

### **TD 3, Variables aléatoires discrètes**

**Exercice 1** — Quelle est la définition d'une probabilité ?

Qu'est-ce qu'une variable aléatoire ? Qu'est-ce que la loi d'une v.a. discrète ?

**Exercice 2** — Soit  $X$  une v.a. dont la loi est donnée par

$$P[X = -1] = 0.2, \quad P[X = 0] = 0.1, \quad P[X = 4] = 0.3, \quad P[X = 5] = 0.4$$

Calculer  $P[X \leq 3]$ ,  $P[X > 2]$ , l'espérance et la variance de  $X$ .

**Exercice 3** — On lance deux dés. Modéliser l'expérience. Quelle est la probabilité pour obtenir au moins un 4 ? Quelle est la probabilité pour que le plus petit donne un nombre inférieur ou égal à 4 ? Quelle est l'espérance de la somme des deux dés ?

**Exercice 4** — On admet que le nombre d'accidents survenant sur une autoroute quotidiennement est une va qui suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda = 3$ . Calculer  $P[X = k]$  pour  $k = 0, \dots, 6$ . Faire une représentation graphique. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 accidents lors d'un jour donné ?

**Exercice 5** — Pour ces expériences aléatoires, donner les espaces fondamentaux  $\Omega$  et les probabilités qui les décrivent. Puis, pour chacune des variables aléatoires que l'on étudie, préciser le nom de la loi, ses paramètres et donner l'expression de  $P(X = k)$ .

a) On lance un dé 20 fois. Quelle est la loi du nombre de 5 obtenus ? Quelle est la probabilité d'obtenir moins de 3 fois un 5 ?

b) Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On prend dans cette urne une boule au hasard, on la remet et on ajoute une boule de la même couleur. Quelle est la loi du nombre de boules blanches dans l'urne ?

c) On recommence ce petit jeu. Quelle est la nouvelle loi du nombre de boules blanches dans l'urne ? Donner aussi la loi du nombre de boules noires et son espérance.

d) Au bord de l'A7, un étudiant fait du stop. En cette saison, un vingtième des automobilistes s'arrête pour prendre un stoppeur. Quelle est la loi du nombre de véhicules que l'étudiant verra passer avant qu'il ne trouve un chauffeur ? Quelle est la probabilité qu'il monte dans la quatrième voiture qui passe ? Quelle est la probabilité qu'il voit passer au moins 6 voitures qui ne s'arrêtent pas ?

**Exercice 6** — Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives  $\mathcal{B}(n, p)$  et  $\mathcal{B}(n', p)$ . Quelle est la loi de la somme  $X + Y$  ?

**Exercice 7** — Un ingénieur d'une entreprise de télécommunication recherche en milieu rural des sites pour implanter des relais pour téléphones portables. Ces sites sont des clochers d'église, châteaux d'eau... Sur une carte IGN, l'ingénieur relève 250 sites potentiels dans sa région. De plus, il utilise le quadrillage de sa carte : sa région est divisée en 100 carreaux. On suppose que les sites potentiels sont répartis uniformément et indépendamment sur le territoire. Étant donné un carreau, quelle est la loi du nombre de sites situés dans ce carreau ? Quelle est la probabilité pour qu'on trouve 5 sites dans ce carreau ? Plus de 5 sites ?

**Exercice 8** — Déterminer la loi de la somme de deux v.a. indépendantes de loi de Poisson.

**Exercice 9** — Un filtre à particules reçoit un flux de particules, dont le nombre par unité de temps suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Il filtre ce flux de telle sorte que les particules non toxiques sont rejetées dans l'air. Ces particules non toxiques sont présentes en proportion  $p$  dans le gaz originel. Quelle est la loi du nombre de particules rejetées dans l'air par unité de temps ?

**Exercice complémentaire** — Un géologue cherche 5 sites potentiels pour exploiter un gisement d'uranium. Après les études de faisabilité, le conseil d'administration choisira le site définitif. Notre géologue charge donc 5 subordonnés de trouver 5 sites vérifiant certaines caractéristiques. Chaque lundi, les employés présentent, lors d'une réunion de travail, un site chacun. On met de côté les sites qui pourraient convenir à première vue. Ces sites seront alors soumis aux études de faisabilité par les employés qui les ont dénichés et on renvoie les autres sur le terrain, jusqu'à ce qu'ils trouvent un site correct.

Soient  $X$  la v.a. égale au nombre de lundis de présentation et  $Y$  la v.a. égale au nombre de sites présentés.

Calculer  $P[X \leq k]$  puis  $P[X = k]$  pour  $k \in \mathbb{N}$ . Puis déterminer la loi de  $Y$ .

**Exercice complémentaire** — Entre 2000 et 2005, un inspecteur du travail a relevé les accidents du travail dans une grosse entreprise de la région. Il a remarqué qu'un accident survient chaque mois avec une probabilité de 0.24, mais qu'on n'observe qu'exceptionnellement deux accidents le même mois. Depuis 2005, il effectue une visite dans l'entreprise dès que deux accidents ont lieu (pas forcément le même mois). Quelle est la loi du nombre de mois écoulés jusqu'à observer deux accidents. Quel est le nombre moyen de mois ? Peut-on négliger le fait que deux accidents peuvent être observés le même mois ?