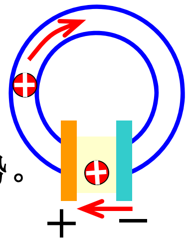
第8章　电磁感应

§8-1 电源电动势

- 电源、非静电力

静电力： 欲使正电荷从高电势运动到低电势。

非静电力： 欲使正电荷从低电势运动到高电势。

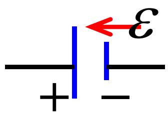


•提供非静电力的装置就是**电源**，实际上电源是把其他能量转换为电能的装置。

- 电动势：

$$\varepsilon=\frac{dA}{dq}$$

把单位正电荷从负极板经内电路搬至正极板，电源非静电力做的功。



单位：焦耳/库仑=（**伏特**）

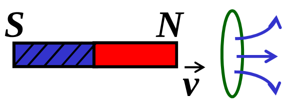
非静电力场强： $\vec{E}_k=\dfrac{\vec{F}_k}{q}$　　$\varepsilon=\dfrac{\int_-^+\vec{F}_k\cdot d\vec{l}}{q}=\int_{-（内电路）}^{+}\vec{E}_k\cdot d\vec{l}$

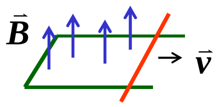
若外部存在非静电力： $\varepsilon=\oint_L\vec{E}_k\cdot d\vec{l}$

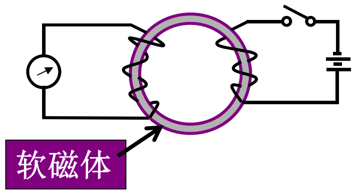
§8-2 电磁感应定律

1. 法拉第电磁感应定律

法拉第的实验：







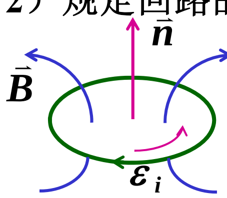
共同因素： 穿过导体回路的磁通量ϕ_M发生变化。

感应电动势： $\boxed{\varepsilon_i=-\dfrac{d\phi}{dt}}$　**（法拉第电磁感应定律）**

1）回路中：$\phi=\int\vec{B}\cdot d\vec{S}=\int B\cos\theta\, dS$

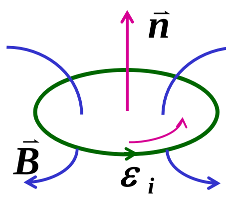
其中B, θ, S有一个量发生变化，回路中就有ε_i产生。

2）规定回路的绕行方向：



若$\phi\uparrow$, $\dfrac{d\phi}{dt}>0$

则 $\varepsilon_i<0$



若$|\phi|\uparrow$, $\dfrac{d\phi}{dt}<0$

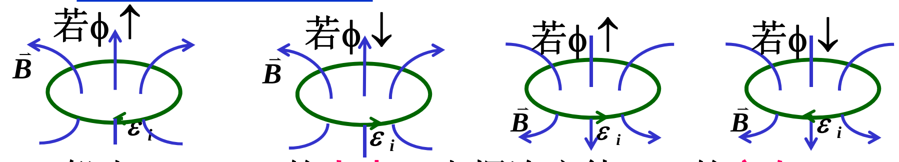
则 $\varepsilon_i>0$

2. 楞次定律 判断感应电流（感应电动势）方向的定律。

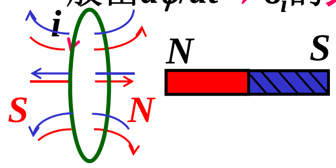
感应电流的效果，总是反抗引起感应电流的原因。

感应电流激发的磁通量

磁通量的变化（增加或减小）



一般由$d\phi/dt$→ ε_i的大小；由楞次定律→ ε_i的方向。



外力克服电磁阻力作功，将其它形式的能量转换成回路中的电能

3. 电磁感应定律的一般形式

N 匝线圈：$\varepsilon_i = -\dfrac{d\psi}{dt}$　　$\Psi=\phi_1+\phi_2+\cdots+\phi_N$：磁通匝链数(全磁通)。

若$\phi_1=\phi_2=\cdots=\phi_N$，则 $\varepsilon_i=-Nd\phi/dt$。

感应电流：$I_i = \dfrac{\varepsilon_i}{R} = -\dfrac{1}{R}N\dfrac{d\Phi}{dt}$

通过的电荷：$q = \int_{t_1}^{t_2} I_i dt = -\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \dfrac{N}{R}\dfrac{d\Phi}{dt}\cdot dt = \dfrac{N}{R}(\Phi_1 - \Phi_2)$

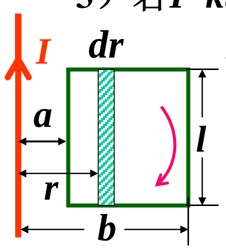
磁通计原理：若已知N、R、q，便可知$\Delta\Phi$。若将Φ_1定标（已知），则可计算出磁通量Φ_2。

例1.长直导线通有电流I，在它附近放有一矩形导体回路.

求：1）若$I=kt$（$k>0$），回路中ε_i?

2）若I=常数，回路以v向右运动，ε_i?

3）若$I=kt$，且回路又以v向右运动，ε_i?

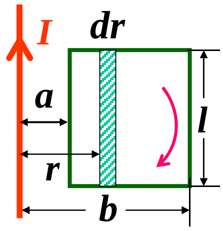


解：设回路绕行方向为顺时针，

$$1)\ \phi = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\ln\frac{b}{a} = \frac{\mu_0 lk}{2\pi} t \ln\frac{b}{a}$$

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 lk}{2\pi}\ln\frac{b}{a} < 0$$ 逆时针方向

2）I=常数，t 时刻回路的磁通：



$$\phi=\int_{a+vt}^{b+vt}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}ldr=\frac{\mu_o Il}{2\pi}\ln\frac{b+vt}{a+vt}$$

$$\varepsilon_i=-\frac{d\phi}{dt}=-\frac{\mu_o Il}{2\pi}\frac{(a-b)v}{(a+vt)(b+vt)}>0$$ 顺时针方向

3）t时刻回路的磁通：$\phi=\dfrac{\mu_o kl}{2\pi}t\ln\dfrac{b+vt}{a+vt}$

$$\varepsilon_i=-\frac{d\phi}{dt}=\frac{\mu_0 kl}{2\pi}\left(\frac{(b-a)vt}{(a+vt)(b+vt)}-\ln\frac{b+vt}{a+vt}\right)$$

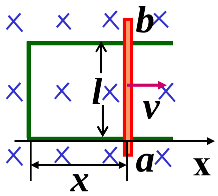
感生电动势：导体回路不动，B变化；动生电动势：导体回路运动，B不变

§8-3　动生电动势　产生动生电动势的机制：洛仑兹力

$$\vec{f}_{洛}=-e\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$$ 非静电场强：$\vec{E}_k=\dfrac{\vec{f}_{洛}}{-e}=\vec{v}\times\vec{B}$

动生电动势：$\varepsilon_i=\int_L\vec{E}_k\cdot d\vec{l}=\int_L\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{l}$

例2. 均匀磁场B中ab棒沿导体框向右以v运动，求ε_i



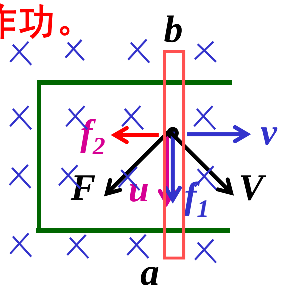
解：$\varepsilon_i=\int_a^b(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}=\int vBdl=vBl$

用法拉第定律：

$$\varepsilon_i=-\frac{d\phi}{dt}=-\frac{d}{dt}\left(\vec{B}\cdot\vec{s}\right)=B\frac{ds}{dt}=B\frac{d}{dt}(lx)=Blv$$

谁为回路提供电能？

$\vec{f}_{洛}=-e\vec{v}\times\vec{B}\perp\vec{v}$ ——洛仑兹力不作功。



电子同时参与两个方向的运动：

电子受到的总洛仑兹力：$\vec{F}=\vec{f}_1+\vec{f}_2$

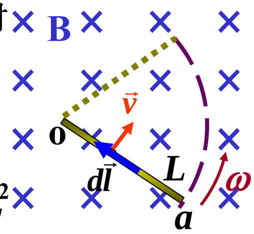
$\because\vec{F}\perp\vec{V}$，　功率：$P=\vec{F}\cdot\vec{V}=0$

$$\left(\vec{f}_1+\vec{f}_2\right)\cdot\left(\vec{v}+\vec{u}\right)=\vec{f}_1\cdot\vec{u}+\vec{f}_2\cdot\vec{v}=0$$

$\vec{f}_1//\vec{u}$，　$\vec{f}_1\cdot\vec{u}>0$（f_1作正功）　　$\vec{f}_2\cdot\vec{v}<0$（f_2作负功）

$\vec{f}_{外}=-\vec{f}_2\Rightarrow\vec{f}_{外}\cdot\vec{v}=\vec{f}_1\cdot\vec{u}$　外力作正功，将其他形式的能量转化为电能。

例3. 金属杆oa长L, 在匀强磁场B中以角速度ω反时针绕点o转动，求杆中感应电动势的大小、方向。



解法一（动生电动势）：

$$d\varepsilon=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}\ =\omega(L-l)B\cdot dl$$

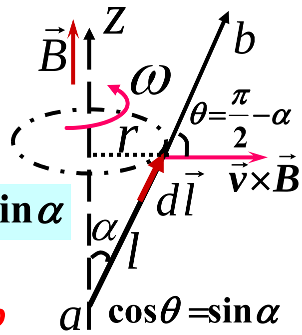
$$\varepsilon=\int_0^L\omega(L-l)B\cdot dl=\omega BL^2-\frac{1}{2}\omega BL^2=\frac{1}{2}\omega BL^2$$

方向: $a\to o$

解法二（电磁感应定律）：

$$\phi=\vec{B}\cdot\vec{S}=B\frac{1}{2}(L^2\theta)\qquad|\varepsilon|=\frac{d\phi}{dt}=\frac{1}{2}BL^2\omega$$

例4. 在空间均匀的磁场中, 长L的导线ab绕Z轴以ω匀速旋转, 导线ab与Z轴夹角为α,求: 导线ab中的电动势。



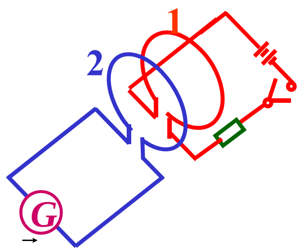
$$\varepsilon_i=\int(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}=\int vBdl\cos\theta$$

$$v=\omega l\sin\alpha$$

$$=B\omega\sin^2\alpha\int_a^b ldl=\frac{B\omega L^2}{2}\sin^2\alpha>0$$

方向从a到b

§8-4 感生电动势、感应电场



1. 产生感生电动势的机制

两个静止的线圈： 不是洛仑兹力!

麦克斯韦 $\xrightarrow{\text{引入}}$ 感应电场的概念

感应电场 $\vec{E}_i$ 的特点:

1）对场中的电荷有电场力的作用: $\vec{E}_i=\dfrac{\vec{F}}{q}$

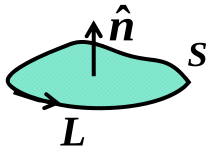
2）$\vec{E}_i$不依赖空间是否有导体存在。

对闭合回路: $\varepsilon_i=\oint\vec{E}_i\cdot d\vec{l}$

$$\varepsilon_i=-\frac{d\phi}{dt}=-\frac{d}{dt}\int\vec{B}\cdot d\vec{S}=-\int\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$d\vec{l}$与$d\vec{S}$ 成右手螺旋关系

$$\therefore\ \boxed{\oint\vec{E}_i\cdot d\vec{l}=-\int\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}}$$ 感应电场的环路定理



3）$\vec{E}_i$是非保守力场, $\oint\vec{E}_i\cdot d\vec{l}\neq 0$ 。

4）电场线是闭合的，称为涡旋电场。

2. $\vec{E}_i$（感应电场）与 $\vec{E}_e$（静电场）的异同：

相同处：对电荷有力的作用。

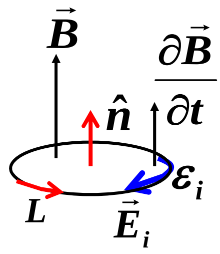
不同处：$\oint \vec{E}_e\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_o}\sum q_i$ 有源场　　$\oint \vec{E}_i\cdot d\vec{S}=0$ 无源场

$\oint \vec{E}_e\cdot d\vec{l}=0$ 无旋场　　$\oint \vec{E}_i\cdot d\vec{l}=-\int\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$ 有旋场

保守场→电势　　非保守场 不能引入势函数

感应电场提供电动势：$\varepsilon_i=\oint_L \vec{E}_i\cdot d\vec{l}$

$\vec{E}_i$的方向判断可用楞次定律；　$\vec{E}_i$与ε_i方向一致。

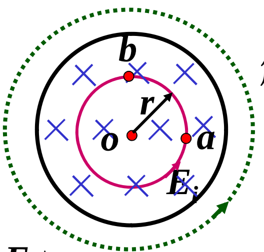


$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\longleftrightarrow \vec{E}_i$
左手螺旋关系

涡流：将导体块放置在E_i中，则在导体中将产生环形电流→涡流。

1）涡流的害处：消耗电功率，2）利用涡流产生的热量加热和熔化金属.

例7. 求一个轴对称磁场变化时的涡旋电场。已知磁场均匀分布在半径为R的范围，且dB/dt=常量，而且大于零。　　求：1）任意距中心o为r处的E_i=?
2）计算将单位正电荷从$a\rightarrow b$，E_i的功。



解：1）取半径为r，逆时针方向积分路径

当$r<R$时：$\oint \vec{E}_i\cdot d\vec{l}=E_i\cdot 2\pi r$

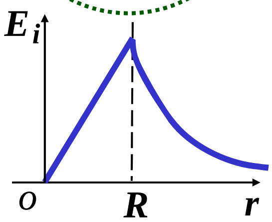
$-\int\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=-\frac{dB}{dt}\cdot(-\pi r^2)$

$\Big\}\ E_i=\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$

当$r>R$时：$\oint \vec{E}_i\cdot d\vec{l}=E_i\cdot 2\pi r$

$-\int\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}=\frac{dB}{dt}\pi R^2$

$\Big\}\ E_i=\frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt}$



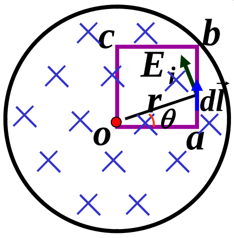
2) $A_{\frac{1}{4}ab}=\int \vec{E}_i\cdot d\vec{l}=\int_o^{\frac{\pi r}{2}}\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}\cdot dl=\frac{\pi}{4}r^2\frac{dB}{dt}$

$A_{\frac{3}{4}ab}=\int \vec{E}_i\cdot d\vec{l}=-\int_o^{\frac{3\pi r}{2}}\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}\cdot dl=-\frac{3\pi}{4}r^2\frac{dB}{dt}$　$\boxed{E_i:\text{非保守场}}$

例8. 在上例中,如图放入一边长为l 的正方形导体回路oabc。

求：1）回路各边的感应电动势； 2） $\varepsilon_{i总}$；

3）哪点（c与a）电势高。



$$\boxed{\varepsilon_i=\int_-^+\vec{E}_i\cdot d\vec{l}}$$

$$\boxed{E_i=\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}}$$

解：1）$\left.\begin{array}{l}\because oa\perp E_i\\ oc\perp E_i\end{array}\right\}\quad \therefore \varepsilon_{oa}=\varepsilon_{oc}=0$

$$\varepsilon_{ab}=\int_a^b\vec{E}_i\cdot d\vec{l}=\int_a^b E_i\cos\theta dl=\int_a^b\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}\cos\theta dl$$

$$=\int_a^b\frac{l}{2}\frac{dB}{dt}dl=\frac{1}{2}\frac{dB}{dt}l^2$$

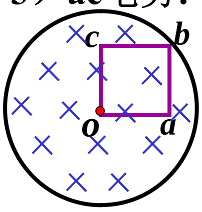
同理： $\varepsilon_{bc}=\frac{1}{2}\frac{dB}{dt}l^2$

2） $\varepsilon_{i总}=\varepsilon_{ab}+\varepsilon_{bc}=l^2\frac{dB}{dt}$

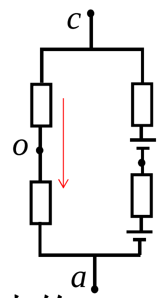
或： $\varepsilon_{i总}=-\frac{d\phi}{dt}=-\frac{d}{dt}\left(\vec{B}\cdot\vec{S}\right)=S\frac{dB}{dt}=l^2\frac{dB}{dt}$

注：根据对称性：1），2）的计算可以倒过来进行。

3）ac电势:



等效电路



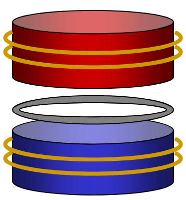
$\varepsilon_{oa}=\varepsilon_{oc}=0,\qquad \varepsilon_{ab}=\varepsilon_{bc}$

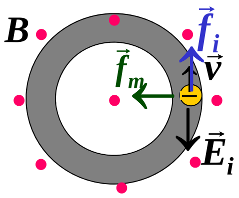
$$U_{ca}=U_c-U_a=\varepsilon_i-\frac{\varepsilon_i}{R}\frac{R}{2}$$

$$=\frac{\varepsilon_i}{2}=\frac{1}{2}l^2\frac{dB}{dt}\qquad \therefore U_c>U_a$$

或: $U_{coa}=\frac{\varepsilon_i}{R}\times\frac{R}{2}=\frac{l^2}{2}\frac{dB}{dt}$

3. 电磁感应在物理学中的应用—电子感应加速器。





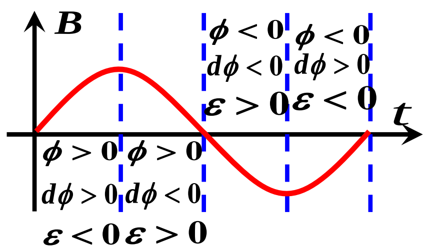
$$\oint\vec{E}_i\cdot d\vec{l}=-\frac{d\phi}{dt}=\varepsilon$$

只有1/4周期是在给电子加速

管中的电子受力:

$\vec{f}_i=-e\vec{E}_i$（切向加速）

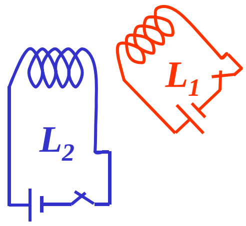
$\vec{f}_m=-e\vec{v}\times\vec{B}$（提供向心力）



§8-5 互感与自感 —电磁感应在电路中的两种典型应用

1. 互感：一导体回路的电流变化，在另一回路中产生感应电动势~~互感电动势。

(1) 互感系数



L_1电流i_1变化→L_2中ϕ_{12}变化。在L_2中产生感应电动势 —互感电动势ε_{12}

L_2中i_2的变化→L_1中产生互感电动势ε_{21}。

$\Psi_{12} \propto B_1 \propto i_1$，$\Psi_{12} = M_{12} i_1$　　同理：$\Psi_{21} = M_{21} i_2$.

M_{ij}是比例系数——互感系数，简称互感。

M_{ij}与 { 两回路的相对位置有关，线圈的几何结构及介质μ有关。

可以证明，给定的一对导体回路：$M_{12}= M_{21}=M =\Psi / i$ 。

M：单位电流产生的ψ。M的单位:亨利(H)。

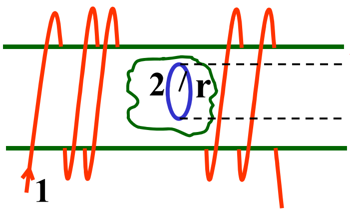
互感电动势：$\varepsilon_M = -\dfrac{d\psi}{dt} = -M\dfrac{di}{dt} - i\dfrac{dM}{dt}$

当 M=常数：$\varepsilon_M = -M\dfrac{di}{dt}$ < $\varepsilon_{12} = -M\dfrac{di_1}{dt}$，$\varepsilon_{21} = -M\dfrac{di_2}{dt}$

(2) 互感的计算

$$\varepsilon_M = -M\frac{di}{dt} \quad \begin{matrix}\Psi_{12}=Mi_1 \\ \Psi_{21}=Mi_2\end{matrix} \longrightarrow M = \begin{cases} \Psi_{12}/i_1 = \Psi_{21}/i_2 \\ \left|\dfrac{\varepsilon_{12}}{di_1/dt}\right| = \left|\dfrac{\varepsilon_{21}}{di_2/dt}\right| \end{cases}$$

例9. 长直螺线管单位长度上有n 匝线圈，另一半径为r的圆环放在螺线管内，环平面与管轴垂直。求M?



解：分析:$M=\Psi_{12}/i_1 = \Psi_{21}/i_2$，很难算出！

设螺线管通有i_1，则$B_1= \mu_0 n i_1$

圆环中：$\psi_{12} = B_1 \pi r^2 = \mu_o n\, i_1 \pi r^2$

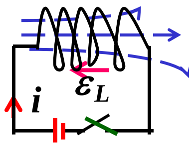
$$\therefore M = \psi_{12}/i_1 = \mu_o n \pi r^2$$

注：1° 原则上可对任一线圈产生磁场计算另一线圈的磁通量 $\psi \rightarrow M=\psi/i$。 但很多实际问题中M很难算出。

2° 互感在电工和无线电技术中应用广泛

如:变压器，互感器…… 但互感有时也是有害的……

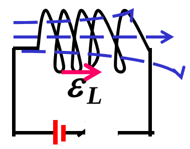
2.自感 (1) 自感电动势



回路中 i 变化→B变化→Ψ变化

$\Psi \propto B \propto i$ $\Psi = Li$ L：自感系数或**自感**。

$L=\dfrac{\Psi}{i}$ (取决于回路的大小、形状、匝数以及μ)



$$\varepsilon_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -L\frac{di}{dt} - i\frac{dL}{dt}.$$

当L=常量：$\varepsilon_L = -L\dfrac{di}{dt}$ "—" 表示ε_L的方向，

ε_L总是阻碍回路自身电流的变化。

$L=\dfrac{\Psi}{i}$ 或：$L=\left|\dfrac{\varepsilon_L}{di/dt}\right|$ L越大，ε_L越大→阻碍电路变化的阻力大；**L~"电磁惯性"**

(2) 自感L的计算

例10. 计算一螺线管的自感,截面积为S,长为l,单位长度上的匝数为n，管中充有μ的磁介质，求L。

解：设螺线管通有I 的电流, 则管内磁场为 $B=\mu n I$

$$\Psi = N\phi = NBS = N\mu nIS = n^2\mu IlS$$

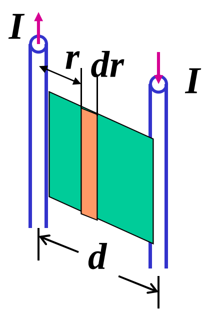
$$L=\frac{\Psi}{I} = n^2\mu V \qquad V=lS \qquad L\propto \mu,\ V,\ n^2$$

例11. 两根平行输电导线，中心距离为d，半径为a，求：两导线单位长度上的分布自感（d>>a）。

解：

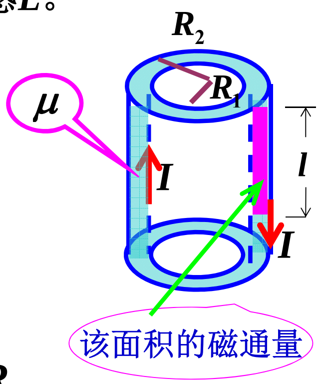
$$\Psi = \int \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_a^{d-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}dr + \int_a^{d-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}dr$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$



$$L=\frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d-a}{a} = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a} \qquad (d >> a)$$

例12. 计算同轴电缆单位长度的自感L。



两圆筒间磁场为:

$$B=\frac{\mu I}{2\pi r}\qquad (R_1\le r\le R_2)$$

磁通量为:

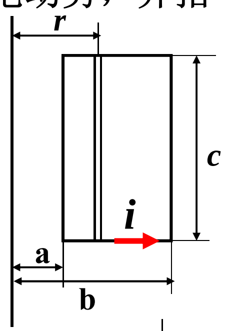
$$d\Phi=B\cdot dr\cdot l=\frac{\mu I}{2\pi r}ldr$$

$$\Phi=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu I}{2\pi r}ldr=\frac{\mu Il}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

单位长度的自感:

$$\therefore L=\frac{\Phi}{l\cdot I}=\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

例13. 在长直导线旁有一矩形共面线圈，当矩形共面线圈通电流 $i=I_0\sin\omega t$ 时，求长直导线中的感应电动势，并指出 $t=0$ 时感应电动势的方向。



解：当长直导线中有电流 I 时，该电流在矩形线圈中引起的磁通量为:

$$\phi=\int\vec{B}\cdot d\vec{s}=\int_a^b\frac{\mu_0 I}{2\pi r}cdr=\frac{\mu_0 Ic}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

长直导线和矩形线圈之间的互感系数为:

$$M=\frac{\phi}{I}=\frac{\mu_0 c}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

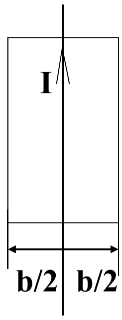
当矩形共面线圈通电流 $i=I_0\sin\omega t$ 时，长直导线的感应电动势为:

$$\varepsilon_i=-M\frac{di}{dt}=-\frac{\mu_0 cI_0\omega}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\cos\omega t$$

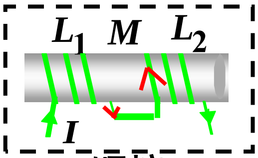
$t=0$时感应电动势方向向上。

若长直导线和矩形共面线圈的位置如右图:

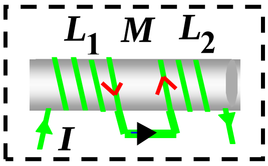
则其互感为0



例14. 两组线圈自感为L_1、L_2, 互感为M。求顺接和反接后的总自感 L。



顺接



反接

一. 顺接：磁场彼此加强，自感电动势和互感电动势同向。

总电动势：$\mathcal{E}=-L_1\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}-M\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}-L_2\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}-M\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-L_{顺接}\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$

$$=-(L_1+L_2+2M)\frac{dI}{dt}\quad\Rightarrow L_{顺接}=L_1+L_2+2M$$

二. 反接：磁场彼此削弱，自感电动势和互感电动势反向。

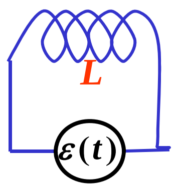
$$\mathcal{E}=-L_1\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}-L_2\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-L_{反接}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$$=-(L_1+L_2-2M)\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\quad\Rightarrow L_{反接}=L_1+L_2-2M$$

例15. 已知圆环形螺线管的自感系数为L，若将该螺线管锯成两个半环式的螺线管，则两个半环螺线管的自感系数：

（A）都等于L/2;
（B）一个大于L/2，另一个小于L/2;
（C）都大于L/2;
（D）都小于L/2。 $L_{顺接}=L_1+L_2+2M$ 正确答案：D

例16.自感L与交流电动势：$\varepsilon(t)=A\cos\omega t$ 接成回路，求电流。



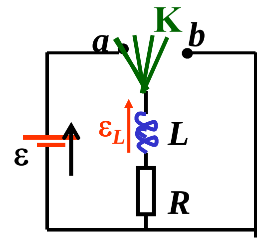
$$\varepsilon(t)+\varepsilon_i=0\quad\Rightarrow A\cos\omega t-L\frac{di}{dt}=0$$

$$di=\frac{A}{L}\cos\omega t\,dt$$

两边积分：$i=\dfrac{A}{L\omega}\sin\omega t+c$

若 $t=0, i=0$, $\therefore c=0 \quad\Rightarrow i=\dfrac{A}{L\omega}\cos(\omega t-\dfrac{\pi}{2})$

(3) *LR*电路　　电键K打向*a*:

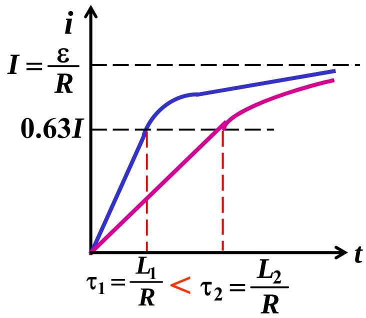


$$\varepsilon - L\frac{di}{dt} = iR, \qquad \Rightarrow \varepsilon - iR = L\frac{di}{dt}$$

$$dt = \frac{Ldi}{\varepsilon - iR} \qquad \Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{R} + Ce^{-Rt/L}$$

初始条件：t=0，i=0，则C= $-\varepsilon/R$。

$$\boxed{i = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-\frac{Rt}{L}})}$$



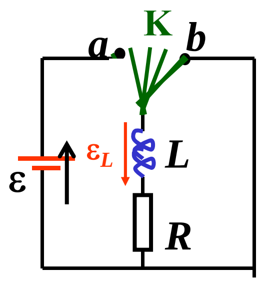
① $t\to\infty$，$i=\frac{\varepsilon}{R}=I$

定义时间常数:$\tau = L/R$

② t=L/R时：$i = \frac{\varepsilon}{R}(1-\frac{1}{e}) = 0.63\text{I}$

τ大，L大，i增长慢，ε_L阻力大，**电磁惯性大**。

电键K打向*b*:



K →*b*

$$-L\frac{di}{dt} = iR \qquad \Rightarrow i = Ce^{-\frac{Rt}{L}}$$

初始条件：t =0时，$i = \varepsilon/R = I$

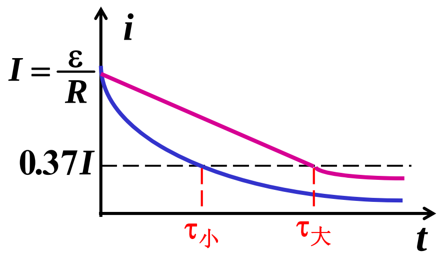
得：C= ε/R

$$\boxed{\therefore \quad i = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{Rt}{L}}}$$

电流按指数递减

t=τ时，i=0.37I。

τ大，i衰减慢。

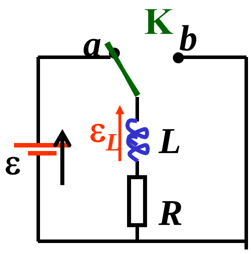


*LR*电路在阶跃电压的作用下，电流不能突变，

τ=L/R 标志响应时间。*L*有平稳电流作用。

§8-6　磁场的能量

1. LR电路中的能量转换



电路在建立稳定电流的过程中，电源力克服自感电动势 ε_L作功。

能　量

储存自感 L中

电源克服ε_L作功为dA：

$$dA=-\varepsilon_L dq=-\varepsilon_L i dt \qquad \because \varepsilon_L=-L\frac{di}{dt} \qquad \therefore \quad dA=Lidi$$

$$A=\int dA=\int_0^I Lidi=\frac{1}{2}LI^2 \xrightarrow{\text{储存}} W=\frac{1}{2}LI^2$$

$$\boxed{i=\frac{\varepsilon}{R}e^{-Rt/L}}$$

K→b，R：转成焦耳热

$$Q=\int Ri^2dt=\int R(I^2e^{-2\frac{R}{L}t})dt=RI^2\int_0^\infty e^{-2\frac{R}{L}t}dt=\frac{1}{2}LI^2$$

2. 磁能与磁能密度

通有电流I的自感线圈中储能：$W=\frac{1}{2}LI^2$

长螺线管n、l、S、I。

$$B=\mu_0 nI \qquad L=\frac{\psi}{I}=\frac{nl\mu_0 nIS}{I}=\mu_0 n^2 lS.$$

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\mu_0 n^2 lS\cdot I^2=\frac{1}{2}(\mu_0 n^2 I^2)lS=\frac{B^2}{2\mu_0}Sl=\frac{B^2}{2\mu_0}V$$

∵管内为均匀磁场，单位体积储存的能量为：

$$w_m=\frac{W_m}{V}=\frac{B^2}{2\mu_0}=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} \qquad \vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}\ \text{(磁场强度)}$$

以上结论对任意形式的磁场都成立。

一般地，非均匀场：$W_m=\int w_m dV=\int_V \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}dV$

3. 磁能与自感系数

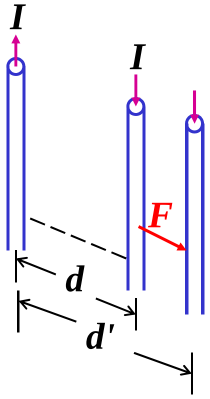
若已知$L\rightarrow$ $W_m=\frac{1}{2}LI^2$　　　反之，已知$W_m\rightarrow L$。

例18.两根平行输电线相距为 d，半径为 a，若维持 I 不变。（前已求得单位长度上的自感：$L=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a}$.）

求：1）当 $d\rightarrow d'$ 时，磁力作的功。

2）磁能改变多少？增加或减少，说明能量来源？

解： 1） 单位长度受力： $F=IlB=I\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$



$$A=\int_d^{d'}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_d^{d'}\frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}dr=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{d'}{d}>0.$$

2） $$\Delta W=W_{d'}-W_d=\frac{1}{2}L'I^2-\frac{1}{2}LI^2$$

$$=\frac{1}{2}I^2\frac{\mu_0}{\pi}\left(\ln\frac{d'}{a}-\ln\frac{d}{a}\right)=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{d'}{d}\quad >0$$

能量从何而来！

要维持I不变，电源力必须克服ε_L作功，从而将外电源的能量转变为磁能增量和磁力作功两部分。

$$\varepsilon_L=-\frac{d\psi}{dt}=-\cancel{I\frac{di}{dt}}^{\,0}-I\frac{dL}{dt}\qquad \boxed{\Psi=Li}\qquad \boxed{L=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a}.}$$

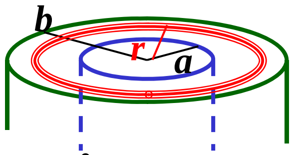
外电源克服ε_L作功，则ε_L作负功。

$$A_{外}=-\int\varepsilon_L dq=\int I\frac{dL}{dt}\cdot Idt=\int_L^{L'}I^2dL=I^2\left(L'-L\right)$$

能量守恒

$$=I^2\left(\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d'}{a}-\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a}\right)=\frac{\mu_0 I^2}{\pi}\ln\frac{d'}{d}=A_{磁力}+\Delta W.$$

例19. 同轴电缆，两圆柱面半径分别为a、b，充满磁介质μ，求单位长度的W_m与L。



解：

$$B=\frac{\mu I}{2\pi r},\quad H=\frac{B}{\mu}=\frac{I}{2\pi r}\qquad \boxed{W_m=\frac{1}{2}LI^2}$$

$$W_m=\int\frac{1}{2}B\cdot HdV=\int\frac{1}{2}\frac{\mu I}{2\pi r}\frac{I}{2\pi r}2\pi rdr=\frac{\mu I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}。$$

$$L=\frac{2W_m}{I^2}=\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

单位长度

§8-7　麦克斯韦方程组

$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$　变化磁场 $\xrightarrow{\text{产生}}$ 感应电场 → $\boxed{\text{基于电磁感应定律}}$

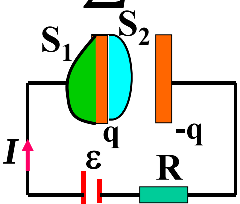
麦克斯韦提出了：变化电场 $\xrightarrow{\text{产生}}$ 磁场 → $\boxed{\text{假设}}$

一．位移电流

安培环路定理：$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I$

1.引入　在电容的充电过程中：

对S_1面：$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$
对S_2面：$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$
相矛盾！



安培环路定理对非稳恒电流情况不适用。

在稳恒电流的情况，流入封闭面的电流等于流出封闭面的电流。

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$（电流连续性方程）

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \qquad I = -\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

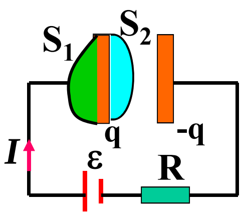
$$\Rightarrow \oint_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{S} = 0$$

位移电流密度：

$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

位移电流：

$$I_D = \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$



电容充电：$q\uparrow$，$D\uparrow \Rightarrow \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} /\!/ \vec{D}$

电容放电：$q\downarrow$，$D\downarrow \Rightarrow \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \uparrow\downarrow \vec{D}$

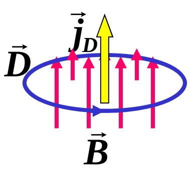
$\vec{j}_D /\!/ I$　保持电流的连续性

电流概念的推广：能产生磁场的物理量（麦克斯韦假设）

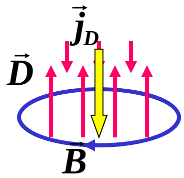
1）I_D的实质是变化电场，I_D不产生焦耳热！

2）I_D在激发磁场方面与传导电流等效。

3）I_D激发的磁场B与其成右手螺旋关系：



$\frac{\partial D}{\partial t} > 0$
$\vec{j}_D /\!/ \vec{D}$

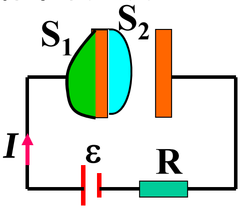


$\frac{\partial D}{\partial t} < 0$
$\vec{j}_D \uparrow\downarrow \vec{D}$

2. 全电流定理（传导电流＋位移电流＝全电流）

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I + \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = I + I_D$$

一般情况下（包括非稳恒情况）的安培环路定理。



$$\left.\begin{aligned} &\text{对}S_1\text{面：}\ \oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I \\ &\text{对}S_2\text{面：}\ \oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_D \end{aligned}\right\}\ \text{而：}\ I = I_D$$

$$\left.\begin{aligned} &\oint \vec{E}_i\cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = -\frac{d\varphi_B}{dt} \\ &\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \frac{d\varphi_D}{dt} \end{aligned}\right\}\ \text{反映了电磁场的对称性}$$

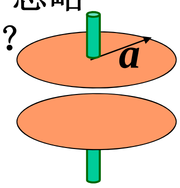
例1.一空气平行板电容器，略去边缘效应。

1）充电完毕后，断开电源，然后拉开两极板。
此过程中两极板间是否有 j_D？ $\longrightarrow$ $j_D=0$　$|\vec{D}| = \sigma = \dfrac{q}{S}$

2）充电完毕后，仍接通电源，然后拉开两极板。
此过程中两极板间是否有 j_D？为什么？

$j_D \neq 0$　$\because\ U = E\cdot d$　U不变，$d\uparrow$，$E\downarrow$　D 改变！

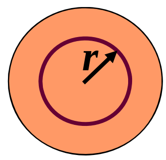
例2.一圆形平行板电容器，两极板的半径为a。设其正在充放电，电荷按规律$Q=Q_o\sin\omega t$变化，忽略边缘效应。求：两极板间任意点的 j_D 和 B？



解：(1)平行板之间的电场为：$D=\sigma = \dfrac{Q}{S}$

$$j_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{S}\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\omega Q_o}{S}\cos\omega t \qquad S = \pi a^2$$

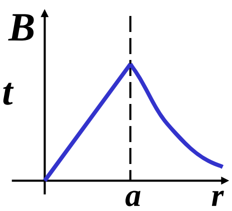
j_D均匀分布在横截面上，与传导电流同向。



(2) $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I + I_D \quad (I = 0)$

$$r < a\text{时：}\left.\begin{aligned} &\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = H\cdot 2\pi r \\ &I + I_D = \int \vec{j}_D\cdot d\vec{S} = j_D\cdot \pi r^2 \end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} &H = \frac{r}{2} j_D \\ &B = \mu_o H = \frac{\mu_o \omega Q_o}{2\pi a^2} r\cos\omega t \end{aligned}$$

$$r > a\text{ 时：}\left.\begin{aligned} &\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = H\cdot 2\pi r \\ &I + I_D = \int \vec{j}_D\cdot d\vec{S} = j_D\cdot \pi a^2 \end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} &H = \frac{a^2}{2r} j_D \\ &B = \frac{\mu_o \omega Q_o}{2\pi r}\cos\omega t \end{aligned}$$



$$r = a\text{：}\ B = B_{Max} = \frac{\mu_o \omega Q_o}{2\pi a}\cos\omega t$$

注：一般变化的电场产生的磁场很小。 $B=\mu_o H$， $H=\frac{a}{2}j_D$

例：a=5cm，$\frac{\partial D}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$，若 $\frac{dE}{dt}=10^{12}\,V/ms$

$B=3\times10^{-7}$ T ——当时无法验证

二. 麦克斯韦方程组

1.积分形式

稳恒情况的电磁场规律			麦克斯韦方程组
$\oint\vec D\cdot d\vec S=\sum q_i$	任意电场 $\rightarrow$	$\oint\vec D\cdot d\vec S=\sum q_i$	
$\oint\vec E\cdot d\vec l=0$	变化磁场 $\rightarrow$ 产生电场	$\oint\vec E\cdot d\vec l=-\int\frac{\partial\vec B}{\partial t}\cdot d\vec S$	
$\oint\vec B\cdot d\vec S=0$	任意电流 $\rightarrow$	$\oint\vec B\cdot d\vec S=0$	
$\oint\vec H\cdot d\vec l=\sum I_i$	变化电场 $\rightarrow$ 产生磁场	$\oint\vec H\cdot d\vec l=I+\int\frac{\partial\vec D}{\partial t}\cdot d\vec S$	

(1)电场:有源场；(3)磁场:无源场；

(2)电场:有旋场；(4)磁场:有旋场。

2.微分形式

在直角坐标系中，算符：$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec i+\frac{\partial}{\partial y}\vec j+\frac{\partial}{\partial z}\vec k$

梯度：$\nabla U=\frac{\partial U}{\partial x}\vec i+\frac{\partial U}{\partial y}\vec j+\frac{\partial U}{\partial z}\vec k$

散度：$\nabla\cdot\vec A=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$

旋度：$\nabla\times\vec A=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$

数学上的定理：

Gauss定理：

$$\oint_S\vec A\cdot d\vec S=\int_V(\nabla\cdot\vec A)dV$$

Stokes定理：

$$\oint_L\vec A\cdot d\vec l=\int_S(\nabla\times\vec A)\cdot d\vec S$$

$$\left.\begin{aligned}\oint_S\vec D\cdot d\vec S&=\int_V\rho\, dV\\ \oint_S\vec D\cdot d\vec S&=\int_V(\nabla\cdot\vec D)dV\end{aligned}\right\}\boxed{\nabla\cdot\vec D=\rho}$$

$$\oint_S\vec B\cdot d\vec S=0\longrightarrow\boxed{\nabla\cdot\vec B=0}$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla\times\vec{E})\cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Stokes定理：

$$\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{j}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t})\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla\times\vec{H})\cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{H} = \vec{j}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{D}=\rho}$$

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{B}=0}$$

麦克斯韦方程组的微分形式

3.洛仑兹力：$\boxed{\vec{F}_{洛} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}}$

反映了事物之间相互联系、相互制约。电荷、电流（电荷的运动）激发电磁场，电磁场反过来对电荷有力的作用。

基于以下三点：a)麦克斯韦四个微分方程； b) 洛仑兹力；

c)介质方程：$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ $\quad \vec{B} = \mu\vec{H}$ $\quad \vec{j} = \sigma\vec{E}$

由确定的边界条件（空间）与初始条件（时间），原则上可以求解任何电磁场问题。

4. 电磁波

在远离波源，没有自由电荷、传导电流及介质均匀的自由空间，由麦克斯韦方程组可以导出电磁场的波动方程：

$$\nabla^2\vec{E} = \mu_r\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\vec{H} = \mu_r\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

根据波动方程的一般表示：

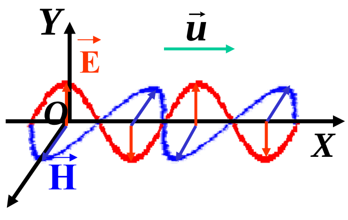
$$\nabla^2\vec{\xi} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\vec{\xi}}{\partial t^2}$$ u为波速

因此，电磁波的波速为：$u = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_r\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}}$

真空中电磁波的波速：$c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

$$\therefore u = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$$

$\vec{E}\times\vec{H}$方向与$\vec{u}$方向相同



电磁波为横波

麦克斯韦的贡献

1. 完善了宏观电磁场理论； 2. 预言了电磁波的存在。

波速：$u=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ 真空中：$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=3\times10^8 m/s$

对于可见光：

光是电磁波，光的折射率：$n=\frac{c}{u}=\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$ $n=\sqrt{\varepsilon_r}$ $\mu_r=1$

麦克斯韦方程组在任何惯性系中形式相同：光速不变。

1886年赫兹发现了电磁波。

物质存在的两种基本形式:实物和场。

*电磁场的物质性

电磁场的能量密度：$w=w_e+w_m=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}+\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

由相对论质能关系：$E=Mc^2$

质量密度：$m=\frac{w}{c^2}=\frac{1}{2c^2}(\vec{D}\cdot\vec{E}+\vec{B}\cdot\vec{H})$ 没有静止质量

大量实验证明场有质量和动量. 如:引力偏折, 光压（1920年列别捷夫的光压实验）。

场与实物相互可以相互转化如:正负电子对湮没。