TPC 6

Exercício 1: Sejam $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função definida por $\mathbf{f}(x, y) = (1 + x^2 - 2y, 1 - xy)$ e $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 com matriz jacobiana no ponto $(0, 0)$ dada por

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Considerando $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$, indique qual das afirmações seguintes é verdadeira:

☐ $\dfrac{\partial h_1}{\partial x}(1, 1) = -1$

☐ $\dfrac{\partial h_1}{\partial x}(1, 1) = 2$

☐ $\dfrac{\partial h_1}{\partial x}(1, 1) = -4$

☐ $\dfrac{\partial h_1}{\partial x}(1, 1) = 4$

Exercício 2: Sejam $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função definida por $\mathbf{f}(x, y) = (1 + x^2 - 2y, 1 - xy)$ e $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 com matriz jacobiana no ponto $(0, 0)$ dada por

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Determine a matriz jacobiana de $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ no ponto $(1, 1)$.

b) Determine a divergência de $\mathbf{f}$ no ponto $(1, 1)$.

Exercício 3: Seja $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, -y, 0)$. Mostre que $\mathbf{f}$ é um campo vectorial irrotacional $(\operatorname{rot} \mathbf{f}(x, y, z) = 0)$ de divergência nula.

Exercício 4: Sejam f uma função diferenciável e $z = f(x, y)$, onde $x = s + t$ e $y = s - t$. Mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$