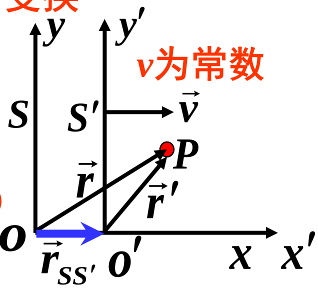
第5章　狭义相对论

狭义相对论：物理规律在所有惯性系中均等价。

§5-1 牛顿力学的相对性原理和伽利略变换

惯性系:



$\boxed{S:}\ \vec{r}(x,y,z,t)$　　$\boxed{S':}\ \vec{r}'(x',y',z',t')$

O, O'重合时, $t = t' = 0$

$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_{SS'} = \vec{r} - vt\,\vec{i}$ (伽利略变换)

坐标变换：　速度变换：　加速度变换：

$$x' = x - vt \qquad u'_x = u_x - v \qquad a'_x = a_x$$

$$y' = y \qquad u'_y = u_y \qquad a'_y = a_y$$

$$z' = z \qquad u'_z = u_z \qquad a'_z = a_z$$

$$t' = t$$

$$\vec{a}' = \vec{a}$$

牛顿力学的相对性原理：

$\boxed{S:}\ \vec{F} = m\vec{a}$

$\boxed{S':}\ \vec{F} = m\vec{a}' \quad \Rightarrow \vec{F}' = m'\vec{a}'$

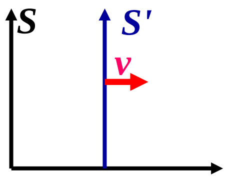
力与参考系无关，质量与运动无关，即质量与参考系无关。牛顿力学规律在伽利略变换下形式不变。牛顿定律在所有惯性系中均成立。

牛顿力学的绝对时空观：时间和空间都是绝对的。空间和时间是相互独立的，长度和时间的测量与参照系无关，空间和时间与物质的运动无关。

§5-2 狭义相对论的基本假设

麦克斯韦总结出麦克斯韦方程组，并预言光在真空中的传播速度：

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}} \approx 3\times 10^8\, m/s$$



问题：这个速度是相对于哪个参照系而言的？

$$c' = c - v \quad ?$$

伽利略变换正确，则电磁规律不符合力学相对性原理？
电磁学基本规律符合相对性原理，伽利略变换要抛弃？

1.爱因斯坦相对性原理

物理规律对所有惯性系都相同，不存在一个特殊的惯性参照系。

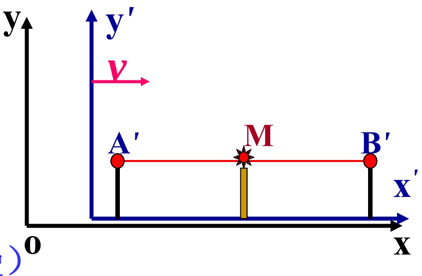
2.光速不变原理

在任何惯性系中光速相等。

迈克耳逊-莫雷实验证实了“光速不变”。

§5-3 由光速不变原理得出的相对论效应

1. 同时性的相对性

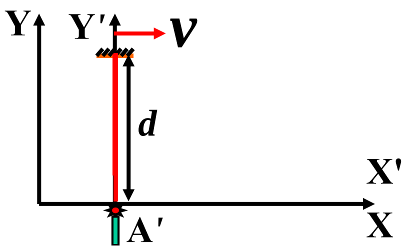


在 S' 系中观察：光到达A′和光到达B′这两事件同时发生。

在 S系中观察：光到达A′和光到达B′这两事件不同时发生！

2. 时间膨胀（运动的时钟变慢）

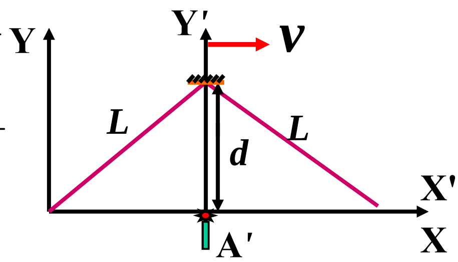
设S’系中, A’点有一闪光光源, 在Y’ 轴放一反射镜，同时A’点放置一光接受器。在A’点光脉冲的发射和光脉冲的接受可看作两个事件。



在S′ 系看，两事件时间间隔：

$$\Delta t' = \frac{2d}{c}$$

在S系看：



$$\Delta t = \frac{2L}{c} = \frac{2\sqrt{d^2 + \left(v\Delta t/2\right)^2}}{c}$$

$$\Delta t' = \frac{2d}{c}$$

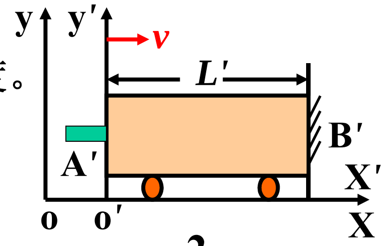
消去d，得：$\Delta t = \gamma \Delta t'$　　$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$　　$\beta = \dfrac{v}{c}$

同样的两个事件之间的时间间隔在不同参照系中看，是不同的。

在某一参照系中同一地点先后发生的两个事件之间的时间间隔（ $\Delta t'$ ）叫作**原时**，**原时**最短（时间膨胀效应）。

相对于参照系（观察者）静止的钟所显示的时间间隔为原时，动钟变慢效应。

3. 长度收缩（运动的尺变短）



测量正在以速度v 行驶的汽车长度。在A’处安装闪光灯和光接受器，在B’处安装反射镜。测量光的往返时间。

在S’ 系测，车的长度为：$L'=\dfrac{c\Delta t'}{2}$　$\Rightarrow \Delta t'=\dfrac{2}{c}L'$

在S系测，光往的时间间隔为 Δt_1，返的时间间隔为 Δt_2：

$$L+v\Delta t_1=c\Delta t_1 \qquad L-v\Delta t_2=c\Delta t_2$$

光脉冲往返的时间间隔：$\Delta t=\Delta t_1+\Delta t_2=\dfrac{2L}{c(1-\dfrac{v^2}{c^2})}$

$$\therefore \frac{\Delta t}{\Delta t'}=\frac{L}{L'(1-\dfrac{v^2}{c^2})}$$

根据前面结果：

$$\frac{\Delta t}{\Delta t'}=\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$\Delta t'$ 为原时

$$\therefore L=L'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{L'}{\gamma}$$

物体相对参照系静止时，测得物体的长度L'为原长。

在另一参照系看要短一些：$L<L'$

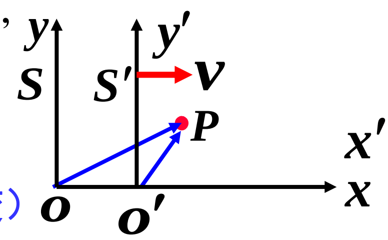
运动的尺度缩短效应。

§5-4 洛仑兹变换

1. 坐标变换：

设 S’ 系相对 S 系沿 x 轴以速度v 运动，

$t = t' = 0$ 时，两原点重合，o点发出闪光，经一段时间，光传到 P点。



在两参考系光行程：

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=c^2t^2 \\ x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2 \end{cases}$$

（光速不变）

设：$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}ct \\ ct'=a_{21}x+a_{22}ct \end{cases}$　$\begin{cases} z'=z \\ y'=y \end{cases}$

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}ct \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = a_{21}x + a_{22}ct \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = c^2t^2 \\ x'^2+y'^2+z'^2 = c^2t'^2 \end{cases}$$

设x、x'轴正向相同，t、t'轴正向相同

所以：$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0$

$$(a_{11}x + a_{12}ct)^2 + y^2 + z^2 = (a_{21}x + a_{22}ct)^2$$

$$(a_{11}^2 - a_{21}^2)x^2 + y^2 + z^2 + 2(a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22})ctx$$

$$= (a_{22}^2 - a_{12}^2)c^2t^2$$

比较系数得：

$$\begin{cases} a_{11}^2 - a_{21}^2 = 1 \\ a_{22}^2 - a_{12}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} = a_{21}a_{22} \end{cases} \Rightarrow (1+a_{21}^2)a_{12}^2 = a_{21}^2(1+a_{12}^2)$$

$$\Rightarrow a_{12}^2 = a_{21}^2 \quad \Rightarrow \underline{a_{12} = a_{21}}$$

$$\Rightarrow \underline{a_{11} = a_{22}}$$

$$0 = a_{11}vt + a_{12}ct$$

$\underline{x'=0\text{和}x=vt\text{是同一空间点}}$：$\Rightarrow \underline{a_{12}/a_{11} = -v/c}$

$$a_{11}^2 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 a_{11}^2 = 1 \quad \Rightarrow a_{11} = a_{22} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$a_{12} = a_{21} = -\frac{v}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

相对论因子

洛仑兹坐标变换：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ y' = y \qquad z' = z \\ t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{cases} \qquad \beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$$

从S'系$\rightarrow S$ 系的变换（洛仑兹坐标变换的逆变换）：

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \dfrac{v}{c^2}x'\right) \end{cases}$$

当 $v << c$ 时：$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$ $\longrightarrow \dfrac{dx'}{dt} = \dfrac{dx}{dt} - v$ ——伽利略变换

a）伽利略变换只是洛仑兹变换的低速近似。

b）相对论中时空测量不可分离。

c）*c*是一切实物运动速度的极限，任何物体相对另一物体的速度不等于或超过真空中的光速。

2. 洛仑兹速度变换

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\Big/\frac{dt'}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dt'}{dt} = \frac{u_y}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

同理：$u'_z = \dfrac{dz'}{dt'} = \dfrac{dz}{dt}\dfrac{dt}{dt'}$

洛仑兹速度变换

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \\ u'_y = \dfrac{u_y}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}\sqrt{1 - \left(v/c\right)^2} \\ u'_z = \dfrac{u_z}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}\sqrt{1 - \left(v/c\right)^2} \end{cases}$$

逆变换

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} \\ u_y = \dfrac{u'_y}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}\sqrt{1 - \left(v/c\right)^2} \\ u_z = \dfrac{u'_z}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}\sqrt{1 - \left(v/c\right)^2} \end{cases}$$

$a)$ 若 $v << c$： $\begin{cases} u'_x = u_x - v \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \end{cases}$ 伽利略速度变换

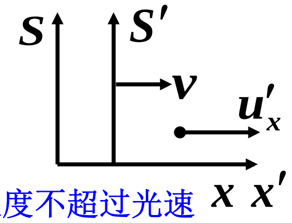
光速不变

$b)$ 若一束光沿 S 系的 x 轴传播 $u_x = c \quad u_y = 0 \quad u_z = 0$

在 S' 系看: $u'_x = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2} u_x} = \dfrac{c - v}{1 - \dfrac{v}{c}} = c \qquad u'_y = u_y = 0 \qquad u'_z = u_z = 0$

$u' = c$

例1. 设一飞船以0.80c 的速度在地球上空飞行，如果这时从飞船上沿速度方向发射一物体，物体相对飞船速度为0.90c 。问：从地面上看，物体速度多大？



解：飞船参考系：S' 　　地面参考系：S

$v = 0.80c \qquad u'_x = 0.90c$

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{v}{c^2} u'_x} = 0.99c$$

最大相对速度不超过光速

$u_y = u'_y = 0 \quad u_z = u'_z = 0$ 速度方向不变。

速度方向的变换关系：

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2} u_x} = \frac{u_x - v}{1 - \beta \dfrac{u_x}{c}} \qquad u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{v}{c^2} u_x\right)} = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \dfrac{u_x}{c}}$$

θ :S系中速度与 x 轴夹角， 　θ' :S'系中速度与 x' 轴夹角。

$$\tan\theta' = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{u_x - v} = \frac{u \sin\theta \sqrt{1 - \beta^2}}{u \cos\theta - v}$$

速度方向改变

对于光子：$u = c$

$$\tan\theta' = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{c \sin\theta \sqrt{1 - \beta^2}}{c \cos\theta - v} = \frac{\sin\theta \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos\theta - \beta}$$

速度方向改变

当 $\theta = 0$ ⟶ $\theta' = \theta = 0$ → 方向不变

当 $\theta \neq 0$ ⟶ $\theta' \neq \theta \neq 0$ → 方向改变

若速度不沿 x 轴方向，则两参照系中速度方向不同。

光速在S'系中的大小：

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1-\beta\frac{u_x}{c}} = \frac{c\cos\theta - v}{1-\beta\cos\theta} \qquad u_y' = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\frac{u_x}{c}} = \frac{c\sin\theta\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}$$

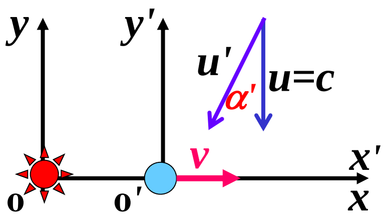
$$u' = \sqrt{u_x'^2 + u_y'^2} = c$$ 光速大小不变

例2. 在太阳系中观察一束星光垂直射向地球公转轨道平面，速率为c，而地球以速率v垂直光线运动，求地球上测量这束星光的速度大小方向？

解：设太阳系为S系，地球为S'系。

在S系看：$u_x=0$，$u_y=-c$，$u_z=0$

在S'系看星光的速度：



$$u_x' = \frac{u_x - v}{1-\frac{v}{c^2}u_x} = -v \qquad u_z' = 0$$

$$u_y' = \frac{u_y}{1-\frac{v}{c^2}u_x}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = -c\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$u' = \sqrt{u_x'^2 + u_y'^2} = c$$

$$\alpha' = \arctan\left(\frac{u_x'}{u_y'}\right) = 20.6''$$

光行差

§5-5 相对论效应

1. 时间效应

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

	S'	S
事件1：	(x_1', t_1')	(x_1, t_1)
事件2：	(x_2', t_2')	(x_2, t_2)

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)$$

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

*若S系中两事件同时, 同地发生：

$$\Delta t = 0, \Delta x = 0, \text{ 则}\Delta t' = 0, \Delta x' = 0$$

*若S系中两事件同时, 不同地发生：

$$\Delta t = 0,\ \Delta x \neq 0,$$

$$\Delta t' = -\gamma\frac{v}{c^2}\Delta x \neq 0$$ 同时性的相对性

$$\Delta x' = \gamma\Delta x$$ $\gamma > 1$ (距离改变)

(S'系中不同时，也不同地)

***若S系中两事件同地，不同时：**

若$x_2=x_1$, $t_2\neq t_1$

$$\Delta t'=t_2'-t_1'=\gamma(\Delta t-\frac{v}{c^2}\Delta x)=\gamma\Delta t \qquad \Delta t:\text{原时}$$

$$\Delta x'=\gamma(\Delta x-v\Delta t)=-\gamma v\Delta t$$

若$x'_2=x'_1$, $t'_2\neq t'_1$

$$\Delta t=\gamma(\Delta t'+\frac{v}{c^2}\Delta x')=\gamma\Delta t' \qquad \Delta t':\text{原时}$$

$$\Delta x=\gamma(\Delta x'+v\Delta t')=\gamma v\Delta t'$$

在某一参照系同一地点先后发生的两个事件之间的时间间隔：原时。

原时最短。运动时钟变慢，时间膨胀。

***不同地，不同时：** 若$x_2\neq x_1$, $t_2\neq t_1$

$$\Delta t'=\gamma(\Delta t-\frac{v}{c^2}\Delta x) \qquad \Delta x'=\gamma(\Delta x-v\Delta t)$$

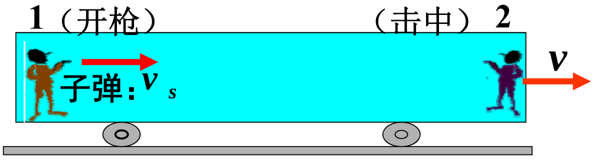
可能出现S′系中：a）不同时，不同地；b）同时，不同地；c）不同时，同地。 但不出现同时，同地。

$$\Delta t'=\gamma(\Delta t-\frac{v}{c^2}\Delta x)$$

若$\Delta t>0$ 对于不同的Δx：可能 $\Delta t'<0,\ \Delta t'=0,\ \Delta t'>0$

“因果律”在相对论中仍然遵守： （事件发生的先后可能改变）

1（开枪） （击中）2



从事件1（开枪） → 事件2（被击中），

x_1, t_1 x_2, t_2

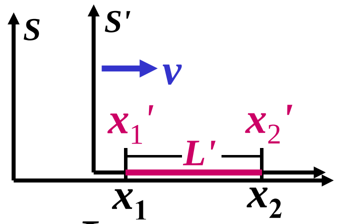
传递的时间：$\Delta t=t_2-t_1$ 传递的距离：$\Delta x=x_2-x_1$

传递速度：$v_s=\dfrac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ $\quad v<c,\ v_s<c$

$$\Delta t'=\gamma(\Delta t-\frac{v}{c^2}\Delta x)=\gamma\Delta t(1-\frac{v}{c^2}v_s)$$

$\Delta t>0$, 则 $\Delta t'>0$ （因果律仍遵守）

2. 空间效应——长度收缩



设长L'棒静止在S'系中

S'系测得：$L' = x_2' - x_1'$

S系测得：$t_2 = t_1 \quad L = x_2 - x_1$

$$L' = \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = \gamma\Delta x = \gamma L$$

$$L = L'\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

原长——最长

$y=y'$ $z=z'$ 垂直运动方向不受影响。

物体相对参照系静止时，测得物体的长度为原长。

例3. π介子静止平均寿命为2.5×10^{-8}s,以 v =0.99c 的速度相对实验室直线运动，求在实验室 π介子运动的距离？

解：π介子（S′ 系）　　　实验室（S系）

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{2.5\times10^{-8}}{\sqrt{1-0.99^2}} = 1.77\times10^{-7}\text{s}$$ 时间膨胀效应

$$l = v\Delta t = 52.6m$$

例4. π介子静止寿命为2.5×10^{-8}s,以 v =0.99c 的速度相对实验室直线运动，求在实验室 π介子运动的距离？

$$L = L_{原长}\sqrt{1-(v/c)^2}$$

解：π介子（S' 系）看：

实验室以速度v离它而去，远离的距离为：

$$L' = v\Delta t'$$

$$= 2.5\times10^{-8}\times0.99c = 7.4\ m$$

实验室（S系）看：

$$L' = L\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \qquad L = 52.6\ m$$

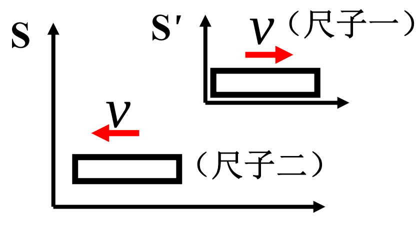
例5. 设有两根互相平行的尺，在各自静止的参考系中的长度为 L_0，它们以相同的速率 v相对于某一参考系运动，但方向相反，运动方向与尺平行，求站在一根尺上测量另一根尺的长度。

解：尺子二在S系中的速度：

$$u_x = -v$$

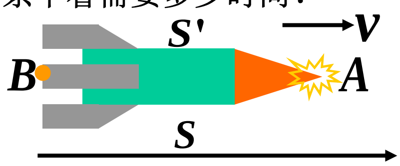
尺子二在S′ 系中的速度：

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-\frac{v}{c^2}u_x} = -\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$$



动尺长度：$L = L_0/\gamma = L_0\sqrt{1-(\frac{u'_x}{c})^2} = L_0[1-(\frac{v}{c})^2]/[1+(\frac{v}{c})^2]$

例6. 一静止长度为 l_0 的火箭以恒定速度v 相对S系运动，A端发出一光信号，当信号传到B端时，在S系中看需要多少时间？



解：在S' 系中：$\Delta t' = l_0 / c$

在S系中，长度收缩：

$$l = l_0\sqrt{1-(v/c)^2}$$

考虑到尾端的推进：

$$\Delta t = \frac{l - v\Delta t}{c} = \frac{l_0\sqrt{1-(v/c)^2} - v\Delta t}{c} \qquad \therefore \Delta t = \frac{\sqrt{c-v}}{\sqrt{c+v}}\cdot\frac{l_0}{c}$$

或者应用洛仑兹逆变换得到：

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x') \qquad \Delta t' = l_0/c,\quad \Delta x' = -l_0$$

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(\frac{c-v}{c^2})l_0 = \frac{\sqrt{c-v}}{\sqrt{c+v}}\cdot\frac{l_0}{c}$$ 结果相同

§5-6 狭义相对论动力学简介

要求： ✶基本物理规律在洛仑兹变换下形式不变；

✸低速时回到牛顿力学。

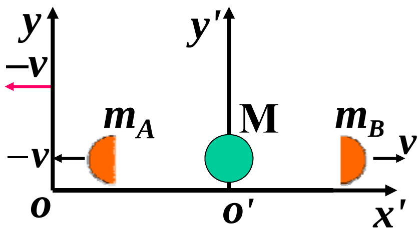
1. 相对论质量

按牛顿力学：$\vec{v} = \vec{v}_o + \int_{t_o}^{t}\vec{a}dt = \vec{v}_o + \vec{a}(t - t_o) = \vec{v}_o + \frac{\vec{F}}{m}(t - t_o)$

当 $t\to\infty$，$v\to\infty$，则：$v > c$。 ∴ m应与速度v 有关。

A）我们教材中的质量速度关系的推导：

设：S' 系的o' 处有一粒子分裂成两个完全相同的粒子：



S' 系看动量守恒：

$$u'_{Ax} = -v,\quad u'_{Bx} = v$$

设S系相对m_A静止：$u_{Ax} = 0$

在S系中m_B的速度：$u_{Bx} = \dfrac{u'_{Bx} + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_{Bx}} = \dfrac{2v}{1 + (\frac{v}{c})^2}$

在S系中观察：分裂前后动量守恒、能量守恒，并且假定能量守恒则质量也守恒。

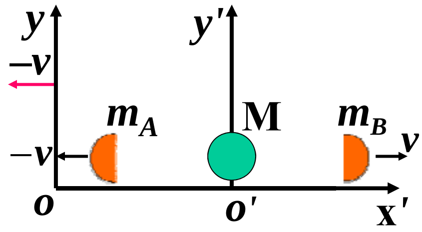
根据分离前后，S系中动量守恒：

$$\underbrace{(m_A+m_B)}_{\text{分裂后质量}}v=\underbrace{m_B u_{Bx}}_{\text{分裂后的动量}}=m_B\frac{2v}{1+\left(v/c\right)^2}$$

（若 $m_A=m_B$ 此式不成立）

$(m_A+m_B)v$ 是分裂前的动量

用分裂后的质量代替分裂前的质量，此处使用了分裂前后质量守恒



$$m_B=m_A\frac{1+\left(v/c\right)^2}{1-\left(v/c\right)^2}$$

代入

$$v=\frac{c^2}{u_{Bx}}\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{u_{Bx}}{c}\right)^2}\right]$$

$$u_{Bx}=\frac{2v}{1+(v/c)^2}$$

$$m_B=m_A\frac{1}{\sqrt{1-(u_{Bx}/c)^2}}$$ 质量-速度关系

$$m_B=m_A\frac{1}{\sqrt{1-(u_{Bx}/c)^2}}\xrightarrow[m_A=m_o]{m_B=m}m=m_o\frac{1}{\sqrt{1-\left(u/c\right)^2}}$$

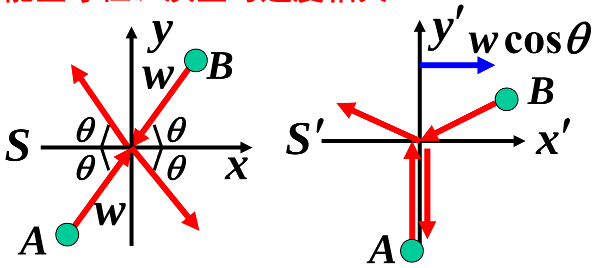
静止质量

这一方法的问题在于使用了分裂前后质量守恒，其根据是能量守恒，但由能量守恒得到质量守恒的依据却是质量－能量关系，而质能关系的获得却需要用到质速关系。也就是说，质速关系的导出，需要质速关系本身成立，这将导致逻辑上的循环论证缺陷。

B）由二维完全弹性碰撞过程来推导质量－速度关系：

需要用到动量守恒、能量守恒、质量与速度相关。

相同的两个粒子A、B以同样的速率w，相向运动。完全弹性碰撞后，由于动量守恒和能量守恒，它们相互远离的速率仍为w，且方向相反。

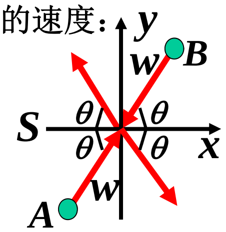


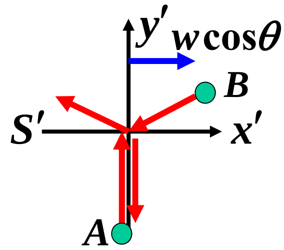
应用S’系中 y' 方向动量守恒　S'系相对S系的速率:$w\cos\theta$

S'系中两粒子y'方向碰撞前后的速度：

$$u'_{Ay}=\frac{u_{Ay}}{\gamma(1-\frac{w\cos\theta}{c^2}u_{Ax})}=\frac{\pm w\sin\theta}{\gamma[1-\frac{(w\cos\theta)^2}{c^2}]}$$

$$u'_{By}=\frac{u_{By}}{\gamma(1-\frac{w\cos\theta}{c^2}u_{Bx})}=\frac{\mp w\sin\theta}{\gamma[1+\frac{(w\cos\theta)^2}{c^2}]}$$





动量守恒：$|\Delta P'_A|=|\Delta P'_B|$

$$2m_A|u'_{Ay}|=2m_B|u'_{By}|$$

$$\frac{m_B}{m_A}=\left|\frac{u'_{Ay}}{u'_{By}}\right|=\frac{1+\frac{(w\cos\theta)^2}{c^2}}{1-\frac{(w\cos\theta)^2}{c^2}}$$

令$\theta\to 0$, θ:无穷小

$m_A\to m_0$, $m_B\to m_v$

B球只有水平速度

$$\frac{m_v}{m_0}=\frac{1+\frac{w^2}{c^2}}{1-\frac{w^2}{c^2}}$$

B球水平速度（其全部速度）：

$$u'_{Bx}=v=\frac{u_{Bx}-w\cos\theta}{1-\frac{w\cos\theta}{c^2}u_{Bx}}=\frac{-2w}{1+\frac{w^2}{c^2}}$$

$$w=\frac{c^2}{v}\left[-1+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right]$$

$$m_v=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\gamma m_0$$

m_0 → 静止质量

(1) $v\uparrow \rightarrow m\uparrow$

(2) $v \ll c$, 则 $m=m_0$(牛顿力学)

（3）限制虚质量的出现：

$v>c$　m为虚数 ——无意义

$v=c$　则必有 $m_0=0$ —— 光子

这种无限趋近于一维的二维完全弹性碰撞方法避免了对质量守恒的要求，从而克服了用两粒子分离的方法无法回避的循环论证的逻辑缺陷。

参考文献：（1） R. P. 费恩曼，郑永令等译. 费恩曼物理学讲义：第1卷. 上海科学技术出版社，2005. P173～176。（2）喻力华，“相对论质量速度关系的推导”，物理通报,2011年第6期，第10页。

2. 相对论动量

$$\vec{P}=m\vec{u}=\frac{m_o}{\sqrt{1-\left(u/c\right)^2}}\vec{u}$$

相对论动力学方程：

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\vec{u})=m\frac{d\vec{u}}{dt}+\vec{u}\frac{dm}{dt}$$

3. 相对论动能

动能定理仍然成立：$\Delta E_k=\int\vec{F}\cdot d\vec{r}$

若物体从静止状态，到速度增加到 v，则：

$$E_k=\int\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^v\frac{d(m\vec{v})}{dt}\cdot d\vec{r}=\int_0^v\vec{v}\cdot d(m\vec{v})$$

$$=\int_0^v(\vec{v}\cdot\vec{v}dm+m\,d\vec{v}\cdot\vec{v})=\int_0^v(v^2dm+mvdv)$$

$$\vec{v}\cdot d\vec{v}=\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}dt=\vec{a}\cdot\vec{v}dt=a_\tau vdt=\frac{dv}{dt}vdt=vdv$$

$$m=\frac{m_o}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}\Rightarrow m^2c^2-m^2v^2=m_o^2c^2$$

等式两边微分：

$$c^2dm=v^2dm+mvdv$$

$$E_k=\int_{m_0}^{m}c^2dm=mc^2-m_oc^2$$ 相对论动能

质量m与速度 v 相关，动能与速度相关。

a) $E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\frac{m_o}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}v^2\leftarrow$ 错误！

$$\boxed{m=m_o\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}}$$

$$E_k=mc^2-m_oc^2$$

若$v<<c$:

$$=m_oc^2[\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}-1]=\frac{1}{2}m_ov^2$$

$$\boxed{[1-(\frac{v}{c})^2]^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}(\frac{v}{c})^2+\cdots}$$

b) $E_k=\frac{m_oc^2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}-m_oc^2\rightarrow v^2=c^2\left[1-\frac{1}{(1+E_k/m_0c^2)^2}\right]$

外力F作功 v 增大，无论E_k增到多大，$v<c$！

4. 相对论能量　总能量：$E = mc^2 = E_k + m_0c^2$

$E_o = m_oc^2$ —— 静止能量

$\boxed{E = mc^2}$ ——相对论质能关系

能量与质量等价

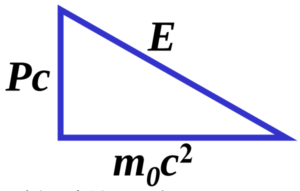
$\Delta E = \Delta mC^2$ → 质量和能量关联

任何能量的改变，同时有相对应的质量改变，而任何质量的改变也同时有相应的能量改变。即：两种改变是同时发生的。在任何过程中，质量守恒定律和能量守恒定律都是适用的。

5. 相对论的能量与动量的关系

从 $E=mc^2$, $P=mv$ 及 $m=\dfrac{m_o}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}$

可得：$E^2=P^2c^2+m_0^2c^4$

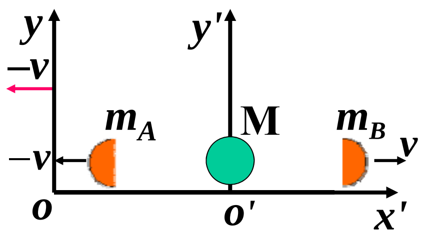


v、m、E、P 与参考系相关，但上式在所有惯性系均成立。

对光子：$E^2 = p^2c^2$

光的微粒性：$p = E/c$　$m = E/c^2 \Rightarrow p = mc$　光具有波粒二象性

6. 由质量守恒（能量守恒）得到的：



在S'系中观察：

分裂后的质量：$2m = \dfrac{2m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

设分裂前两个粒子具有势能：E'_p

能量守恒：$E = 2mc^2 = 2m_0c^2 + E'_p = \underbrace{(2m_0 + E'_p/c^2)}_{\text{分裂前的质量}}c^2$

在S系中观察：

分裂后的质量：　质量守恒：　分裂前的质量：

$$m_0 + \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{u_{Bx}^2}{c^2}}} = 2m_0\frac{c^2}{c^2-v^2} = \frac{2m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + E_p/c^2$$

可以得到：

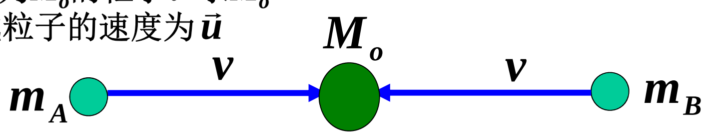
$$\frac{E'_p}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = E_p$$

利用了：$u_{Bx} = \dfrac{2v}{1+(v/c)^2}$

静止势能（对应的质量）与运动势能（对应的质量）之间满足质速关系。

例8. 在参照系S中，有两个静止质量都是m_0的粒子A、B，分别以速度 $\vec{v}_A=v\vec{i}$，$\vec{v}_B=-v\vec{i}$ 运动。相碰后合在一起，成为一个静止质量为M_0的粒子。求M_0？

解：设合成粒子的速度为$\vec{u}$



由动量守恒：$m_A\vec{v}_A+m_B\vec{v}_B=M\vec{u}$

$\because$ $m_A=m_B$, $v_A=v_B$ $\therefore$ $u=0$ 即合成粒子是静止的

由能量守恒：$M_0c^2=m_Ac^2+m_Bc^2$

$$M_o=m_A+m_B=\frac{2m_0}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}>2m_0$$

动能转换成静止质量

例9. 在一种核聚变反应中： ${}_1^2H+{}_1^3H\rightarrow{}_2^4He+{}_0^1n$

已知各原子核的静止质量：$m_D=3.3437\times10^{-27}$kg，

$m_T=5.00\times10^{-27}$kg，$m_{He}=6.64\times10^{-27}$kg，

$m_n=1.67\times10^{-27}$kg 。求这一反应释放的能量？

解：反应前后质量的改变为

$$\Delta m_o=\left(m_D+m_T\right)-\left(m_{He}+m_n\right)=0.0311\times10^{-27}\,kg$$

相应释放的能量：

$$\Delta E=\Delta m_0C^2=0.0311\times10^{-27}\times9\times10^{16}=2.799\times10^{-12}\,J$$

1kg这种核燃料所释放的能量为：

$$\frac{\Delta E}{m_D+m_T}=\frac{2.799\times10^{-12}}{8.3486\times10^{-27}}=3.35\times10^{14}\,J/kg$$