05

依概率收敛与大数定律

依概率收敛与大数定律

问题：概率的频率解释

概率的统计定义: 随机事件A发生的概率 $P(A) \approx \dfrac{n_A}{n}$

记 $X_i = \begin{cases} 1, 第\ i\ 次A发生 \\ 0, 第\ i\ 次A不发生 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(X_i = 1) = P(A) \\ P(X_i = 0) = 1 - P(A) \end{cases}$

$E(X_i) = P(A)$

$\dfrac{n_A}{n} = \dfrac{(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)}{n} \xrightarrow{\text{某种意义下}} P(A) = E(X_i)$

依概率收敛与大数定律

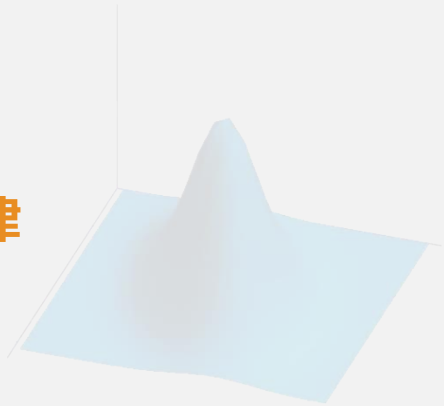
大数定律的定义

一类收敛现象

$X_1, X_2, \cdots, X_n \cdots$为一随机变量序列，常常有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad n \to \infty$$ 在某种意义下收敛

随机变量序列在某些意义下的收敛规律，习惯称之为**大数定律**



依概率收敛与大数定律

随机变量序列依概率收敛于一常数

$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n\cdots$为一随机变量序列， a 为一常数，如果$\forall\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - a| \geq \varepsilon) = 0$$

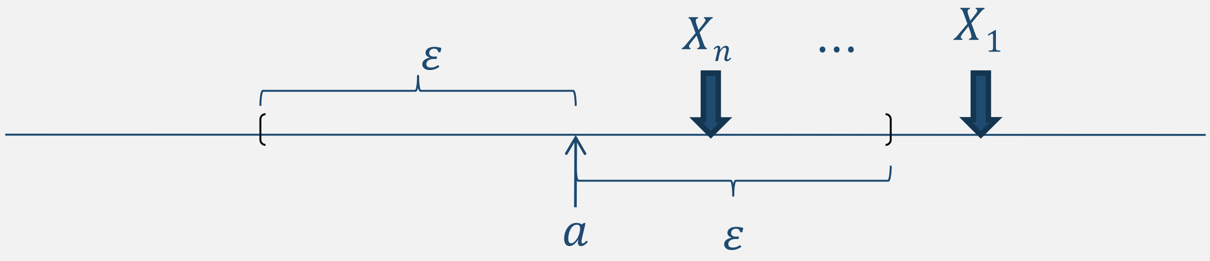
或

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - a| < \varepsilon) = 1$$

则称随机变量序列**依概率收敛**到常数 a ，记为$X_n \xrightarrow{P} a.$

依概率收敛与大数定律

依概率收敛与普通数列收敛的区别



普通数列收敛时，当项数充分大，必然落入小区间，依概率收敛时，无论项数多大，都有落到小区间以外的可能性.

依概率收敛与大数定律

伯努利(Bernoulli)大数定律

n_A为n重伯努利试验中A发生的次数，且$P(A)=p$，则对$\forall\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1 \quad 或$$

$$\frac{n_A}{n}=\frac{(X_1+X_2+\cdots+X_n)}{n} \xrightarrow{p} P(A)=E(X_i)$$

概率的频率解释：频率$\frac{n_A}{n}$依概率收敛于真实概率p.

依概率收敛与大数定律

切比雪夫大数定律

互不相关

若随机变量序列$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$相互独立，且$E(X_n) = \mu$，$D(X_n) = \sigma^2$

存在，则$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$服从切比雪夫大数定律. 即$\forall \varepsilon > 0$有

$$\lim_{n \to \infty} P(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| < \varepsilon) = 1 \quad 或$$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} \mu.$$

依概率收敛与大数定律

几个著名的大数定律

名　称	条 件	结 论
马尔科夫	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=0$	$\lim\limits_{n\to\infty}P(\lvert\bar{X}_n-E(\bar{X}_n)\rvert<\varepsilon)=1$
切比雪夫	$Cov(X_i,X_j)=0$，$i\neq j$，且$D(X_n)<C$（有界）	$\lim\limits_{n\to\infty}P(\lvert\bar{X}_n-E(\bar{X}_n)\rvert<\varepsilon)=1$
伯努利	$\mu_n\sim B(n,p)$	$\lim\limits_{n\to\infty}P(\lvert\frac{\mu_n}{n}-p\rvert<\varepsilon)=1$
辛　钦	X_1，$X_2,\dots,X_n,\dots$独立同分布，且$E(X_n)=\mu$（有限）	$\lim\limits_{n\to\infty}P(\lvert\bar{X}_n-\mu\rvert<\varepsilon)=1$

$\{\bar{X}_n\}$依概率收于敛于μ

05

切比雪夫不等式与大数定律的证明

切比雪夫不等式与大数定律的证明

切比雪夫（чебышев）不等式及证明

设随机变量X 有$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，则对任何 $\varepsilon>0$ 有

$$P(|X-\mu|\geq\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad 或 \quad P(|X-\mu|<\varepsilon)\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

证 仅对连续型随机变量X 证明. 设 $f(x)$为X的密度函数，则

$$P(|X-\mu|\geq\varepsilon) = \int_{|X-\mu|\geq\varepsilon} f(x)dx \leq \int_{|X-\mu|\geq\varepsilon} \frac{(x-\mu)^2}{\varepsilon^2} f(x)dx$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

切比雪夫不等式与大数定律的证明

切比雪夫大数定律及证明

若随机变量序列$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$相互独立，且$E(X_n)=\mu$，$D(X_n)=\sigma^2$存在，则$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$服从**切比雪夫大数定律**.即$\forall\ \varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)\right| < \varepsilon\right) = 1 \quad 或 \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} \mu$$

证 $E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \mu$， $D(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$

$$1 \geq P\left(\left|\bar{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} \to 1 \quad (n\to\infty)$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)\right| < \varepsilon\right) = 1$$

切比雪夫不等式与大数定律的证明

补充：书上例5.1~5.3

伯努利大数定律及证明

n_A为n重伯努利试验中A发生的次数，且$P(A)=p$，则对任何 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

证 由题意 记$X_i \sim B(1, p)$, $i = 1,2,\ldots n$，相互独立，则

$$E(X_i)=p,\quad D(X_i)=p(1-p),\qquad \frac{n_A}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}_n$$

利用切比雪夫大数定律的结论 $\frac{n_A}{n} = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} \xrightarrow{p} P(A)=E(X_i)$

05

中心极限定理（一）

中心极限定理（一）

中心极限定理的目的

(1) 解决多个随机变量和的分布问题.

假设随机变量$X_1, X_2, \cdots X_n$独立同分布，分布函数为$F(x)$

$$X_1 + X_2 \sim ?$$

$$X_1 + X_2 + X_3 \sim ?$$

$$X_1 + X_2 + \cdots X_n \sim ?$$

(2) 阐述正态分布的重要性.

中心极限定理（一）

独立同分布中心极限定理

设$\{X_i, i = 1,2,\dots\}$是独立同分布的随机变量序列，且$E(X_i) = \mu$，

$D(X_i) = \sigma^2 \neq 0$，记$\sum_{i=1}^{n} X_i$标准化随机变量:

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数为$F_n(x)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$

中心极限定理（一）

注　1、定理表明，独立同分布的随机变量之和 $\sum_{i=1}^{n} X_i$，

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{近似地}}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2) \;\; ; \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(0,1).$$

2、独立同分布中心极限定理的另一种形式可写为

$$\bar{X} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(\mu, \sigma^2/n) \quad \text{或} \quad \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(0,1),$$

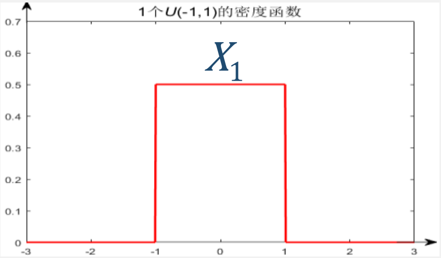
其中$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

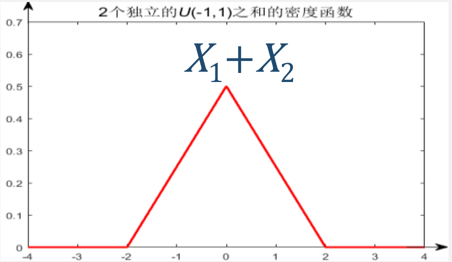
中心极限定理（一）

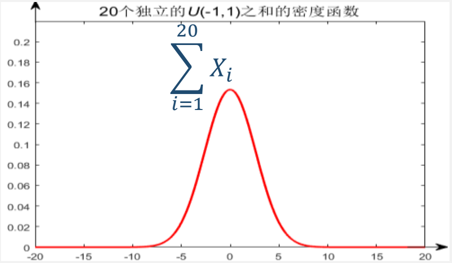
(1) $X_i \sim U(-1,1)$

$i=1,\dots,20$,

相互独立



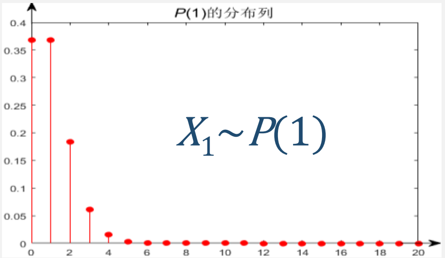


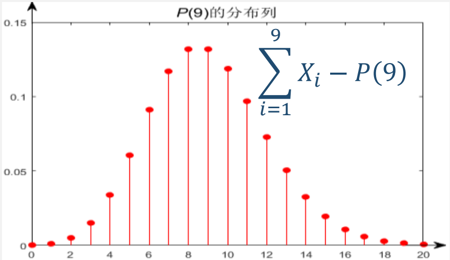


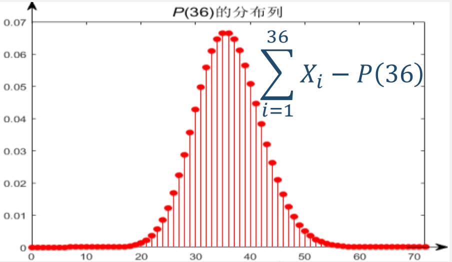
(2) $X_i \sim P(1)$

$i=1,\dots,36$,

相互独立



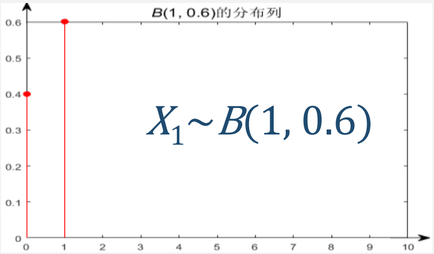


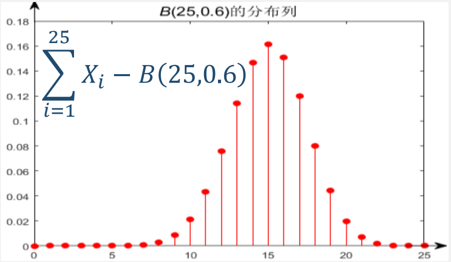


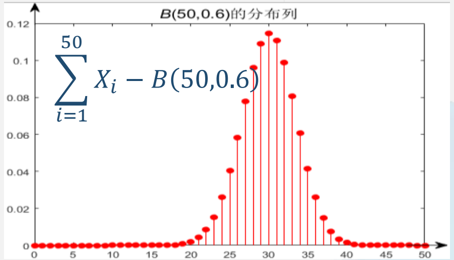
(3) $X_i \sim B(1,0.6)$

$i=1,\dots,50$,

相互独立







中心极限定理（一）

高尔顿钉板试验

记 $X_k=\begin{cases}1, & \text{小球碰第 } k \text{ 层钉后向右落下}\\ -1, & \text{小球碰第 } k \text{ 层钉后向左落下}\end{cases}$ $(k=1,2,\cdots,15)$

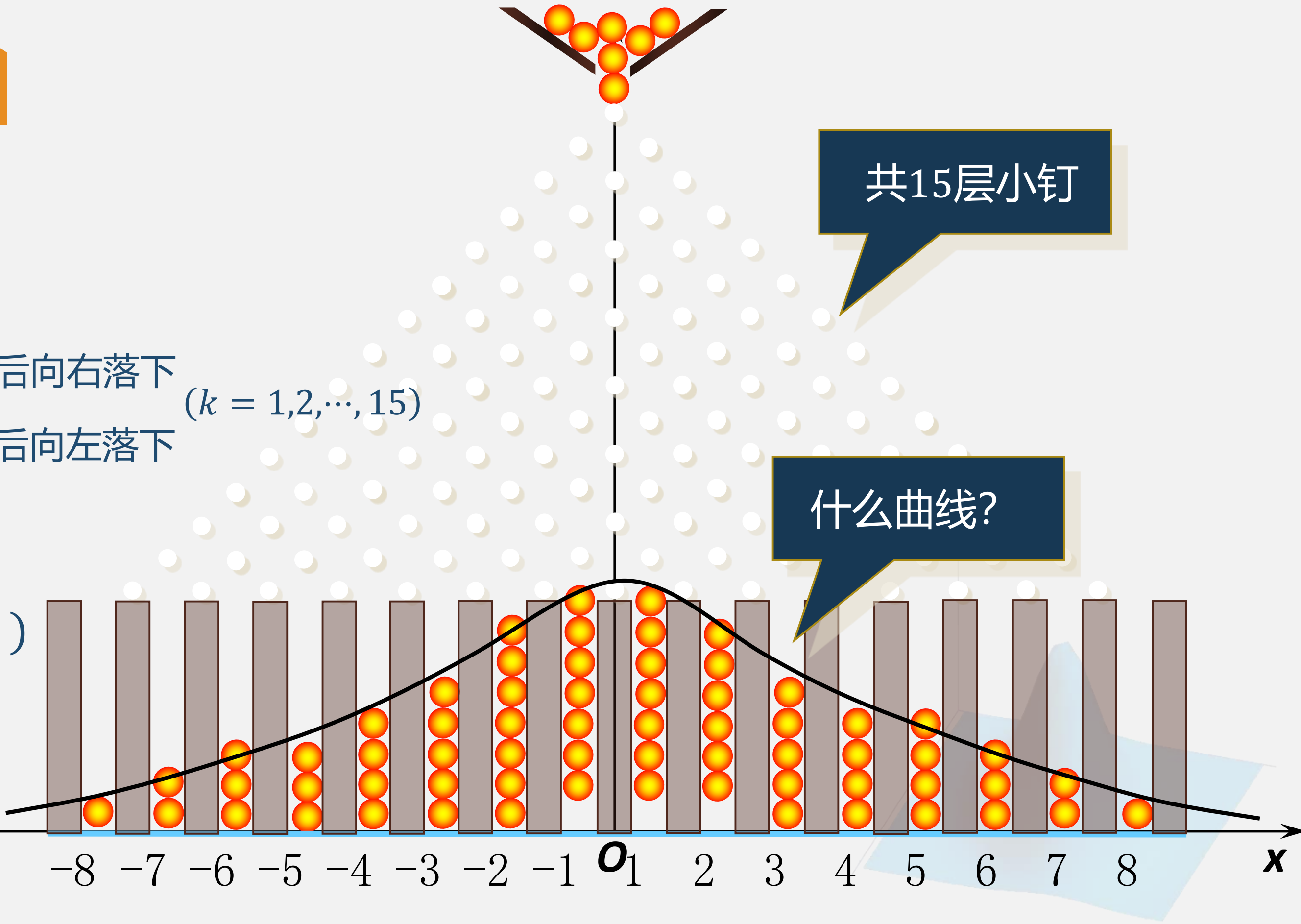
近似

则 $\sum_{k=1}^{15} X_k \sim N(0,15)$ $N(\mu,\sigma^2)$

$n=15$

$\mu=0,\sigma^2=1$

$n\sigma^2=15$



中心极限定理（一）

例 天文学家观测某星球与天文台的距离D，他作n 次独立观测$X_1, X_2, \dots, X_n$ (单位：光年), 设这 n 次独立观测的期望 $EX_i = D$, 方差 $DX_i = 4$, $i = 1,2,\dots,n$. 现天文学家用算术平均值作为D的估计, 求其对D的估计精度在±0.25光年之间的概率p_n, 分析n对p_n的影响, 并求$n \to +\infty$时的极限.

书上例5.6. (例5.4~例5.8)

解 由独立同分布中心极限定理知n充分大时，$\bar{X}_n \overset{W}{\sim} N(D, 4/n)$

$$p_n = P(|\bar{X}_n - D| \le 0.25) = P(D - 0.25 \le \bar{X}_n \le D + 0.25)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{0.25}{\sqrt{4/n}}\right) - \Phi\left(-\frac{0.25}{\sqrt{4/n}}\right) = 2\Phi（0.125\sqrt{n}）- 1$$

随n增大$p_n \uparrow$， $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$

05

中心极限定理（二）

中心极限定理（二）

德莫佛 拉普拉斯中心极限定理

设 $\mu_n \sim B(n,p)$， $0 < p < 1, n = 1,2,\ldots$， 则对 $\forall x \in R$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x \right) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t .$$

证 令 $X_i \sim B(1,p), i = 1,2,\ldots n$ 相互独立，则 $\mu_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

且 $E(X_i) = p, D(X_i) = p(1-p) \neq 0,$

由独立同分布中心极限定理立得.

中心极限定理（二）

应用 若$X \sim B(n,p) \underset{n\text{充分大}}{\overset{\text{近似}}{\sim}} N(np, np(1-p))$

$$P(k_1 \le X \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = F_X(k_2) - F_X(k_1)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

补充 P82 与大数定律的关系.

中心极限定理（二）

例 设英语考试有100道选择题，每题四个选项中只有一个正确，答对得1分.某生用猜的方式(即随机选一项作为答案)答题，求该生能考及格(≥ 60分)的概率.

解 该生能答对的题数为X，显然$X \sim B(100，1/4)$，

$$P(X \geq 60) = 1 - P(X < 60)$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{60-25}{\sqrt{100\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right) \approx 0$$

中心极限定理（二）

例 对于一个学生而言，来参加家长会议的人数是一个随机变量，概率规律如下：

X	0	1	2
p	0.05	0.8	0.15

若学校共有400名学生，各学生来参加会议的家长人数相互独立，且服从同一分布

（1）求参加会议的家长总数Y超过450 的概率；

（2）求有1名家长来参加会议的学生数Z不多于340 的概率.

中心极限定理（二）

（1）求参加会议的家长数Y超过450 的概率；

解 以$X_k(k=1,2\cdots,400)$记第k个学生来参加会议的家长数，

则X_k的分布列为：

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

易知$E(X_k)=1.1, D(X_k)=0.19$， $k=1,2,\cdots 400.$

$Y=\sum_{k=1}^{400} X_k$. 由独立同分布的中心极限定理，可知

中心极限定理（二）

$$Y \overset{\text{近似地}}{\sim} N(400 \times 1.1, 400 \times 0.19)$$

$$P\{Y > 450\} = P\left\{\frac{Y - 400 \times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}} > \frac{450 - 400 \times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}\right\}$$

$$= 1 - P\left\{\frac{Y - 400 \times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}} \leq 1.147\right\}$$

$$\approx 1 - \Phi(1.147) = 0.1257$$

中心极限定理（二）

(2) 记Z为一名家长来参加会议的学生数，则

$Z\sim B(400,0.8)$，由DML中心极限定理，知

$$Z\overset{\text{近似地}}{\sim}N\left(400\times 0.8，400\times 0.8\times 0.2\right)$$

$$P\{Z\le 340\}=P\left\{\frac{Z-400\times 0.8}{\sqrt{400\times 0.8\times 0.2}}\le\frac{340-400\times 0.8}{\sqrt{400\times 0.8\times 0.2}}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{Z-400\times 0.8}{\sqrt{400\times 0.8\times 0.2}}\le 2.5\right\}$$

$$\approx\Phi(2.5)=0.9938$$