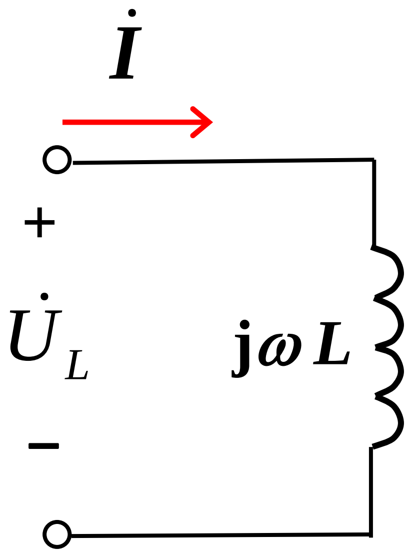
$$i(t) = \sqrt{2}I \sin \omega t$$



$$\begin{aligned} p_R &= u_R i \\ &= \sqrt{2}U_R \sin(\omega t)\sqrt{2}I \sin(\omega t) \\ &= U_R I[1 - \cos 2(\omega t)] \geq 0 \end{aligned}$$

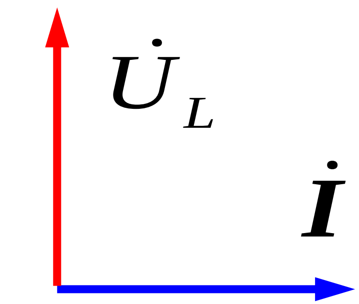
3. 电感的瞬时功率

电感吸收功率与发出功率交替进行



$$i(t)=\sqrt{2}I\sin\omega t$$

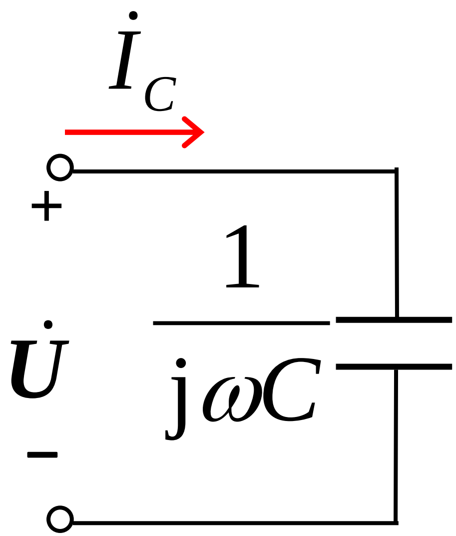
$$u_L(t)=\sqrt{2}U_L\sin\left(\omega t+90^\circ\right)$$



$$\begin{aligned}
p_L &= u_L i \\
&= \sqrt{2}U_L\sin(\omega t+90^\circ)\sqrt{2}I\sin(\omega t) \\
&= -U_L I\cos\left(2\omega t+90^\circ\right) \\
&= U_L I\sin\left(2\omega t\right)
\end{aligned}$$

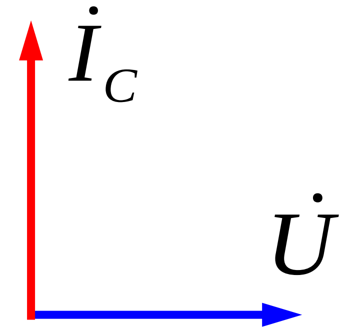
4. 电容的瞬时功率

电容吸收功率与发出功率交替进行



$$u(t)=\sqrt{2}U\sin(\omega t)$$

$$i_C(t)=\sqrt{2}I_C\sin(\omega t+90°)$$



$$\begin{aligned}p_C&=ui_C\\&=\sqrt{2}U\sin(\omega t)\sqrt{2}I_C\sin(\omega t+90°)\\&=-UI_C\cos(2\omega t+90°)\\&=UI_C\sin(2\omega t)\end{aligned}$$

11.3 有功功率和无功功率

有功功率(real power)

$$u(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t$$

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

1. 定义 瞬时功率的平均值

$$p(t)=UI\cos\varphi-UI\cos(2\omega t-\varphi)$$

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T[UI\cos\varphi-UI\cos(2\omega t-\varphi)]\mathrm{d}t$$

$$=UI\cos\varphi$$

P 的单位：W（瓦）

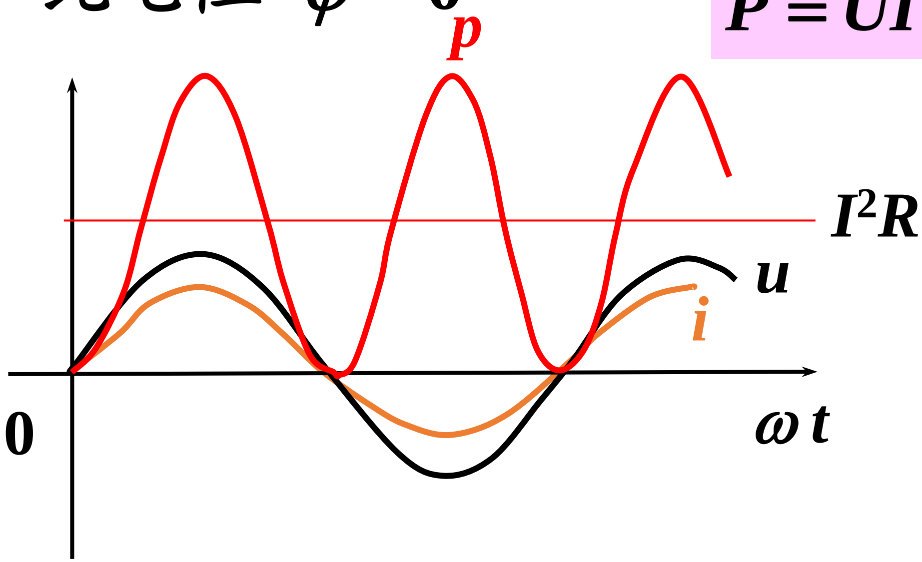
$\cos\varphi$：功率因数。

$\varphi=\psi_u-\psi_i$：功率因数角。

对无源网络，为其等效阻抗的阻抗角。

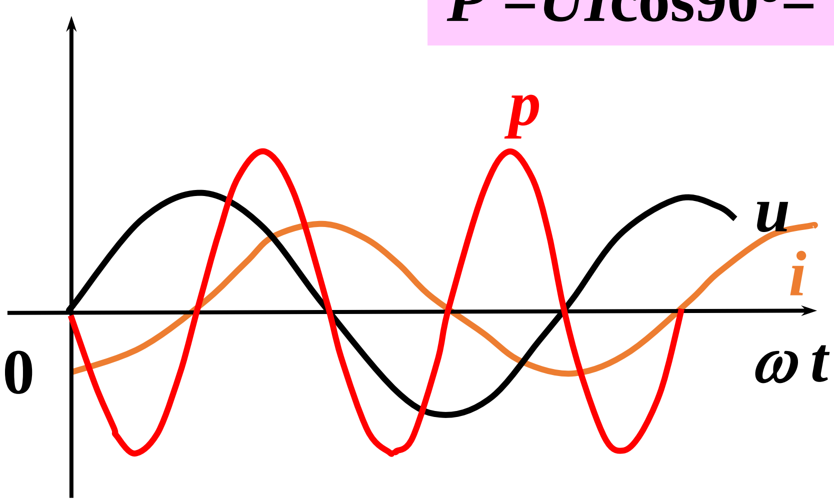
纯电阻 $\varphi = 0^\circ$

$$P = UI\cos\varphi = UI = I^2R = U^2 / R$$



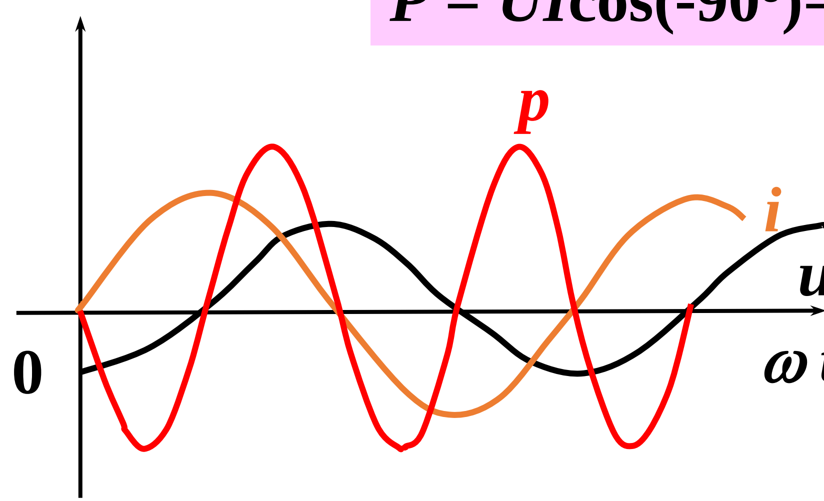
纯电感 $\varphi = 90^\circ$

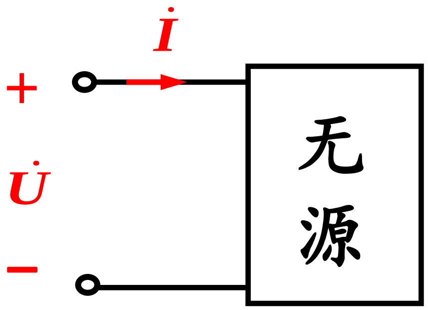
$$P = UI\cos 90^\circ = 0$$

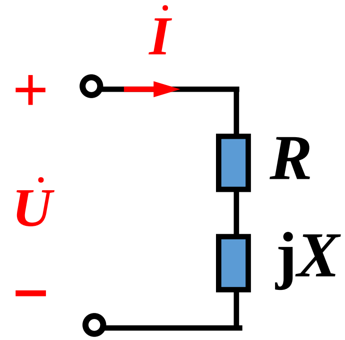


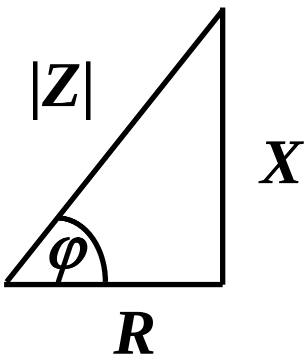
纯电容 $\varphi = -90^\circ$

$$P = UI\cos(-90^\circ) = 0$$









$$
\begin{aligned}
P &= UI\cos\varphi \\
&= |Z|\,I\,I\cos\varphi \\
&= I^2|Z|\cos\varphi \\
&= I^2R
\end{aligned}
$$

有功功率是消耗在电阻上的功率

有功功率守恒：电路中所有元件吸收的有功功率代数和为零。

$$\text{功率因数} \cos\varphi \begin{cases} 1, & \text{纯电阻} \\ 0, & \text{纯电抗} \end{cases} \qquad \mathbf{0 \le \cos\varphi \le 1}$$

$X > 0$, $\varphi > 0$, **感性**， **滞后**功率因数

$X < 0$, $\varphi < 0$, **容性**， **超前**功率因数

例： $\cos\varphi = 0.5$ (滞后)， 则$\varphi = 60^{\circ}$

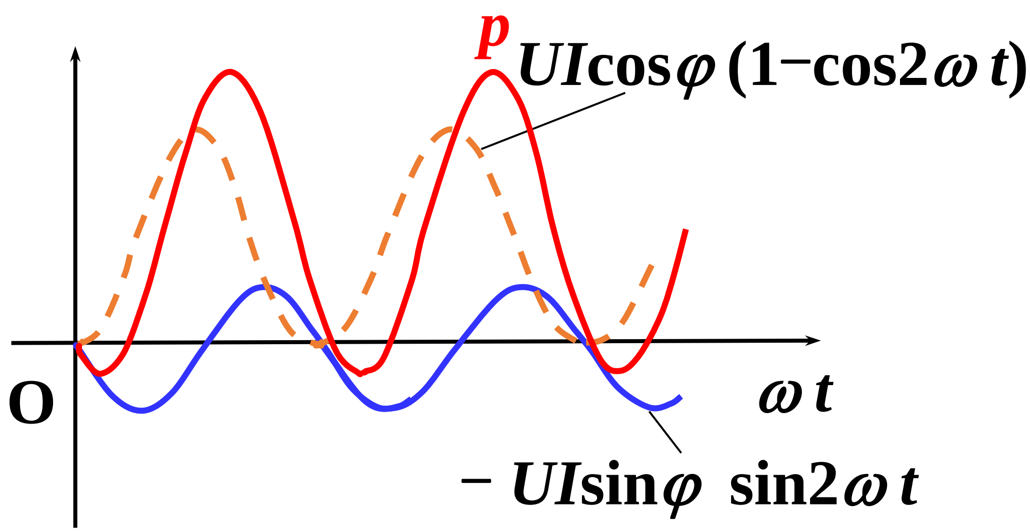
平均功率实际上是电阻消耗的功率，亦称为**有功功率**，它不仅与**电压电流有效值**有关，而且与**$\cos\varphi$**有关，这是交流和直流的很大区别，主要由于电压、电流存在相位差。

瞬时功率的另一种分解方法:

$$p(t)=UI\cos\varphi-UI\cos(2\omega t-\varphi)$$

第2表达式

$$=UI\cos\varphi(1-\cos 2\omega t)-UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$



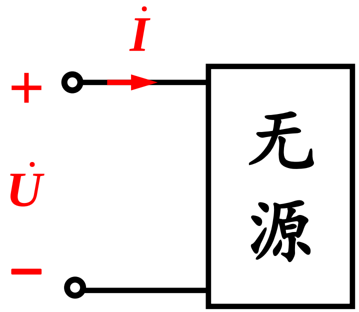
不可逆部分

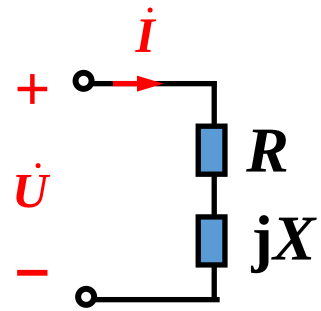
可逆部分

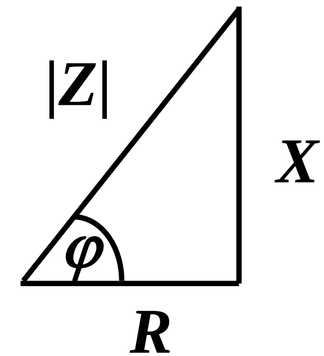
- 部分能量在电源和一端口之间来回交换。

无功功率(reactive power)

定义：网络与电源往复交换功率的幅值







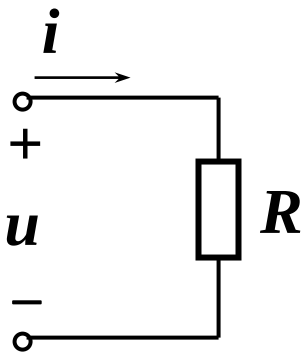
$$Q = UI\sin\varphi$$
$$= |Z|\, I\, I\sin\varphi$$
$$= I^2 |Z| \sin\varphi$$
$$= I^2 X$$

$\varphi = \psi_u - \psi_i$：功率因数角。

单位: var (乏)

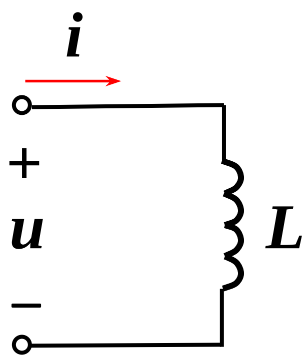
- Q 是由储能元件L、C的性质决定；
- $Q>0$，表示网络吸收无功功率；
- $Q<0$，表示网络发出无功功率。

R、L、C元件的有功功率和无功功率



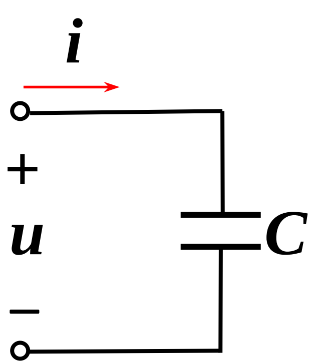
$$P_R = UI\cos\varphi = UI\cos 0° = UI = I^2R = U^2/R$$

$$Q_R = UI\sin\varphi = UI\sin 0° = 0$$



$$P_L = UI\cos\varphi = UI\cos 90° = 0$$

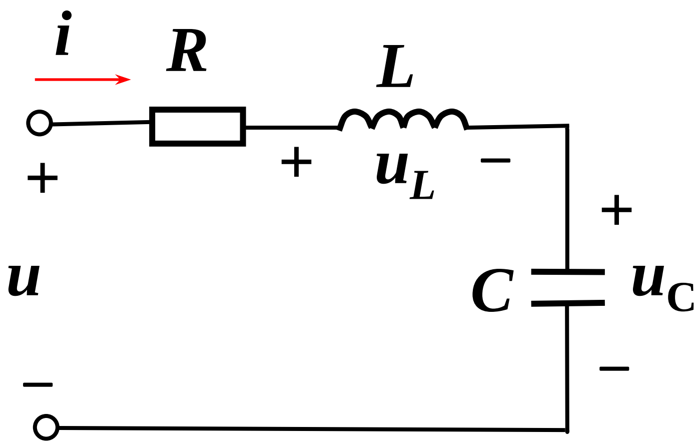
$$Q_L = UI\sin\varphi = UI\sin 90° = UI = I^2X_L$$

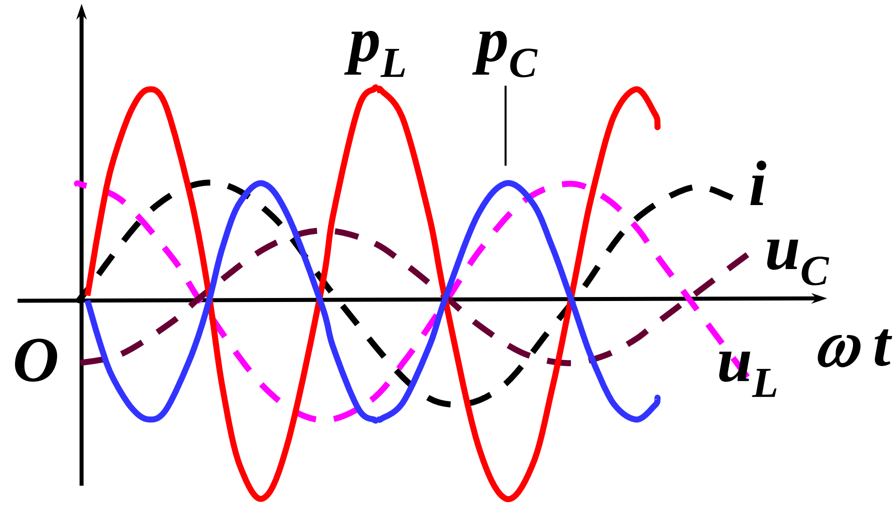


$$P_C = UI\cos\varphi = UI\cos(-90°) = 0$$

$$Q_C = UI\sin\varphi = UI\sin(-90°) = -UI = -I^2X_C$$

电感、电容的无功补偿作用：





当L发出功率时，C刚好吸收功率，因此L、C的无功具有互相补偿的作用。通常说，**L吸收无功、C发出无功**。

无功的物理意义：

$$Q_L = I^2 X_L = I^2 \omega L = \omega \cdot \frac{1}{2} L(\sqrt{2} I)^2$$

$$= \omega \cdot \frac{1}{2} L I_{\mathrm{m}}^2 = \frac{2\pi}{T} W_{\max}$$

反映电源与负载之间交换能量的速率。

11.4 视在功率(apparent power)

有功功率的上限值　　电气设备的容量

$$S \overset{\text{def}}{=} UI$$ 单位：VA（伏安）

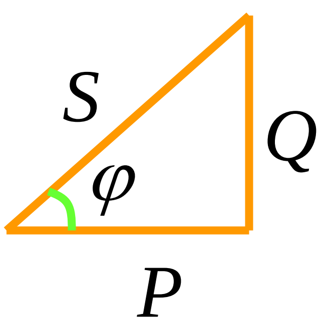
有功，无功，视在功率的关系：

有功功率:　$P=UI\cos\varphi$　单位：W

无功功率:　$Q=UI\sin\varphi$　单位：var

视在功率:　$S=UI$　单位：VA

$$S=\sqrt{P^2+Q^2}$$



功率三角形

上节回顾

- 瞬时功率：元件或一端口网络某一时刻的功率

$$p(t)=ui=UI\cos\varphi-UI\cos(2\omega t-\varphi)$$

$$=UI\cos\varphi(1-\cos 2\omega t)-UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$

消耗功率

交换功率

- 有功功率：瞬时功率的平均值，单位：[W]

$$P=UI\cos\varphi \Rightarrow P=I^2R$$

消耗在电阻上的功率

- 无功功率：网络与电源往复交换功率的幅值，单位：[var]

$$Q=UI\sin\varphi \Rightarrow Q=I^2X$$

反映电源与负载之间交换能量的速率

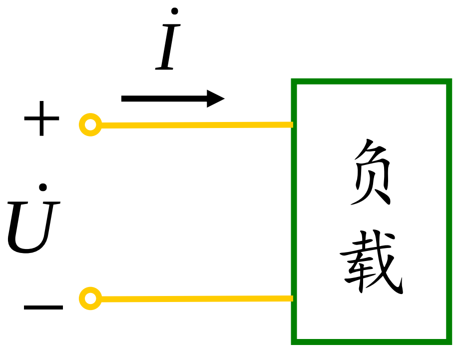
- 视在功率：瞬时功率的最大值，单位：[V·A]

$$S=UI$$

电气设备的容量

11.5 复功率

将有功功率、无功功率和视在功率综合成一个物理量



定义：$\bar{S} = \dot{U}\dot{I}^*$　单位：V·A（伏安）

$$\bar{S} = UI\angle(\Psi_u - \Psi_i) = UI\angle\varphi = S\angle\varphi$$
$$= UI\cos\varphi + \mathrm{j}UI\sin\varphi = P + \mathrm{j}Q$$

也可表示为：

$$\bar{S} = \dot{U}\dot{I}^* = Z\dot{I}\cdot\dot{I}^* = ZI^2 = (R + \mathrm{j}X)I^2 = I^2R + \mathrm{j}I^2X$$

or　$\bar{S} = \dot{U}\dot{I}^* = \dot{U}(\dot{U}Y)^* = \dot{U}\cdot\dot{U}^*Y^* = U^2Y^*$

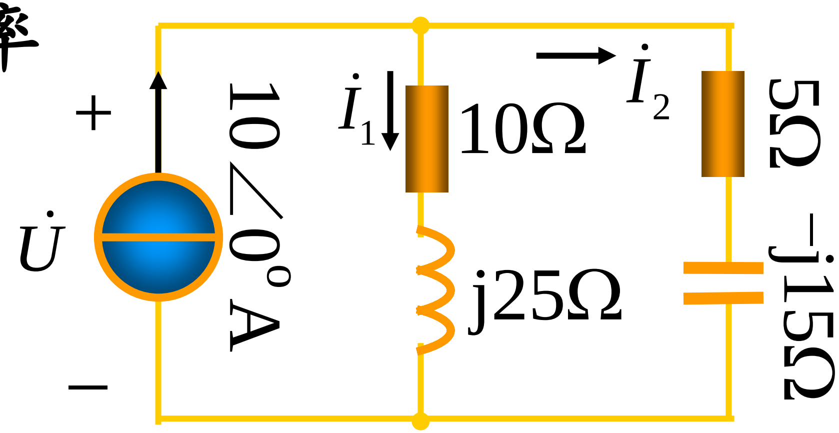
- $\bar{S}$是复数，而不是相量，它不对应任意正弦量；
- $\bar{S}$把 P、Q、S 联系在一起，它的实部是有功功率，虚部是无功功率，模是视在功率；
- 复功率满足守恒定理：在正弦稳态下，任一电路所有支路吸收的复功率之和为零。即

$$\sum_{k=1}^{b}\bar{S}_k=\sum_{k=1}^{b}(P_k+\mathrm{j}Q_k)=0 \longrightarrow \begin{cases}\sum_{k=1}^{b}P_k=0\\ \sum_{k=1}^{b}Q_k=0\end{cases}$$

视在功率守恒？注意：视在功率不守恒！！！

$$\because U\neq U_1+U_2\qquad \therefore S\neq S_1+S_2$$

例　求电路各支路的复功率



解

$$Z=(10+\mathrm{j}25)//(5-\mathrm{j}15)$$

$$\dot{U}=10\angle 0^{\circ}\times Z\ =236\angle(-37.1^{\circ})\ \mathrm{V}$$

$$\bar{S}_{发}=236\angle(-37.1^{\circ})\times 10\angle 0^{\circ}=1884-\mathrm{j}1423\ \mathrm{VA}$$

$$\bar{S}_{1吸}=U^2Y_1^*=236^2\left(\frac{1}{10+\mathrm{j}25}\right)^*=769+\mathrm{j}1923\ \mathrm{VA}$$

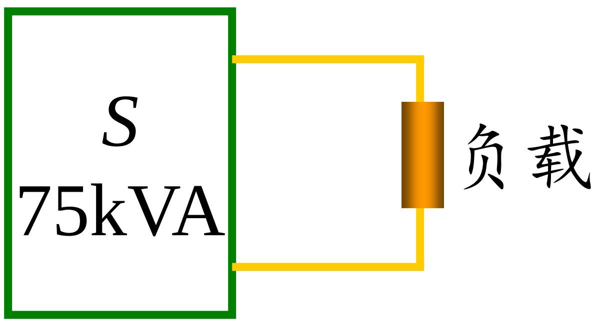
$$\bar{S}_{2吸}=U^2Y_2^*=1116-\mathrm{j}3346\ \mathrm{VA}$$

$$\bar{S}_{1吸}+\bar{S}_{2吸}=\bar{S}_{发}$$

11.6 功率因数校正/提高

功率因数低带来的问题：

- **发电设备的利用率较低，电流到了额定值，但功率容量还有；**



$$P=UI\cos\varphi=S\cos\varphi$$

$\cos\varphi=1$, $P=S=75\text{kW}$

$\cos\varphi=0.7$, $P=0.7S=52.5\text{kW}$

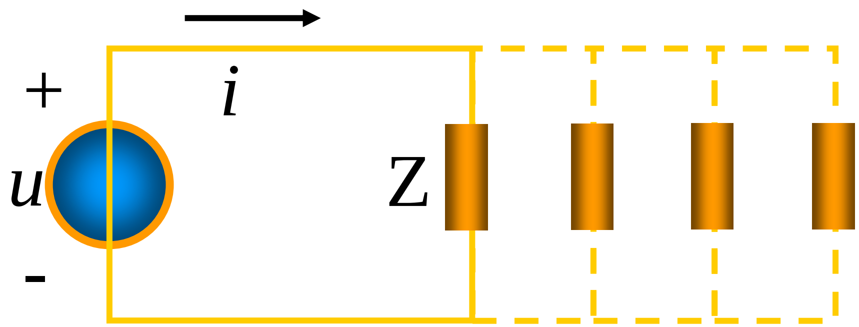
设备容量 S (额定)向负载送多少有功要由负载的阻抗角决定。

一般用户： 异步电机 空载 $\cos\varphi=0.2\sim0.3$

满载 $\cos\varphi=0.7\sim0.85$

日光灯 $\cos\varphi=0.45\sim0.6$

➢ 当输出相同的有功功率时，线路上电流大，$I=P/(U\cos\varphi)$，线路压降损耗大。

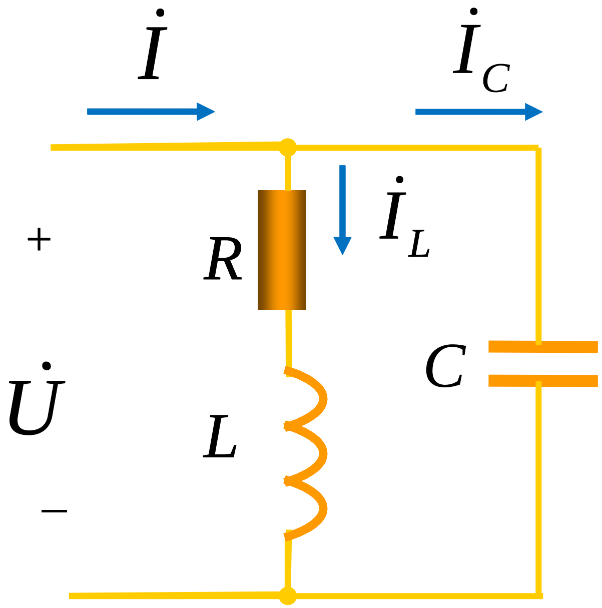


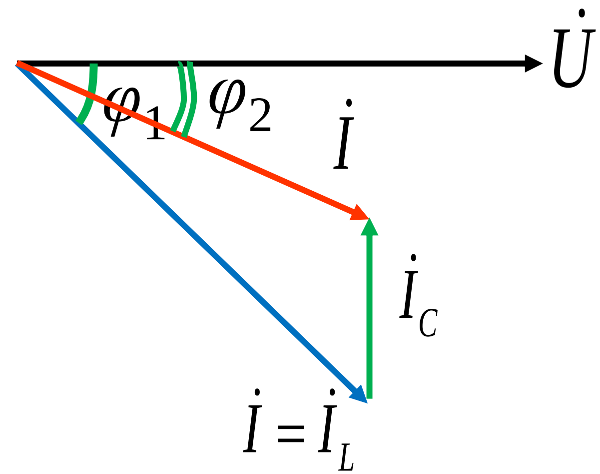
$P = UI\cos\varphi \qquad I\downarrow$

解决办法：（1）高压传输 $U\uparrow$

（2）改进自身设备 $\cos\varphi\uparrow$

（3）并联电容，提高功率因数





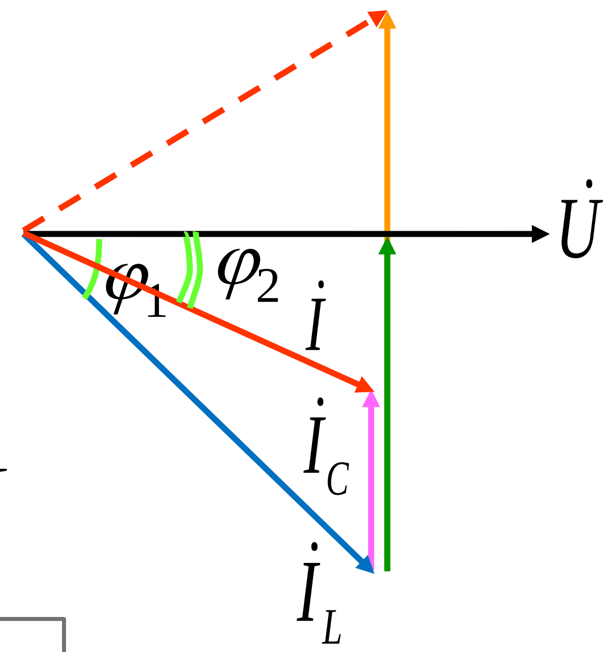
并联电容后，原负载的电压和电流不变，吸收的有功功率和无功功率不变，即：负载的工作状态不变。但电路的功率因数提高了。

并联电容的确定：

$$I_C = I_L \sin\varphi_1 - I\sin\varphi_2$$

将$I_L = \dfrac{P}{U\cos\varphi_1}$，$I = \dfrac{P}{U\cos\varphi_2}$代入

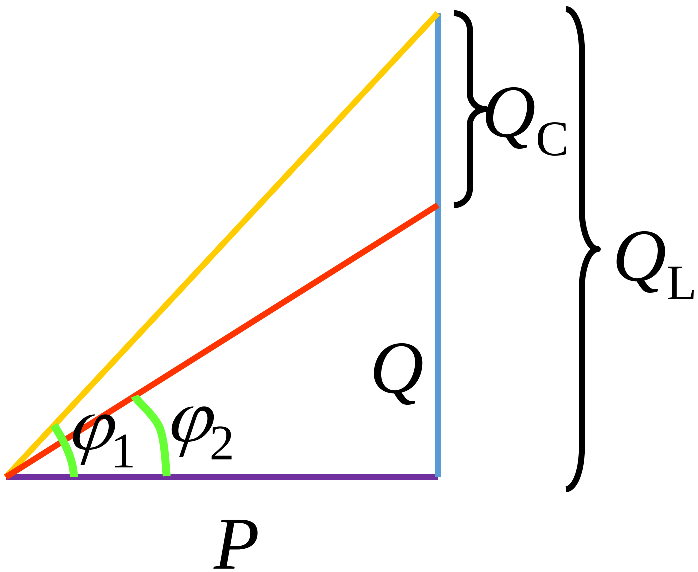
$$I_C = \frac{P}{U}(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2) = \omega C U$$



$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{P}{\omega U^2}(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)}$$

补偿容量不同：
- 欠
- 全——不要求
  (电容设备投资增加，经济效果不明显)
- ~~过——功率因数又由高变低(性质不同)~~

并联电容也可以用功率三角形确定：



$$|Q_C| = |Q_L - Q| = P(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)$$

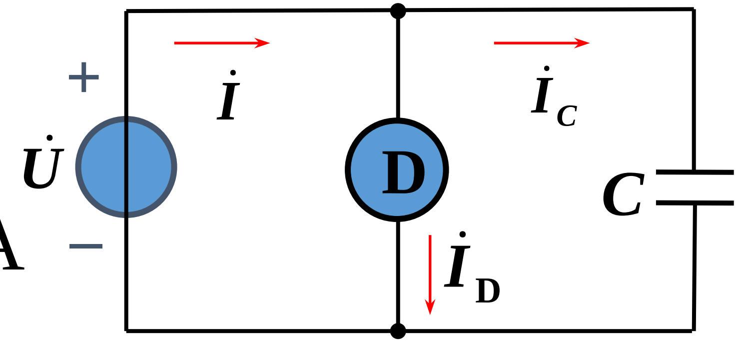
$$|Q_C| = U^2 Y = \omega C U^2$$

$$\therefore \quad C = \frac{P}{\omega U^2}(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)$$

从功率角度看： 并联电容后，电源向负载输送的有功$UI_L\ \cos\varphi_1 = UI\ \cos\varphi_2$不变，但是电源向负载输送的无功$UI\sin\varphi_2 < UI_L\sin\varphi_1$减少了，减少的这部分无功由电容“产生”来补偿，使感性负载吸收的无功不变，而功率因数得到改善。

例 已知：电动机 P_D=1000W，U=220V，f=50Hz，C =30μF，$\cos\varphi_D$=0.8(滞后）。求负载电路的功率因数。

解： 设 $\dot{U} = 220\angle 0^\circ$ V



$$I_D = \frac{P}{U\cos\varphi_D} = \frac{1000}{220\times 0.8} = 5.68\text{A}$$

$\cos\varphi_D = 0.8$(滞后) ⇨ $\varphi_D = 36.9^\circ = \varphi_u - \varphi_i$

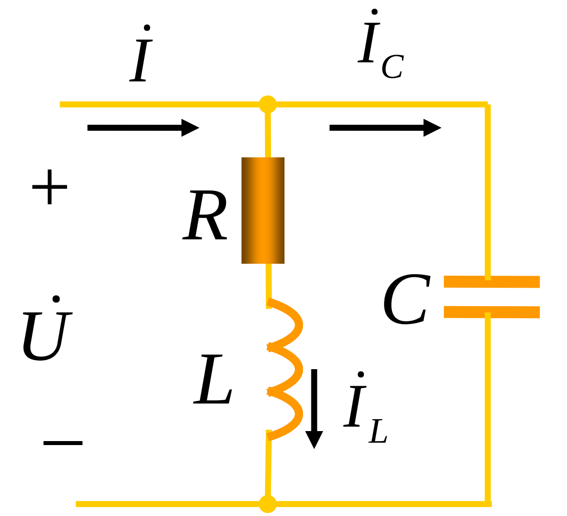
$$\dot{I}_D = 5.68\angle -36.9^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \text{j}\omega C 220\angle 0^\circ = \text{j}2.08 \text{ A}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_D + \dot{I}_C = 4.54 - \text{j}1.33 = 4.73\angle -16.3^\circ \text{ A}$$

$$\therefore \quad \cos\varphi = \cos[0^\circ - (-16.3^\circ)] = 0.96 \quad \text{(滞后)}$$

例 已知：f=50Hz, U=220V, P=10kW, cosφ_1=0.6，要使功率因数提高到0.9，求并联电容C，并联前后电路的总电流各为多大？



解

$$\cos\varphi_1 = 0.6 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = 53.13^{o}$$

$$\cos\varphi_2 = 0.9 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = 25.84^{o}$$

$$C = \frac{P}{\omega U^2}(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)$$

$$= \frac{10\times10^3}{314\times220^2}(\tan53.13^{\circ} - \tan25.84^{\circ}) \ = 557\mu\ \mathrm{F}$$

未并电容时： $I = I_L = \dfrac{P}{U\cos\phi_1} = \dfrac{10\times10^3}{220\times0.6} = 75.8\mathrm{A}$

并联电容后： $I = \dfrac{P}{U\cos\phi_2} = \dfrac{10\times10^3}{220\times0.9} = 50.5\mathrm{A}$

若要使功率因数从0.9再提高到0.95，试问还应增加多少并联电容，此时电路的总电流是多大？

解

$$\cos\varphi_1 = 0.9 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = 25.84^{\circ}$$

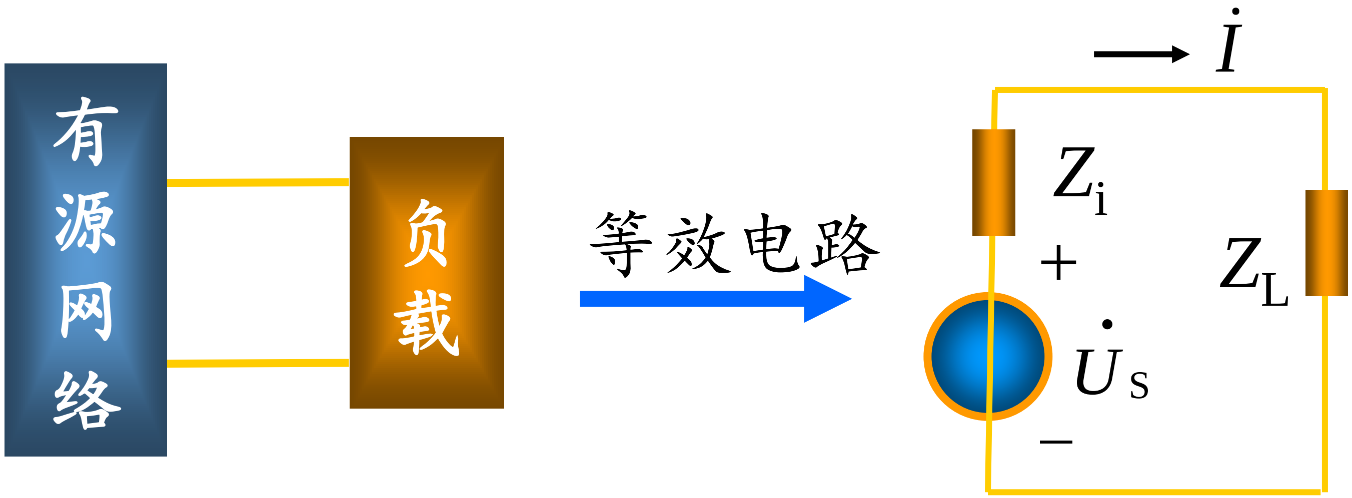
$$\cos\varphi_2 = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = 18.19^{\circ}$$

$$C = \frac{P}{\omega U^2}(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2) \qquad I = \frac{10\times10^3}{220\times0.95} = 47.8\text{A}$$

$$= \frac{10\times10^3}{314\times220^2}(\tan25.84^{\circ} - \tan18.19^{\circ}) = 103\mu\text{ F}$$

$\cos\varphi$ 提高后，线路上总电流减少，但继续提高$\cos\varphi$ 所需电容很大，增加成本，总电流减小却不明显。因此，一般将$\cos\varphi$提高到0.9即可。

11.7 最大有功功率传输



$$Z_i = R_i + jX_i,\quad Z_L = R_L + jX_L$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{Z_i + Z_L},\quad I = \frac{U_S}{\sqrt{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2}}$$

有功功率 $P = R_L I^2 = \dfrac{R_L U_S^2}{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2}$

讨论 **正弦电路中负载获得最大功率$P_{\max}$的条件**

$$P=\frac{R_L U_S^2}{(R_i+R_L)^2+(X_i+X_L)^2}$$

$$\boxed{P_{\max}=\frac{U_S^2}{4R_i}}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial X}=0\\[2ex]\dfrac{\partial P}{\partial R}=0\end{cases}$$

- **若$Z_L=R_L+jX_L$可任意改变**

a) 先设R_L不变，X_L改变

显然，当$X_i+X_L=0$，即$X_L=-X_i$时，P获得最大值。

b) 再讨论R_L改变时，P的最大值

当$R_L=R_i$时，P获得最大值

$R_L=R_i \quad X_L=-X_i \rightarrow Z_L=Z_i^*$

最佳匹配条件

➢ 若$Z_L = R_L + jX_L$只允许X_L改变

获得最大功率的条件是：$X_i + X_L = 0$，即 $X_L = -X_i$

最大功率为 $P_{max} = \dfrac{R_L U_S^2}{(R_i + R_L)^2}$

➢ 若$Z_L = R_L$为纯电阻

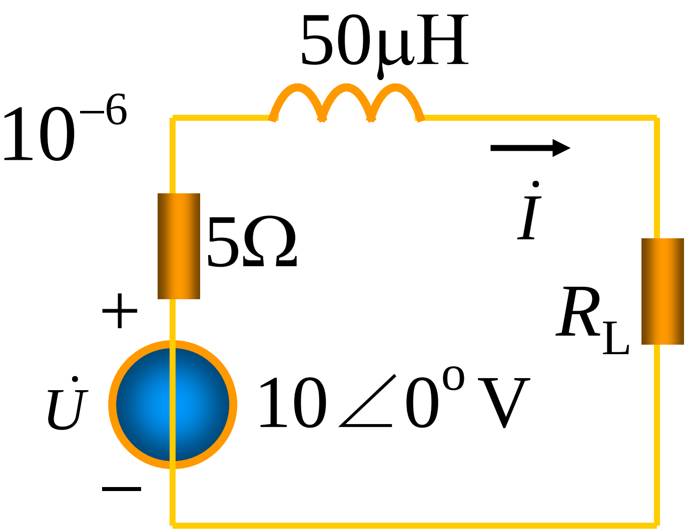
电路中的电流为：$\dot{I} = \dfrac{\dot{U}_S}{Z_i + R_L}$，$I = \dfrac{U_S}{\sqrt{(R_i + R_L)^2 + X_i^2}}$

负载获得的功率为：$P = \dfrac{R_L U_S^2}{(R_i + R_L)^2 + X_i^2}$

模匹配

令 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R_L} = 0 \quad \Rightarrow$ 获得最大功率条件：$R_L = \sqrt{R_i^2 + X_i^2} = |Z_i|$

例 电路如图，求：1.R_L=5Ω时其消耗的功率；
2. R_L=?能获得最大功率，并求最大功率；
3.在R_L两端并联一电容，问R_L和C为多大时能与内阻抗最佳匹配，并求最大功率。



$\omega = 10^5$rad/s

解 $Z_i = R + jX_L = 5 + j10^5 \times 50 \times 10^{-6}$

$= 5 + j5\ \Omega$

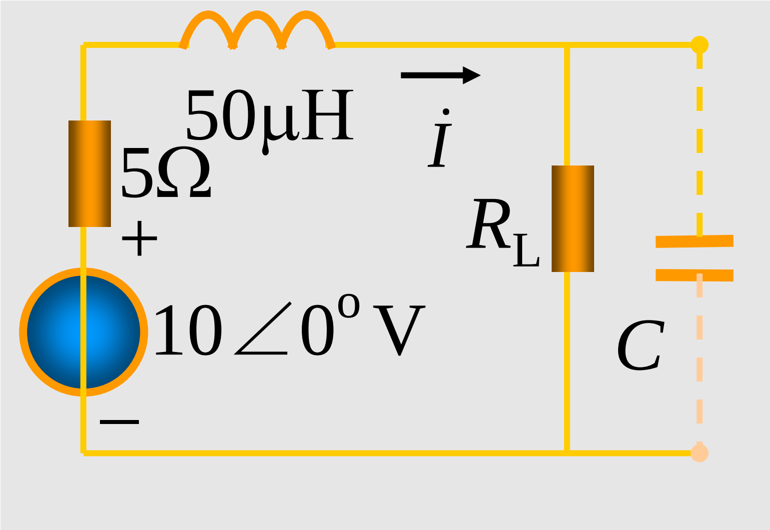
1. $\dot{I} = \dfrac{10\angle 0^\circ}{5 + j5 + 5} = 0.89\angle(-26.6^\circ)\text{A}$

$P_L = I^2 R_L = 0.89^2 \times 5 = 4\text{W}$

2. 当 $R_L = \sqrt{R_i^2 + X_i^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 7.07\Omega$ 获得最大功率

$$\dot{I}=\frac{10\angle 0^{\circ}}{5+\mathrm{j}5+7.07}=0.766\angle(-22.5^{\circ})\mathrm{A}$$

$$P_L=I^2R_L=0.766^2\times 7.07=4.15\mathrm{W}$$



3. $$Y=\frac{1}{R_L}+\mathrm{j}\omega C$$

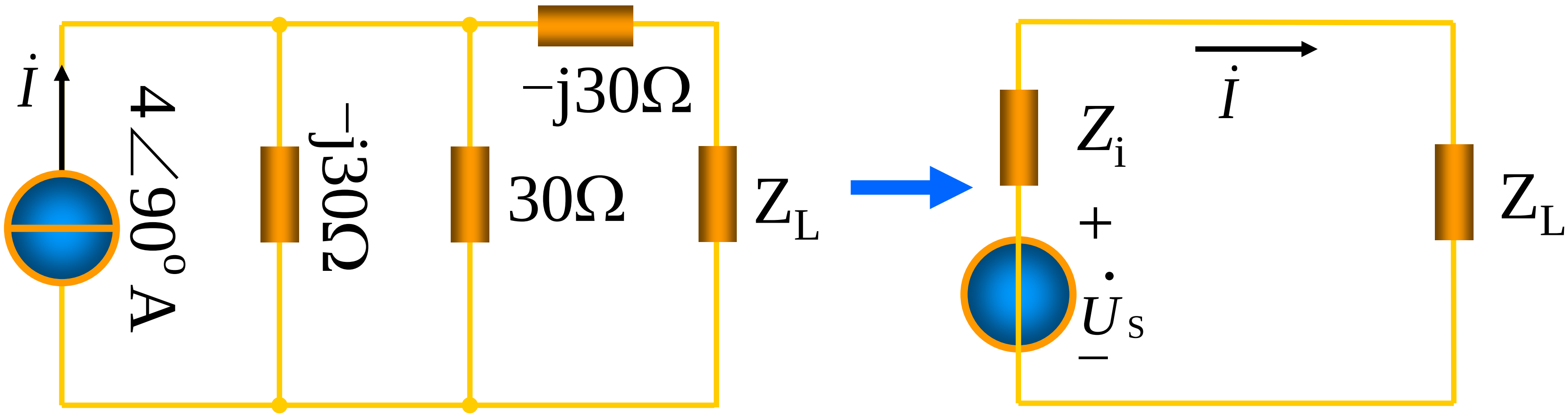
$$Z_L=\frac{1}{Y}=\frac{R_L}{1+\mathrm{j}\omega CR_L}=\frac{R_L}{1+(\omega CR_L)^2}-\mathrm{j}\frac{\omega CR_L^2}{1+(\omega CR_L)^2}$$

当 $$\begin{cases}\dfrac{R_L}{1+(\omega CR_L)^2}=5\\[2ex]\dfrac{\omega CR_L^2}{1+(\omega CR_L)^2}=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}R_L=10\Omega\\ C=1\mu F\end{cases}$$ 获最大功率

$$\dot{I}=\frac{10\angle 0^{\circ}}{10}=1\mathrm{A}$$

$$P_{\max}=I^2R_i=1\times 5=5\mathrm{W}$$

例　求Z_L=?时能获得最大功率，并求最大功率。



解

$$Z_i = -j30 + (-j30 // 30) = 15 - j45\Omega$$

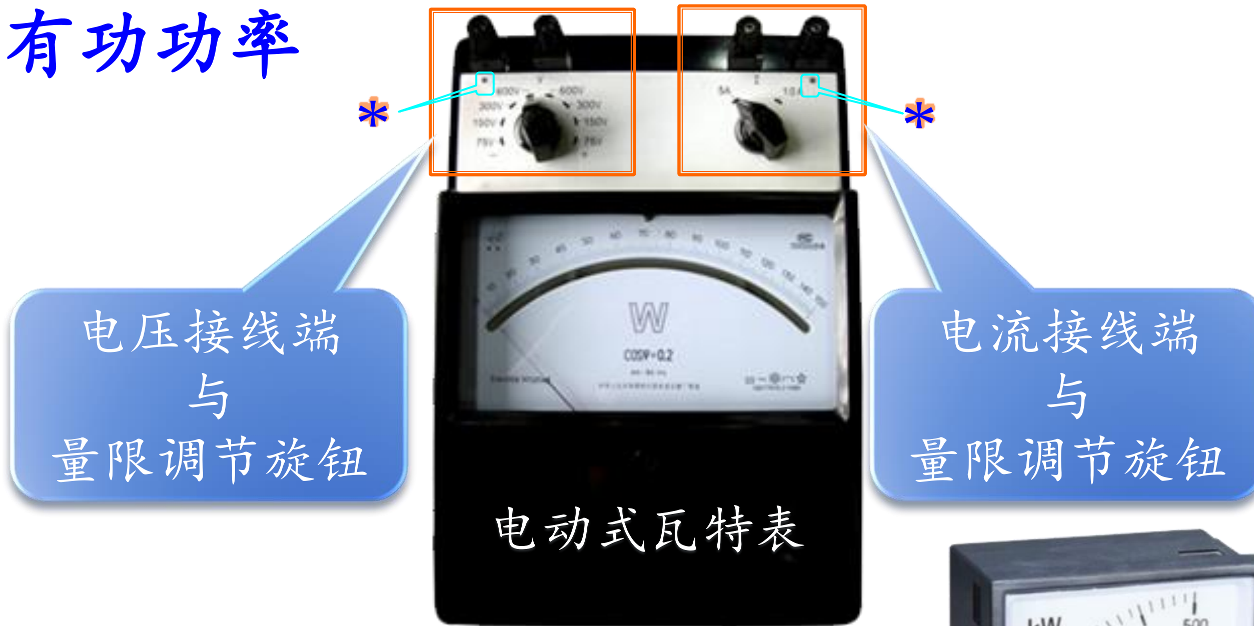
$$\dot{U}_S = 4j \times (-j30 // 30) = 60\sqrt{2}\angle 45^0$$

当　$Z_L = Z_i^* = 15 + j45\Omega$

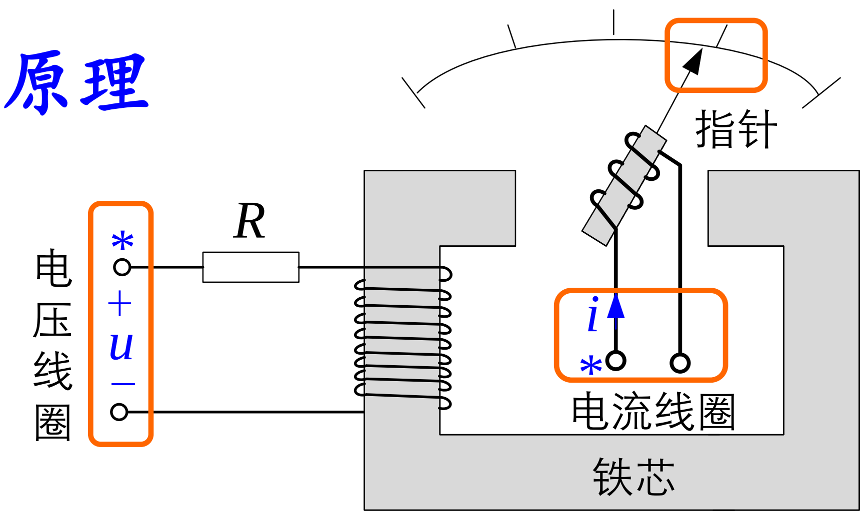
有　$P_{max} = \dfrac{(60\sqrt{2})^2}{4\times 15} = 120\text{W}$

11.8 有功功率测量

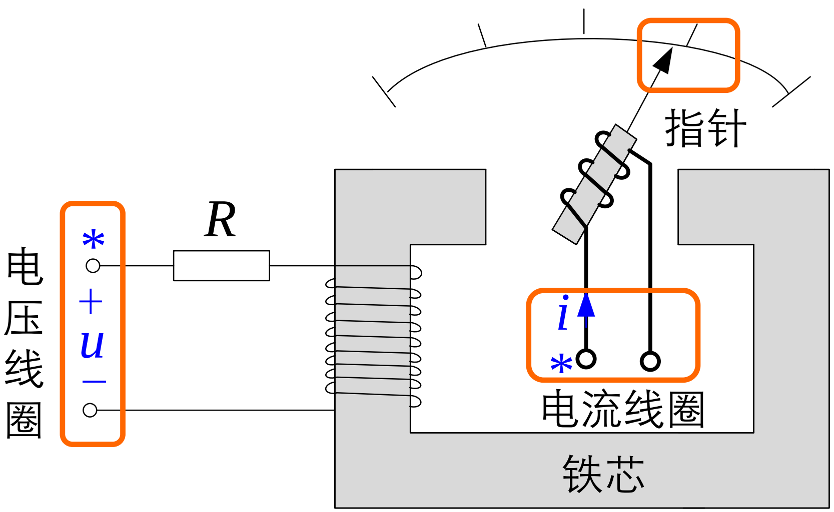
☞瓦特表测量有功功率



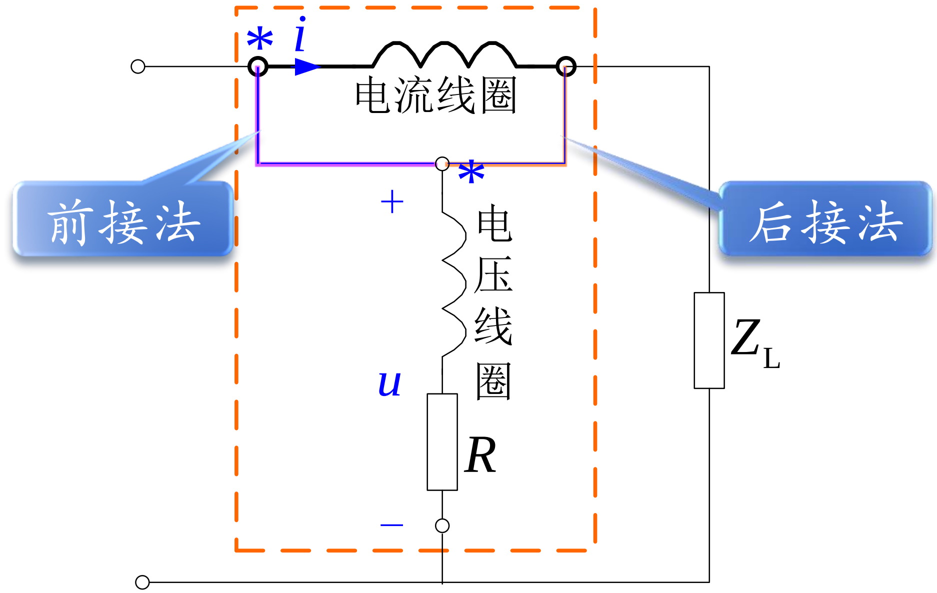
☞电动式瓦特表原理



11.8 有功功率测量



☞瓦特表的接线方式



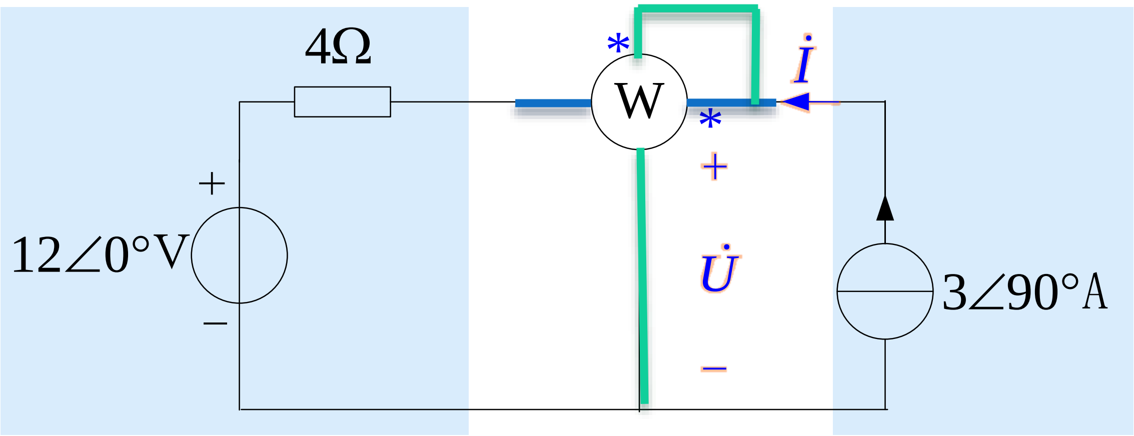
电流线圈与负载串联

电压线圈与负载并联

☞瓦特表的读数

$$\boxed{P=}\frac{1}{T}\int_0^T uidt=\boxed{\mathrm{Re}[\dot{U}\times\dot{I}^*]}$$

例 确定瓦特表的读数，及读数的物理含义。



瓦特表的读数 $P=\mathrm{Re}[\dot{U}\times\dot{I}^{*}]$

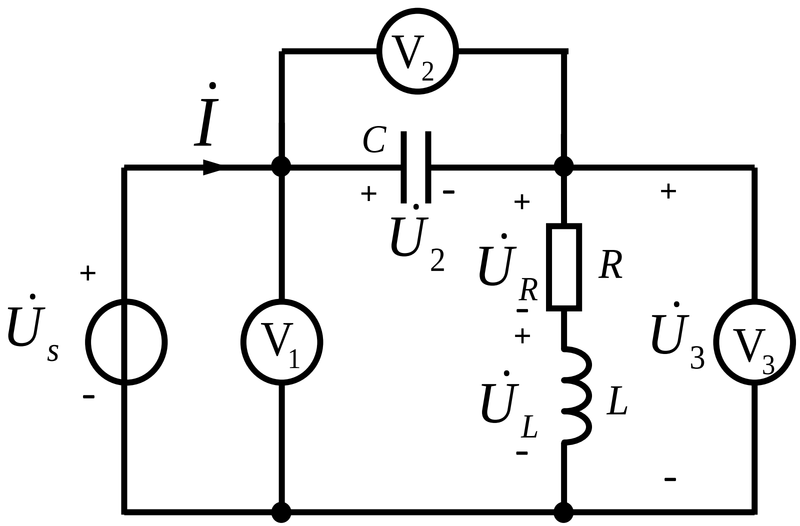
$$\dot{U}=4\times 3\angle 90^{\circ}+12\angle 0^{\circ}=12\sqrt{2}\angle 45^{\circ}\ \mathrm{V}$$

$$P=\mathrm{Re}[12\sqrt{2}\angle 45^{\circ}\times 3\angle -90^{\circ}]=36\mathrm{W}$$

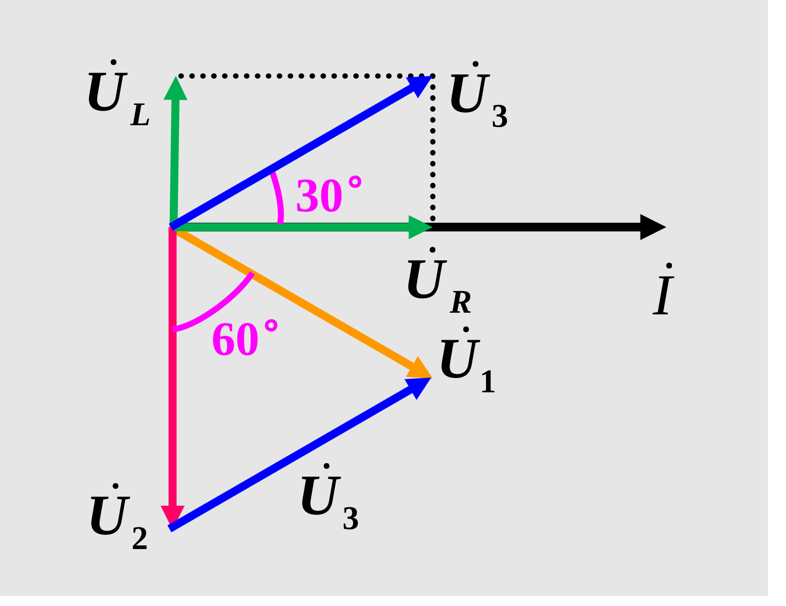
是电流源发出的有功功率，

也是电压源和电阻吸收的有功功率之和。

例 图示电路中，已知电源频率为50Hz，负载的有功功率为3630W，3个电压表的读数均为220V，求R、L、C的值。



解 用相量图分析



$$R = 10\ \Omega$$

$$L = 0.018\ \text{H}$$

$$C = 275.7\,\mu\text{F}$$

本章小结

- 几个功率：瞬时功率、有功功率、无功功率、视在功率、复功率
- 几个守恒：瞬时、有功、无功、复功率守恒

  视在功率不守恒
- 功率因素校正/提高：

  Q1：为什么要提高功率因素？

  ✓ 提高电源容量利用率

  ✓ 降低线路电流及损耗

  Q2：如何提高功率因素？ 并联电容
- 最大有功功率传输： $Z_L = Z_i^*$ 共轭匹配

作业

- 11.3节：11-2
- 11.5节：11-7
- 11.6节：11-9
- 11.7节：11-13