Universidade de Évora

Análise Matemática II - 2022/2023

Lista de exercícios 4

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(\rho, \theta) = (x, y) = (\rho\ \cos(\theta)\,, \rho\ \operatorname{sen}(\theta)\,, \quad \text{com } \rho \geq 0 \text{ e } 0 \leq \theta < 2\pi.$$

a) Calcule $Jf(\rho, \theta)$ (matriz jacobiana de f).

b) Em que condições o teorema da função inversa garante a existência de $f^{-1}(x)$?

c) Determine directamente f^{-1} e $J\left(f^{-1}\right)$ (matriz jacobiana de f^{-1}).

d) Comprove que $J\left(f^{-1}\right)$ obtida na alinea anterior é igual à fornecida pelo TFInversa $J\left(f^{-1}\right) = (Jf)^{-1}$

2. Considere a função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$g(x, y, z) = (u, v, w) = (2x + 3y + 5z, x - y, 2x + 3z).$$

a) Usando o teorema da função inversa, averigue os pontos onde g é invertível.

b) Calcule $J\left(g^{-1}\right)$.

c) Indique $\frac{\partial v}{\partial z}$.

3. Considere uma função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)) = (x + y + z, 2y + z, -x + 2z).$$

a) Determine o jacobiano de g.

b) Que pode afirmar quanto à sua invertibilidade ?

c) Se possível, calcule g^{-1}.

4. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x, y, z) = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2).$$

(a) Determine todos os pontos para os quais o Teorema da Função Inversa garante a existência de uma inversa local para f.

(b) Será f globalmente invertível? Justifique.

(c) Calcule $Df^{-1}(2,2,2)$, onde f^{-1} é a inversa local de f numa vizinhança do ponto $(1,1,1)$.

5. Considere as funções

$$f(u,v,w) = (x,y,z) = (2u + bv + w, u + (b+2)v + 2w, u + 2bw).$$

e

$$g(x,y,z) = (u,v,w) = (bx + 2y + z, 2x + (b+2)y + 2z, 6x - y + 3z).$$

a) Em cada caso, determine o parâmetro b de modo a que as funções sejam invertíveis.

b) Para um valor conveniente de b, determine, para cada uma das funções, a respectiva função inversa.

c) Discuta a diferenciabilidade, as Jacobianas de f e g e suas inversas.

6. Mostre que a equação $x^2y + \operatorname{sen} y = x$ define implicitamente pelo menos uma função diferenciável $y = y(x)$ e expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x e de y, numa vizinhança do ponto $(0,0)$.

7. A função diferenciável $y = y(x)$ é definida implicitamente pela equação

$$y^3 + xy + x^3 = 3.$$

Expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x e de y.

8. Prove que as equações seguintes, definem z como função de x e y numa vizinhança dos pontos referidos e calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ nesses pontos:

a) $\log(x + 2y + 3z) = 4xy$ na vizinhança de $(1,0,0)$.

b) $2x + y - 3z - 1 + \cos(x + 2y + z) = 0$ na vizinhança da origem.

9. Considere a equação $x + 2y - z = \operatorname{sen}(3xyz)$.

a) Verifique a equação define z como função de x e y numa vizinhança do ponto $(0,0,0)$.

b) Mostre que:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 1 \quad \text{e que} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 2.$$

10. Considere a equação

$$x + 2xy + 3z^2 + 2x^2 z = 1.$$

a) Para que valores de z a equação define, implicitamente, z como função de

x e y na vizinhança de $(1, 0, z)$.

b) Calcule as derivadas parciais de z como função de x e y na vizinhança dos pontos anteriores.

c) Nos pontos referidos, calcule

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

11. Considere o sistema

$$\begin{cases} e^u + x\cos v = 0 \\ e^u + y \operatorname{sen} v - 1 = 0. \end{cases}$$

Verifique que este sistema define univocamente e implicitamente u e v como funções de x e y, numa vizinhança de $(-1, 1, 0, 0)$ e calcule

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1,1), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(-1,1), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(-1,1) \text{ e } \frac{\partial v}{\partial y}(-1,1).$$

12. Mostre que a equação

$$e^{x+y+z} + xyz = 1$$

define implicitamente pelo menos uma função diferenciável $g(x, y)$ numa vizinhança de $(0, 0, 0)$ e expresse $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ em termos de x, y, z.

13. Considere o sistema

$$\begin{cases} e^{xy} - u + \log(v + x) = 1, \\ x^2 + y^3 + u^2 - v^3 = 0. \end{cases}$$

a) Mostre que este sistema define implicitamente (u, v) como funções de (x, y), numa vizinhança de $(x, y, u, v) = (0, 1, 0, 1)$.

b) Calcule

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(0,1), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(0,1), \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(0,1) \text{ e } \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(0,1).$$

14. Considere o sistema

$$\begin{cases} xy + \log(z+w) = 0 \\ zw + \log(x+y) = 0. \end{cases}$$

a) Mostre que este sistema define z e w como funções implícitas de x e y, na

vizinhança de $(1,0,1,0)$.

b) Calcule

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \; \frac{\partial z}{\partial y}, \; \frac{\partial w}{\partial x}, \; \frac{\partial w}{\partial y},$$

na vizinhança de $(1,0)$.

15. Calcule o 2^a diferencial da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = e^{2x-y+3z}.$$

16. Escreva a fórmula de Taylor, de ordem 2, da função

$$f(x,y,z) = xyz$$

no ponto $(1,1,1)$.

17. Para $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = xy^4 - e^{x+4y}$, calcule o diferencial de 3^a ordem.

18. Escreva um polinómio de Taylor de grau 2, que aproxime a função $f(x,y) = \operatorname{arctg}(xy)$, em torno do ponto $(1,1)$ e calcule um valor aproximado para $\operatorname{arctg}(0.99)$.

19. Determine, caso existam, os extremos da função

$$f(x,y) = -\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{16}.$$

20. Estude a existência de extremos livres das funções:

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + yz + 2xz - xy$;

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = 2(y^3 + x^2 + xy)$;

c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y) = 2(x-y)^2 - 2(y^4 + x^4)$.

21. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função

$$f(x,y) = ye^{1-x^2-y^2}.$$

22. Determine, caso existam, os extremos da função

$$f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 4z^2.$$

23. Para a função $f(x,y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 1$, prove que qualquer ponto da forma (x,x) ou $(x,-x)$ é um ponto estacionário;

24. Estude os extremos relativos das seguintes funções:

    a) $f(x,y) = y^2 + xy + 3y + 2x + 5$;

    b) $g(x,y) = x^2 + xy - 2y - 2x - 3$;

    c) $h(x,y) = x^2 + y - e^y$;

    d) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy + 2y + 2x + 10$.

25. Determine os extremos de $f(x,y) = 2x - 3y$ que pertencem à elipse $x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 10$.

26. Estude os extremos de $g(x,y,z) = x^2 + 2y + z$ que pertencem aos planos $x + y + z = 2$ e $x + 2y = 1$.

27. Determine três números cuja soma seja 150 e de modo que o produto seja o máximo.

28. Determine e classifique os extremos das funções seguintes nas regiões indicadas:

    a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - x + 3$ na região

    $$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\right\};$$

    b) $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3$ sobre a curva C dada por

    $$4x^2 - 8x + y^2 - 2y + 1 = 0;$$

29. Determine a distância mínima da origem à superfície $z = \dfrac{1}{xy}$.

30. Indique o(s) ponto(s) do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que estão mais próximos do ponto $(4, 2, 0)$.

31. Determine o paralelepípedo rectangular de volume máximo inscrito numa esfera de raio r.

32. Num secador de cereais de formato cilíndrico com raio de 1 metro, a temperatura do ar na saída do secador num ponto (x, y) da secção transversal do tubo de descarga do secador, considerando a origem no centro do tubo, é dada pela função

$$T(x, y) = 8(3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2y + 5).$$

Encontre a maior e a menor temperatura na secção de saída do secador.