Introduction aux probabilités

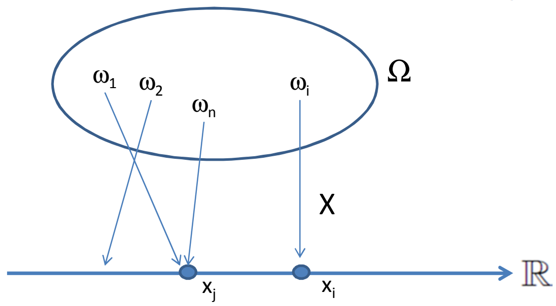
3 – Variables aléatoires discrètes

Variables aléatoires

Définition

Une variable aléatoire (v.a.) X est **une fonction définie sur l'espace fondamental $\boldsymbol{\Omega}$**, qui associe une valeur numérique à chaque résultat de l'expérience aléatoire étudiée.
Ainsi, à chaque événement élémentaire ω, on associe un nombre $X(\omega)$.

$$X : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \rightarrow X(\omega)$$



3

Variables aléatoires discrètes

Définition

Une variable aléatoire est dite **discrète** si elle ne prend que des **valeurs discontinues** dans un intervalle donné (borné ou non borné).

Exemple

On lance trois fois une pièce et on s'intéresse au nombre X d'apparitions de PILE
Deux manières de formaliser cette phrase :

ω	PPP	PPF	PFP	FPP	FFP	FPF	PFF	FFF
valeur de X	*3*	*2*	*2*	*2*	*1*	*1*	*1*	*0*

k (*valeur prise par* X)	3	2	1	0
événement $[X = k]$	$\{PPP\}$	$\{PPF, PFP, FPP\}$	$\{PFF, FPF, FFP\}$	$\{FFF\}$

Les évènements (X = 0), (X = 1), (X = 2) et (X = 3) sont deux à deux disjoints.
Leur réunion est égale à Ω

4

Loi de probabilité

Définition

Une variable aléatoire est caractérisée par l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre et par l'expression mathématique de la probabilité de ces valeurs.
Cette expression s'appelle **la loi de probabilité** (ou **distribution de probabilité**) de la variable aléatoire.

La loi de probabilité d'une **variable aléatoire discrète** est entièrement déterminée par les probabilités p_i des évènements $\{X = x_i\}$, x_i parcourant l'univers image $X(\Omega)$.
La **loi de probabilité** est donnée par les $(x_i, p_i)_i$.

Exemple

valeur de X (événement)	$[X = 3]$	$[X = 2]$	$[X = 1]$	$[X = 0]$
composition de l'événement	{PPP}	{PPF,PFP,FPP}	{PFF,FPF,FFP}	{FFF}
probabilité	1/8	3/8	3/8	1/8

5

Fonction de répartition

Définition

On appelle **fonction de répartition** d'une variable aléatoire X, la fonction F_X telle que :
F_X : R → R
$t \to F_X(t) = P(X < t)$

→ ***distribution des probabilités cumulées***

Elle permet de calculer la **probabilité de tout intervalle** dans $\mathbb{R}$

Propriétés

Soit F_X la fonction de répartition d'une **variable aléatoire discrète** X alors :

(P$_1$) $\forall t \in \mathbb{R} \quad 0 \leq F_X(t) \leq 1$

(P$_2$) F_X est croissante sur $\mathbb{R}$

(P$_3$) $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$

(P$_4$) si $a \leq b \quad P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

6

Fonction de répartition

Exemple

On lance trois fois une pièce et on s'intéresse au nombre X d'apparitions de PILE

Nombre de piles	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8
$F_x(x_i)$	1/8	4/8	7/8	1

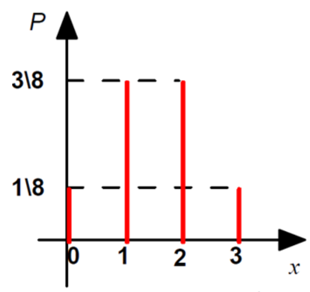
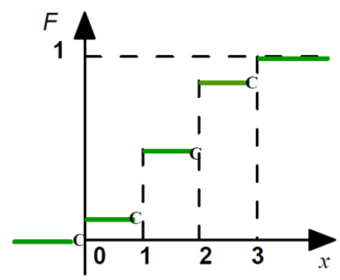


Diagramme en bâtons



Fonction de répartition

Espérance mathématique

Espérance d'une variable aléatoire correspond à **la moyenne des valeurs possibles de X pondérées par les probabilités** associées à ces valeurs.

Définition

Soit X est une **variable aléatoire discrète** définie sur un univers probabilisé Ω.
On appelle **espérance de *X***, le réel défini par :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega)$$

Notation
$\mu(X)$, μ_x ou μ
$m(X)$, m_x ou m

Remarque

Si X(Ω) est infini, on n'est pas sûr que l'espérance existe.

Théorème

Si X est une **variable aléatoire discrète** de loi de probabilité $(x_i, p_i)_i$ définie sur un nombre fini (n) d'évènements élémentaires alors :

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i}$$

Espérance mathématique

Propriétés

Si *X* et *Y* sont deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, admettant une espérance, alors :

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

$E(aX)=aE(X) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Si $X \geq 0$ alors $E(X) \geq 0$

Si X est un caractère constant tel que : $\forall \omega \in \Omega \quad X(\omega) = k$ alors $E(X) = k$

9

Variance

Définition

Si *X* est une variable aléatoire ayant une espérance *E*(*X*), on appelle **variance** de *X* le réel :

$$V(X) = E([X - E(X)]^2)$$

Formule développée

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$V(X) = E([X - E(X)]^2)$$
$$V(X) = E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2)$$
$$V(X) = E(X^2) - 2E[XE(X)] + E[E(X)^2]$$
$$V(X) = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 \quad = E(X^2) - E(X)^2$$

10

Variance

Définition

Si *X* est une variable aléatoire **discrète** de loi de probabilité $(x_i, p_i)_i$ définie sur un nombre fini (*n*) d'évènements élémentaires alors **la variance** est égale à :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - E(X)^2$$

Ecart-type

Si *X* est une variable aléatoire ayant une variance *V*(*X*), on appelle **écart-type** de *X*, le réel :

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)}$$

L'unité de mesure de l'écart-type est la même que celle de la variable aléatoire X

11

4 – Variables aléatoires continues

12

Variable aléatoire continue

Définition

Une **variable aléatoire** est dite **continue** si elle peut prendre **toutes les valeurs** dans un intervalle donné (borné ou non borné).

Densité de probabilité

Dans le cas d'une **v. a. continue**, la loi de probabilité associe une probabilité à chaque ensemble de valeurs définies **dans un intervalle donné**.

En effet, pour une v.a. continue, la probabilité associée à l'évènement $\{X = a\}$ est nulle, car il est impossible d'observer exactement cette valeur.

On considère alors la probabilité que X prenne des valeurs dans $[a,b]$ tel que $P(a \leq X \leq b)$.

*Lorsque cet intervalle tend vers 0, la valeur prise par X tend alors vers la valeur d'une fonction : **fonction densité de probabilité.***

13

Variable aléatoire continue

Définition

On appelle **densité de probabilité** toute application continue,

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x)$$

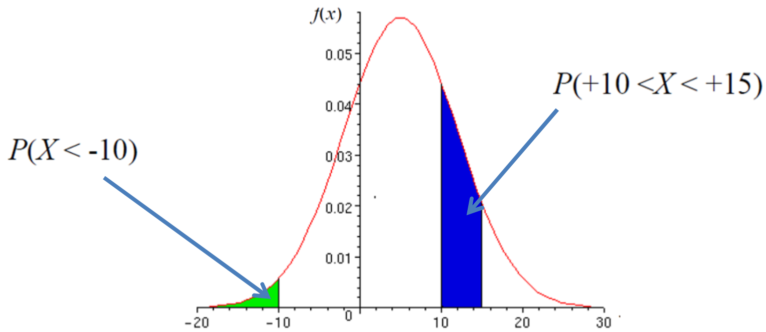
telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \qquad (\text{en supposant que } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \text{ existe})$$

14

Variable aléatoire continue



L'aire sous la courbe densité de probabilité est égale à 1

Définition

Une variable aléatoire *X* définie sur un univers Ω est dite **absolument continue**, s'il existe une **fonction densité de probabilité** f telle que :

$$\forall\ t \in \mathbb{R} \qquad P(X < t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx$$

15

Fonction de répartition

Définition

On appelle **fonction de répartition** d'une variable aléatoire *X*, la fonction F_X telle que :
F_X : R → R
$t \to F_X(t) = P(X < t)$

la fonction de répartition F_X en fonction de la densité f est définie par :

$$\boxed{\forall\ t \in \mathbb{R} \quad F_X(t) = P(X < t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx}$$

Propriétés

(P_1) $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(x)dx$ avec $a < b$

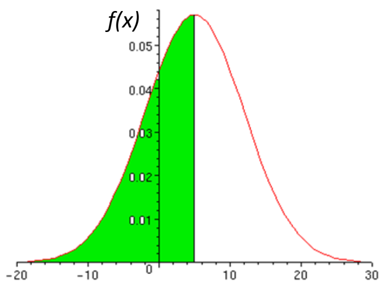
(P_2) $\forall\ a \in \mathbb{R}$ $P(x = a) = 0$ si f est continue à droite du point a

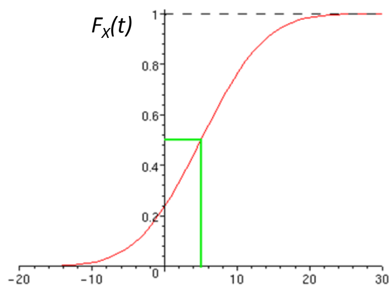
La propriété P_2 implique que $P(X \leq t) = P(X < t)$

16

Fonction de répartition

La fonction de répartition correspond aux probabilités cumulées associées à X entre $-\infty$ et la valeur x.





F_X est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en tout point où f est continue et alors $F_X' = f$

F_X est croissante sur $\mathbb{R}$

F_X est à valeurs dans $[0,1]$

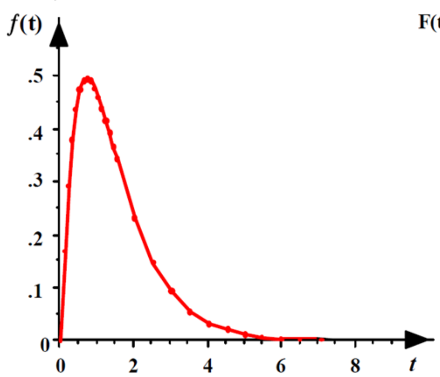
$\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} F_X(t) = 1$

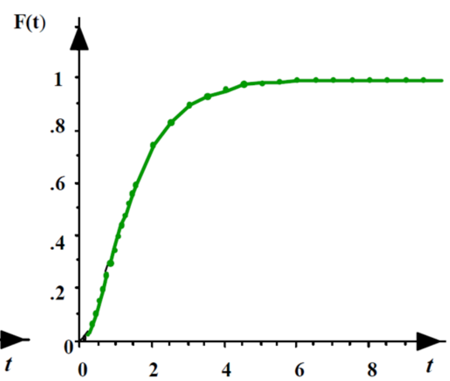
17

Fonction de répartition

Exemple

$f(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$ $\quad t \in [0, +\infty]$





$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$ probabilité qu'un canard regagne l'étang entre les temps t1 et t2

plus de 50 % des canards se posent sur l'étang au cours des 2 premières minutes

18

Espérance mathématique

Définition

Si *X* est une **variable aléatoire absolument continue** de densité f, on appelle **espérance** de *X*, notée *E*(*X*) , la quantité :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$$

Exemple

$$f(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} \qquad t \geq 0$$

$$E(T) = \int_0^{+\infty} t\, f(t)dt = \int_0^{+\infty} t(2e^{-t} - 2e^{-2t})dt = \mathbf{3/2}$$

Les propriétés citées pour l'espérance d'une v.a. discrète sont valables

Variance

Définition

Si *X* est une variable aléatoire continue. La **variance** de X est définie par :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - E(X)^2$$

Exemple

$$f(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} \qquad t \geq 0$$

$$V(T) = \int_0^{+\infty} (t - E(T))^2 f(t)dt = \mathbf{5/4} \text{ avec } \sigma = \mathbf{1,12}$$

Propriétés

(P1) $\forall\, a \in \mathbb{R},\quad V(aX) = a^2\, V(X)$

(P2) $\forall\, (a, b) \in \mathbb{R},\quad V(aX + b) = a^2\, V(X)$

(P3) $V(X) = 0 \iff X = E(X)$

Moment d'ordre k

Définition

Le moment d'ordre k d'une variable aléatoire est donné par :

$$\mu_k = E(X^k)$$

Cas d'une variable discrète

$$E(X^k) = \sum_i x_i^k p_i$$

Cas d'une variable continue

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\, dx$$

Variance de X

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

21