期末试题（2）参考答案

一、 1. $4B(\frac{5}{4},\frac{7}{4})$； 2. $(e^{-1},e]$, $\ln(1+\ln x)$； 3. $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$；

4. $f(x)\sim\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$； 5. 6； 6. 2π； 7. 0.

二、××√×

三、12. 证：限制$|y|<1$. 由

$$|x+y^2-1|\le|x-1|+|y|^2<|x-1|+|y|$$

知，对$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{2}\}$，则对于$|x-1|<\delta$，$|y|<\delta$，有

$$|x+y^2-1|<\delta+\delta=2\delta\le\varepsilon.$$

故$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(x+y^2)=1$.

13. 证：记$D_z: z=z\ (x^2+y^2\le 1-z^2,\quad 0\le z\le 1)$， 则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(z)dxdydz=\int_0^1 f(z)dz\iint_{D_z}dxdy=\pi\int_0^1 f(z)(1-z^2)dz.$$

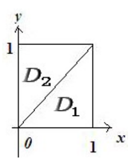
四、14. 因为

$$f'(x)=1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}，且 f(0)=0,$$

所以

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt=x+\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt=x+\int_0^x(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n})dt$$

$$=2x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1},\qquad |x|\le 1.$$



15. 设D_1和D_2如图所示，则

$$\iint\limits_{D}(x+y)\operatorname{sgn}(x-y)dxdy=\iint\limits_{D_1}(x-y)dxdy-\iint\limits_{D_2}(x-y)dxdy\ (4')=0.$$

16. 设 $D: x^2+y^2 \le 1$，则

$$I_z = \iint_{\Sigma} (x^2+y^2)\,dS = \iint_{D} (x^2+y^2) \cdot \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r^3 dr}{\sqrt{1-r^2}} \quad (5') = \pi \int_0^1 \frac{tdt}{\sqrt{1-t}} = \pi B(2,\frac{1}{2}) = \frac{4}{3}\pi\,.$$

17. 解法 1: 由 Green 公式，得到

$$I = \iint_D dxdy - 2\int_{OA} xdx = 1 - 2\int_0^2 xdx = 1-4 = -3.$$

解法 2: 因为

$(e^x \sin y - 2(x+y))dx + (e^x \cos y - x)dy = d(e^x \sin y - x^2 - xy) - ydx$，

所以

$$I = (e^x \sin y - x^2 - xy)\Big|_{(0,0)}^{(2,0)} - \int_L ydx = -4 + \int_0^1 xdx - \int_1^2 (x-2)dx = -4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -3.$$

五、18. 证: (1) 任取闭子区间 $[a,b] \subset (0,2\pi)$，则对 $\forall x \in [a,b]$ 和正整数 n，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \le \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \le \frac{1}{\min\{\sin\frac{a}{2}, \sin\frac{b}{2}\}}\,.$$

又，数列 $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ 单减且趋于零，由 Dirichlet 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

(2) 因为对一切的正整数 n 成立 $1 < (1+\frac{1}{n})^n < e$，即数列 $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ 有界， 所以结合(1)，

由 Abel 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，从而在 $(0,2\pi)$ 内闭一致收敛.

19. 证： $z = \frac{x}{x\varphi+1}$， $z_x = \frac{1-x^2\varphi_u - \varphi_v}{(x\varphi+1)^2}$， $z_y = \frac{x^2\varphi_v}{y^2(x\varphi+1)^2}$. (4')于是由已知等式得到

$$z^2 = x^2 z_x + y^2 z_y = \frac{x^2 - x^4\varphi_u - x^2\varphi_v}{(x\varphi+1)^2} + \frac{x^2\varphi_v}{(x\varphi+1)^2} = \frac{x^2 - x^4\varphi_u}{(x\varphi+1)^2} = z^2 - \frac{x^4\varphi_u}{(x\varphi+1)^2}.$$

这导出 $\frac{x^4\varphi_u}{(x\varphi+1)^2} = 0$，从而有 $\varphi_u = 0$.

20. 充分性由 Gauss 公式即得. 下面用反证法证明必要性.

假设在Ω内某点P_0处$\nabla\cdot\vec{F}\neq 0$，不妨设$\nabla\cdot\vec{F}(P_0)>0$，则由$\vec{F}\in C^1(\Omega)$知$\nabla\cdot\vec{F}$在$P_0$处连续．由连续函数的局部保号性知，存在$P_0$的某邻域$N(P_0)$，使得$\forall P\in\overline{N(P_0)}$，有

$$\nabla\cdot\vec{F}(P)>\frac{1}{2}\nabla\cdot\vec{F}(P_0)>0.$$

于是由 Gauss 公式，得到

$$\oiint\limits_{\partial\overline{N(P_0)}}\vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iiint\limits_{\overline{N(P_0)}}\nabla\cdot\vec{F}dv\geq\frac{1}{2}\nabla\cdot\vec{F}(P_0)\iiint\limits_{\overline{N(P_0)}}dv>0.$$

这与已知矛盾．故在Ω内恒有$\nabla\cdot\vec{F}=0$.