

## مسئله ۱. توابع مشخصه

برای زیر مجموعه  $A$  از  $S$ ، تابع مشخصه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$k_A(X) = 1, X \in A$$

$$k_A(X) = 0, X \in S - A$$

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف)  $k_A \cdot k_B$  تابع مشخصه  $A \cap B$  است.

ب)  $k_A + k_B$  در پیمانه ۲ تابع مشخصه  $A \cup B$  است.

ج)  $k_A - k_{A \cap B}$  تابع مشخصه  $A - B$  است.

## مسئله ۲. مجموعه‌های پله‌ای

۳ مجموعه‌ی دلخواه داریم به نام‌های  $A$  و  $B$  و  $C$ ، و از سطر دوم به بعد، هر مجموعه تفاضل دو مجموعه‌ی بالای سر خودش است (سمت چپی منهای سمت راستی) مثلاً  $D = A - B$ . همچنین  $P(A)$  نشان‌دهنده مجموعه توانی مجموعه  $A$  است. درستی یا نادرستی موارد زیر را مشخص کنید.

الف)  $B \subseteq F$

ب)  $F \subseteq A \cap C$

ج)  $D \cap C \subseteq F$

د)  $(P(A) \cup P(B)) \subset P(A \cup B)$

ه)  $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

و)  $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$

## مسئله ۳. مجموعه‌ها

اگر داشته باشیم  $(A' \cup (B - A)) \cup ((A \cap B)' \cap (C \cap D))$  ثابت کنید  $A \subset B$ .

#### مسئله‌ی ۴. جزء صحیح

نشان دهید به ازای هر عدد حقیقی  $x$  و هر عدد طبیعی  $n$  داریم:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$$

#### مسئله‌ی ۵. توابع

فرض کنید  $f : A \rightarrow B$  یک تابع باشد. تعاریف زیر را در نظر بگیرید.

$$\forall X \subseteq A : f(X) = \{b \in B \mid \exists a \in X (f(a) = b)\}$$

$$\forall Y \subseteq B : f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$$

در ضمن عملگر  $\Delta$  برای دو مجموعه بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

کدام یک از روابط زیر درست است (اثبات کنید یا مثال نقض بیاورید).

$$1. \quad \forall X, Y, Z \subseteq A : f(X \cap (Y \Delta Z)) = f(X) \cap (f(Y) \Delta f(Z))$$

$$2. \quad \forall X, Y, Z \subseteq B : f^{-1}(X \cap (Y \Delta Z)) = f^{-1}(X) \cap (f^{-1}(Y) \Delta f^{-1}(Z))$$

#### مسئله‌ی ۶. اثبات یا نقض

فرض کنید  $A, B, C \subseteq M$ . هر یک از موارد زیر را ثابت یا با مثال نقض رد کنید.

$$A - C = B - C \implies A = B$$

$$[(A \cap C = B \cap C) \wedge (A - C = B - C)] \implies A = B$$

$$[(A \cup C = B \cup C) \wedge (A - C = B - C)] \implies A = B$$

$$P(A - B) = P(A) - P(B)$$

### مسئله ۷. نظریه مجموعه‌ها

با استفاده از قانون های نظریه مجموعه‌ها موارد زیر را ساده کنید.

$$(A - B) \cup (A \cap B)$$

$$\overline{(\overline{A \cup B}) \cap C \cup \overline{B}}$$

### مسئله ۸. نمودار ون

برای مجموعه‌های  $A, B, C \subseteq U$  با استفاده از نمودارهای ون درستی یا نادرستی هر یک از برابری‌های زیر را بررسی کنید.

$$A \Delta (B \cap C) = (A \Delta B) \cap (A \Delta C)$$

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

#### نکات مهم در مورد تمرین

- این تمرین تحویلی است. ددلاین آن نیز، روز ۲۵ فروردین می‌باشد و تا آن زمان، می‌توانید فایل جواب خود را در ریبازیتوری گیت‌هاب خود، آپلود کنید.
- در صورت بروز سؤال و ابهام، می‌توانید از طریق گروه تلگرامی دوره، سوال خود را مطرح نمایید.
- پیشنهاد می‌شود حتما پیش از قرار گرفتن ویدیوهای حل این سوالات، روی سوالات فکر کرده و راه‌حل‌های مدنظر خود را بنویسید تا تسلط شما روی حل این سوالات، افزایش یابد.

موفق باشید.