Universidade de Évora
Análise Matemática II - 2022/2023
Lista de exercícios 2

1. (Exercício 3.2. da Sebenta) Mostre que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$f(x, y) = (4x, x - y, 3x + y),$$

tem derivada $Df(x, y) = f(x, y)$.

2. (Exercício 3.3. da Sebenta) Calcule as derivadas parciais das seguintes funções escalares :

   a) $f(x, y) = 3x^2y + 2x + y^3 - 1$;

   b) $f(x, y) = xsen(y)$;

   c) $f(x, y) = x^y$;

   d) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$;

   e) $f(x, y, z) = x(y)^z$;

   f) $f(x, y, z) = x\ln(z) + y$.

3. Determine, utilizando a definição, as derivadas parciais de 1^a ordem das seguintes funções, nos pontos indicados:

   a) $f(x, y) = \dfrac{2x + y + 3}{x - 3y + 1}$ em $(-1, 1)$.

   b) $g(s, t) = \sqrt{st}$ em $(1, 1)$.

4. Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2yz^2$. Determine as derivadas parciais num ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

5. Calcule, caso existam, as derivadas parciais de $1\ ^a$ ordem das funções seguintes:

   a) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

   b) $g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

   c) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + 3y^2}{x + y}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ c, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ em função do parâmetro c.

6. Calcule as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ da função seguinte:

$$h(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \operatorname{sen}(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

7. Recorrendo à definição, calcule a derivada das seguintes funções, segundo o vector u e nos pontos, P, indicados.

   a) $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$, $u = (1,1)$ e $P = (2,-1)$.

   b) $g(x,y) = 2x + 5y^2$, $u = (1, \sqrt{2})$ e $P = (-1,1)$.

8. Recorrendo à definição, determine a derivada direccional $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ para P e u indicados.

   a) $f(x,y) = e^{5xy}$, $u = (1,1)$ e $P = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$.

   b) $g(s,t) = \log\left(2 + s + t^2\right)$, $u = (1,0)$ e $P = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

   c) $h(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2,}\;$ $u = (1,2)$ e $P = (1,0)$.

9. Considere a função seguinte:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Mostre que a derivada de f em $(0,0)$ existe, segundo qualquer vector.

10. Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{x\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2}$.

    a) Defina o domínio de f.

    b) Calcule, ou mostre que não existe, o $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

    c) Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$.

    Calcule, se existirem, as derivadas parciais de 1^a ordem de g.

11. Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ chama-se harmónica se, $\forall x \in D$, se verificar a igualdade seguinte:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0.$$

    Verifique que as funções seguintes são harmónicas.

    a) $f(x,y) = e^x \operatorname{sen}(y)$.

    b) $V(x,y,z) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, sendo q e ε_0 constantes.

12. Considere a função $f(x,y,z)=x\sin(yz)$. Determine:

$$a)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\qquad b)\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\qquad c)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},$$

$$d)\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z},\qquad e)\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3},\qquad f)\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2},$$

13. Para as funções

$$\begin{array}{ll} f(x,y)=x^2\cos(x)\ y^3, & g(x,y,z)=\dfrac{2x}{y\ x^2+z^2} \\ h(x,y,z)=\operatorname{arctg}(xyz), & p(x,y)=(3x+2y)^6. \end{array}$$

calcule:

$$a)\ \frac{\partial f}{\partial x},\quad b)\ \frac{\partial f}{\partial y},\quad c)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\quad d)\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\quad e)\ \frac{\partial g}{\partial y},\quad f)\ \frac{\partial g}{\partial z},$$

$$g)\ \frac{\partial^2 g}{\partial z^2},\quad h)\ \frac{\partial^2 h}{\partial y\partial z},\quad i)\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2},\quad j)\ \frac{\partial p}{\partial x},\quad l)\ \frac{\partial^3 p}{\partial y\partial x^2},\quad m)\ \frac{\partial^4 p}{\partial y^2\partial x^2}.$$

14. Mostre que a função $f(x,y)=x^2\log\left(\dfrac{y}{x}\right)$ verifica a igualdade

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2f-2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}.$$

15. A altura em relação ao nível das águas do mar de um ponto (x,y), de uma certa montanha, é dado por

$$z=2500-2x^2-3y^2,\qquad \text{onde } x,y \text{ e } z \text{ são definidos em metros.}$$

O semi-eixo positivo OX aponta para Oriente e o semi-eixo positivo OY indica o Norte. Um montanhista está no ponto $(-10,5,2225)$ e pode caminhar em qualquer direcção.

a) Se se dirigir em direcção a Ocidente, o montanhista estará subindo ou descendo?

b) Se caminhar em direcção a Nordeste, o montanhista estará subindo ou descendo e a que taxa?

c) Em que direcção/direcções deverá caminhar para seguir uma curva de nível?

16. Mostre que as funções seguintes têm derivadas parciais de 1^a ordem na origem mas não são diferenciáveis em $(0,0)$.

a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

b) $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

17. Estude a continuidade e diferenciabilidade das funções seguintes:

    a) $f(x,y) = xy$.

    b) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2x^2 - yx^4}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    c) $h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    d) $p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}(y) + y^2 \operatorname{sen}(x)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    e) $r(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{4x^2+y^2}}$.

18. Calcule o diferencial total das funções:

    a) $z = 2x^2 + y^2 - 5x - 3y$ no ponto $(-2,1)$ para os acréscimos $dx = 0,1$ e $dy = -0,3$.

    b) $z = x^2 \log\left(\dfrac{x}{y}\right)$ no ponto $(1,1)$ para os acréscimos $dx = -0,2$ e $dy = 0,2$.

19. Considere a função $f : \mathbb{R}^n \backslash \{(0,...,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1,...,x_n) = \log\left(\|(x_1,...,x_n)\|\right).$$

    Sabendo que f é diferenciável, determine o diferencial de f num ponto $(x_1,...,x_n)$ relativamente ao vector $h = (h_1,...,h_n)$.

20. Utilizando o conceito de diferencial, indique um valor aproximado nos casos seguintes:

    a) $f(1.02, 0.96)$ para $f(x,y) = 4x^2 + 3xy + \dfrac{x}{y^2}$.

    b) $g(1.003, 1.002)$ para $g(x,y) = \log(y)\, x^2 + \dfrac{y^2}{1+x^2}$.

21. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & x = 0 \text{ ou } y = 0, \\ 1 & x \neq 0 \text{ e } y \neq 0. \end{cases}$$

    a) Mostre que f tem derivadas parciais finitas em $(0,0)$.
    b) Prove que f não é contínua em $(0,0)$.

22. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Mostre que f não é contínua na origem.

b) Calcule a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

c) Calcule a derivada de f segundo o vector $(2,-1)$ no ponto $(1,0)$.

23. Considere $f(x,y) = \left(e^{xy} - 4y^2x + 5x^2y\right)$. Calcule $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$.

24. Considere:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

a) Indique o domínio de definição de f, D.

b) Mostre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$, $\forall (x,y,z) \in D$.

25. Considere a função $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2x$.

Determine $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,2)$.

26. Seja $f(x,y) = (\log x)\sqrt{y}$.

a) Defina o domínio de f.

b) Estude f quanto à diferenciabilidade.

c) Calcule um valor aproximado de $f(1.07, 3.98)$ usando o diferencial.

27. Considere uma função f diferenciável no ponto $(1,2)$ com

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 3.$$

Se $f(1,2) = 4$ indique uma aproximação para o valor de $f(0.99, 2.03)$.

28. Calcular a derivada de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \log(e^{2x} + e^y)$ no ponto $(1,2)$, segundo uma direcção que forma, com o eixo OX, um ângulo de $\dfrac{\pi}{4}$.

29. Mostre que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) + y^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{y}\right), & xy \neq 0, \\ x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \text{ e } y = 0, \\ y^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{y}\right), & x = 0 \text{ e } y \neq 0, \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

é diferenciável na origem apesar de nenhuma das derivadas parciais ser contínua na origem.