概率论与数理统计

讲师：付建勋

邮箱：jianxunf@hust.edu.cn

办公室：东校区恩明楼数学中心808

群名称：22年春概率统计
群　号：1032060284

概率论与数理统计

华中科技大学 概率统计系

概率论

总体 $\rightleftarrows$ 样本

数理统计

1.1

随机事件与样本空间

随机试验

必然现象

（1）早晨，太阳从东方升起;

（2）在标准大气压下，水加热到100 ℃沸腾;

（3）三角形两边和大于第三边.

随机现象

（1）抛一枚硬币，正面朝上;

（2）买一张彩票，能中头奖;

（3）一次射击，能命中10环.

必然现象↔随机现象

观测，成本

随机试验

如生男生女 → 抛硬币

随机试验 产生随机现象的过程，通常用E来表示. 具有3个特点：

(1) 试验在相同的条件下可以重复；

(2) 每次试验之前不能确定此次试验的结果；

(3) 试验之前可知试验的一切可能结果.

比如： 考察掷骰子出现的点数；

观察某时段内经过某十字路口的汽车数目.

随机事件

随机事件 随机试验的每一个可能的结果称为一个随机事件，简称事件. 一般用 A, B, C表示.

例 观察某时段内经过某十字路口的汽车数目, 以下均为事件

$\{0\}, \{1\}, \{2\}, \ldots;$ 基本事件

{数目大于10},{数目不超过112},{数目在73至89之间},….; 复合事件

注意到，随机事件可以包含一个结果，也可以包含多个结果.

样本空间

样本空间 随机试验产生的所有可能结果的集合，称为样本空间，记为Ω.

Ω中的元素称为样本点，记为ω.

随机事件⇔样本空间的子集.

a. 基本事件⇔ 由一个样本点组成的子集， $\{0\}, \{1\}, \{2\},\ldots;$

b. 复合事件⇔ 由多于一个样本点组成的子集，

{数目大于10},{数目不超过112},{数目在73至89之间},….;

由所有样本点组成的子集Ω；

不含样本点的子集$\emptyset$.

样本空间

~~E1~~： 掷一只骰子 Ω={1，2，3，4，5，6}，

A={1，3，5} ~ 出现奇数点， B={5,6} ~ 点数超过4;

E2： 抛两枚硬币 Ω={正正，正反，反正，反反}，

A={正反，反正} ~ 恰出现一个正面， $\emptyset$ ~ 出现三个正面;

~~E3~~： 机器无故障运行的时间 Ω=$\{t: t \geq 0\}$，

A=$\{t: t \geq 500\}$ ~ 合格品， B=$\{t: t \leq 50\}$ ~ 废品.

样本空间

称“事件A发生”：一次试验后结果在A中.

抛一枚硬币 Ω={正面，反面}, 记 A={正面}；B={反面}.

若正面出现了，则事件A 和Ω都发生了，B和∅都没有发生.

Ω是必然发生的事件，称为必然事件;

∅是不可能发生的事件，称为不可能事件.

1.2

事件的关系与运算

事件的关系

随机事件⇔样本空间的子集.

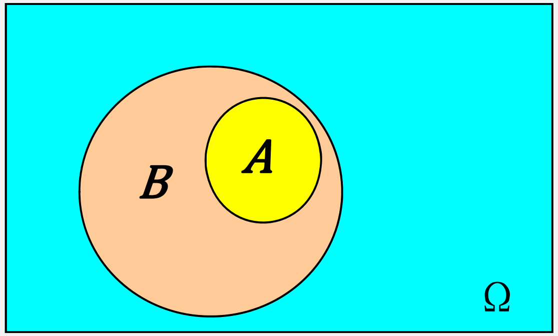
因此，直接用集合的运算与关系得到事件的运算和关系.

回顾：称“事件A发生”：一次试验后结果在A中.

关键：用事件是否发生来理解这些关系和运算.

事件的关系

1. **包含** A发生则B必然发生，记为：$A \subset B$.

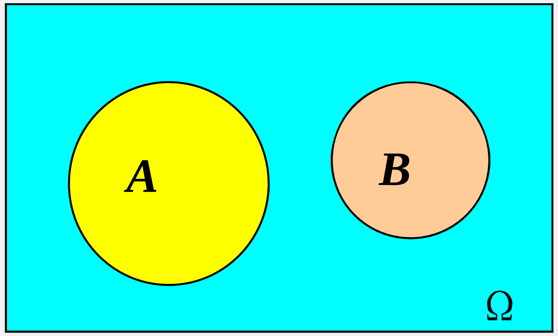


比如掷骰子试验中，$A = \{1\}$， $B = \{1, 3, 5\}$，则$A \subset B$.

2. **等价** $A \subset B$且$B \subset A$，记为$A = B$.

事件的关系

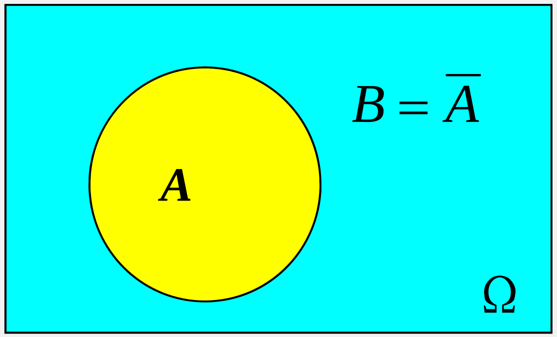
3. 互不相容（互斥） A与B不能同时发生，记为$A \cap B = \emptyset$.



比如掷骰子的试验中，$A = \{2\}$，$B = \{1，3，5\}$，则A与B互不相容.

事件的关系

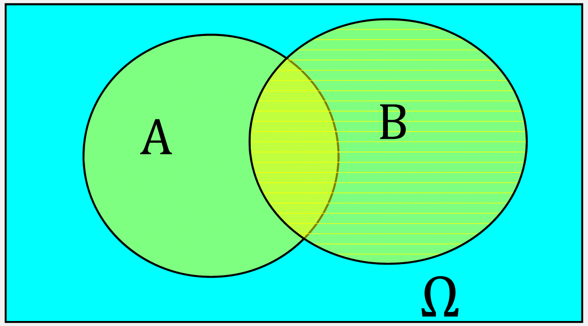
4. 互逆 A与B互不相容，且A与B必有一个发生， $A\cap B=\emptyset$且$A\cup B=\Omega$，记为$B=\overline{A}$或$A=\overline{B}$.



比如掷骰子的试验中，$A=\{2，4，6\}$，$B=\{1，3，5\}$，则A与B互逆.

事件的运算

1. **和（并）** $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$至少有一个发生，记为：$\boldsymbol{A \cup B}$.



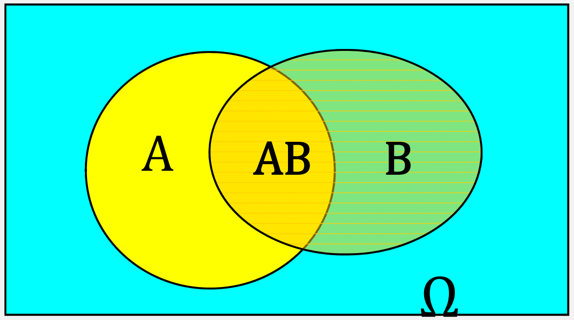
比如掷骰子的试验中，$\boldsymbol{A=\{5,6\}}$，$\boldsymbol{B=\{1,3,5\}}$，则$\boldsymbol{A\cup B=\{1,3,5,6\}}$.

$$\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} \sim \boldsymbol{A_1, A_2, \cdots, A_n}\text{中至少有一个发生.}$$

当$AB=\emptyset$时，记$A+B \coloneqq A\cup B$.

事件的运算

2. **积（交）** A与B同时发生，记为：$A\cap B$或AB.

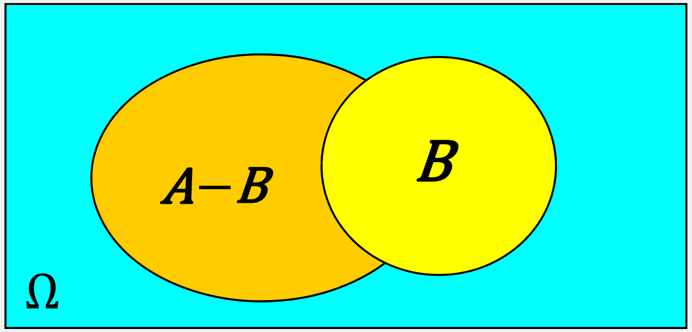


比如掷骰子的试验中，$A=\{3,4,5,6\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，则$AB=\{3,4\}$.

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$，$A_1,A_2,\cdots,A_n$同时发生.

事件的运算

3．**差** A发生但B不发生，记为$A-B=A\overline{B}.$



比如掷骰子的试验中，$A=\{3,4,5,6\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，则$A-B=\{5,6\}.$

运算法则

1．**交换律**：　$A \cup B = B \cup A$,　$A \cap B = B \cap A$;

2．**结合律**：　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,　$(AB)C = A(BC)$;

3．**分配律**：　$A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$,　$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$;

4．**对偶律**：　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,　$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(De Morgan)

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\ ,\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

用韦恩图来理解

事件的运算

例 设某人向一个目标射击三次，记A_i={第i次命中目标}，$i = 1,2,3$，

试用A_1, A_2, A_3及其运算式表示下面事件:

(1) 前两次至少命中一次; $B_1 = A_1 \cup A_2$;

(2) 只有第一次命中; $B_2 = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$;

(3) 只有第一次未命中; $B_3 = \bar{A}_1 A_2 A_3$;

(4) 第一次命中且后两次至少命中一次; $B_4 = A_1(A_2 \cup A_3)$;

(5) 至少命中两次; $B_5 = A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup A_3A_1$;对比结合律

(6) 至多命中一次.

$$B_6 = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2A_3 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$$
$$= \bar{A}_1\bar{A}_2 \cup \bar{A}_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_3\bar{A}_1 = \bar{B}_5.$$

思考：该随机试验中的样本空间是怎样的?

样本点，韦恩图

随机事件的等价表示

运算法则：书上例1.11+1.12

$A = AB + A\bar{B}$， 互斥

$A - B = \underset{\text{包含}}{A - AB} = \underset{\text{包含}}{A \cup B - B} = A\bar{B}$

1.3

古典概率

概率的频率刻画

频率概率

$$P(A) \approx \frac{n_A}{n}\ (\text{频率}),$$

其中n_A为n次重复试验中事件A出现的次数.

满足

非负性：$P(A) \geq 0$;

规范性：$P(\Omega) = 1$;

可加性：若A和B互不相容，则$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

古典概率模型

古典概型　具有下面两个性质的试验

1. 样本空间中的样本点总数是有限的；
2. 每个样本点的发生是等可能的.

加法原理（分类）
乘法原理（分步）

例如，武汉-上海-东京

古典概率

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{中的样本点数}}{\Omega\text{中的样本点数}}.$$

满足 非负性、规范性与可加性.

例 设有n个人，每个人都等可能地被分配到N个房间中的任一间去住$(n \le N)$，试求下列事件的概率.

（1）$A=$ {指定的n个房间各有一个人住}；

（2）$B=$ {恰好有n个房间，其中各住一个人}.

解 每个人都等可能地有N个房间可供选择，共有N^n种分配方法.

（1）指定n间房各有一个人住，其可能总数为$n!$，故

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

（2）先任意选取n个房间，有C_N^n种选法,再对选定的n间房按(1)进行讨论，从而有

$$P(B)=\frac{C_N^n n!}{N^n}.$$

解释：

$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!} \qquad C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

补充：简单的组合性质 $C_n^k = C_n^{n-k}$

补充：书上例1.15

补充：二项式定理 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \cdots + C_n^n a^n b^0.$

例 生日同一天问题.

设$n \le 365$，求$A = \{n$个人中至少有两人在同一天过生日$\}$的概率.

解 $P(A) = \frac{365^n - 365\times364\times\cdots\times(365-n+1)}{365^n} = 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n}.$

人数	10	20	30	40	50	55	90
P	0.12	0.41	0.71	0.89	0.97	0.99	1-3 × 10^{-95}

1.4 几何概率

几何概率模型

几何概型　具有下面两个性质的试验

1. 样本空间中的点可以用空间中的某个区域 Ω 来表示；
2. 每个样本点是“等可能”发生的.

几何概率

$$P(A)=\frac{A\text{的度量（长度、面积或体积）}}{\Omega\text{的度量（长度、面积或体积）}}.$$

满足 非负性、规范性与可加性.

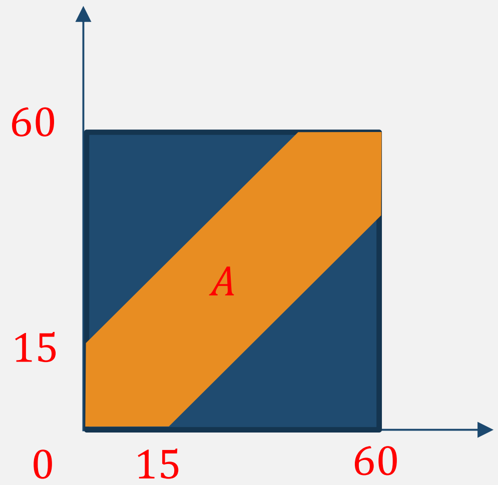
补充：书上例1.16

例 （会面问题）甲乙两个人约定在6时到7时之间在某处会面，并约定先到者只等候另一个人15分钟. 求两人能会面的概率.

解 以 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 分别表示甲乙两人到达约会地点的时间，则$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$的所有可能取值点落入正方形

$$\Omega = \{(x, y): 0 \le x \le 60, 0 \le y \le 60\},$$

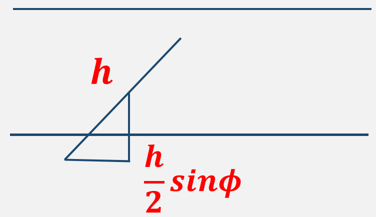
两人能够会面的事件$\mathrm{A} = \{(x, y): |\, x - y \,| \le 15\}$.



因此,

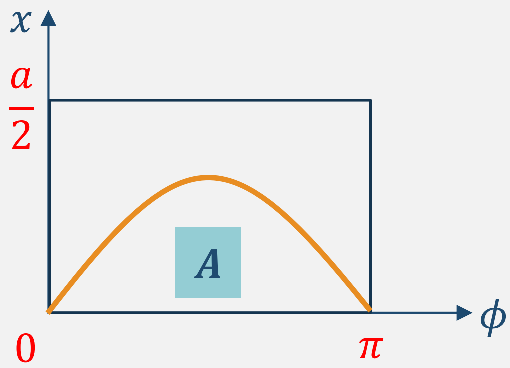
$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{60^2-45^2}{60^2}.$$

例 （Buffon投针问题）平面上画有等距离a的平行线，向平面**任意**投一枚长为h的针($h < a$)，试求针与平行线相交的概率.



解 若以x表示针的中点与最近一条平行线的距离，以ϕ表示针与线的夹角，则有

$$0 \le x \le \frac{a}{2}, \quad 0 \le \phi \le \pi.$$

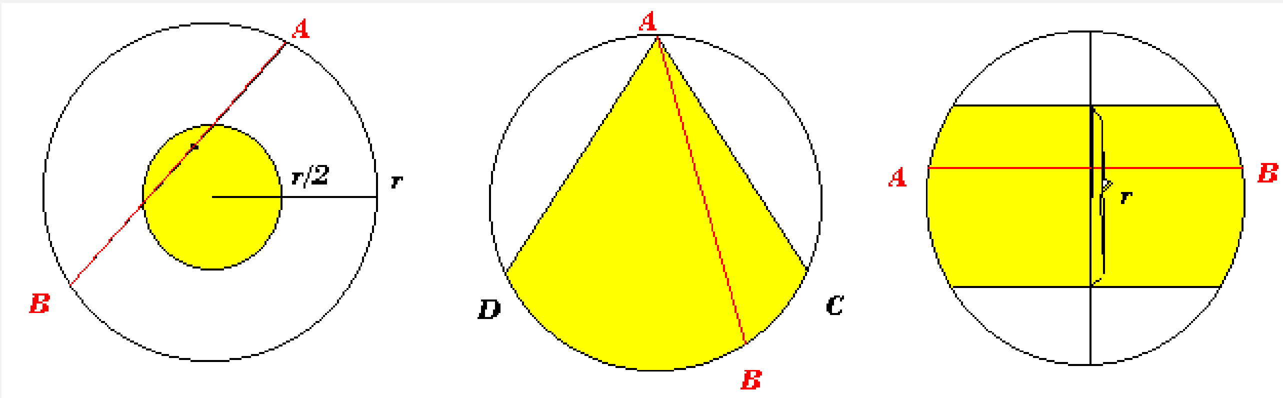


针与线相交的充要条件为： $0 \le x \le \frac{h}{2}sin\phi$. 故

$$P(A) = \frac{\int_0^{\pi} \frac{h}{2} sin\phi d\phi}{\pi a/2} = \frac{2h}{\pi a}.$$

蒙特卡罗随机模拟方法

例 （贝特朗奇论）在半径为r的圆内“**任意**”作弦，试求此弦长大于圆内接正三角形边长$\sqrt{3}r$的概率.



$P=\frac{\left(\frac{r}{2}\right)^2\pi}{r^2\pi}=\frac{1}{4}$，　　$P=\frac{1}{3}$，　　$P=\frac{r}{2r}=\frac{1}{2}$.

1.5

概率的定义及性质

概率的公理化定义

设$\mathscr{F}$是样本空间$\boldsymbol{\Omega}$的一些子集的集合，称$\mathscr{F}$为事件域是指

(1) $\boldsymbol{\Omega} \in \mathscr{F}$;

(2) 若$\boldsymbol{A} \in \mathscr{F}$，$\bar{\boldsymbol{A}} \in \mathscr{F}$;

(3) 若$\boldsymbol{A_i} \in \mathscr{F}, \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots$,则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{A_i} \in \mathscr{F}$.

可以验证，事件域$\mathscr{F}$对可列交、并、逆等运算封闭.

概率的公理化定义

定义 设$\mathscr{F}$是样本空间Ω的一个事件域，$P = P(\cdot)$为定义在$\mathscr{F}$上的实函数，满足

(1) 非负性：$P(A) \geq 0$，$\forall A \in \mathscr{F}$;

(2) 规范性：$P(\Omega) = 1$；

(3) 可列可加性：若$A_iA_j = \emptyset\ (i \neq j)$，则$P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

则称$P(\cdot)$是$\mathscr{F}$上的一个概率（测度），$P(A)$称为事件A的概率.

称$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为概率空间.

概率的性质

（1） $P(\emptyset) = 0$

（2） 有限可加性：$A_i A_j = \emptyset \ (i \neq j)$，则 $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

证：取 $A_i = \emptyset, i = 1, 2, \cdots$，则 $P(\emptyset) = P\left(\sum_{i=1}^{\infty} \emptyset\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset) = 0.$

证 取$A_{n+i} = \emptyset, i = 1, 2, \cdots$，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i + \emptyset + \cdots + \emptyset\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(\emptyset) + \cdots + P(\emptyset) + \cdots$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

概率的性质

（1） $P(\emptyset)=0$;

（2）有限可加性：$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$;

（3）逆事件概率：$P(\overline{A})=1-P(A)$;

证：$1=P(\Omega)=P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$.

例 求n个人中至少两人在同一天过生日的概率.

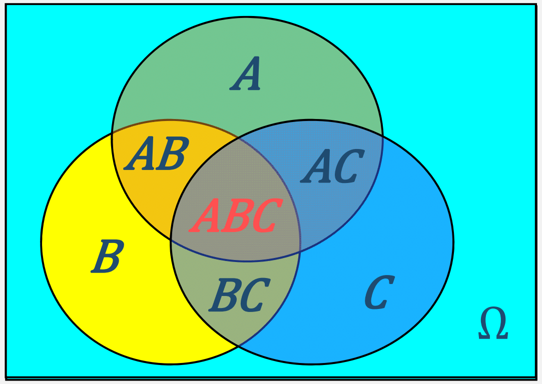
解 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{365\times364\times\cdots\times(365-n+1)}{365\times365\times\cdots\times365}=1-\dfrac{A_{365}^{n}}{365^{n}}$.

概率的性质

(4) **差公式** $A \subset B \Rightarrow P(B-A) = P(B) - P(A)$.

证 $P(B) = P(B-A+A) = P(B-A) + P(A)$.

推论 $A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$.



(5) **加法公式** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

证 $P(A \cup B) = P(A + B\overline{A}) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

推广

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC).$$

一般的，$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \ne j} P(A_i A_j) + \sum_{i \ne j \ne k} P(A_i A_j A_k)$
$- \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$.

概率的性质

例 已知$AB=\emptyset$，$P(A)=p$，$P(B)=q$，求下列概率.

(1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=p+q$;

(2) $P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})=1-p$;　$(\overline{A}\supset B)$

(3) $P(\overline{A}B)=P(B-AB)=P(B)=q$;

(4) $P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-p-q$.

概率的公理化定义

引入事件域$\mathscr{F}$，使$\boldsymbol{P}(\cdot)$仅对$\mathscr{F}$中的事件才定义了概率$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$，好处是：

(1) 我们通常只关心部分事件的概率，这样可以选择较小的$\mathscr{F}$，不关心的事件可以不做考虑，使问题变得简单.

(2) 定义的概率$\boldsymbol{P}(\cdot)$需要满足公理化定义中的三个条件，有的情形如果考虑太大的$\mathscr{F}$，会使不存在满足上述条件的$\boldsymbol{P}(\cdot)$，因此不得已只能考虑较小的$\mathscr{F}$.

但$\mathscr{F}$也不能太小，要求$\mathscr{F}$对事件运算封闭，使概率的性质可以应用.

1.6

条件概率

条件概率

引例 任课教师在第一次课堂上随机点名，考虑下面事件：

$A=\{$点到女生$\}$, $P(A)=\dfrac{\text{女生人数}}{\text{全班人数}}$;

$B=\{$该生名字中含有“芳”字$\}$, $P(A|B)\geq \mathrm{P(A)}$;

$C=\{$该生是球迷$\}$, $P(A|C)\leq P(A)$.

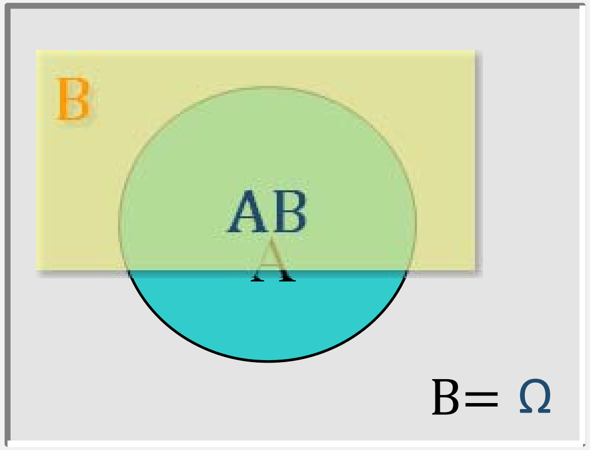
条件概率

定义 设A、B为两事件，且$P(B)>0$，

则称

$$P(A|B) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在B发生的条件下，A发生的条件概率.



注1 $P(A|B)$是将样本空间Ω压缩成B后计算概率；

注2 当B取成样本空间Ω时，$P(A|B)$就是无条件概率$P(A)$；

注3 条件概率确实是概率，即实数$P(\cdot|B)$满足概率公理化定义.

条件概率

例 设加工产品20件，其中有15件一等品，5件二等品，一等品、二等品混放. 现不放回地随机取两件，求已知第一次取到一等品时，第二次仍取到一等品的条件概率.

解 记 A={第一次取到一等品}， B={第二次取到一等品}，则

（1）在缩减的样本空间下计算 $P(B|A)=\dfrac{14}{19}$.

（2） $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{15\times 14}{20\times 19}}{\frac{15}{20}}=\dfrac{14}{19}$.

条件概率

例 设某地区历史上从某次特大洪水发生以后，在30年内发生特大洪水的概率为80%，在40年内发生特大洪水的概率为85%，现已知该地区已经30年未发生特大洪水，问未来10年内将发生特大洪水的概率是多少?

解 记 $A=\{30年内无特大洪水\}$， $B=\{40年内无特大洪水\}$，题目即求$P(\bar{B}|A)$.

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.15}{0.2}=0.75,$$

故所求概率为

$$P(\bar{B}|A)=1-P(B|A)=0.25.$$

1.7

乘法公式和全概率公式

乘法公式

改写条件概率定义 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$,

$$P(AB) = P(B)P(A|B), P(B) > 0,$$

$$P(AB) = P(A)P(B|A), P(A) > 0.$$

类似地，$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB).$

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

乘法公式

例 袋中有5个球, 其中3个红球，2个白球. 现每次任取1个，记下颜色后放回并同时放入2个同色的球. 记$\mathbf{A}_i$为第i次取到红球，求概率$\mathrm{P}(A_1A_2)$, $\mathrm{P}(A_1A_2A_3)$.

解 $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7} = \frac{3}{7}$;

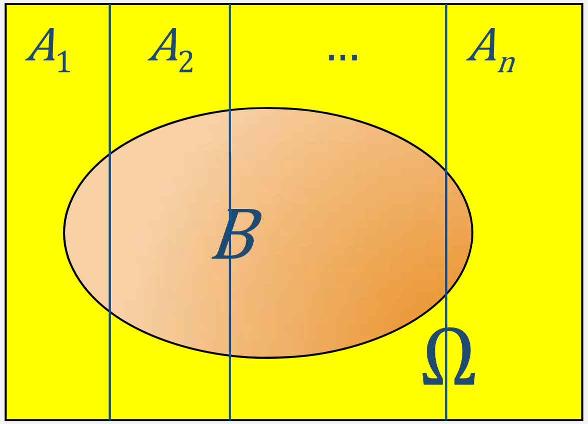
$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{9} = \frac{1}{3}.$$

全概率公式

设$A_1, A_2, ..., A_n$ 满足:

(1) $A_iA_j = \varnothing$, $i \neq j$; (2) $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$,

则称$A_1, A_2, ..., A_n$是Ω的一个划分.



$$P(B) = P(B\Omega) = P(B \sum_{i=1}^{n} A_i) = P(\sum_{i=1}^{n}(BA_i))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(BAi) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i).$$

全概率公式 $\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B|A_i)}$

全概率公式

例 某种产品的商标为“MAXAM”，这5个字母中有两个脱落，有人捡起随意放回，求放回后仍为“MAXAM”的概率.

解 第一步是字母随机脱落：A={脱落的两个字母相同}，$\bar{A}$；

$$P(A)=\frac{2}{C_5^2}=\frac{1}{5},\qquad P(\bar{A})=\frac{4}{5}.$$

第二步是捡起随机放回： B={仍为“MAXAM”}.

$$P(B|A)=1,\qquad P(B|\bar{A})=\frac{1}{2},$$

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{3}{5}.$$

全概率公式

例 设某电子设备制造厂所用的晶体管是由三家元件厂提供的. 现从仓库中任取一只晶体管，根据以下的记录数据求这只晶体管是次品的概率.

元件制造厂	提供晶体管的份额	次品率	
$P(A_1)=$	0.15	$\times P(B\mid A_1)=0.02$	$=0.0030$
$P(A_2)=$	0.80	$\times P(B\mid A_2)=0.01$	$=0.0080$
$P(A_3)=$	0.05	$\times P(B\mid A_3)=0.03$	$=0.0015$

解 $A_i=$ {该晶体管是由第 i 家工厂提供的}, $i=1,2,3$,

$B=$ {该晶体管是次品}.

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.0125.$$

问题：若经检查这只晶体管是次品，那么它产自哪家工厂的可能性最大?

1.8

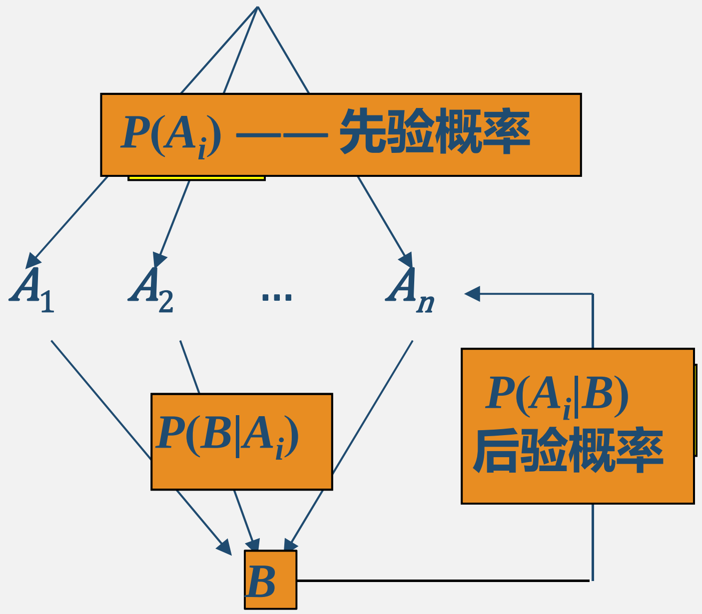
贝叶斯公式及其应用

贝叶斯公式及其应用

设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是Ω的一个划分， B为一事件，则对i=1,2,...,n

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_iB)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}.$$

贝叶斯公式



贝叶斯公式及其应用

诊断疾病 一位患者因有某种症状去看医生. 医生根据临床经验知道：80%的某种疾病患者会有该症状，10%的其他疾病患者也有该症状，在就诊者中有这种疾病的患者的比例仅为0.5%. 据此，医生判断该患者患有这种疾病的概率是多少?

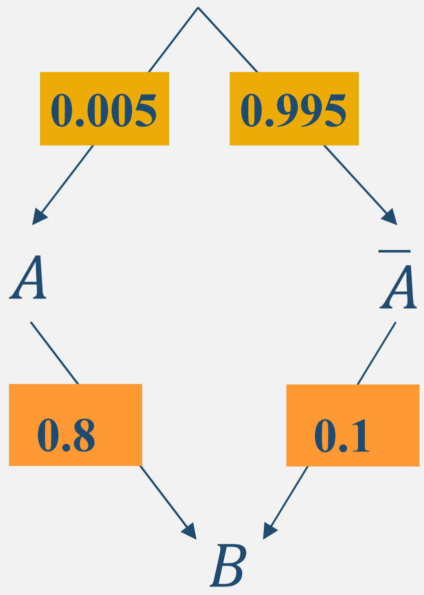
解 记 A={患者患有这种疾病},

B={患者有这种症状},

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$$

$$=\frac{0.005\times 0.8}{0.005\times 0.8+0.995\times 0.1}$$

$$=0.0386.$$



贝叶斯公式及其应用

诊断疾病问题的思考：

一方面，虽然症状B是疾病A的典型症状(80%)，但由于疾病A的稀有性（0.005），导致即便出现症状B也不大可能患疾病A（0.0386）；

另一方面，由于出现症状B，患疾病A的可能性大幅提高了（0.005↗0.0386）.

进一步，让出现症状B的患者接受某仪器检查，假定该检查对疾病A的检出率很高（0.99），对非疾病A的误检率很低（0.05）. 如果该患者的检查结果为患了疾病A，那么他真患有疾病A的概率会怎样呢?

1.9

事件的独立性

事件的独立性

定义 若事件A、B满足：$P(AB)=P(A)P(B)$，则称A与B相互独立.

回顾乘法公式

$$P(AB)=P(B)P(A|B),P(B)>0,$$

$$P(AB)=P(A)P(B|A),P(A)>0.$$

$$P(A|B)=P(A),P(B)>0,$$

$$P(B|A)=P(B),P(A)>0.$$

事件的独立性

例 设甲、乙分别向同一目标射击，甲的命中率为0.9，乙的命中率为0.8，甲、乙命中目标是相互独立的. 求目标被击中的概率.

解 记 A={甲击中目标}，B={乙击中目标}，C={目标被击中}. 则

$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.9+0.8-0.9\times 0.8=0.98.$$

或

$$P(C)=1-P(\bar{A}\bar{B})=1-\underline{0.1\times 0.2}.$$

$\bar{A}$与$\bar{B}$相互独立?

事件的独立性

定理 下面四个命题是等价的：

（1） A与B独立；　　（2） A与$\bar{B}$独立；

（3） $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$独立；　　（4） $\bar{A}$ 与 B独立.

证 仅需证$(1) \Rightarrow (2)$.

$$P(A\bar{B}) = P(A - AB) = P(A) - P(AB)$$

$$\overset{(1)}{=} P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1 - P(B)]$$

$$= P(A)P(\bar{B}).$$

事件的独立性

定义 称A、B、C相互独立，是指下面4个等式成立：

$$P(AB)=P(A)P(B),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(AC)=P(A)P(C),$$

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C).$$

定义 称n个事件$A_1A_2\cdots A_n$相互独立，是指

对任意的$1\le i_1\le\cdots\le i_k\le n, 2\le k\le n,$有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k})=P(A_{i_1})\,P(A_{i_2})\ \ldots P(A_{i_k}).$$

事件的独立性

例 设有四张卡片，一张涂有红色，一张涂有白色，一张涂有黑色，一张涂有红、白、黑三种颜色. 从中任意取一张，令 A ={抽出的卡片上出现红色}，B={抽出的卡片上出现白色}，C={抽出的卡片上出现黑色}，试分析A、B、C的独立性.

解 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{2}$, $P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$,

但 $P(ABC)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$.

A、B、C中任何两个事件相互独立，但A、B、C不相互独立的.

回顾定义：

1.A与B独立表示相交为空？

2.掷骰子，A={1，2}，B={1，3，5}，则A与B相互独立。

补充：书上例1.21

事件的独立性

例 设某人玩电子射击游戏，每次射击命中目标的概率是p =0.004，求他独立地射击 n 次能命中目标的概率.（$n \geq 1$）

解 记 A_i ={第i次命中目标}， $i = 1,2,\cdots n$, A ={目标被击中}，则

$$\mathrm{P(A)=P(}\bigcup_{i=1}^{n} A_i\mathrm{)=1} - P(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}) = 1 - (1-p)^n = 1 - \underline{0.996}^n. \quad \to 1$$

小概率事件的不可能原理:

如果某事件发生的概率很小，那么一次试验后该事件是不可能发生的.