华中科技大学 2021～2022 学年第二学期

《微积分（一）》（下）课程期末考试试卷(A 卷) (闭卷)

院(系) 启明学院 专业班级__________学号_______________ 姓名__________

考试日期: 2022-06-27　　　　　　　　　　考试时间: 8:30 - 11:00

题号	一	二	三	四	五	总分
满分	28	8	28	12	24	100
得 分						

解答内容不得超过装订线

得 分	
评卷人	

一、 填空题（每小题 4 分，共 28 分）

1、设 $\vec{a}=\{1,2,3\}$，$\vec{r}=\{x,y^2,z^3\}$ 则 $\mathrm{grad}(\vec{a}\cdot\vec{r})=$________________.

2、微分方程 $y''(x)+2021y'(x)-2022y(x)=0$ 的通解为________________.

3、曲线 $L:\begin{cases}x+y+z=3,\\ 2x^2+y^2-z=0\end{cases}$ 在点 $(1,0,2)$ 处的法平面方程为__________________.

4、设 $f(x,y)$ 为连续函数，则二次积分 $\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$ 在极坐标系下先对 r 后对 θ 的二次积分为____________________.

5、将 $f(x)=\begin{cases}x,\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0,\ \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi,\end{cases}$ 在 $[0,\pi]$ 上展开为余弦级数 $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$，则系数

$a_2=$________________，$S(\dfrac{\pi}{2})=$______________.

6、曲线 $C:\vec{r}(t)=\{1+\cos t,\sin t,2\sin\dfrac{t}{2}\}$ 在 $t=\pi$ 处的曲率为__________.

7、设曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{a^2}{2}(a>0),\\ x^2+y^2+z^2=a^2(z\ge 0),\end{cases}$ 则 $\int_C (x^2+y^2+3x-2y)\mathrm{d}s=$__________.

得　分	
评卷人	

二、 判断题(每小题 2 分，共 8 分). 请在正确说法相应的括号中画“√ ”，在错误说法的括号中画“×”.

8. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, x^2+y^2\neq 0,\\ 0, \qquad x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处沿任何方向的方向导数都存在.　　　(　　)

9. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\dfrac{1}{n})a_n$ 也必发散.　　　(　　)

10. 若 $f_x(x_0,y_0)$ 存在， $f_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微.　　　(　　)

11. 设 $S:x^2+y^2+z^2=\mathrm{R}^2(x\geq 0,y\geq 0)$，取外侧， S_1 是 S 在第一卦限的部分，则

$\iint\limits_{S}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{S_1}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　　(　　)

得　分	
评卷人	

三、计算题（每小题 7 分，共 28 分）

12．求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+3xy+y^2}{|x|+|y|}$.

13. 将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展开为 Maclaurin 级数.

14. 计算$\iint\limits_S (x+y+z)dS$，其中S是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax(a>0)$截下的部分.

解答内容不得超过装订线

15. 计算$I=\iint\limits_S x(x+y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-y^2(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S$是曲面$z=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ $(z\geq 0)$的下侧.

得　分	
评卷人	

四、应用题（每小题 6 分，共 12 分）

16. 求上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(a>0)$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体的形心坐标.

17. 求曲面 $z=xy-y-1$ 上到点 $(1,0,0)$ 的距离最小的点的坐标.

得　分	
评卷人	

五、证明题（每小题 8 分，共 24 分）

18. 设 $f(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 附近有一阶连续偏导数，且 $f(0,1)=0$， $f_y(0,1)\neq 0$. 证明：方程

$f(x,1+\int_0^t \cos u^2 du)=0$ 在 $(0,0)$ 附近确定一个隐函数 $t=t(x)$，并求 $t'(0)$.

19. 证明函数 $f(x)=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}\mathrm{d}t$ 在 $(1,+\infty)$ 上可导，并求 $f'(x)$.

解答内容不得超过装订线

20. 设 $f(x)$ 是连续的正值函数，C 为曲线 $x^4+y^4=a^4(a>0)$，取逆时针方向. 证明：

$$\int_C -yf(x)\,\mathrm{d}x+\frac{x}{f(y)}\mathrm{d}y \geq 2a^2B(\frac{1}{4},\frac{5}{4}),$$

其中 $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\ (p>0,q>0)$.