

Sprawozdanie z listy 2. – Modele systemów dynamicznych L

Filip Antoniak (279929)

1. Wstęp

Celem tego sprawozdania zaprezentowanie implementacji Modelu Lotki-Volterry oraz przedstawienie i analiza układu Lorenza w pakiecie Simulink w środowisku Matlab. Model Lotki-Volterry to nieliniowy układ równań różniczkowych stosowany do symulacji zachowań populacji ofiar i drapieżników w pewnym ekosystemie.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a - by)x \\ \frac{dy}{dt} = (cx - d)y, \end{cases}$$

Tabela 1: Legenda oznaczeń parametrów dla równania Lotki-Volterry.

Ofiary	Drapieżniki
x- populacja ofiar	y- populacja drapieżników
a -częstość narodzin ofiar	c- częstość narodzin drapieżników
b- częstość umierania ofiar	d- częstość umierania drapieżników

Układ Lorenza to układ trzech nieliniowych równań różniczkowych opisujący procesy związane z przemianą ciepła w atmosferze. Układ ten powiązany jest z teorią chaosu deterministycznego, charakteryzuje go duża wrażliwość na warunki początkowe dla pewnych parametrów.¹

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z, \end{cases}$$

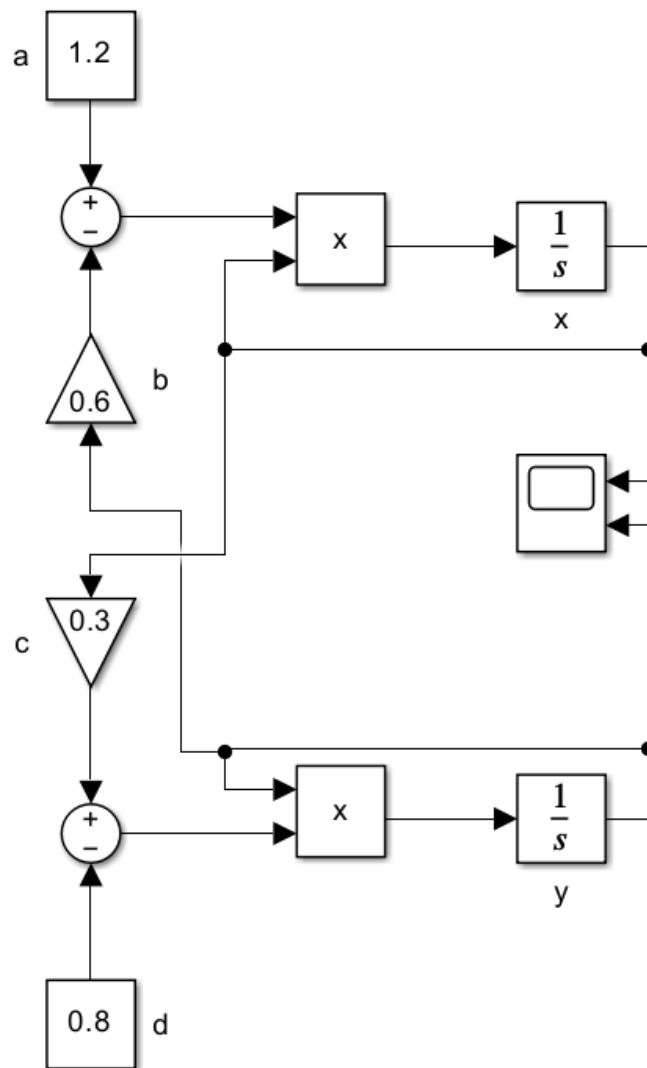
Tabela 2: Legenda oznaczeń parametrów dla układu Lorenza.

σ - liczba Prandtla	β	ρ - liczba Rayleigha
lepkość ośrodka	rozmiary obszaru	przewodnictwo cieplne

¹ [Bustowicz, M. \(2012\). Analiza układu Lorenza niecałkowitego rzędu. Pomiary, Automatyka, Robotyka, 2\(2012\), 306.](#)

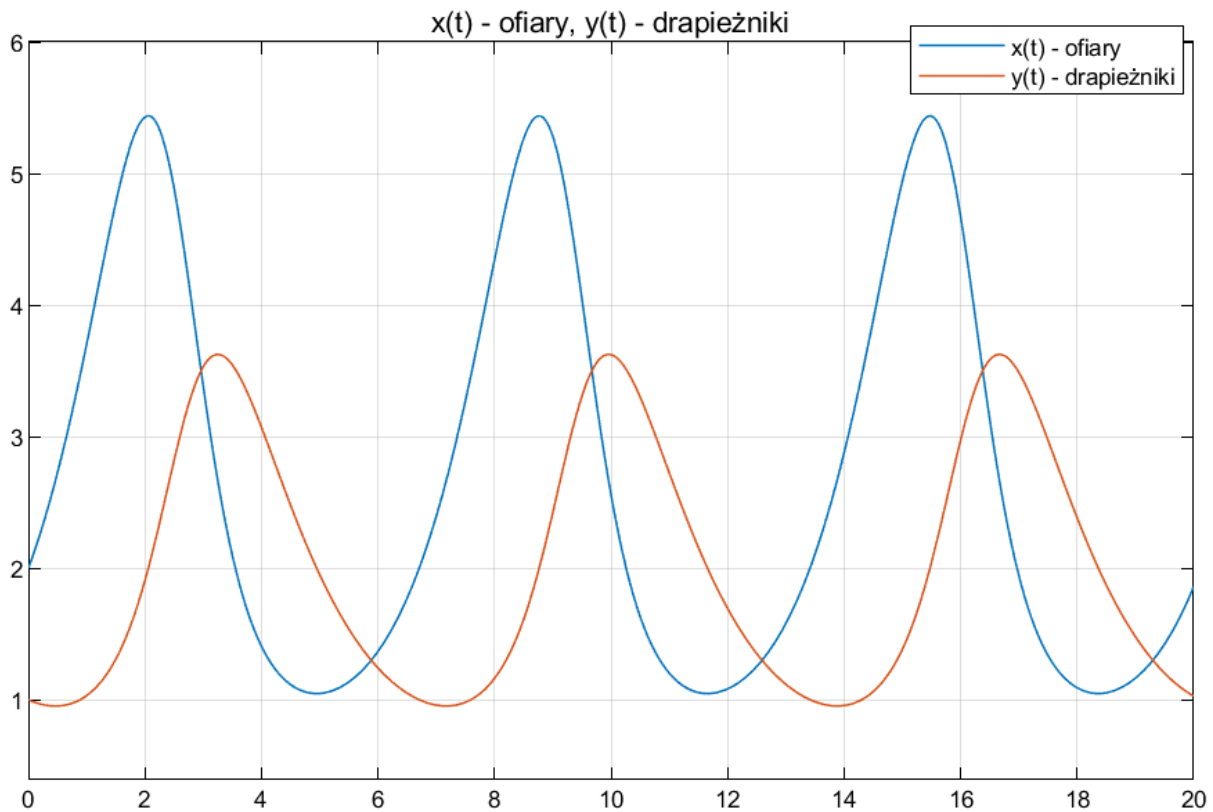
2. Model Lotki-Volterra

Schemat dla modelu Lotki-Volterra jest widoczny na Rysunku 1. Do realizacji modelu użyte zostały następujące funkcje z pakietu Simulink: Const, Sum, Gain, Integrator, Scope, Product.



Rysunek 1: Schemat w pakiecie Simulink dla modelu Lotki-Volterra.

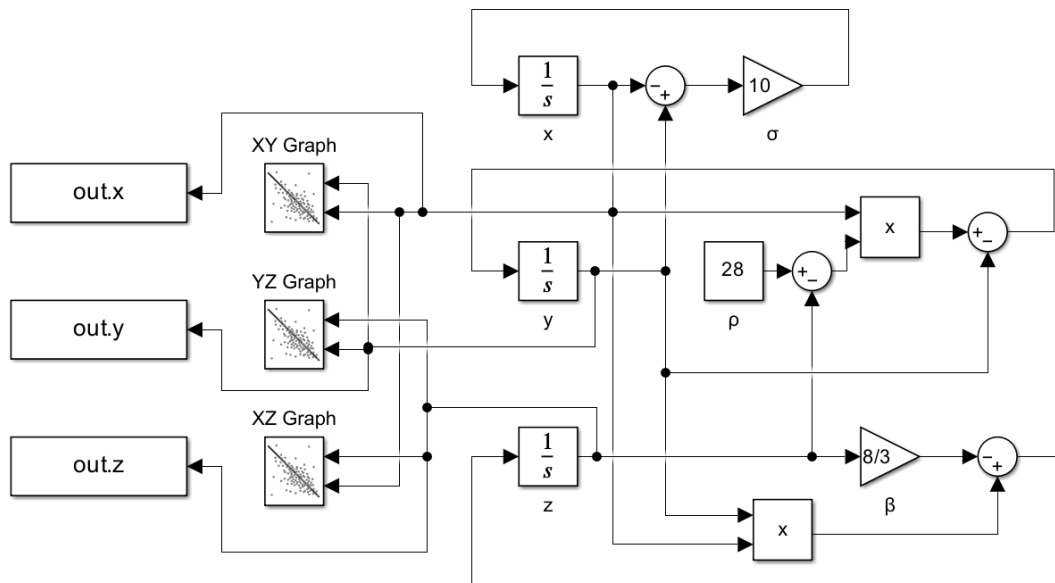
Rezultat symulacji dla parametrów $a = 1.2$, $b = 0.6$, $c = 0.3$, $d = 0.8$ oraz populacji początkowych $x_0 = 2$ i $y_0 = 1$ przedstawiony jest poniżej na Rysunku 2. W symulacji zastosowana została metoda ode113 Adams oraz ustawienie tolerancji względnej: $1e-9$.



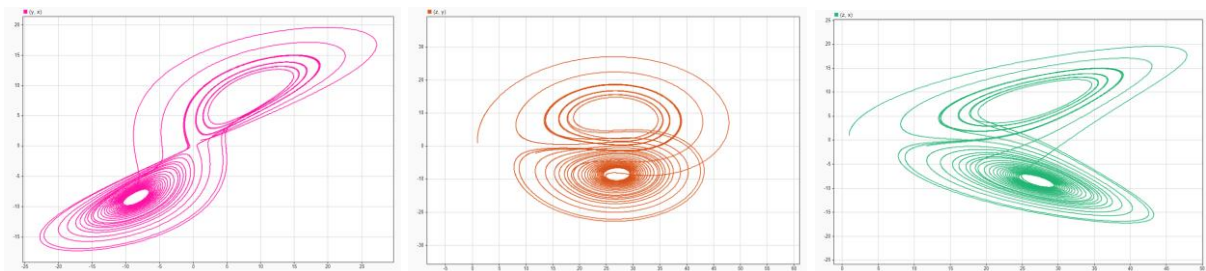
Rysunek 2: Rezultat symulacji modelu Lotki-Volterra $x(t)$, $y(t)$ dla czasu $t \in [0, 20]$ przy zmiennym kroku dla parametrów $a = 1.2$, $b = 0.6$, $c = 0.3$, $d = 0.8$ oraz populacjach początkowych $x_0 = 2$ $y_0 = 1$.

3. Układ Lorenza

Schemat dla układu Lorenza jest widoczny na Rysunku 3. Do realizacji modelu użyte zostały następujące funkcje z pakietu Simulink: Const, Sum, Gain, Integrator, Scope, Product, Graph, oraz Out to workspace, pozwalające przetwarzać dane z Simulinka bezpośrednio w środowisku Matlab. Do przeprowadzenia symulacji wykorzystana została metoda ode4 Runge-Kutta oraz fixed-step na poziomie: 0.001. Przeprowadzone symulacje, których wyniki przedstawione są na Rysunkach [4:11] pokazują jak nawet niewielka zmiana parametrów w układzie w znaczący sposób wpływa na rezultat.



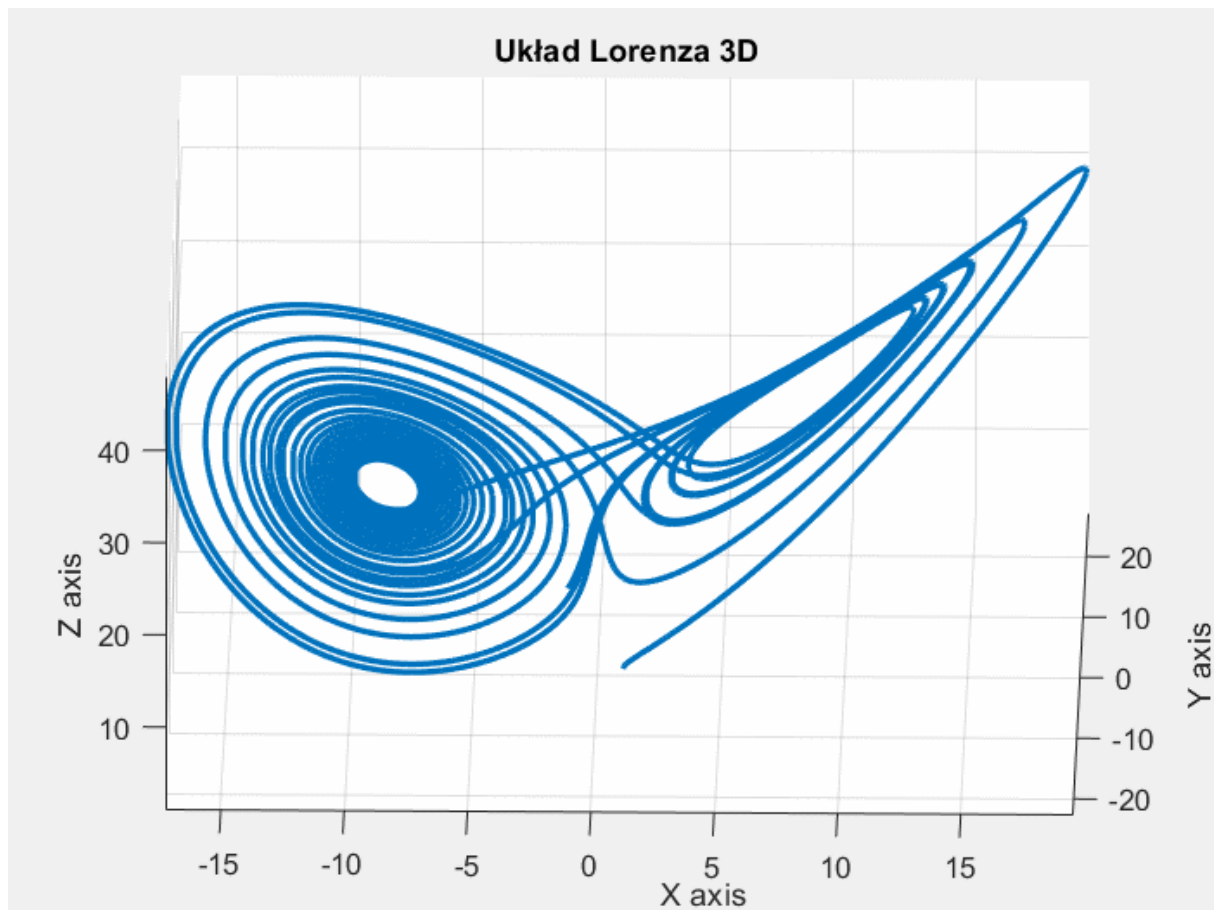
Rysunek 3: Schemat w pakiecie Simulink dla układu Lorentza.



Rysunek 4: Wykresy $y(x)$, $z(y)$, $z(x)$ dla czasu $t \in [0, 25]$ przy kroku $dt = 0.001$ dla parametrów $\sigma = 10$, $\theta = 8/3$ i $\rho = 28$ oraz warunków początkowych $x(0) = y(0) = z(0) = 1$ w płaszczyznach 2 wymiarowych XY, YZ, XZ.

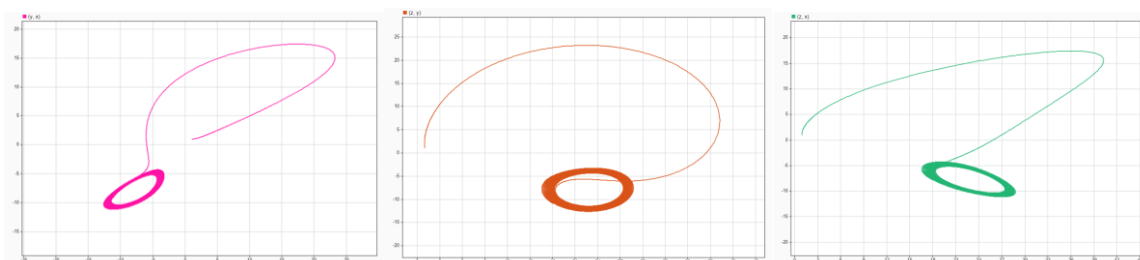
Wykresy przedstawiające rezultat symulacji układu Lorentza dla określonych danych w dwuwymiarowych (Rysunek 4) oraz trójwymiarowych (Rysunek 5) płaszczyznach swoim kształtem przypominają motyla. Jest to tak zwany atraktor Lorentza wskazujący na chaos deterministyczny w układzie równań².

² [Bustowicz, M. \(2012\). Analiza układu Lorentza niecałkowitego rzędu. Pomiary, Automatyka, Robotyka, 2\(2012\), 306.](#)



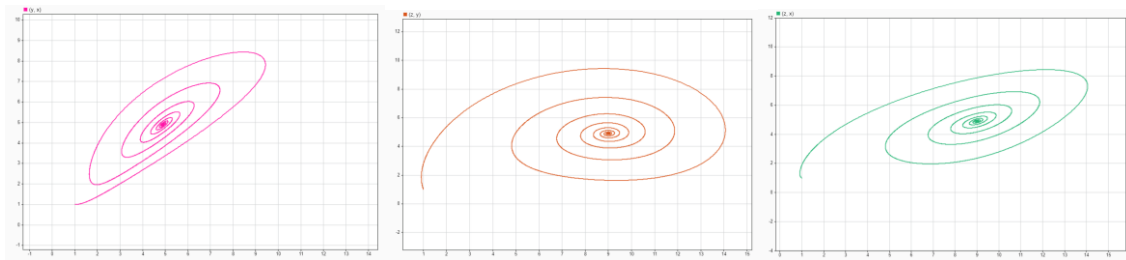
Rysunek 5: Wykres $z(x,y)$ dla czasu $t \in [0, 25]$ przy kroku $dt = 0.001$ dla parametrów $\sigma = 10$, $\theta = 8/3$ i $\rho = 28$ oraz warunków początkowych $x(0) = y(0) = z(0) = 1$ na płaszczyźnie 3-wymiarowej.

Rezultat symulacji zmienia się dość mocno, gdy zmodyfikuje się wartość parametru ρ na przykład w sytuacji, gdy: $\rho = 24$ otrzymany został następujący rezultat (Rysunek 6.).



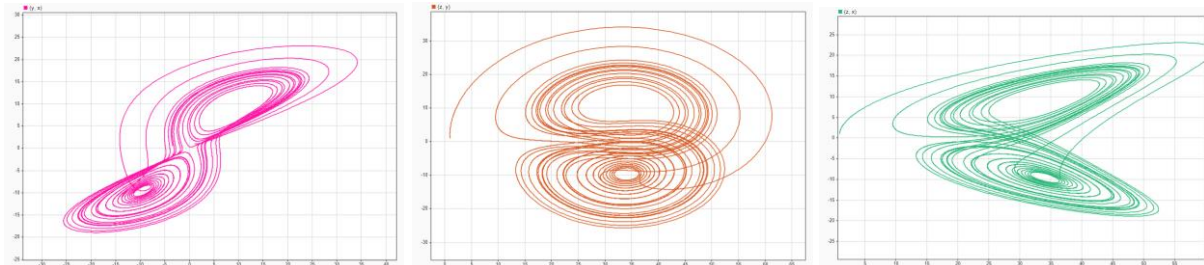
Rysunek 6: Wykresy $y(x)$, $z(y)$, $z(x)$ dla danych jak na rysunku 4 i 5 ze zmienionym parametrem $\rho = 24$, w płaszczyznach 2 wymiarowych XY, YZ, XZ.

Natomiast zmniejszając parametr ρ do wartości 10, otrzymany kształt wydają się mniej rozbudowany niż w poprzednich wywołaniach, co obrazuje Rysunek 7.



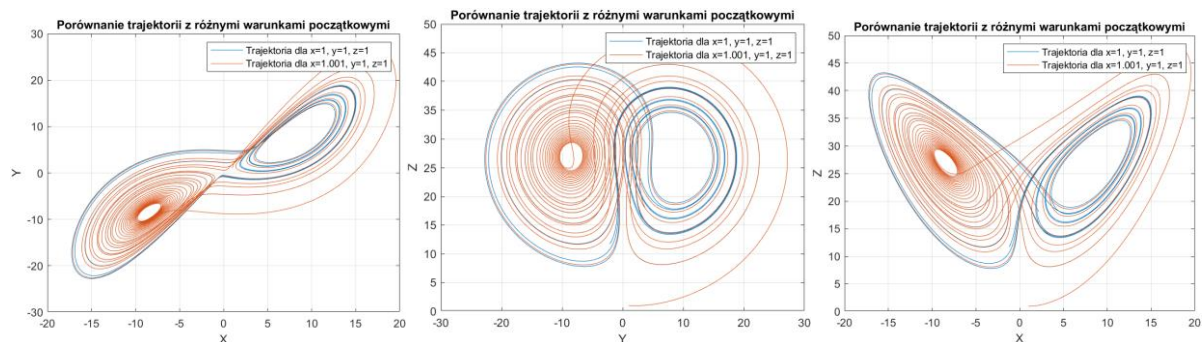
Rysunek 7: Wykresy $y(x)$, $z(y)$, $z(x)$ dla danych jak na rysunku 4 i 5 ze zmienionym parametrem $p = 10$, w płaszczyznach 2 wymiarowych XY, YZ, XZ.

Gdy parametr p zostaje zwiększony do wartości wyższych niż 28, obserwowana zmiana względem symulacji dla wartości 28 (Rysunek 4.) nie jest, aż tak znacząca. Zjawisko to przedstawione jest na Rysunku 8. Gdzie wartość p ustawiona jest na 35.



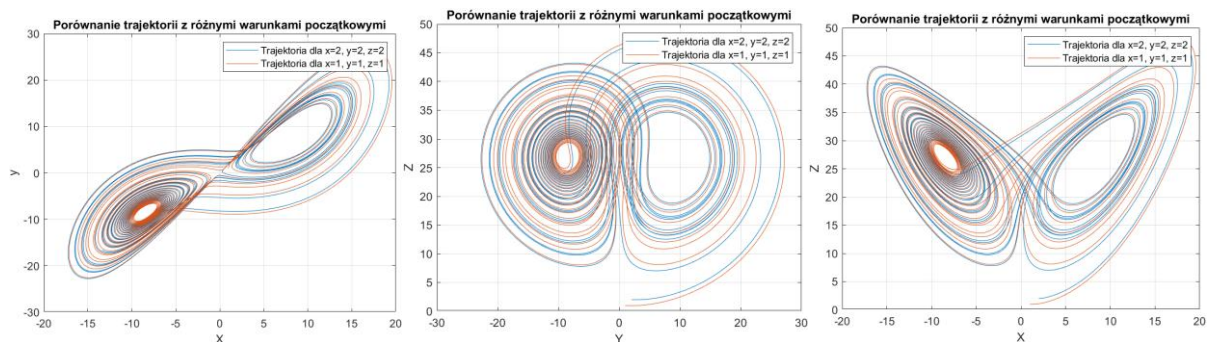
Rysunek 8: Wykresy $y(x)$, $z(y)$, $z(x)$ dla danych jak na rysunku 4 i 5 ze zmienionym parametrem $p = 35$, w płaszczyznach 2 wymiarowych XY, YZ, XZ.

Dla parametrów $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ i $p = 28$ układ Lorenza przejawia dużą wrażliwość nawet na małe zmiany warunków początkowych, co można zaobserwować na Rysunku 9.



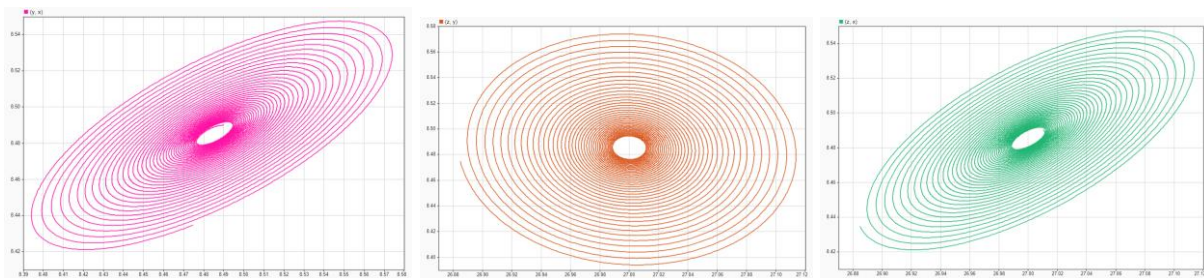
Rysunek 9: Zestawienie wykresów $y(x)$, $z(y)$, $z(x)$ dla parametrów jak na rysunku 4 i 5 ze różnymi warunkami początkowymi: $x=1$ oraz $x=1.001$, y, z bez zmian $= 1$ w płaszczyznach 2 wymiarowych XY, YZ, XZ.

Gdy wartości warunków początkowych zostaną zmienione bardziej, kształt wykresu zmienia się jeszcze mocniej. Zmiana wszystkich warunków początkowych na 2 przy parametrach $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ i $\rho = 28$ przedstawiona jest na Rysunku 10.



Rysunek 10: Zestawienie wykresów $y(x)$, $z(y)$, $z(x)$ dla parametrów jak na rysunku 4 i 5 ze różnymi warunkami początkowymi: $x=2$, $y=2$, $z=2$ oraz $x=1$, $y=1$, $z=1$ w płaszczyznach 2 wymiarowych XY, YZ, XZ.

Warto zauważyć, że dla używanych wcześniej parametrów wykresy te mogą zmienić swój charakter tworząc inne, bardziej regularne kształty, jeśli w znaczący sposób zostaną zmienione warunki początkowe. Przykładem tego są warunki: $x=8.49$, $y=8.49$, $z=27.01$. Wyniki symulacji dla zadanych danych są widoczne na Rysunku 11.



Rysunek 11 Wykresy $y(x)$, $z(y)$, $z(x)$ dla parametrów jak na rysunku 4 i 5 ze zmienionymi warunkami początkowymi $x=8.49$, $y=8.49$, $z=27.01$ w płaszczyznach 2 wymiarowych XY, YZ, XZ

4. Wnioski

Na podstawie przeprowadzonych symulacji układu Lorenza w pakiecie Simulink w środowisku Matlab, można zauważyć zależności użytych parametrów i warunków początkowych na rezultat symulacji. Gdy użyte zostały parametry $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ i $\rho = 28$ układ przejawiał chaotyczny (ale deterministyczny) charakter, który skutkował dużą wrażliwością na zmiany warunków początkowych. Nawet najmniejsza zmiana x_0 z 1 na 1.001 (0.1%) sprawiła, że wykres zmienił swój bieg względem wykresu, gdzie wartości początkowe były równe 1, co można zaobserwować na Rysunku 9. Wrażliwość ta sprawia, że zbadanie konwekcji termicznej, przy pewnych parametrach jest niebywale utrudnione, ze względu na to, że nawet najmniejszy błąd pomiaru w znaczącym stopniu wpływa na wynik.

Warto zaznaczyć, że sytuacja, w której równanie przejawia własności chaotyczne nie jest osiągana zawsze, co pokazane jest na Rysunku 11. Dla wartości początkowych $x=8.49$, $y=8.49$, $z=27.01$, przy parametrach parametry $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ i $\rho = 28$, układ był w tak zwanym punkcie równowagi, a wykres miał znacznie bardziej regularny charakter.