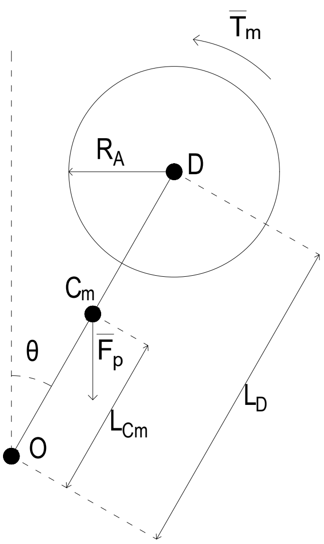
Analisi Fisica del progetto

Il sistema può essere ricondotto a un asta vincolata nel punto O e a un disco vincolato in D che viene messo in moto da un motore.
Lo scopo dell'analisi è capire come varia l'angolo θ con la verticale in modo tale da poterlo controllare controllando il motore che muove il disco.

1 Rappresentazione del sistema



Le caratteristiche del sistema sono:

- O è il punto in cui il sistema è vincolato;
- θ è l'angolo di inclinazione rispetto la verticale dell'asta;
- C_m è il centro di massa dell'intero sistema, considerando anche la ruota;
- L_{C_m} è la distanza del centro di massa C_m dal polo O;
- D è il punto in cui è vincolata la ruota e il motore(non rappresentato);

- L_D è la distanza del punto D dal polo O;
- $\overline{F}_p$ è la forza peso totale agente sul sistema, considerata applicata nel centro di massa;
- $\overline{\tau}_m$ è la coppia che il motore fornisce al sistema;
- I_t è l'inerzia totale del sistema rispetto il polo O;
- I_d è l'inerzia del disco rispetto il punto D;

Per l'analisi considererò trascurabili tutti gli attriti e considerero la coppia del motore linearmente legata alla tensione.
Per la seconda equazione cardinale della meccanica si avrà che:

$$I_t\ddot{\theta} = F_p L_{C_m} \sin(\theta) - \tau_m \tag{1}$$

per chiarezza nell'esposizione pongo $F_p L_{C_m} = K_{mgl}$ in quanto valore costante. Inoltre:

$$\tau_m = I_d \dot{w}_{inerziale} \tag{2}$$

Dove:
$\dot{w}_{inerziale}$ è la velocità angolare assoluta del disco; Infine dai moti relativi vale che:

$$w_{inerziale} = \dot{\theta} + w_R \tag{3}$$

e sostituendo nella 2

$$\tau_m = I_d(\dot{w}_R + \ddot{\theta}) \tag{4}$$

In prima battuta per simulare il sistema si è preferito usare la coppia effettiva sul disco come grandezza di controllo, di conseguenza le equazioni sono state riscritte per l'utilizzo:

$$\ddot{\theta} = \frac{K_{mgl}}{I_t}\sin(\theta) - \frac{\tau_m}{I_t} \tag{5}$$

$$\dot{w}_R = -\ddot{\theta} + \frac{\tau_m}{I_d} \tag{6}$$

Per poter computare il sistema si è attuato un cambio di variabile ponendo:

$$x_1 = \dot{\theta} \qquad \dot{x}_1 = \ddot{\theta} \tag{7}$$

$$x_2 = \theta \qquad \dot{x}_2 = \dot{\theta} \tag{8}$$

$$u = \tau_m \qquad x_3 = w_R \tag{9}$$

date le seguenti sostituzioni il sistema diventa:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{K_{mgl}}{I_t}\sin(x_2) - \frac{1}{I_t}u \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = -\frac{K_{mgl}}{I_t}\sin(x_2) + \left(\frac{1}{I_t} + \frac{1}{I_d}\right)u \end{cases} \tag{10}$$

definiamo quindi il vettore $\dot{X}_1$:

$$\dot{X}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \\ \dot{w}_R \end{bmatrix} \tag{11}$$

Infine definiamo il vettore stato Y come:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{12}$$