2022 ～ 2023 学年第一学期

《高等数学 A》（上）期中考试试卷 (闭卷，启明学院用)

院(系) 启明学院 专业班级__________ 学号__________ 姓名__________

考试日期: 2022-11-13　　　　考试时间: 2:30-5:00PM

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

得　分	
评卷人	

一. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. $\inf\{1-\frac{1}{2^r}: r \in Q^+\}$ = ____0____.

解析：$0<\frac{1}{2^r}<1$，集合下确界为 0 .

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+4\sqrt{n}}-\sqrt{n-2\sqrt{n}}\right)=$ ____3____.

解析： 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6\sqrt{n}}{\sqrt{n+4\sqrt{n}}+\sqrt{n-2\sqrt{n}}}=3$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$ = ____$\frac{1}{6}$____.

解析：已知 $\cos(\sin x)-\cos x=2\sin\left(\frac{\sin x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x-\sin x}{2}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{\sin x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x-\sin x}{2}\right)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{\sin x+x}{2}\right)\left(\frac{x-\sin x}{2}\right)}{x^4}$$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{(x^2-(\sin x)^2)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{2x-2\sin x\cos x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos x+\sin x\sin x}{12x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{12x^2}$

原式$=\frac{1}{6}$.

4. 设$y=f(e^x)e^{f(x)}$，其中$f(x)$是可导函数，

则 $dy=$ $e^{f(x)}\left(f'(e^x)e^x+f(e^x)f'(x)\right)dx$.

解析： $y'=f'(e^x)e^xe^{f(x)}+f(e^x)e^{f(x)}f'(x)$

$=e^{f(x)}(f'(e^x)e^x+f(e^x)f'(x))$

解答内容不得超过装订线

5. 设$y=y(x)$是由方程 $\sin(xy)=\ln\frac{x+e}{y}+1$ 确定的隐函数，则 $y'(0)=e-e^4$.

解析：原方程为$sin(xy)=ln(x+e)-ln(y)+1$，将等式两边求导得到：

$$cos(xy)\left(y+xy'\right)=\frac{1}{x+e}-\frac{y'}{y}.$$

取$x=0$ 时，可得 $0=\ln\frac{e}{y(0)}+1$，故$y(0)=e^2$.

将$x=0$ 和$y(0)=e^2$代入求导后的式子中，得到$y'(0)=e-e^4$.

得　分	
评卷人	

二. 选择题(每小题 4 分，共 12 分)

1. 当$n\to\infty$，如下数列发散的是____C____.

A. $\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\ldots+\sqrt[n]{10}$

B. $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$

C. $n^{(-1)^n}$

D. $\frac{(-1)^n}{n}$

解析：

选项 A 中累加项只有 10 项.

选项 B，已知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，用 Stolz 定理可以得到$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$.

选项 C，子列$\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ 发散.

选项 D， $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$.

2.下列说法错误的是 ____D____.

A. 若$\{a_n\}$是有界数列，$\{b_n\}$也是有界数列，则$\{a_nb_n\}$ 一定是有界数列.

B. 若$\{a_n\}$是有界数列，$\{b_n\}$ 趋于 0， 则$\{a_nb_n\}$ 一定是有界数列且趋于 0.

C. 若$\{a_n\}$是无界数列，$\{b_n\}$ 趋于无穷， 则$\{a_nb_n\}$ 一定是无界数列.

D. 若$\{a_n\}$是无界数列，$\{b_n\}$也是无界数列，则$\{a_nb_n\}$ 一定是无界数列.

解析：

选项 A，已知存在$M_1,M_2>0$，分别使得$\forall n\in\mathbb{N}$有$|a_n|<M_1,|b_n|<M_2$。显然$|a_nb_n|<M_1M_2$，$\{a_nb_n\}$ 一定是有界数列.

选项 B, 已知存在$M_1>0$，使得$\forall n\in\mathbb{N}$有$|a_n|<M_1$。对任意的$\varepsilon>0$，存在 N，使得 $n>N$ 时，有$|b_n|<\varepsilon$。显然有$|a_nb_n|<\varepsilon M_1$，有ε的任意性，可知$\{a_nb_n\}$趋于 0，显然有界.

选项 C， 由$\{b_n\}$ 趋于无穷可知，$\forall M>0$，存在N_1，当 $n>N_1$时有$|b_n|>M$. 因为$\{a_n\}_1^{N_1}$是有限项，故$\{a_n\}_1^{N_1}$有界，则$\{a_n\}_{N_1}^{\infty}$是无界的，存在$a_{N_2}\in\{a_n\}_{N_1}^{\infty}$使得，$|a_{N_2}|>M$。故$\left|a_{N_2}b_{N_2}\right|>M$，即$\{a_nb_n\}$ 是无界数列.

选项 D，反例： $\{a_n\}$= 1，$\frac{1}{2}$，3，$\frac{1}{4}$，5，......

$\{b_n\}$= 1，2，$\frac{1}{3}$，4，$\frac{1}{5}$，......

$\{a_n b_n\}$= 1, 1, 1, 1, 1, ...

3.当$x \to 0$时， $e^x \ln(1+x)-(ax^3+bx^2+cx)$ 是 x^3的等价无穷小，则____A____.

A. $a=-\frac{2}{3}, b=\frac{1}{2}, c=1$

B. $a=\frac{2}{3}, b=-\frac{1}{2}, c=1$

C. $a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{2}, c=1$

D. $a=-\frac{1}{3}, b=-\frac{1}{2}, c=1$

解析：泰勒展开

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^4)$

$e^x\ln(1+x)=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)$

故$\frac{1}{3}-a=1, b=\frac{1}{2}, c=1.$

解答内容不得超过装订线

得 分	
评卷人	

三. 计算题（每小题 7 分，共 28 分）

1. 设 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解： $\frac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2}}<a_n<\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}}$

由迫敛性得到$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$.

2. 求无穷小量 $a^{x^2}-b^{x^2}\ (x\to 0)$ 的阶，其中 $a>0, b>0$.

解：$a^{x^2}-b^{x^2}=b^{x^2}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{x^2}-1\right]\sim\left(\frac{a}{b}\right)^{x^2}-1\sim x^2\ln\frac{a}{b}\ (x\to 0,\ a,b>0)$

故为 2 阶.

3.设 $f(x)=x^{a^a}+a^{x^a}\ (x>0,a>0)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}(x^3)}$.

解：$\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}(x^3)}=\dfrac{x^{a^a}\mathrm{d}(a^a\ln x)+a^{x^a}\mathrm{d}(x^a\ln a)}{3x^2\mathrm{d}x}=\dfrac{x^{a^a-1}a^a\mathrm{d}x+a^{x^a}x^{a-1}a\ln a\mathrm{d}x}{3x^2\mathrm{d}x}=\dfrac{x^{a^a-3}a^a+a^{x^a}x^{a-3}a\ln a}{3}$.

4.设 $f(x)=(x^2+x)\cos(2x)$, 求 $f^{(2022)}(0)$.

解：由 Leibniz 公式，

$$f^{(2022)}(x)=\sum_{k=0}^{2022}C_{2022}^k(x^2+x)^{(k)}[\cos(2x)]^{(2022-k)}$$

$$f^{(2022)}(x)=(x^2+x)2^{2022}\cos(2x+1011\pi)+2022(2x+1)2^{2021}\cos(2x+\frac{2021\pi}{2})+2^{2020}2022\cdot2021\cos(2x+1010\pi)$$

$\therefore f^{(2022)}(0)=2^{2020}2022\cdot2021.$

四. 解答题（每小题 8 分, 共 16 分）

得　分	
评卷人	

1．在区间 $(0,1)$ 上的函数 $x\sin\frac{1}{x}$ 是否一致连续，请提出你的论断并给予证明.

解：$\mathrm{x}\sin\frac{1}{\mathrm{x}}$ 在 $(0,1)$ 是一致连续的。

已知 $\lim\limits_{\mathrm{x}\to0}\mathrm{x}\sin\frac{1}{\mathrm{x}}=0$ 且 $\lim\limits_{\mathrm{x}\to1}\mathrm{x}\sin\frac{1}{\mathrm{x}}=\sin 1$。

设 $\mathrm{F(x)}=\begin{cases}0\,,\mathrm{x}=0\\ \sin1\ ,\mathrm{x}=1\\ \mathrm{x}\sin\frac{1}{\mathrm{x}}\,,\mathrm{x}\in(0,1)\end{cases}$，显然 F(x)在[0,1]上连续，则 F(x)在[0,1]上一致连续。

故 $\mathrm{x}\sin\frac{1}{\mathrm{x}}$ 在 $(0,1)$ 是一致连续的。

2．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq0\\ 0, \qquad x=0\end{cases}$, 求 $f'(x)$ 并讨论 $f'(x)$ 在 0 点的连续性.

解：$x\neq0$ 时, $f'(x)=\dfrac{1}{2}+2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$, $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x}{2}+x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\dfrac{1}{2}$,

而 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{2}+2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x})$ 不存在，所以 $f'(x)$ 在 0 点不连续.

五. 证明题（每小题 8 分，共 24 分）

得　分	
评卷人	

1. 已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $f(a)f(b)>0, f(a)f(\frac{a+b}{2})<0,$ 证明: 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, $s.t\, f'(\xi)=f(\xi)$.

证明：由 $f(a)f(b)>0, f(a)f(\frac{a+b}{2})<0,$ 不妨令 $f(a)>0,$ 则 $f(\frac{a+b}{2})<0, f(b)>0,$ 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $[a,\frac{a+b}{2}]$ 与 $[\frac{a+b}{2},b]$ 上分别用零点定理知分别存在 $\xi_1\in(a,\frac{a+b}{2}),\xi_2\in(\frac{a+b}{2},b),$ 使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$ 再令 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x), F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $F(\xi_1)=F(\xi_2)=0,$ 由 Rolle 定理知：存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b), s.t\, F'(\xi)=0,$ 即 $f'(\xi)=f(\xi).$

解答内容不得超过装订线

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导，证明：$f'(x)$ 为区间 I 上的常值函数当且仅当 $f(x)$ 为 I 上的线性函数(即形如 $ax+b$ 的函数).

证明：　$\Rightarrow$: $f^{'}(x)=\mathrm{c}$ 为常数，则固定 x_0，有

$$\begin{aligned} f(x)&=f(x_0)+f^{'}(\xi)(x-x_0)\\ &=c(x-x_0)+f(x_0)\end{aligned}$$

为线性函数.

$\Leftarrow$: $f(x)=ax+b\Rightarrow f^{'}(x)=a$ 为常数.

3. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上任意阶可微，且对每个正整数 n 有 $f^{(n)}(x)\geq 0$ 和 $|f(x)|\leq M$ 在 (a,b) 上成立.

证明：对每个 $x\in(a,b)$，$r>0$，$x+r\in(a,b)$，成立关于导数的估计式 $f^{(n)}(x)\leq\dfrac{2Mn!}{r^n}$，$\forall n\in\mathbf{N}_+$.

证明： 由泰勒定理，有

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}+\mathrm{r})=\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}}\frac{\mathrm{f}^{(\mathrm{k})}(\mathrm{x})}{\mathrm{k}!}\mathrm{r}^{\mathrm{k}}+\frac{\mathrm{f}^{(\mathrm{n}+1)}(\mathrm{x}+\theta\mathrm{r})}{(\mathrm{n}+1)!}\mathrm{r}^{\mathrm{n}+1}\geq\mathrm{f}(\mathrm{x})+\frac{\mathrm{f}^{(\mathrm{n})}(\mathrm{x})}{\mathrm{n}!}\mathrm{r}^{\mathrm{n}}$$

故$\mathrm{f}^{(\mathrm{n})}(\mathrm{x})\leq\frac{\left(\mathrm{f}(\mathrm{x}+\mathrm{r})-\mathrm{f}(\mathrm{x})\right)\mathrm{n}!}{\mathrm{r}^{\mathrm{n}}}\leq\frac{2\mathrm{Mn}!}{\mathrm{r}^{\mathrm{n}}}$.