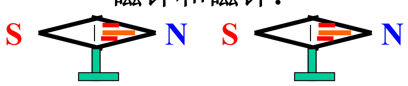
第7章　稳恒磁场

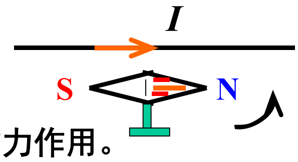
§7-1 磁性与磁场

一. 磁力，基本的磁现象

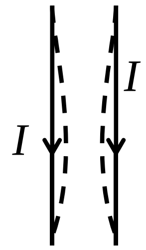
磁针和磁针：



磁铁与载流导线：



载流导线与载流导线：



在磁场中运动的电荷受到磁力作用。

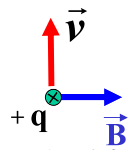
磁力与运动电荷对运动电荷的相互作用有关。

运动电荷 ⇄ 磁场 ⇄ 运动电荷

二. 磁感应强度 B 的定义

$\vec{B}$:描述磁场强弱及方向的物理量

用运动电荷q来检验：(1)速度沿某一特定方向，q受力为零，定义该方向为该点处B的方向。(2)q的速度垂直B时，受力最大。

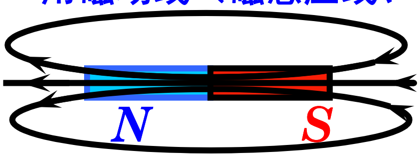


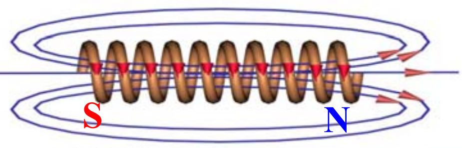
定义磁感应强度：$|B| = \dfrac{F_{Max}}{|q|v}$　　$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

磁感应强度B单位：SI制：T(特斯拉)；高斯制：G（高斯）。

$1T = 10^4 G$

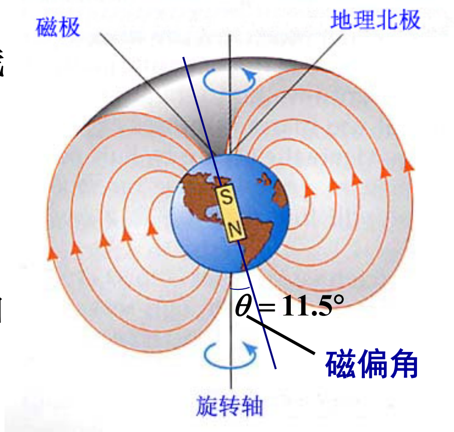
用磁场线（磁感应线、磁力线）形象地描绘磁场的分布





（1）磁力线上任一点的切线方向与该点的磁感应强度的方向一致。垂直穿过单位面积的磁力线根数等于该处磁感应强度*B*的大小，即磁力线密集处磁感应强度大。

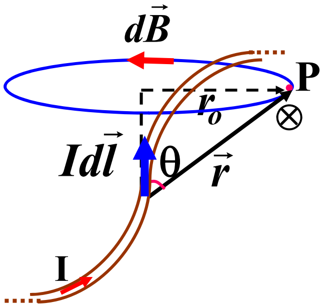
（2）磁力线是连续的闭合曲线，没有起点和终点。两根磁力线不相交。



§7-2　毕奥—萨伐尔定律：电流激发磁场的规律

一. 毕奥—萨伐尔定律

电流元 $Id\vec{l}$ 在P点产生的磁场：



$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$

$\hat{r}$为 $\vec{r}$方向的单位矢量

真空磁导率：$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\mathrm{Tm/A}$

大小为：$dB = \dfrac{\mu_o}{4\pi}\dfrac{Idl\sin\theta}{r^2}$

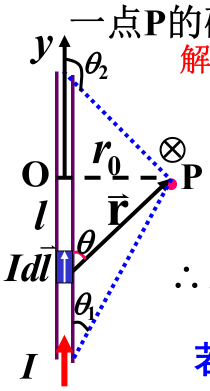
在以电流元为轴，$r_o = r\sin\theta$ 为半径的圆周上dB的大小相等，方向沿切线，满足右手关系。

当$\theta = 0$、π 时，$dB = 0$，即沿电流方向上的磁场为0

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 时，$dB = dB_{\mathrm{MaX}}$

载流导线产生的磁感应强度：$\vec{B} = \dfrac{\mu_o}{4\pi}\displaystyle\int\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$

例1. 载流长直导线，其电流强度为I，试计算导线旁任意一点P的磁感应强度。



解：

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$$

换变量：$l, r \to \theta$

$$l = -r_o ctg\theta$$

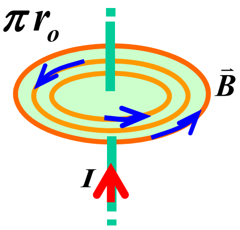
$$dl = \frac{r_o}{\sin^2\theta}d\theta \qquad r = r_o/\sin\theta$$

$$\therefore B = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{Idl\sin\theta}{r^2} = \frac{\mu_o I}{4\pi r_o}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

若导线无限长：$r_0 \ll L$　则：$\theta_1=0$，$\theta_2=\pi$

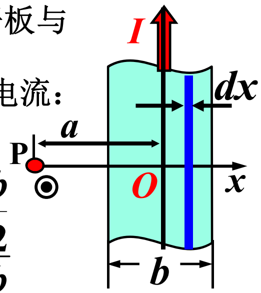
$$B = \frac{\mu_o I}{4\pi r_o}(\cos 0 - \cos\pi) = \frac{\mu_o I}{2\pi r_o}$$

(1) 载流长直导线磁场，类比电场：$E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_O r}$



(2) 磁力线是沿着垂直导线平面内的同心圆，其方向与电流方向成右手螺旋关系。

例2. 宽度为b的无限长金属平板，均匀通电流I, 平板与P点共面，求P点的磁感应强度。



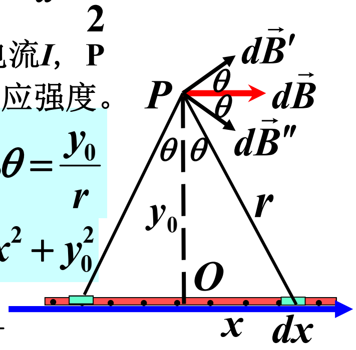
解：将板细分为许多无限长直导线，每根导线的电流：

$$dI=\frac{I}{b}dx$$

所有细无线长电流产生的磁场方向相同

$$B=\int\frac{\mu_0 dI}{2\pi(x+a)}=\int_{-b/2}^{+b/2}\frac{\mu_0 I dx}{2\pi b(x+a)}=\frac{\mu_0 I}{2\pi b}\ln\frac{a+\frac{b}{2}}{a-\frac{b}{2}}$$

例3. 宽度为b的无限长金属平板，均匀通电流I, P点在平板中线正上方 y_0 处，求P点的磁感应强度。



电流垂直屏幕向下

解：磁场只有 x 分量。

$$\cos\theta=\frac{y_0}{r}$$

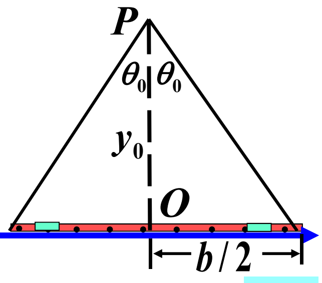
$$r^2=x^2+y_0^2$$

$$B_x=\int\frac{\mu_0 dI}{2\pi r}\cos\theta=\int\frac{\mu_0 I\cos\theta dx}{2\pi b r}$$

$$=\frac{\mu_0 I y_0}{2\pi b}\int_{-b/2}^{+b/2}\frac{dx}{r^2}=\frac{\mu_0 I y_0}{2\pi b}\int_{-b/2}^{+b/2}\frac{dx}{x^2+y_0^2}$$

$$B_x=\frac{\mu_0 I y_0}{2\pi b}\int_{-b/2}^{+b/2}\frac{dx}{x^2+y_0^2}=\frac{\mu_0 I y_0}{2\pi b}\cdot\frac{1}{y_0}\arctan\frac{x}{y_0}\bigg|_{-b/2}^{+b/2}$$

$$=\frac{\mu_0 I}{\pi b}\arctan\frac{b}{2y_0}=\frac{\mu_0 I}{\pi b}\theta_0$$



（1）当 $y_0>>b/2$ 时，$\tan\theta_0=\theta_0$

$$B_x=\frac{\mu_0 I}{\pi b}\theta_0=\frac{\mu_0 I}{\pi b}\tan\theta_0=\frac{\mu_0 I}{\pi b}\cdot\frac{b/2}{y_0}$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi y_0}$$ （无线长直导线产生的磁场）

面电荷的电场：$\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

（2）当 $y_0<<b/2$ 时，$\theta_0=\pi/2$

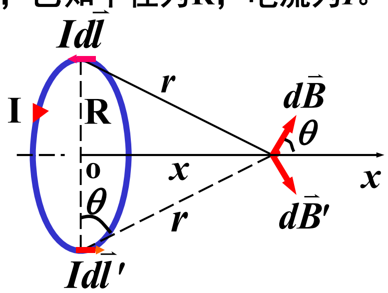
$j=\dfrac{I}{b}$ **面电流的线密度**：垂直电流方向单位长度的电流强度。

$$B_x=\frac{\mu_0 I}{\pi b}\theta_0=\frac{\mu_0 I}{2b}=\frac{\mu_0 j}{2}$$

无穷大平面电流产生的磁场，与P点到平面的距离无关。

例4. 求载流圆线圈轴线上的磁感应强度，已知半径为R，电流为I。

解：$\sum dB_{\perp x}=0$ 方向沿 x 轴



$$\therefore B=\int dB_x=\int dB\cos\theta$$

$$\left|Id\vec{l}\times\vec{r}\right|=Idl\cdot r \qquad \cos\theta=\frac{R}{r}$$

$$\therefore B=\frac{\mu_o}{4\pi}\int\frac{Idl\cos\theta}{r^2}$$

$$=\frac{\mu_o IR}{4\pi(x^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi R}dl=\frac{\mu_o IR^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$

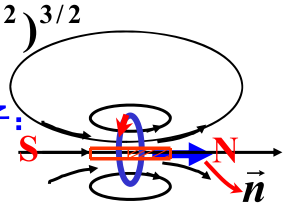
1）$x=0$（圆心处）：$B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$

2) x>>R:

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 IR^2}{2x^3}=\frac{\mu_0 IS}{2\pi x^3}=\frac{\mu_0\vec{P}_m}{2\pi x^3}$$

磁偶极矩（磁矩）：$\vec{P}_m=IS\vec{n}$

磁偶极子：

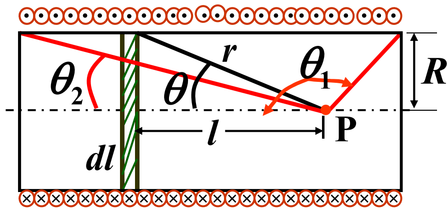


比较：$\vec{E}=-\dfrac{\vec{P}_e}{4\pi\varepsilon_0 x^3}$

例5. 求密绕螺线管轴线上的磁感应强度。

已知：导线通有电流I，单位长度上匝数为n。

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 IR^2}{2r^3}}$$

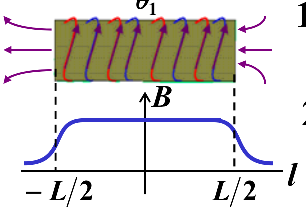


解：在管上取一小段dl，电流为$dI=nIdl$，该电流在P点的磁场为：

$$dB=\frac{\mu_o R^2 nIdl}{2r^3}$$

$$l=Rctg\theta\rightarrow dl=-\frac{R\,d\theta}{\sin^2\theta} \qquad r=\frac{R}{\sin\theta}$$

$$B=-\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\mu_o nI}{2}\sin\theta d\theta=\frac{\mu_o nI}{2}\left(\cos\theta_2-\cos\theta_1\right)$$



1) 若管长L>>R:

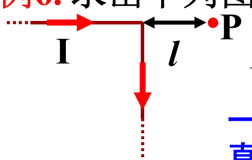
$L\rightarrow\infty$, $\theta_1=\pi$, $\theta_2=0$, $B=\mu_o nI$

2) 对半无限长螺线管:$\theta_1=\pi$, $\theta_2=\pi/2$;

或：$\theta_1=\pi/2, \theta_2=0$; $B=\mu_o nI/2$

例6. 求出下列图中，P点处磁感应强度。

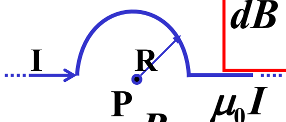
$$d\vec{B}=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$



$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi l}$$

一根半无限长直导线的磁场

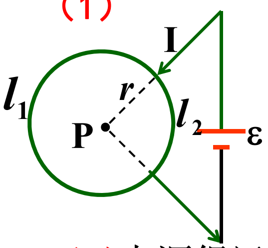
（1）



$$B=\frac{\mu_0 I}{4R}$$

半圆电流的磁场

（2）



$$B_1=\frac{\mu_0 I_1 l_1}{4\pi r^2}\text{（向外）}\quad B_2=\frac{\mu_0 I_2 l_2}{4\pi r^2}\text{（向里）}$$

$$B=B_1-B_2=\frac{\mu_0}{4\pi r^2}(I_1 l_1-I_2 l_2)$$

$$\because I_1R_1=I_2R_2, R_1=\rho l_1/s, R_2=\rho l_2/s$$

（3）电源很远 $\quad \therefore I_1 l_1=I_2 l_2,\quad \Rightarrow B=0$

§7—3 磁场的高斯定理

一. 磁通量 定义：穿过磁场中任一给定面的磁力线的总根数，就是穿过该面的磁通量Φ_B。

$$\Phi_B=\int_s\vec{B}\cdot d\vec{S}$$

单位：韦伯，$Wb=T\cdot m^2$

二. 真空中稳恒磁场的高斯定理

由于磁力线总是成闭合曲线

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

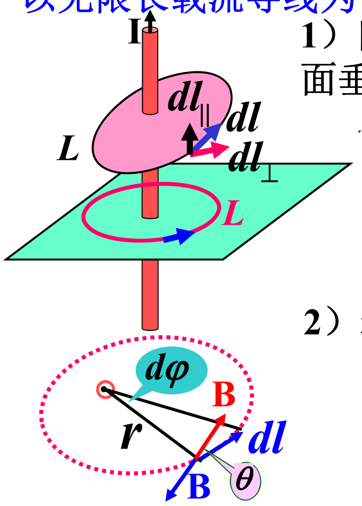
稳恒磁场是**无源场**

§7-4 安培环路定理

$$\oint_L\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum I_i$$ ⟶ 穿过闭合曲线所围面的电流代数和

当 I 与 L 的环绕方向成右手关系时，$I>0$，反之 $I<0$。

以无限长载流导线为例说明：



1）闭合曲线L围绕电流，且曲线所在平面垂直载流导线。

$$\vec{B}\cdot d\vec{l}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cos\theta\, dl=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}rd\varphi$$

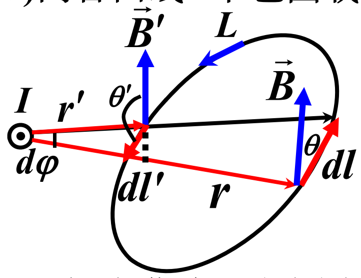
$$\therefore\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint d\varphi=\mu_0 I$$

2）若闭合曲线不在垂面上：

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=\oint\vec{B}\cdot\left(d\vec{l}_{\perp}+d\vec{l}_{\parallel}\right)$$

$$=\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}_{\perp}=\mu_0 I$$

3)闭合曲线L不包围载流导线



$$\vec{B}\cdot d\vec{l}+\vec{B}'\cdot d\vec{l}'$$
$$=Bdl\cos\theta+B'dl'\cos\theta'$$
$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}rd\varphi-\frac{\mu_0 I}{2\pi r'}r'd\varphi=0$$
$$\therefore\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=0$$

4）闭合曲线 *L* 包围多根载流导线

$$\oint_L\vec{B}\cdot d\vec{l}=\oint_L\left(\vec{B}_1+\vec{B}_2+\cdots\vec{B}_k\right)\cdot d\vec{l}$$

$$=\oint_L\vec{B}_1\cdot d\vec{l}+\oint_L\vec{B}_2\cdot d\vec{l}+\cdots\oint_L\vec{B}_k\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum I_i$$

闭合曲线包围的电流

若穿过回路的电流是连续分布：$\oint_L\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\int_S\vec{j}\cdot d\vec{S}$

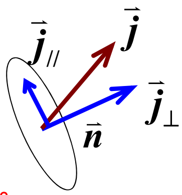
稳恒磁场：有旋场

$\vec{j}$:电流密度矢量

- 电流密度矢量：流过单位截面的电流

$$|\vec{j}|=\frac{dI}{dS}$$

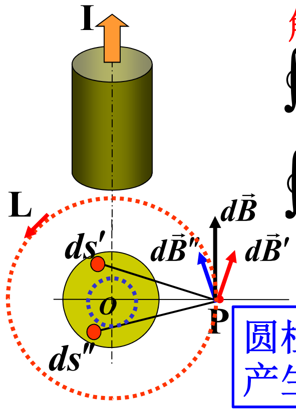
单位：A/m^2



$$dI=|\vec{j}_{\perp}|\cdot dS=\vec{j}\cdot d\vec{S}$$

电流强度是电流密度矢量通过 *S* 面的通量。

例1. 半径为R的无限长圆柱载流直导线，电流I沿轴线方向流动，并且截面上电流是均匀分布。计算任意点P的B。



解：$r>$R时：

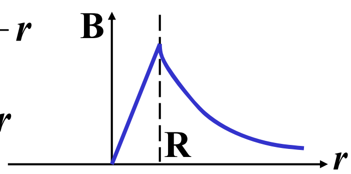
$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=B\cdot 2\pi r=\mu_0 I\quad\therefore B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

若r<R:

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=B\cdot 2\pi r=\mu_0\frac{I}{\pi R^2}\pi r^2$$

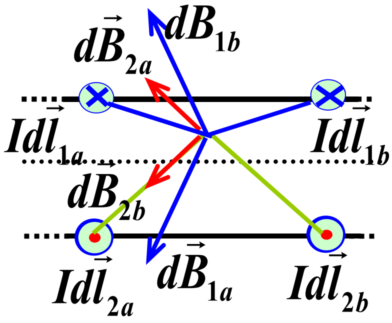
$$\therefore B=\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}r=\frac{\mu_0 j}{2}r$$

圆柱面电流产生的磁场？



例2. 求载流无限长直螺线管内任一点的磁场。单位长度线圈匝数为n。

根据：$d\vec{B}=\dfrac{\mu_o}{4\pi}\dfrac{Id\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$



由对称性分析：磁场只有沿轴的分量；在与轴等距离的平行线上磁感应强度相等。

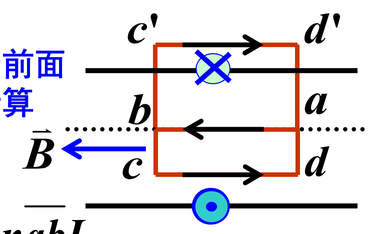
回路 $abcd$ 应用安培环路定理：

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=B_{ab}\cdot\overline{ab}-B_{cd}\cdot\overline{cd}=0$$

$$B_{cd}=B_{ab}=\mu_o nI$$

轴线磁场前面已积分计算

管内为均匀磁场



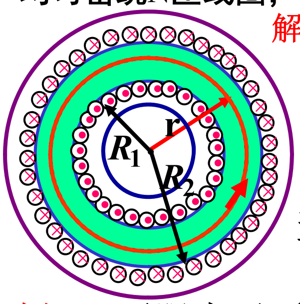
回路 $abc'd'$应用安培环路定理：

$$\oint_{L'}\vec{B}\cdot d\vec{l}=B_{ab}\cdot\overline{ab}+B_{c'd'}\cdot\overline{c'd'}=\mu_0 nabI$$

$$\because B_{ab}=\mu_0 nI\qquad \therefore B_{c'd'}=0$$

管外的磁场为零

例3. 求通电螺绕环的磁场分布。已知环管轴线的半径为R，环上均匀密绕N匝线圈，设通有电流I。



解：圆周上各点B大小相等，当$R_1<r<R_2$:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=B\cdot 2\pi r=\mu_0 NI\qquad \therefore B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

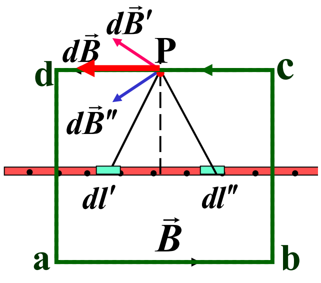
若 $r<R_1$, 或 $r>R_2$ $\because \mu_0\sum I_i=0\quad \therefore B=0$

当 $R_{管截面}<<R$，即 $r\approx R$:

$$B=\mu_0 nI\qquad n=\frac{N}{2\pi R}$$

例4.一无限大平面，有均匀分布的面电流，其横截线的电流线密度为j，求平面外一点 B。

电流垂直屏幕向外



解：离板等距离处的B大小相等

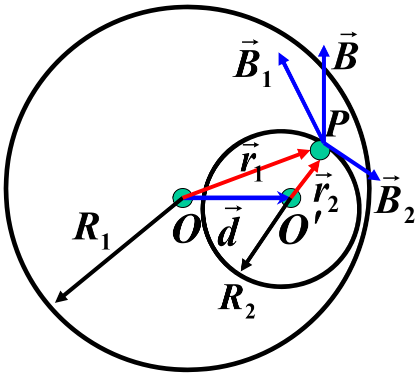
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=B\cdot ab+B\cdot cd=2B\cdot ab$$

$$\mu_0\sum I_i=\mu_0 j\cdot ab\qquad \therefore B=\frac{1}{2}\mu_0 j$$

与P点到平板的距离无关

例5. 半径R_1的无限长导体圆柱体中有一半径R_2的圆柱空腔，两圆柱轴之间间距为d，沿轴向通有电流 I（垂直屏幕向外），且电流在截面均匀分布，求空腔中及O点的磁感应强度。

解：电流可以认为是半径R_1圆柱形垂直屏幕向外的电流和半径R_2圆柱形垂直屏幕向内的电流叠加。总磁场由两个圆柱形电流产生的磁场叠加。



空腔中P点磁场：

$$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2=\frac{\mu_0}{2}\vec{j}\times\vec{r}_1+\frac{\mu_0}{2}(-\vec{j})\times\vec{r}_2$$

$$=\frac{\mu_0}{2}\vec{j}\times(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=\frac{\mu_0}{2}\vec{j}\times\vec{d}$$

$$j=I/(\pi R_1^2-\pi R_2^2)$$

空腔中磁场均匀且水平向上

半径R_1圆柱形垂直屏幕向外的电流在O点产生的磁场为零，O点磁场只由半径R_2圆柱形垂直屏幕向内的电流产生。

§ 7-5 带电粒子在磁场中的运动

一. 带电粒子的受力

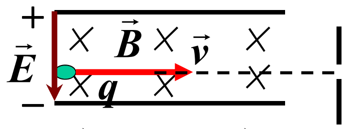
洛仑兹力：$\vec{F}=\vec{F}_e+\vec{F}_m=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}$

根据牛顿第二定律：$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}=\dfrac{d\vec{P}}{dt}$

如粒子速度选择器：电力和磁力的方向相反。

粒子不发生偏转时：

$$qE=qvB\quad\Rightarrow v=\frac{E}{B}$$



二. 磁场中的电传导——霍耳效应

$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$

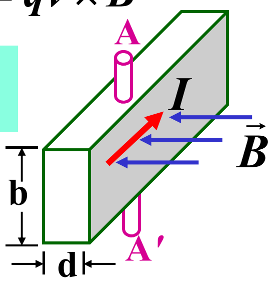
E_H: 霍耳电场，V_H: 霍耳电压

$$V_H=E_Hb$$

正、负电荷产生反向霍耳电压

电力和磁力平衡时：$qv_dB=qE_H=q\dfrac{V_H}{b}$

$$\therefore V_H=v_dBb$$



v_d：电子的平均宏观定向运动速率（漂移速率）

载流子浓度:n $\quad I = qn\cdot bdv_d$ $\quad V_H = v_d Bb$

$$v_d = \frac{I}{qn\cdot bd} \qquad \therefore V_H = \frac{1}{nq}\frac{IB}{d} = K\frac{IB}{d} \qquad K = \frac{1}{nq}$$

霍耳电阻：$R_H = \dfrac{V_H}{I} = \dfrac{B}{nqd}$

(1) K：霍耳系数，与导体材料有关，测量霍耳电压，可计算载流子浓度、判断载流子种类（根据霍耳电压方向）

(2) 测磁场：目前测磁场常用——高斯计

三. 在均匀磁场中的运动：

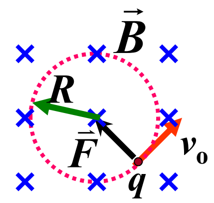
(1) q 以平行或反平行磁场方向运动，则它受力为零，为匀速直线运动。

(2) 由于 $(q\vec{v}\times\vec{B})\perp v$，故$v$的大小不变，$v = v_o$

磁力不作功

(3) q 以 $\vec{v}_o \perp \vec{B}$ 进入磁场：

$qvB = m\,v^2/R$ $\qquad R = \dfrac{mv}{qB}$



R是粒子相对论动量的直接量度

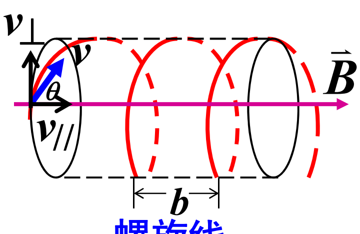
q转一圈的时间（周期）：$T = \dfrac{2\pi R}{v} = \dfrac{2\pi m}{qB}$

回旋频率：$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{qB}{2\pi m}$

（4）普遍情形：$v_{//} = v\cos\theta$
$v_{\perp} = v\sin\theta$

螺距：$b = v_{//}T = \dfrac{2\pi m v_{//}}{qB}$

半径：$R = \dfrac{mv_{\perp}}{qB}$



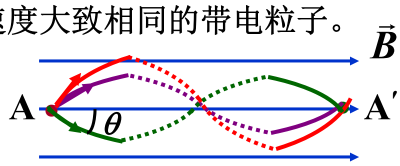
螺旋线

应用：

A. 磁聚焦 一束发散角θ不太大，速度大致相同的带电粒子。

$v_{\parallel}=v\cos\theta\approx v \quad v_{\perp}=v\sin\theta\approx v\theta$

$R=\dfrac{mv_{\perp}}{qB} \qquad b=\dfrac{2\pi m v_{//}}{qB}$

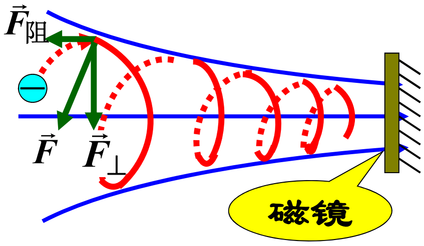


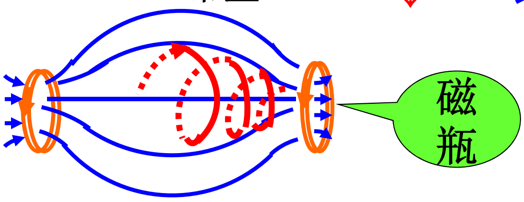
各粒子的螺距b相等，R不相等。

B. 磁约束

一般带电粒子在非均匀磁场也作螺旋线运动：

但是：$R\neq$常量，$b\neq$常量　$B\uparrow \begin{cases} R\downarrow \\ b\downarrow \end{cases}$





注：平行磁场方向的速度分量较大的粒子，可能从两端逃逸出去。可使用环形磁约束。

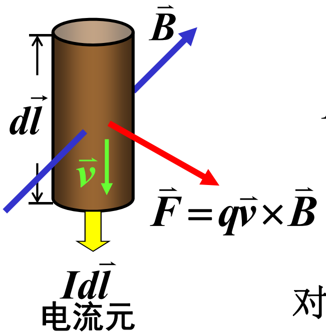
C. 质谱仪——微观粒子质量的测量

根据：$R=\dfrac{mv}{qB}\Rightarrow\dfrac{m}{q}=\dfrac{RB}{v}$　直接测量出质/荷比，若已知电荷量可以得到质量。

微观粒子垂直磁场运动

§7-6 载流导线在磁场中所受的力

一. 安培力



n：载流子浓度

$$d\vec{F}=nSdl\cdot q\vec{v}\times\vec{B}$$

$$I=qn\cdot Sv \qquad \therefore v=\frac{I}{qnS}\text{（带入上式）}$$

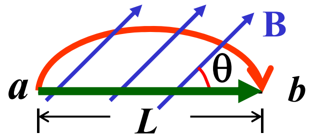
$$\therefore d\vec{F}=Id\vec{l}\times\vec{B}$$

$d\vec{l}$ 的方向与 I 的方向相同

对于一段载流导线：$\vec{F}=\int_0^l Id\vec{l}\times\vec{B}$

安培力是洛仑兹力的宏观表现

例1. 在均匀磁场 $\vec{B}$ 中有一弯曲导线ab，通有I电流，求其所受磁场力。



解：$\vec{F}=\int_a^b Id\vec{l}\times\vec{B}=I\left(\int_a^b d\vec{l}\right)\times\vec{B}$

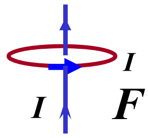
$=I\vec{L}_{ab}\times\vec{B}$ **在均匀磁场中成立。**

若L与B均在屏幕内，则 $F=IL_{ab}B\sin\theta$

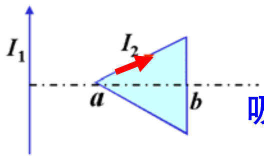
方向垂直板面向外

在均匀磁场中，载流导线受到的磁力只与连接两端点的矢量相关，与导线的具体形状无关。**闭合回路**受到的磁力为零。

例2. 求下列电流之间的相互作用力方向。 $\boxed{d\vec{F}=Id\vec{l}\times\vec{B}}$

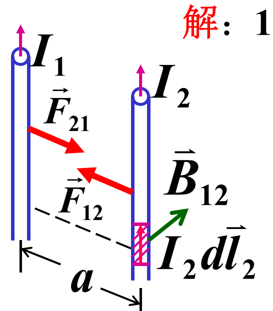


$F=0$



吸引力

例3. 求两平行无限长直导线通有相同电流的相互作用力。



$I_1 // I_2$为吸引力

$I_1\uparrow\downarrow I_2$为排斥力

解：1）求F_{12} $\quad \vec{F}_{12}=\int I_2 d\vec{l}_2\times\vec{B}_{12}$

I_2dl_2处的磁场为：$B_{12}=\dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$

$$\therefore F_{12}=\int I_2\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}dl_2=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}l_2$$

2）单位长度的受力：$f_{12}=\dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$

3）若令$I_1=I_2=I$

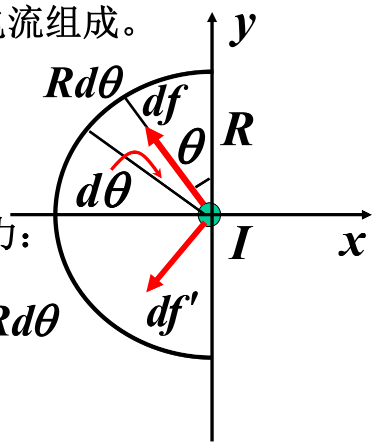
$$f_{12}=f_{21}=\frac{\mu_0}{2\pi a}I^2 \qquad I=\sqrt{\frac{2\pi af}{\mu_0}}$$

当$a=1m$, $f=\dfrac{\mu_0}{2\pi}(N/m)=2\times10^{-7}$（$N/m$）时，**$I$=1安培**

电流强度单位的定义

例4. 求载有电流 I 的长直导线和载有同方向电流 I 的半圆柱面之间单位长度的磁场力（电流垂直向上）。

解：载流圆柱面可看成无数长直电流组成。



宽 $Rd\theta$ 的圆弧对应的电流：

$$dI = \frac{I}{\pi R} R d\theta$$

两长直电流之间单位长度的磁场力：

$$df = \frac{\mu_0}{2\pi R} I \cdot dI = \frac{\mu_0}{2\pi R} I \cdot \frac{I}{\pi R} R d\theta$$

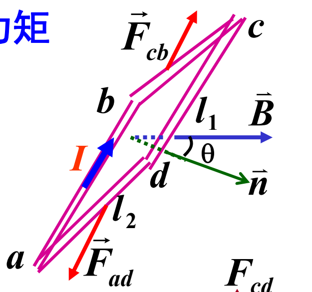
y方向力平衡，只有x方向力：

$$f_x = \int df \sin\theta = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 R} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = \frac{\mu_0 I^2}{\pi^2 R}$$

二. 载流线圈在磁场中所受的力和力矩

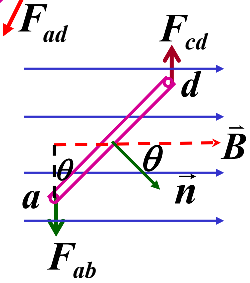
1）在均匀磁场中的平面线圈

a、矩形线圈：



$$F_{ab} = \int_a^b Idl \cdot B = IBl_1 \quad \text{向下}$$

$$F_{cd} = \int_c^d Idl \cdot B = IBl_1 \quad \text{向上}$$



$$F_{ad} = \int_d^a Idl \cdot B\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = IBl_2\cos\theta$$

$$F_{bc} = \int_b^c Idl \cdot B\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = IBl_2\cos\theta$$

线圈受力矩： $\boxed{\text{合力为零}}$

$$M = F_{ab}\frac{l_2}{2}\sin\theta + F_{cd}\frac{l_2}{2}\sin\theta = IBl_1l_2\sin\theta = IBS\sin\theta$$

定义**磁偶极矩**：$\vec{P}_m = IS\vec{n} = I\vec{S}$

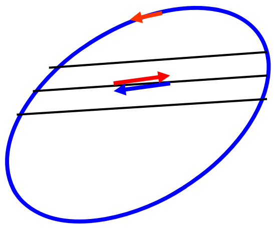
电偶极子：$\vec{M} = \vec{P}_e \times \vec{E}$

n与I的方向成右手关系

$$\vec{M} = P_m B\sin\theta = \vec{P}_m \times \vec{B}$$

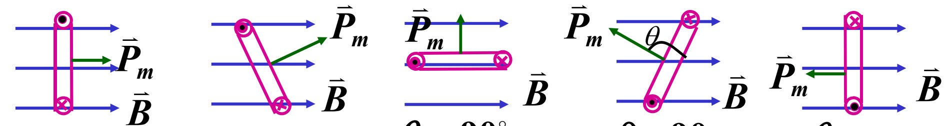
b、任意形状的平面线圈

设想把线圈分割成无限小窄条，每一窄条为一个小线圈。



$$\vec{M}=\int d\vec{M}=\int IdS\vec{n}\times\vec{B}=I\left(\int dS\right)\vec{n}\times\vec{B}$$
$$=IS\vec{n}\times\vec{B}=\vec{P}_m\times\vec{B}$$

2）平面线圈在磁场中的几种情况



$\theta=0, M=0$	$\theta<90^\circ$	$\theta=90^\circ$	$\theta>90^\circ$	$\theta=\pi$
稳定平衡	$M\neq0$	$M=M_{\max}$	$M\neq0$	$M=0$
				非稳定平衡

磁力矩总是使磁偶极子转向磁场方向，电偶极子在电场中受到的力矩使其转向电场方向。

电偶极子：

磁偶极子在磁场中的磁能：$W_m=-\vec{P}_m\cdot\vec{B}$　　$W_e=-\vec{P}_e\cdot\vec{E}$

§7-7 磁介质的磁效应

有、无磁介质的通电螺线管内磁感应强度分别为：B，B_0

定义相对磁导率：$\mu_r=\dfrac{B}{B_o}$　　总磁场：$\vec{B}=\vec{B}_o+\vec{B}'$

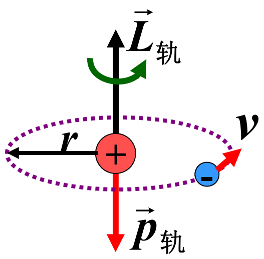
磁介质的分类：

$\mu_r>1\rightarrow$顺磁质　**如：氧、铝、钨、铂、铬等。**

$\mu_r<1\rightarrow$抗磁质　**如：水、铜、银、金、铋等。**

$\mu_r>>1\rightarrow$铁磁质　**如：铁、钴、镍等**

一. 分子磁矩



实物的基本组成单元：分子、原子、电子

电子绕核运动→电流环→**轨道磁矩** $\vec{p}_{轨}$

电子自旋运动→**自旋磁矩** $\vec{p}_{自}$

分子的固有磁矩：$\vec{p}_{分子}=\sum\vec{p}_{轨}+\sum\vec{p}_{自}$

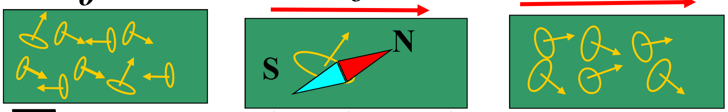
两种运动磁效应的总和 $\overset{\text{等效}}{=}$ 分子圆电流

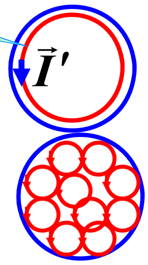
二. 介质磁化的微观解释

磁化面电流

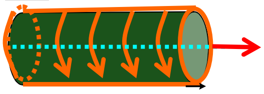
1) 顺磁性 $\vec{p}_{分子} \neq 0$

$\vec{B}_o = 0$ $\quad \vec{B}_o \quad \vec{B}_o$





$\sum \vec{p}_{分子} = 0$ $\quad \vec{M} = \vec{P}_{分子} \times \vec{B}_o$（力矩）



$\vec{B}' /\!/ \vec{B}_o$ $\quad B_0$↑强，分子磁矩排列越整齐，磁化面电流越大

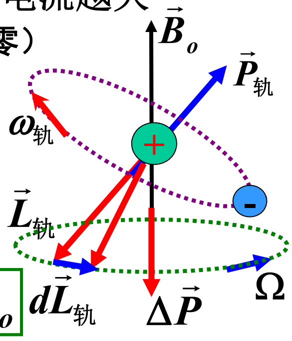
2) 抗磁性 $\vec{p}_{分子} = 0$（分子固有磁矩为零）

单个电子轨道磁矩受到外磁场磁力矩作用，将绕外磁场进动，从而形成附加磁矩。电子附加磁矩的方向总是与外磁场方向相反。

抗磁效应在顺磁介质中同样存在，但分子固有磁矩远大于附加磁矩，抗磁效应在顺磁介质中可以忽略。

$$\vec{M} = \vec{P}_{轨} \times \vec{B}_o = \frac{d\vec{L}_{轨}}{dt}$$

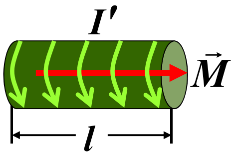
$\boxed{\vec{B}' \uparrow\downarrow \vec{B}_o}$



§7-8 磁化强度与磁化规律

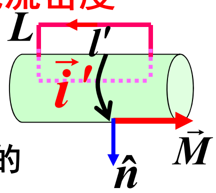
一. 磁化强度矢量

定义：$\vec{M} = \dfrac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V}$



$$|\vec{M}| = \frac{|\sum \vec{p}_m|}{\Delta V} = \frac{I'S}{l \cdot S} = \frac{I'}{l} = i' \rightarrow \text{磁化面电流密度}$$

可以证明，一般的：$\vec{i}' = \vec{M} \times \hat{n}$



磁化强度的环流：

$$\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = M \cdot l' = i' \cdot l' = \sum I' \quad \text{环路包围的磁化电流}$$

二. 有介质时的高斯定理和安培环路定理

1. 有介质时的高斯定理

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' \qquad \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

2. 有介质时的安培环路定理

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \underbrace{\sum I}_{传导电流} + \mu_o \underbrace{\sum I'}_{束缚电流}$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_o \sum I + \mu_o \sum I'$$

$$\oint \vec{M}\cdot d\vec{l} = \sum I'$$

$$\oint \frac{\vec{B}}{\mu_0}\cdot d\vec{l} = \sum I + \oint \vec{M}\cdot d\vec{l}$$

$$\oint \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right)\cdot d\vec{l} = \sum I$$

定义磁场强度：

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M}$$

有磁介质时的安培环路定理：

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I$$ （环路包围的传导电流）

沿任一闭合路径磁场强度的环流等于该闭合路径所包围的自由电流的代数和。

SI制中磁场强度H 的单位：安培/米 (A/m)

由传导电流确定 ⟶ 磁场强度 H

3. $\vec{B}$、$\vec{M}$、$\vec{H}$ 三矢量 之间的关系

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M} \qquad \vec{B} = \mu_o(\vec{H} + \vec{M})$$

实验指出，各向同性的线性磁介质：
（即顺磁和抗磁介质）

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

χ_m :介质磁化率(磁化系数)

$$\vec{B} = \mu_o(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_o(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_o\mu_r\vec{H}$$

相对磁导率：$\mu_r = 1 + \chi_m$

介质磁导率：$\mu = \mu_o\mu_r$

$$\therefore \vec{B} = \mu\vec{H}$$

χ_m 与 μ_r 均为纯数，描述磁介质特性的物理量。

$\chi_m > 0 \quad \mu_r > 1$ ⟶ 顺磁介质

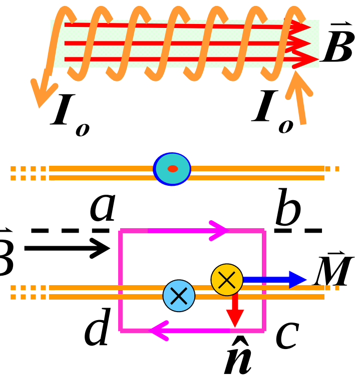
$\chi_m < 0 \quad \mu_r < 1$ ⟶ 抗磁介质

$\chi_m = 0 \quad \mu_r = 1$ ⟶ 真空

超导体：

$\chi_m = -1 \quad \mu_r = 0$

例题1. 长直螺线管内充满均匀磁介质(μ_r)，设励磁电流 I_0，单位长度上的匝数为n。求管内的磁感应强度和磁介质表面的面束缚电流密度。



解：$\because \oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I$

$\therefore ab\cdot H = n\cdot ab\cdot I_o$

则：$H = nI_o \qquad B = \mu_o\mu_r H = \mu n I_o$

$\because \vec{M} = \chi_m \vec{H}$

$\therefore M = \chi_m H = (\mu_r - 1)nI_o$

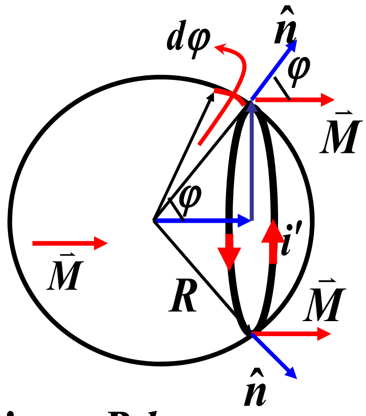
$\because \vec{i}' = \vec{M}\times\hat{n}$

$\therefore i' = (\mu_r - 1)nI_o$

顺磁质 $\mu_r > 1$　$i' \parallel I_o$

抗磁质 $\mu_r < 1$，$i' \uparrow\downarrow I_o$

例题2. 一半径为R的介质球被均匀磁化，磁化强度$\vec{M}$水平向右，求介质球面上的磁化面电流密度和全部磁化电流产生的磁矩。



解：磁化面电流密度：

$$|\vec{i}'| = |\vec{M}\times\hat{n}| = M\sin\varphi$$

从右向左看，磁化面电流形成的电流环呈逆时针方向。

宽度 $Rd\varphi$ 的环对应的磁化电流：

$$dI' = M\sin\varphi\cdot Rd\varphi$$

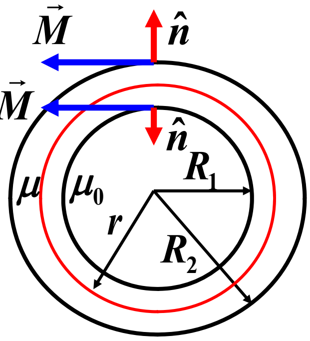
相应的磁矩：

$$dp_m = SdI' = \pi R^2\sin^2\varphi\cdot M\sin\varphi\cdot Rd\varphi$$

磁化电流形成的总磁矩：

$$p_m = \int dp_m = \pi R^3 M\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\cdot d\varphi = \frac{4}{3}\pi R^3 M$$

例3. 半径为R_1的无限长圆柱形导体（导体$\mu\approx\mu_0$）中通有均匀电流 I (电流垂直向外)，外面包一层相对磁导率为 μ_r 的圆筒形顺磁介质，其外半径为R_2。求（1）磁场强度和磁感应强度；（2）介质内外表面的磁化电流密度。



解:（1）作圆形安培环路:

$r > R_1$： $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = 2\pi r\cdot H = I$ $\quad \therefore H = \dfrac{I}{2\pi r}$

$r < R_1$： $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = 2\pi r\cdot H = \dfrac{I}{\pi R_1^2}\pi r^2$

$\therefore H = \dfrac{I}{2\pi R_1^2}r$ $\quad \because B = \mu_0\mu_r H$

$r < R_1$： $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2}r$

$r > R_2$： $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$R_2 > r > R_1$： $B = \dfrac{\mu_0\mu_r I}{2\pi r}$

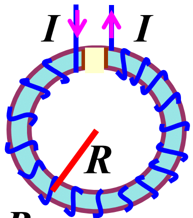
（2）介质外表面磁化电流向下；内表面电流向上。 $\vec{i}' = \vec{M}\times\hat{n}$

$i' = M = (\mu_r - 1)H = \dfrac{(\mu_r - 1)I}{2\pi r}$

（$r = R_1$：内表面；$r = R_2$：外表面）

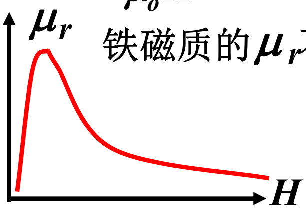
§7-9 铁磁质的磁效应

一. 磁化曲线

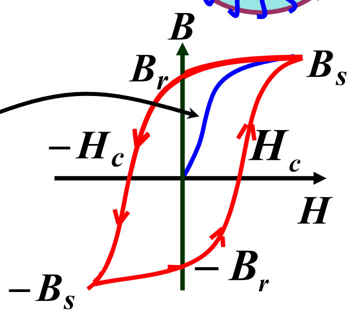


励磁电流为I $\quad H = \dfrac{NI}{2\pi R}$ $\quad$ 实验测量B。

由 $\mu_r = \dfrac{B}{\mu_o H}$ 得出 $\mu_r \sim H$曲线:



铁磁质的μ_r不是常数



1. 磁滞回线——不可逆过程

B的变化落后于H — 磁滞效应

饱和磁感应强度B_S

剩磁B_r $\quad$ 矫顽力H_c

2. 在交变电流的励磁下反复磁化使其温度升高—磁滞损耗。

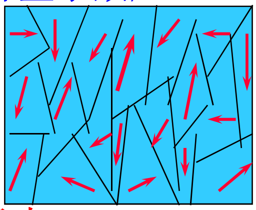
磁滞损耗与磁滞回线所包围的面积成正比。

二. 铁磁质磁化的机制

铁磁性主要来源于电子的自旋磁矩。

电子自旋平行排列时能量较低，这是一种量子效应。

磁畴：自发的磁化区域（自旋完全平行）

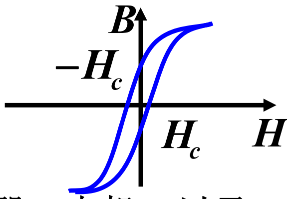


1. 铁磁质 μ_r非常大
2. 磁滞 现象是由于材料有杂质和内应力等的作用
3. 温度升高，铁磁质变成了顺磁质。居里点 ***Tc* (*Curie Point*)**。如：铁为 **1040*K***，钴为 **1390*K***，镍为 **630*K***

三. 铁磁质的分类

1）软磁材料：如纯铁，硅钢等。

μ_r大，饱和磁感应强度大，矫顽力(***Hc***)小，磁滞回线的面积窄而长，损耗小。

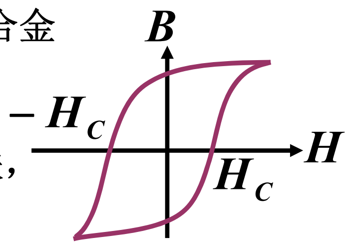


易磁化、易退磁。适用于变压器、继电器、电机、以及各种高频电磁元件的磁芯、磁棒。

2）硬磁材料：钨钢，碳钢，铝镍钴合金

矫顽力(***Hc***)大，剩磁B_r大磁滞回线的面积大，损耗大。

适用于做永磁铁。耳机中的永久磁铁，永磁扬声器。

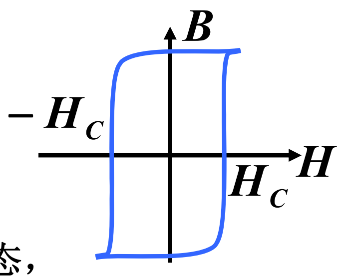


3）矩磁材料

锰镁铁氧体，锂锰铁氧体

$B_r=B_S$，H_c不大，磁滞回线是矩形。

用于记忆元件，



当+脉冲产生$H>H_C$，使磁芯呈+B态，

当–脉冲产生$H<-H_C$ 使磁芯呈– B态，

可做为二进制的两个态。