Prof. Mauro Alixandrini

Lei de Propagação das Covariâncias

Ajustamento de Observações Geodésicas B

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

Variável aleatória.

- Variável aleatória (v.a.) é uma função que associa a cada elemento de um espaço amostral um número real, ou aquela, cujo valor é o resultado numérico de um experimento aleatório.
- Considerando que cada medida resulta em um único valor, o conjunto destas medidas constitui uma v.a.

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

Dependendo dos valores numéricos, a variável aleatória poderá ser discreta ou contínua. Ela é dita:

- **discreta** quando assume valores em pontos isolados ao longo de uma escala (número finito ou infinito enumerável de valores).
- **contínua** quando assume qualquer valor ao longo de um intervalo (número infinito não enumerável de valores).

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

Se o conjunto que constitui a v.a. é de mesma natureza, diz-se que ele é uma variável aleatória unidimensional.

Entretanto, quando no conjunto têm-se grandezas de natureza diversa, diz-se que é uma v.a. multidimensional.

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

Matriz variância-covariância (M.V.C.)

A estimativa de precisão de uma v.a. é fornecida pelo desvio padrão dessa variável (σ_i).

Quando se tem uma v.a. multidimensional, a precisão é representada pela matriz variância covariância (Σ) que é formada pelas variâncias (σ_i^2) dos i indivíduos ou elementos que compõe a v.a., e pelas covariâcias (σ_{ij}) desses mesmos elementos.

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

Por exemplo, as variâncias σ_i^2 e covariâncias σ_{ij} de um conjunto de n observações (L_b) podem ser dispostas de maneira a formar uma matriz quadrada (nxn), representada por Σ_{Lb}, ou seja:

$$\Sigma_{Lb} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

A matriz Σ_{Lb}, simétrica ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), recebe o nome de matriz variância-covariância (M.V.C.), ou simplesmente matriz covariância (M.C.). No caso das observações serem independentes entre si, as covariância serão nulas e Σ_{Lb} se degenera numa matriz diagonal.

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

Matriz de correlação

Na matriz variância-covariância, como dito anteriormente, a variância (σ_i^2) fornece, através da extração da raiz quadrada, a precisão de cada v.a. e a covariância (σ_{ij}) indica que existe dependência entre elas.

A matriz dos coeficientes de correlação, derivada da matriz variância-covariância, fornece o grau de dependência entre as diversas v.a.

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

onde : $\rho_{ij} = \dfrac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \times \sigma_j}$ – coeficiente de correlação entre a v.a. ***i*** e a ***j***;

σ_{ij} – covariância entre a v.a. ***i*** e a ***j***;

σ_i , σ_j – desvio padrão das v.a. ***i*** e ***j*** .

Os valores dessa matriz variam entre -1 e 1, sendo que se:

$|\rho_{ij}| = 1$ – dependência é total

$|\rho_{ij}| = 0$ – independência é total

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

Exemplo 2 – Dada a matriz variância-covariância da v.a. A, calcule a matriz de correlação associada.

$$\Sigma A = \begin{bmatrix} 36 & 18 & 12 \\ 18 & 9 & 0 \\ 12 & 0 & 16 \end{bmatrix} m^2$$

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

Resolução:

Extraindo-se a raiz quadrada dos elementos da diagonal principal têm-se as precisões dessas variáveis.

$$\sigma_{a1} = 6 \text{ m}; \ \sigma_{a2} = 3 \text{ m}; \ \sigma_{a3} = 16 \text{ m}.$$

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

Aplicando-se a equação da correlação:

$$\rho_{a1a2} = \frac{\sigma_{a1a2}}{\sigma_{a1\times}\sigma_{a2}} = \frac{18}{6 \times 3} = 1 = 100\%$$

$$\rho A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0{,}5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho_{a1a3} = \frac{\sigma_{a1a3}}{\sigma_{a1\times}\sigma_{a3}} = \frac{12}{6 \times 4} = 0{,}5 = 50\%$$

$$\rho_{a2a3} = \frac{\sigma_{a2a3}}{\sigma_{a2\times}\sigma_{a3}} = \frac{0}{3 \times 16} = 0 = 0\%$$

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

A matriz de correlação mostra que o grau de dependência entre as v.a. a_1 e a_2 é de 100%, ou seja, existe 100% de probabilidade de que um erro cometido na medida ou cálculo de a_1 interfira no cálculo de a_2 .

No caso de a_1 com a_3 essa dependência é de 50% e entre a_2 e a_3 é de 0% o que mostra a total independência entre essas duas últimas variáveis.

Lei de Propagação das Covariâncias

Consideremos duas v.a. multidimensionais Y e X, ligadas por um modelo funcional linear:

$$ {}_{m}Y_{1} = {}_{m}G_{n} \times {}_{n}X_{1} + {}_{m}C_{1} $$

onde : G – matriz dos coeficientes;

C – matriz dos termos independentes.

Lei de Propagação das Covariâncias

A Lei de propagação das Covariâncias nos diz que se conhecermos a matriz variância-covariância da v.a. X (Σ_X) e o modelo funcional que a liga com a v.a. Y, a
matriz variância-covariância dessa matriz (Σ_Y) é calculada por:

$$\Sigma Y = G.\Sigma X.G^T$$

Lei de Propagação das Covariâncias

Ou seja, é obtida pela simples multiplicação de matrizes.

Quando o modelo funcional não é linear, a Lei de Propagação toma a seguinte forma:

$$\Sigma Y = D.\Sigma X.D^T$$

onde D é a derivada da função em relação aos valores medidos.

Lei de Propagação das Covariâncias

Este conceito é muito importante porque através dele é possível se determinar qual a precisão das coordenadas de um ponto obtidas com um equipamento com determinada precisão.

Lei de Propagação das Covariâncias

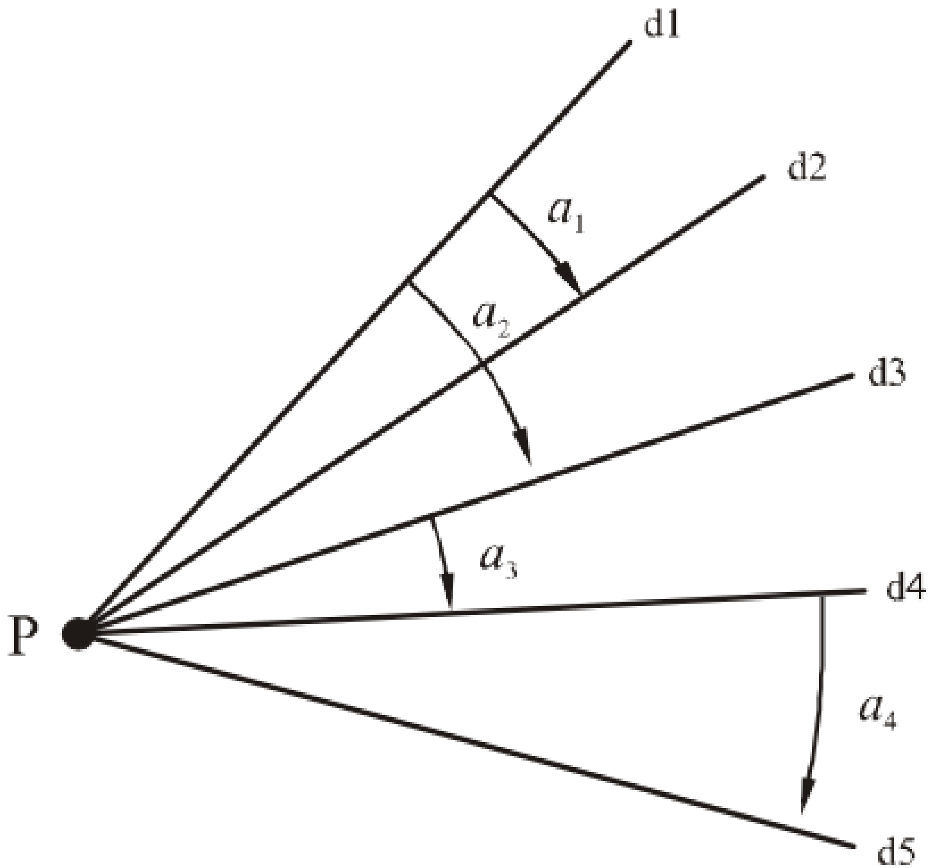
Exemplo 3 - Foram realizadas as medidas de 5 direções (d_1, d_2, d_3, d_4 e d_5) com um equipamento cuja precisão angular é de 5". Pretende-se calcular os ângulos a_1, a_2, a_3 e a_4 entre essa direções conforme a figura a seguir. Ao se determinar o ângulo entre duas direções, qual será a precisão do resultado obtido?

Lei de Propagação das Covariâncias

A priori alguém poderia imaginar que a precisão seria os mesmos 5". Outro acharia que seria o dobro. A propagação das covariâncias resolve o problema.

O primeiro passo é determinar o modelo funcional, ou seja, aquele que mostra a relação entre as direções e os ângulos:

Lei de Propagação das Covariâncias



Lei de Propagação das Covariâncias

$$a_1 = d_2 - d_1 \qquad a_1 = -1\,d_1 + 1\,d_2 + 0\,d_3 + 0\,d_4 + 0\,d_5$$

$$a_2 = d_3 - d_1 \qquad a_2 = -1\,d_1 + 0\,d_2 + 1\,d_3 + 0\,d_4 + 0\,d_5$$

ou

$$a_3 = d_4 - d_3 \qquad a_3 = 0\,d_1 + 0\,d_2 - 1\,d_3 + 1\,d_4 + 0\,d_5$$

$$a_4 = d_5 - d_4 \qquad a_4 = 0\,d_1 + 0\,d_2 + 0\,d_3 - 1\,d_4 + 1\,d_5$$

Lei de Propagação das Covariâncias

Este modelo pode ser escrito na forma matricial e assume o seguinte formato:

$$\begin{bmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \\ a4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d1 \\ d2 \\ d3 \\ d4 \\ d5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad <=> \quad A = G.D + C$$

Lei de Propagação das Covariâncias

O segundo passo reside em se determinar a matriz variânia-covariância das direções (Σ_D).

Sabendo-se que a determinação das direções é independente, pois o erro cometido em uma não afeta a outra, conclui-se que a matriz em questão possui elementos apenas na diagonal principal e iguais a variância ($\sigma_i^2 = 25''^2$), ou seja :

Lei de Propagação das Covariâncias

$$\sum d = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} ('')^2$$

Finalmente aplicando a multiplicação:

$$\sum A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lei de Propagação das Covariâncias

$$\Sigma A = \begin{bmatrix} 50 & 25 & 0 & 0 \\ 25 & 50 & -25 & 0 \\ 0 & -25 & 50 & -25 \\ 0 & 0 & -25 & 50 \end{bmatrix} ('')^2$$

A partir da MVC podem-se fazer algumas considerações:

1. a precisão dos ângulos a1 , a2 , a3 e a4 são iguais $\sigma_i = 7{,}07''$;
2. existe covariância entre as variáveis a1 com a2 , a2 com a3 e a3 com a4 ;
3. não existe covariância entre as variáveis a1 com a3 , a1 com a4 e a2 com a4 ;
4. o fator de correlação entre a1 com a2 , a2 com a3 e a3 com a4 , a menos do sinal, é numericamente igual ao valor determinado pela equação de correlação.

Lei de Propagação das Covariâncias

$$\rho_{a1a2} = \frac{25}{7{,}07 \times 7.07} = 0{,}5 \quad \text{ou} \quad 50\%$$

Este fator de correlação indica que o grau de ependência é da ordem de 50% ou seja, que existe 50% de probabilidade de que um erro cometido no cálculo da variável **a1** interfira no cálculo da variável **a2** . No caso das correlações entre **a2** com **a3** e **a3** com **a4** , o valor é negativo, (ρ**a2a3** = -50% e ρ**a3a4** = -50%)

o que indica que existe 50% de chances de que um erro cometido no cálculo da variável **a2** ou **a3** interfira

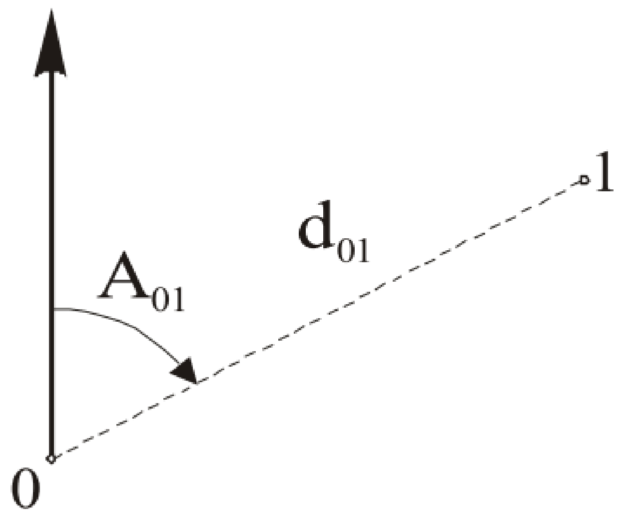
no cálculo da variável **a3** ou **a4** respectivamente e, se isso ocorrer, afetará no sentido inverso.

Lei de Propagação das Covariâncias

Exemplo 4 - Um observador com uma estação total mediu o azimute da direção 01 e a distância entre as estações 0 e 1 a partir do ponto 0 cujas coordenadas são (0, 0). Os valores obtidos foram respectivamente, $A_{01} = 60º$ e $d_{01} = 2.000$ m. Considere que ele utilizou um equipamento cuja precisão angular é de 5" e a linear de ± 5mm ± 5ppm.

Quais são as coordenadas do ponto 1 (x_1 ,y_1) e a respectiva precisão?

Lei de Propagação das Covariâncias



Da mesma forma que no exemplo anterior, o primeiro passo é estabelecer qual o modelo matemático que faz a ligação entre os valores medidos (A01 e d01) com os valores procurados (x1 ,y1).
A fórmula é bastante conhecida da topografia:

$$x_1 = x_0 + d_{01} \times sen A_{01}$$

$$y_1 = y_0 + d_{01} \times \cos A_{01}$$

Lei de Propagação das Covariâncias

Observa-se que esta fórmula é do tipo não linear e, portanto o modelo de propagação é o seguinte:

$$\sum xy = D \times \sum Ad \times D^T$$

Lei de Propagação das Covariâncias

A matriz D é obtida derivando-se as equações de x1 e y1 em relação ao azimute A01 e a distância d01 , obtendo-se as seguintes expressões:

$$\frac{\partial x}{\partial A} = d_{01} \times \cos A_{01} = 1.000 \text{ m} \qquad \frac{\partial x}{\partial d} = senA_{01} = 0{,}866025$$

$$\frac{\partial y}{\partial A} = -d_{01} \times senA_{01} = \text{-}1.732{,}05 \text{ m} \qquad \frac{\partial y}{\partial d} = \cos A_{01} = 0{,}500000$$

Lei de Propagação das Covariâncias

colocando-se estes valores na matriz D, vem :

$$D = \begin{bmatrix} 1.000,00m & 0,866025 \\ -1.732,05m & 0,500000 \end{bmatrix}$$

Lei de Propagação das Covariâncias

Definida a matriz D, o passo seguinte é montar a matriz variância-covariância das observações.

$$\Sigma Ad = \begin{bmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{Ad} \\ \sigma_{dA} & \sigma_d^2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_A^2 = (5'')^2 = 25''^2$$

Lei de Propagação das Covariâncias

Embora este valor esteja correto, é necessário passá-lo para radianos porque, ao se proceder a multiplicação entre as matrizes, se estará misturando metro com segundo de arco.

$$\sigma_A^2 = \left(\frac{5''}{3600} \times \frac{\pi}{180^\circ} \right)^2 = 5{,}876107 \times 10^{-10} \text{ radianos.}$$

Lei de Propagação das Covariâncias

A variância da distância também é originada da precisão do equipamento.

$$\sigma_d^2 = \left(0{,}005m + \frac{5 \cdot 2.000m}{1.000.000}\right)^2 = (0{,}015\ m)^2 = 0{,}000225\ m^2$$

Lei de Propagação das Covariâncias

Finalmente a matriz variância –covariância das coordenas é obtida da seguinte multiplicação:

$$\sum xy = \begin{bmatrix} 1.000{,}00m & 0{,}866025 \\ -1.732{,}05m & 0{,}500000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5{,}876107 \times 10^{-10} & 0 \\ 0 & 0{,}000225m^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000{,}00m & -1.732{,}05m \\ 0{,}866025 & 0{,}500000 \end{bmatrix}$$

$$\sum xy = \begin{bmatrix} 0.00075636 & -0.00092034 \\ -0.00092034 & 0.0018191 \end{bmatrix} \mathrm{m}^2$$

Lei de Propagação das Covariâncias

Da matriz variância-covariância obtém-se as precisões das coordenadas x1 e y1. Então :

$x_1 = 0 + 2000 \times sen(60^o) = 1.732,05$ m e $\sigma_{x1} = \sqrt{0.00075636}$

$y_1 = 0 + 2000 \times cos(60^o) = 1.000,00$ m e $\sigma_{y1} = \sqrt{0.0018191}$

$x_1 = 1.732,05$ m $\pm$ 0,0275 m

$y_1 = 1.000,00$ m $\pm$ 0,0426 m