



EQUAÇÕES

Equação do 1º grau

Chamamos de *equação*, uma sentença matemática composta por dois termos e uma igualdade entre eles. Os termos são representados por meio de números e letras, as quais são denominadas incógnitas ou variáveis e são escritos da seguinte forma:

$$\boxed{\text{1º termo}} \quad \boxed{\text{2º termo}} \quad ax + b = 0$$

onde a, b e x são números reais com $a \neq 0$ e x é um valor desconhecido que está elevado sempre à primeira potência.

Exemplos:

- a) $3x + 2 = 8$ é uma equação que contém uma incógnita x;
- b) $a - 5 = 0$ é uma equação que contém uma incógnita a;
- c) $3m = 12$ é uma equação que contém incógnita m;
- d) $5b - 3c = 0$ é uma equação que contém incógnitas b e c;
- e) $f + 5 = 35 - 2f$ é uma equação que contém incógnita f;
- f) $2 + 4 = 6$ não é equação, pois não possui incógnita;
- g) $2x$ não é equação, pois não possui igualdade.

➤ Raízes de uma equação do primeiro grau

Chamamos de raízes das equações, todos os números reais que, substituídos na incógnita, geram uma igualdade entre os termos, ou seja, tornam a sentença verdadeira. Uma equação do primeiro grau tem sempre uma única raiz real e resolver uma equação significa encontrar sua raiz, o qual realizamos isolando a incógnita, como no exemplo a seguir.

$$2x + 5 = 11$$

1. Como queremos isolar a incógnita no primeiro termo, devemos “passar” os outros valores para o segundo termo. Observe que para que a igualdade continue válida, se diminuirmos 5 no primeiro termo, devemos diminuir 5 também no segundo.

$$2x + 5 - 5 = 11 - 5$$
$$2x = 8$$

2. Da mesma forma, podemos dividir o primeiro termo por 2, tendo que dividir também o segundo.

$$2x : 2 = 8 : 2$$
$$\boxed{x = 4}$$

Encontramos então o valor da incógnita, logo, a equação está resolvida. Podemos conferir se o resultado está correto substituindo o x por 4 na sentença inicial ($2x + 5 = 11$).

Responda: 2 é raiz de quais das equações abaixo?

- a) $5x + 1 = 16$
- b) $2x - 1 = 3$
- c) $5 - 2x = x - 1$
- d) $9x = 36$

Sistemas de equações do 1º grau

Quando temos duas ou mais equações, tendo cada uma delas duas ou mais incógnitas, chamamos a isso de sistema de equações e representamos como o exemplo abaixo.

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 3x + 4y = 72 \end{cases}$$

Podemos encontrar suas raízes utilizando dois diferentes métodos, os quais chamamos de método da adição e método da substituição.

➤ Método da adição

Esse método consiste em somar as duas equações termo a termo. É necessário que ao ser realizada a soma, uma das duas incógnitas “desapareça”. Para isso, devemos multiplicar uma das duas equações por um certo valor que faça com que os coeficientes da incógnita fiquem opostos. Utilizando o sistema acima, se multiplicarmos toda a equação por (-3), os coeficientes do x ficarão opostos, como queremos.

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 3x + 4y = 72 \end{cases} \cdot (-3)$$
$$\begin{cases} -3x - 3y = -60 \\ 3x + 4y = 72 \end{cases}$$

Feito isso, podemos agora somar as equações termo a termo.

$$\begin{cases} -3x - 3y = -60 \\ 3x + 4y = 72 \end{cases}$$
$$0x + 1y = 12$$
$$\therefore y = 12$$

Como já sabemos o valor do y, podemos agora substituí-lo em qualquer uma das duas equações para encontrar o valor do x. Como exemplo, faremos com a primeira.

$$x + y = 20$$
$$x + 12 = 20$$
$$x = 20 - 12$$
$$x = 8$$

Portanto, a solução do nosso sistema é $S = \{8, 12\}$.

➤ Método da substituição

Outro método para solucionar um sistema de equações é o chamado método da substituição, que consiste em isolar uma das incógnitas e uma das equações e depois substituí-la na outra. Observe com o mesmo exemplo anterior:

$$\begin{cases} x + y = 20 & \text{(I)} \\ 3x + 4y = 72 & \text{(II)} \end{cases}$$

Dada a primeira equação, que chamamos de (I), iremos isolar o x da seguinte forma:

$$x + y = 20$$

$$\therefore x = 20 - y$$

Como encontramos uma representação para x , podemos substituí-la na equação (II).

$$3x + 4y = 72$$

$$3.(20 - y) + 4y = 72$$

Agora ficamos com uma equação do primeiro grau com uma incógnita, a qual já aprendemos como resolver.

$$3.(20 - y) + 4y = 72$$

$$60 - 3y + 4y = 72$$

$$-3y + 4y = 72 - 60$$

$$y = 12$$

Sabendo o valor do y , podemos substituí-lo em qualquer uma das equações para encontrar o valor do x . Substituindo y em (II):

$$3x + 4y = 72$$

$$3x + 4 \cdot 12 = 72$$

$$3x + 48 = 72$$

$$3x = 24$$

$$x = 24 : 3$$

$$x = 8$$

Novamente, encontramos o conjunto solução $S = \{8, 12\}$.

Exercícios

- Carlos tinha certa quantia em dinheiro, foi ao shopping e gastou $\frac{1}{3}$ da quantia na compra de uma revista, gastou $\frac{1}{4}$ da quantia na compra de um CD e ainda ficou com R\$ 25,00. Qual era a quantia que Carlos possuía?
a) R\$40,00 b) R\$ 50,00 c) R\$ 60,00 d) R\$ 70,00
- Resolva os seguintes sistemas de equações:
a) $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ -x + y = 2 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 5x - 2y = -5 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x + 2y = 21 \\ 3x - 2y = -17 \end{cases}$
- Numa papelaria o preço de uma borracha é R\$0,70 e o de um lápis R\$1,10. Gastei R\$14,80 comprando lápis e borracha num total de 16 unidades. O número de lápis comprados foi igual a
a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11
- A idade de um pai é igual ao triplo da idade de seu filho. Calcule a idade do pai, sabendo que juntos tem 60 anos.
a) 30 anos b) 40 anos c) 45 anos d) 60 anos
- No Parque de Diversões Dia Feliz, os ingressos custam R\$ 10,00 para adultos e R\$ 6,00 para crianças. No último domingo, com a venda de 400 ingressos, a arrecadação foi de R\$ 3.000,00. A razão entre o número de adultos e crianças pagantes foi:
a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{4}{5}$
- Um comerciante varejista comprou 80 calças de dois tamanhos diferentes, pequeno e médio, gastando R\$ 4300,00. Cada calça de tamanho pequeno custou R\$ 50,00 e cada calça de tamanho médio custou R\$ 60,00. Quantas calças de tamanho pequeno e médio, respectivamente, ele comprou?
a) 30 e 50 b) 37 e 43 c) 40 e 40 d) 43 e 37 e) 50 e 30

Equação do 2º grau

Uma equação do segundo grau é dada no formato $ax^2 + bx + c = 0$, onde a , b e c são coeficientes reais com $a \neq 0$ e x é a incógnita e, como as equações do primeiro grau, são constituídas por dois termos e uma igualdade entre os mesmos.

Exemplos:

- $3x^2 + 4x + 1 = 0$
- $x^2 + 16 = 0$
- $-7x^2 = 0$
- $(x + 1)^2 = 0$

➤ Raízes de uma equação do segundo grau completa

Assim como vimos em equações do primeiro grau, as raízes de uma equação são valores que ao substituírem o x , geram uma igualdade entre os termos. As equações do segundo grau têm no máximo duas raízes reais. Observe o exemplo: dada a equação $x^2 - 8x + 15 = 0$, temos que dois valores a satisfazem, ou seja, essa equação tem duas raízes, que são 3 e 5. Veja:

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

- Para $x = 3$:

$$(3)^2 - 8 \cdot (3) + 15 = 0$$

$$9 - 24 + 15 = 0$$

$$-15 + 15 = 0$$

$$0 = 0$$

- Para $x = 5$:

$$(5)^2 - 8 \cdot (5) + 15 = 0$$

$$25 - 40 + 15 = 0$$

$$25 - 25 = 0$$

$$0 = 0$$

As raízes de uma equação do segundo grau completa podem ser encontradas utilizando diferentes métodos. Apresentaremos os dois mais utilizados, que são a fórmula de Bháskara e o método da soma e produto.

➤ Fórmula de Bháskara

A fórmula de Bháskara é dada pela seguinte sentença:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemplo: Dada a equação $3x^2 - 10x + 3 = 0$, encontrar sua(s) raiz(es).

1º Observe que nessa equação, $a = 3$, $b = -10$ e $c = 3$.

2º Sabendo os valores de a , b e c , substituiremos os mesmos na fórmula de Bháskara:

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6}$$

$$x = \frac{10 \pm 8}{6}$$

A equação terá então duas raízes, as quais chamaremos de x' e x'' .

$$x' = \frac{10 + 8}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$x'' = \frac{10 - 8}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Portanto, as raízes dessa equação são 3 e $\frac{1}{3}$.

A partir do sinal do valor do discriminante Δ , podemos verificar a quantidade de raízes reais que tem a equação.

- Se $\Delta > 0 \rightarrow$ a equação tem duas raízes reais e distintas;
- Se $\Delta = 0 \rightarrow$ a equação tem uma única raiz real (duas raízes iguais);
- Se $\Delta < 0 \rightarrow$ a raiz não tem nenhuma raiz real.

➤ Método da soma e produto

Outra forma de encontrar as raízes de uma equação do segundo grau é utilizando um método de comparação entre a soma e o produto das mesmas, sabendo que

$$S = \frac{-b}{a} \text{ e } P = \frac{c}{a}$$

onde S é o resultado da soma entre as raízes da equação e P é o resultado do produto. Vamos analisar isso utilizando um exemplo.

Exemplo: Dada a equação $x^2 - x + 12 = 0$, encontrar sua(s) raiz(es).

$$x^2 - x - 12 = 0$$

Utilizando as fórmulas acima apresentadas, temos:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-1)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-12}{1} = -12$$

Para encontrar as raízes, devemos pensar em dois números que somados resultam em 1 e multiplicados resultam em -12. Nesse caso, os valores são 4 e -3, pois $4 + (-3) = 1$ e $4 \cdot (-3) = -12$.

➤ Raízes de uma equação do segundo grau incompleta

Equações do segundo grau incompletas são as que não seguem o formato $ax^2 + bx + c = 0$, mas têm dois termos, uma igualdade e uma incógnita elevada ao quadrado.

Equações do tipo $ax^2 + c = 0$

Equações desse tipo são resolvidas de forma semelhante as equações do primeiro grau, pois basta isolar o x.

Exemplo: $3x^2 - 27 = 0$

$$3x^2 - 27 = 0$$

$$3x^2 = 27$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm \sqrt{9}$$

$$x = \pm 3$$

$$\therefore x' = 3 \text{ e } x'' = -3$$

Equações do tipo $ax^2 + bx = 0$

Para resolver equações desse tipo, utilizaremos fatoração.

Exemplo: $5x^2 - 45x = 0$

$$5x^2 - 45x = 0$$

$$x \cdot (5x - 45) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } (5x - 45) = 0$$

$$\Rightarrow 5x - 45 = 0$$

$$5x = 45$$

$$x = 9$$

$$\therefore x' = 0 \text{ e } x'' = 9$$

Exercícios

1. Resolva as seguintes equações completas do segundo grau.

a) $x^2 - 13x + 12 = 0$

b) $x^2 - 8x + 12 = 0$

c) $3x^2 + 4x + 1 = 0$

d) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

2. (CESGRANRIO) A maior raiz da equação $-2x^2 + 3x + 5 = 0$ vale:

- a) -1 b) 1 c) 2 d) 2,5 e) 4,5

3. (CEFET 2002) Qual das equações do segundo grau abaixo possui raízes cujos valores são -2 e 7?

a) $x^2 + 5x + 14 = 0$

b) $-x^2 - 5x - 14 = 0$

c) $x^2 - 5x = 0$

d) $x^2 - 5x - 14 = 0$

4. (ECT-RN 2001) O valor inteiro de x que satisfaz a equação $3x^2 + 8x - 3 = 0$ é:

- a) 1 b) 1/3 c) 3 d) -1/3 e) -3

5. (CEFET 2002) A soma dos quadrados das raízes da equação $x^2 - 2x = 15$ é igual a:

- a) 16 b) 34 c) 25 d) 36

6. (ECT-RN 2005) Qual o valor da Expressão $x^2 - 20x + 100$ se $x = -2$?

- a) 144 b) 140 c) 66 d) -66

7. Duas torneiras enchem um tanque em 6 horas. Sozinha, uma delas gasta 5 horas mais que a outra. Determine o tempo que uma delas leva para encher esse tanque isoladamente.

- a) 3h b) 4h c) 11h d) 15h

8. Considere o seguinte problema: "Achar um número que, somando com 1, seja igual ao seu inverso. Qual das equações representa este problema?"

a) $x^2 - x + 1 = 0$

b) $x^2 + x - 1 = 0$

c) $x^2 - x - 1 = 0$

d) $x^2 + x + 2 = 0$

e) $x^2 - x - 2 = 0$

9. Os alunos de uma turma resolveram comprar um presente custando R\$ 48,00 para o professor de Matemática, dividindo igualmente o gasto entre eles. Depois que 6 alunos recusaram-se a participar da divisão, cada um dos alunos restantes teve que contribuir com mais R\$ 0,40 para a compra do presente. Qual a percentagem de alunos da turma que contribuíram para a compra do presente?

- a) 85% b) 65% c) 60% d) 80% e) 75%

10. Comprei 4 lanches a um certo valor unitário. De outro tipo de lanche, com o mesmo preço unitário, a quantidade comprada foi igual ao valor unitário de cada lanche. Paguei com duas notas de cem reais e recebi R\$ 8,00 de troco. Qual o preço unitário de cada produto?

- a) R\$ 16,00 b) R\$ 14,00 c) R\$ 12,00 d) R\$ 10,00

11. Ao realizar as medições da sala de aula do 9º ano, foi constatado que a área é igual a $15m^2$, onde a largura foi expressa por $x + 1$ e o comprimento por $x + 3$. É correto afirmar que a medida do comprimento é igual a:

- a) 3 m b) 5 m c) 6 m d) 8 m

12. Bento está casado há m anos. Se ele permanecer casado por mais 30 anos, ele irá estar casado por m^2 anos. Pode-se afirmar que Bento está casado há:

- a) 3 anos b) 4 anos c) 5 anos d) 6 anos