

مسئله ۱. توابع مشخصه

برای زیر مجموعه A از S ، تابع مشخصه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$k_A(X) = 1, X \in A$$

$$k_A(X) = 0, X \in S - A$$

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $k_A \cdot k_B$ تابع مشخصه $A \cap B$ است.

ب) $k_A + k_B$ در پیمانه ۲ تابع مشخصه $A \cup B$ است.

ج) $k_A - k_{A \cap B}$ تابع مشخصه $A - B$ است.

مسئله ۲. مجموعه‌های پله‌ای

۳ مجموعه‌ی دلخواه داریم به نام‌های A و B و C ، و از سطر دوم به بعد، هر مجموعه تفاضل دو مجموعه‌ی بالای سر خودش است (سمت چپی منهای سمت راستی) مثلاً $D = A - B$. همچنین $P(A)$ نشان‌دهنده مجموعه توانی مجموعه A است. درستی یا نادرستی موارد زیر را مشخص کنید.

الف) $B \subseteq F$

ب) $F \subseteq A \cap C$

ج) $D \cap C \subseteq F$

د) $(P(A) \cup P(B)) \subset P(A \cup B)$

ه) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

و) $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$

مسئله ۳. مجموعه‌ها

اگر داشته باشیم $A' \cup (B - A) = (A' \cup B') \cup ((A \cap B)' \cap (C \cap D))$ ثابت کنید $A \subset B$.

مسئله‌ی ۴. جزء صحیح

نشان دهید به ازای هر عدد حقیقی x و هر عدد طبیعی n داریم:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$$

مسئله‌ی ۵. توابع

فرض کنید $f : A \rightarrow B$ یک تابع باشد. تعاریف زیر را در نظر بگیرید.

$$\forall X \subseteq A : f(X) = \{b \in B \mid \exists a \in X (f(a) = b)\}$$

$$\forall Y \subseteq B : f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$$

در ضمن عملگر Δ برای دو مجموعه بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

کدام یک از روابط زیر درست است (اثبات کنید یا مثال نقض بیاورید).

$$1. \quad \forall X, Y, Z \subseteq A : f(X \cap (Y \Delta Z)) = f(X) \cap (f(Y) \Delta f(Z))$$

$$2. \quad \forall X, Y, Z \subseteq B : f^{-1}(X \cap (Y \Delta Z)) = f^{-1}(X) \cap (f^{-1}(Y) \Delta f^{-1}(Z))$$

مسئله‌ی ۶. اثبات یا نقض

فرض کنید $A, B, C \subseteq M$. هر یک از موارد زیر را ثابت یا با مثال نقض رد کنید.

$$A - C = B - C \implies A = B$$

$$[(A \cap C = B \cap C) \wedge (A - C = B - C)] \implies A = B$$

$$[(A \cup C = B \cup C) \wedge (A - C = B - C)] \implies A = B$$

$$P(A - B) = P(A) - P(B)$$

مسئله ۷. نظریه مجموعه‌ها

با استفاده از قانون های نظریه مجموعه‌ها موارد زیر را ساده کنید.

$$(A - B) \cup (A \cap B)$$

$$\overline{(\overline{A \cup B}) \cap C \cup \overline{B}}$$

مسئله ۸. نمودار ون

برای مجموعه‌های $A, B, C \subseteq U$ با استفاده از نمودارهای ون درستی یا نادرستی هر یک از برابری‌های زیر را بررسی کنید.

$$A \Delta (B \cap C) = (A \Delta B) \cap (A \Delta C)$$

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

نکات مهم در مورد تمرین

- این تمرین تحویلی است. ددلاین آن نیز، روز ۲۵ فروردین می‌باشد و تا آن زمان، می‌توانید فایل جواب خود را در ریبازیتوری گیت‌هاب خود، آپلود کنید.
- در صورت بروز سؤال و ابهام، می‌توانید از طریق گروه تلگرامی دوره، سؤال خود را مطرح نمایید.
- کلاس حل تمرین مربوط به این تمرین نیز در هفته‌ی پیش‌رو برگزار خواهد شد.

موفق باشید.