Sprawozdanie z listy 2. – Symulacja komputerowa L

Filip Antoniak (279929)

1. Wstęp

Celem tego sprawozdania jest stworzenie generatora liczb pseudolosowych dla rozkładu równomiernego $U[0,1)$ i zbadanie jego właściwości i statystyk.

2. Generator ciągów

Aby powstałe ciągi liczb miały rozkład równomierny i spełniały założenie zakresu $U[0,1)$, należy zadbać aby wśród liczb nie było wartości 1. Można zrobić to na szereg sposobów, np.:

```
# random [0, 1)
def random_0_1():
    rand = 1
    while rand == 1:
        rand = random.random()
    return rand

def generate_rand_seq(n):
    seq = []
    for _ in range(n):
        seq.append(random_0_1())
    return seq

seq20 = generate_rand_seq(20)
seq100 = generate_rand_seq(100)
```

Rysunek 1: Kod z funkcjami generującymi sekwencje z rozkładu U[0, 1)

Powyższy kod generuje sekwencje kolejno, 20 i 100 liczb z zakresu [0, 1).

3. Najważniejsze statystyki ciągów:

Tabela 1: Najważniejsze statystyki ciągów 20 i 100 elementowych z rozkładu U[0, 1) w zestawieniu z rozkładem U[a. b)

Statystyka	**20 elementów**	**100 elementów**	**Rozkład U[a,b)**
Średnia	0.5658014284566937	0.5030061965761424	$\frac{1}{2}(a+b)$
Mediana	0.5888990157422684	0.5279573234092918	$\frac{1}{2}(a+b)$
Dominanta	0.011304845366908567	0.0003780852239052	Dowolna wartość (a, b)
Wariancja	0.11489991921566682	0.07945409758392864	$\frac{1}{12}(b-a)^2$
Odchylenie standardowe	0.338968905971723	0.2818760322977614	$\sqrt{\frac{1}{12}(b-a)^2}$
Skośność	-0.2353565301636867	0.13687055091429873	0
Kurtoza	1.5032580617009816	1.7406611412588406	$-\frac{6}{5}$
Rozstęp	0.9851399960361277	0.9833333264094991	$b - a$

- Średnia: w miarę wzrostu ilości elementów dąży do $\frac{1}{2}$.
- Mediana: tak samo jak średnia, dąży do $\frac{1}{2}$.
- Dominanta: jako że każda liczba ma równą szansa na bycie wylosowaną, dominantą może być każda dowolna liczba, więc jest niezdefiniowana.
- Wariancja: obliczana ze wzoru:

$$E[(X-\mu)^2] = \int_a^b \frac{1}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

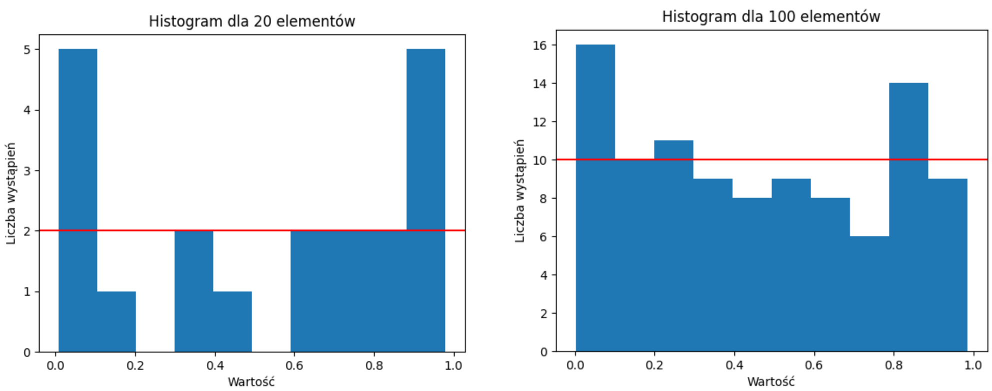
Mówi o tym jak bardzo wartość zmiennej losowej różni się od średniej.

Więc dla U[0, 1), gdy liczba elementów dąży do nieskończoności wariancja wyniesie $\frac{1}{12}(1-0)^2 = \frac{1}{12} = 0.08333$. Widać, że dla U[0, 1) gdzie liczba elementów osiąga 100 wariancja zbliża się do tej wartości.

- Odchylenie standardowe: Pierwiastek z omówionej wariancji.

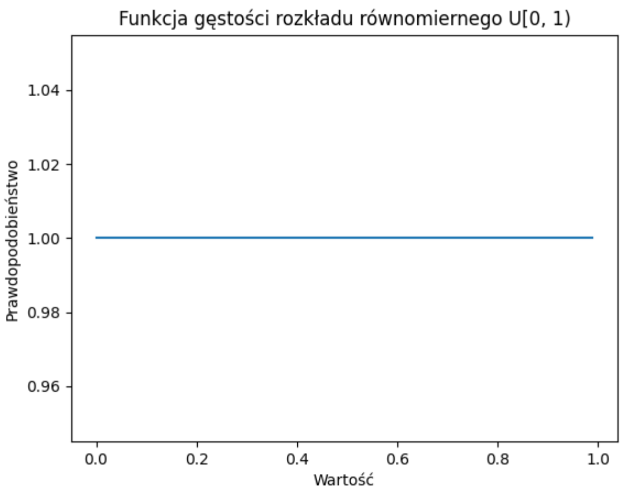
- Skośność: Rozkład jest symetryczny więc wartość wynosi 0. Wartości skośności dla 20 i 100 elementów różnią się od 0, ponieważ wielkość sekwencji jest za mała by uzyskać idealny rozkład równomierny.
- Kurtoza: Wartości kurtozy dla sekwencji 20 i 100 elementowych mocno odbiegają od tej dla U[a, b) wynoszącej $-\frac{6}{5}$. Możliwe, że zbieżność osiągana jest później, gdy ilości elementów są większe.
- Rozstęp: będący różnicą wartości maksymalnej przypomina ten oczekiwany już w przypadku 20 elementów.

4. Zestawienie histogramów



Rysunek 2: Histogramy (bins = 10) dla sekwencji 20 i 100 elementowych z rozkładu U[0, 1).

Czerwoną linią są oznaczone oczekiwane ilości występowań dla każdej z prób.



Rysunek 3: Funkcja gęstości rozkładu równomiernego U[0, 1).

Kształty PDF i histogramów odbiegają od siebie. Wynika to jednak tylko z małej wielkości próby. Zgodnie z prawem wielkich liczb, gdy wielkość próby będzie zbliżała się do nieskończoności, histogram będzie swoim kształtem coraz bardziej przypominał funkcje gęstości prawdopodobieństwa. Różnić się będzie tylko oś Y. W PDF to $\frac{1}{b-a}$ natomiast w histogramach dla bins=10 wyniesie $\frac{n}{10}$, gdzie n to liczba elementów.

5. Test statystyczny średnich z prób

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$$

$$ma\ rozkład\ t\ z\ (n - 1)\ stopniami\ swobody.$$

Wymagania testu:

- **Normalność rozkładu**: Dane w każdej z porównywanych grup powinny pochodzić z rozkładów normalnych.
- **Jednorodność wariancji**: Wariancje w obu grupach powinny być do siebie zbliżone.
- **Niezależność obserwacji**: Obserwacje w każdej grupie powinny być niezależne od siebie.

O ile spełnione są założenia 2 i 3, co widać m.in. w tabeli zestawień najważniejszych statystyk, to dane nie pochodzą z rozkładu normalnego.

Z pomocą przychodzi tu *CTG*, które dla dużych prób (>30), ponieważ rozkład średnich z próby dąży do **rozkładu normalnego.**

Hipoteza 0: średnie z prób są równe 0.5

Wyniki testu:

20 elementów:

t: 0.39626742465189213

p: 0.34816140730017264

Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

100 elementów:

t: -1.2640813711441008

p: 0.8954154996305793

Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

Dla n=20 nie został spełniony warunek, że dane pochodzą z rozkładu normalnego, tutaj CTG nie pomaga, bo próba 20<30. Więc do weryfikacji wykorzystany zostanie dodatkowy test:

Dla testu **Wilcoxon`a:**

Statytyka = 98.0

p-value = 0.8124

wartość p jest znacznie większa niż przyjmowany poziom istotności 0.05, więc **nie ma podstaw co odrzucenia hipotezy zerowej.**

6. Wnioski

Testy statystyczne pokazały, że dla prób n=20 i n=100 nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej: *średnia z próby jest równa 0.5*.

Nie było to jednak jednoznaczne dla próby n=20, w niektórych wywołaniach generowana sekwencja nie przechodziła testu, p value było niższe niż poziom istotności 0.05, więc czasem hipoteza 0 była odrzucana, co oznacza, że średnia była statystycznie istotnie inna niż 0,05.

Wynika to z prawa wielkich liczb, im bardziej zwiększymy wielkość próby w tej symulacji, tym bardziej jej rozkład zbliży się statystycznie do rozkładu równomiernego.