Universidade de Évora
Análise Matemática II - 2022/2023
Lista de exercícios 1

1. Mostre que:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

2. Considere a norma euclideana em $\mathbb{R}^n$.

   a) Mostre que $\|x\| = \|y\|$ se e só se $(x+y)|(x-y) = 0$.

   b) Mostre que, no caso em que $x|y = 0$, podemos generalizar o Teorema de Pitágoras:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

3. Represente graficamente cada um dos conjuntos seguintes. Para cada um, calcule o seu interior, fronteira, aderência e derivado. Diga, em cada caso, se são conjuntos abertos e/ou conjuntos fechados.

   (a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \cup \{(4,5)\}$;
   (b) $B = [0,1] \times [-1,1[\ \cup \ \{(2,2)\}$;
   (c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 9\} \cup \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \ : n \in \mathbb{N}\}$;
   (d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4 \wedge y \geq 0\} \cup \{(3 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}) \ : n \in \mathbb{N}\}$;
   (e) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 5 \wedge 1 < y < 3\}$;
   (f) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 5 \wedge x < y < x + 5\}$;
   (g) $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : e \leq x < e^3 \wedge 0 < y < \ln x\}$;
   (h) $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq \cos x\}$;
   (i) $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq |x|\}$;
   (j) $J = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1 \wedge y = \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$;
   (k) $K = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$;
   (l) $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| = |x|\}$;
   (m) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1 \wedge xy > 0\}$.

4. Considere o conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1; 0 < y < 1\}$;

   a) Represente graficamente este conjunto;

   b) Defina analiticamente os conjuntos $int(A)$ e $fr(A)$.

5. Para $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{x_1 + x_2}, \log(x_1), \sqrt{9 - x_1^2 - x_2^2}\right)$$

   a) Indique o domínio D de g e represente-o graficamente.

   b) Descreva $\operatorname{int}(D)$, $\operatorname{ext}(D)$ e $\operatorname{fr}(D)$.

6. Encontre o domínio D das funções seguintes e, quando possível, represente-o graficamente:

   a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2-16}$,

   b) $g(x,y) = \log(y+x^2)$,

   c) $h(x,y) = \sqrt{25-x^2-y^2} + \dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$,

   d) $f(x,y) = \operatorname{arcsen}(x+y)$,

7. Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x,y) = \sqrt{25-x^2-y^2} + \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2-9}},$$

   a) Esboce o domínio D de f.

   b) Calcule, se for possível, $f(-3,4)$.

   c) Determine $int(D)$ e $fr(D)$ e $ad(D)$.

   d) Diga, justificando, se D é um conjunto aberto e/ou fechado.

8. Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \sqrt{y-x^2} + \sqrt{x+1-y},$$

   a) Esboce o domínio D de f.

   b) Calcule, se for possível, $f(-1,1)$ e $f(\frac{1}{2},1)$.

   c) Determine $int(D)$ e $fr(D)$ e $ad(D)$ e derivado D'.

   d) Diga, justificando, se D é um conjunto aberto e/ou fechado.

9. Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \log\left(\frac{y}{x}\right) + \operatorname{arcsen}(x^2+y^2)$$

   a) Esboce o domínio D de f.

   b) Calcule, se for possível, $f(-3,4)$.

   c) Determine $int(D)$ e $fr(D)$ e $ad(D)$.

   d) Diga, justificando, se D é um conjunto aberto e/ou fechado.

10. Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = 2x + 4y + 3$$

a) Determine o domínio D de f.

b) Prove, usando a definição, que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 3$.

11. Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$$

a) Determine o domínio D de f.

b) Prove, usando a definição, que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

12. Mostre que existe ou que não existe cada um dos seguintes limites nos pontos indicados:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}$; *b)* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^3}{x^3+y^2}$;

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{4x^2+y^2}}$; *d)* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(x+3y)}{x+y}$.

13. Considere a função $f(x, y) = x \log(xy)$.

a) Mostre que, sendo S uma recta que passa pela origem e contida no domínio D de f, o limite de f na origem relativo ao conjunto S

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}} f(x, y).$$

existe, e com o mesmo valor, para todas as rectas nas condições indicadas.

b) Mostre que não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$. (Sugestão: estude o limite relativo ao subconjunto D formado pelos pontos que pertencem à linha de equação $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$).

14. Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \dfrac{\log(1 - x)}{\log(1 - y)}$.

a) Represente graficamente o domínio D de f e verifique se é um conjunto aberto e/ou fechado.

b) Sendo $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$, calcule, caso exista, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\(x,y)\in S}} f(x, y)$.

c) Sendo $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x - x^2\}$, calcule, caso exista, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\(x,y)\in T}} f(x, y)$.

d) Conclua sobre a existência do limite $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x, y)$.

15. Calcule o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{\dfrac{2x^2 - xy + y^2}{x^2 - y^2}}$.

16. Calcule os seguintes limites nos pontos indicados ou mostre que não existem:

    a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$;

    b) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg} xy}{y}$.

    c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

    d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

    e) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2+y^2-z^2}{\sqrt{x^2+y^2}+z}$.

17. Considere a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^0_+$ definida por $f(x) = \|x\|$. Mostre que é uma função contínua em $\mathbb{R}^n$.

18. Considere a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y-2}{x+3}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    a) Determine o domínio D de f.

    b) Estude a função quanto à continuidade.

19. Considere a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    Estude a função quanto à continuidade. (Sugestão: para estudar o ponto $(0,0)$, considere os caminhos:
    $C_1 = \{(y^2, y) : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ e $C_2 = \{(-y^2, y) : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$)

20. Para as funções seguintes, indique o seu domínio, o limite na origem (se existir) e o conjunto onde a função é contínua:

    a) $f(x,y) = \dfrac{x^2-2}{3+xy}$.

    b) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    c) $h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+3y^2}{3x^2-y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    d) $p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}(y) + y^2 \operatorname{sen}(x)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

e) $r(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{4x^2 + y^2}}$

21. Prove que a função identidade é contínua em $\mathbb{R}^2$.

22. Estude a continuidade das funções:

a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x^2\right)}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

b)

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy + x - 2y - 2}{x - 2}, & x \neq 2, \\ 2x^2, & x = 2. \end{cases}$$