Universidade de Évora
Análise Matemática II - 2022/2023

Lista de exercícios
(complementar às Listas 4,5 e 6)

I

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = \left(\text{sen}\,(xy)\,, e^{x^2+y^2}\right);$$

Em que ponto podemos usar o Teorema da Função Inversa para garantir que f é invertível numa sua vizinhança?

☐ *a)* $(1, 1)$; ☐ *b)* $(0, 1)$; ☐ *c)* $(1, \pi/2)$; ☐ *d)* $(\pi/2, -\pi/2)$.

2. As equações

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + \ln u + v = 0 \\ &xy + ux + v^2 = 0 \end{aligned}$$

definem implicitamente (u, v) como função de (x, y) numa vizinhança do ponto $(x, y, u, v) = (-1, 0, 1, -1)$. Indique a opção correcta para $\nabla u\,(-1, 0)$.

☐ *a)* $(2, 1)$; ☐ *b)* $(0, 0)$; ☐ *c)* $(-3, -1)$; ☐ *d)* $(3, 1)$.

3. De acordo com o Teorema da Função Implícita é possível afirmar que a equação

$$xy + (y - 1)^2 + z^2 = 0$$

define y implicitamente como função de x e z, numa vizinhança do ponto (escolha a opção correcta)

☐ *a)* $a = (0, 1, 0)$ ☐ *c)* $a = \left(8, -3, \sqrt{8}\right)$

☐ *b)* $a = (4, -1, 0)$. ☐ *d)* $a = (-1, 1, 1)$

II

4. Determine, caso existam, os extremos locais da seguinte função

$$f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 6x - 6y.$$

5. Encontre os pontos críticos da função f, definida no quadrado $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x < 2,\ -2 < y < 2\}$ e classifique-os, sendo f definida por

$$f(x,y) = e^{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}$$

6. Calcule, caso existam, os extremos da função

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

sujeitos à condição de (x,y) pertencer à elipse

$$x^2 + 4y^2 - 1 = 0.$$

7. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $a \in D$. Sob que condições podemos garantir que $\nabla f(a) = 0$?

☐ *a)* $a \in A$ é um minimizante de f em A

☐ *b)* $a \in fr(A)$ é um minimizante de f em A

☐ *c)* $a \in Ext(A)$ é um minimizante de f em A

☐ *d)* $a \in Int(A)$ é um minimizante de f em A

III

8. Considere o seguinte integral iterado

$$I = \int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \cos\left(x^3\right)\ dx\ dy$$

   (a) Esboce a área de integração
   (b) Inverta a ordem de integração.
   (c) Calcule o integral.

9. Considere em $\mathbb{R}^2$ uma placa homogénea com o formato da região S limitada pelas curvas $y = 1/x, y = 1/2$ e $y = x + 1$.

   (a) Represente graficamente a região S.
   (b) Calcule a massa de S, sabendo que a função densidade é constante.
   (c) Qual a área de S?

10. Considere o sólido em $\mathbb{R}^3$ delimitado inferiormente pelo cone $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ e superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

    (a) Exprima, através de um integral triplo, o volume do sólido.
    (b) Calcule o volume.
    (c) Qual a massa do sólido se a função densidade for constante igual a 5?

11. Descreva o sólido em $\mathbb{R}^3$ descrito em coordenadas polares por

$$\rho = 2\cos\theta; \qquad \text{tomando } z \in [0, 5].$$