第2章　牛顿运动定律

§2-1 牛顿运动定律

1. 牛顿第一定律

任何物体都保持静止或沿一条直线作匀速运动的状态，除非作用在它上面的力迫使它改变这种状态。 ——**惯性定律**

2. 牛顿第二定律

运动的变化与所加的力成正比;并且发生在这力所沿的直线的方向上。

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}=\begin{cases} m\dfrac{d\vec{v}}{dt}+\vec{v}\dfrac{dm}{dt} & （m为变量） \\ m\dfrac{d\vec{v}}{dt}=m\vec{a} & （m为常量） \end{cases}$$

这里“*m*”为变量，指的是相对论中质量随速度变化。

力满足叠加原理（**矢量叠加**）

3. 牛顿第三定律

对于每一个作用，总有一个相等的反作用与它对抗；或者说两个物体之间的相互作用力大小相等，方向相反。

牛顿第一定律定性地指出了力和运动的关系(力的作用改变物体的运动状态),第二定律进一步给出了力和运动状态变化之间的定量关系，第三定律则明确了力是物体间的相互作用。

1）力的度量

$$\vec{F}=m\vec{a}\quad\Rightarrow\quad\frac{F_1}{F_2}=\frac{a_1}{a_2}$$

（针对同一质量的物体）

2）质量的度量

相同大小的力作用于两个不同质量的物体：

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{a_2}{a_1}$$

质量反映了物体惯性的大小——惯性质量。

引力质量：反映产生和感受引力的能力。

§2-2 牛顿定律只适用于惯性系 —— 惯性力

$$\vec{v}=\vec{v}'+\vec{v}_{S'S}$$

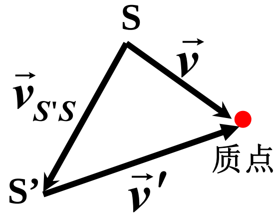
S’系相对于S系的运动速度：$\vec{v}_{S'S}$

$$\vec{a}=\vec{a}'+\frac{d\vec{v}_{S'S}}{dt}=\vec{a}'+\vec{a}_0$$

$\vec{a}_0$：S’系相对于S系的加速度

$$\vec{F}=m\vec{a}=m\vec{a}'+m\vec{a}_0$$

在S’系牛顿定律不成立



结论：在有些参照系中牛顿定律成立，这些系称为**惯性系**。相对惯性系作加速运动的参照系是非惯性系。而相对惯性系作加速度为零的运动的参照系也是惯性系。

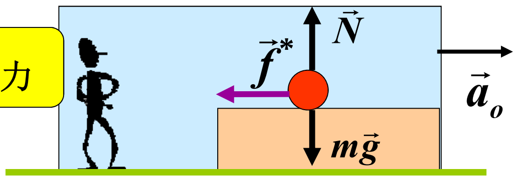
非惯性系中，必须引入“惯性力”的概念，牛顿第二定律才能继续沿用。

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}' + m\vec{a}_0 \quad \Rightarrow \vec{F} - m\vec{a}_0 = m\vec{a}'$$

$$\vec{f}^* = -m\vec{a}_0 : \text{惯性力}$$

车厢参照系为非惯性系：

$$\sum \vec{F} = \underbrace{m\vec{g} + \vec{N}}_{\text{真实力}} + \underbrace{\vec{f}^*_{\text{惯性力}}}_{\text{虚拟力}}$$

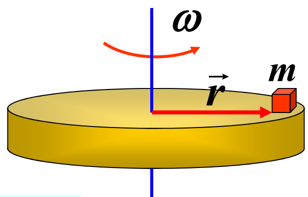


$$= -m\vec{a}_0 = m\vec{a}'$$

惯性力为虚拟力，惯性力没有施力者，也没有对应的反作用力。

在匀速转动的参照系：

一木块静止在一个水平匀速转动的转盘上，转盘相对地面以角速度ω旋转。



相对地面参照系，木块作匀速圆周运动：

$$v = \omega r$$

$$|\vec{a}_n| = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

$$\vec{f}_{\text{向心}} = \vec{f}_{\text{静摩擦}} = m\vec{a}_n$$

$$\therefore \vec{f}_{\text{向心}} = -m\omega^2\vec{r}$$

相对转盘参照系：木块静止不动，即：$\vec{a}' = 0$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}' = 0 = \vec{F}_{\text{真实力}} + \vec{f}^*_{\text{惯性力}}$$

$$\therefore \ \vec{f}^*_{\text{惯性力}} = -\vec{F}_{\text{真实力}} = -\vec{f}_{\text{向心}} = m\omega^2\vec{r}$$

——通常称为惯性离心力

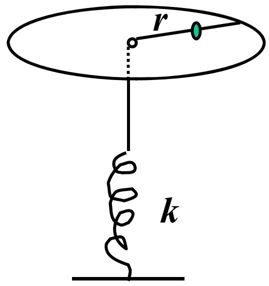
惯性离心力没有施力者，也没有对应的反作用力。

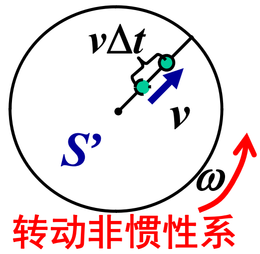
如在地球旋转参照系中

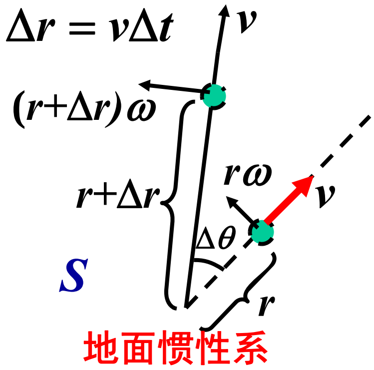
科里奥利力：当物体在转动参照系中运动时，所涉及的惯性力。

方法一：桌面匀角速转动，质点在桌面上的径向凹槽内，作无摩擦运动

当桌面旋转角速度满足上式时，在桌面参照系看，弹性力与离心力总处于平衡，一旦质点沿径向获得速度 v，将保持匀速运动。







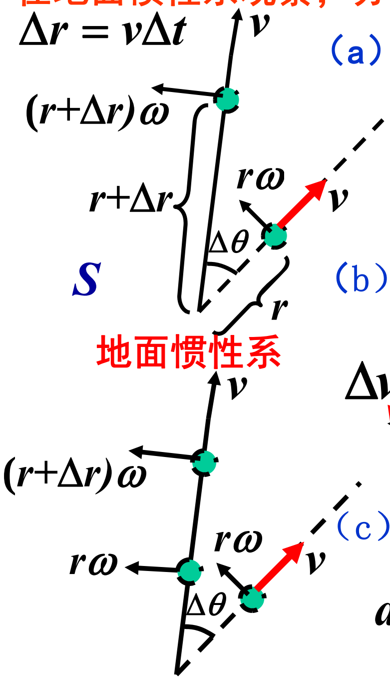
若质点在圆心上 $r=0$处，弹簧为自然长度，则在 r 处：

$$kr = mr\omega^2$$

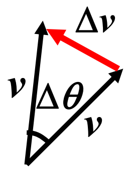
$$\Rightarrow k = m\omega^2$$

在桌面旋转的非惯性系，质点沿径向匀速运动。

在地面惯性系观察，分析质点的加速度：

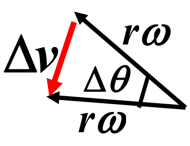


（a）径向速度方向变化形成的加速度：



$$a_{\tau 1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v \cdot \Delta\theta}{\Delta t} = v\omega \quad （切向）$$

（b）转动速度方向变化形成的加速度：



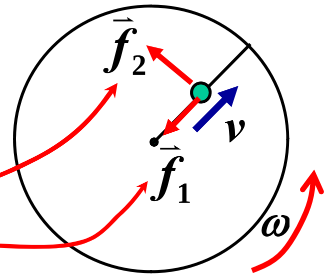
$$a_n = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{r\omega \cdot \Delta\theta}{\Delta t} = r\omega^2 \quad （内法向）$$

（c）转动速度大小变化形成的加速度：

$$a_{\tau 2} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta r\omega}{\Delta t} = v\omega \quad （切向）$$

在地面惯性系观察，质点的加速度：

$$\vec{a} = 2v\omega\hat{\tau} + r\omega^2\hat{n}$$



上述两加速度由两真实力提供。

提供切向加速度

提供法向加速度（向心加速度）

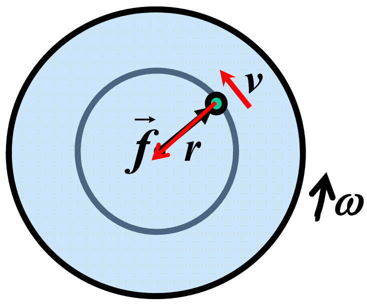
$$\vec{f}_1 + \vec{f}_2 = m\vec{a} = 2mv\omega\hat{\tau} + mr\omega^2\hat{n}$$

在匀速转动的非惯性系中，质点匀速沿径向运动，加速度为零：

$$\vec{f}_1 + \vec{f}_2 \underbrace{-2mv\omega\hat{\tau}}_{\text{科里奥利力}} \underbrace{-mr\omega^2\hat{n}}_{\text{离心力}} = 0$$

有两个惯性力。科里奥利力只有质点在转动非惯性系中的速度非零的时候，才可能出现。

方法二：桌面匀角速 ω 转动，一质点在光滑桌面上相对于桌面以速率 v 匀速圆周运动。



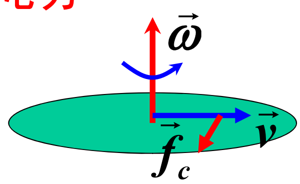
在地面惯性系：

$$f = m\frac{(v + r\omega)^2}{r}$$

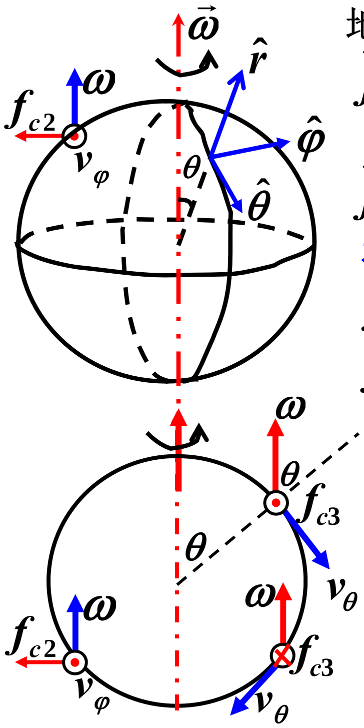
$$= m\frac{v^2}{r} + 2mv\omega + mr\omega^2$$

在转动非惯性系：$f \underbrace{-2mv\omega}_{\text{科里奥利力}} \underbrace{-mr\omega^2}_{\text{离心力}} = m\dfrac{v^2}{r}$

两个非惯性力均沿径向指向外。



一般地：$\vec{f}_c = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}$



地球是匀速旋转的非惯性系。

$$\vec{f}_c = 2m\vec{v}\times\vec{\omega}$$
$$= 2m(v_r\hat{r}+v_\varphi\hat{\varphi}+v_\theta\hat{\theta})\times\vec{\omega}$$
$$\vec{f}_{c1} = -2mv_r\omega\sin\theta\hat{\varphi}$$ 落体偏东

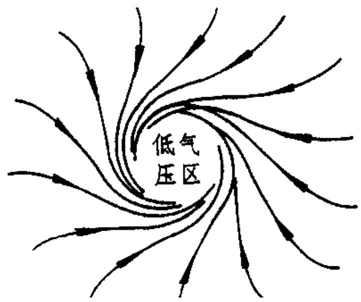
在北半球：

$$f_{c2} = 2mv_\varphi\omega$$
$$f_{c3} = -2mv_\theta\omega\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)\hat{\varphi}$$
$$= -2mv_\theta\omega\cos\theta\hat{\varphi}$$

向东流的江河，南岸冲刷严重；
向南流的江河，西岸冲刷严重。

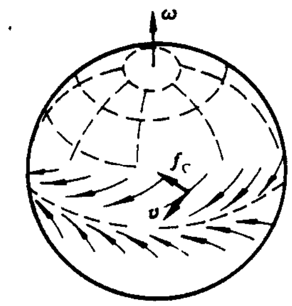
江水冲刷右岸

在南半球：江水冲刷左岸



台风的形成：

在北半球，沿地球表面流动的气流，所形成的科里奥利力总是指向气流速度的右侧。因此在北半球，热带气旋总是逆时针方向。南半球则相反。

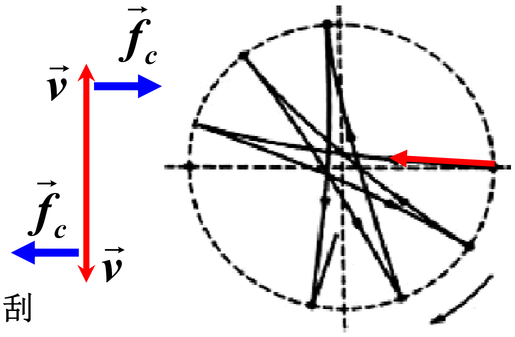


信风的形成：

北半球和南半球的信风均向西刮

傅科摆：

在北半球：单摆摆动面将顺时针旋转



§2-3 基本的自然力

1、万有引力： $f=\dfrac{Gm_1m_2}{r^2}$ $G=6.67\times10^{-11}Nm^2/kg^2$

例：地球对物体的引力$P=mg=GMm/R^2$，所以$g=GM/R^2$

2、电磁力：（例:库仑力：$f=k\,q_1q_2/r^2$， $k=9\times10^9Nm^2/C^2$）

电磁力远远大于万有引力！

3、强力：粒子之间的一种相互作用，作用范围在0.4×10^{-15}米至10^{-15}米。

4、弱力：粒子之间的另一种作用力，力程短、力弱。

四种基本自然力的特征和比较

力的种类	相互作用的物体	力的强度	力程
万有引力	一切质点	10^{-34}N	无限远
弱力	大多数粒子	10^{-2}N	小于10^{-17}m
电磁力	电荷	10^2N	无限远
强力	核子、介子等	10^4N	10^{-15}m

§2-4 牛顿第二定律的应用

牛顿第二定律解题类型：

$$\vec{r} \Leftrightarrow \vec{v} \Leftrightarrow \overset{m}{\vec{a}} \Leftrightarrow \vec{F}$$

对一维运动或用分量式求解时：

$$F(t)=m\frac{dv}{dt}\Rightarrow\int_{t0}^{t}F(t)dt=\int_{v0}^{v}mdv\Rightarrow v(t)$$

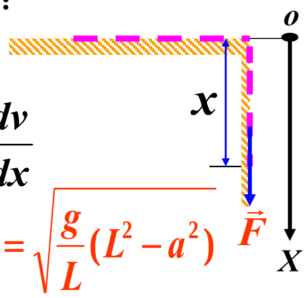
$$F(v)=m\frac{dv}{dt}\Rightarrow\int_{t0}^{t}dt=\int_{v0}^{v}\frac{m}{F(v)}dv\Rightarrow v(t)$$

$$F(x)=m\frac{dv}{dt}=m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=mv\frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow\int_{x0}^{x}F(x)dx=\int_{v0}^{v}mvdv\Rightarrow v(x)$$

$$v(x)=\frac{dx}{dt}\Rightarrow\int_{t0}^{t}dt=\int_{x0}^{x}\frac{dx}{v(x)}\Rightarrow x(t)\Rightarrow v(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

例1. 一条质量为 M 长为 L 的均匀链条，放在一光滑的水平桌面上，t=0时链子的一端有长度 a 下垂，且速度为零，在重力作用下开始下落，试求（1）链条刚刚离开桌面时的速度：



解：（1）链条在运动过程中，各部分的速度、加速度都相同。

$$\frac{M}{L}xg = M\frac{dv}{dt} \qquad \frac{g}{L}x = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

$$\int_a^L \frac{g}{L}xdx = \int_0^v vdv \qquad \frac{g}{2L}(L^2-a^2)=\frac{1}{2}v^2 \qquad v=\sqrt{\frac{g}{L}(L^2-a^2)}$$

（2）求任意时刻 t 时的链条下垂的长度。

$$\frac{g}{L}x = v\frac{dv}{dx} \Rightarrow \int_a^x \frac{g}{L}xdx = \int_0^v vdv \qquad \sqrt{\frac{g}{L}(x^2-a^2)} = v = \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \int_0^t dt = \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{g}{L}(x^2-a^2)}} \qquad x = \frac{a}{2}\left(e^{\sqrt{g/L}t} + e^{-\sqrt{g/L}t}\right)$$

例2. 正在水中垂直下沉的石块的质量为 m，重力大于浮力 F，水的阻力与下沉速度 v 的一次方成正比，等于 kv（k为常数）,当 $t=0$时，初速度 $v_0=0$，求石块下沉速度 $v(t)$ 的具体函数形式。

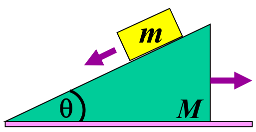
解：

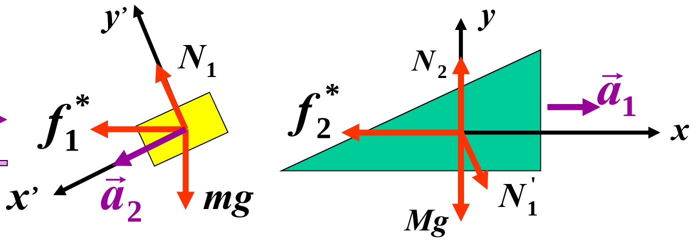
$$mg-F-kv = m\frac{dv}{dt} \qquad v = \frac{1}{k}(mg-F)\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

$$\frac{1}{m}\int_0^t dt = \int_0^v \frac{1}{mg-F-kv}dv$$

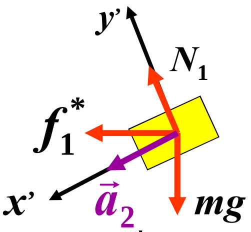
收尾速度：$v_f = \frac{1}{k}(mg-F)$

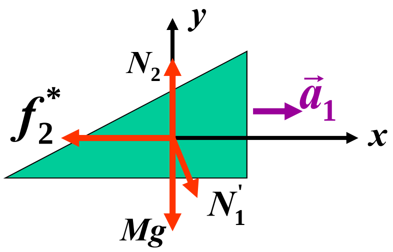
例3. 一光滑的劈，质量为 M，斜面倾角为 θ，并位于光滑的水平面上，另一质量为 m 的小块物体，沿劈的斜面无摩擦地滑下，求劈对地的加速度。





以劈为参照系:设M对地的加速度为 $\vec{a}_1$ $\quad$ m 对M的加速度为 $\vec{a}_2$





$$mg\sin\theta + f_1^{*}\cos\theta = ma_2$$
$$-mg\cos\theta + N_1 + f_1^{*}\sin\theta = 0$$
$$N_1'\sin\theta - f_2^{*} = 0$$
$$N_2 - N_1'\cos\theta - Mg = 0$$

利用 $N_1' = N_1,\ f_1^{*} = ma_1,\ f_2^{*} = Ma_1$

$$\begin{cases} N_1 = mg\cos\theta - ma_1\sin\theta \\ N_1\sin\theta = Ma_1 \end{cases}$$

M对地:

$$a_1 = \frac{mg\sin\theta\cdot\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}$$

m对M:

$$a_2 = \frac{(M+m)\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}\cdot g$$

m对地:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \cdots$$

§2-5 力的时间累积效应、动量定理、动量守恒定律

牛顿第二定律：力的瞬时效应。 $\vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$

1. 动量定理:

微分形式: $\vec{F}\,dt = d\vec{P}$

积分形式: $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt = \int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} d\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \Delta\vec{P}$ **质点所受力的冲量等于动量的增量。**

冲量: $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$ **动量定理只适用于惯性系。**

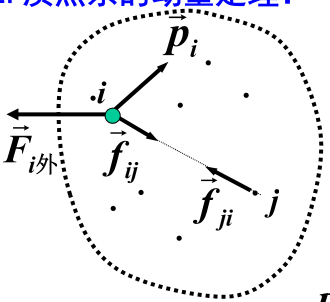
碰撞和打击问题中求平均力: $\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(t)dt = \overline{\vec{F}}\,\Delta t = \Delta\vec{P}$

动量定理可写成分量式:

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x(t)dt = mv_{2x} - mv_{1x},\quad I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y(t)dt = mv_{2y} - mv_{1y}$$

$$I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z(t)dt = mv_{2z} - mv_{1z}$$

2. 质点系的动量定理：



$$\vec{F}_i = \vec{f}_{i内} + \vec{F}_{i外} = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

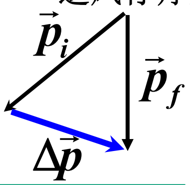
$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{f}_{i内} + \vec{F}_{i外})\ dt = \sum_{i=1}^{N} d\vec{p}_i$$

$$\vec{F}dt = d\vec{p} \qquad 其中：\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i外} \qquad \vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

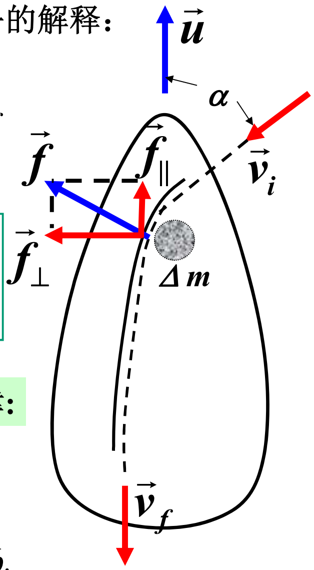
$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

质点系所受外力的总冲量等于质点系总动量的增量。

逆风行舟的解释：



气体所受力的方向与其动量增量同向



牛顿第三定律：

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{f}_{i内} = 0$$

3. 动量守恒定律

$$当\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i外} = 0\,时 \qquad \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i = 恒矢量$$

当质点系所受合外力为零时，系统的总动量保持不变。

注意：

a）动量守恒定律只适用于惯性系，对于高速、微观同样适用。

b）系统在某一方向所受合外力为零，系统在该方向动量守恒（总动量不一定守恒）。

c）系统所受内力很大，外力可以忽略不计时，动量守恒定律近似成立。如碰撞和打击问题中，忽略较小的外力。

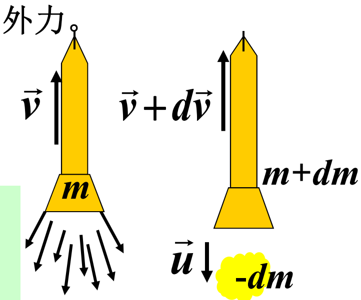
4. 变质量问题——火箭飞行原理

由动量定理得：$\vec{F}dt = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \Delta\vec{P}$

$$\vec{P}_1 = m\vec{v}$$

$$\vec{P}_2 = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + (-dm)[\vec{u} + (\vec{v} + d\vec{v})]$$

$\vec{u}$：气体相对于火箭的速度。



$$\vec{F}dt = md\vec{v} - \vec{u}dm \quad \Rightarrow \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u}\frac{dm}{dt}$$

忽略空气阻力及重力，直线运动，坐标轴向上：

$$md\vec{v} - \vec{u}dm = 0 \quad \Rightarrow mdv - udm = 0$$

气体相对于火箭向下喷射，u 应为负值。

$$dv = u\frac{dm}{m} \qquad \Rightarrow \int_{v_0}^{v_f} dv = u\int_{m_0}^{m_f}\frac{dm}{m}$$

火箭最终速率：$v_f = v_0 + u\ln\frac{m_f}{m_0} = v_0 - u\ln\frac{m_0}{m_f}$

计算火箭推力，喷出气体动量改变：

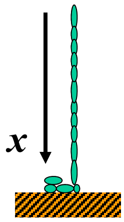
$dp = (-dm)(v + dv + u) - (-dm)v \approx -udm$（略去二阶小量）

气体受力：$F = \frac{dp}{dt} = -u\frac{dm}{dt}$

火箭所受推力：$F_{推} = u\frac{dm}{dt}$

此方法也可用于向运动物体中添加质量的问题。

例1. 一质量均匀分布的柔软细绳铅直地悬挂着，绳的下端刚好触到水平桌面上，如果把绳的上端放开，绳将落在桌面上。试证明：在绳下落的过程中，任意时刻作用于桌面的压力，等于已落到桌面上的绳重量的三倍。



解：设绳的质量线密度为 λ， x为已落下绳子的长度

解法一：分析桌面对长度dx的一段绳子的受力

桌面对柔绳的冲力为：

$$F' = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = -\frac{\lambda \mathrm{d}x \cdot v}{\mathrm{d}t} = -\lambda v^2$$

柔绳对桌面的冲力 $F = -F'$ ：

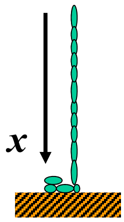
$$F = \lambda v^2, \quad 而 v^2 = 2gx, \quad \therefore F = 2\lambda gx$$

而已落到桌面上的柔绳的重量为：$mg = \lambda gx$

$$F_{总} = F + mg = 2\lambda gx + \lambda gx = 3\lambda gx$$

例1. 一质量均匀分布的柔软细绳铅直地悬挂着，绳的下端刚好触到水平桌面上，如果把绳的上端放开，绳将落在桌面上。试证明：在绳下落的过程中，任意时刻作用于桌面的压力，等于已落到桌面上的绳重量的三倍。

解：



解法二：将整根绳子作为研究对象，设绳子全长为 L

绳子已下落的长度为 x，全部绳子的总动量为：

$$p=(L-x)\lambda v$$

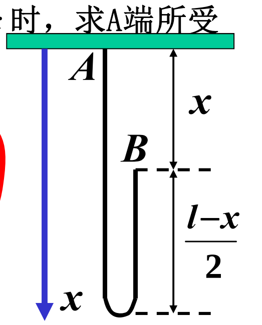
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=L\lambda g-F_{总}$$ $F_{总}$为桌面对绳子向上的总作用力

由于：$\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=L\lambda\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-\lambda v\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\lambda x\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 且 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g$

$F_{总}=\lambda v^2+\lambda gx$ 考虑：$v^2=2gx$

$$\therefore F_{总}=2\lambda gx+\lambda gx=3\lambda gx$$

例2. 柔软细绳长 l、线密度 λ。起初两端固定在顶板上，某一时刻释放B端，使其自由下落。当B端下落长度 x 时，求A端所受的力T。 （应用动量定理）



解法1：将绳看成一个整体：$mg-T=\dfrac{dp}{dt}$

$mg=l\lambda g$ $\quad p=(\dfrac{l-x}{2}\lambda)\sqrt{2gx}$

代入

$$dp=(-\frac{\lambda}{2}\sqrt{2gx}+\frac{l-x}{2}\lambda\frac{g}{\sqrt{2gx}})dx$$

考虑：$dx/dt=\sqrt{2gx}$ 解出：$T=\dfrac{x+l}{2}\lambda g+x\lambda g$

左边绳子的重力

右边绳子对左边绳子的作用力

解法2：计算右边绳子对左边绳子的作用力

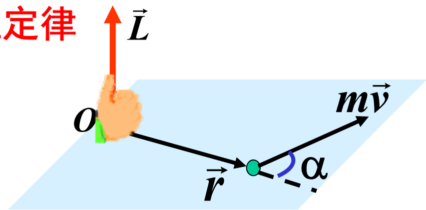
左边绳子对右边绳子的作用力：$F=\dfrac{dp}{dt}=\dfrac{0-(\lambda dx)v}{dt}\cancel{=-\lambda v^2}$

$$F=\frac{dp}{dt}=\frac{0-\lambda(dx/2)v}{dt}=-\frac{\lambda v^2}{2}=-\lambda gx$$

$v^2=2gx$

右边绳子对左边绳子的作用力：$F'=-F=\lambda gx$

§2-6 角动量定理、角动量守恒定律



1. 角动量矢量（动量矩）

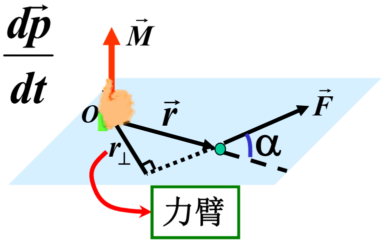
$$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=\vec{r}\times\vec{p}$$

$$|\vec{L}|=rmv\sin\alpha$$

方向：垂直于$\vec{r}$，$\vec{p}$ 共同决定的平面.

注意：同一运动质点对不同定点的角动量是不同的。

2. 角动量定理



$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$=\vec{v}\times m\vec{v}+\vec{r}\times\vec{F}$$

$$\because\ \vec{v}\times m\vec{v}=0$$

$$\therefore\ \frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}$$

定义力矩：$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$　$|\vec{M}|=rF\sin\alpha$

角动量定理：质点所受力矩等于它相对于同一固定点的角动量对时间的变化率。

$$\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}\qquad \vec{M}dt=d\vec{L}$$

积分形式：$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}dt=\vec{L}_2-\vec{L}_1$

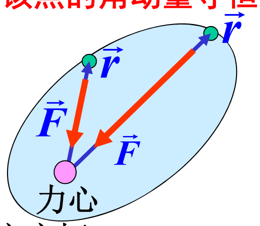
（冲量矩）

某一方向力矩的时间积分等于该方向的角动量增量。

3. 角动量守恒定律：若$\vec{M}=0$, $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}=$恒矢量

质点所受力对某固定点的力矩为零时，质点对该点的角动量守恒。

某一方向力矩为零，则该方向的角动量守恒。



a）有心力：质点对力心的角动量守恒。

有心力：

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=0$$

b）质点对某点的角动量守恒，对另一点不一定守恒。

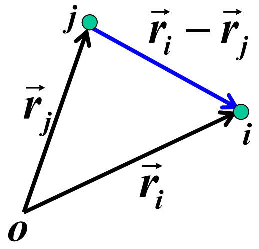
c）角动量守恒，不见得动量守恒。

d）只适用于惯性系，宏观、微观、低速、高速都适用。

4. 质点系的角动量定理和角动量守恒定律：

$$\sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt}=\sum_i \vec{M}_i=\sum_i \vec{r}_i\times(\vec{F}_i+\sum_{i\neq j}\vec{f}_{ij})$$

$$=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{F}_i+\sum_i \vec{r}_i\times(\sum_{i\neq j}\vec{f}_{ij})$$



内力成对出现，内力矩：

$$\vec{r}_i\times\vec{f}_{ij}+\vec{r}_j\times\vec{f}_{ji}=(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\times\vec{f}_{ij}=0$$

$$\therefore \sum_i \vec{r}_i\times(\sum_{i\neq j}\vec{f}_{ij})=0 \qquad \vec{M}=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{F}_i=\frac{d}{dt}(\sum_i \vec{L}_i)=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

质点系的角动量定理：外力的合力矩等于总角动量的时间变化率。

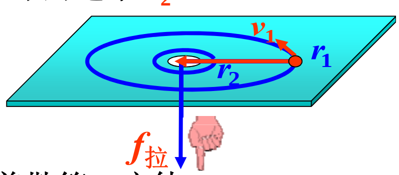
质点系的角动量守恒定律：

外力矩为零时，质点系总角动量守恒。某一方向外力矩为零时，则该方向的角动量守恒。

例3. 在光滑的水平桌面上有一小孔，一细绳穿过小孔，其一端系一小球放在桌面上，另一端用手拉绳，开始时小球绕孔运动，半径为 r_1，速率为 v_1，当半径变为 r_2 时，求小球的速率 v_2

解：因 $f_{拉}$ 为有心力 $\therefore \vec{L}_2=\vec{L}_1$

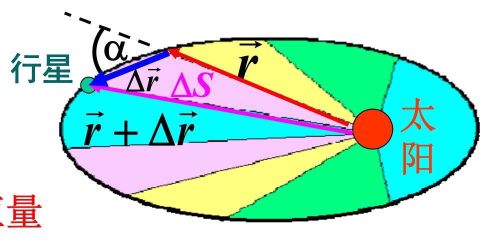
$$r_1 m v_1=r_2 m v_2 \qquad v_2=\frac{r_1}{r_2}v_1$$



例4. 用角动量守恒定律推导行星运动开普勒第二定律：

“行星对太阳的位置矢量在相等的时间内扫过相等的面积”

解：设在时间 Δt 内，行星的矢径扫过扇形面积 ΔS



$$\Delta S=\frac{1}{2}r|\Delta\vec{r}|\sin\alpha=\frac{1}{2}|\vec{r}\times\Delta\vec{r}|$$

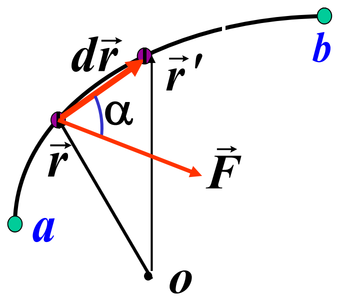
$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}| \quad =\text{恒量}$$

行星对于力心太阳的角动量守恒：

$$\therefore \vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=\text{恒矢量}$$

角动量方向不变：行星平面运动

§2-7 功：力的空间累积效应



定义：力对质点所作的元功为：

$$dA=\vec{F}\cdot d\vec{r}=F\,|d\vec{r}|\cos\alpha$$

功的单位：焦耳，$J=N\cdot m$

$$A_{ab}=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^b F\,|d\vec{r}|\cos\alpha$$

$$=\int_a^b F\cos\alpha\, ds$$

$$A_{ab}=\int_a^b (F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k})\cdot(dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k})$$

$$=\int_a^b (F_x dx+F_y dy+F_z dz)$$

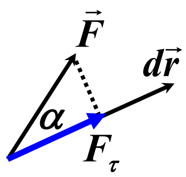
$$A_{ab}=\int_a^b (\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots\vec{F}_N)\cdot d\vec{r}=\int_a^b \vec{F}_1\cdot d\vec{r}+\int_a^b \vec{F}_2\cdot d\vec{r}\ldots+\int_a^b \vec{F}_N\cdot d\vec{r}$$

注意：1、合力的功为各分力的功的代数和；2、功是标量，但有正负；3、一般来说：功是过程量，与路径有关（但有例外）；4、功的计算与参考系相关，因为位移与参考系相关。

功率：力在单位时间内所作的功。

$$P=\frac{dA}{dt}$$ 功率的单位：瓦特，W 或 J/s

$$\because\ dA=\vec{F}\cdot d\vec{r},\quad \therefore\ P=\frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}$$



§2-8 动能定理

$$A_{ab}=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^b F\cos\alpha\,|d\vec{r}|=\int_a^b F_\tau\,|d\vec{r}|$$

$$\because |\vec{v}|=v=\frac{|d\vec{r}|}{dt}$$

$d\vec{r},\ \vec{v},\ \vec{\tau}$：三者相同方向

$$\therefore A_{ab}=m\int_a^b a_\tau\,|d\vec{r}|=m\int_a^b {dv}/{dt}\cdot v\,dt=m\int_{v_a}^{v_b} v\,dv=\frac{1}{2}mv_b^2-\frac{1}{2}mv_a^2$$

定义动能（**kinetic energy**）：$E_k=\frac{1}{2}mv^2$ （单位：焦耳，J）

即：$A_{ab}=E_{kb}-E_{ka}=\Delta E_k$　　动能定理只适用于惯性系

动能定理：合外力对质点所做的功等于质点动能的增量。

力的空间累积改变动能

§2-9 保守力 势能

保守力：所做功只与质点的始末位置有关，而与路径无关。

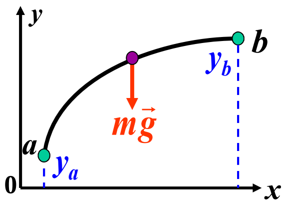
非保守力（耗散力），如摩擦力所作的功：

$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int_a^b F ds=-F\Delta S_{ab}$$（与作功路径相关）

1. 重力的功和重力势能

$$dA=m\vec{g}\cdot d\vec{r}=-mg\vec{j}\cdot(dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k})$$

$$A_{ab}=\int_{y_a}^{y_b}-mgdy=-mg(y_b-y_a)$$



定义：保守力所作的功等于势能增量的负值。

$$A_{ab}=-(E_{Pb}-E_{Pa})=-\Delta E_P$$

势能：potential energy

若只有重力作功：$A_{ab}=-\Delta E_P=\Delta E_K$ 动能与势能互相转化

若令 $E_{Pb}=0$： $A_{ab}=E_{pa}$

$$E_{Pa}=\int_a^{E_p=0}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

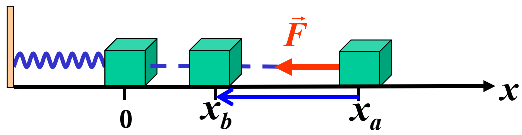
势能差是绝对的，计算势能必须规定零势能点

若重力势能以 $y=0$ 为零势能点：

$$E_{Pa}=\int_{y_a}^{0}-mgdy=mgy_a$$

1）势能为相互作用的物体共同拥有；2）只有保守力，才可引入相应的势能；3）势能是位置的函数。

2. 弹性力的功和弹性势能



$$A=\int_{x_a}^{x_b}-kx\vec{i}\cdot(dx\vec{i})$$

$$=-(\frac{1}{2}kx_b^2-\frac{1}{2}kx_a^2)=-\Delta E_P=-(E_{Pb}-E_{Pa})$$

定义：弹性力的功等于弹性势能增量的负值。

若以弹簧原长为零势能点：

$$A=E_{Pa}=\int_{x_a}^{0}-kxdx=-(0-\frac{1}{2}kx_a^2)=\frac{1}{2}kx_a^2$$

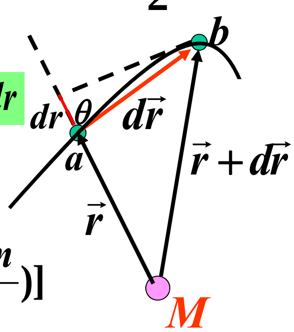
3. 万有引力的功和万有引力势能

$$\vec{F}=-G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{r}\cdot d\vec{r}=r|d\vec{r}|\cos\theta=rdr$$

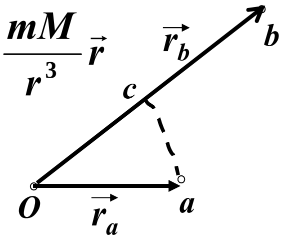
$$A_{ab}=\int_a^b\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int_a^b G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}\cdot d\vec{r}$$

$$=-\int_a^b G\frac{Mm}{r^2}dr=-[(-\frac{GMm}{r_b})-(-\frac{GMm}{r_a})]$$



另一种路径：

$$\vec{f} = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r}$$



$$A_{a\to b} = A_{a\to c} + A_{c\to b} = A_{c\to b}$$

$$A_{a\to b} = A_{c\to b} = \int_c^b \vec{f}\cdot d\vec{r} = -GmM\int_{r_c}^{r_b}\frac{dr}{r^2}$$

$$= -[(-\frac{GmM}{r_b}) - (-\frac{GmM}{r_a})]$$

定义：万有引力的功等于引力势能增量的负值

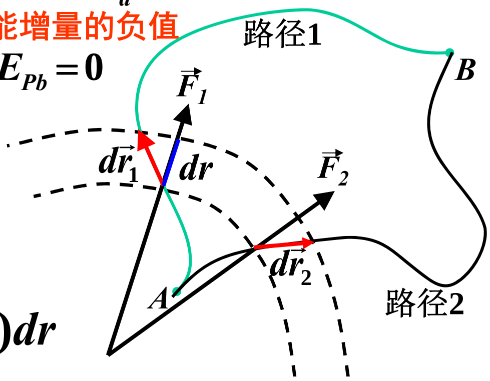
选无限远点势能为零：$r_b \to \infty,\quad E_{Pb} = 0$

$$E_{Pa} = -G\frac{mM}{r_a}$$

有心力均为保守力：

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$$

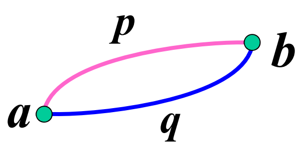
$$\vec{F}_1\cdot d\vec{r}_1 = \vec{F}_2\cdot d\vec{r}_2 = f(r)dr$$



保守力沿闭合路径的积分为零（功为零）：

$$\int_{apb}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{aqb}\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{bqa}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\int_{apb}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{bqa}\vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \oint_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

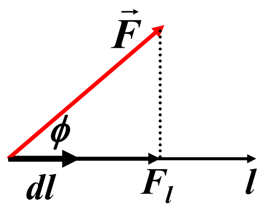


保守力的环流为零！

4. 势能和保守力的关系

$$-\Delta E_P = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$-dE_P = \vec{F}\cdot d\vec{l} = F\cos\phi\, dl = F_l dl$$



$$\therefore F_l = -\frac{dE_P}{dl}$$

保守力沿某一给定的l方向的分量等于与此保守力相应的势能函数沿l方向的空间变化率的负值。

一般地： $F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x}$ $\quad F_y = -\frac{\partial E_P}{\partial y}$ $\quad F_z = -\frac{\partial E_P}{\partial z}$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k}\right)$$

§2-10 功能原理 机械能守恒定律

质点的动能定理： $\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$

质点系的动能定理： $A_{外} + A_{内} = E_{kb} - E_{ka} = \Delta E_k$

或： $A_{外} + A_{保内} + A_{非保内} = E_{kb} - E_{ka}$

各外力与各内力对质点系所作的总功等于质点系动能的增量。

$$A_{保内} = -(E_{pb} - E_{pa})$$

$$A_{外} + A_{非保内} = (E_{pb} - E_{pa}) + (E_{kb} - E_{ka})$$

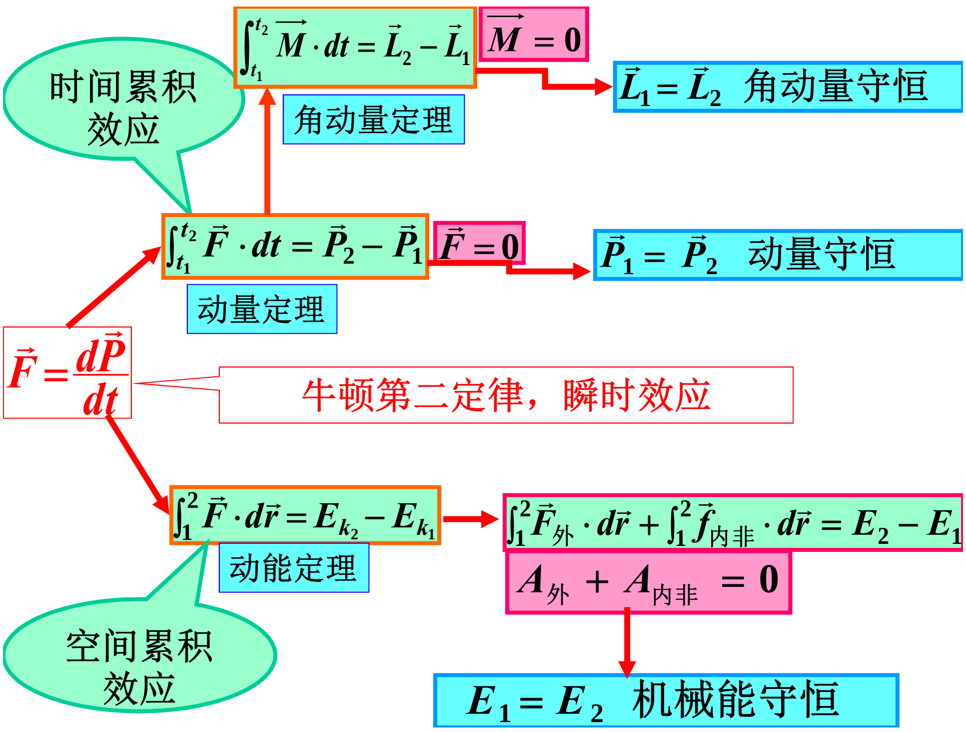
功能原理： $A_{外} + A_{非保内} = E_b - E_a = \Delta E$

机械能守恒定律：

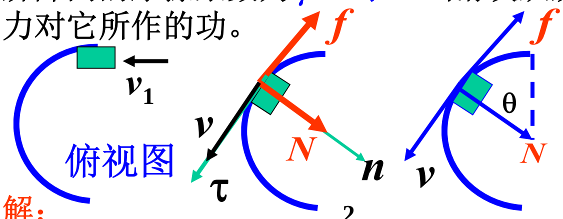
若 $A_{外} + A_{非保内} = 0$：

$$\Delta E = 0 \qquad E_b = E_a = 恒量$$

只有保守内力作功时，系统的总机械能保持不变。



例1. 在光滑的水平桌面上，固定着如图所示的半圆形屏障，质量为 m 的滑块以初速 v_1 沿屏障一端的切线方向进入屏障内，滑块与屏障间的摩擦系数为 μ。求：当滑块从屏障另一端滑出时，摩擦力对它所作的功。



解：

法向：$N = ma_n = m\dfrac{v^2}{R}$

切向：$-f = ma_\tau = m\dfrac{dv}{dt} = -\mu N$

$$-\mu \cdot m\frac{v^2}{R} = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\mu\frac{v^2}{R}$$

$$-\mu\frac{v^2}{R} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}\frac{dv}{d\theta}$$

$$\frac{dv}{d\theta} = -\mu v$$

$$\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v} = -\int_0^{\pi}\mu d\theta$$

$$\ln\frac{v_2}{v_1} = -\mu\pi$$

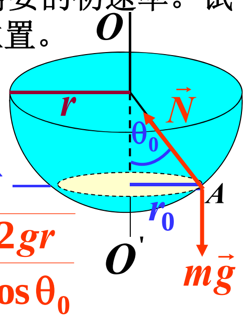
$$v_2 = v_1 e^{-\mu\pi}$$

只有摩擦力作功：

$$A = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$= \frac{1}{2}mv_1^2(e^{-2\mu\pi} - 1)$$

例2. 将一个质点沿半径为 r 的光滑半球形碗的A点内表面水平地投射，碗保持静止。设 v_0 是质点恰好能达到碗口所需要的初速率。试求 v_0 作为 θ_0 的函数。θ_0 是用角度表示的质点的初位置。



解： 小球受力：$m\vec{g}$, $\vec{N}$ OO'方向角动量守恒

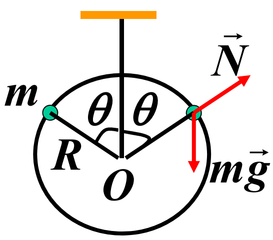
$$mv_0 r_0 = mvr \cdots(1)$$

$$r_0 = r\sin\theta_0 \cdots(2)$$

因全过程中仅重力作功，机械能守恒：

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgr\cos\theta_0 \cdots(3) \quad v_0 = \sqrt{\frac{2gr}{\cos\theta_0}}$$

例3. 一质量为M的光滑圆环，半径为R，用细线悬挂。环上串有质量均为m的两个珠子，从环顶同时由静止向两边下滑，求环开始上升的条件（用θ表示）。



解：机械能守恒：$\dfrac{1}{2}mv^2 = mgR(1-\cos\theta)$

m的速度增大，N将反向：$m\dfrac{v^2}{R} = mg\cos\theta + N$

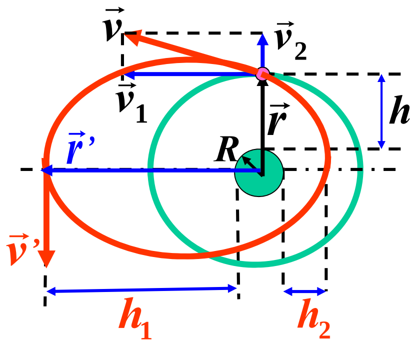
$2N\cos\theta = Mg$ $\quad (2-3\cos\theta)\cos\theta = \dfrac{M}{2m}$

例4. 地球可看作是半径 R= 6400 km 的球体，一颗人造地球卫星在地面上空 h=800km 的圆形轨道上，以v_1=7.5 km/s 的速度绕地球运动。突然点燃一火箭，其冲力使卫星附加一个 向外的径向分速度 v_2 =0.2 km/s使卫星的轨道变成椭圆形。求此后卫星轨道的最低点和最高点位于地面上空多高？ 解：对地心的角动量守恒：

$$\vec{r}\times m(\vec{v}_1+\vec{v}_2)=\vec{r}'\times m\vec{v}'$$

$$\vec{r}\times m\vec{v}_1+\vec{r}\times m\vec{v}_2=\vec{r}'\times m\vec{v}'$$

$$mv_1 r = mv' r' \cdots(1)$$



机械能守恒：

$$\frac{1}{2}m(v_1^2+v_2^2)-G\frac{Mm}{r}=\frac{1}{2}mv'^2-G\frac{Mm}{r'}\cdots\cdots(2)$$

对卫星原来的圆运动：$G\dfrac{Mm}{r^2}=m\dfrac{v_1^2}{r}\cdots\cdots(3)$

联立（1）（2）（3）式，消去 v', M, m

$$(v_1^2-v_2^2)r'^2-2v_1^2rr'+v_1^2r^2=0$$

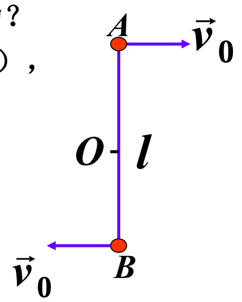
$$[(v_1+v_2)r'-v_1r][(v_1-v_2)r'-v_1r]=0$$

$$r_1'=\frac{v_1r}{v_1-v_2}=7397km \qquad r_2'=\frac{v_1r}{v_1+v_2}=7013km$$

远地点高度：$h_1=r_1'-R=997km$

近地点高度：$h_2=r_2'-R=613km$

例5. 滑冰运动员A、B的质量均为 m，以相同的速率 v_0 沿相反方向滑行，当彼此交错时，各抓住长 l 绳索的一端，相对旋转，当他们收拢绳索，使绳长变为 $l/2$ 时，二人各做多少功？



解：A（或B）相对O所受力矩为零（O为参考点），A（或B）对O的角动量守恒：

$$mvl/4=mv_0l/2 \quad\Rightarrow v=2v_0$$

根据动能定理，B对A所做的功（反之亦然）：

$$A=\frac{1}{2}m(v^2-v_0^2)=\frac{3}{2}mv_0^2$$