Переходные процессы в электрических цепях с сосредоточенными параметрами и методы их расчета

Лекция 11

Цель лекции №11:

Ознакомившись с лекцией №11 по теории электрических цепей студент должен знать:

1. Анализировать переходной процесс в цепи R – C при подключении к источнику постоянного напряжения и коротком замыкании в цепи (процесс разрядки и зарядки конденсатора);
2. Определять вид переходного процесса в цепях второго порядка в зависимости от корней характеристического уравнения;
3. Записывать свободную составляющую переходного процесса в случае двух неравных вещественных отрицательных корней и двух комплексно – сопряженных корней;
4. Уметь определять постоянную времени переходного процесса в цепях второго порядка.

11.1 ПЕРЕХОДНОЙ ПРОЦЕСС В ЦЕПИ RC

11.1.1 Подключение цепи RC к источнику постоянного напряжения

Для анализа переходного процесса при замыкании цепи рис. 11.1

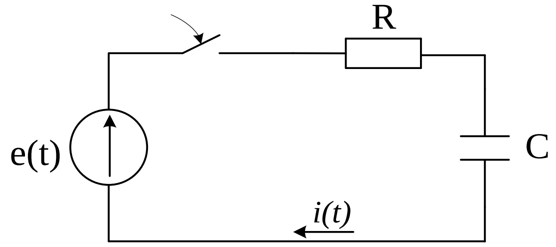

Рисунок *11.1* Подключение цепи R –C к источнику постоянного напряжения.

применим второй закон Кирхгофа, составленный для мгновенных значений напряжений.

$$u_r(t) + u_C(t) = e(t) \tag{11.1}$$

Используя выражение 1, получим:

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=e(t). \tag{11.2}$$

Характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (11.2) имеет вид:

$$RCp+1=0.$$

Корень характеристического уравнения $p=-\frac{1}{RC}$. (11.3)

Полные переходные ток и напряжение согласно формуле 10.4 имеют вид

$$i(t)=i_{уст}+Ae^{pt};$$
$$u_C(t)=u_{C уст}+Be^{pt}. \tag{11.4}$$

где *A* и *B* – постоянные интегрирования, для определения которых необходимо знать начальные условия . *i(0)* и $u_C(0)$.

До коммутации (когда ключ открыт) при условии, что конденсатор не был заряжен, согласно второму закону коммутации, $u_C(0\_) = u_C\ 0_+) = 0$. Следовательно, когда ключ замыкается, участок с емкостью в момент коммутации эквивалентен короткому замыканию. Рисунок 11.2 наглядно демонстрирует цепь для момента времени t=0:

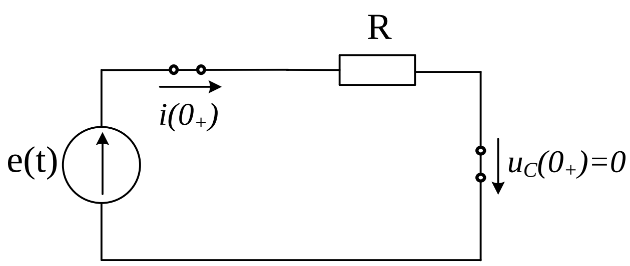

Рисунок *11.2* Емкость эквивалентна короткому замыканию в момент коммутации.

Согласно закону Ома ток в цепи рис.11.2 равен I(0)=$\frac{e(t)}{R}$.

Теперь определим принужденные составляющие переходных тока и напряжения на емкости. Рисунок 11.3 иллюстрирует схему в установившемся режиме. Т.к. при постоянном напряжении $X_C=\infty$, то участок с емкостью эквивалентен разрыву:

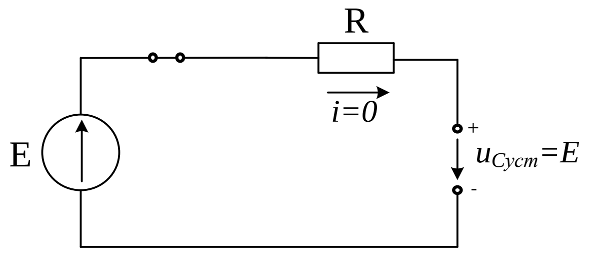

Рисунок *11.3* Цепь RC в установившемся режиме.

Следовательно ток цепи равен нулю, а установившееся напряжение на емкости $u_{Cуст}$=E.

Подставим принужденные составляющие тока и напряжения в выражения 11.4: $u_C(t)=Ae^{pt}+E;$ $\quad i(t)=Be^{pt}+0.$

Используем начальные условия для определения постоянных интегрирования.

$$u_c(0)=Ae^{p0}+E;$$

$$i(0)=Be^{p0};$$

Или

$$0=A+E;$$

$$\frac{E}{R}=B.$$

Получаем: *A*= - *E* и *B*= *E/R*

Следовательно, полные переходные ток и напряжение при подключении цепи к источнику постоянного напряжения определяются при помощи выражений:

$$v_c(t)=E-Ee^{-\frac{1}{RC}t}; \tag{11.5}$$

$$i(t)=\frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}. \tag{11.6}$$

Графики переходного процесса:

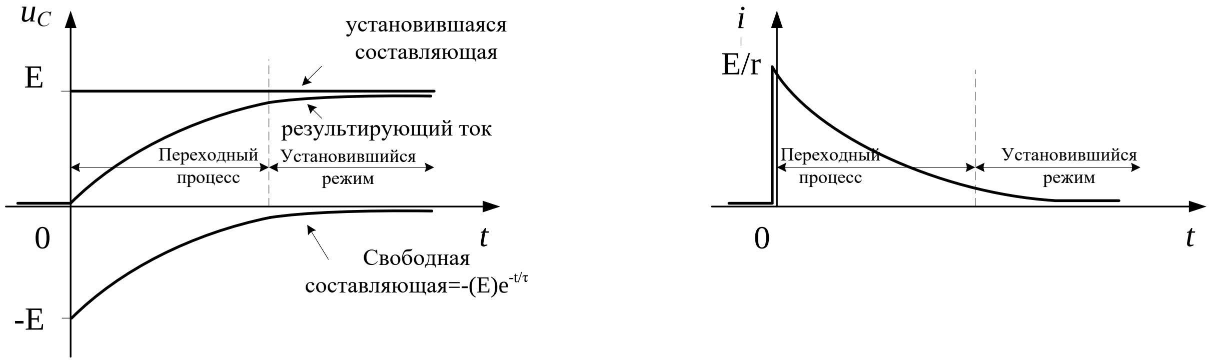

Рисунок *11.4* Ток и напряжение в цепи R – C при подключении к источнику постоянного напряжения.

Постоянная времени цепи R - C равна:

$\tau = |1/p| = RC$

11.1.2 Короткое замыкание в цепи RC

Рассмотрим переходной процесс, возникающий при коротком замыкании в цепи RC, когда цепь отключается от источника питания.

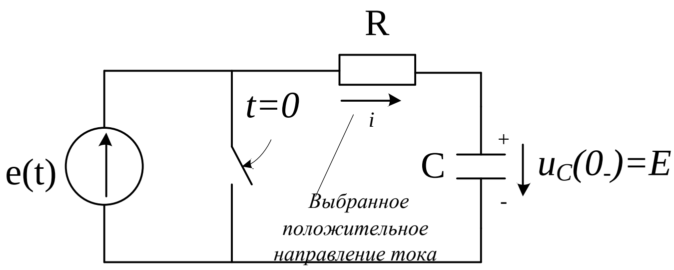

Рисунок *11.5* При замыкании ключа происходит процесс разрядки конденсатора.

До коммутации в случае постоянного источника Э.Д.С. конденсатор был заряжен до напряжения источника:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = E,$$

$$i(0_-) = 0.$$

После замыкания ключа напряжение на конденсаторе согласно второго закона коммутации не может изменяться мгновенно, и в первый момент после коммутации конденсатор эквивалентен источнику напряжения, э.д.с. которого равна E. Эквивалентная схема в момент времени t=0 представлена на рисунке 11.6:

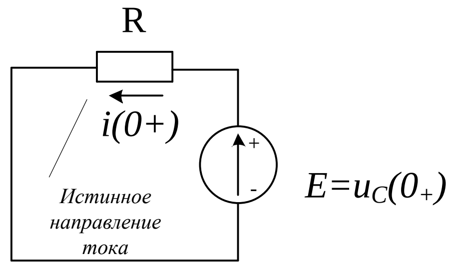

Рисунок *11.6* Конденсатор в момент коммутации эквивалентен источнику напряжения.

Заметим, что в момент коммутации направление тока противоположно выбранному ранее положительному направлению тока. Ток в момент коммутации мгновенно изменяется до значения $i(0) = -\frac{E}{R}$.

Принужденные составляющие напряжения на конденсаторе и тока равны нулю. Следовательно, полные переходные напряжение и ток изменяются по законам:

$$u_C(t) = Ae^{pt},$$
$$i(t) = Be^{pt}, \qquad (11.7)$$

Уравнения 11.7 для момента коммутации t=0:

$$E = Ae^{p0},$$
$$-\frac{E}{R} = Be^{p0}.$$

Откуда постоянные интегрирования равны $A = E; B = -\frac{E}{R}$.

Следовательно, переходные напряжение на конденсаторе и то контура изменяются согласно выражениям:

$$u_C(t) = Ee^{-\frac{1}{RC}t} = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$i(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t} = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (11.8)$$

На рисунке 11.7 показаны графики напряжения на конденсаторе и тока при коротком замыкании в цепи:

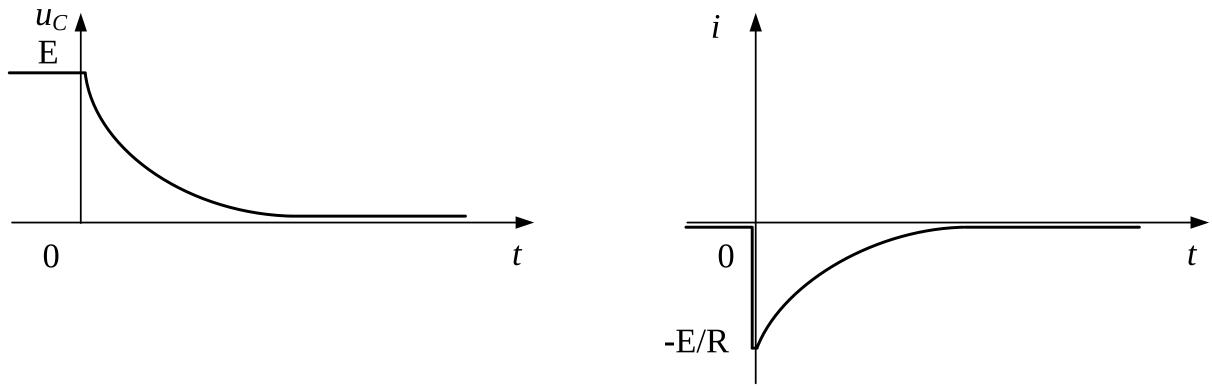

Рисунок *11.7* Зависимости напряжения на конденсаторе и тока в цепи RC при коротком замыкании.

11.2 ПЕРЕХОДНОЙ ПРОЦЕСС В ЦЕПЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Цепи, содержащие два реактивных элемента, называются *цепями второго порядка* (рисунок 11.8).

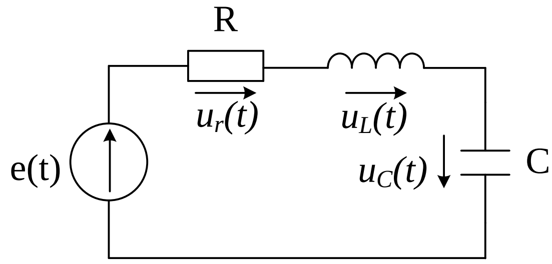

Рисунок *11.8* Цепь второго порядка.

11.2.1 Дифференциальное уравнение и свободная составляющая для цепи второго порядка.

Уравнение по второму закону Кирхгоффа для цепи имеет вид:

$$u_r(t) + u_L(t) + u_C = e(t). \tag{11.9}$$

Подставляя выражения 10.1 и 10.2 в выражение 11.9, получим интегро-дифференциальное уравнение:

$$iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i dt = e(t). \tag{11.10}$$

Дифференцируя уравнение 11.10, получаем дифференциальное уравнение второго порядка:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\frac{de}{dt}.$$

(11.11)

Характеристическое уравнение для него имеет вид:

$$Lp^2+Rp+\frac{1}{C}=0$$

(11.12)

При решении квадратного уравнения 11.12 могут быть определены следующие корни:

а) вещественные неравные отрицательные;

б) вещественные равные отрицательные;

в) комплексно – сопряженные.

Свободная составляющая в цепи второго порядка определяется как сумма двух экспоненциальных функций:

$$i_{пр}(t)=A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t},$$

(11.13),

где A_1 и A_2 – постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий.

Рассмотрим характер протекания переходного процесса в каждом случае.

11.2.2 Переходной процесс при двух вещественных неравных корнях характеристического уравнения.

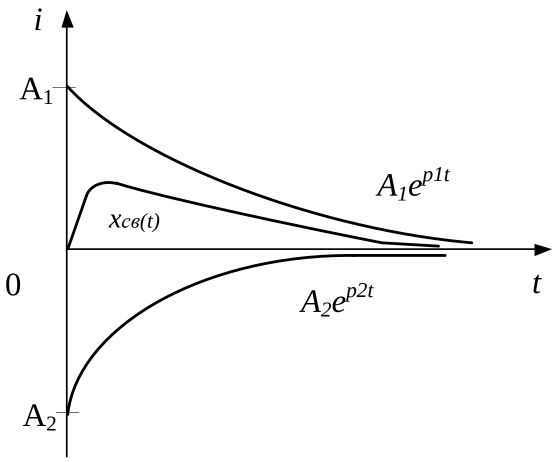

Рисунок *11.9* График свободной составляющей при апериодическом переходном процессе.

График построен для случая, когда $A_1= -A_2$. Результирующая кривая начинает изменяться со своего нулевого значения при t=0. Если $|p_2|>|p_1|$, то экспонента $A_2e^{p_2t}$ затухает быстрее, чем экспонента $A_1e^{p_1t}$.

Постоянная времени в случае двух вещественных неравных корней есть величина обратная модулю наименьшего корня. В рассматриваемом примере: $\tau = \frac{1}{|p_1|}$.

В случае двух вещественных неравных корней свободная составляющая является суммой двух экспоненциальных функций. Результирующая кривая изменяется по *апериодическому* закону. Такой переходной процесс называется *апериодическим*.

11.2.3 Переходной процесс при двух вещественных равных корнях характеристического уравнения.

$$p_1 = p_2 \qquad \text{и} \qquad i_{св} = e^{-pt}\left(A_1 + pA_2\right)$$

Переходной процесс называется *критическим*. Кривая тока аналогична кривой на рисунке 11.9.

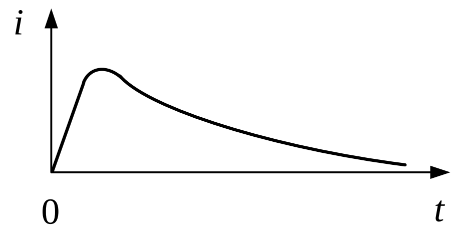

Рисунок *11.10* Критический переходной процесс.

11.2.4 Переходной процесс при двух комплексно - сопряженных корнях характеристического уравнения.

$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_c$$

где σ–коэффициент затухания,

ω_c–угловая частота свободных колебаний.

Свободная составляющая тока ищется в виде :

$$i_{св} = Ae^{-\sigma t}\, sin(\omega_c t + \psi_c), \qquad (11.14)$$

ψ_c–начальная фаза свободных колебаний.

Переходной процесс называется *периодическим* или *колебательным*.

Формула 11.14 описывает затухающее синусоидальное колебание при угловой частоте ω_c и начальной фазе ψ_c.

Постоянные интегрирования A и ψ_c определяются значениями параметров схемы и начальными условиями. Угловая частота свободных колебаний ω_c и коэффициент затухания δ зависят только от параметров цепи после коммутации. Зная ω_c, период свободных колебаний определяют по формуле $T_{\text{св}} = \frac{2\pi}{\omega_c}$.

График изменения свободной составляющей в случае колебательного переходного процесса показан на рисунке 11.11.

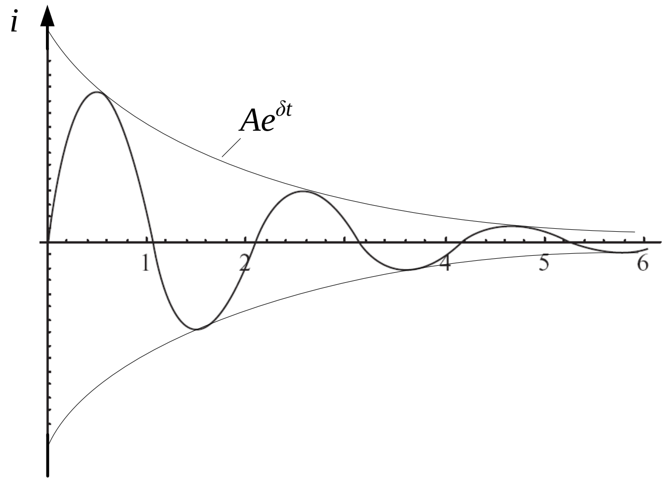

Рисунок *11.11*. Периодический переходной процесс. (***показать период, убрать цифры, указать стрелку, сделать синусоиду жирнее)***

Огибающая колебаний определяется кривой $Ae^{-\delta t}$.

Чем больше δ, тем быстрее затухает колебательный процесс. При $t = \frac{1}{\delta}$ ордината огибающей в e=2,718 раза меньше начального значения огибающей. Поэтому величину $\frac{1}{\delta}$ называют *постоянной времени* колебательного контура.

О быстроте затухания колебательного процесса судят по величине $e^{\delta T_{\text{св}}}$, называемой *декрементом колебания*, или величине $\theta = ln e^{\delta T_{\text{св}}} = \delta T_{\text{св}}$, называемой *логарифмическим декрементом колебания*.