第4章 流体运动简介

流体：液体和气体

流体特征：（1）流动性（流体各部分之间可以发生相对运动）；（2）没有固定的形状。

流体力学是研究流体的宏观运动规律的学科

§4-1 理想流体的运动

一、理想流体的稳定流动

1. 理想流体

实际流体的特性:(1) 黏性，(2) 可压缩性。

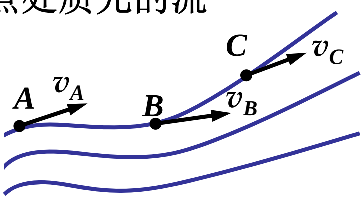
理想流体：绝对不可压缩的、完全没有黏性(或内摩擦力)的流体。

2. 稳定流动

(1)流速场：速度矢量 $\vec{v}(x, y, z, t)$ 构成流速场.

(2)稳定流动：空间任一点的流速的大小和方向不随时间而改变.

(3) 流线：某时刻位于曲线上各点处质元的流速方向沿曲线的切线方向.

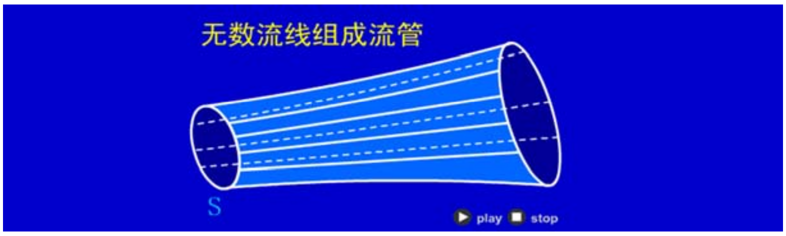


a. 任意两条流线互不相交;

b. 稳定流动时，流线的分布不随时间改变;

c. 流线与轨迹相同.

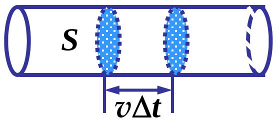
(4) 流管:在流体内任取一条微小的封闭曲线，通过该封闭曲线上各点的流线所围成的细管。



a. 流管的形状在稳定流动时保持不变;

b. 稳定流动时,流管内外的流体彼此互不交换.

二、连续性方程

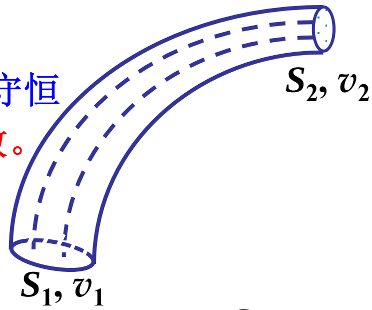


1. 体积流量: $Q=\dfrac{\Delta V}{\Delta t}=\dfrac{Sv\Delta t}{\Delta t}=Sv$

   单位: m^3/s

2. 连续性方程: $S_1v_1\Delta t=S_2v_2\Delta t$

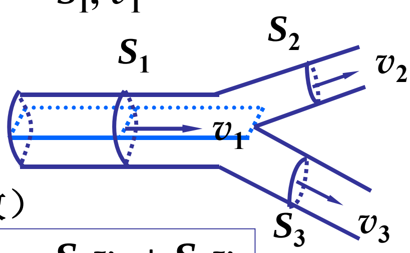
   $S_1v_1=S_2v_2$ 或 $Sv=$ 常数　体积流量守恒



横截面积与平均流速的乘积为常数。

适用条件: 不可压缩的流体作稳定流动.

S	v	说明
大	小	流线稀
小	大	流线密



3. 质量流量守恒: $\rho S_1v_1=\rho S_2v_2$

   （不可压缩流体，密度为常数）

4. 分支流管的连续性方程 $\boxed{S_1v_1=S_2v_2+S_3v_3}$

三、 伯努利方程及其应用

利用力学中的功能原理推导理想流体作稳定流动时的动力学方程。推导依据: 连续性方程和功能原理。

(1)推导:（$\Delta t\to 0$）

① aa' 处的截面积近似相等(S_1)

② bb' 处的截面积近似相等(S_2)

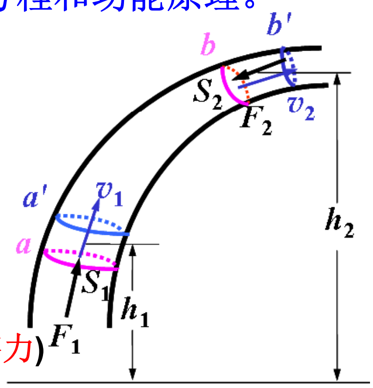
③ aa'体积内的v_1、p_1不变, 高度h_1

④ bb'体积内的v_2、p_2不变, 高度h_2

⑤ aa'，bb'体积相等$\Delta V_1=\Delta V_2=\Delta V$,
质量均为Δm（流体不可压缩）

⑥ 流管周围的流体对ab不做功(无内摩擦力)

⑦ 只有推力F_1和阻力F_2对流体柱做功。



外力的功: $A=F_1v_1\Delta t-F_2v_2\Delta t=p_1S_1v_1\Delta t-p_2S_2v_2\Delta t$
$=(p_1-p_2)\Delta V$

机械能增量: $\Delta E=\dfrac{1}{2}\Delta m v_2^2-\dfrac{1}{2}\Delta m v_1^2+\Delta mgh_2-\Delta mgh_1$

功能原理：$A = \Delta E$

$$p_1\Delta V + \Delta mgh_1 + \frac{1}{2}\Delta mv_1^2 = p_2\Delta V + \Delta mgh_2 + \frac{1}{2}\Delta mv_2^2$$

$$p_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$\boxed{\underbrace{p + \rho gh}_{\text{静压强}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2}_{\text{动压强}} = C}$$

伯努利方程：理想流体作稳定流动时，同一流管的不同截面积处的压强、流体单位体积的势能与单位体积的动能之和相等.

适用条件： ① 理想流体做稳定流动; ② 同一流管的不同截面积处或同一流线的不同点;

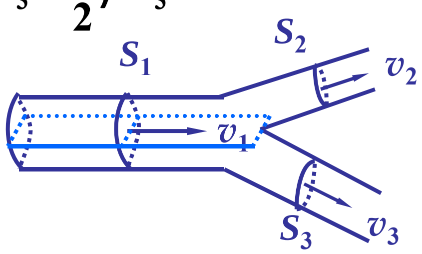
（截面积趋于零的流管）

(2) 分支管道的伯努利方程:

$$p_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$p_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_3 + \rho gh_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2$$

(3) 特殊情况下方程的简化:



① 不均匀水平管, $h_1=h_2=h$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

② 均匀管，$S_1=S_2$, $v_1= v_2= v$

竖直: $p_1 + \rho gh_1 = p_2 + \rho gh_2$

水平: p, h, v均为常量

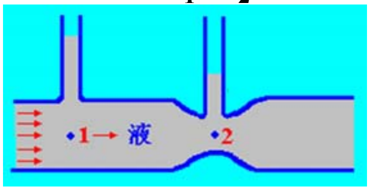
③ 若某处与大气相通, 则该处的压强为大气压 p_0

(4) 伯努利方程的应用

$$p_1+\rho gh_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\rho gh_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2$$

1. 空吸作用

水平管: $h_1=h_2=h$

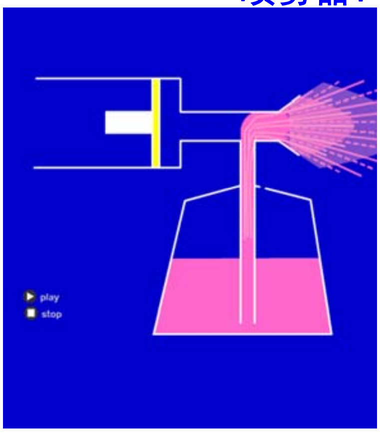


$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$S_1v_1=S_2v_2$$

$S_2<S_1 \longrightarrow v_2>v_1 \longrightarrow p_2<p_1$

喷雾器:



2. 小孔流速

一个很大的开口容器, 器壁上有一小孔。

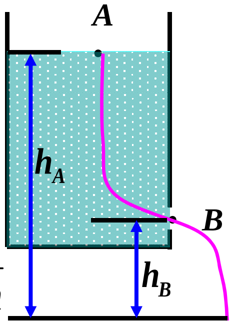
$\because S_A>>S_B \quad \therefore v_A\approx 0$

$p_A=p_B=p_0$

$$\rho gh_A=\frac{1}{2}\rho v_B{}^2+\rho gh_B$$

$$\rho g(h_A-h_B)=\frac{1}{2}\rho v_B{}^2$$

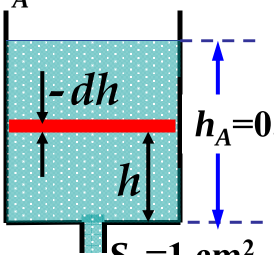
$$v_B=\sqrt{2g(h_A-h_B)}=\sqrt{2gh}$$



例1. 一圆形开口容器, 高0.7 m, 截面积$6\times10^{-2}m^2$. 贮满清水, 若容器底有一小孔$1cm^2$, 问该容器中水流完需要多少时间?

解: 随着水的流出, 水位不断下降, 流速逐渐减小, 根据小孔流速规律知在任意水位 h 处水的流速为:

$$v_B\approx\sqrt{2gh}$$



该处厚度为$-dh$ 的薄层从小孔流出时间为:

$$dt=\frac{-S_A dh}{S_B v_B}=\frac{-S_A dh}{S_B\sqrt{2gh}}$$

整个水箱的水流尽所需时间为:

$$t=\int_{h_A}^{0}\frac{-S_A dh}{S_B\sqrt{2gh}}=\int_{0.7}^{0}\frac{-6\times10^{-2}dh}{10^{-4}\times\sqrt{2\times9.8\times h}}=-\frac{6\times10^{2}}{\sqrt{19.6}}\times2\sqrt{h}\Big|_{0.7}^{0}=227(s)$$

3. 流速计(皮托管)

$$\boxed{p_1+\rho g h_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\rho g h_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2}$$

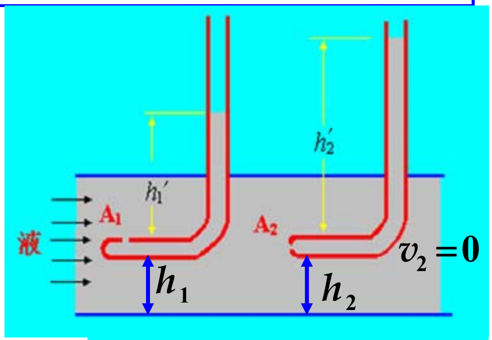
(1)测量液体

$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2$$

$$p_2-p_1=\frac{\rho g\cdot h_2'\Delta S}{\Delta S}-\frac{\rho g\cdot h_1'\Delta S}{\Delta S}$$

$$=\rho g(h_2'-h_1')$$

$$\therefore v_1=\sqrt{\frac{2(p_2-p_1)}{\rho}}=\sqrt{2g(h_2'-h_1')}$$

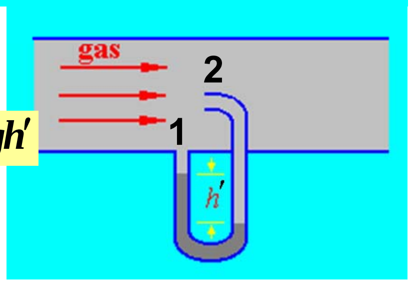


(2)测量气体

ρ' 为液体的密度；ρ 为气体的密度

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2-p_1=\Delta p \qquad \Delta p=\rho' g h'-\rho g h'$$

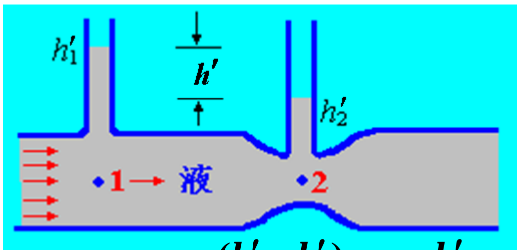
$$v_1=\sqrt{\frac{2(\rho'-\rho)gh'}{\rho}}\approx\sqrt{\frac{2\rho' gh'}{\rho}}$$



4. 流量计(汾丘里流量计)

(1) 测量液体流量

$$\begin{cases} p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2 \\ S_1 v_1=S_2 v_2 \end{cases}$$



$$p_1-p_2=\rho g(h_1'-h_2')=\rho g h'$$

联立解出：

$$v_1=S_2\sqrt{\frac{2(p_1-p_2)}{\rho(S_1^2-S_2^2)}}=S_2\sqrt{\frac{2gh'}{S_1^2-S_2^2}}$$

流量：

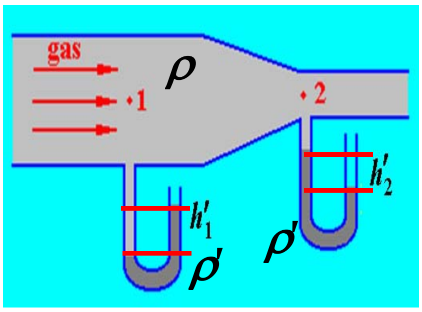
$$Q=S_1 v_1=S_1 S_2\sqrt{\frac{2gh'}{S_1^2-S_2^2}}$$

(2) 测量气体流量

同样：$v_1=S_2\sqrt{\dfrac{2(p_1-p_2)}{\rho(S_1^2-S_2^2)}}$

$$p_1-p_2=\rho' g(h_1'+h_2')$$

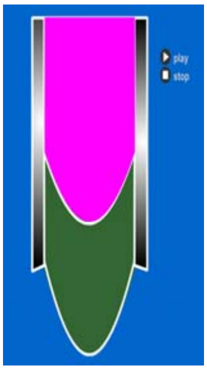
$$Q=S_1 v_1=S_1 S_2\sqrt{\frac{2\rho' g(h_1'+h_2')}{\rho(S_1^2-S_2^2)}}$$

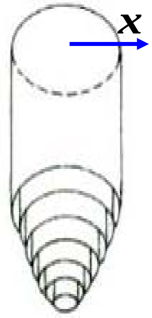


§4-2 黏性流体的运动

一、牛顿黏滞定律

1. 实验：甘油在竖直圆管中的分层流动(存在黏滞阻力或内摩擦力)





层流

2. 速度梯度

$\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$　单位：s^{-1}

3. 牛顿黏滞定律 $F=\eta\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}S$

黏性力F与分布面积S成正比

(1) η称为黏度系数；(2) η与流体种类有关。

(3) η与温度有关 $\begin{cases}\text{液体: } T\uparrow, \eta\downarrow \\ \text{气体: } T\uparrow, \eta\uparrow\end{cases}$

二、层流、湍流、雷诺数

1. 层流：黏性流体的分层流动, 在流管中各流体层之间只做相对滑动而不混合.
相邻层间存在黏性阻力.

2. 湍流：随着速度的增加, 流体可能向各个方向流动, 各流体层相互混合, 而且可能出现旋涡.

3. 雷诺数　$\mathrm{Re}=\dfrac{\rho v d}{\eta}$　流速v, 圆管的直径d, 流体的密度ρ, 黏度系数η

(1) $Re<2000$, 层流；(2) $Re>3000$, 湍流；

(3) $2000<Re<3000$, 过渡流.

例2. 已知在0 °C时水的黏滞系数$\eta=1.8\times10^{-3}$ Pa·s，若保证水在直径 $d=2.0\times10^{-2}$ m 的圆管中作稳定的层流，要求水流速度不超过多少？

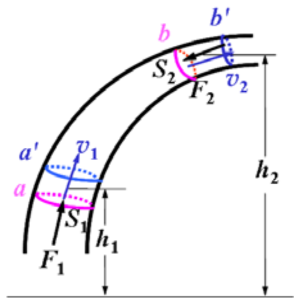
解：保证水在圆管中作稳定的层流，雷诺数Re应小于2000，即：$Re=\dfrac{\rho v d}{\eta}<2000$

$$v<2000\times\frac{\eta}{\rho d}=2000\times\frac{1.8\times10^{-3}}{1000\times2.0\times10^{-2}}\,\mathrm{m/s}=0.18\,\mathrm{m/s}$$

通常水在管道中的流速约为每秒几米，可见水在管道中的流动一般都是湍流。

三、黏性流体的运动规律

1. 黏性流体的伯努利方程



理想流体：

$$p_1+\rho gh_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\rho gh_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2$$

黏性流体：

$$p_1+\rho gh_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\rho gh_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+w$$

w: 单位体积不可压缩的黏性流体由ab到 $a'b'$ 过程中，层与层之间的内摩擦力所消耗的能量。

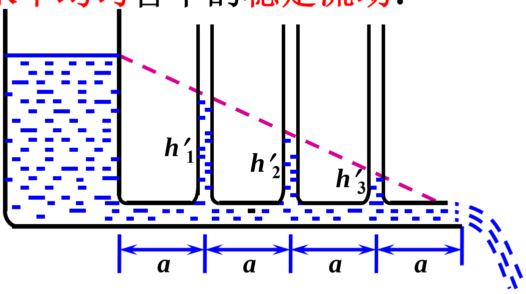
不可压缩的黏性流体在水平均匀管中的稳定流动：

$h_1=h_2=h,\quad v_1=v_2$

$\Rightarrow p_1-p_2=w$

沿着流体流动方向，其压强的降落与各支管到容器的距离成正比。

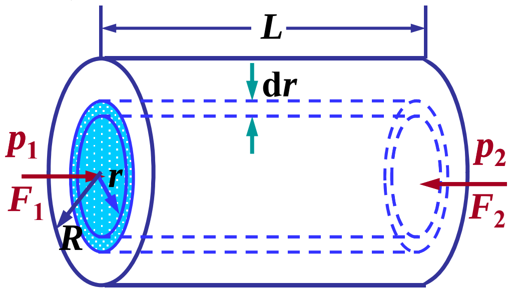
远离水塔的住家水压低。



2. 泊肃叶定律

不可压缩的黏性流体在水平圆管中做稳定层流，实验证明，流量与压强梯度成正比，与管半径四次方成正比。维德曼理论推导出比例系数。

$$Q=\frac{\pi}{8\eta}\cdot R^4\frac{(p_1-p_2)}{L}$$



推导：稳定流动，力平衡：

$$(p_1-p_2)\pi r^2=-\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}2\pi rL$$

$$-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}=\frac{(p_1-p_2)r}{2\eta L}$$

$$-\int_v^0\mathrm{d}v=\frac{p_1-p_2}{2\eta L}\int_r^R r\mathrm{d}r$$

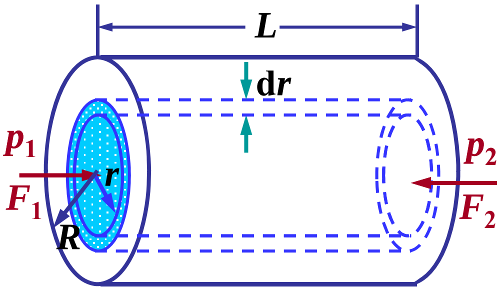
$$\boxed{\Rightarrow v=\frac{p_1-p_2}{4\eta L}(R^2-r^2)}$$

最大流速：$v_{\max}=\dfrac{(p_1-p_2)R^2}{4\eta L}$

通过流层(圆筒)的流量：

$$dQ = vdS$$

$$= \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta L}(R^2 - r^2)2\pi r dr$$



整个管中的流量：

$$Q = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2\eta L}\int_0^R (R^2 - r^2)\ r dr$$

$$= \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8\eta L}$$

平均流速： $\bar{v} = \frac{Q}{S} = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{\pi R^2 \times 8\eta L} = \frac{(p_1 - p_2)R^2}{8\eta L}$

$$\boxed{\bar{v} = \frac{1}{2} v_{\max}}$$

流阻： $Q = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8\eta L} = \frac{p_1 - p_2}{R_f} \Rightarrow R_f = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$

R_f： 流阻

流阻的串、并联（与电路情况相同）：

串联: $R_{f串} = R_{f1} + R_{f2} + \cdots$

并联: $\frac{1}{R_{f并}} = \frac{1}{R_{f1}} + \frac{1}{R_{f2}} + \cdots$

3. 斯托克司定律

(1) 固体在黏性流体中运动受到的黏性阻力,实验表明:

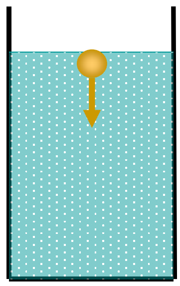
① v较小, $f \propto l$ (固体线度)、v、 η；

② 比例系数与固体的形状有关；

③ 对于球体所受阻力: $f = 6\pi\eta r v$

(2) 小球在黏性流体中的运动:

开始加速下降，当重力、浮力、黏性阻力三力平衡时，则匀速运动。



(3) 收尾速度（沉降速度）：

$$\frac{4\pi r^3}{3}\rho g = \frac{4\pi r^3}{3}\rho' g + 6\pi\eta r v_T$$

重力　　浮力　　黏性阻力

$$v_T = \frac{2gr^2(\rho-\rho')}{9\eta}$$

(4) 应用:

① 沉降法测量流体的黏度：$\eta = 2gr^2(\rho-\rho')/9v_T$

② 测量小球的半径（密立根油滴实验）；

③ 离心机的原理（加速沉降）；

④ 制造混悬液类的药物时，可以增加悬浮介质的黏度、密度和减小药物颗粒的半径来提高药液的稳定性.