期末试题（1）参考答案

一、填空题（每小题 4 分，共 28 分）

1. $y=e^{-x}(C_1\cos\sqrt{7}x+C_2\sin\sqrt{7}x)$；　　2. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_1}{f_1+yf_2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{zf_2}{f_1+yf_2}$；

3. $2\sqrt{2}$；　　4. $S(\frac{\pi}{2})=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$，$S(\pi)=\mathrm{e}^{\pi}-\pi$；

5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r$；

6. $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ 或 $\begin{cases}x=0,\\ y=z.\end{cases}$；　　7. $u=xy+x^2z+y^2z+C$.

二、判断题(每小题 2 分，共 8 分). 请在正确说法相应的括号中画“√ ”，在错误说法的括号中画“×”.

8. ×；　9. √；　10. ×；　11. ×.

三、解答题（每小题 6 分，共 12 分）

12. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan(\sqrt{n^2+1}\,\pi)$ 的敛散性，是绝对收敛还是条件收敛?

解：$\tan(\sqrt{n^2+1}\,\pi)=\tan(\sqrt{n^2+1}\,\pi-n\pi)=\tan\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$.

而 $\left\{\tan\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right\}$ 是单调减且趋于 0 的数列，所以原级数收敛.

又　$\tan\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\sim\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\sim\frac{\pi}{2n}(n\to\infty)$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2n}$ 发散，所以

$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}\tan(\sqrt{n^2+1}\,\pi)|$ 发散，故原级数条件收敛.

13. 讨论含参变量积分 $I(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ 关于 x 在 $[\delta,+\infty)(\delta>0)$ 上的一致收敛性.

解：当 $x\in[\delta,+\infty)(\delta>0)$ 时，有 $\left|\frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2}\right|\le\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^2+y^2}\le\frac{\pi}{2}\frac{1}{\delta^2+y^2}$，

而 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\delta^2+y^2}\mathrm{d}y$ 收敛，所以，有由 M 判别法知 $I(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ 关于 x 在 $[\delta,+\infty)(\delta>0)$ 是一致收敛.

四、计算题（每小题 7 分，共 28 分）

14. 计算二重积分 $I=\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$， 其中 $D:|x|+|y|\le 1$.

解：设 D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $D_1: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x$.

由对称性及轮换性，得

$$I=\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\iint_{D_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=8\int_0^1 x^2dx\int_0^{1-x}\mathrm{d}y=8\int_0^1 x^2(1-x)dx=\frac{2}{3}.$$

15. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_S x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

解：补充 $S_1: z=0\,(x^2+y^2\le 1)$，取下侧. 则 S 与 S_1 围成下半单位球体 Ω.

由高斯公式，得

$$I=\iint\limits_S x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\oiint\limits_{S+S_1} x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{S_1} x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=-\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(-1)\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(r\sin\varphi)^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r+\pi\cdot 1^2\quad\text{(球坐标)}$$
$$=-\frac{4\pi}{15}+\pi=\frac{11\pi}{15}.$$

16. 设 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内有连续的导函数，曲线积分 $\int_L f^2(x)\sin y\mathrm{d}x+(f(x)-x)\cos y\mathrm{d}y$ 与路径无关，且 $f(0)=0$，求 $f(x)$ 及 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}f^2(x)\sin y\mathrm{d}x+(f(x)-x)\cos y\mathrm{d}y$.

解：由曲线积分 $\int_L f^2(x)\sin y\mathrm{d}x+(f(x)-x)\cos y\mathrm{d}y$ 与路径无关，得

$$\frac{\partial[(f(x)-x)\cos y]}{\partial x}=(f'(x)-1)\cos y=\frac{\partial[f^2(x)\sin y]}{\partial y}=f^2(x)\cos y,$$

得 $$f'(x)=1+f^2(x).$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{1+f^2(x)}=\mathrm{d}x,\quad \int\frac{df(x)}{1+f^2(x)}=\int dx,$$

$$\arctan f(x)=x+C,\quad \arctan f(x)=x+C,\quad f(x)=\tan(x+C).$$

由 $f(0)=0$，得 $C=0$， 所以 $f(x)=\tan x$， $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}f^2(x)\sin y\mathrm{d}x+(f(x)-x)\cos y\mathrm{d}y$$
$$=\int_{(0,0)}^{(1,1)}\tan^2 x\sin y\mathrm{d}x+(\tan x-x)\cos y\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1 0\mathrm{d}x+\int_0^1(\tan 1-1)\cos y\mathrm{d}y=(\tan 1-1)\sin 1.$$

17. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}x^{2n}$ 的收敛域与和函数.

解： 记 $u_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}x^{2n}$，则

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+3)}x^{2n+2}\Big/\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}x^{2n}\right|=x^2$$

当 $\rho=x^2<1$ 即 $|x|<1$ 时，原级数收敛；当 $\rho=x^2>1$ 即 $|x|>1$ 时，原级数发散，故收敛半 $R=1$.

又 $|x|=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}$ 收敛，所以收敛域为 $[-1,1]$.

设和函数为 $s(x)$，即 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}x^{2n}$， $x\in[-1,1]$.

当 $x=0$ 时， $s(0)=0$， 当 $x\neq 0$ 时，有

$$s(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}x^{2n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^{2n}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\ln(1+t^2)\mathrm{d}t=\ln(1+x^2)-2+\frac{2}{x}\arctan x.$$

故
$$s(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \ln(1+x^2)-2+\frac{2}{x}\arctan x, & x\in[-1,0)\cup(0,1].\end{cases}$$

五、证明题（每小题 6 分，共 24 分）

18. 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{e^x+n}$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

证：令 $u_n(x)=(-1)^{n-1}$， $v_n(x)=\frac{1}{e^x+n}$， 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的部分和 $U_n(x)$ 满足

$|U_n(x)|=|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)|=|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-1}|\le 1$，在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上一致有界.

又对任意固定的 $x\in(-\infty,+\infty)$， $v_n(x)$ 关于 n 单调减，且

$$v_n(x)=\frac{1}{e^x+n}\rightrightarrows 0\ \ (n\to\infty),$$

故由 Dirichlet 判别法知，原级数一致收敛.
注：用余项准则证明也可.

19. 证明：在 yOz 面上，由 $z=a$，$z=b$，$y=f(z)$（f 为连续的正值函数）以及 z 轴所围成的平面图形绕 z 轴旋转一周所成的立体对 z 轴的转动惯量（密度为 μ=1）为

$$I_z=\frac{\pi}{2}\int_a^b f^4(z)\mathrm{d}z.$$

证：曲线 $y=f(z)\ (a\le z\le b)$ 绕 z 旋转一周所成的曲面方程为 $x^2+y^2=f^2(z)$，题中的立体即为该曲面与平面 $z=a$，$z=b$ 所围的空间区域（旋转体），记为 Ω．其对 z 轴的转动惯量（密度为 μ=1）为 $I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

$\forall z\in[a,b]$，过点 $(0,0,z)$ 作平行于 xOy 面的平面，它在 Ω 内的截面为圆

$$D_z:\ x^2+y^2\le f^2(z),z\in[a,b].$$

采用先二后一法计算，可得

$$I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}r^2\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_a^b\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{f(z)}r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\int_a^b f^4(z)\mathrm{d}z.$$

20. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2-\{(0,0)\}$ 可微，在 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\partial f}{\partial x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\partial f}{\partial y}=0$．证明：

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处也可微.

证：令 $\varphi(t)=f(t\Delta x,t\Delta y),(\Delta x,\Delta y)\ne(0,0)$．由题设条件，$t\ne0$ 时，$\varphi(t)$ 可导．且

$\exists\xi\in(0,1)$，使得

$$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\xi)=\frac{\partial f(\xi\Delta x,\xi\Delta y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(\xi\Delta x,\xi\Delta y)}{\partial y}\Delta y.$$

再由条件得

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-0\Delta x-0\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0.$$

即 $$\Delta z=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=0\Delta x+0\Delta y+o(\rho),\ \rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to0.$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处也可微.

21. 设连续函数列$\{f_n(x,y)\}$在有界闭区域D上一致收敛于$f(x,y)$，证明:

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\iint_D f_n(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证：因$\{f_n(x,y)\}$在D上一致收敛于$f(x,y)$，故由定义，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=N(\varepsilon)>0$，当$n>N$时，对一切$(x,y)\in D$，有 $|f_n(x,y)-f(x,y)|<\varepsilon$.

于是

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D f_n(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\le\iint_D|f(x,y)-f_n(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le\varepsilon\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le\varepsilon S_D,$$

其中S_D为有界闭区域D的面积. 故

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\iint_D f_n(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$