Universidade de Évora
Análise Matemática II - 2022/2023
Lista de exercícios 3

1. Seja $f(x,y) = \dfrac{x+y}{xy}$ com $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$.

   Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$.

2. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tais que $g(x,y) = (e^{xy^2}, e^{x^2y}, xy)$ e f é diferenciável em $\mathbb{R}^3$, $f(1,1,0) = (1,0)$ e $f'(1,1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   a) Mostre que g é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

   b) Determine as derivadas $(g \circ f)'(1,1,0)$ e $(f \circ g)'(1,0)$.

3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = 2x^2 - y^2$.

   a) Para $x = \varphi(t) = \mathrm{sen}\, t$ e $y = \psi(t) = \cos t$ calcular $\dfrac{du}{dt}$ designando por $u(t) = f(x,y) = f(\varphi(t), \psi(t))$.

   b) Para $x = \varphi(s,t) = \mathrm{sen}\,(st)$ e $y = \psi(s,t) = \cos\,(st)$ calcular $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ designando por $u(s,t) = f(x,y) = f(\varphi(s,t), \psi(s,t))$.

4. Considere as funções $f(x,y,z) = \left(z, -x^2, -y^2\right)$ e

   $g(x,y,z) = x + y + z$ e sejam $v = (1,2,3)$ e $u = (2,3,\frac{1}{2})$.

   a) Calcule as matrizes jacobianas de f, g e $g \circ f$.

   b) Calcule as seguintes derivadas:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1,1),\ \ \frac{\partial f}{\partial u}(0,0,1),\ \ \frac{\partial g}{\partial v}(0,1,0)\ \text{ e }\ \frac{\partial (g \circ f)}{\partial u}(2,0,1).$$

5. Sejam $g(x,y) = \left(x^2 - y^2 + xy, y^2 - 1\right)$ e $f(u,v) = (u+v, 2u, v^2)$.

   a) Mostre que f e g são diferenciáveis e que $f \circ g$ existe.

   b) Determine a derivada de $f \circ g$ no ponto $(1,1)$:

   (i) Directamente e

   (ii) Usando a regra da cadeia.

6. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que

   $Df_{(0,0,e)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e seja $h(x,y,z) = f\left(xy^2z^3, \mathrm{sen}\, x, ze^{5-y^2}\right)$.

   Calcule $\dfrac{\partial h}{\partial x}(0,-2,1)$.

7. Para a função $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y,z)=\left(x^2+e^z,\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2y+3z}{3}\right)\right),$$

escreva a matriz jacobiana em $(0,0,0)$.

8. Considere a função $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x,y,z)=\left(2x+3y^2+2z,x-\cos y,2y+\operatorname{tg} z\right).$$

a) Calcule a matriz jacobiana e o jacobiano.

b) Determine a derivada de f no ponto $\left(1,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$ segundo o vector $u=(2,-1,3)$.

9. Seja $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável na origem cuja matriz jacobiana nesse ponto é $J_{(0,0,0)}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ e tal que $g(0,0,0)=0$.
Sendo $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ uma função definida por
$F(x,y,z)=g\left(x+y+z,g(x,y,z),xyz\right)$ calcule $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0,0)$.

10. Calcule $\dfrac{d^2u}{dt^2}$ para $t=1$, com

$$u=\frac{z^2}{(x-y)^2},\quad x=t^2-2t,\quad y=\cos(1-t)\quad \text{e}\quad z=\frac{1}{t^2}.$$

11. Considere a função $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x,y,z)=\left(\operatorname{sen}(xy),\cos(xy),xz\right).$$

Calcule o diferencial de f no ponto $P=(0,2,1)$ segundo o vector $u=(-1,2,1)$.

12. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função $f=f(u,v)$ de classe C^2 tal que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(-1,0)=3 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial v}(-1,0)=2.$$

Sendo h a função definida por $h(x,y)=f(x^2-y,xy)$, calcule $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}(0,1)$.

13. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função cujas derivadas mistas de 2^a ordem são nulas e tal que $f\in C^2$.
Para $\varphi(x,y)=x^2-y^2$ e $\psi(x,y)=y^3$, designando por $u(x,y)$ a função composta de f com φ e ψ, $f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$, prove que

$$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x},\ \text{com } x,y\neq 0.$$

14. Dada a função $z(x,y) = \operatorname{tg}\left(x^2 + y^3\right)$, com $x = t^2 + 2t$ e $y = \log t$,

    calcule $\dfrac{dz}{dt}$.

15. Seja a função $f(x,y,z) = 3x - 2y + 4z$, em que $x(t) = \log t$, $y(t) = 3t$,

    $z(t,w) = 2^t + \cos w$.

    Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial w}$.

16. Considere as funções $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ com f de classe $C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ e g definida por

    $$g(x,y,z) = f\left(x-y, y-z, z-x\right).$$

    Mostre que

    $$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = 0,$$

    para qualquer ponto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

17. Prove que a derivada de f segundo um vector depende linearmente de v: Isto é, para $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $a \in D$; $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$ existe se, e só se, $\dfrac{\partial f}{\partial (\alpha v)}(a)$ existe $\forall \alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ e no caso afirmativo:

    $$\frac{\partial f}{\partial \alpha v}(a) = \alpha \frac{\partial f}{\partial v}(a)$$

18. Sejam as funções $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ e $z(s,t) = h\left(x(s,t), y(s,t)\right)$ com $x(s,t) = s^2 - t^2$ e $y(s,t) = 2st$. Prove que

    $$\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} = 4x \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} - 2y\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial h}{\partial y}.$$

19. Determine uma equação da recta normal e do plano tangente, no ponto $P = (3, 4, -2)$, ao cone

    $$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

20. Indique a equação do plano tangente e da recta normal à superfície $3xyz - z^3 = 8$, no ponto com a abcissa nula e ordenada 2.

21. Considere o parabolóide $z = f(x,y) = 1 + 4x^2 + y^2$.

    a) Verifique que o ponto $P = (\frac{1}{2}, \sqrt{3}, 5)$ pertence ao parabolóide.

    b) Determine a equação do plano tangente ao parabolóide em P.

    c) Indique uma equação da recta normal ao parabolóide em P.

    d) Determine o ponto Q de intersecção da recta perpendicular ao gráfico de f em P com o plano XOY.

22. Calcule a divergência e o rotacional das seguintes funções:

    a) $f(x, y, z) = (xy, yz, zx)$

    b) $g(x, y, z) = (xe^y)\ \overrightarrow{e_2} + (yz)\ \overrightarrow{e_3}$

23. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$$

    com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $\rho > 0$. Calcule $\operatorname{div} g$.

24. Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$g(x, y, z) = (x^2 + y - z, xyz^2, 2xy - y^2 z).$$

    Calcule $\operatorname{div} g$ e $\operatorname{rot} g$.

25. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma função de classe $C^2\left(\mathbb{R}^3\right)$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right)$. Prove que

$$\operatorname{rot}(\nabla g) = (0, 0, 0) \ \text{ e que } \ \operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0$$

26. Considere a função $f(x, y) = \log\left(x^2 + y^2\right)$.

    a) Calcule o laplaciano de f.

    b) A função é harmónica? Justifique!

27. Considere a função $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por

$$h(x, y, z) = 5xy + 3x^2y + 2xz + 5yz - z^3.$$

    Calcule:

    a) ∇h.

    b) O hessiano de h em $(0, b, 1)$.

    c) Δh.

28. Calcule a divergência e o rotacional do campo vectorial

$$F(x, y, z) = (x \cos\left(y^2 + z^2\right), y(x + z), ze^{xy}).$$