

### TPC 5

**Exercício 1:** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^2}.$$

- a) Estude a função  $f$  quanto à continuidade.
- b) Justifique que  $f$  é prolongável por continuidade ao ponto  $(0, 0)$  e indique a função prolongamento  $F$ .
- c) Determine  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$  e  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ .
- d) Estude a função  $F$  quanto à diferenciabilidade.
- e) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de  $F$  no ponto  $(1, 0, F(1, 0))$ .
- f) Determine a derivada de  $F$  no ponto  $(1, 0)$  segundo o vector  $(1, 1)$ ,  $F'_{(1,1)}(1, 0)$ .

**Exercício 2:** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Estude a função  $f$  quanto à continuidade.
- b) Determine  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ .
- c) Estude a função  $f$  quanto à diferenciabilidade.
- d) Determine o gradiente de  $f$  no ponto  $(1, 0)$ .
- e) Determine a derivada de  $f$  no ponto  $(1, 0)$  segundo o vector  $(1, 1)$ ,  $f'_{(1,1)}(1, 0)$ .
- f) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(1, 0, f(1, 0))$ .