Introduction aux probabilités

1 – Analyse combinatoire

Analyse combinatoire

Branche des mathématiques : Comment **compter les objets**

Probabilités combinatoires : utilisent les formules d'analyse combinatoire

Arrangements

Etant donné un ensemble *E* de *n* objets, on appelle **arrangements** de *p* objets **toutes suites ordonnées** de *p* objets pris parmi les *n* objets.
Le nombre d'arrangements de *p* objets pris parmi *n* est noté : A_n^p

$1 \leq p \leq n$ et $n, p \in \mathbb{N}^*$ Si $n < p$, alors $A_n^p = 0$

Deux arrangements de *p* objets sont donc **distincts** s'ils diffèrent par la **nature** des objets qui les composent ou par leur **ordre** dans la suite.

Exemples

- Le nombre de mots de 5 lettres (avec ou sans signification) formés avec les 26 lettres de l'alphabet correspond au nombre d'arrangements possibles avec *p*=5 et *n*=26.

  Répétition possible

- Le tiercé dans l'ordre lors d'une course de 20 chevaux constitue un des arrangements possibles avec *p*=3 et *n*=20

  Pas de répétition

Arrangements

Exemples

Une séquence d'ADN est constituée d'un enchaînement de 4 nucléotides :
[A (Adénine), C (Cytosine), G (Guanine) et T (Thymine)].

Il existe différents arrangements possibles de deux nucléotides (dinucléotides) avec p=2 et n=4.

Répétition possible

Arrangements avec répétition

Arrangements sans répétition

Arrangements avec répétitions

Lorsqu'un objet peut être observé **plusieurs fois** dans un arrangement, le nombre d'**arrangement avec répétition de** *p* objets pris parmi *n*, est alors :

$$A_n^p = n^p \qquad \text{avec } 1 \leq p \leq n$$

Le nombre de dinucléotides attendus sous l'hypothèse qu'une base peut être observée plusieurs fois dans la séquence (Ce qui est vrai en réalité) est donc :
$A_4^2 = 4^2$ = 16 dinucléotides possibles

Les 16 dinucléotides identifiables dans une séquence d'ADN sont :

AA AC AG AT CA **CC** CG CT
GA GC **GG** GT TA TC TG **TT**

Arrangements sans répétitions

Lorsque chaque objet ne peut être observé qu'*une seule fois* dans un arrangement, le nombre d'**arrangements sans répétition** de *p* objets pris parmi *n* est alors :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \qquad \text{avec } 1 \leq p \leq n$$

Pour le premier objet tiré, il y a ***n*** manières de ranger l'objet parmi *n*.
Pour le second objet tiré, il n'existe plus que ***n-1*** manières de ranger l'objet parmi n

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots.(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

le nombre de dinucléotides attendu dans une séquence sans répétition est donc :

$$A_n^p = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

~~AA~~ AC AG AT CA ~~CC~~ CG CT
GA GC ~~GG~~ GT TA TC TG ~~TT~~

Permutations sans répétitions

Etant donné un ensemble E de n objets, on appelle permutations de n objets distincts **toutes suites ordonnées de n objets ou tout arrangement n à n** de ces objets.
Le nombre de permutations de n objets est noté :

$$P_n = n!$$

La permutation de n objets constitue un cas particulier d'arrangement sans répétition de p objets pris parmi n lorsque p = n

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \mathrm{n}!$$

Exemple

Le nombre de manières de disposer 8 invités autour d'une table :

$$P_8 = 8! = 40\,320$$

Permutations avec répétitions

Dans le cas où **on répète k fois un même objet** parmi les n objets, le nombre de permutations possibles des n objets doit être rapporté aux nombres de permutations des k objets identiques.
Le nombre de permutations de *n* objets :

$$P_n = \frac{n!}{k!}$$

Exemple

Soit le mot « CELLULE ».
Le nombre de mots possibles que l'on peut écrire en permutant ces 7 lettres est :

$$P_7 = \frac{7!}{3!\,2!}$$

Combinaisons

Les combinaisons correspondent à des arrangements où la notion d'ordre des objets n'est plus prise en compte.

Le nombre de **combinaisons** de *p* objets pris parmi *n* et **sans remise** est :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Notation moderne

$$C_n^p = \binom{n}{p}$$

Avec $1 \leq p \leq n$

Si $n < p$, alors $C_n^p = 0$

Exemple

- Le tirage au hasard de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes est une combinaison avec p=5 et n=32.
- La formation d'une délégation de 5 personnes parmi un groupe de 50 constitue une combinaison avec p=5 et n=50.

Propriétés des combinaisons

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Symétrie

$C_n^0 = C_n^n = 1$

$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$ $\quad$ $n \geq 1$

$C_n^2 = C_n^{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ $\quad$ $n \geq 2$

$\Rightarrow$ $C_n^p = C_n^{n-p}$

si $0 \leq p \leq n$

Formule de Pascal

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$$

si $0 \leq p \leq n-1$

Binôme de Newton

La formule du binôme de Newton correspond à la décomposition des différents termes de la puissance $n^{\text{ième}}$ du binôme (a+b)

$$\forall(a,b) \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

Exemple

$$(a+b)^6 = \sum_{p=0}^{6} \binom{6}{p} a^{6-p} b^p$$

$$(a+b)^6 = \binom{6}{0} a^6 + \binom{6}{1} a^5 b + \binom{6}{2} a^4 b^2 + \binom{6}{3} a^3 b^3 + \binom{6}{4} a^2 b^4 + \binom{6}{5} a b^5 + \binom{6}{6} b^6$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 4 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$$

***Remarque** : si a=b=1* $\quad (2)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p$

2 – Le modèle probabiliste

Introduction

Le calcul des probabilités fournit une modélisation efficace des situations aléatoires ou stochastiques (non déterministes)

Phénomène déterministe : le résultat d'une expérience suit une loi rigoureuse connue (on peut prévoir le résultat pour un événement Donné).

phénomène aléatoire : le résultat de l'expérience n'est pas connu avec certitude mais fluctue autour d'un résultat moyen qui est régit par une loi

probabilité a priori d'un événement est un nombre qui caractérise la croyance que l'on a que cet événement est réalisé avec plus ou moins de certitude avant l'exécution de l'expérience.

probabilité empirique, assimilée à une fréquence est définie à partir d'expériences indéfiniment renouvelables (fréquence d'apparition d'un événement).

Espace fondamental et évènement

Une **expérience** (ou une épreuve) **est aléatoire** si on ne peut pas prévoir son résultat et si, répétée dans des conditions identiques, elle peut donner des résultats différents

Le résultat d'une expérience noté ω constitue une éventualité ou un **événement élémentaire**.
L'espace des possibles noté Ω est appelé **univers.** C'est l'ensemble des événements élémentaires. C'est l'**espace fondamental.**

Exemples

1. Groupe sanguin : Ω = { A+, A-, B+, B-, AB+, AB-, O+, O-}
2. Nombre de globules blancs dans le sang : Ω = N*= {1,2,…..n,…… }
3. Taux de glycémie : Ω = [0 ; 15]
4. Lancer de dé : Ω = {1, 2, ..., 6}
5. Match de Football : Ω = {A gange, B gagne, match nul}

Espace fondamental et évènement

L'univers Ω peut être
Fini (toutes les éventualités sont connues : ex 1)
Infini (toutes les éventualités ne sont pas connues : ex 2 et 3).
Dénombrable si on peut numéroter les éventualités connues (ex 2)
Continu (ex 3).

Un **événement** quelconque A est un ensemble d'évènements élémentaires et constitue **un sous-ensemble de** Ω dont on sait dire à l'issue de l'épreuve s'il est réalisé ou non.

Si un évènement A est réalisé, l'évènement contraire $\bar{A}$ n'est pas réalisé.

Exemples

Rhésus positif : {A+, B+, AB+, O+}
Jet de dé, on obtient un chiffre pair", A = {2, 4, 6}.

Evènement, vocabulaire ensembliste et probabiliste

notations	vocabulaire ensembliste	vocabulaire probabiliste
Ω	ensemble plein	événement certain
$\emptyset$	ensemble vide	événement impossible
ω	élément de Ω	événement élémentaire
A	sous-ensemble de Ω	événement
$\omega \in A$	ω appartient à A	ω réalise A
$A \subset B$	A inclus dans B	A implique B
$A \cup B$	réunion de A et B	A ou B
$A \cap B$	intersection de A et B	A et B
A^c ou $\overline{A}$	complémentaire de A	événement contraire de A
$A \cap B = \emptyset$	A et B disjoints	A et B incompatibles

Quelques propriétés de l’intersection

$A \cap \overline{A} = \varnothing$	évènements incompatibles
$\Omega \cap A = A$	élément neutre (Ω)
$\varnothing \cap A = \varnothing$	élément absorbant ($\varnothing$)
$A \cap B = B \cap A$	commutativité
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	associativité
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	distributivité avec la **réunion** ($\cup$)

Quelques propriétés de la réunion

$A \cup \overline{A} = \Omega$	évènements complémentaires
$\varnothing \cup A = A$	élément neutre ($\varnothing$)
$\Omega \cup A = \Omega$	élément absorbant (Ω)
$A \cup B = B \cup A$	commutativité
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	associativité
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	distributivité avec l’**intersection** ($\cap$)

Loi de Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Système complet d'évènements

$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ forment un système complet d'évènements si les **parties** $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ de Ω constituent une **partition** de Ω telle que :

$$\forall i \quad A_i \neq \varnothing$$
$$\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \varnothing$$
$$\bigcup_i A_i = \Omega$$

Un système complet d'évènements est formé de toutes les parties de Ω, ie des familles d'évènements 2 à 2 incompatibles dont la réunion constitue l'événement certain Ω.

Probabilité

Définition

On appelle probabilité **P** toute application de l'ensemble des évènements Ω dans l'intervalle [0,1], tel que

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$$
$$A \to P(A)$$

ayant les propriétés suivantes :

(P1) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad 0 \leq P(A) \leq 1$

(P2) $P(\Omega) = 1$

(P3) $P(A) = \sum_{\omega \epsilon \Omega} P(\omega)$

Proposition

1) *Si* A *et* B *sont incompatibles,* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

2) $P(A^c) = 1 - P(A)$.

3) $P(\emptyset) = 0$.

5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Probabilité

Probabilité uniforme

Soit Ω un espace fondamental fini constitué de *N* **évènements élémentaires avec** l'hypothèse d'**équiprobabilité** de réalisation des *N* évènements élémentaires.

Tous les évènements élémentaires ont « la même chance » de se réaliser (avec une probabilité p).

$$1 = P(\Omega) = \sum_{\omega \epsilon \Omega} P(\omega) = p\ Card(\Omega)$$

D'où p= P(ω)= $\frac{1}{card(\Omega)}$

La probabilité définie sur Ω s'appelle **probabilité uniforme**

Et la probabilité d'un évènement A est : $$P(A) = \sum_{\omega \epsilon A} P(\omega) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

Probabilité

Probabilités combinatoires

Soit A un événement quelconque constitué de **k évènements élémentaires** de Ω, on en déduit :

$$P(A) = \frac{k}{N}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{card\ A}{card\ \Omega} = \frac{nombre\ de\ cas\ \ favorables}{nombre\ de\ cas\ \ possibles}}$$

Attention : cette formule n'est valable que si les évènements élémentaires sont équiprobables

Exemple

Probabilité d'obtenir le mot « lutte » en tapant 5 lettre au hasard sur un clavier : 1/11 881 376
Probabilité d'obtenir un multiple de trois lors du lancé d'un dé : 1/3

Loi des grands nombres

Probabilités combinatoires

Si l'on répète N fois une expérience où la probabilité d'apparition d'un événement A est P, **la fréquence** de cet événement au cours des N expériences ($\frac{k}{N}$) tend vers P lorsque N tend vers l'infini.

$$\frac{k}{N} \rightarrow p$$

$$N \rightarrow \infty$$

*Lorsque le nombre d'épreuves augmente indéfiniment, les fréquences **observées** tendent vers les **probabilités** et **les distributions observées vers les lois de probabilité***

Exemple

Lancer une pièce plusieurs fois:

Nombre de tirages	10	100	1000	Proba attendue
Pile	3	40	460	0,5
Face	7	60	540	0,5

Indépendance statistique

Définition

On dit que deux évènements A et B sont **indépendants** si l'on a :

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

Remarque

Supposons A et B à la fois indépendants et incompatibles. On a alors :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad \text{indépendants}$$

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 \quad \text{incompatibles}$$

d'où nécessairement $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$

Indépendance statistique

Exemples

(1) Dans l'exemple du lancer d'un dé à 6 faces, non pipé, les deux évènements : A « le résultat est pair » et B « le résultat est un multiple de trois » sont **statistiquement indépendants.**

En effet, soit $A = \{2,4,6\}$ $B = \{3,6\}$ $A \cap B = \{6\}$

ainsi $P(A) = 3/6$ $P(B) = 2/6$ $P(A \cap B) =$ **1/6**

on vérifie alors que : $P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = 3/6 \text{ X } 2/6 = 6/36 =$ **1/6**

(2) Si l'on considère une famille de deux enfants, les deux évènements : A « enfants de sexe différent » et B « au plus une fille » **ne sont pas statistiquement indépendants**.

En effet, l'espace probabilisé Ω, contient 4 évènements élémentaires (si l'on considère une famille ordonnée),

$$\Omega = A \cup B = \{GG, GF, FG, FF\}$$

avec $A = \{GF, FG\}$, $B = \{GG, GF, FG\}$ et $A \cap B = \{GF, FG\}$

d'où sous l'hypothèse d'équiprobabilité : $P(A) = 1/2$, $P(B) = 3/4$ et $P(A \cap B) =$ **1/2**

On vérifie alors que : $P(A \cap B) \neq P(A)\,P(B) = 1/2 \text{ X } 3/4 =$ **$3/8 \neq 1/2$**

Indépendance statistique

Propriétés

Les propriétés associées à l'indépendance sont :

(1) si A est un évènement **quelconque**,

A et Ω sont indépendants : $A \cap \Omega = A$ **élément neutre**

$$P(A \cap \Omega) = P(A)P(\Omega) = P(A) \quad \text{car } P(\Omega) = 1$$

A et **Ø** sont indépendants : $A \cap \varnothing = \varnothing$ **élément absorbant**

$$P(A \cap \varnothing) = P(A)P(\varnothing) = P(\varnothing) \quad \text{car } P(\varnothing) = 0$$

(2) si A et B sont deux évènements **quelconques**,

A et B sont indépendants si et seulement si A et $\overline{B}$ ($\overline{A}$ et B) ou sont indépendants (**démonstration**).

A et B sont indépendants si et seulement si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont.

Généralisation

n évènements ($n \geq 2$) , $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n$ sont dit **indépendants** dans leur ensemble (ou mutuellement indépendants) si on a :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_i \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \text{ x } P(A_2) \text{ x } \ldots \text{x } P(A_i) \text{ x} \ldots \text{x } P(A_n)$$

$$P(\bigcap_i A_i) = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

Indépendance statistique

Exemple

On jette deux dés. Soit
A1 « le premier dé donne un nombre pair »
A2 « le deuxième dé donne un nombre pair »
A3 « la somme des deux lancers est paire »

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

En bleu : la somme est paire

En grisé :

$A_1 \cap A_2$ ou $A_1 \cap A_3$

ou $A_2 \cap A_3$ ou $A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

Indépendance statistique

Exemple

Les 3 évènements A1, A2 et A3 sont 2 à 2 indépendants mais ne sont pas indépendants dans leur ensemble

$P(A_1)= 1/2$; $P(A_2)=1/2$; $P(A_3)=1/2$

$$P(A_1 \cap A_2) = 9/36 = 1/4 = P(A_1)P(A_2)$$
$$P(A_1 \cap A_3) = 9/36 = 1/4 = P(A_1)P(A_3)$$
$$P(A_2 \cap A_3) = 9/36 = 1/4 = P(A_2)P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 9/36 = \mathbf{1/4}$$
$$\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \mathbf{1/8}$$

Probabilités conditionnelles

Définition

Soit deux évènements *A* et *B* d'un espace probabilisé Ω avec $P(B) \neq 0$, on appelle **probabilité conditionnelle** de l'évènement *A* sachant *B*, la probabilité :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Notation : $P(A/B)=P_B(A)$

Théorème

Soit *B* un évènement de probabilité non nulle, alors l'application :

PB : ε (Ω) → [0,1]
$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{P(A/B)}$ est une probabilité sur Ω

Probabilités conditionnelles

Démonstration

$(P_1)\quad \forall A \in \varepsilon(\Omega) \qquad P(A / B) \geq 0 \qquad$ (quotient de deux réels positifs)

$(P_2)\quad P(\Omega / B) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$ car $\Omega \cap B = B$ car Ω **élément neutre**

$(P_3)\quad$ si $(A_1 \cap A_2) = \varnothing)$, $\quad P_B(A_1 \cup A_2) = \dfrac{P[(A_1 \cup A_2) \cap B]}{P(B)} = \dfrac{P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]}{P(B)} =$

$\dfrac{P[(A_1 \cap B) + (A_2 \cap B)]}{P(B)} = P_B(A_1) + P_B(A_2)$ **additivité**

Remarques

- P(A) : probabilité **a priori**
- P(B) : probabilité **a posteriori**
- P(A / A)=1
- Si B ⊂ A, alors A ∩ B = B $\Rightarrow$ P(B/A) = P(A) / P(B)

Probabilités composées

Théorème

Soit deux évènements A et B d'un espace probabilisé Ω.
$P(A\cap B) = P(B / A)\, P(A) = P(A / B)\, P(B)$ **(Formule des probabilités composées)**

Si A et B sont indépendants et que $P(B) \neq 0 \Leftrightarrow P_B(A) = P(A / B) = P(A)$.

Le fait que l'un des 2 évènements soit réalisé, n'apporte aucune information sur la réalisation de l'autre
$\Rightarrow$ *Probabilité a postériori = probabilité a priori*

Probabilités composées

Théorème

Soit deux évènements A et B d'un espace probabilisé Ω.
$P(A \cap B) = P(B / A)\, P(A) = P(A / B)\, P(B)$ (**Formule des probabilités composées)**

Si A et B sont indépendants et que $P(B) \neq 0 \Leftrightarrow P_B(A) = P(A / B) = P(A)$.

Le fait que l'un des 2 évènements soit réalisé, n'apporte aucune information sur la réalisation de l'autre
$\Rightarrow$ *Probabilité a postériori = probabilité a priori*

Théorème

Si A et B sont deux évènements indépendants alors $P(A/B) = P(A/\bar{B}) = P(A)$

Exemple

Jet de dé.
A : « le résultat est pair » et B « le résultat est un multiple de trois » sont indépendants

$A = \{2,4,6\}$ $B = \{3,6\}$ $A \cap B = \{6\}$
$P(A) = 3/6$ $P(B) = 2/6$ $P(A \cap B) = 1/6$

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/3} = \mathbf{1/2 = P(A)}$$

Probabilités totales

Théorème

Si $\{A_1, A_2, \ldots., A_i, \ldots.., A_n\}$ est un **système complet d'évènements (partition de Ω)**, $\forall B$, alors :
$P(B) = P(B / A_1)\, P(A_1) + P(B / A_2)\, P(A_2) + \ldots.. + P(B / A_n)\, P(A_n)$

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B / A_i) P(A_i)}$$

Formules des probabilités totales

Démonstration

$$P(B) = \mathrm{P}(B \cap \Omega) = P\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) P(A_i)$$

Probabilités totales

Exemple

Une population comporte 1/3 d'hommes et 2/3 de femmes. Une maladie X frappe 6 % des hommes et 0,36 % des femmes.
La probabilité pour qu'un individu pris au hasard soit malade :

A = {Homme} et $\bar{A}$ = {Femme}
B = {Malade} et $\bar{B}$ = {Non Malade}

$$P(B) = P(B/A)P(A) + P(B/\bar{A})P(\bar{A})$$

$$P(B) = (0{,}06 \text{ X } 1/3) + (0{,}0036 \text{ X } 2/3) = \mathbf{0{,}0224}$$

Théorème

Si $\{A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n\}$ est un **système complet d'évènements (partition de Ω)**, $\forall B$, alors :
$P(B) = P(B / A_1)\, P(A_1) + P(B / A_2)\, P(A_2) + \ldots + P(B / A_n)\, P(A_n)$

$$P(A_i / B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{P(B/A_1)P(A_1) + \ldots + P(B/A_i)P(A_i) + \ldots + P(B/A_n)P(A_n)}$$

$$P(A_i / B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)}$$

Formule de Bayes

Probabilités totales

Démonstration

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

probabilités composées

$$P(A_i / B) = \frac{P(B / A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B / A_i)P(A_i)}$$

probabilités totales

Remarque

Formule de Bayes : utilisée pour calculer des probabilités de causes dans les diagnostics (maladies, pannes, etc.)

Statistique bayésienne : branche de la statistique basée sur ce théorème