Universidade de Évora

Análise Matemática II - 2022/2023

Lista de exercícios 5

1. Calcular os seguintes integrais duplos :

   a) $\displaystyle\iint_R xy\,(x+y)\,dxdy$ com $R=[0,1]\times[0,2]\,;$

   b) $\displaystyle\iint_R \left(\sqrt{y}+x-3xy^2\right)dxdy$ com $R=[0,1]\times[1,3]\,;$

   c) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} sen^2x\ sen^2y\ dxdy;$

   d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,(x+2y)\ dxdy;$

   e) $\displaystyle\iint_R \left(y^{-3}e^{\frac{t\,x}{y}}\right)dxdy$ com $R=[0,t]\times[1,t]\,,\ t>1.$

2. Esboce a região de integração e calcule os integrais duplos :

   a) $\displaystyle\iint_R (1-x-y)\,dxdy$ com $R=\{(x,y):x,y\geq 0, x+y\leq 1\}\,;$

   b) $\displaystyle\iint_R (x+y)\,dxdy$ com $R=\left\{(x,y):0\leq x\leq 1, x^2\leq y\leq 2x^2\right\};$

   c) $\displaystyle\iint_R \left(x^2+y^2\right)dxdy$ com $R=\left\{(x,y):x^2+y^2\leq 1\right\};$

   d) $\displaystyle\iint_R \tfrac{1}{(x+y)^2}dxdy$ com $R=\{(x,y):1\leq x\leq 2, x\leq y\leq 2x\}\,;$

   e) $\displaystyle\iint_R (x\cos(x+y))\,dxdy$ sendo R a região triangular de vértices $(0,0)$, $(\pi,0)$ e (π,π).

   f) $\displaystyle\iint_R x^2y^2dxdy$ sendo R a região do 1^o quadrante entre as hipérboles $xy=1$ e $xy=2$ e as duas rectas $y=x$ e $y=4x$.

   g) $\displaystyle\iint_R e^{x+y}dxdy$ com $R=\{(x,y):|x|+|y|\leq 1\}\,.$

3. Admitindo que os integrais em causa existem, esboce a região de integração e permute a ordem de integração :

   a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y f(x,y)\ dxdy;$

   b) $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} f(x,y)\ dxdy;$

   c) $\displaystyle\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\ dydx;$

   d) $\displaystyle\int_{-6}^2 \int_{\frac{x^2-4}{4}}^{2-x} f(x,y)\ dydx.$

4. Descreva usando coordenadas polares as seguintes regiões do plano:

   a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\};$

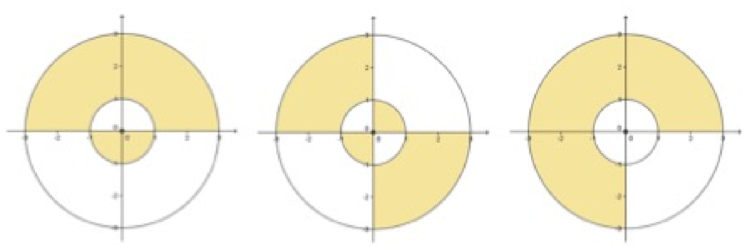
   b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4 \wedge y > 0\};$

   c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 5 \wedge xy > 0\};$

   d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9 \wedge xy < 0\};$

   e) O disco situado entre as duas circunferências de raios 4 e 6;

   f) As regiões a sombreado na figura:



5. Calcular o valor dos integrais, passando para coordenadas polares:

   a) $\displaystyle\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \left(x^2+y^2\right)\ dydx;$

   b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\ dydx;$

   c) $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \left(x^2+y^2\right)\ dxdy.$

6. Considere a aplicação definida pelas equações

$$x = u + v \ , \ y = v - u^2.$$

   a) Calcular o jacobiano $J(u, v)$;
   b) Um triângulo T no plano UOV tem vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, 2)$. Desenhe a sua imagem S no plano XOY;
   c) Calcular a área de S por intermédio de um integral duplo estendido a S e por outro estendido a T;
   d) Calcular

$$\iint_S (x - y + 1)^{-2}\, dxdy.$$

7. Calcule o volume do sólido limitado pelas superfícies:

   (a) $x^2 + y^2 = 4$, $x + y + z = 4$ e $z = 0$.
   (b) $x^2 + y^2 = 4$, $x + y + z = 2$ e $z = 0$.
   (c) $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $xy = 1$, $x = 2$, $y = 0$ e $z = 0$.
   (d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z + y = 2a$ e $z = 0$ $(0 < b < 2a)$.

8. Considere uma placa homogénea com o formato da região S limitada pelas curvas abaixo. Em cada caso represente graficamente a região S e calcule as coordenadas do centro de massa, sabendo que a função densidade é constante:

   a) $y = x^2$ e $x + y = 2$;
   b) $y^2 = x + 3$ e $y^2 = 5 - x$;
   c) $y = sen\ x$, $y = \cos x$ e $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

9. Para cada alínea do exercício anterior, calcule a área de S.

10. Calcular o momento polar de inércia, I_0, de uma placa delgada S no plano XOY, limitada pelas curvas definidas pelas equações abaixo, representando por $f(x, y)$ a densidade de S num ponto arbitrário (x, y) :

   a) $y = sen^2 x$, $y = -sen^2 x$, $\pi \leq x \leq 3\pi$ e $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$;
   b) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $\frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1$, $y = 0$, $0 < c < a$, $b > 0$ e $f(x, y) = 1$;
   c) $xy = 1$, $xy = 2$, $x = 2y$, $y = 2x$, $x > 0$, $y > 0$ e $f(x, y) = 1$;
   d) $y = e^x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$ e $f(x, y) = xy$.

11. Para cada alínea do exercício anterior, calcule a área de S.