《计算概论A》课程 程序设计部分

函数的递归

李　戈

北京大学 信息科学技术学院 软件研究所

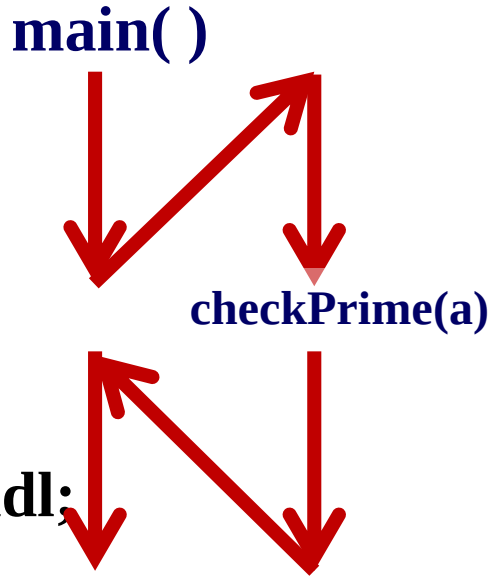
lige@sei.pku.edu.cn

本节内容

- 什么是递归
- 深入理解递归的过程
- 递归的作用
  - 用递归来完成递推
  - 模拟连续发生的动作
  - 进行“自动的分析”

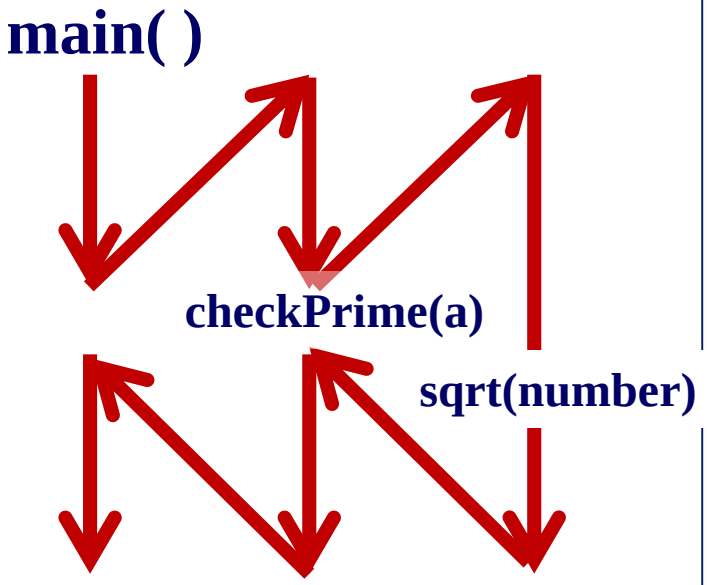
函数的嵌套调用

```
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;
bool checkPrime(int);
int main()
{
        int a;
        cout << "请输入一个整数" << endl;
        while (cin >> a)
        {
                if (checkPrime(a))
                        cout << "是质数" << endl;
                else
                        cout << "不是质数" << endl;
        }
        return 0;
}
```



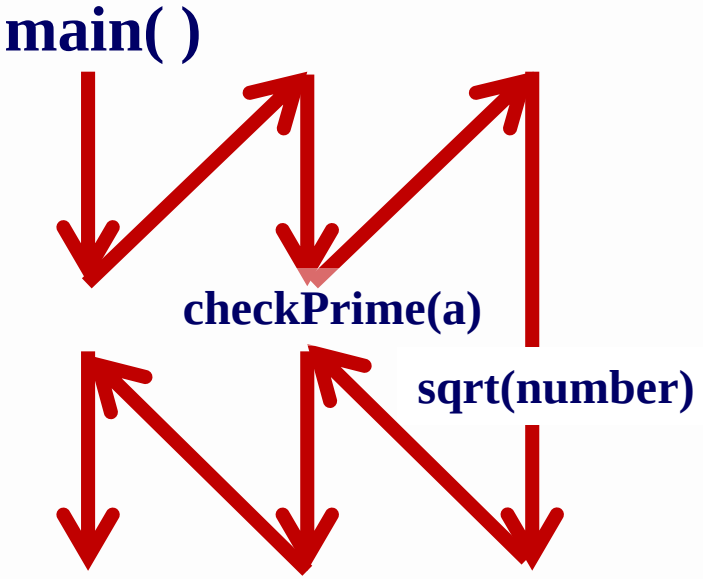
函数的嵌套调用

```
bool checkPrime(int number)
{
        int i, k;
        k = sqrt(number);
        for (i = 2; i <= k; i++)
        {
                if (number % i == 0)
                                        //只要有一个数被除尽
                        return 0;       //则不是素数
        }
        return 1;           //走到这一步，说明没能被除尽
}
```



思路整理

- 我们已经知道
  - **函数不能嵌套定义**
    - 所有函数一律平等
  - **函数可以嵌套调用**
    - 无论嵌套多少层，原理都一样



- 问个问题
  - **一个函数能调用“它自己”吗？**

求 n！

```
#include<iostream>
using namespace std;
int fact(int n)
{
    if (n == 1)
        return 1;
    else
        return n*fact(n-1);
}
int main(){
    cout << fact(4) << endl;
    return 0;
}
```

- **问题：已知n，求 n！**

  n! = (n-1)!*n

  (n-1)! = (n-2)!*(n-1)

  ……

  3! = 2!*3;

  2! = 1!*2

  1! = 1;

- 可知
  - **fact(n) 的值等于 fact(n-1)*n;**
  - **fact(1) = 1;**

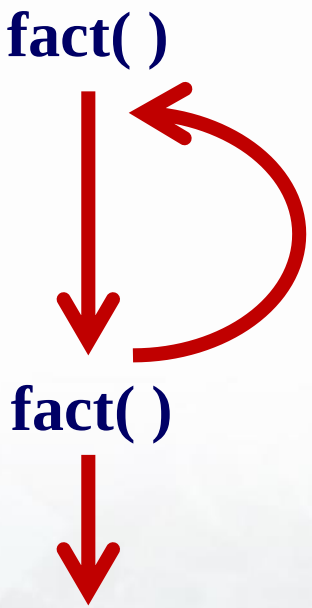
思考一下

```
#include<iostream>
using namespace std;
int fact(int n)
{
    if (n == 1)
        return 1;
    else
        return n*fact(n-1);
}
int main(){
    cout << fact(4) << endl;
    return 0;
}
```

- 这个称为“**递归调用**”
- 什么是递归？

  他说

  - 一个函数在其定义中直接或间接调用自身的一种方法；



函数的执行

```
#include <iostream>
using namespace std;
float max(float a, float b)
{
    return b;
}
int main()
    n);
    return 0;
}
```

(1) 初始化max();
(2) 传递参数；
(3) 保存当前现场；

(1) 接收函数的返回值;
(2) 恢复现场，从断点处继续执行；

main( )

```
int main()
{
    int m = 3, n = 4;
    float result = 0;
    result = max(m, n);
    cout << result;
    return 0;
}
```

max( )

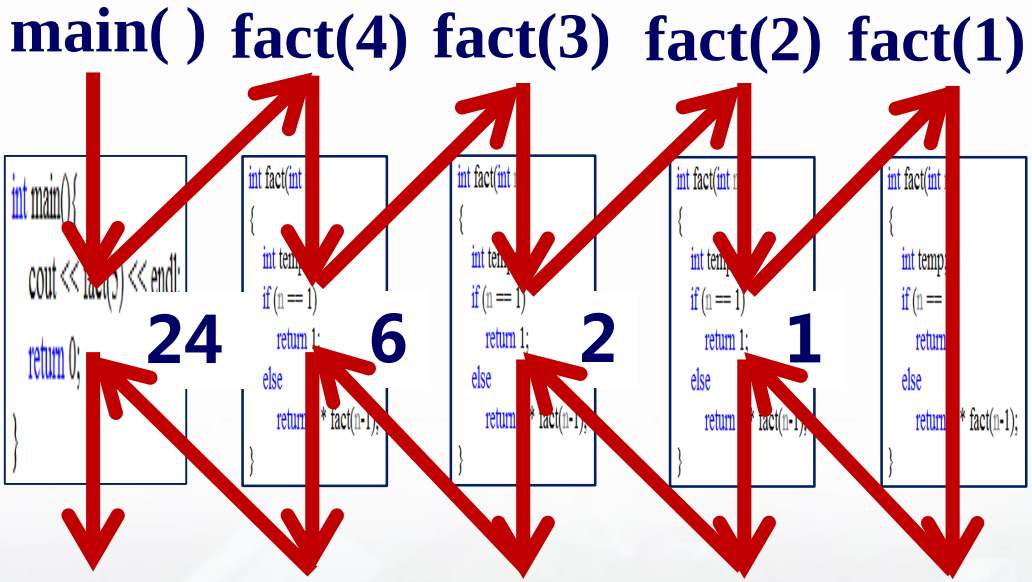
```
float max(float a, float b)
{
    if (a > b
        retur a;
    else
        retur b;
}
```

思考一下

```
#include<iostream>
using namespace std;
int fact(int n)
{
    if (n == 1)
        return 1;
    else
        return n*fact(n-1);
}
int main(){
    cout << fact(4) << endl;
    return 0;
}
```

- 我说

递归调用与普通调用没有区别！！！！！



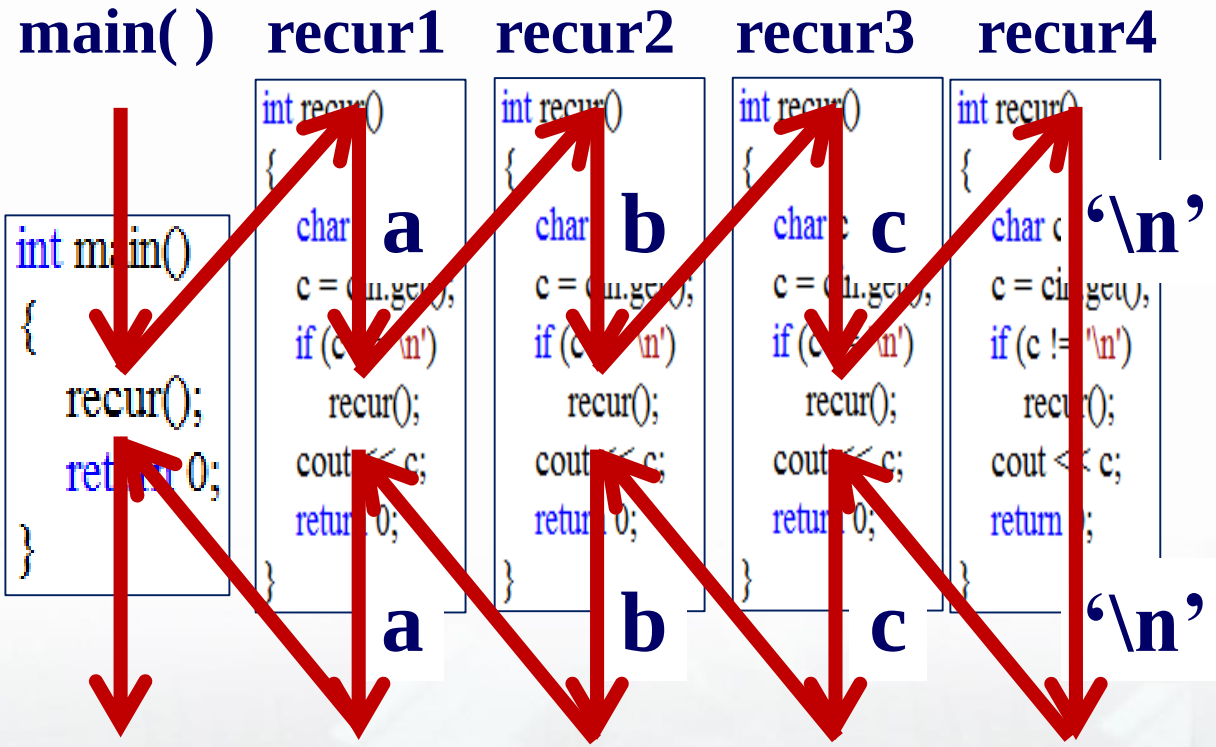
本节内容

- 什么是递归
- 深入理解递归的过程
- 递归的作用
  - 用递归来完成递推
  - 模拟连续发生的动作
  - 进行“自动的分析”

深入理解递归的过程

```
#include<iostream>
using namespace std;
int recur()
{
    char c;
    c = cin.get();
    if (c != '\n')
        recur();
    cout << c;
    return 0;
}
int main()
{
    recur();
    return 0;
}
```

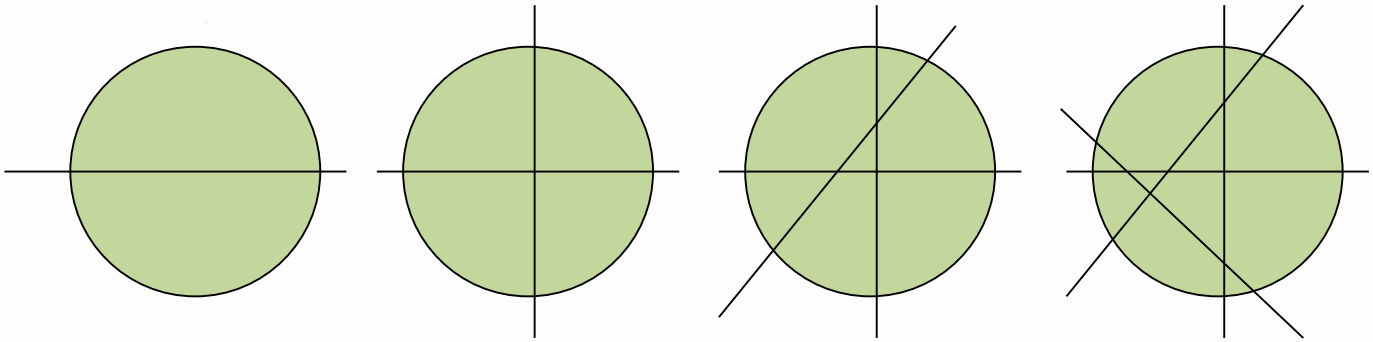
```
abc

cba
```



本节内容

- 什么是递归
- 深入理解递归的过程
- 递归的作用
  - 用递归来完成递推
  - 模拟连续发生的动作
  - 进行“自动的分析”

再从这个例子开始说起



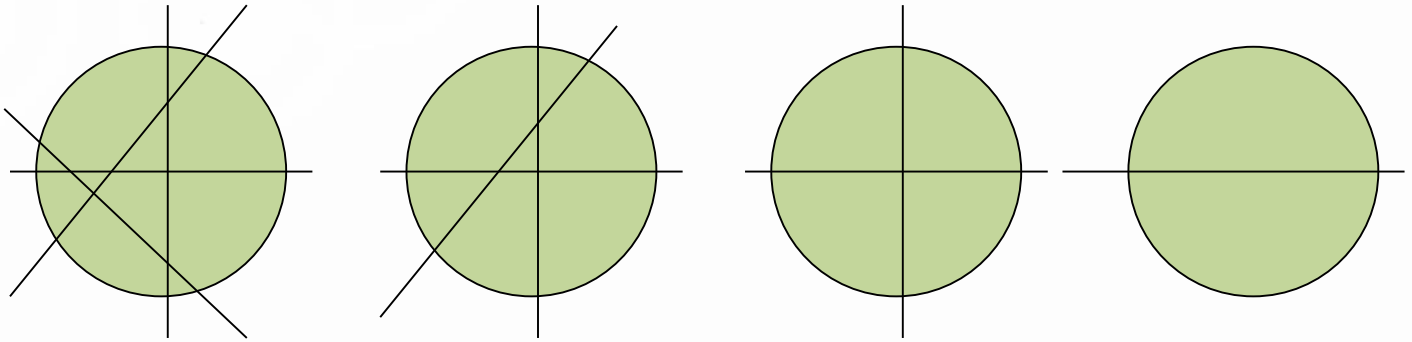
- q(0) = 1;
- q(1) = 1+1=2
- q(2) = 1+1+2=4;
- q(3) = 1+1+2+3=7;
- q(4) = 1+1+2+3+4=11;

… …

- q(n) = q(n-1)+n;

```
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{
    int blockCount = 0;
    int i = 0, N = 0;
    cin >> N;
    blockCount = 1;
    for (i = 1; i <= N; i++)
        blockCount = blockCount + i;
    cout << "最多可切" << blockCount << "块" << endl;
    return 0;
}
```

另一种解决方案



- q(n) = q(n-1)+n;
- q(n-1) = q(n-2)+n-1
- q(n-2) = q(n-3)+n-2

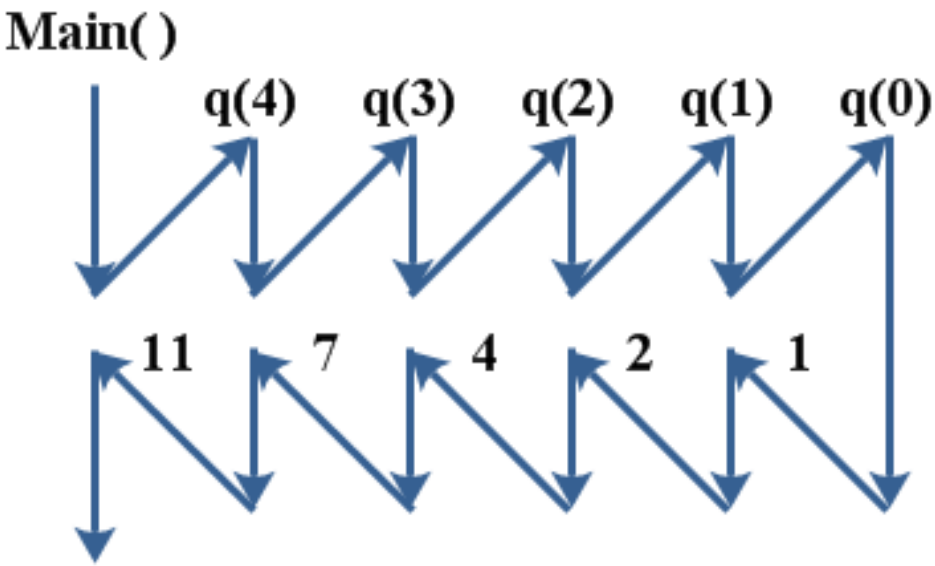
… …

- q(2) = q(1)+2=4;
- q(1) = q(0)+1=2
- q(0) = 1

```
int q(int n)
{
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return(n + q(n - 1));
}
```

另一种解决方案

```
#include<iostream>
using namespace std;
int q(int n){
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return(n + q(n - 1));
}

int main(){
    cout << q(4) << endl;
    return 0;
}
```



递归与递推

- 不同
  - 递推的关注点放在 起始点 条件

  而
  - 递归的关注点放在 求解目标 上
- 相同
  - 重在表现 第i次 与 第i+1次 的关系

用递归实现递推

- 优点
  - 让程序变得简明
- 方法：
  - 把关注点放在要求解的目标上

  进而
  - 找到第n次做与第n-1次做之间的关系；
  - 确定第1次的返回结果；

再看一例

- 斐波那契数列

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144…

- **fab(n)= fab(n-1) + fab(n-2) ;**
- **fab(1)=1, fab(2)=1;**

```
int f(int n)
{
    if (n == 1)
        return 1;
    if (n == 2)
        return 1;
    else
        return(f(n-1)+f(n-2));
}
```

本节内容

- 什么是递归
- 深入理解递归的过程
- 递归的作用
  - 用递归来完成递推
  - 模拟连续发生的动作
  - 进行“自动的分析”

进制转换

- 将123转换成等值的二进制数：

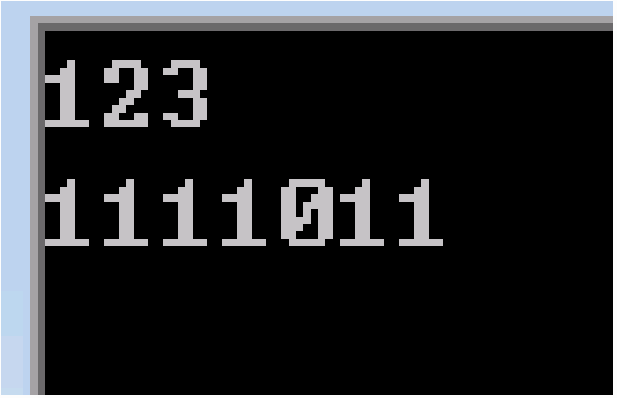
除以2的商（取整）	余数
123/2 = 61	1
61/2 = 30	1
30/2 = 15	0
15/2 = 7	1
7/2 = 3	1
3/2 = 1	1
1/2 = 0	1

- 自下而上收集余数：1111011

```
void convert(int x)
{
    if ((x / 2) != 0)
    {
        convert(x / 2);
        cout << x % 2;
    }
    else
        cout << x;
}
```

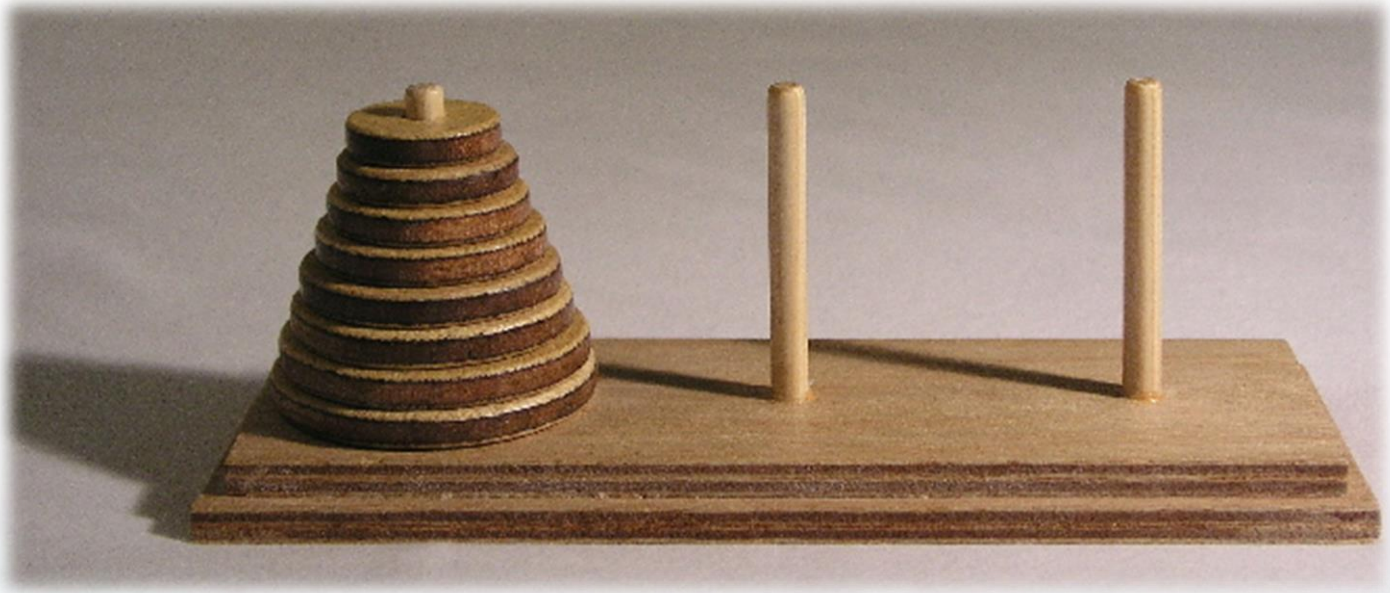
进制转换

```
#include<iostream>
using namespace std;
void convert(int x)
{
    if ((x / 2) != 0)
    {
        convert(x / 2);
        cout << x % 2;
    }
    else
        cout << x;
}
int main()
{
    int x;
    cin >> x;
    convert(x);
    return 0;
}
```



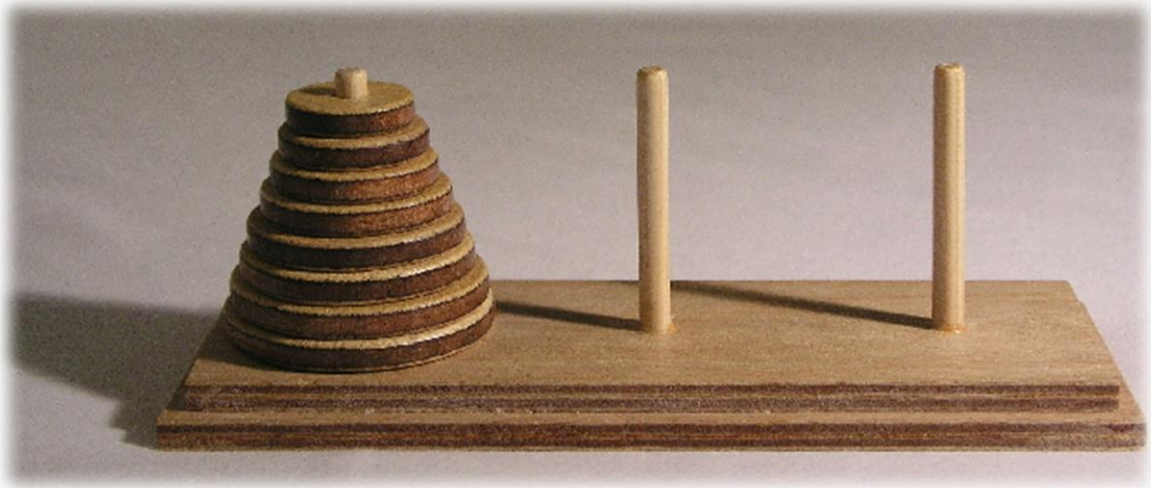
递归经典问题——汉诺塔问题

- 故事：相传在古代印度的Bramah庙中，有位僧人整天把三根柱子上的金盘倒来倒去，他想把64个一个比一个小的金盘从一根柱子上移到另一根柱子上去。移动过程中恪守下述规则：每次只允许移动一只盘，且大盘不得落在小盘上面。
- 有人会觉得这很简单，真的动手移盘就会发现，如以每秒移动一只盘子的话，按照上述规则将64只盘子从一个柱子移至另一个柱子上，所需时间约为5800亿年。



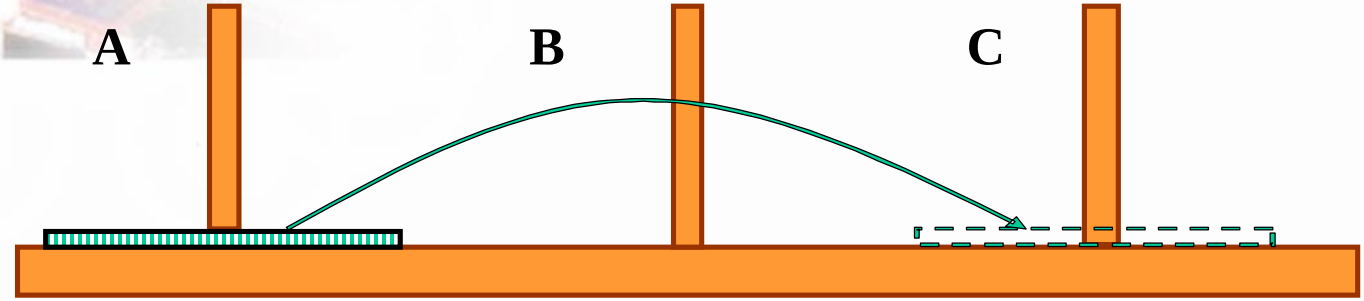
http://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi

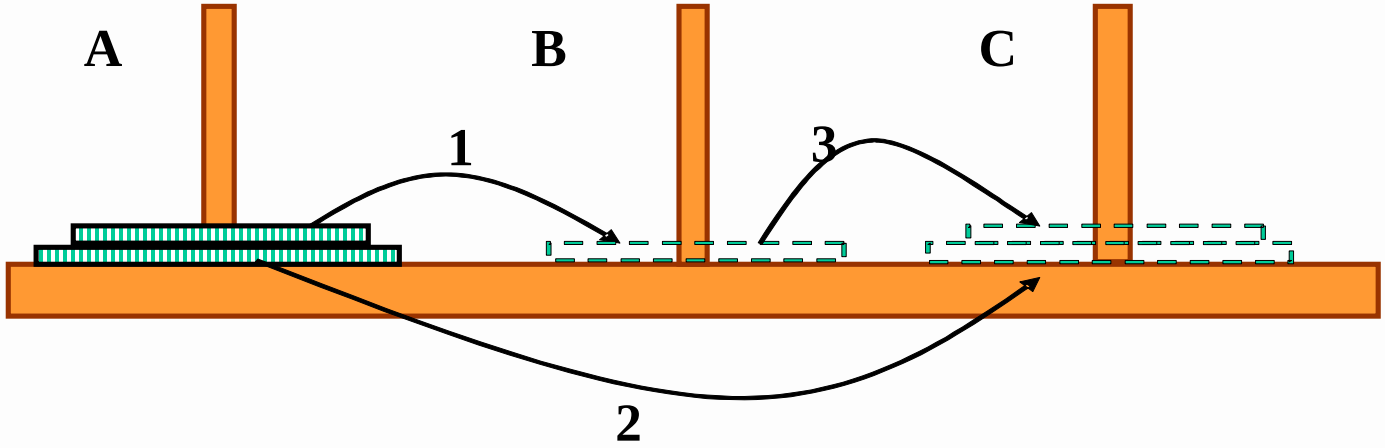
递归经典问题——汉诺塔问题

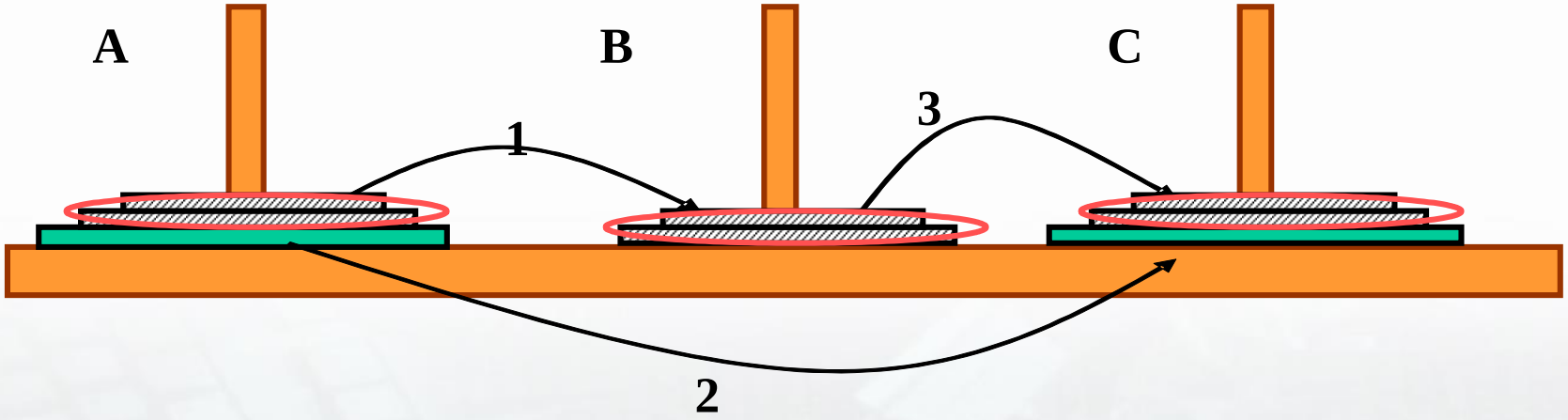


```
请输入盘数n = 4
在3根柱子上移4只盘的步骤为:
把一个盘子从 a 移动到 b
把一个盘子从 a 移动到 c
把一个盘子从 b 移动到 c
把一个盘子从 a 移动到 b
把一个盘子从 c 移动到 a
把一个盘子从 c 移动到 b
把一个盘子从 a 移动到 b
把一个盘子从 a 移动到 c
把一个盘子从 b 移动到 c
把一个盘子从 b 移动到 a
把一个盘子从 c 移动到 a
把一个盘子从 b 移动到 c
把一个盘子从 a 移动到 b
把一个盘子从 a 移动到 c
把一个盘子从 b 移动到 c
```

http://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi


A
B
C


A
B
C
1
3
2


A
B
C
1
3
2

要实现：move(n, A, B, C)

需进行：

move(n-1, A, C, B)
move from A to C
move(n-1, B, A, C)

```
void  move(int m, char x, char y, char z) //将m个盘子从A经过B移动到C
{
   if (m == 1)
   {
      cout << "把一个盘子从 " << x << " 移动到 " << z << endl;
   }
   else
   {
      move(m - 1, x, z, y);
      cout << "把一个盘子从 " << x << " 移动到 " << z << endl;
      move(m - 1, y, x, z);
   }
}
```

```cpp
#include<iostream>
using namespace std;
void  move(int m, char x, char y, char z)
{
    if (m == 1)
    {
        cout << "把一个盘子从 " << x << " 移动到 " << z << endl;
    }
    else
    {
        move(m - 1, x, z, y);
        cout << "把一个盘子从 " << x << " 移动到 " << z << endl;
        move(m - 1, y, x, z);
    }
}
int main() {
    int n;
    cout << "请输入盘数n = ";
    cin >> n;
    cout << "在3根柱子上移" << n << "只盘的步骤为:" << endl;
    move(n, 'A', 'B', 'C');
    return 0;
}
```

```
请输入盘数n = 4
在3根柱子上移4只盘的步骤为:
把一个盘子从 A 移动到 B
把一个盘子从 A 移动到 C
把一个盘子从 B 移动到 C
把一个盘子从 A 移动到 B
把一个盘子从 C 移动到 A
把一个盘子从 C 移动到 B
把一个盘子从 A 移动到 B
把一个盘子从 A 移动到 C
把一个盘子从 B 移动到 C
把一个盘子从 B 移动到 A
把一个盘子从 C 移动到 A
把一个盘子从 B 移动到 C
把一个盘子从 A 移动到 B
把一个盘子从 A 移动到 C
把一个盘子从 B 移动到 C
```

模拟连续发生的动作

- 方法
  - 搞清楚 连续发生的动作是什么；

```
void  move(int m, char x, char y, char z)
```

  - 搞清楚 不同次动作之间的关系；

```
move(m - 1, x, z, y);
cout << "把一个盘子从 " << x << " 移动到 " << z << endl;
move(m - 1, y, x, z);
```

  - 搞清楚 边界条件是什么；

```
if (m == 1)
{
   cout << "把一个盘子从 " << x << " 移动到 " << z << endl;
}
```

本节内容

- 什么是递归
- 深入理解递归的过程
- 递归的作用
  - 用递归来完成递推
  - 模拟连续发生的动作
  - 进行“自动的分析”

逆波兰表达式

- 题目描述
  - 逆波兰表达式是一种把运算符前置的算术表达式:
    - 如 2 + 3 的逆波兰表示法为 + 2 3
    - 如 (2 + 3) * 4 的逆波兰表示法为 × + 2 3 4
  - 编写程序求解任一仅包含+ - * /四个运算符的逆波兰表达式的值。
- 输入 ：× + 11.0 12.0 + 24.0 35.0
- 输出：1357.0

逆波兰表达式

$$\times \div + 12\ 36 + 1\ 3 - 15\ 8$$

$$[\quad notation() \quad]$$

$$\times [\quad notation() \quad][notation()]$$

$$\div [notation()][notation()]$$

$$+[notation()][notation()]$$

$\times \rightarrow notation() \times notation()$

$\div \rightarrow notation() \div notation()$

$+ \rightarrow notation() + notation()$

$- \rightarrow notation() - notation()$

其他字符：将读到的字符串解释为 数；

```
double notation()
{
    char str[10];
    cin >> str;
    switch (str[0])
    {
    case '+': return notation() + notation();
    case '-': return notation() - notation();
    case '*': return notation()* notation();
    case '/': return notation() / notation();
    default: return atof(str);
    }
}
```

逆波兰表达式

```
#include<iostream>
using namespace std;
double notation()
{
    char str[10];
    cin >> str;
    switch (str[0])
    {
    case '+': return notation() + notation();
    case '-': return notation() - notation();
    case '*': return notation()* notation();
    case '/': return notation() / notation();
    default: return atof(str);
    }
}
int main()
{
    cout << notation();
    return 0;
}
```

$$\times \div + 12 \ 36 + 1 \ 3 - 15 \ 8$$

$$((12+36)\div(1+3))\times(15-8)$$

```
* / + 12 36 + 1 3 - 15 8
84
```

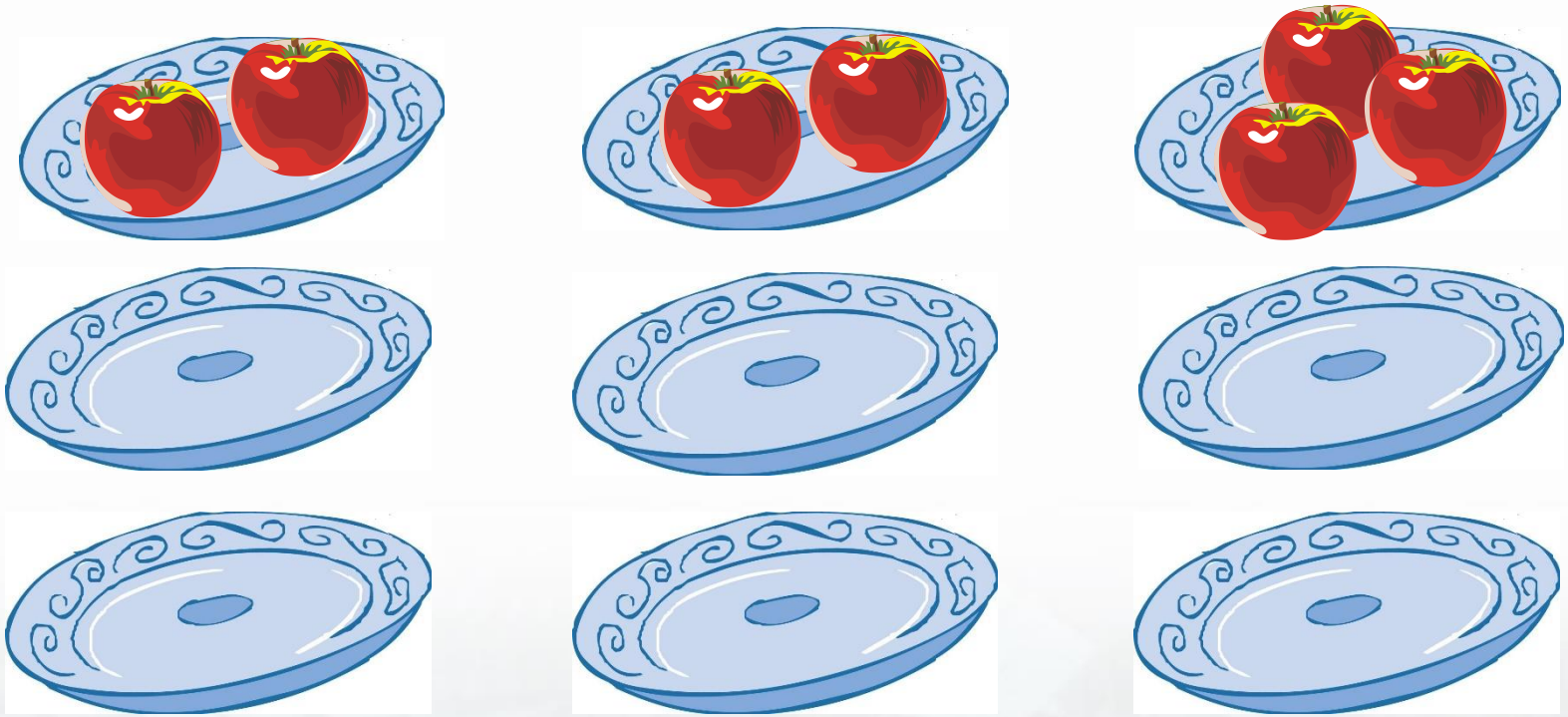
放苹果

- 题目描述
  - 把M个同样的苹果放在N个同样的盘子里，允许有的盘子空着不放，问共有多少种不同的分法？
  - 注意：5，1，1和1，5，1 是同一种分法
  - 输入：7　3
  - 输出：8
- 问题：M个苹果 放入 N个盘子，多少种放法
- 假设：有一个函数 f(m, n) 能告诉我答案；

放苹果

如果：n/盘子数 > M/苹果数

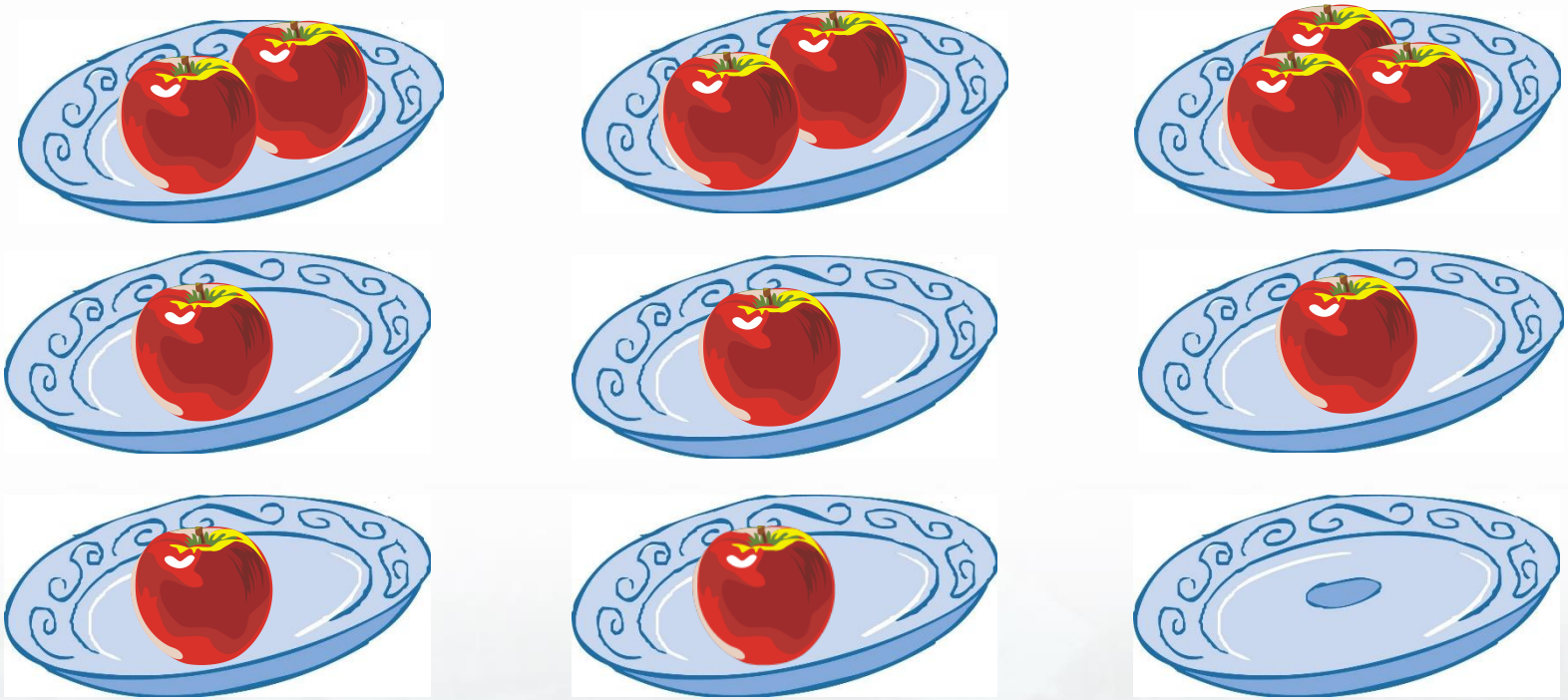
$$if(n>m)\ f(m,n) = f(m,m)$$



放苹果

如果：M/苹果数 >= n/盘子数

- 有盘子空着： f(m , n) = f(m, n-1)
- 没盘子空着： f(m , n) = f(m-n , n)



放苹果

```
#include<iostream>
using namespace std;
int count(int m, int n)
{
    if (m <= 1 || n <= 0) return 1;
    if (m < n)
        return count(m, m);
    else
        return count(m, n - 1) + count(m - n, n);
}
void main()
{
    int apples, plates;
    cin >> apples >> plates;
    cout << count(apples, plates);
}
```

```
100 100
190569292
```

利用递归进行“自动分析”

- 方法
  - 先假设 有一个函数 能 给出答案

```
notation()    count(int m, int n)
```

  - 在利用 这个函数 的前提下，分析如何解决问题；

```
'+': return notation() + notation();
'-': return notation() - notation();
'*': return notation()* notation();
'/': return notation() / notation();
```

```
if (m < n)
    return count(m, m);
else
    return count(m, n - 1) + count(m - n, n);
```

  - 搞清楚 最简单的情况下 答案 是什么.

```
default: return atof(str);
```

```
if (m <= 1 || n <= 1) return 1;
```

总结一下

- 递归的作用
  - 用递归来完成递推
  - 模拟连续发生的动作
  - 进行“自动的分析”

总结一下

- 递归的作用
  - 用递归来完成递推
    - 方法：
      - 把关注点放在要求解的目标上；
      - 找到第n次与第n-1次执行之间的关系；
      - 确定第1次的返回结果；
  - 模拟连续发生的动作
  - 进行“自动的分析”

总结一下

- 递归的作用
  - 用递归来完成递推
  - 模拟连续发生的动作
    - 方法
      - 搞清楚 连续发生的动作是什么；
      - 搞清楚 不同次动作之间的关系；
      - 搞清楚 边界条件是什么；
  - 进行“自动的分析”

总结一下

- 递归的作用
  - 用递归来完成递推
  - 模拟连续发生的动作
  - 进行“自动的分析”
    - 方法
      - 先假设 有一个函数 能 给出答案
      - 在利用 这个函数 的前提下，分析如何解决问题；
      - 搞清楚 最简单的情况下 答案 是什么.

好好想想,有没有问题？

谢　谢！