Universidade de Évora

Análise Matemática II - 2022/2023

Lista de exercícios 6

1. Calcular os integrais triplos:

   a) $\displaystyle\int_0^a \int_0^b \int_0^c (x+y+z)\ dxdydz,\ a,b,c>0;$

   b) $\displaystyle\int_0^a \int_0^x \int_0^y (xyz)\ dzdydx, a>0;$

   c) $\displaystyle\iiint_S \left(xy^2z^3\right)\ dxdydz$, onde S é o sólido no 1^0 octante $(x>0, y>0, z>0)$, limitado pela superfície $z=xy$ e os planos $y=x$, $x=1$ e $z=0$;

   d) $\displaystyle\iiint_S (1+x+y+z)^{-3}\ dxdydz$, com S o sólido limitado pelos três planos coordenados e pelo plano $x+y+z=1$.

2. Esboce e descreva usando coordenadas cilíndricas as seguintes regiões do espaço:

   a) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=4 \wedge 0<z<4\}$;

   b) $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2<4 \wedge y>0 \wedge -2<z<2\}$;

   c) $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2>5 \wedge xy>0 \wedge -1<z<1\}$;

   d) $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2<9 \wedge xy<0 \wedge z>1\}$;

   e) O cilindro com base no plano $z=-1$, altura 4 e raio da base igual a 5;

   f) O cone com vértice no ponto $(0,0)$ e base de raio 3 assente no plano $z=3$.

3. Esboce e descreva usando coordenadas esféricas as seguintes regiões do espaço:

   a) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=4\}$;

   b) $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2<4 \wedge y>0\}$;

   c) $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2<25 \wedge xy>0\}$;

d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 9 \wedge x^2+y^2+z^2 > 1\}$;

e) A coroa esférica situada entre as esferas centradas na origem e raios 2 e 3;

f) O volume delimitado pelo cone $x^2+y^2 = z^2$ e pela esfera centrada na origem e raio 4.

4. Calcular o volume dos sólidos limitados pelas superfícies dadas, utilizando integrais triplos:

   a) pelos cilindros $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$ e pelos planos $x = -1$ e $x = 2$;

   b) pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$, $z = x^2 + 2y^2$ e pelos planos $y = x$, $y = 2x$ e $x = 1$;

   c) pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, pelo cilindro $y = x^2$ e o plano $y = x$.

5. Calcular o volume dos sólidos limitados pelas superfícies indicadas, utilizando integrais triplos e uma mudança de variáveis conveniente:

   a) pela esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ e pelo parabolóide $x^2+y^2 = 3z$;

   b) pela superfície de equação $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = a^3 x$, $a > 0$;

   c) pela esfera $x^2+y^2+z^2 = r^2$ e pelo parabolóide $x^2+y^2 = r^2 - 2zr$, $z \geq 0$;

   d) pelas esferas $x^2+y^2+z^2 = 1$, $x^2+y^2+z^2 = 16$ e por $x^2+y^2 = z^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, com $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$.