

# Interpolations, courbes de Bézier et B-Splines

Travail de Maturité réalisé au Lycée Blaise-Cendrars  
sous la direction de Jean-Bernard Mathey

Thomas Guillod

**Résumé :** *Ce travail est consacré à l'étude des courbes d'interpolation et d'approximation. Nous étudierons différentes formes d'interpolation, puis les courbes de Bézier et enfin les B-Splines. Le dernier chapitre présente une ouverture vers les surfaces qu'il est possible de construire avec les courbes étudiées précédemment.*

*Le travail est tourné vers la pratique : pour chaque type de courbes, nous poserons la question de ses applications, de ses avantages et inconvénients. Des programmes ont été créés pour dessiner toutes les courbes et surfaces étudiées<sup>1</sup>.*

## 1 Introduction

Les problèmes d'interpolation et d'approximation sont un vaste sujet qui s'étend de l'ajustement de mesures à la conception d'images de synthèse en passant par la création de polices de caractères. Le comte de Lagrange s'est penché sur les problèmes d'interpolation au XVIII<sup>e</sup> siècle mais il faut attendre l'arrivée des ordinateurs pour que le domaine se développe réellement.

Au XVIII<sup>e</sup> siècle, l'interpolation et l'approximation servaient surtout à relier ou approcher des mesures : l'intérêt était avant tout scientifique.

Avec la révolution industrielle, les machines sont apparues, il a fallu dessiner les pièces pour pouvoir les produire. Pour tracer des courbes, les dessinateurs utilisaient des méthodes manuelles qui reposaient sur la déformation de lames de métal, de ressorts et l'utilisation de pistolets. Pour les surfaces, des gabarits étaient construits en 3 dimensions.

Puis vers 1950 les machines à commandes numériques sont arrivées : il devenait obligatoire d'exprimer ces courbes mathématiquement. La première approche a été de numériser le travail des dessinateurs mais cela était long et couteux, la nécessité de trouver des courbes capables d'être utilisées depuis la conception jusqu'à la réalisation s'est donc fait sentir.

Les splines cubiques ont été la première méthode mise au point, puis les courbes de Bézier sont arrivées, avec une conception différente, plus souple. L'évolution s'est poursuivie avec les B-Splines, généralisation des courbes de Bézier, puis avec les NURBS dans les années 1980.

---

<sup>1</sup>Un CD contenant les programmes réalisés écrits en c++, diffusé sous licence GPL est disponible auprès de l'auteur.

Puis les courbes ont vu leur domaine s'étendre avec l'apparition de l'informatique domestique : les logiciels de dessin vectoriel utilisent les courbes de Bézier ainsi que les B-Splines. Ces courbes sont aussi à la base des images de synthèse, des jeux vidéo, etc. Certains concepts sont encore au stade de développement ou ne sont pas documentés. Il est par exemple impossible de connaître les algorithmes internes des programmes de conception en 3D.

Nous avons choisi une approche graphique, c'est-à-dire que nous étudierons plutôt des courbes destinées à la C.A.O. (conception assistée par ordinateur) ou au design. L'ajustement de points par des courbes n'est pas exemple pas traité.

Nous nous efforcerons de relier l'étude théorique de ces courbes avec leurs applications pratiques, leurs avantages et leurs faiblesses. Ce travail mêle théorie, dessin et programmation. En effet, nous illustrerons les concepts par de nombreux schémas. Pour chaque courbe étudiée théoriquement, nous avons réalisé un programme dessinant les courbes. Tous les exemples de courbes inclus dans ce travail ont été tracés par les programmes réalisés dans cette étude. Parfois, nous avons adapté les programmes pour réaliser certaines figures.

Nous nous pencherons d'abord sur les formes basiques d'interpolation : l'interpolation quadratique, cubique, de Lagrange. Puis nous verrons l'interpolation par splines cubiques, beaucoup plus performante que les autres méthodes. Ensuite nous expliquerons l'utilité d'approximer les points, plutôt que de les interpoler, avec les courbes de Bézier puis les B-Splines.

Bien entendu, l'industrie automobile travaille surtout avec des surfaces, par conséquent les surfaces d'interpolations et d'approximations ont très vite vu le jour. Le dernier chapitre montre comment il est possible d'obtenir des surfaces à partir de courbes de Bézier. Une ouverture sera également faite sur les autres méthodes de modélisation que les courbes et les surfaces.

## **2 Interpolation quadratique, cubique et de Lagrange**

Lorsque nous voulons interpoler des points, la manière la plus simple consiste à les relier par des droites. Bien sûr, cette solution n'est pas du tout satisfaisante car elle n'est pas du tout harmonieuse. Pour avoir un résultat acceptable, il faudrait mettre les points très rapprochés les uns des autres. Il devient alors très lourd et difficile de manipuler l'ensemble. C'est pour ces raisons que nous cherchons des méthodes plus perfectionnées.

### **2.1 Interpolation quadratique**

#### **2.1.1 Théorie**

L'interpolation quadratique<sup>2</sup> est l'une des méthodes les plus simples. Le but est de relier les points par des courbes de degré deux. Mais si nous nous contentons de faire passer une parabole par les trois premiers points puis une autre par les trois suivants, la courbe comportera des cassures. En effet, à la jonction de deux paraboles, la pente ne sera pas la même. Ce procédé ne présente donc aucun avantage sur l'interpolation linéaire.

---

<sup>2</sup>L'interpolation quadratique est étudiée dans [1].

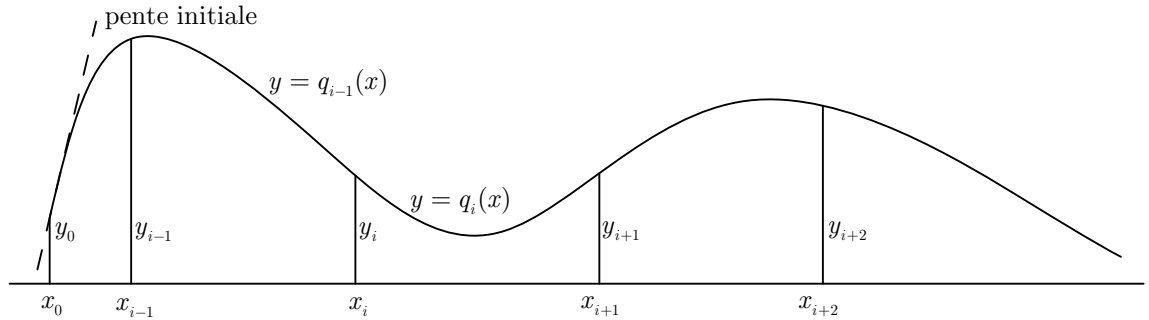


FIG. 1 – Schéma de l'interpolation quadratique

Pour supprimer ces cassures et obtenir une courbe fluide, nous modifions les conditions :

- la courbe doit passer par deux points imposés
- en un point, la pente doit être égale à la pente de la fin de la parabole précédente.

Un problème demeure : pour la première parabole il n'y a pas de pente précédente. Nous devons donc choisir la pente initiale arbitrairement.

Nous allons voir comment construire un arc de parabole. Nous numérotions les points  $P_0(x_0; y_0)$ ,  $P_1(x_1; y_1)$ ,  $P_2(x_2; y_2)$ ,  $\dots$ ,  $P_n(x_n; y_n)$  et les coefficients  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  des paraboles  $q_i(x) = ax_i^2 + bx_i + c_i$  définies sur  $[x_i, x_{i+1}]$  pour  $i = 0, \dots, n-1$ . Le schéma 1 expose la situation.

Pour construire l'arc entre  $P_i$  et  $P_{i+1}$  nous avons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} y_i &= a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i \\ y_{i+1} &= a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i \\ 2a_i x_i + b_i &= 2a_{i-1} x_i + b_{i-1} \end{aligned}$$

Les deux premières équations font passer la parabole par les deux points  $P_i(x_i; y_i)$  et  $P_{i+1}(x_{i+1}; y_{i+1})$ , la troisième assure que en  $x_i$  la tangente de  $q_i$  sera la même que celle de  $q_{i-1}$ .

Pour le premier arc le terme  $2a_{i-1}x_i + b_{i-1}$  est choisi arbitrairement.

Evidemment, pour que cela fonctionne, il faut que  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , sinon l'interpolation par une fonction n'est pas possible.

La figure 2 montre les résultats de l'interpolation quadratique avec deux valeurs différentes pour la pente initiale.

### 2.1.2 Inconvénients

Comme nous le voyons très bien avec la figure 2, le choix de la pente initiale est très important. La courbe peut avoir une allure complètement différente selon ce choix. De plus, la pente initiale influence toute la courbe. Ainsi, sur l'exemple, le passage de  $-5$  à  $5$  comme pente initiale inverse totalement la courbe. Les arcs concaves deviennent convexes et inversement. Les courbes sont donc imprévisibles.

Une parabole ne possédant pas de points d'inflexion, ceux ci doivent absolument se trouver sur l'un des points  $P_i$ . Cela est aussi un inconvénient en vue d'une utilisation pratique.

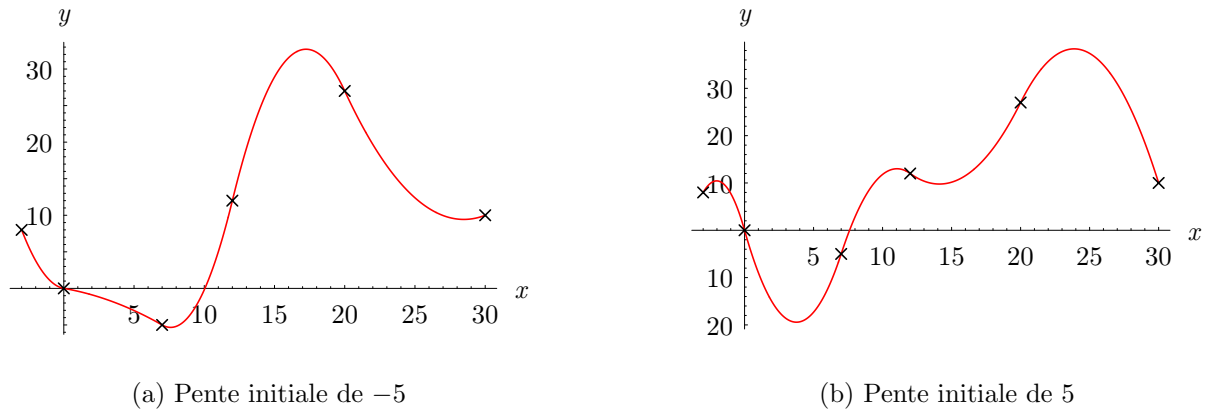


FIG. 2 – Interpolation quadratique

L'interpolation quadratique n'est pas très « naturelle », le tracé ne correspond pas à ce que nous pourrions attendre par exemple dans un logiciel de dessin.

Pour toutes ces raisons, l'interpolation quadratique n'est pratiquement pas utilisée. Des autres méthodes ont été élaborées afin de supprimer ces désavantages, l'une d'elles est l'interpolation cubique.

## 2.2 L'interpolation cubique

### 2.2.1 Théorie

L'interpolation cubique<sup>3</sup> repose sur le même principe que l'interpolation quadratique. Les conditions sont les suivantes :

- la courbe doit passer par deux points imposés.
- nous imposons les tangentes en ces deux points de façon « intelligente ». Généralement, la tangente en un point doit être parallèle à la droite reliant le point précédent au point suivant.

Ce type d'interpolation est aussi appelé interpolation d'Hermite cubique.

Nous numérotions les points  $P_0(x_0; y_0)$ ,  $P_1(x_1; y_1)$ ,  $P_2(x_2; y_2)$ ,  $\dots$ ,  $P_n(x_n; y_n)$  avec  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ . Nous notons  $y'_i$  la pente de la tangente en  $P_i$ .

La figure 3 illustre la situation.

Pour construire l'arc d'équation  $C_i(x) = \alpha_i x^3 + \beta_i x^2 + \gamma_i x + \delta_i$  entre  $P_i$  et  $P_{i+1}$  nous avons les conditions :

$$\begin{aligned} C_i(x_i) &= y_i; & C_i(x_{i+1}) &= y_{i+1}; \\ C'_i(x_i) &= y'_i; & C'_i(x_{i+1}) &= y'_{i+1} \end{aligned}$$

Généralement, nous préférons ne pas avoir de fonctions de la forme  $y = f(x)$  mais  $y = f(t)$   $t$  variant de 0 à 1. Ceci n'est pas seulement valable pour les cubiques mais aussi pour les B-Splines et les courbes de Bézier. Nous effectuerons donc le changement de variable suivant :  $x = x_i + t \cdot (x_{i+1} - x_i) = x_i + t \cdot h$  si  $h = x_{i+1} - x_i$ .

$$C_i(x) = C_i(x_i + t \cdot h) = Q_i(t) = a_i t^3 + b_i t^2 + c_i t + d_i$$

<sup>3</sup>L'interpolation cubique est étudiée dans [2, 1].

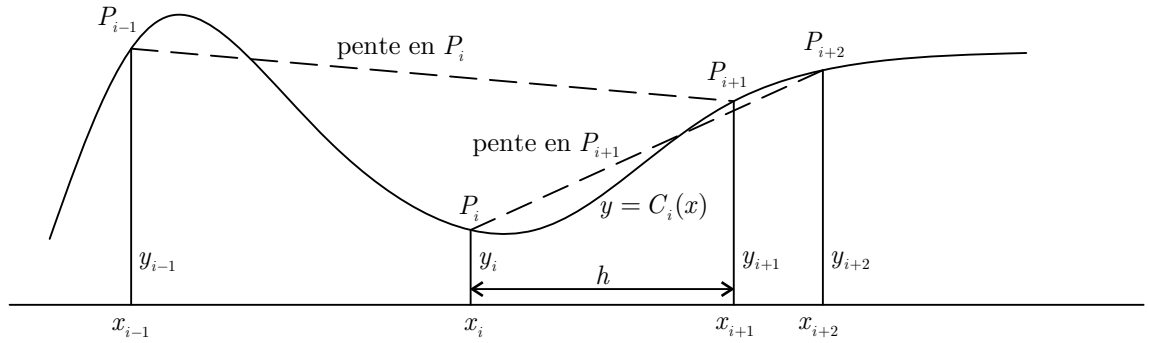


FIG. 3 – Schéma d'interpolation cubique entre  $P_i$  et  $P_{i+1}$ .

$$Q'_i(t) = h \cdot C'_i(x_i + t \cdot h) = 3a_i t^2 + 2b_i t + c_i$$

Nos conditions sont donc :

$$Q_i(0) = d_i = y_i$$

$$Q_i(1) = a_i + b_i + c_i + d_i = y_{i+1}$$

$$Q'_i(0) = c_i = h \cdot y'_i$$

$$Q'_i(1) = 3 \cdot a_i + 2 \cdot b_i + c_i = h \cdot y'_{i+1}$$

Pour simplifier la notation, nous prendrons  $p_i = Q'_i(0)$  et  $p_{i+1} = Q'_i(1)$ .

Nous obtenons donc :

$$a_i = 2y_i - 2y_{i+1} + p_i + p_{i+1}$$

$$b_i = 3y_{i+1} - 3y_i - p_{i+1} - 2p_i$$

$$c_i = p_i$$

$$d_i = y_i$$

A présent, le seul élément manquant pour construire l'arc est la détermination des tangentes. Comme nous l'avons dit, la tangente au point  $P_i$  est parallèle à la droite reliant  $P_{i-1}$  et  $P_{i+1}$ .

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

Cette formule est valable pour  $i$  de 1 à  $n - 1$ . Pour le premier et le dernier point, nous choisirons respectivement la pente de  $P_0$  à  $P_1$  et de  $P_{n-1}$  à  $P_n$ .

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

Comme  $p_i = h \cdot y'_i$  et  $p_{i+1} = h \cdot y'_{i+1}$ , nous pouvons trouver les coefficients  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$  et construire les arcs de cubiques.

La figure 4 montre les résultats obtenus avec deux valeurs différentes pour le troisième point.

### 2.2.2 Avantages et inconvénients

L'interpolation cubique ne présente pas les mêmes défauts que la quadratique. Ainsi des points d'inflexion sont possibles ailleurs que sur les points d'interpolation.

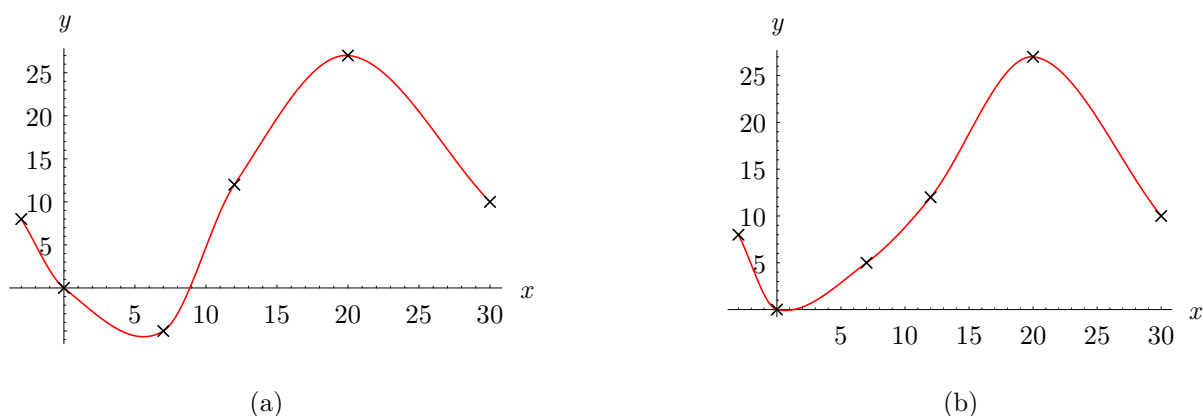


FIG. 4 – Interpolation cubique

La courbe est très robuste. Comme nous le voyons sur la figure 4, le changement d'un point n'influence pas toute la courbe. Cette propriété est très importante pour des utilisations pratiques.

Le tracé parat naturel : il ne présente pas de pointe, de détournement, etc.

L'inconvénient de cette interpolation cubique est que si la pente ne possède pas de « cassure », le rayon de courbure présente des « cassures » (la fonction obtenue est de classe  $C^1$  mais pas de classe  $C^2$ ). Cela nuit à la fluidité de la courbe. Il est possible de résoudre ce problème, mais cela enlève la « robustesse » de la courbe (voir section 3.3).

## 2.3 Interpolation de Lagrange

### 2.3.1 Théorie

Au lieu, d'interpoler des points par arcs de paraboles ou de cubiques, l'interpolation de Lagrange<sup>4</sup> permet de « relier » tous les points à l'aide d'une seule fonction polynomiale.

Le problème est donc de trouver un polynôme qui vaut  $y_0$  en  $x_0$ ,  $y_1$  en  $x_1$ , ...,  $y_n$  en  $x_n$  avec  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ .

Nous pouvons trouver un polynôme de degré au plus 1 dont le graphe passe par deux points différents. De même, il existe un polynôme de degré au plus 2 qui passe par trois points. Notre polynôme doit donc être au plus de degré  $n$ .

L'idée de la construction se base sur le fait que le monôme :

$$p_1(x) = \frac{(x - b)}{(a - b)}$$

est tel que  $p_1(a) = 1$ .

et que le monôme :

$$p_2(x) = x - a$$

est tel que  $p_2(a) = 0$ .

En assemblant ces deux propriétés nous obtenons le polynôme suivant :

<sup>4</sup>L'interpolation de Lagrange est étudiée dans [1, 3, 4, 5].

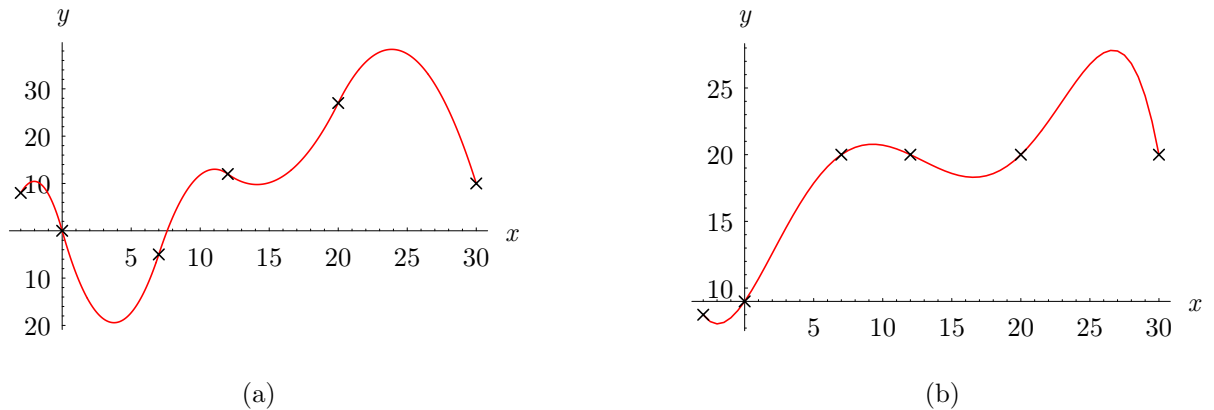


FIG. 5 – Interpolation de Lagrange

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \text{ sans } (x - x_i)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n) \text{ sans } (x_i - x_i)} = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

qui vaut 0 en  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  sauf en  $x_i$  où il vaut 1.

En exploitant les propriétés du polynôme ci-dessus, nous arrivons au polynôme recherché :

$$L(x) = y_0 \cdot l_0 + y_1 \cdot l_1 + \dots + y_n \cdot l_n$$

Ce polynôme est appelé polynôme de Lagrange.

Il est bien de degré au plus  $n$ . Nous pouvons démontrer que ce polynôme est unique (de degré au plus  $n$  et passant par  $n + 1$  points). Il est possible d'écrire  $L(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$ .

Nous pouvons poser les équations suivantes :

$$\begin{aligned} y_0 &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n \\ y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n \\ &\dots \\ y_n &= a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n \end{aligned}$$

Nous avons donc un système de  $n + 1$  équations à  $n + 1$  inconnues, la solution (nous savons qu'elle existe) est donc unique (le déterminant du système, déterminant de Vandermonde, est non nul si les  $x_i$  sont différents).

La figure 5 montre les résultats de l'interpolation de Lagrange.

### 2.3.2 Avantages et inconvénients

L'avantage de l'interpolation de Lagrange est qu'elle est relativement simple, et qu'il est possible de relier beaucoup de points avec une seule fonction polynomiale et non plusieurs arcs de cubiques ou de paraboles.

Le principal désavantage<sup>5</sup> est que la courbe peut être complètement aberrante. Nous pouvons le voir sur la figure 5b où la courbe continue d'osciller lorsque les points sont stables.

En effet, si nous essayons d'interpoler une fonction régulière comme  $\frac{1}{1+x^2}$ , nous voudrions que plus les points choisis sur cette courbe sont rapprochés plus l'interpolation s'approche de la fonction donnée. Malheureusement, ce n'est pas le cas : plus nous prenons de points plus la courbe oscille entre ces points. L'interpolation de Lagrange n'est donc pas une très bonne méthode, et il est généralement préférable d'interpoler les points avec plusieurs arcs de degré moins élevé puis de les raccorder.

Ce problème est très gênant et explique que l'interpolation de Lagrange n'est pas très utilisée.

Un autre inconvénient est que le polynôme est de degré  $n$ , donc si nous avons énormément de points les manipulations peuvent devenir lourdes. C'est aussi une raison de préférer l'interpolation par bouts de cubiques.

## 3 Interpolation par splines cubiques

### 3.1 Présentation générale

L'interpolation par splines a été développée par l'industrie automobile, chez General Motors aux alentours de 1950.

L'interpolation par splines cubiques<sup>6</sup> repose sur le même principe que l'interpolation cubique. La différence est que nous voulons non seulement la continuité de la pente mais aussi du rayon de courbure.

Le rayon de courbure en un point est donné par l'équation suivante pour une fonction<sup>7</sup> :

$$R = \frac{(1 + f'^2(x))^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|}$$

Nous voyons donc que la continuité de la dérivée ne suffit pas, il faut aussi imposer celle de la dérivée seconde. Ce type de fonction est dite de classe  $C^2$ .

Nous numéroteurons les points  $P_0(x_0; y_0)$ ,  $P_1(x_1; y_1)$ ,  $P_2(x_2; y_2)$ ,  $\dots$ ,  $P_n(x_n; y_n)$  avec  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ .

Nous voulons définir une cubique  $S_k(x)$  sur  $[x_k, x_{k+1}]$  avec  $k = 0, \dots, n-1$  avec les conditions suivantes :

$$S_k(x_k) = y_k$$

$$S_k(x_{k+1}) = y_{k+1}$$

$$S'_k(x_k) = S'_{k-1}(x_k)$$

$$S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1})$$

$$S''_k(x_k) = S''_{k-1}(x_k)$$

$$S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1})$$

La figure 6 montre la situation.

Nous noterons  $\sigma_k = S''_k(x_k)$ .

---

<sup>5</sup>Les inconvénients sont mis en évidence dans [4, 2, 6].

<sup>6</sup>L'interpolation par spline cubique est étudiée dans [1, 3, 2, 6, 7, 8, 9, 10].

<sup>7</sup>La formule est démontrée dans [11].



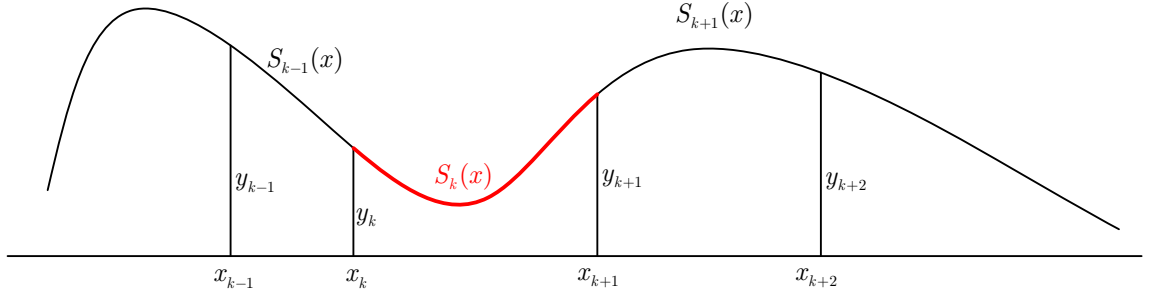


FIG. 6 – Schéma d'interpolation cubique entre  $P_k$  et  $P_{k+1}$ .

Comme  $S_k(x)$  est de degré trois,  $S_k''(x)$  est de degré un. Donc :

$$S_k''(x) = \sigma_k \cdot \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + \sigma_{k+1} \cdot \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

pour que  $S_k''(x_k) = \sigma_k$  et que  $S_k''(x_{k+1}) = \sigma_{k+1}$  donc  $S_{k-1}''(x_k) = \sigma_k$ .  
Nous intégrons deux fois :

$$S_k'(x) = \frac{\sigma_k}{x_k - x_{k+1}} \cdot \frac{(x - x_{k+1})^2}{2} + \frac{\sigma_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} \cdot \frac{(x - x_k)^2}{2} + C_k$$

$$S_k(x) = \frac{\sigma_k}{x_k - x_{k+1}} \cdot \frac{(x - x_{k+1})^3}{6} + \frac{\sigma_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} \cdot \frac{(x - x_k)^3}{6} + C_k \cdot x + D_k$$

où  $C_k$  et  $D_k$  sont des constantes.

Nous posons  $C_k \cdot x + D_k = A_k(x - x_k) + B_k(x_{k+1} - x)$  pour faciliter les calculs.

$$S_k(x) = \frac{\sigma_k}{x_k - x_{k+1}} \cdot \frac{(x - x_{k+1})^3}{6} + \frac{\sigma_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} \cdot \frac{(x - x_k)^3}{6} + A_k(x - x_k) + B_k(x_{k+1} - x)$$

Donc, par les conditions :

$$y_k = S_k(x_k) = \frac{\sigma_k \cdot (x_k - x_{k+1})^2}{6} + B_k(x_{k+1} - x_k)$$

$$y_{k+1} = S_k(x_{k+1}) = \frac{\sigma_{k+1} \cdot (x_{k+1} - x_k)^2}{6} + A_k(x_{k+1} - x_k)$$

En injectant  $A_k$  et  $B_k$  dans  $S_k(x)$  nous obtenons la fonction :

$$\begin{aligned} S_k(x) &= \frac{\sigma_k}{6} \cdot \frac{(x_{k+1} - x)^3}{x_{k+1} - x_k} + \frac{\sigma_{k+1}}{6} \cdot \frac{(x - x_k)^3}{x_{k+1} - x_k} \\ &+ y_k \cdot \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} - \frac{\sigma_k}{6} (x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} - x) \\ &+ y_{k+1} \cdot \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{\sigma_{k+1}}{6} (x_{k+1} - x_k)(x - x_k) \end{aligned}$$

Nous dérivons :

$$\begin{aligned} S'_k(x) &= \frac{\sigma_k}{6} \cdot \left( \frac{-3(x_{k+1} - x)^2}{x_{k+1} - x_k} + (x_{k+1} - x_k) \right) \\ &+ \frac{\sigma_{k+1}}{6} \cdot \left( \frac{3(x - x_k)^2}{x_{k+1} - x_k} - (x_{k+1} - x_k) \right) \\ &+ \frac{y_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} - \frac{y_k}{x_{k+1} - x_k} \end{aligned}$$

Nous évaluons la dérivée en  $x_k$  et en  $x_{k+1}$

$$S'_k(x_k) = \frac{\sigma_k}{6} \cdot (-2(x_{k+1} - x_k)) + \frac{\sigma_{k+1}}{6} \cdot (-(x_{k+1} - x_k)) + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$$

$$S'_k(x_{k+1}) = \frac{\sigma_k}{6} \cdot (x_{k+1} - x_k) + \frac{\sigma_{k+1}}{6} \cdot (2(x_{k+1} - x_k)) + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$$

Depuis la dernière équation, nous pouvons écrire :

$$S'_{k-1}(x_k) = \frac{\sigma_{k-1}}{6} \cdot (x_k - x_{k-1}) + \frac{\sigma_k}{6} \cdot (2(x_k - x_{k-1})) + \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$$

pour  $k = 1, \dots, n$ .

Nous avons la condition  $S'_k(x_k) = S'_{k-1}(x_k)$ , donc :

$$\sigma_{k-1} \cdot (x_k - x_{k-1}) + \sigma_k \cdot (2 \cdot (x_{k+1} - x_{k-1})) + \sigma_{k+1} \cdot (x_{k+1} - x_k) = 6 \cdot \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} - 6 \cdot \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$$

pour  $k = 1, \dots, n-1$ .

Comme nous l'avons vu, la fonction est donnée par :

$$\begin{aligned} S'_k(x) &= \frac{\sigma_k}{6} \cdot \left( \frac{-3(x_{k+1} - x)^2}{x_{k+1} - x_k} + (x_{k+1} - x_k) \right) \\ &+ \frac{\sigma_{k+1}}{6} \cdot \left( \frac{3(x - x_k)^2}{x_{k+1} - x_k} - (x_{k+1} - x_k) \right) \\ &+ \frac{y_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} - \frac{y_k}{x_{k+1} - x_k} \end{aligned}$$

pour  $x$  se trouvant entre  $x_k$  et  $x_{k+1}$ .

Nous avons donc un système à  $n - 1$  équations à  $n + 1$  inconnues. Pour pouvoir résoudre ce système, nous fixons arbitrairement  $\sigma_0$  et  $\sigma_n$ . Généralement, nous choisissons  $\sigma_0 = 0$  et  $\sigma_n = 0$ , ce qui correspond une courbure nulle aux extrémités de la courbe. Ce type de splines cubiques est appelées **splines naturelles** par analogie à la déformation d'une lame de métal (« spline » en anglais).

Avec ces deux conditions, nous avons  $n + 1$  équations avec  $n + 1$  inconnues, il est donc possible de résoudre le système. Ensuite, il suffit de remplacer les  $\sigma_k$  dans l'équation  $S_k(x)$  pour obtenir l'équation de la spline cubique entre deux points. Puis, nous assemblons ces arcs de cubiques pour avoir le tracé final.

La figure 7 montre les résultats de l'interpolation par splines cubiques sur un exemple.

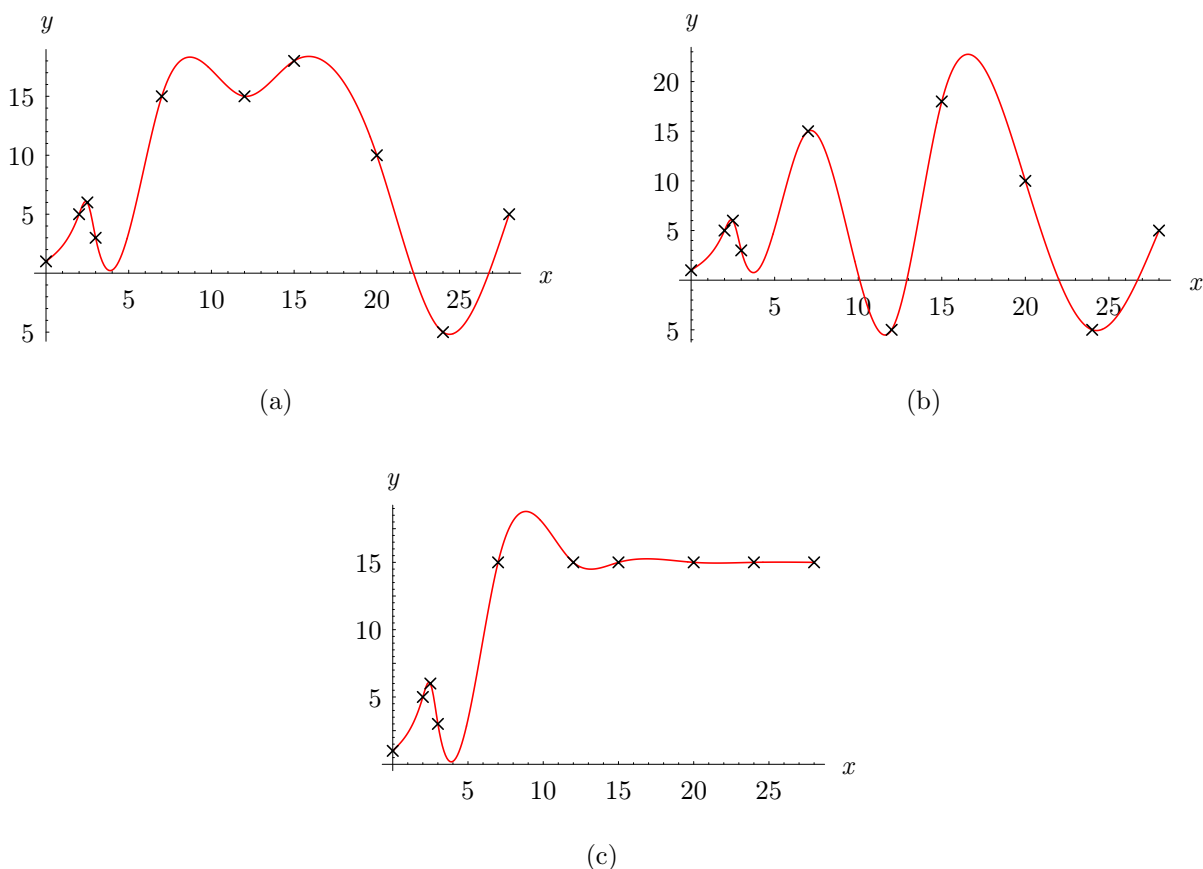


FIG. 7 – Résultats de l'interpolation par splines cubiques

### 3.2 Autres types de splines

Il y a d'autres types de splines<sup>8</sup> comme les **splines scellées** où nous imposons les valeurs des premières dérivées aux extrémités :  $S'_0(x_0) = p_0$  et  $S'_{n-1}(x_n) = p_n$ .

Les **splines périodiques** imposent que les dérivées premières et secondes soient identiques aux deux extrémités :  $S'_0(x_0) = S'_{n-1}(x_n)$  et  $S''_0(x_0) = S''_{n-1}(x_n)$ .

Il est également possible d'imposer que les dérivées secondes aux extrémités aient une valeur autre que zéro.

Pour la suite, nous utiliserons les splines naturelles.

Il existe aussi des splines d'interpolation complètement différentes comme les Catmull-Rom.

### 3.3 Avantages et inconvénients

Comme nous le voyons sur la figure 7, les courbes sont très harmonieuses. Il n'y a effectivement pas de cassure du rayon de courbure. C'est pourquoi l'interpolation par splines cubiques peut être utilisée dans le cadre de programme de dessin sur ordinateur.

Le désavantage est que la courbe est beaucoup moins robuste que l'interpolation

<sup>8</sup>Voir [10].

cubique. En effet, tous les points sont liés, le changement d'un de ceux-ci influe tout le système d'équations. Nous pouvons voir un exemple aux (a) et (b) de la figure 7.

Le problème d'oscillation de l'interpolation de Lagrange n'est pas présent, comme nous pouvons le voir dans figure 7c.

Un autre inconvénient est que la résolution est beaucoup plus complexe que pour les autres types d'interpolation que nous avons vu.

## 4 Les Courbes de Bézier

### 4.1 Introduction

#### 4.1.1 Utilité et découverte des courbes de Bézier

L'interpolation n'est pas toujours très adaptée pour certaines utilisations telles que le dessin par ordinateur, la CAO (conception assistée par ordinateur), etc.

C'est dans le domaine de la CAO que les courbes de Bézier<sup>9</sup> ont été inventées et plus précisément dans l'industrie automobile. Dans les années 1960, les machines à commandes numériques sont apparues, il fallait donc décrire les formes (comme les courbes de carrosserie) avec des équations mathématiques.

La première solution était d'interpoler linéairement un grand nombre de points. Cette méthode a de nombreux inconvénients :

- Pour la machine, il y a beaucoup de paramètres.
- Il est impossible d'agrandir (mais aussi de translater, de déformer, ...) une partie d'une pièce sans rajouter de points supplémentaires.
- Placer des points n'est pas intuitif pour les designers.
- Il est très fastidieux de modifier la courbe.

Un autre procédé était donc nécessaire pour exprimer une courbe avec peu de paramètres et que ceux ci soient naturels.

L'idée révolutionnaire des courbes de Bézier est l'utilisation de points de contrôle et non de points d'interpolation. Cela veut dire que la courbe ne passe pas par les points donnés mais les approche. Les courbes de Bézier ne sont donc pas des interpolations mais des **approximations**. Il y a plusieurs avantages à cela :

- La courbe est stable, il est facile de déformer la courbe sans résultats inattendus.
- Il est facile de modifier la courbe, il ne faut que modifier les points de contrôle qui sont peu nombreux.
- Le placement des points de contrôle est relativement évident.
- Il est plus facile d'avoir une courbe naturelle, fluide, non brusquée avec des points de contrôle qu'avec des points d'interpolation.

Et tout cela en gardant les avantages du modèle numérique (agrandissement, déformation, etc.).

---

<sup>9</sup>Voir [12, 2, 13, 14, 15, 16, 17].

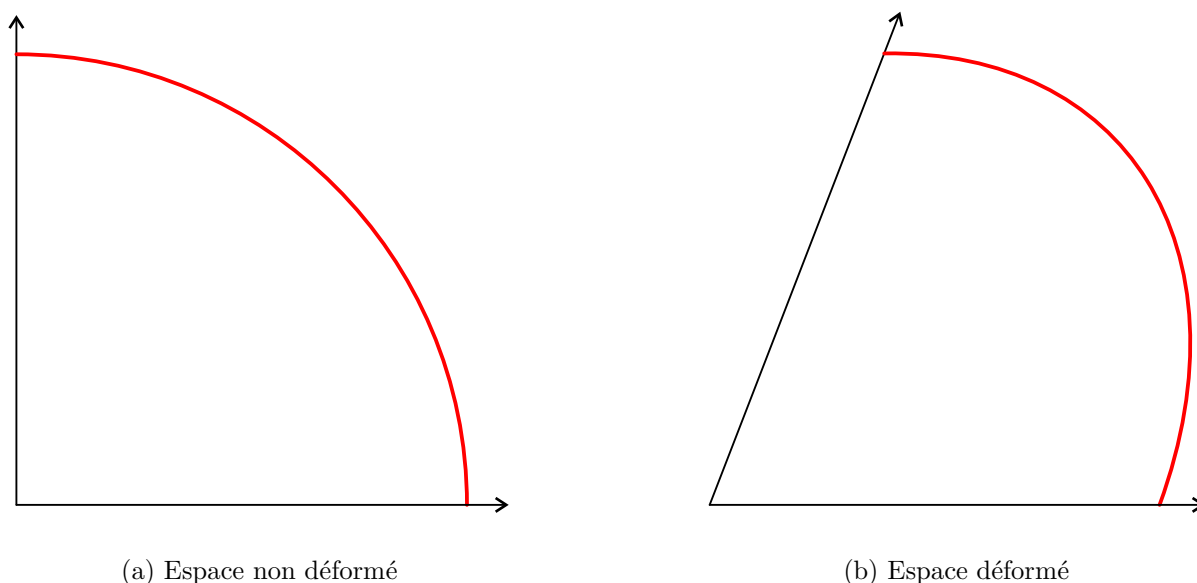


FIG. 8 – Déformation d'un espace à 2 dimensions

#### 4.1.2 La conception de Bézier

Les courbes de Bézier<sup>10</sup> ont entre autres été créées par Pierre BÉZIER chez Renault en 1962. Bien que ce type de courbes porte son nom, il n'est pas certain que Bézier ait été le premier à construire cette courbe. En effet Paul DE CASTELJAU chez Citron, a développé la même courbe plus ou moins à la même époque bien que son approche diffère de celle de Bézier. La manière de De Casteljaou est étudiée plus loin. L'approche de De Casteljaou étant plus intuitive et plus utilisée, nous n'étudierons pas en détail l'approche de Bézier.

La méthode de Bézier repose sur la déformation de l'espace. Nous partons d'une courbe simple (comme un quart de cercle) sur un système d'axes. En réalité, la courbe choisie par Bézier était un polynôme. Puis, nous déformons l'espace, ce qui change la courbe. La figure 8 montre une déformation sur un quart de cercle.

Il est clair que déformer un espace à deux dimensions ne permet pas de faire toutes les transformations que nous voudrions sur la courbe. Nous passons donc à un espace à trois dimensions. La figure 9 montre le résultat. La courbe est tracée en rouge. Le trait bleu correspond aux points de contrôle (extrémités et cassures). Nous « aplatissons » alors l'espace pour obtenir une courbe en deux dimensions.

Comme nous le voyons, la méthode de Bézier est relativement complexe. Il n'est pas très facile d'obtenir l'expression de la courbe. De plus, nous obtenons un résultat qui ne correspond pas à la forme connue et utilisée des courbes de Bézier. Nous obtiendrons cette forme grâce à l'algorithme de De Casteljaou.

---

<sup>10</sup>La conception de Bézier est étudiée en détail dans [13].

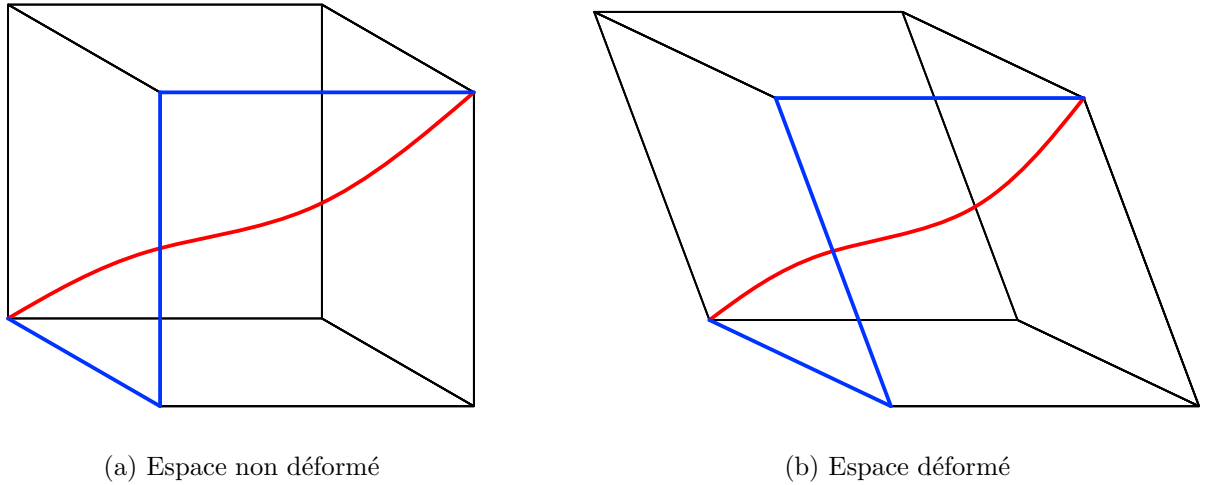


FIG. 9 – Déformation d'un espace à 3 dimensions

## 4.2 L'algorithme de De Casteljau

L'algorithme de De Casteljau<sup>11</sup> est la manière la plus simple de dessiner une courbe de Bézier. La conception est entièrement géométrique. Si nous voulons une courbe de Bézier avec quatre points de contrôle, nous devons procéder de la manière suivante.

La figure 10 montre le schéma de la construction (avec  $t = \frac{1}{2}$ ). Aux extrémités et aux cassures de la courbe bleue, il y a les points de contrôle. Le trait bleu forme le **polygone de contrôle**. Les points sont numérotés  $P_0^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0, \dots$

Nous prenons un paramètre  $t$  entre 0 et 1. Nous trouvons le point  $P_0^1$  qui est défini comme  $\overrightarrow{OP_0^1} = \overrightarrow{OP_0^0} + t \cdot \overrightarrow{P_0^0 P_1^0}$ .

$P_0^1$  est le **barycentre** de  $P_0^0$  et  $P_1^0$  (affectés des poids  $t$  et  $1-t$ ). De la même manière, nous trouvons  $P_1^1$  (le barycentre de  $P_1^0$  et  $P_2^0$ ) et  $P_2^1$  (le barycentre de  $P_2^0$  et  $P_3^0$ ). Ensuite, nous trouvons  $P_0^2$  le barycentre de  $P_0^1, P_1^1$  puis  $P_1^2$  celui de  $P_1^1$  et  $P_2^1$ . Et, finalement,  $P_0^3$  le barycentre de  $P_0^2$  et  $P_1^2$ , qui est le point de la courbe de Bézier avec le paramètre  $t$  choisi.

Nous prendrons pour  $O$  l'origine  $(0; 0)$  et pour simplifier la notation  $P_n^i = \overrightarrow{OP_n^i}$ . Nous verrons plus tard que le choix de l'origine n'a pas d'importance.

Si nous faisons varier  $t$  de 0 à 1 nous obtenons un certain nombre de points appartenant à la courbe de Bézier. Le (a) de la figure 11 montre la construction d'une courbe de Bézier à trois points de contrôle  $((0; 5), (5; 0), (10; 5))$  avec  $t$  variant par pas de 0.1. Le (b) de la figure 11 montre la même courbe mais sans les constructions barycentriques.

A présent, nous allons voir comment calculer les points d'une courbe de Bézier.

Pour trouver le barycentre  $P_0^1(x_0^1, y_0^1)$  entre deux points  $P_0^0(x_0^0, y_0^0)$  et  $P_1^0(x_1^0, y_1^0)$  nous utilisons la formule suivante :

$$\begin{aligned} x_0^1 &= t \cdot x_1^0 + (1-t) \cdot x_0^0 \\ y_0^1 &= t \cdot y_1^0 + (1-t) \cdot y_0^0 \end{aligned}$$

Ainsi le barycentre se déplace entre  $P_0^0$  et  $P_1^0$  sur la droite les reliant. Comme nous

<sup>11</sup>La conception de De Casteljau est étudiée dans [2, 14, 12, 18, 19, 15, 16].

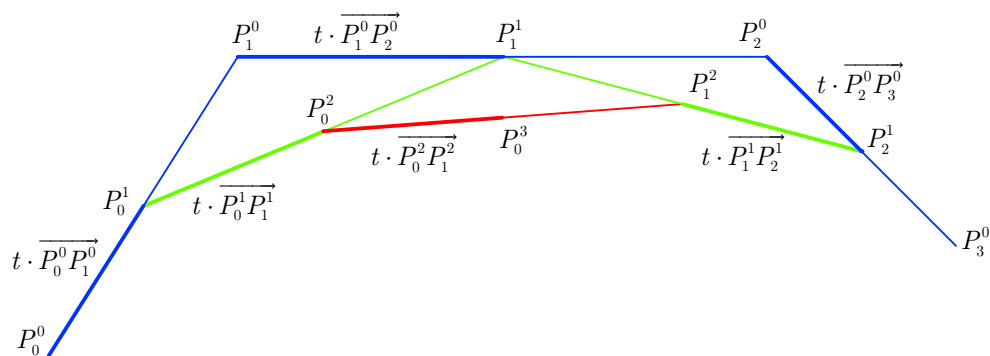
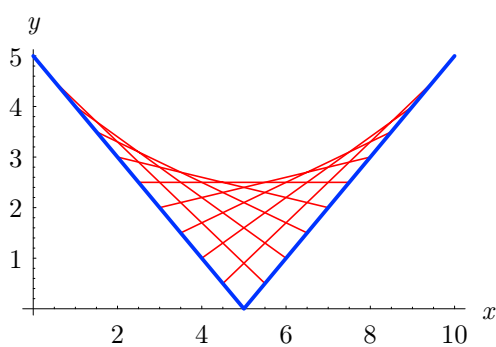
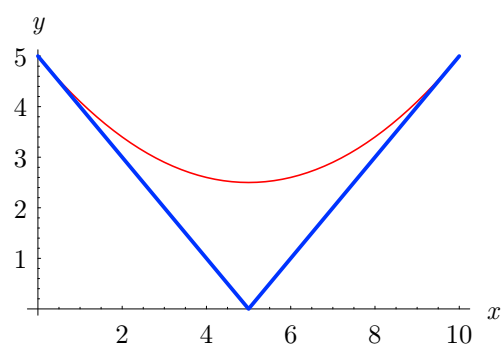


FIG. 10 – Schéma de la construction de De Casteljau avec 4 points de contrôle



(a) avec construction barycentrique



(b) sans construction barycentrique

FIG. 11 – Courbe de Bézier à 3 points de contrôle

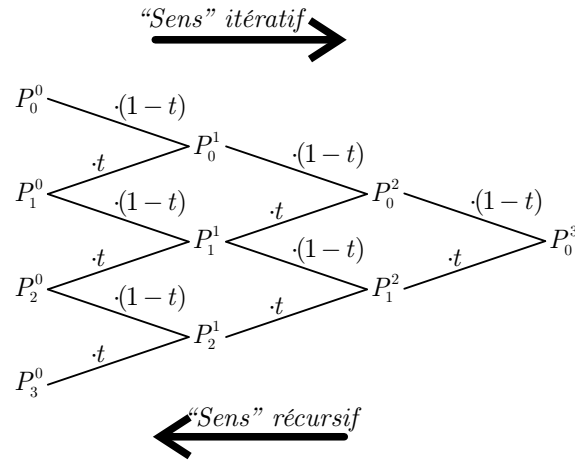


FIG. 12 – Schéma pyramidal de De Casteljau avec 4 points de contrôle

l'avons vu, il faut répéter plusieurs fois l'opération pour obtenir le niveau  $P^3$ . La figure 12 montre le schéma de l'algorithme de De Casteljau (connu aussi sous le nom de schéma pyramidal de De Casteljau). Ce schéma est valable pour 4 points de contrôle.

Comme nous le voyons le schéma dispose d'autant de niveaux qu'il y a de points de contrôle. Donc, comme pour changer de niveau nous multiplions par  $t$  ou  $1 - t$ , notre courbe à 4 points de contrôle est de degré 3. Bien sr ce type d'arbre est aussi valable pour une courbe avec plus de 4 points de contrôle.

**Le degré d'une courbe de Bézier est inférieur d'une unité au nombre de points de contrôle.**

Précisons que la courbe de Bézier de degré  $n$  avec  $n + 1$  points est unique.

Il est possible de trouver l'expression d'une courbe de Bézier. Nous allons le voir pour une courbe à 4 points de contrôle mais la démarche est généralisable.

Le plus simple est de prendre le schéma dans le sens itératif de la figure 12. Pour le deuxième niveau, nous avons :

$$\begin{aligned} P_0^1 &= P_0^0 \cdot (1 - t) + P_1^0 \cdot t \\ P_1^1 &= P_1^0 \cdot (1 - t) + P_2^0 \cdot t \\ P_2^1 &= P_2^0 \cdot (1 - t) + P_3^0 \cdot t \end{aligned}$$

pour le troisième niveau :

$$\begin{aligned} P_0^2 &= P_0^1 \cdot (1 - t) + P_1^1 \cdot t \\ P_1^2 &= P_1^1 \cdot (1 - t) + P_2^1 \cdot t \end{aligned}$$

et pour le quatrième :

$$P_0^3 = P_0^2 \cdot (1 - t) + P_1^2 \cdot t$$

En assemblant ces équations, nous pouvons obtenir  $P_0^3$  en fonction des points de contrôle. Nous avons alors l'expression suivante de la courbe de Bézier :

$$P_0^3 = (1 - t)^3 \cdot P_0^0 + 3t(1 - t)^2 \cdot P_1^0 + 3t^2(1 - t) \cdot P_2^0 + t^3 \cdot P_3^0$$



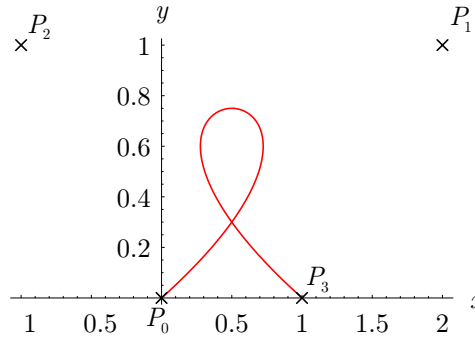


FIG. 13 – Courbe de Bézier à 4 points de contrôle

Il est aussi possible de trouver cette expression à partir du sens récursif :

$$\begin{aligned} P_0^3 &= (1-t) \left( (1-t) \left( (1-t) \cdot P_0^0 + t \cdot P_1^0 \right) + t \left( (1-t) \cdot P_1^0 + t \cdot P_2^0 \right) \right) \\ &+ t \left( (1-t) \left( (1-t) \cdot P_1^0 + t \cdot P_2^0 \right) + t \left( (1-t) \cdot P_2^0 + t \cdot P_3^0 \right) \right) \\ &= (1-t)^3 \cdot P_0^0 + 3t(1-t)^2 \cdot P_1^0 + 3t^2(1-t) \cdot P_2^0 + t^3 \cdot P_3^0 \end{aligned}$$

Cette manière donne évidemment le même résultat.

Les courbes de Bézier sont toujours exprimées sous forme paramétrique car pour une utilisation pratique (dessin, CAO, etc.) il est nécessaire que la courbe puisse avoir des points de rebroussement. La figure 13 montre une courbe de Bézier à 4 points de contrôle et qui se croise. La courbe dessine un caractère  $\alpha$ .

### 4.3 Forme de Bernstein

Bien que l'algorithme de De Casteljau soit très simple, il est relativement long de trouver l'expression de la courbe lorsqu'il y a beaucoup de points de contrôle. La forme de Bernstein<sup>12</sup> permet d'exprimer plus simplement une courbe de Bézier.

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, l'expression d'une courbe de Bézier de degré 3 est :

$$P_0^3 = (1-t)^3 \cdot P_0^0 + 3t(1-t)^2 \cdot P_1^0 + 3t^2(1-t) \cdot P_2^0 + t^3 \cdot P_3^0$$

En généralisant pour  $n+1$  points, le membre de droite est de la forme suivante :

$$C_n^0 \cdot (1-t)^n \cdot P_0^0 + C_n^1 \cdot t(1-t)^{n-1} \cdot P_1^0 + C_n^2 \cdot t^2(1-t)^{n-2} \cdot P_2^0 + \dots + C_n^{n-1} \cdot t^{n-1}(1-t) \cdot P_{n-1}^0 + C_n^n \cdot t^n \cdot P_n^0$$

Chaque point de contrôle est multiplié par le polynôme suivant :

$$B_n^i = C_n^i \cdot t^i (1-t)^{n-i}$$

où  $C_n^i$  sont les coefficients du binôme de Newton  $\frac{n!}{i!(n-i)!}$ . Dans  $B_n^i$ ,  $n$  représente le degré de la courbe et  $i$  le rang du polynôme variant de 0 à  $n$ . Ce polynôme est appelé **polynôme de Bernstein**.

Par exemple, pour  $n=3$  (4 points de contrôle) nous avons les polynômes suivants :

<sup>12</sup>Voir [2, 14].

$$B_3^0 = (1-t)^3, \quad B_3^1 = 3t(1-t)^2, \quad B_3^2 = 3t^2(1-t), \quad B_3^3 = t^3$$

ce qui correspond exactement aux membres de l'équation trouvée avec l'algorithme de De Casteljau. Nous pouvons donc définir une courbe de Bézier de la manière suivante ( $M$  étant le point de la courbe) :

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^n B_n^i \cdot P_i^0$$

Ce qui correspond à la forme de Bernstein d'une courbe de Bézier.

## 4.4 Propriété des courbes de Bézier

Les courbes de Bézier présentent beaucoup de propriétés intéressantes. La plupart de ces propriétés sont très utiles voir indispensables pour des utilisations pratiques.

### 4.4.1 Indépendance de l'origine

Nous allons montrer qu'une courbe de Bézier est indépendante du repère<sup>13</sup>.

Nous devons d'abord montrer que  $\sum_{i=0}^n B_n^i(t) = 1$ .

La somme  $\sum_{i=0}^n B_n^i(t)$  est égale au binôme de Newton suivant  $(1 + (1-t))^n$ . Donc :

$$\sum_{i=0}^n B_n^i(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i} = (1 + (1-t))^n = 1$$

Cette propriété des polynômes de Bernstein est intitulée la **partition de l'unité**.

Si nous effectuons un changement de base, la nouvelle origine étant  $O'$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'M} &= \sum_{i=0}^n B_n^i \cdot \overrightarrow{O'P_i^0} = \sum_{i=0}^n B_n^i \cdot (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_i^0}) \\ &= \sum_{i=0}^n B_n^i \cdot \overrightarrow{O'O} + \sum_{i=0}^n B_n^i \cdot \overrightarrow{OP_i^0} \end{aligned}$$

avec la propriété de la partition de l'unité, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'M} &= \sum_{i=0}^n B_n^i \cdot \overrightarrow{O'O} + \sum_{i=0}^n B_n^i \cdot \overrightarrow{OP_i^0} \\ &= \overrightarrow{O'O} + \sum_{i=0}^n B_n^i \cdot \overrightarrow{OP_i^0} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} \end{aligned}$$

Donc une courbe de Bézier est indépendante de l'origine. Dans le cas contraire, il aurait été très difficile d'utiliser ce modèle.

---

<sup>13</sup>L'indépendance de l'origine est étudiée dans [14].

#### 4.4.2 Interpolation aux extrémités

Comme nous le voyons graphiquement, une courbe de Bézier passe par le premier et le dernier point.

En effet, le premier point est multiplié par le polynôme de Bernstein  $B_n^0$  qui vaut 1 en  $t = 0$ . Donc en  $t = 0$  la courbe passe par  $P_0^0$ . Le dernier polynôme de Bernstein  $B_n^n$  vaut  $t^n$ , donc à l'extrémité de la courbe en  $t = 1$ , la courbe passe par  $P_n^0$ .

Cette propriété est très importante car s'il n'est pas nécessaire de contrôler entièrement la courbe au milieu, il est primordiale de savoir où elle part et où elle arrive. Si nous voulons raccorder plusieurs courbes de Bézier, il est obligatoire de savoir où se trouve les extrémités<sup>14</sup>.

Dans un logiciel de dessin, il est souvent nécessaire de relier plusieurs points avec une courbe, là encore, cette propriété est très utile.

#### 4.4.3 Dérivée d'une courbe de Bézier

Il est relativement complexe de dériver une courbe de Bézier de degré  $n$ . Nous ne nous occuperons que de la dérivée première. Voici la démarche pour trouver la dérivée<sup>15</sup> :

Nous dérivons d'abord un polynôme de Bernstein :

$$B_n^i(t) = C_n^i \cdot t^i (1-t)^{n-i}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_n^i(t) &= C_n^i \cdot i \cdot t^{i-1} \cdot (1-t)^{n-i} + C_n^i \cdot t^i \cdot (n-i) \cdot (1-t)^{n-i-1} \cdot (-1) \\ &= \frac{n! \cdot i}{i!(n-i)!} \cdot t^{i-1} \cdot (1-t)^{n-i} - \frac{n!(n-i)}{i!(n-i)!} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i-1} \\ &= \frac{n(n-1)!}{(i-1)! \cdot (n-i)!} \cdot t^{i-1} \cdot (1-t)^{n-i} - \frac{n(n-1)!}{i!(n-i-1)!} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i-1} \\ &= \frac{n(n-1)!}{(i-1)! \cdot (n-1-(i-1))!} \cdot t^{i-1} \cdot (1-t)^{n-1-(i-1)} - \frac{n(n-1)!}{i!(n-i-1)!} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i-1} \end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, nous reconnaissons un polynôme de Bernstein donc la dérivée vaut :

$$\frac{d}{dt} B_n^i(t) = n \cdot B_{n-1}^{i-1}(t) - n \cdot B_{n-1}^i(t)$$

A partir de la dérivée d'un polynôme de Bernstein, nous pouvons obtenir celle de la courbe de Bézier :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM} &= \sum_{i=0}^n (B_n^i(t))' \cdot \overrightarrow{OP_i^0} \\ &= n \cdot \sum_{i=1}^n B_{n-1}^{i-1}(t) \cdot \overrightarrow{OP_i^0} - n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1}^i(t) \cdot \overrightarrow{OP_i^0} \end{aligned}$$

---

<sup>14</sup>L'interpolation aux extrémités est étudiée dans [14, 16].

<sup>15</sup>La dérivée d'une courbe de Bézier est étudiée dans [14, 16].

en posant  $j = i - 1$ , nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM} = n \cdot \sum_{j=0}^{n-1} B_{n-1}^j(t) \cdot \overrightarrow{OP_{j+1}^0} - n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1}^i(t) \cdot \overrightarrow{OP_i^0}$$

Donc nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM} &= n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1}^i(t) \cdot \overrightarrow{OP_{i+1}^0} - n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1}^i(t) \cdot \overrightarrow{OP_i^0} \\ &= n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left( \overrightarrow{OP_{i+1}^0} - \overrightarrow{OP_i^0} \right) \cdot B_{n-1}^i(t) = n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \overrightarrow{P_i^0 P_{i+1}^0} \cdot B_{n-1}^i(t) \end{aligned}$$

Nous avons donc la dérivée d'une courbe de Bézier de degré quelconque.

#### 4.4.4 Tangentes aux extrémités

Il est possible de voir graphiquement que la tangente au début de la courbe correspond à la droite reliant  $P_0$  à  $P_1$ . La tangente à la fin de la courbe est égale à la droite reliant  $P_n$  à  $P_{n-1}$ .

Nous allons le voir en utilisant la formule de la dérivée d'une courbe de Bézier que nous venons d'étudier.

Pour  $t = 0$  :

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}(0) = n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left( \overrightarrow{P_i^0 P_{i+1}^0} \right) \cdot B_{n-1}^i(0)$$

Le polynôme de Bernstein :

$$B_{n-1}^i(0) = \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i-1} \mid t=0$$

vaut 0 sauf quand  $i = 0$  où il vaut 1. La tangente en  $t = 0$  est donc égale à :

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}(0) = n \cdot \overrightarrow{P_0^0 P_1^0}$$

Ce qui correspond bien à la droite reliant  $P_0^0$  à  $P_1^0$ .

Nous pouvons appliquer la même démarche pour  $t = 1$  et nous trouvons :

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}(1) = n \cdot \overrightarrow{P_{n-1}^0 P_n^0}$$

Les valeurs des tangentes aux extrémités sont logiques ce qui facilite l'utilisation de courbes de Bézier. Cette propriété est très intéressante pour joindre plusieurs courbes de Bézier sans rupture de pente.

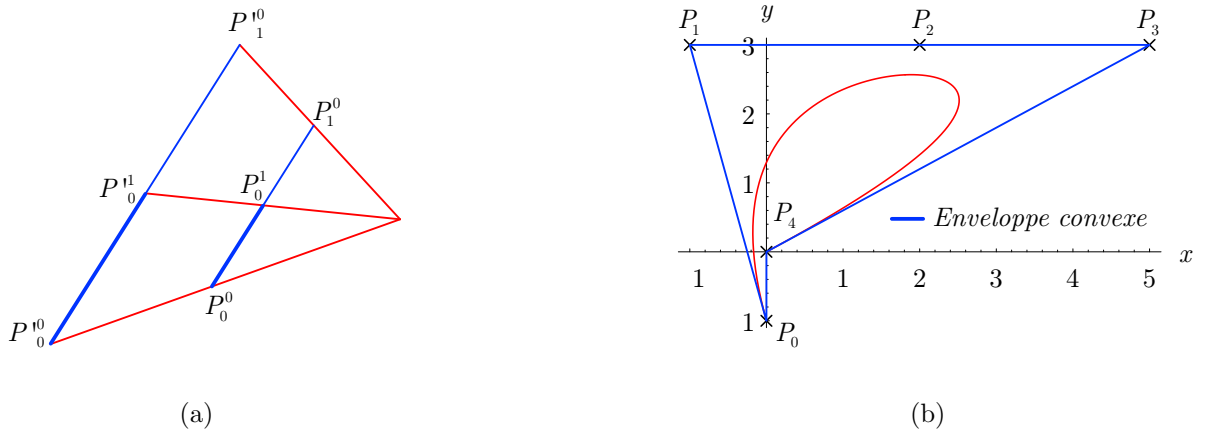


FIG. 14 – Homothétie et Enveloppe convexe

#### 4.4.5 Invariance par transformation affine et rotation

Une courbe de Bézier ne change pas de forme si nous lui faisons subir une transformation affine (translation et homothétie) ou une rotation<sup>16</sup>.

Cela s'explique grce à la construction géométrique de De Casteljau. Nous prendrons comme exemple une courbe de Bézier à 3 points de contrôle ( $P_0^0, P_1^0, P_2^0$ ) qui subit une transformation sur  $P_0^0, P_1^0, P_2^0$ .

Si les trois points sont tradatés, la courbe ne changera pas car la construction sera identique.

Si les points de contrôle subissent une homothétie, il n'y aura pas de changement de la forme de la courbe. En effet les rapports entre  $P_0^0, P_1^0, P_2^0$  seront identiques à ceux entre  $P_0^0, P_1^0, P_2^0$ . Les rapports sont aussi respectés avec  $P_1^0, P_2^0, P_1^1$  et  $P_1^0, P_2^0, P_1^1$ . La situation est représentée au (a) de la figure 14.

La construction sera donc identique.

Pour la rotation des points de contrôle, il n'y a évidemment pas de changement. En effet, lors de la construction pyramidale, la rotation du polygone de contrôle n'a pas d'influence sur la forme de la courbe. Les rapports entre  $P_0^0, P_1^0, P_2^0$  et  $P_0^0, P_1^0, P_2^0$  sont identiques.

Ces propriétés, qui sont plus ou moins évidentes, sont néanmoins primordiales. En effet, lors d'une utilisation pratique comme dans un logiciel de CAO, il est indispensable de pouvoir tradater, agrandir, ... une pièce sans que sa forme varie.

#### 4.4.6 Propriété de l'enveloppe convexe

L'**enveloppe convexe**<sup>17</sup> d'une courbe de Bézier est le polygone passant par les points de contrôle d'une courbe de Bézier de sorte que le polygone soit le plus grand possible. Le (b) de la figure 14 montre l'enveloppe convexe d'une courbe de Bézier.

Une courbe de Bézier est toujours contenue dans son enveloppe convexe. Nous pouvons le voir avec le schéma pyramidale de De Casteljau. En effet, les barycentres se

<sup>16</sup>Voir [16, 14].

<sup>17</sup>Voir [14, 2, 16, 15].

trouvent toujours à l'intérieur du polygone de contrôle. Il suffit de regarder la figure 10 pour s'en convaincre.

La propriété de l'enveloppe convexe découle aussi de la partition de l'unité de la somme des polynômes de Bernstein.

Cette propriété est parfois appelée la propriété des tests de collisions. Ce nom est dû à l'utilisation de cette propriété en robotique. En effet, si le bras d'un robot suit une courbe de Bézier, il ne sortira jamais de son enveloppe convexe. Il est donc possible de savoir très simplement si le robot va faire une collision ou non.

#### 4.4.7 Contrôle local

Une courbe de Bézier n'est pas une interpolation mais une **approximation** et, de plus, le changement d'un point influence toute la courbe<sup>18</sup>.

Il n'est donc que moyennement correct de parler de contrôle local. Le terme de contrôle **pseudo-local** est plus approprié. Nous prenons une courbe de Bézier de degré  $n$  et nous changeons un des points de contrôle de cette courbe. Ce changement affecte toute la courbe, il est néanmoins possible de savoir où la variation sera la plus importante.

Nous cherchons les maximums du polynôme  $B_n^i$ . Nous avons déjà vu que :

$$\frac{d}{dt}B_n^i(t) = C_n^i \cdot i \cdot t^{i-1} \cdot (1-t)^{n-i} + C_n^i \cdot t^i \cdot (n-i) \cdot (1-t)^{n-i-1} \cdot (-1)$$

Pour obtenir les maximums, nous posons  $\frac{d}{dt}B_n^i(t) = 0$  ce qui donne :

$$\begin{aligned} i \cdot t^{i-1} \cdot (1-t)^{n-i} - t^i \cdot (n-i) \cdot (1-t)^{n-i-1} &= 0 \\ i \cdot t^{i-1} \cdot (1-t) \cdot (1-t)^{n-i-1} - t^i \cdot (n-i) \cdot (1-t)^{n-i-1} &= 0 \\ t^{i-1} \cdot (1-t)^{n-i-1} \cdot (i \cdot (1-t) - t \cdot (n-i)) &= 0 \end{aligned}$$

La partie  $t^{i-1} \cdot (1-t)^{n-i-1}$  signifie que le polynôme vaut 0 en  $t = 0$  et  $t = 1$ . Pour obtenir les maximums, nous prenons la deuxième partie.

$$\begin{aligned} i \cdot (1-t) - t \cdot (n-i) &= 0 \\ t &= \frac{i}{n} \end{aligned}$$

Le maximum est donc unique. Nous pouvons dire que c'est un maximum car les valeurs d'un polynôme de Bernstein sont toujours positives et sont nulles aux extrémités.

Nous prenons l'exemple d'une courbe de degré 2 :

$$\overrightarrow{OM} = B_2^0 \cdot \overrightarrow{OP_0} + B_2^1 \cdot \overrightarrow{OP_1} + B_2^2 \cdot \overrightarrow{OP_2}$$

où nous changeons le point  $P_1$ . Cela va affecter le terme avec le polynôme  $B_2^1$ . La variation sera maximum lorsque le polynôme atteindra son maximum soit en  $\frac{1}{2}$ .

Plus généralement, si nous changeons le  $P_i$ , la variation sera maximum en  $\frac{i}{n}$ . Cette propriété permet de prévoir le comportement d'une courbe de Bézier lorsque ses points de contrôle changent.

---

<sup>18</sup>Le contrôle local est étudié dans [16].

#### 4.4.8 Moyenne de courbe de Bézier

Il est possible de faire la moyenne de deux courbes de Bézier. Cette transformation est aussi appelée l'invariance par combinaison barycentrique<sup>19</sup>.

Les points de contrôle sont les suivants :  $A_0, A_1, \dots, A_n$  pour la première courbe et  $D_0, D_1, \dots, D_n$  pour la deuxième.

Pour construire la courbe moyenne  $\overrightarrow{OM}$ , nous prendrons :

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^n (\alpha \cdot A_i + \beta \cdot D_i) \cdot B_n^i = \alpha \cdot \sum_{i=0}^n B_n^i \cdot A_i + \beta \cdot \sum_{i=0}^n B_n^i \cdot D_i$$

où  $\alpha + \beta = 1$ . Avec cette condition, lorsque  $\alpha = 1$  la courbe moyenne est la courbe avec les  $A_i$  et lorsque  $\beta = 1$  c'est la courbe avec les  $D_i$ . Il est donc possible de faire la moyenne pondérée de deux courbes de Bézier.

La moyenne des points de contrôle de deux courbes donne la même courbe que la moyenne des points composant ces deux courbes.

Dans le cadre d'une utilisation pratique, il peut s'avérer utile de faire la moyenne de deux courbes notamment si nous voulons fusionner deux courbes en une.

#### 4.4.9 Approximation de Weierstrass

Nous choisissons une courbe  $C$  qui est définie par un paramètre de 0 à 1 (la courbe doit être continue).

Nous prenons des points sur la courbe  $C$  comme points de contrôle d'une courbe de Bézier. Si :

$$C_n(t) = \sum_{i=0}^n B_n^i \cdot C\left(\frac{i}{n}\right)$$

Le théorème d'approximation de Weierstrass<sup>20</sup> établit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n(t) = C(t)$$

En d'autres termes, plus nous prenons de points de contrôle sur une courbe donnée  $C(t)$  plus la courbe de Bézier s'approche de  $C(t)$ .

L'utilité de ce théorème est toutefois relative : en effet, il faudrait choisir des milliers de points de contrôle pour obtenir une approximation correcte de la courbe  $C$ .

#### 4.4.10 Augmentation du degré

Il est possible de changer le degré d'une courbe de Bézier sans changer la forme de celle-ci. Nous ne parlerons pas de la diminution du degré d'une courbe car cette manipulation n'est possible qu'avec des cas très particuliers.

L'augmentation du degré<sup>21</sup> permet de rajouter des points de contrôles (donc d'augmenter le degré) sans toucher à la forme de la courbe.

Nous prenons une courbe de degré 3 ( $n = 3$ ) avec 4 points de contrôle ( $P_0, P_1, P_2, P_3$ ) et voulons avoir 5 points de contrôle :  $P_0, Q_1, Q_2, Q_3, P_3$ . Les points extrêmes ne changeant évidemment pas. La figure 15 illustre la situation.

---

<sup>19</sup>Voir [16].

<sup>20</sup>Le théorème de Weierstrass est étudié dans [16, 2].

<sup>21</sup>Voir [2, 14].

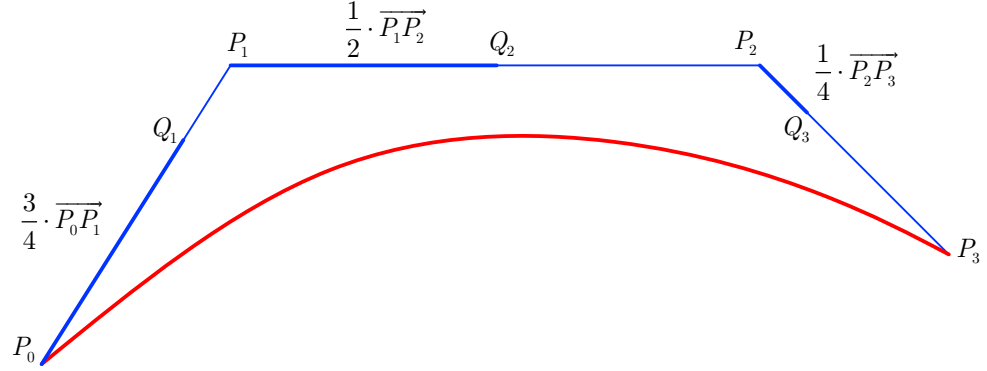


FIG. 15 – Augmentation du degré de  $n = 3$  à  $n = 4$

Les points  $Q_1, Q_2, Q_3$  sont placés de la manière suivante :  $\overrightarrow{P_0Q_1} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{P_0P_1}$ ,  $\overrightarrow{P_1Q_2} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}$ ,  $\overrightarrow{P_2Q_3} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{P_2P_3}$ .

Généralement, les points  $Q_k$  sont définis de la manière suivante :

$$\overrightarrow{P_kQ_{k+1}} = \frac{n-k}{n+1} \cdot \overrightarrow{P_kP_{k+1}}$$

Nous allons démontrer cette formule en prouvant que la courbe définie grce aux  $Q_k$  est identique à la courbe initiale. Nous calculons d'abord  $\overrightarrow{OQ_{k+1}}$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ_{k+1}} &= \overrightarrow{OP_k} + \overrightarrow{P_kQ_{k+1}} = \overrightarrow{OP_k} + \frac{n-k}{n+1} \cdot \overrightarrow{P_kP_{k+1}} \\ &= \overrightarrow{OP_k} + \frac{n-k}{n+1} \cdot (\overrightarrow{OP_{k+1}} - \overrightarrow{OP_k}) \\ &= \frac{n-k}{n+1} \cdot \overrightarrow{OP_{k+1}} + \left(1 - \frac{n-k}{n+1}\right) \cdot \overrightarrow{OP_k} \\ &= \frac{k+1}{n+1} \cdot \overrightarrow{OP_k} + \frac{n-k}{n+1} \cdot \overrightarrow{OP_{k+1}} \end{aligned}$$

Puis nous calculons  $\overrightarrow{OM'}(t)$ , la courbe construite avec les  $Q_k$  :

$$\overrightarrow{OM'}(t) = (1-t)^{n+1} \cdot \overrightarrow{OP_0} + \sum_{k=1}^n B_{n+1}^k(t) \cdot \overrightarrow{OQ_k} + t^{n+1} \cdot \overrightarrow{OP_n}$$

Puis nous posons  $k' = k - 1$  ce qui donne :

$$\overrightarrow{OM'}(t) = (1-t)^{n+1} \cdot \overrightarrow{OP_0} + \sum_{k'=0}^{n-1} B_{n+1}^{k'+1}(t) \cdot \overrightarrow{OQ_{k'+1}} + t^{n+1} \cdot \overrightarrow{OP_n}$$

Nous injectons le résultat trouvé pour  $\overrightarrow{OQ_{k+1}}$  et posons  $k' = k$  pour simplifier la



notation :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OM'}(t) &= (1-t)^{n+1} \cdot \overrightarrow{OP_0} + \sum_{k=0}^{n-1} B_{n+1}^{k+1}(t) \cdot \left( \frac{k+1}{n+1} \cdot \overrightarrow{OP_k} + \frac{n-k}{n+1} \cdot \overrightarrow{OP_{k+1}} \right) + t^{n+1} \cdot \overrightarrow{OP_n} \\
 &= (1-t)^{n+1} \cdot \overrightarrow{OP_0} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n+1} \cdot B_{n+1}^{k+1}(t) \cdot \overrightarrow{OP_k} \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{n+1} \cdot B_{n+1}^{k+1}(t) \cdot \overrightarrow{OP_{k+1}} + t^{n+1} \cdot \overrightarrow{OP_n}
 \end{aligned}$$

Nous développons le terme  $\frac{k+1}{n+1} \cdot B_{n+1}^{k+1}(t)$  :

$$\begin{aligned}
 \frac{k+1}{n+1} \cdot B_{n+1}^{k+1}(t) &= \frac{k+1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} \cdot t^{k+1} \cdot (1-t)^{n+1-(k+1)} \\
 &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot t^{k+1} \cdot (1-t)^{n-k} = t \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot t^k \cdot (1-t)^{n-k} = t \cdot B_n^k(t)
 \end{aligned}$$

De la même manière nous trouvons que :

$$\frac{n-k}{n+1} \cdot B_{n+1}^{k+1}(t) = (1-t) \cdot B_n^k(t)$$

En remplaçant ces deux résultats dans  $\overrightarrow{OM'}(t)$  nous avons :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OM'}(t) &= (1-t)^{n+1} \cdot \overrightarrow{OP_0} + \sum_{k=0}^{n-1} t \cdot B_n^k(t) \cdot \overrightarrow{OP_k} + \sum_{k=0}^{n-1} (1-t) \cdot B_n^k(t) \cdot \overrightarrow{OP_{k+1}} + t^{n+1} \cdot \overrightarrow{OP_n} \\
 &= t \left( \sum_{k=0}^{n-1} B_n^k(t) \cdot \overrightarrow{OP_k} + t^n \cdot \overrightarrow{OP_n} \right) + (1-t) \left( (1-t)^n \cdot \overrightarrow{OP_0} + \sum_{k=0}^{n-1} B_n^{k+1}(t) \cdot \overrightarrow{OP_{k+1}} \right)
 \end{aligned}$$

Puis nous posons  $k' = k + 1$  ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OM'}(t) &= t \cdot \overrightarrow{OM}(t) + (1-t) \left( (1-t)^n \cdot \overrightarrow{OP_0} + \sum_{k'=1}^n B_n^{k'}(t) \cdot \overrightarrow{OP_{k'}} \right) \\
 &= t \cdot \overrightarrow{OM}(t) + (1-t) \cdot \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}(t)
 \end{aligned}$$

Nous avons donc démontré que les deux courbes (avec  $P_k$  et avec  $Q_k$ ) sont confondues. La figure 16 montre le résultat de l'augmentation du degré de  $n = 3$  à  $n = 4$ . Nous voyons bien que la courbe est identique. Chaque application de la propriété ajoute un point de contrôle. Il est évidemment possible de répéter l'opération pour obtenir autant de points que souhaité.

Nous pouvons bien sr nous poser la question de l'utilité d'une telle propriété. En effet, en augmentant le nombre de points de contrôle, la courbe devient plus difficile à manipuler.

Mais l'augmentation du degré est utilisée pour contrôler localement la courbe. Il est difficile d'obtenir une courbe harmonieuse en plaçant à la main de nombreux points de

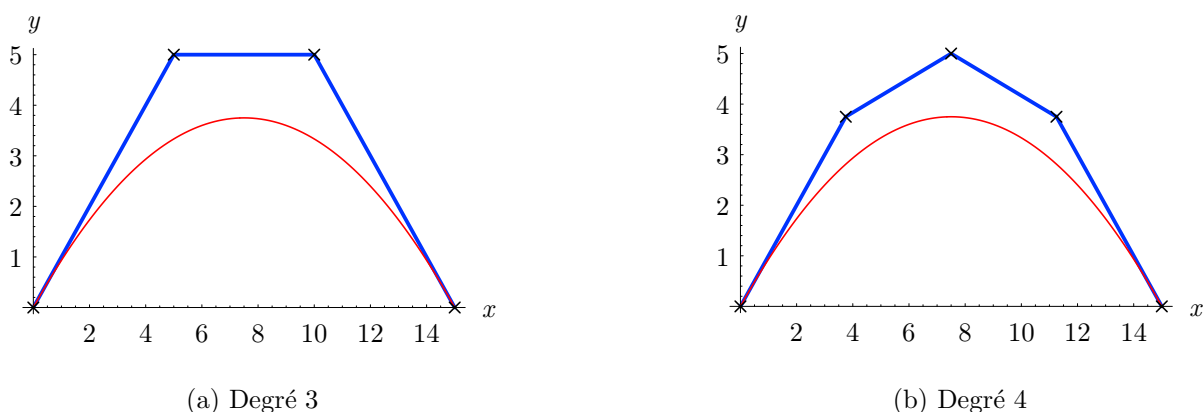


FIG. 16 – Exemple d’augmentation du degré

contrôle. Une courbe définie avec moins de points de contrôle sera plus naturelle, mais il est impossible de contrôler localement une courbe avec peu de points. Par exemple, la modification d’un point d’une courbe de degré 2 change toute la courbe. Si nous augmentons le degré de cette courbe pour obtenir 15 points de contrôle, il sera facile de faire des modifications qui ont essentiellement une portée locale.

#### 4.4.11 Autres propriétés

Nous avons étudié les propriétés les plus importantes des courbes de Bézier. Nous avons sélectionné, celles qui ont une utilité pratique. Néanmoins, les courbes de Bézier ont d’autres caractéristiques que nous n’étudierons pas.

Par exemple il est possible de prévoir où se trouve les points de rebroussement d’une courbe. Nous pouvons aussi savoir si une courbe possède des points de croisement, et si oui où.

Nous avons étudié la dérivée première d’une courbe de Bézier, il est possible de trouver les dérivées d’ordres supérieurs et d’étudier le rayon de courbure d’une courbe de Bézier<sup>22</sup>.

Il y a aussi une interprétation au niveau des probabilités des courbes de Bézier.

### 4.5 Sensibilité d’une courbe de Bézier

Une petite variation des points de contrôle d’une courbe de Bézier ne peut pas influencer fortement la courbe. En revanche, il y a plusieurs moyens de définir presque la même courbe. Autrement dit, si nous réalisons une grande variation des points de contrôle, il est possible que la courbe de Bézier ne varie que très faiblement.

Par exemple nous voulons approximer la fonction  $\sin(x)$  de 0 à  $\pi$  par une courbe Bézier de degré 4. Sur cet intervalle, la fonction  $\sin(x)$  est symétrique. Donc, les points de contrôle de courbe de Bézier devraient aussi l’être.

Nous fixons  $P_0(0; 0)$  et  $P_4(\pi; 0)$  puisque les points des contrôle extrêmes sont interpolés. Puis, nous faisons varier  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  par pas dans un certain intervalle en  $x \in [0; 4]$  et en  $y \in [0; 4]$ . Nous trouvons la combinaison la plus pertinente et comparons la courbe

<sup>22</sup>[2, 14] étudie les courbes de Bézier plus en détails.

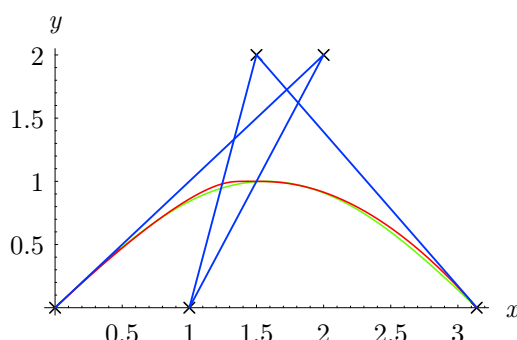


FIG. 17 – Approximation de  $\sin(x)$  par une courbe de Bézier

donnée avec ces points avec la courbe  $\sin(x)$ . La situation est représentée à la figure 17. La courbe de Bézier est en rouge, la fonction  $\sin(x)$  en vert et le polygone de contrôle en bleu. La répartition des points de contrôle semble totalement anarchique et illogique, pourtant l'approximation est très bonne.

Nous en déduisons que les courbes de Bézier peuvent avoir des formes inattendues et qu'il est possible d'obtenir presque la même courbe avec des points de contrôle totalement différents. Par exemple si nous déplaçons un point en haut à gauche et un autre en bas à droite, il est possible de ne pas trop influencer l'équilibre de la courbe.

Le programme capable de trouver les points de contrôle pouvant approximer une fonction est assez volumineux, il donc présenté en annexe.

## 4.6 Utilisations pratiques

### 4.6.1 Utilisations générales

Nous utilisons partout les courbes de Bézier. Enormément d'objets ont été conçus grce à elles. Leurs utilisations dépassent largement la CAO, elles sont aussi utilisées en informatique, en graphisme, en dessin en 3D, pour les jeux vidéos, le cinéma, etc<sup>23</sup>.

Par exemple, le logiciel *Paint*, inclus dans Windows permet de tracer des courbes de Bézier. Pourtant il s'agit du logiciel de dessin le plus basique.

Plusieurs langages informatiques ont implémenté les courbes de Bézier. Le VRML (langage graphique pour la 3D) permet de tracer des courbes de Bézier.

Nous allons étudier de plus près l'exemple du Postscript et de  $\text{\LaTeX}$ .

### 4.6.2 Le Postscript & $\text{\LaTeX}$

Le Postscript est un langage informatique. Il a été conçu dans les années 80 pout pouvoir communiqué avec les imprimantes. En effet, à l'époque il n'y avait pas que des PC donc un langage universel était nécessaire. Bien plus qu'un simple langage graphique, le Postscript est un véritable langage de programmation (plutôt complexe).

En Postscript, les courbes sont des courbes de Bézier. Les polices de caractère Postscript sont définies avec des courbes de Bézier.

Actuellement, le Postscript est encore très utilisé mais nous ne le remarquons très peu car il n'interagit pas avec l'utilisateur.

<sup>23</sup>Voir [13, 16, 20, 21].

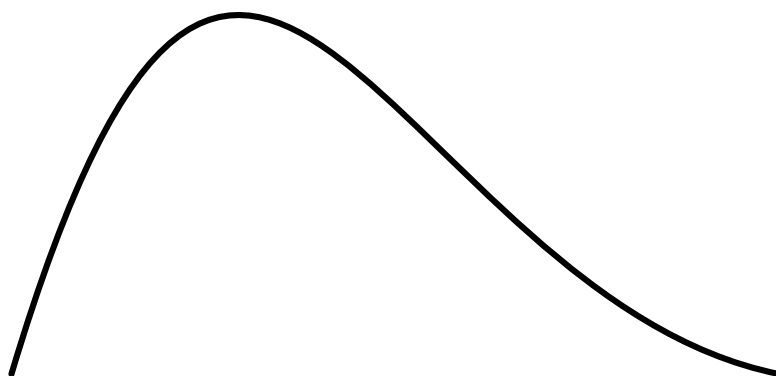


FIG. 18 – Courbe de Bézier en Postscript

La figure 18 montre un exemple de courbe de Bézier tracée en langage Postscript depuis *Mathematica 5.0*. Nous avons utilisé *Mathematica* car il est aujourd’hui relativement difficile de saisir de langage Postscript directement.

Voici le code utilisé<sup>24</sup> :

```
Show[Graphics[ { PostScript[".008 setlinewidth"], PostScript["0 0 moveto"], PostScript["0.3 1 0.5 0.1 1 0 curveto stroke"] }]];
```

Le paramètre *setlinewidth* définit la largeur du trait, *moveto* place le pointeur au premier point et *curveto* trace la courbe. Les points de contrôle sont  $[0; 0]$ ,  $[0.3; 1]$ ,  $[0.5; 0.1]$ ,  $[1; 0]$ . La courbe est donc de degré 3. Le Postscript utilise surtout ce degré.

Le langage L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X (utilisé pour la réalisation de ce document) permet aussi de dessiner des courbes de Bézier à l’aide de la commande `\qbezier( $x_0, y_0$ )( $x_1, y_1$ )(...)`. Nous voyons donc que les courbes de Bézier sont omniprésentes dans l’informatique.

## 4.7 Avantages et inconvénients

La plupart des avantages des courbes de Bézier ont déjà été cités au début de ce chapitre. Les propriétés de courbes de Bézier que nous avons vues sont presque toutes des avantages pour une utilisation pratique.

Néanmoins, les courbes de Bézier ont quelques inconvénients<sup>25</sup> : courbe ne passant pas par les points de contrôle, il peut être difficile de contrôler la courbe bien que, comme nous l’avons vu, l’utilisation de points de contrôle facilite souvent la conception. Ainsi, les courbes de Bézier ne seraient pas très efficaces pour tracer une courbe de tendance sur des mesures. Pour ce type de problèmes, nous nous tournons plus vers l’interpolation cubique et par splines cubiques.

Un autre inconvénient est le manque de contrôle local, la modification d’un point fait bouger toute la courbe. Dans l’industrie automobile, par exemple, il est gênant que toute la pièce change de forme lorsque nous voulons seulement faire varier une partie de la pièce. Au niveau des calculs, il faudra calculer à nouveau toute la pièce.

Le troisième inconvénient est le degré des courbes. En effet, pour une forme complexe, nous devons utiliser beaucoup de points de contrôle donc le degré de la courbe est élevé.

---

<sup>24</sup>Ce code est inspiré des exemples de Mathematica.

<sup>25</sup>Voir [13, 16, 22].

Celle-ci devient lourde est difficile à manipuler. C'est pour cette raison que nous préférons raccorder plusieurs courbes de Bézier de degré moindre. C'est le sujet du chapitre suivant.

## 5 Raccords de courbes de Bézier

### 5.1 Principe

Comme nous l'avons vu, il est intéressant de raccorder plusieurs courbes de degré peu élevé pour former une courbe complexe<sup>26</sup>. Généralement, nous utilisons des courbes de degré 3 car elle sont simples et permettent d'avoir des points d'inflexion. Les courbes de degré 2 sont aussi utilisées.

Il est évidemment nécessaire d'assurer la continuité entre les courbes. La continuité la plus simple et celle de classe  $C^0$ . Il suffit que la courbe soit continue. Etant donné qu'une courbe de Bézier passe par les points de contrôle extrêmes, il suffit de dire que le dernier point de contrôle d'une courbe sera le premier de la courbe suivante. Nous noterons la première courbe  $\overrightarrow{OM}$  et la suivante  $\overrightarrow{OM'}$ . Il apparait que de tels raccords ne sont pas du tout satisfaisants car, il y a des cassures (la dérivée n'est pas continue).

#### 5.1.1 Continuité de classe $G^1$

Une courbe est de continuité géométrique<sup>27</sup>  $G^1$  lorsque nous n'observons aucun changement de direction sur la courbe. Néanmoins la vitesse peut changer au raccord. La figure 19 montre le raccord entre deux courbes de degré 3. Comme la tangente au point  $P_3$  est égale à  $k \cdot \overrightarrow{P_3P_2}$  il faut donc que :

$$\overrightarrow{P_3P_2} = k \cdot \overrightarrow{P'_1P_3}$$

pour que la pente de la courbe ne varie pas. Dans le cadre d'un raccordement  $G^1$  les vecteurs dérivées ont la même direction mais pas forcément la même norme. Il peut être gênant d'avoir de tels raccords pour certaines utilisations (comme en robotique) où la vitesse doit être constante.

#### 5.1.2 Continuité de classe $C^1$

Il y a continuité  $C^1$  lorsque la direction et la norme du vecteur dérivée sont continues. Il n'y a donc pas de changement de vitesse avec un raccord de type  $C^1$ . Celui-ci doit donc respecter la condition :

$$\overrightarrow{P_3P_2} = \overrightarrow{P'_1P_3}$$

Les raccords de type  $C^1$  ont d'autres avantages que de garantir la continuité du vecteur vitesse. Comme nous le voyons à la figure 19, le point  $P'_1$  est placé automatiquement à l'aide de  $P_2$  et  $P_3$ . Avec des raccords  $G^1$  ce point aurait pu être placé n'importe où sur la droite reliant  $P_2$  à  $P_3$ . Cette liberté rend les courbes plus difficiles à construire car nous ne savons pas où placer ce point sur la droite.

---

<sup>26</sup>Les raccords de courbes de Bézier sont étudiées dans [15, 2, 14].

<sup>27</sup>La continuité géométrique concerne le tracé des courbes données par des équations paramétriques.

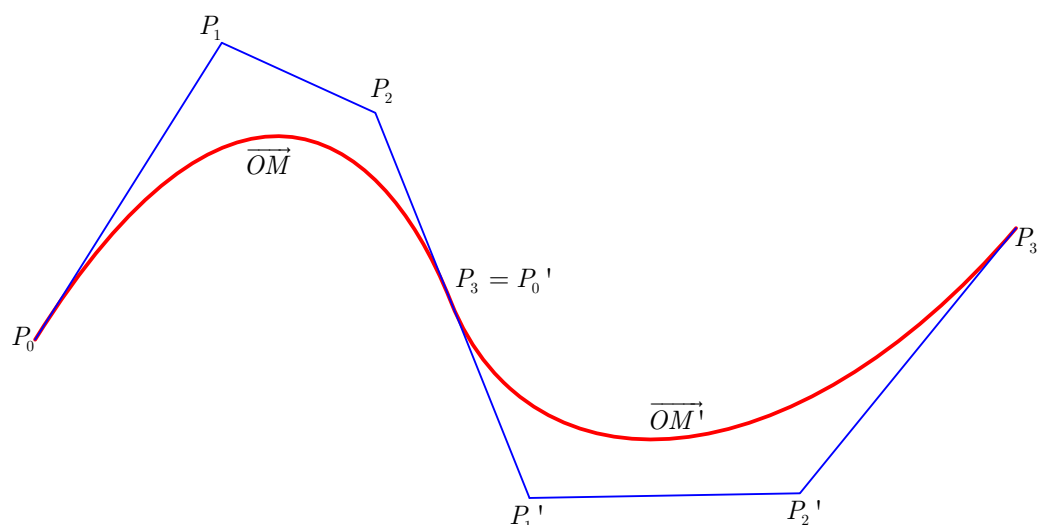


FIG. 19 – Schéma du raccord de 2 courbes de Bézier

La figure 20 montre un exemple où le programme intercale de nouveaux points de contrôle dans la liste que nous lui avons fournie, et cela pour garantir une continuité  $C^1$ . Puis il calcule les points pour chaque arc.

Nous avons fourni 8 points au programme. Il a dû en rajouter 2 pour assurer la continuité  $C^1$  (ceux qui sont entourés en rouge). La courbe en rouge est composée de 3 arcs. Une propriété intéressante des courbes de Bézier composites est qu'il y a des points d'interpolation au milieu de la courbe. En effet, une courbe de Bézier passe par les points extrêmes. Donc, la courbe composite passe par  $P_0$ ,  $P'_0$ ,  $P''_0$  et  $P'_3$ .

### 5.1.3 Autres raccords

Il y bien sûr d'autres types de raccords. Les raccords de type  $G^2$  et  $C^2$  sont semblables à  $G^1$  et  $C^1$  sauf qu'ils prennent en compte la dérivée seconde. Nous n'expliquerons pas ces raccords car nous n'avons pas étudié la dérivée seconde d'une courbe de Bézier. Si nous prenons des arcs de degré plus élevé que 3, nous pouvons réaliser des raccords  $G^3$ ,  $C^3$ , ...

## 5.2 Avantages et inconvénients

Le principal avantage des courbes de Bézier composites est que le nombre de points de contrôle peut être très grand sans que la courbe devienne impossible à manipuler.

Il est aussi intéressant d'avoir des points d'interpolation au milieu de la courbe et pas seulement aux extrémités. Il est néanmoins difficile d'exploiter cette propriété car elle ne concerne que certains points.

Un autre avantage par rapport à une courbe de Bézier unique est la robustesse. En effet, la modification d'un point ne fait pas bouger toute la courbe. La figure 21 illustre la situation : nous avons tracé une courbe composite avec deux valeurs différentes d'un point de contrôle et nous regardons la variation de la courbe.

La courbe rouge est la courbe de base, ces points de contrôle sont les croix noires. Puis

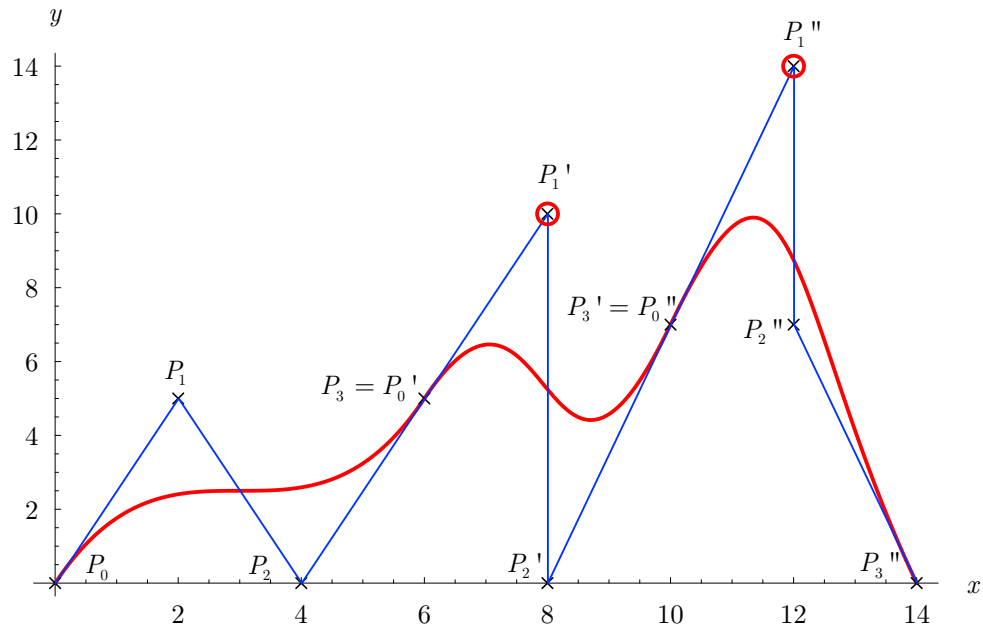


FIG. 20 – Raccord de courbe de Bézier de degré 3

nous modifions, le point d'abscisse (12; 6) (le nouveau point est à (13; 0)). Ce changement provoque la variation d'un autre point (de (16; 4) à (15; 10)), le polygone de contrôle de la nouvelle courbe est tracé en vert. La nouvelle courbe est identique à la courbe rouge, sauf aux abords du point de contrôle que nous avons modifié. A cet endroit, la nouvelle courbe est dessinée en bleu.

Le fait de modifier un point de contrôle ne provoque qu'une **variation locale** de la courbe. Si nous nous reportons à la figure 19, nous pouvons remarquer cette propriété géométriquement. La modification de  $P'_3$  ne changera pas la première courbe définie avec  $P_0, P_1, P_2$  et  $P_3$ .

Le principal inconvénient de ce type de courbe est que le modèle n'est pas optimal. Certains points de contrôle sont inutiles. Si nous regardons la figure 20, le point  $P'_0$  peut être défini grce à  $P_2$  et  $P'_1$  ou encore  $P'_1$  avec  $P'_0$  et  $P_2$ .

Les B-Splines que nous allons étudier maintenant permettent de résoudre ces problèmes.

## 6 Les B-Splines

### 6.1 Motivations

Il s'agit de fabriquer une courbe qui présente tous les avantages des courbes de Bézier mais sans ses inconvénients<sup>28</sup>. Ainsi, la courbe devra approximer les points de contrôle, être simple à manipuler, présenter les mêmes propriétés que les courbes de Bézier, etc.

Le degré de la courbe ne devra pas être proportionnel au nombre de points de contrôle mais fixe. La modification d'un point ne doit pas affecter toute la courbe.

Les B-Splines<sup>29</sup> ont été développée chez Boeing dans les années 70 et 80. Les B-Splines

<sup>28</sup>Voir [2, 23].

<sup>29</sup>Les B-Splines sont étudiées dans [18, 24, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 2, 14].

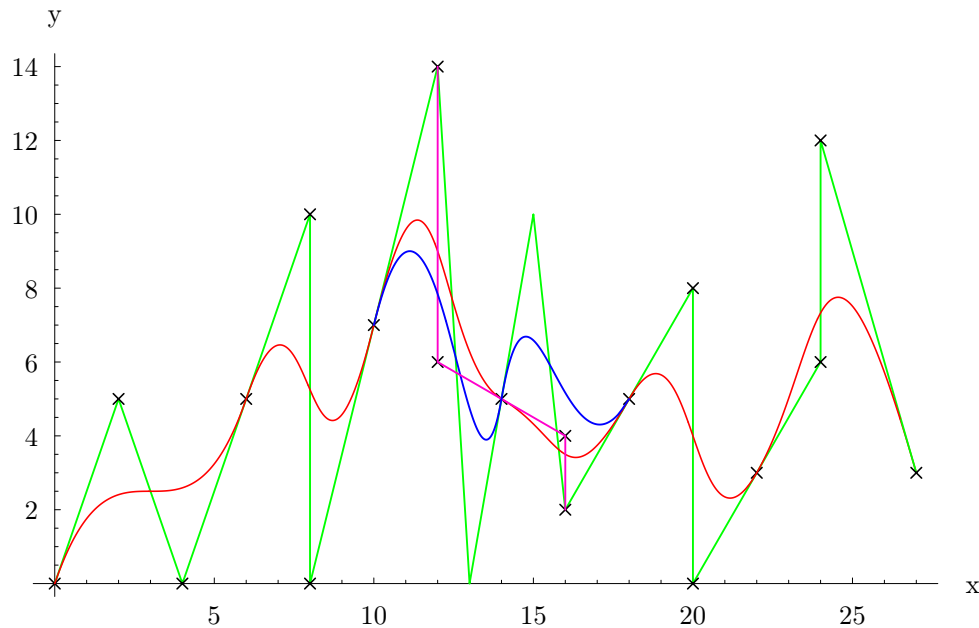


FIG. 21 – Robustesse de courbes de Bézier raccordées

existait déjà avant mais n'était pas utilisées et le concept pas finalisé.

## 6.2 Idée : Fonctions de Base

### 6.2.1 Idée

L'idée principale des B-Splines est de remplacer les polynômes de Bernstein par des fonctions<sup>30</sup>. Ensuite, nous sommerons ces fonctions avec les points de contrôles pour obtenir la courbe. Une B-Spline ne dépend pas uniquement des points de contrôle mais aussi d'un vecteur noeud.

### 6.2.2 Les Bases B-Splines

Nous choisissons un vecteur noeud composé de  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_m$  que nous noterons  $T = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ . Nous choisissons  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m$ . Nous prendrons des nombres réels comme noeuds.

Nous choisissons également des points  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_m$ . Le choix de l'origine  $O$  n'ayant pas d'importance, nous noterons comme auparavant  $P_i = \overrightarrow{OP_i}$ .

Nous voulons construire une courbe  $X_0(t)$  telle que :

- $X_0(t_0) = P_0$
- $X_0(t_1) = P_1$
- $X_0(t_i) = P_i$  pour  $i \in \{0, \dots, m\}$

La courbe définie par  $X_0(t) = P_i$  pour  $t \in [t_i, t_{i+1}[$  satisfait les conditions. Cette courbe a la forme suivante :

$$X_0(t) = \sum_i B_{i,0}(t) \cdot P_i$$

<sup>30</sup>Cette approche est celle de [23, 2].



où  $B_{i,0}(t) = 1_{[t_i, t_{i+1}[}$ . C'est-à-dire la fonction qui vaut 0 sauf sur  $[t_i, t_{i+1}[$  où elle vaut 1.

Cette solution n'est pas très satisfaisante, la courbe présentant des sauts.

Nous cherchons à approcher cette courbe discontinue  $X_0(t)$  par une meilleure courbe qui sera linéaire par morceaux, soit quand  $t$  varie de  $t_i$  à  $t_{i+1}$ ,  $X_1(t)$  parcourt la droite reliant  $P_{i-1}$  à  $P_i$  :

$$X_1(t) = \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) P_{i-1} + \left(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) P_i \quad \text{pour } t \in [t_i, t_{i+1}[$$

Avec cette courbe. nous avons :

$$- X_1(t_i) = P_{i-1}$$

$$- X_1(t_{i+1}) = P_i$$

Si  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_m$  sont distincts, alors  $X_1(t)$  est continue. Nous pouvons écrire  $X_1(t)$  comme ceci :

$$X_1(t) = \sum_i B_{i,1}(t) \cdot P_i$$

où nous allons chercher que vaut  $B_{i,1}(t)$ .

$$X_1(t) = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} P_{i-1} + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} P_i \quad \text{pour } t \in [t_i, t_{i+1}[$$

pour  $t \in [t_0, t_m]$ , nous avons :

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \sum_i \left[ \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} \cdot 1_{[t_i, t_{i+1}[} \cdot P_{i-1} + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot 1_{[t_i, t_{i+1}[} \cdot P_i \right] \\ &= \sum_i \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} \cdot 1_{[t_i, t_{i+1}[} \cdot P_{i-1} + \sum_i \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot 1_{[t_i, t_{i+1}[} \cdot P_i \end{aligned}$$

Nous posons  $i' = i - 1$  :

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \sum_{i'} \frac{t_{i'+2} - t}{t_{i'+2} - t_{i'+1}} \cdot 1_{[t_{i'+1}, t_{i'+2}[} \cdot P_{i'} + \sum_i \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot 1_{[t_i, t_{i+1}[} \cdot P_i \\ &= \sum_i \left[ \frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}} \cdot 1_{[t_{i+1}, t_{i+2}[} + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot 1_{[t_i, t_{i+1}[} \right] P_i \\ &= \sum_i \left[ \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot B_{i,0}(t) + \frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}} \cdot B_{i+1,0}(t) \right] P_i \end{aligned}$$

Donc :

$$B_{i,1}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot B_{i,0}(t) + \frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}} \cdot B_{i+1,0}(t)$$

Nous avons donc une définition de la fonction de degré 1,  $X_1(t) = \sum_i B_{i,1}(t) \cdot P_i$  à partir de  $X_0(t) = \sum_i B_{i,0}(t) \cdot P_i$  qui est de degré 0. De la même manière, nous définissons la fonction  $X_k(t)$  de degré  $k$  à partir de  $X_{k-1}(t)$  :

$$X_k(t) = \sum_i B_{i,k}(t) \cdot P_i$$

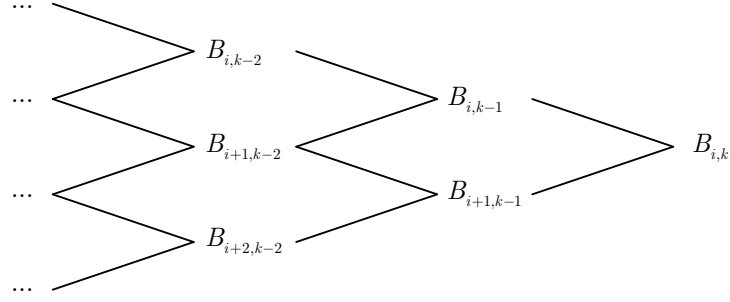


FIG. 22 – Schéma récursif pour les  $B_{i,k}$

avec :

$$B_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} \cdot B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+1+k} - t}{t_{i+1+k} - t_{i+1}} \cdot B_{i+1,k-1}(t)$$

Cela nous donne une relation de récurrence pour les  $B_{i,k}(t)$  qui sont calculés avec le schéma de la figure 22.

Si  $t_i = t_{i+k}$  alors le coefficient  $\frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i}$  sera posé comme étant nul et chaque fois que nous aurons  $\left(\frac{\infty}{0}\right)$ , nous poserons ce quotient égal à 0.

La fonction  $B_{i,k}(t)$  représente une **fonction de base**<sup>31</sup> d'une B-Splines et est parfois appelée **base de B-Splines**.

Attention à la notation :  $B_{i,k}$  n'est pas un polynôme de Bernstein qui se note  $B_n^i$ .

## 6.3 Etude des fonctions de base

### 6.3.1 Cas $k = 1$

Les noeuds ont été placés de manière suivante :  $t_0 = 0, t_1 = 1, \dots, t_6 = 6$ . La figure 23a montre les fonctions de base obtenues<sup>32</sup>. La figure 23b montre les fonctions de base avec les noeuds placés en  $\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ .

Nous voyons que les courbes atteignent des maximums en 1. Nous avons 7 noeuds et nous obtenons 5 courbes :  $B_{0,1}, B_{1,1}, B_{2,1}, B_{3,1}, B_{4,1}$ .

La courbe partant de  $t_0$  arrive en  $t_2$ , donc plus généralement, la courbe partant de  $t_i$  arrive en  $t_{i+2}$ .

### 6.3.2 Cas $k = 2$

Nous plaçons les noeuds comme ceci :  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Nous obtenons le résultat représenté au (a) de la figure 24. Le (b) de la figure 24 reprend les noeuds du (b) la figure 23.

Sur cette figure, nous voyons que le maximum des courbes ne se trouve plus à 1 mais à  $\frac{3}{4}$  si les noeuds sont uniformément répartis. Le maximum varie si les noeuds ne sont pas uniformes et les courbes ne sont plus symétriques.

Nous avons quatre courbes :  $B_{0,2}, B_{1,2}, B_{2,2}, B_{3,2}$  qui partent en  $t_i$  et arrivent en  $t_{i+3}$ .

<sup>31</sup>Les bases sont étudiées dans [23, 25, 27, 29, 28].

<sup>32</sup>Pour réaliser les dessins des fonctions de Base, nous avons adapté le programme dessinant les B-Splines.

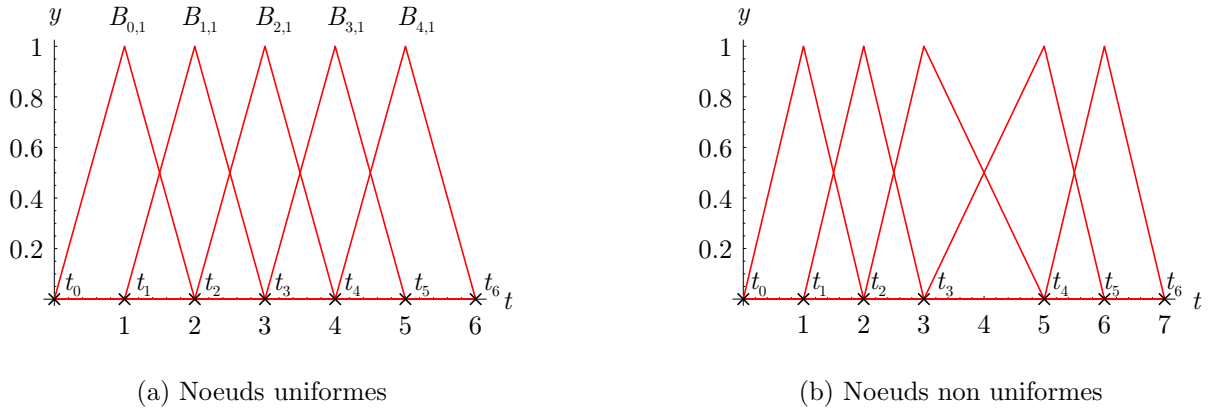


FIG. 23 – Fonctions de base avec  $k = 1$

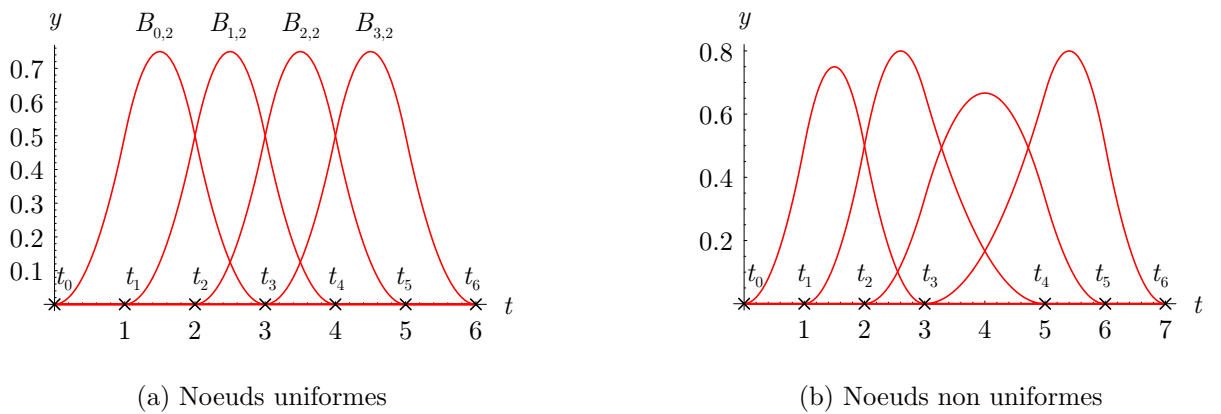


FIG. 24 – Fonctions de base avec  $k = 2$

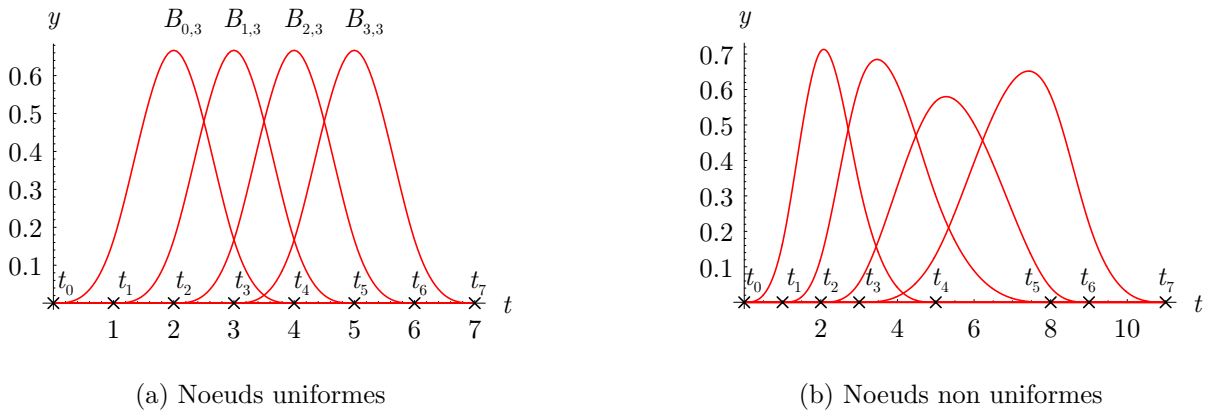


FIG. 25 – Fonctions de base avec  $k = 3$

Les courbes sont « attirées » par les noeuds ainsi, le sommet de la courbe  $B_{3,2}$  ne se trouve pas au milieu mais plus vers  $t_5$ .

### 6.3.3 Cas $k = 3$

Nous allons particulièrement étudier le cas de  $k = 3$ . En effet, comme nous l'avons déjà vu, le degré 3 est particulièrement intéressant pour les courbes d'interpolation et d'approximation.

Le (a) de la figure 25 montre les  $B_{i,3}$  avec les noeuds suivants :  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  ( $m = 7$ ). Le (b) de la figure 25 montre les fonctions de base avec des noeuds non-uniformes.

Nous voyons que les courbes s'étalent de  $t_i$  à  $t_{i+4}$ . Nous pouvons généraliser en disant qu'une courbe part de  $t_i$  et arrive à  $t_{i+k+1}$ . Nous pouvons aussi voir que  $i$  varie de 0 à 3, donc de 0 à  $m - k - 1$ . Il y a donc  $m - k$  fonctions  $B$ .

A présent, nous allons étudier plus précisément les propriétés des fonctions de base pour  $k = 3$ .

**Multiplicité d'un noeud** Le (a) de la figure 26 montre le résultat avec les noeuds  $\{0, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5\}$  ( $m = 7$ ). Trois noeuds ont été placés à la même place, le noeud 3 est de **multiplicité 3**. Nous voyons que la courbe atteint 1 au point 3.

Cela nous amène à la constatation suivante : si  $t_{i+1} = t_{i+2} = \dots = t_{i+k}$  ce noeud est de multiplicité  $k$ . Alors  $B_{i,k}$  aura un maximum en  $t_{i+1}$  qui vaudra 1. Cette propriété n'est pas valable pour le premier et le dernier noeud.

Nous voyons qu'en 3 la courbe n'est pas dérivable. En effet, à un point de multiplicité  $r$ , une fonction de base  $B_{i,k}$  est  $k - r$  fois dérivable. Si nous répétons 4 fois un noeud pour  $k = 3$ , la courbe ne sera plus continue.

Pour les extrémités, il faut répéter  $k + 1$  fois les noeuds pour avoir un maximum en 1. Le (b) de la figure 26 montre la situation.

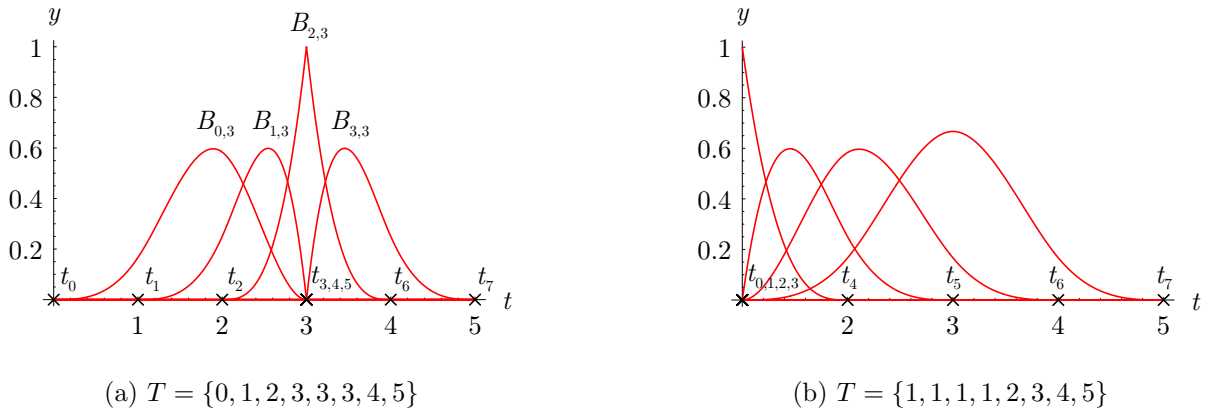


FIG. 26 – Multiplicité des noeuds

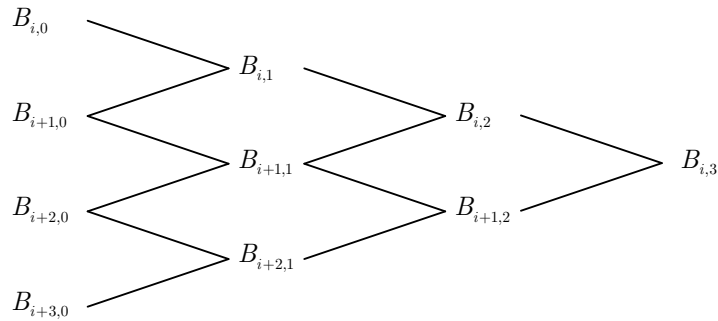


FIG. 27 – Construction récursive de  $B_{i,3}$

**Intervalle** Nous avons vu sur les graphes qu'une fonction  $B_{i,3}$  s'annule en dehors de l'intervalle  $[t_i, t_{i+4}[$ . Nous allons démontrer cette propriété. En partant de la formule :

$$B_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} \cdot B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+1+k} - t}{t_{i+1+k} - t_{i+1}} \cdot B_{i+1,k-1}(t)$$

nous pouvons construire récursivement  $B_{i,k}$  à partir des  $B_{i,0}$ . La construction est montrée à la figure 27. Nous voyons que  $B_{i,3}$  s'obtient à partir de  $B_{i,0}$ ,  $B_{i+1,0}$ ,  $B_{i+2,0}$ ,  $B_{i+3,0}$ . Nous avons défini que :  $B_{i,0}(t) = 1_{[t_i, t_{i+1}[}$ . Donc  $B_{i,3}$  est bien nulle sur hors de  $[t_i, t_{i+4}[$ .

Nous avons démontré cette propriété pour  $k = 3$  par souci de simplicité mais il est évidemment possible de réaliser la construction récursive pour un  $k$  quelconque. Nous obtiendrons que  $B_{i,k}$  s'annule en dehors  $[t_i, t_{i+k+1}[$ .

**Partition de l'unité** La somme des  $B_{i,k}$  en une certaine valeur de  $t$  vaut 1. La figure 28 représente la situation. La courbe bleue est la somme des  $B_{i,3}$  (en rouge). Nous remarquons que la partition de l'unité n'est pas valable dans les extrémités. En effet, il faut attendre que toutes les courbes se chevauchent pour obtenir une somme de 1. Une courbe de degré 3 s'étalant sur 4 noeuds, il y a 4 courbes à sommer au milieu. La courbe vaut 1 entre les deux traits noirs.

La somme des  $B_{i,k}$  vaut 1 partout sauf entre les  $k + 1$  premiers et les  $k + 1$  derniers noeuds. Dans cet intervalle  $[t_k, t_{m-k}[$ , la somme des  $k + 1$  courbes vaut 1.

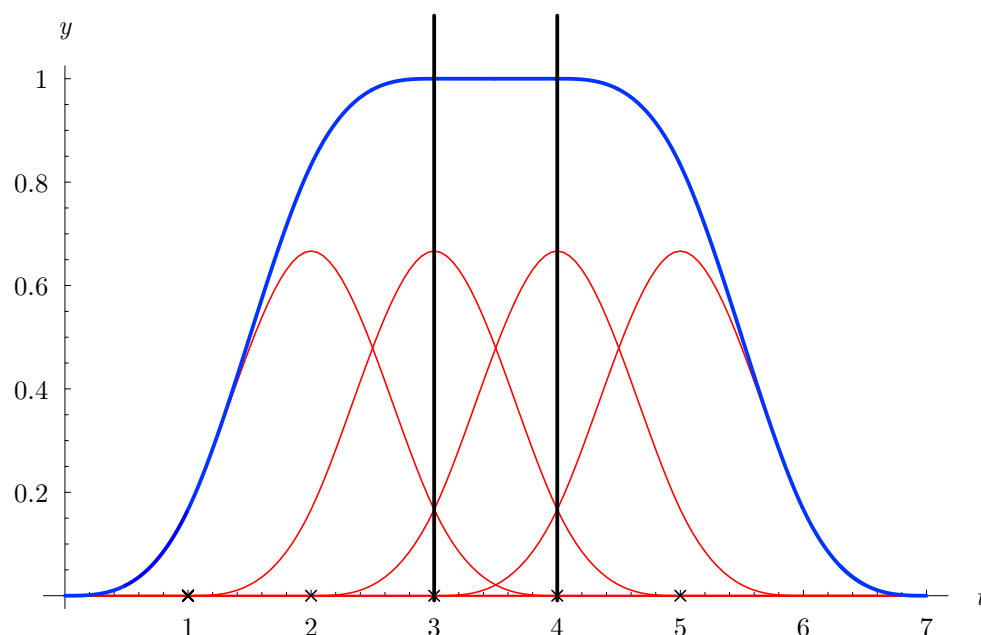


FIG. 28 – Partition de l'unité

## 6.4 Courbe B-Splines ( $k = 3$ )

Une courbe B-Spline est définie de la façon suivante<sup>33</sup> :

$$X_k(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,k}(t) \cdot P_i$$

les  $P_i$  étant les points de contrôle de la courbe. Il y a évidemment le même nombre de  $B_{i,k}$  que de  $P_i$  soit de  $P_0$  à  $P_n$ . Le vecteur noeud  $\{t_0, t_1, \dots, t_m\}$  sera tel que  $m = n + k + 1$  étant donné que les  $B_{i,k}$  s'étalent sur  $k + 1$  noeuds.

A partir de maintenant, nous allons nous intéresser au degré 3, bien que les démarches soient généralisables.

### 6.4.1 B-Splines

Si nous voulons placer  $n$  points de contrôle, nous devons donner  $n + 4$  noeuds.

Si nous reprenons les noeuds  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  du (a) de la figure 25 pour tracer la courbe B-Splines avec les points de contrôle suivants  $\{1, 1\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 1\}$  nous obtenons le résultat présenté à la figure 29. Nous avons fait varier  $t$  de 0 à 7. Le polygone de contrôle est dessiné en bleu. Nous voyons que la courbe obtenue est très étrange. Elle ne passe pas par le premier et dernier point de contrôle, mais part et arrive à l'origine.

Nous pouvons expliquer ceci de la manière suivante : si nous regardons le (a) de la figure 25 nous voyons qu'en  $t = 0$  et  $t = 7$  les  $B_{i,3}$  sont nuls, donc la courbe B-Splines sera également nulle.

Une telle courbe n'est pas très intéressante car elle part et s'achève toujours à l'origine. Pour supprimer cet inconvénient, il suffit de faire varier le paramètre  $t$  entre 3 et 4, c'est-à-dire où la somme de  $B_{i,3}$  vaut 1 (voir figure 28). Nous obtenons alors uniquement la

<sup>33</sup>Les B-Splines sont étudiées dans [23, 25, 26, 30, 16, 27, 29, 28].

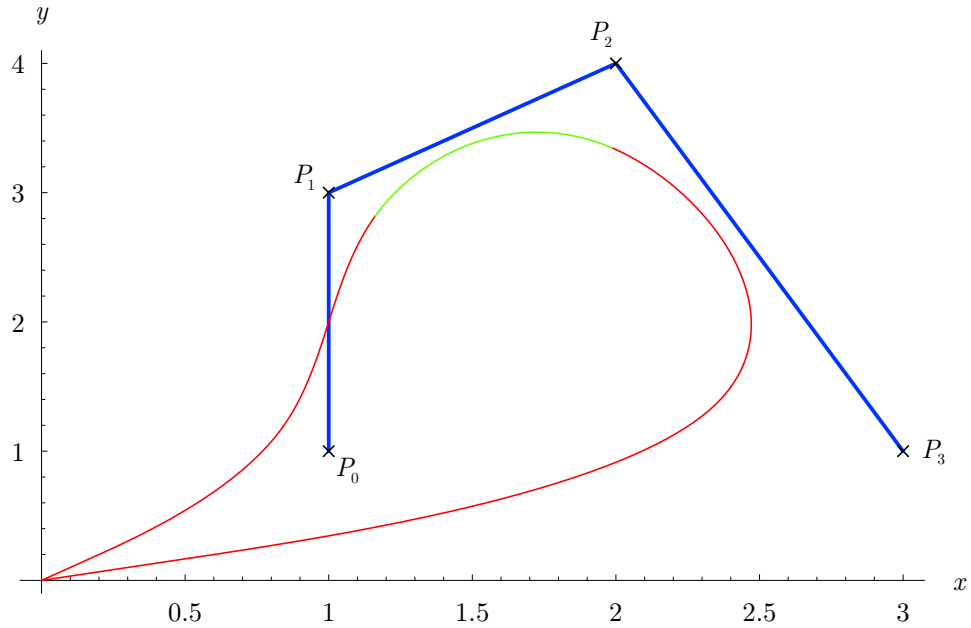


FIG. 29 – Courbes B-Splines avec  $k = 3$

partie verte de la courbe de la figure 29. Cette partie parat déjà plus naturelle vis-à-vis des points de contrôle.

#### 6.4.2 B-Splines à noeuds ouverts

Il serait intéressant et utile d'avoir des courbes B-Splines qui passe par les points de contrôle extrêmes. Il suffit de répéter 4 fois (si  $k = 3$ ) les premiers et derniers noeuds. Comme nous pouvons le voir au (b) de la figure 26, si nous répétons 4 fois le premier, la somme des  $B_{i,3}$  en  $t_0$  vaut 1. Nous pouvons en déduire que :  $X_3(t_0) = P_0$ . Si nous répétons 4 fois le dernier noeud, par le même raisonnement nous arrivons à  $X_3(t_{m-4}) = P_m$ . Quand un noeud est répété 4 fois dans les extrémités, nous parlons de **noeud ouvert**. Le (a) de la figure 30 montre une B-Splines à noeud ouvert. Le vecteur noeud est  $\{1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6\}$ . Nous choisissons des noeuds uniformes au milieu  $(2, 3, 4, 5)$  bien que ce ne soit pas obligatoire. Mais il n'y a pas grand intérêt à choisir des noeuds non-uniformes. Précisons également qu'une courbe avec les noeuds  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  sera la même que celle avec  $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ . En effet, lorsque nous regardons la formule :

$$B_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} \cdot B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+1+k} - t}{t_{i+1+k} - t_{i+1}} \cdot B_{i+1,k-1}(t)$$

nous voyons que doubler ou tripler les  $t_i$  ne change rien.

#### 6.4.3 Interpolation des points de contrôle

**Répétition des noeuds** Il est possible d'interpoler les points de contrôle au milieu d'une courbe B-Splines. Nous avons vu que si  $t_{i+1} = t_{i+2} = t_{i+3}$  la fonction de base  $B_{i,3}$  aura un maximum qui vaudra 1 (voir le (a) de la figure 26).  $X_3(t_{i+1})$  sera égal à  $P_i$ . Le point de contrôle est donc bien interpolé. Le (b) de la figure 30 illustre la situation, les

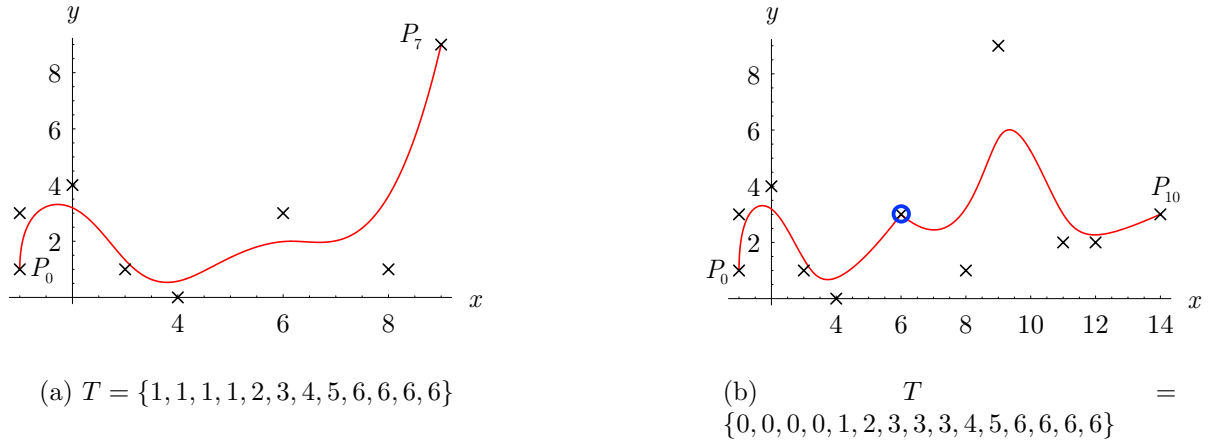


FIG. 30 – B-Splines avec multiplicité des noeuds ( $k = 3$ )

noeuds sont  $\{0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6\}$ . Le noeud répété est  $t_6 = t_7 = t_8 = 3$ , donc  $P_5$  devra être interpolé. Sur la figure nous voyons que la courbe passe par  $P_5(6; 3)$ .

En ce point, la courbe n'est pas dérivable, ce qui normal car nous avons vu qu'à un point de multiplicité  $r$ , une fonction de base  $B_{i,k}$  est  $k - r$  fois dérivable. Donc, si nous forçons l'interpolation d'un point de contrôle ( $r = k$ ), nous perdons la dérivabilité. Ce problème limite très fortement l'intérêt de faire passer la courbe par les points de contrôle.

**Répétition des points** Il est aussi possible de faire passer la courbe par un point en répétant ce point 3 fois (pour  $k = 3$ ). Nous prenons 9 noeuds distincts et choisissons  $P_1 = P_2 = P_3$ . Nous calculons  $X(t_4)$  qui est égal à :

$$X_3(t_4) = B_{1,3} \cdot P_1 + B_{2,3} \cdot P_2 + B_{3,3} \cdot P_3$$

Les autres bases  $B_{4,3}, B_{5,3}, \dots$  valant 0 en  $t_4$ , elles ne figurent pas dans la formule ci-dessus. Nous pouvons écrire  $X_3(t_4)$  de la façon suivante :

$$X_3(t_4) = (B_{1,3} + B_{2,3} + B_{3,3}) \cdot P_1$$

La partition de l'unité nous permet de dire que  $B_{1,3} + B_{2,3} + B_{3,3} = 1$ , donc :

$$X_3(t_4) = P_1$$

Cette manière d'interpoler les points de contrôle n'est pas meilleure que de tripler les noeuds. En effet, comme le montre la figure 31, la courbe n'est pas dérivable au point de contrôle interpolé.

## 6.5 Correspondance Bézier - B-Splines

Nous pouvons affirmer que les courbes de Bézier sont des B-Splines particulières<sup>34</sup>. En effet, si nous dessinons les fonctions de base avec les noeuds  $\{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}$ , les

<sup>34</sup>Voir [23, 29].



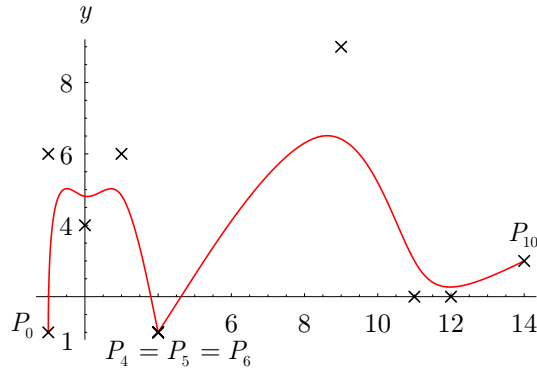


FIG. 31 – Interpolation des points de contrôle par répétition des points

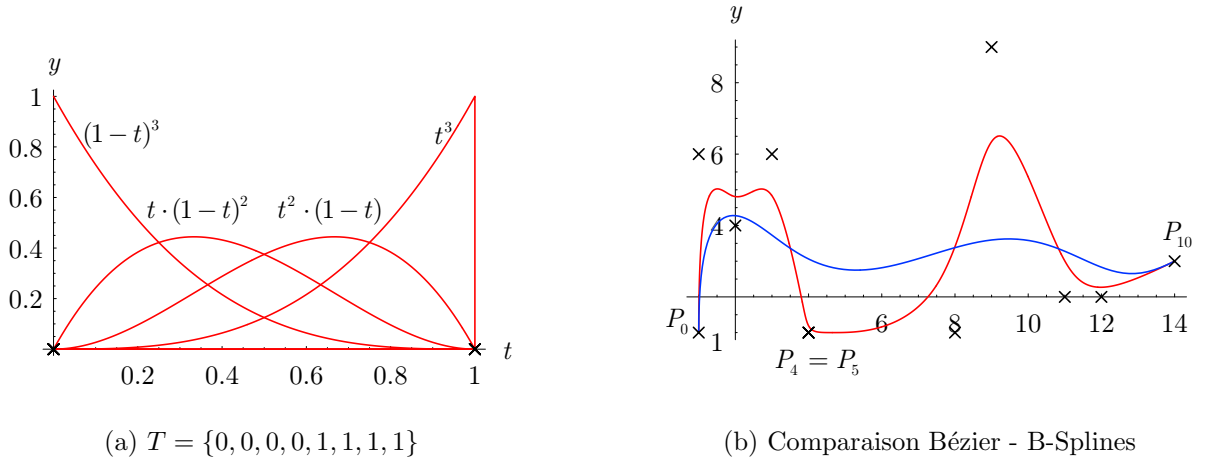


FIG. 32 – Correspondance Bézier - B-Splines

fonctions de base  $B_{0,3}$ ,  $B_{1,3}$ ,  $B_{2,3}$ ,  $B_{3,3}$  deviennent les polynômes de Bernstein  $B_3^0$ ,  $B_3^1$ ,  $B_3^2$ ,  $B_3^3$ . Le (a) de la figure 32 montre les fonctions de base ou les polynômes de Bernstein.

Nous pouvons dire que les courbes de Bézier sont moins souples que les B-Splines. Le (b) de la figure 32 illustre la situation. La B-Spline est tracée en rouge, la courbe de Bézier en bleue. Elles ont les mêmes points de contrôle, et les noeuds sont  $\{0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 8\}$ . Nous voyons que la courbe de Bézier est beaucoup moins attirée par les points de contrôle. La B-Spline passe presque par le point  $P_4 = P_5(4; 1)$  répété deux fois alors que la courbe de Bézier en reste très loin.

Si une véritable interpolation n'est pas nécessaire, il est intéressant de répéter deux fois un point pour une B-Spline. La courbe s'approche très fortement du point tout en gardant la continuité de la dérivée.

## 6.6 Contrôle local

Il est possible de contrôler localement une B-Spline. La modification d'un point de contrôle ou d'un noeud ne modifie pas toute la courbe.

### 6.6.1 Modification d'un noeud

La modification d'un noeud n'influe que les  $B_{i,k}$  qui sont autour.

Pour  $k = 3$ , la modification d'un noeud  $t_i$  ne touche que les courbes de  $B_{i-4,k}$  à  $B_{i,k}$  (ceci n'est évidemment pas valable aux extrémités). Cela modifie la B-Spline pour les  $t$  entre  $t_{i-4}$  et  $t_{i+4}$ .

### 6.6.2 Modification d'un point de contrôle

La modification d'un point de contrôle  $P_i$  fait varier la courbe pour les  $t$  entre  $t_i$  et  $t_{i+4}$ .

Il suffit de regarder le (a) de la figure 25 pour voir ces deux propriétés graphiquement.

## 6.7 Programmation

Pour des raisons de performance, il faut tout d'abord revoir la définition<sup>35</sup> :

$$X_k(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,k}(t) \cdot P_i$$

Avec cette formule, nous sommons chaque point de contrôle  $P_i$  avec  $B_{i,k}(t)$  alors qu'ils sont presque tous nuls. Pour  $k = 3$ , comme nous le voyons au (b) de la figure 25, il suffit d'appliquer la formule suivante :

$$X_3(t) = \sum_{i=j-3}^j B_{i,3}(t) \cdot P_i \quad \text{pour } t \in [t_j, t_{j+1}[$$

ce qui permet d'éviter beaucoup d'itérations inutiles.

Le programme est divisé en deux parties : l'évaluation des  $B_{i,3}$  et la l'évaluation de la courbe. Les  $B_{i,3}$  sont construites par une fonction récursive. Puis une boucle fait varier  $t$  et une autre  $i$  de  $j - 3$  à  $j$ .

## 6.8 Autres propriétés

Les B-Splines ont beaucoup de propriétés que nous n'étudierons pas<sup>36</sup> . Parmi elles, citons :

- La différentiabilité, il est possible de dériver une B-Spline.
- L'invariance par transformation affine.
- La périodicité d'une B-Spline, si nous avons des noeuds et des points de contrôle périodique alors la courbe l'est aussi.
- Si les points de contrôle sont symétriques, la courbe l'est également.
- Ajout d'un noeud sans modifier la courbe.
- Elévation du degré sans faire bouger la courbe.

---

<sup>35</sup>La programmation des B-Splines est étudiée dans [26].

<sup>36</sup>Voir [23, 26, 25, 2, 14].

## 6.9 Avantages et inconvénients

Les B-Splines résolvent les problèmes que nous avons constaté pour les courbes de Bézier, il est possible de contrôler les B-Splines localement et l'ajout de points n'augmente pas le degré de la courbe. De plus, il est possible d'interpoler les points de contrôle même si ce n'est pas très concluant.

Le principal inconvénient des B-Splines est leur complexité. En effet, il n'est pas facile de calculer les fonctions de base. Les points de contrôle ne sont plus les seuls paramètres des courbes, il y a aussi le vecteur noeud. Il est difficile de gérer les points et les noeuds en même temps. C'est pourquoi nous ne faisons que varier les points de contrôle, les noeuds sont généralement ouverts aux extrémités et uniforme au milieu.

## 6.10 Autres splines d'approximation

Il existe d'autres types de splines d'approximation que les B-Splines. Nous parlerons surtout des B-Splines rationnelles plus connues sous le nom de NURBS (nonuniform rational B-Splines).

Le problème est le suivant, une B-Spline ne peut pas représenter précisément une conique (cercle, ellipse, hyperbole et parabole). Les NURBS ajoute un « poids » aux points de contrôle et utilise les fractions rationnelles<sup>37</sup>.

Les NURBS sont souvent utilisées au détriment des B-Splines dans des domaines tels que les images de synthèse, les jeux vidéo.

# 7 Surfaces, Carreaux de Bézier

## 7.1 Introduction

L'interpolation et l'approximation ne se limitent pas aux courbes. Il est possible de définir des surfaces. Nous n'allons pas étudier toutes les surfaces d'interpolation ou d'approximation mais une, pour voir comment il faut procéder.

Les carreaux de Bézier<sup>38</sup> sont des surfaces d'approximation définies à l'aide de courbes de Bézier. Il faut d'abord choisir des points de contrôle. Ceux-ci peuvent être vus comme un quadrillage. Les lignes sont numérotées  $i$  et les colonnes  $j$ . Ainsi, les points de contrôle sont de type  $P_{i,j}$ ,  $i$  variant de 0 à  $n$  et  $j$  de 0 à  $m$ .

Nous choisirons des quadrillages carrés, autrement dit :  $n = m$ . Nous prendrons, au maximum,  $n = 3$  ce qui nous fait choisir 16 points de contrôle. Si  $n$  est plus grand que 3, le nombre de points à choisir devient très important.

## 7.2 Théorie

### 7.2.1 Polynômes de Bernstein

Nous pouvons dire qu'une surface est définie par une courbe qui se déplace en changeant de forme. Disons que cette courbe est une courbe de Bézier de degré  $m$ . A chaque

---

<sup>37</sup>Les NURBS sont étudiées dans [2, 14, 25].

<sup>38</sup>Les carreaux de Bézier sont étudiés dans [2, 12, 15, 31, 22, 32, 19].

moment, la courbe est définie par un ensemble de points de contrôle. Le chemin d'un point de contrôle, est aussi une courbe de Bézier. Tous les points de contrôle suivent une courbe de même degré  $n$ .

La courbe qui se déplace peut être écrite de la manière suivante :

$$b_m(t) = \sum_{i=0}^m B_m^i(t) \cdot \overrightarrow{OP_i}$$

$\overrightarrow{OP_i}$  étant les points de contrôle. Chaque  $\overrightarrow{OP_i}$  décrit une courbe de Bézier donc :

$$\overrightarrow{OP_i}(s) = \sum_{j=0}^n B_n^j(s) \cdot \overrightarrow{OP_{i,j}}$$

$\overrightarrow{OP_{i,j}}$  étant les points de contrôle de la courbe,  $j$  variant de 0 à  $m$ .

En prenant ces deux équations, nous pouvons arriver à l'équation de la surface de Bézier.

$$\overrightarrow{OM}(s, t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_n^i(s) \cdot B_m^j(t) \cdot \overrightarrow{OP_{i,j}}$$

### 7.2.2 Algorithme de De Casteljau

Il existe un algorithme de De Casteljau pour les surfaces de Bézier. Nous créons une surface bilinéaire, c'est-à-dire une surface de Bézier avec  $m = n = 1$ . La figure 33 montre une surface de Bézier bilinéaire avec les points de contrôle suivants :  $P_{0,0} = (0; 0; 0)$ ,  $P_{0,1} = (1; 0; 0)$ ,  $P_{1,0} = (1; 1; 1)$ ,  $P_{1,1} = (1; 0; 1)$ . Nous voyons que la surface passe par les points de contrôle c'est pourquoi ce type de surface est appelée interpolation bilinéaire.

La construction géométrique de De Casteljau fait varier le barycentre de deux points linéairement. En 3D, l'idée reste la même, nous appliquons l'interpolation bilinéaire plusieurs fois jusqu'à ce que nous obtenons la surface de Bézier.

## 7.3 Résultats

La figure 34a montre une surface de Bézier avec  $n = m = 3$ . Le polygone de contrôle est donné par la figure 34b. Nous voyons que la surface passe par les quatre coins du polygone de contrôle. La surface est attirée par les points de contrôle : par exemple les points de contrôle atteignent 5 sur l'axe  $z$  et la surface atteint presque 3.

Nous pouvons faire des surfaces plus complexes. Dans le cas précédent, les points de contrôle ont été soigneusement placés. La figure 35 est une surface  $n = m = 3$  avec des points choisis de manière aléatoire. Une surface peut donc avoir des points de rebroussement, se croiser, ... Avec peu de points de contrôle, il est possible de réaliser des surfaces complexes.

## 7.4 Propriétés de carreaux de Bézier

Les carreaux de Bézier héritent en grande partie les propriétés des courbes du même nom, parmi elles citons :

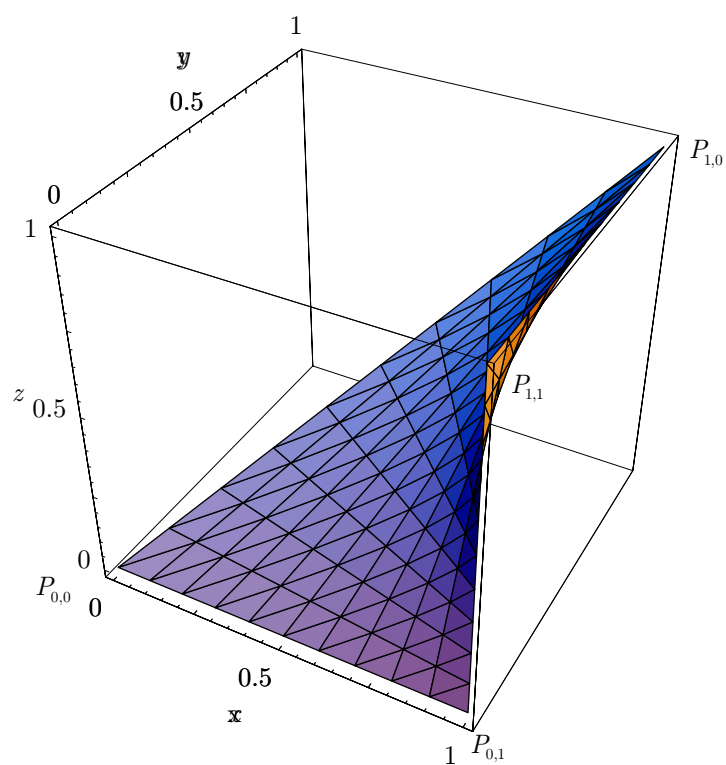
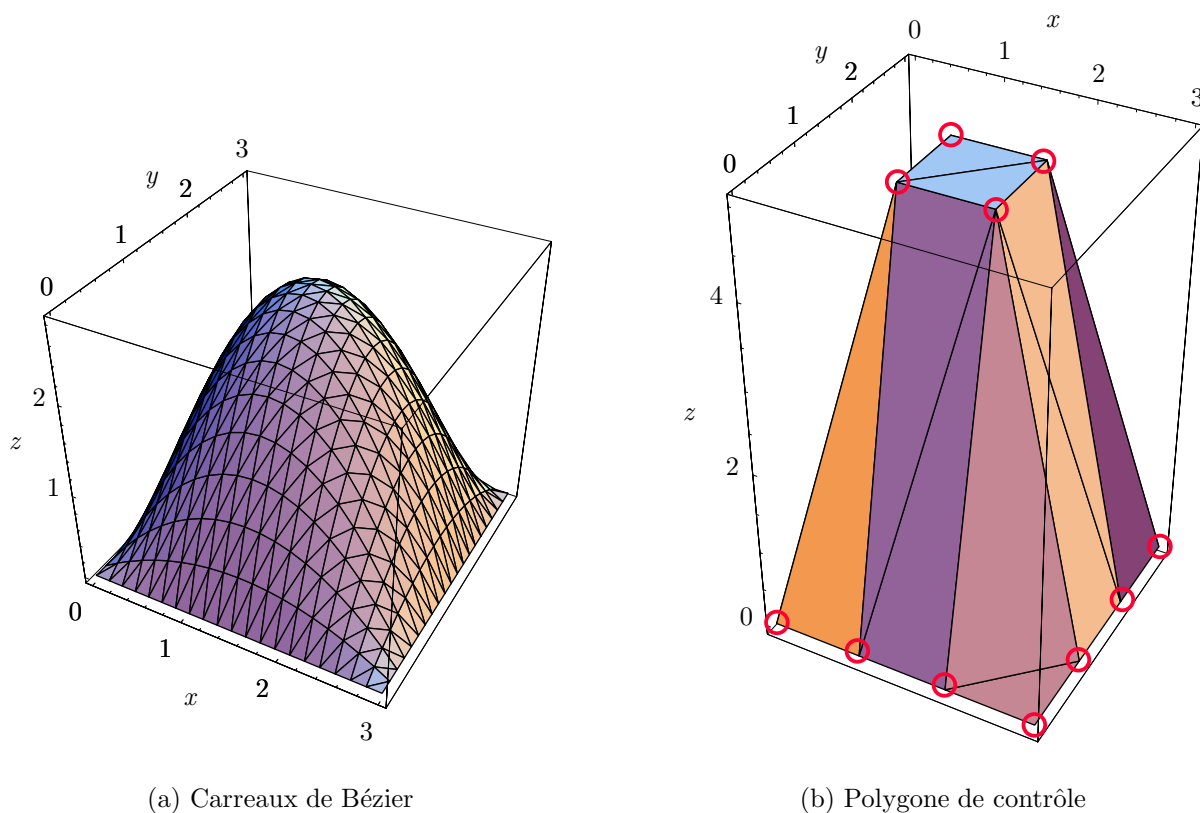


FIG. 33 – Carreau de Bézier bilinéaire



(a) Carreaux de Bézier

(b) Polygone de contrôle

FIG. 34 – Carreaux de Bézier avec  $n = m = 3$

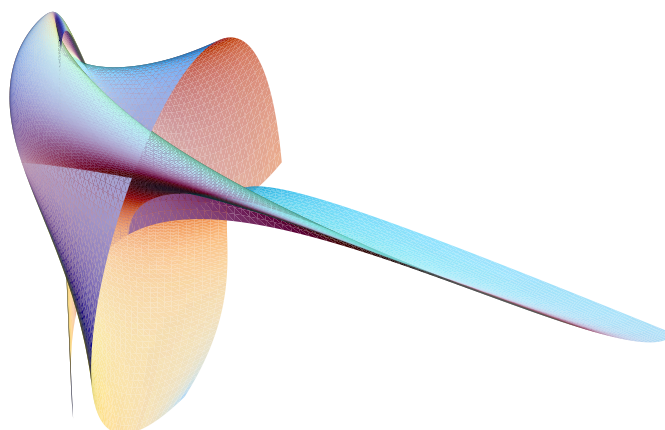


FIG. 35 – Surface de Bézier complexe

- Enveloppe convexe, une surface de Bézier se trouve toujours dans l'enveloppe convexe définie par ses points de contrôle.
- La surface interpole les coins du quadrillage :  $P_{0,0}$ ,  $P_{0,m}$ ,  $P_{n,0}$ ,  $P_{n,m}$ .
- Les carreaux de Bézier sont dérivables.
- Il est possible d'augmenter le nombre de points de contrôle sans modifier la surface.
- ...

Il est bien entendu possible de raccorder des surfaces de Bézier, comme nous avons raccorder les courbes.

## 7.5 Surfaces d'interpolation et d'approximation

Les surfaces de Bézier ne sont que très peu utilisées. Elles ne sont pas faciles à raccorder et à contrôler. Il est par exemple très difficile de reproduire une forme précise avec une surface de Bézier.

### 7.5.1 Surfaces d'interpolation

Les surfaces de Bézier sont des surfaces d'approximation mais il existe aussi des surfaces d'interpolation.

Les surfaces de Coons sont des surfaces réglées. La surface a des conditions pour ces arêtes. Nous lui imposons qu'une certaine arête doit passer par une certaine courbe.

Il existe aussi des surfaces qui passent par les points de contrôle qui deviennent des points d'interpolation. Les surfaces splines bicubiques en sont un exemple.

Certaines NURBS interpolent les points. Dans le logiciel de modélisation **Autodesk 3ds Max 8** ce type de surface est appelé **NURBS Point surf**.

### 7.5.2 Surfaces d'approximation

Il existe une autre façon de créer des surfaces avec des courbes de Bézier : les triangles de Bézier. Ce type de surface applique un algorithme de De Casteljau avec des triangles. Ces surfaces présentent les mêmes propriétés que les Carreaux de Bézier<sup>39</sup>.

---

<sup>39</sup>Voir [13, 2].

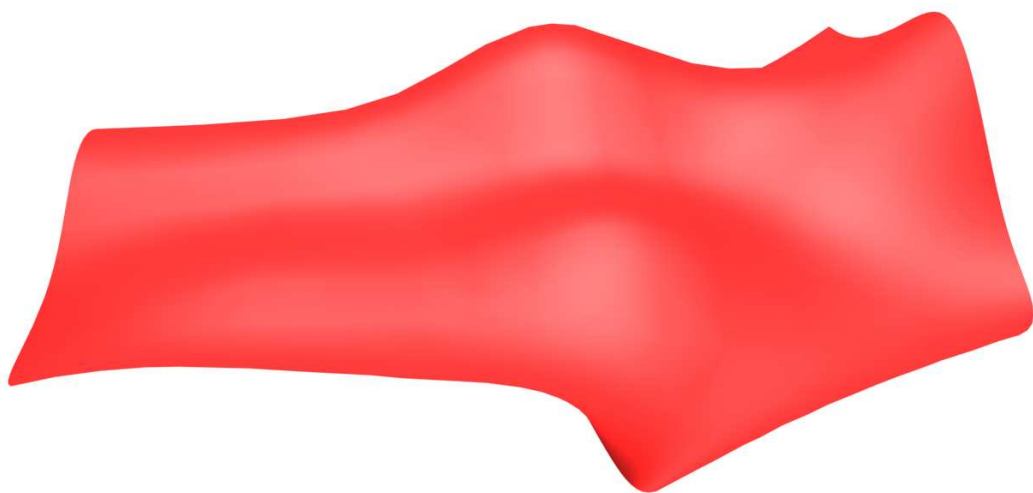


FIG. 36 – Surfaces NURBS avec 36 points de contrôle

De la même manière que nous avons construit les surfaces de Bézier, il est possible de dessiner des surfaces B-Splines. Mais pour la modélisation en 3D, nous utilisons surtout des surfaces NURBS. Les jeux vidéo, les films d'animation sont presque entièrement réalisés avec ces surfaces. La figure 36 montre une surface NURBS réalisée avec le logiciel **Autodesk 3ds Max 8**. La surface possède 36 points de contrôle.

### 7.5.3 Autres techniques

Il faut savoir qu'il n'y a pas que les courbes et les surfaces pour faire de la modélisation<sup>40</sup>. Il est possible de modéliser des formes très symétriques (comme un vase) avec des surfaces de révolution.

Il existe également des techniques plus spécifiques qui sont destinées aux images de synthèse et non aux machines à commandes numériques.

La modélisation par Metaballs part de volumes très simples (généralement des sphères). Ces petits volumes peuvent se déformer, se séparer et fusionner. Ainsi, nous avons une très grande souplesse dans les volumes engendrés. Nous pouvons donc modéliser de manière très réaliste des fluides. La figure 37 montre une modélisation par Metaballs.

La modélisation par fractales permet de gérer des éléments tels que la végétation, les montagnes, ... Un arbre, par exemple, présente des répétitions. Il serait très fastidieux

---

<sup>40</sup>Voir [22].

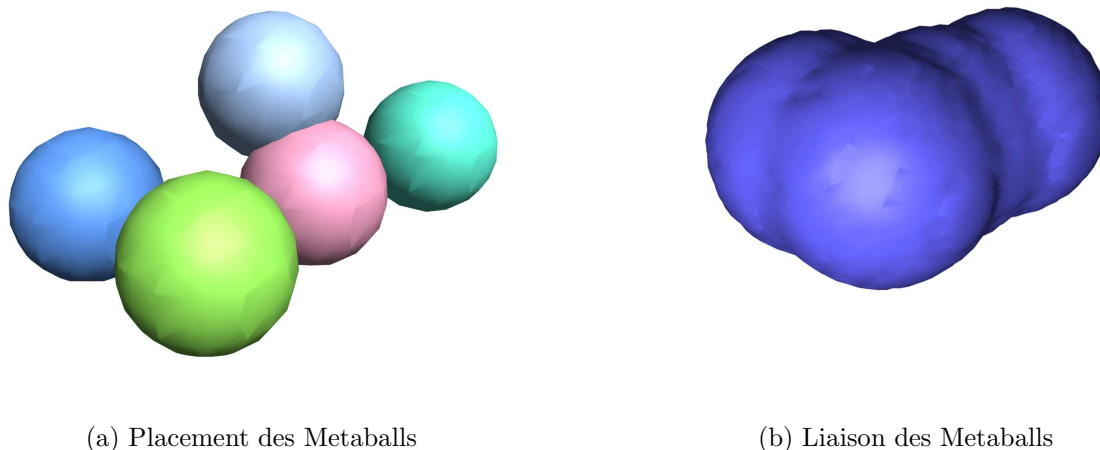


FIG. 37 – Modélisation par Metaballs

de réaliser ces éléments avec des courbes et des surfaces, de plus les temps de calcul seraient très longs. La modélisation par fractales permet de gérer automatiquement la duplication des objets.

## 8 Conclusion

Nous avons remarqué que ce sujet est très vaste. Nous aurions pu poursuivre avec les courbes NURBS, les facettes de Coons, les surface NURBS, etc. Mais certains sujets comme les NURBS deviennent vite très compliqués.

En outre, ces domaines sont très récents, ils ne sont pas totalement aboutis. Même les B-Splines et dans une moindre mesure les courbes de Bézier sont mal documentées. S'il est aisé de trouver de documents basiques, il est difficile de trouver de la documentation complète et abordable, certains livres tels que [14] étant exclusivement théorique. Entre les sources et même parfois à l'intérieur des documents, les notations diffèrent, se contredisent. Nous pouvons imputer ces flottements à la jeunesse de ces concepts. Nous avons choisi les notations qui nous paraissaient les plus simples et claires et nous avons privilégié les livres et les cours d'université et d'écoles polytechniques comme sources.

Avant de l'étudier en détails, ce sujet paraissait limité : nous pensions qu'il y avait quelques courbes. Puis nous nous sommes aperçu que de nombreuses courbes existaient et surtout qu'elles possédaient des dizaines de déclinaisons. Les courbes et surfaces présentent aussi de nombreuses propriétés.

Cette matière présente l'avantage suivant : il est possible de faire la liaison entre la propriété que nous démontrons théoriquement, de son résultat, et de son application. De plus, le sujet fait appel à énormément de domaines des mathématiques tels que la géométrie, le calcul différentiel et intégral, le calcul matriciel, des méthodes numériques, de la programmation.

L'actualité de ce domaine est très grande : les courbes et les surfaces d'interpolation



et d'approximation sont utilisées partout. Il suffit de choisir un objet au hasard, il est probable que une des notions étudiées dans ce travail ait été utilisées.

**Remerciements** Je tiens remercier les personnes ou institutions suivantes :

- Mon mentor, Monsieur Jean-Bernard MATHEY pour son aide et ses remarques toujours pertinentes.
- Mon frre Julien, qui m'a aidé pour l'utilisation de  $\text{\LaTeX}$  et Mathematica.
- Mes parents, qui ont toujours rpondu à mes questions.
- <http://www.developpez.com>, le site d'entraide des développeurs, pour avoir rpondu mes questions sur le langage C et C++.
- <http://www.cppfrance.com>, pour les nombreux exemples sur le langage C et C++.

## Références

- [1] Marcel-Yves BACHMAN, Hubert CATTIN, Paul EPINEY, Francois HAEBERLI et Gérald JENNY, *Méthodes Numériques*. Editions du Tricorne, 1992.
- [2] Gerald FARIN, *Courbes et surfaces pour la CGAO*. Masson, 1992.
- [3] Melvin MARON, *Numerical Analysis*. Macmillan Publishing, 1982.
- [4] R.G. MORVAN, *Encyclopédie internationale des sciences et des techniques*. Presses de la Cité, 1973.
- [5] Jean-Baptiste YUNES, *Interpolation et Approximation de courbes*. 21.01.2002. URL : <http://www.liafa.jussieu.fr/~yunes/infographie/splines>.
- [6] Kirby BAKER, *Cubic splines curves*. 13.05.2003. URL : [http://www.math.ucla.edu/~baker/149.1.03s/handouts/y\\_splines.pdf](http://www.math.ucla.edu/~baker/149.1.03s/handouts/y_splines.pdf).
- [7] Eric WEISSTEIN, *Cubic Spline*. 10.10.2006. URL : [mathworld.wolfram.com/CubicSpline.html](http://mathworld.wolfram.com/CubicSpline.html).
- [8] Sylvain BARTHELEMY, *Interpolations polynomiales et cubic splines*. 04.1998. URL : [www.sylbarth.com/interp.php](http://www.sylbarth.com/interp.php).
- [9] Nicolas DAGET, *Le spline cubique*. 21.03.2006. URL : [www.cerfacs.fr/~daget/TECHREPORT/TR\\_CMGC\\_06\\_18\\_html/node12.html](http://www.cerfacs.fr/~daget/TECHREPORT/TR_CMGC_06_18_html/node12.html).
- [10] UNIGE, *Interpolation et Approximation*. URL : [www.unige.ch/~hairer/poly/chap2.pdf](http://www.unige.ch/~hairer/poly/chap2.pdf).
- [11] N. PISKOUNOV, *Calcul Différentiel et Intégral tome 1*. Editions Mir, 1970.
- [12] Vincent LESAGE, *Les Courbes de Bézier et les B-Splines*. 10.2001. URL : [www4.ac-lille.fr/~math/classes/analyse/bezierspline/bezier-spline.htm](http://www4.ac-lille.fr/~math/classes/analyse/bezierspline/bezier-spline.htm).
- [13] Christophe RABUT, *Petite Histoire d'une Idée Bizarre : Les Courbes et les Surfaces de Bézier*. 13.03.2001. URL : [www-gmm.insa-toulouse.fr/~rabut/bezier/ensam/ensam.html](http://www-gmm.insa-toulouse.fr/~rabut/bezier/ensam/ensam.html).
- [14] Gilbert DEMENGEL et Jean-Pierre POUGET, *Modèle de Bézier des B-Splines et des NURBS*. Ellipses, 1998.
- [15] Christian JACQUEMIN, *Informatique Graphique*. URL : [perso.limsi.fr/jacquemi](http://perso.limsi.fr/jacquemi).

- [16] Jean-Christophe BAEY, *Courbes de Bézier*. URL : <http://home.nordnet.fr/~jpbaey/tipe/bezier/sommairebas.htm>.
- [17] Kirby BAKER, *Cubic Bézier curves*. 04.04.2003. URL : [http://www.math.ucla.edu/~baker/149.1.03s/handouts/e\\_bezier.pdf](http://www.math.ucla.edu/~baker/149.1.03s/handouts/e_bezier.pdf).
- [18] XXX, *Courbes de Bézier et B-splines*. URL : <http://www.liafa.jussieu.fr/~carton/Enseignement/InterfacesGraphiques/M%asterInfo/Cours/Swing/splines.html>.
- [19] Marc NEVEU, *Courbes et Surfaces*. 2004-2005. URL : [http://math.u-bourgogne.fr/MASTERMIGS/etudiants/MIGS2/docs2004-2005/sur%f\\_abrege.doc](http://math.u-bourgogne.fr/MASTERMIGS/etudiants/MIGS2/docs2004-2005/sur%f_abrege.doc).
- [20] Stephen WOLFRAM, *The Mathematica Book 5th Edition*. Wolfram, 2003.
- [21] Philippe GILLE, *Postscript facile*. Marabout, 1989.
- [22] Alain BOUCHER, *Synthèse d'images par Ordinateur*. 2003. URL : [http://www.ifi.auf.org/personnel/Alain.Boucher/cours/synthese\\_images/08%-Courbes\\_et\\_Surfaces.pdf](http://www.ifi.auf.org/personnel/Alain.Boucher/cours/synthese_images/08%-Courbes_et_Surfaces.pdf).
- [23] Pierre PANSU, *Courbes B-splines*. 07.02.2004. URL : [www.math.u-psud.fr/~pansu/web\\_maitrise/bsplines.pdf](http://www.math.u-psud.fr/~pansu/web_maitrise/bsplines.pdf).
- [24] ECOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL, *Approximation de courbes et de surfaces*. 08.1999. URL : <http://www.cours.polymtl.ca/ift6843/transparents/11-Approximations-x1.p%df>.
- [25] François GUIBAULT, *Conception géométrique assistée par ordinateur et visualisation*. 2003. URL : <http://www.cours.polymtl.ca/inf6800/htmlgen/planDeCours.html>.
- [26] Mehmet CELIKBAS, *B-splines pour l'optimisation de forme*. 23.05.2006. URL : <http://hal.inria.fr/inria-00071611/en>.
- [27] Jean-Louis MALTRET, *A propos des NURBS*. 18.11.1998. URL : <http://lumimath.univ-mrs.fr/~jlm/cours/nurbs/node1.html>.
- [28] XXX, *B-spline basis functions*. 08.2001. URL : <http://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/Basis.htm>.
- [29] Vincent LEGAT, *Fonctions B-splines*. URL : <http://www.mema.ucl.ac.be/~vl/documents0607/meca2170-6.pdf>.
- [30] Karthik BINDIGANAVLE, *Parametric B-splines*. 01.03.2000. URL : [http://scholar.lib.vt.edu/theses/available/etd-04192001-172731/unrestric%ted/chapter\\_4.pdf](http://scholar.lib.vt.edu/theses/available/etd-04192001-172731/unrestric%ted/chapter_4.pdf).
- [31] Edmond BOYER, *Représentation des courbes et des surfaces*. URL : <http://perception.inrialpes.fr/people/Boyer/Teaching/RICM/c5.pdf>.
- [32] Gilles ALDON, *Courbes de Bézier*. 28.05.2002. URL : <http://sierra.univ-lyon1.fr/irem/CF>.
- [33] Tipe TOP, *J'ai un coup de splines*. URL : [www.tipetop.fr/sujets/geometrie/courbebez.htm](http://www.tipetop.fr/sujets/geometrie/courbebez.htm).

**Note** Les URL étaient encore valides le 27.12.2006 sauf [33]