

Электрические цепи с распределенными параметрами

Лекция №16.

Цель лекции №16:

Ознакомившись с лекцией №16 по теории электрических цепей студент должен знать:

1. Определение цепи с распределенными параметрами;
2. Что такое первичные и вторичные параметры длинной линии;
3. Уметь изображать и объяснять схему замещения участка цепи с распределенными параметрами;
4. Телеграфные уравнения длинной линии;
5. Условия, при которых длинная линия рассматривается как линия без потерь;
6. Формулы коэффициента передачи и волнового сопротивления длинной линии;
7. Что такое прямая и обратная волны?
8. Формулы фазовой скорости и длины волны;
9. Особенности согласованного и несогласованного режимов работы длинной линии;
10. Когда возникает режим стоячих волн;
11. Как определяется входное сопротивление линии;
12. Условие, при котором длинная линия является неискажающей;
13. Условие, при котором длинная линия является линией без потерь;
14. Уравнения длинной линии без потерь
15. Формула волнового сопротивления линии без потерь.

16.1 ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ (ЦРП)

16.1.1 Введение

Цепи с распределенными параметрами характеризуются протеканием в них волновых процессов, при которых переменные величины $U(t, \ell)$, $i(t, \ell)$ меняются не только во времени, но и в пространстве. При этом в любой фиксированный момент времени t_0 , значение напряжения (тока) может повторяться в пространстве через некоторый пространственный интервал $\Delta \ell = \lambda$:

$$U(t_0, \ell) = U(t_0, \ell + \lambda)$$

где λ - длина волны.

Если длина электрической цепи $\ell_0 \ll \lambda$, то данную цепь можно считать цепью с сосредоточенными параметрами. В ЦРП длина электрической цепи соизмерима или больше длины волны.

Примеры ЦРП : длинные линии электропередачи, линии телеграфной и телефонной связи.

В ЦРП необходимо учитывать токи, обусловленные емкостями между проводами (токи смещения) и проводимостью изоляции (токи утечки через гирлянды изоляторов) и токи, обусловленные коронным электрическим разрядом вблизи поверхности проводов. Следовательно, ток в проводах не одинаков в разных сечениях линии.

Ток в проводах линии вызывает падение напряжения в активном сопротивлении проводов и создает переменное магнитное поле, которое в свою очередь наводит вдоль всей линии ЭДС самоиндукции. Поэтому напряжение между проводами также не остается постоянным вдоль линии. Чтобы учесть изменения тока и напряжения вдоль линии, нужно считать, что каждый сколь угодно малый элемент линии обладает сопротивлением и индуктивностью, а между проводами – проводимостью и емкостью, т.е. рассматривать линию как цепь с распределенными параметрами. Такую линию также называют длинной линией.

16.1.2. Первичные параметры ЦРП

Свойства длинных линий определяются в первую очередь их распределенными параметрами. К ним относятся индуктивность и сопротивления проводов, а также емкость и проводимость утечки между проводами, которые распределены вдоль линии .

К первичным параметрам длинной линии относятся: погонная индуктивность L_0 (Гн/м), погонная емкость C_0 (Ф/м), погонное сопротивление потерь r_0 (Ом/м) и погонная проводимость g_0 (См/м) утечки. Как видно из рис.8.1. погонные параметры L_0 и r_0 относятся не к двум, а к одному проводу длинной линии.

Определение первичных параметров ЦРП сопряжено, в частности, с расчетами электрических и магнитных полей.

Если первичные параметры не изменяются вдоль линии, то ее называют *однородной*. *Неоднородность* линии может быть обусловлена, например, изменением расстояния между проводами двухпроводной линии.

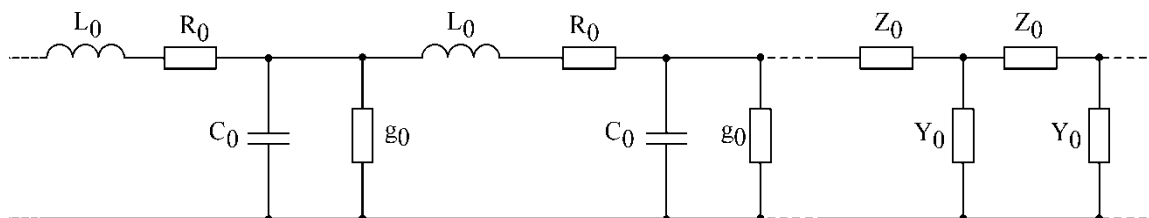


Рисунок 16.1 Схема замещения длинной линии с указанием первичных параметров.

16.2 УРАВНЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ДВУХПРОВОДНОЙ ЛИНИИ

В качестве ЦРП будем рассматривать двухпроводную линию, как типичный пример длинной линии.

ЦРП можно представить виде множества соединенных в цепочку бесконечно малых элементов длинной dx , каждый из которых имеет сопротивление $r_0 dx$, и индуктивность $L_0 dx$, проводимость $g_0 dx$ и емкость $C_0 dx$ (рис.2).

Дифференциальные уравнения длинной линии (рис 16.2):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= r_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= g_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \quad (16.1)$$

где x - расстояние от начала линии до текущего элемента ее длины;

U и i - мгновенные значения напряжения и тока в начале выбранного элемента линии dx ,

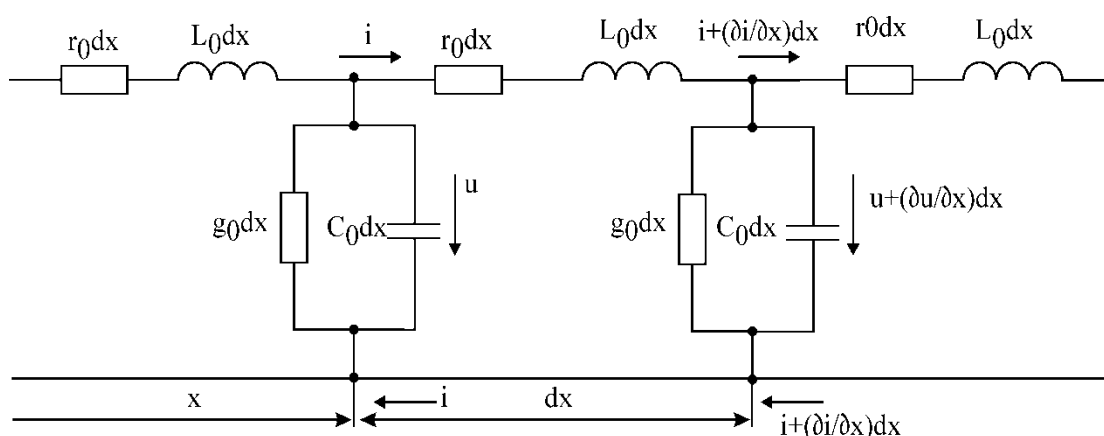


Рисунок 16.2 Схема замещения длинной линии

$U + \frac{du}{dx}dx$ и $i + \frac{di}{dx}dx$ - мгновенные значения напряжения и тока в начале следующего элемента.

Система уравнений (8.1) дает возможность определить ток и напряжение, как функции расстояния от начала линии и времени. Эти уравнения справедливы при любых изменениях тока и напряжения.

16.2.1 Установившийся режим в однородной линии.

Рассмотрим установившийся режим в длинной линии при синусоидальном напряжении источника питания. Переписывая уравнения (16.1) для установившегося режима и вводя комплексные напряжения, токи, сопротивления и проводимости, получаем

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = (r_0 + j\omega L_0)\dot{I} = Z_0\dot{I}; \quad (16.2)$$

$$-\frac{d\dot{I}}{dx} = (g_0 + j\omega C_0)\dot{U} = Y_0\dot{U}; \quad (16.3)$$

где $Z_0 = r_0 + j\omega L_0$ - комплексное сопротивление, $Y_0 = g_0 + j\omega C_0$ - комплексная проводимость линии единичной длины. Следует иметь в виду, что Z_0 и Y_0 не являются величинами, обратными друг другу.

Уравнения (16.2), (16.3) называются *телеграфными уравнениями*. Они описывают закон изменения амплитуды и фазы гармонических колебаний вдоль линии.

Для решения телеграфных уравнений продифференцируем уравнения (16.2), (16.3) по x и разделим в них переменные \dot{U} и \dot{I} . В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{U}}{\partial x^2} &= Z_0 Y_0 \dot{U}; \\ \frac{\partial^2 \dot{I}}{\partial x^2} &= Z_0 Y_0 \dot{I}; \end{aligned} \quad (16.4)$$

Перепишем эти уравнения в виде (16.5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{U}}{\partial x^2} - \gamma^2 \dot{U} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \dot{I}}{\partial x^2} - \gamma^2 \dot{I} &= 0. \end{aligned} \quad (16.5)$$

Здесь

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta \quad (16.6)$$

Уравнения (16.5) получили название *волновых уравнений*.

γ является комплексным параметром длинной линии и называется коэффициентом (постоянной) распространения волны.

При $r_0 = 0, g_0 = 0$ коэффициент распространения (16.7) является мнимой величиной:

$$\gamma = j\omega\sqrt{L_0 C_0} = j\beta; \quad \alpha = 0; \quad \beta = \beta_0 = \omega\sqrt{L_0 C_0} \quad (16.7)$$

Длинная линия с параметром (8.7) называется *линией без потерь*.

16.2.2 Решение волновых (телеграфных) уравнений

Для решения однородных волновых уравнений (16.5) составляем их характеристическое уравнение и определяем его корни:

$$p^2 - \gamma = 0; \quad p_{1,2} = \pm\gamma.$$

Отсюда получаем искомое решение:

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{-\gamma x} + \dot{A}_2 e^{\gamma x} \quad (16.8)$$

Где \dot{A}_1, \dot{A}_2 - комплексные постоянные интегрирования.

Ток согласно уравнению (16.3)

$$\dot{I} = -\frac{1}{Z_0} \frac{\partial \dot{U}}{\partial x} = \frac{\gamma}{Z_0} (\dot{A}_1 e^{-\gamma x} - \dot{A}_2 e^{\gamma x}) = \frac{\dot{A}_1 e^{-\gamma x} - \dot{A}_2 e^{\gamma x}}{\sqrt{Z_0/Y_0}} \quad (16.9)$$

Знаменатель в уравнении 16.9, имеющий размерность сопротивления, называют *волновым сопротивлением линии* Z_B .

$$Z_B = z_B e^{j\theta} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}}. \quad (16.10)$$

Коэффициент распространения γ (16.7) и волновое сопротивление Z_B (16.10) называются *вторичными параметрами однородной длинной линии*. Эти параметры вполне определяют свойства линии как устройства для передачи энергии или информации.

Учитывая, что комплексные постоянные интегрирования имеют вид:

$$\dot{A}_1 = \dot{A}_1 e^{j\psi_1}; \quad \dot{A}_2 = \dot{A}_2 e^{j\psi_2};$$

запишем мгновенные значения напряжения и тока :

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sqrt{2} \dot{A}_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1) + \sqrt{2} \dot{A}_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2) \\ i(t, x) &= \frac{\sqrt{2} \dot{A}_1}{Z_B} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1 - \theta) - \frac{\sqrt{2} \dot{A}_2}{Z_C} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2 - \theta) \end{aligned} \quad (16.11)$$

16.2.3 Прямая и обратная волны

Для облегчения анализа процессов, происходящих в длинных линиях при установившемся синусоидальном режиме можно представить (16.11) условно как сумму *прямых и обратных волн*:

$$\begin{aligned}u(t, x) &= u_{np}(t, x) + u_{обп}(t, x) \\ i(t, x) &= i_{np}(t, x) + i_{обп}(t, x)\end{aligned}\quad (16.12)$$

или

$$\begin{aligned}u(t, x) &= U_{np.m} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1) + U_{обп.m} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2) \\ i(t, x) &= I_{np.m} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1 - \theta) - I_{обп.m} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2 - \theta)\end{aligned}\quad (16.13)$$

Прямую и обратные волны можно рассматривать как *бегущие волны*. *Прямая волна* движется от начала линии в сторону возрастания координаты, *обратная волна* движется от конца линии в сторону убывания координаты.

Основными характеристиками бегущей волны является фазовая скорость и длина волны.

Фазовой скоростью волны C называется скорость перемещения фазы колебания, которая в течении времени t и по мере увеличения расстояния x , пройденного волной, остается постоянной, т.е

$$\omega t - \beta x + \psi_1 = const,$$

откуда следует, что

$$\frac{d}{dt}(\omega t - \beta x + \psi_1) = 0$$

и

$$\frac{dx}{dt} = C = \frac{\omega}{\beta}\quad (16.14)$$

Наибольшая скорость движения волн в воздушной линии, потерями энергии в которой можно пренебречь. $v = c = 3 \cdot 10^5$ км/с. В кабеле фазовая скорость значительно меньше.

Длинной волны λ называется расстояние между ближайшими двумя точками, взятое в направлении распространении волны, фазы колебаний в которых различаются на 2π . Следовательно, для первого слагаемого (16.14) получим

$$\omega t - \beta(x + \lambda) + \psi_1 = \omega t - \beta x + \psi_1 - 2\pi,$$

откуда

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (16.15)$$

$$C = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = \lambda f = \frac{\lambda}{T},$$

т.е за время равному периоду, волна пробегает расстояние, равное длине волны.

8.2.4 Уравнения однородной линии с гиперболическими функциями

Для того, чтобы решить уравнение (16.8), (16.9), описывающие поведение длинных линий в установившемся режиме, необходимо определить постоянные интегрирования \dot{A}_1, \dot{A}_2 . Зададим граничные условия: напряжение \dot{U}_1 и ток \dot{I}_1 в начале линии ($x=0$). Используя (16.8), (16.9) с граничными условиями находим \dot{A}_1, \dot{A}_2 . Подставляя найденные постоянные интегрирования \dot{A}_1, \dot{A}_2 в уравнения (16.8), (16.9), и вводя гиперболические функции $ch \gamma x$ и $sh \gamma x$, получим

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1 ch \gamma x - \dot{I}_1 Z_c sh \gamma x; \\ \dot{I} &= \dot{I}_1 ch \gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z_c} sh \gamma x. \end{aligned} \quad (16.16)$$

Здесь x -расстояние отсчитываемое от начала линии. Если требуется определить \dot{U}_1, \dot{I}_1 в любой точке линии, то расстояние удобно отсчитывать от конца линии.

Обозначим y -расстояния, отсчитывание от конца линии. Тогда уравнения (16.16) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{U}(y) &= \dot{U}_2 ch \gamma y + \dot{I}_2 Z_c sh \gamma y; \\ \dot{I}(y) &= \dot{I}_2 ch \gamma y + \frac{\dot{U}_2}{Z_c} sh \gamma y. \end{aligned} \quad (16.17)$$

16.3 РЕЖИМЫ РАБОТЫ ДЛИННОЙ ЛИНИИ

16.3.1 Несогласованная нагрузка

В однородной линии с генератором в начале и приемником в конце

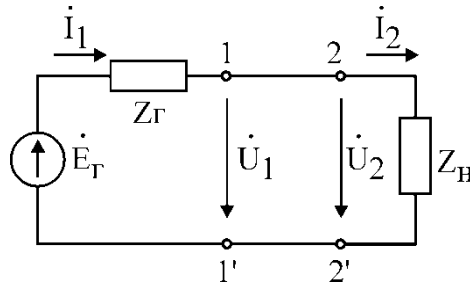


Рисунок 16.3 Работа длинной линии под нагрузкой.

обратная волна возникает, когда нагрузка не согласованна:

$$Z_H \neq Z_c.$$

Отношения комплексного напряжения (тока) обратной волны в любой точке линии к комплексному напряжению (току) прямой волны называют *коэффициентом отражения*:

$$N = \frac{\dot{U}_{обp}}{\dot{U}_{np}} = \frac{\dot{I}_{обp}}{\dot{I}_{np}} = \frac{Z_H - Z_c}{Z_H + Z_c} \quad (16.18)$$

Наибольшее рассогласование получается при коротком замыкании и холостом ходе в конце линии. При коротком замыкании $Z_H = 0$ и $N = -1$ при холостом ходе ($Z_H = \infty$) получаем $N = 1$. При согласованной нагрузке $Z_H = Z_c$, $\dot{U}_{об} = 0$ (обратной волны нет) и $N = 0$.

Чем больше коэффициент отражения (по модулю), тем заметнее влияние обратной волны, тем менее равномерно распределяются напряжения и ток вдоль линии и яснее выражены максимумы и минимумы у кривой действующего значения напряжения (рис. 16.4) и тока.

В случае несогласованной нагрузки не вся мощность, которую способна перенести прямая волна, поглощается сопротивлением нагрузки. С обратной волной часть мощности возвращается генератору.

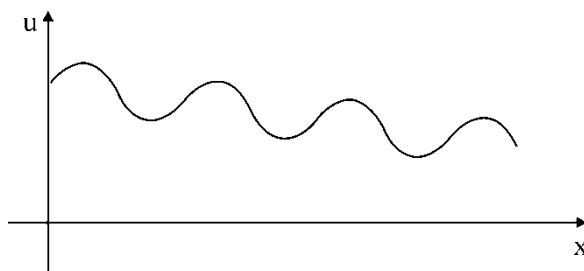


Рисунок 16.4 Распределение действующего значения напряжения вдоль длинной линии при несогласованной нагрузке.

Итак, обратная волна в однородной линии с генератором в начале и приемником в конце возникает при несогласованной нагрузке, когда $N \neq 0$. Поэтому такую волну называют еще *отраженной*. Прямую волну в этом случае называют еще *падающей*.

16.3.2 Согласованная нагрузка

Если сопротивление приемника равно волновому сопротивлению линии, т.е. $Z_n = Z_c$ то линия работает в режиме согласованной нагрузки. При этом уравнения линии (16.17) значительно упрощаются:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 e^{\gamma y}, \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 e^{\gamma y}, \end{aligned} \quad (16.19)$$

Из уравнений (16.19) видно, что при согласованной нагрузке обратная волна отсутствует.

Действующие значения напряжения и тока из-за потерь в линии, как и в общем случае, не остаются постоянными. $U(y), I(y)$ постепенно уменьшаются к концу линии (рис. 16.5).

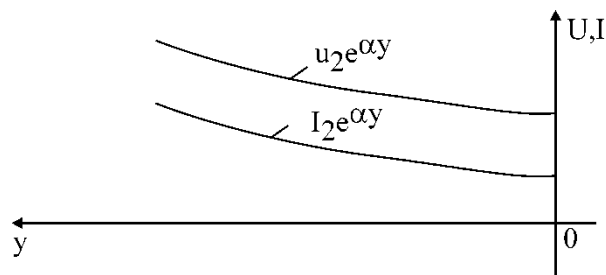


Рисунок 16.5 Распределение действующих значений тока и напряжения вдоль длинной линии с потерями.

Мощность в любом сечении линии

$$P = UI \cos \theta = \frac{U_2^2}{Z_c} e^{2\alpha y} \cos \theta$$

Здесь θ - угол сдвига фаз между напряжением и током.

Эта мощность уменьшается по мере удаления от начала линии, так как на каждом элементе длины линии

$$dP = 2\alpha = \frac{U_2^2}{Z_c} e^{2\alpha y} \cos\theta dy = (r_0 I^2 + g_0 U^2) dy,$$

Мощность потерь равна сумме потерь в сопротивлении проводов и в проводимости изоляции на элементе линии dx .

При согласованной нагрузке вся мощность волны, достигшей конца линии, поглощается в нагрузке. Обратной волны нет, что во многих случаях передачи информации важно для нормальной работы передающей и передающей и приемной аппаратуры. Поэтому согласование нагрузки одна из главных задач, которую приходится решать при организации передачи информации.

16.4 ВХОДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ЛИНИИ

Под входным сопротивлением линии $Z_{\text{вх}}$ понимают сопротивление двухполюсника, которым можно заменить линию вместе с приемником на ее конце при расчете режима в начале линии.

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2 \cosh \gamma \ell + \dot{I}_2 Z_c \sinh \gamma \ell}{\dot{I}_2 \cosh \gamma \ell + \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sinh \gamma \ell} = Z_c \frac{Z_n + Z_c \tanh \gamma \ell}{Z_n \tanh \gamma \ell + Z_c} \quad (16.20)$$

Это выражение показывает, что входное сопротивление линии зависит как от параметров линии и ее длины, так и от сопротивления нагрузки в конце линии.

Входное сопротивление линии $Z_{\text{вх}}$, а также вторичные параметры линии Z_c и γ могут быть выражены, используя режимы холостого хода и короткого замыкания.

$$Z_{\text{вх}} = Z_x \frac{Z_n + Z_k}{Z_n + Z_x} \quad (16.21)$$

$$Z_c = \sqrt{Z_x Z_k}, \quad \tanh \gamma \ell = \sqrt{Z_k / Z_x}$$

Здесь Z_x, Z_k - входные сопротивления линии при холостом ходе и коротком замыкании. Эти величины могут быть определены как теоретически, так и экспериментально из опытов холостого хода и короткого замыкания линии.

16.5 ЛИНИЯ БЕЗ ИСКАЖЕНИЙ

Если сигналы, передаваемые по линиям связи, телеуправления и т.п. являются несинусоидальным, но периодическими их можно разложить в тригонометрические ряды с помощью преобразования Фурье (дискретные спектры). Если сигналы несинусоидальные и непериодические (например, сигналы, соответствующие передаваемой музыке, речи), то их можно разложить в непрерывный спектр. Тогда анализ прохождения сигналов по линиям, можно проводить, анализируя прохождение отдельных гармоник.

Сигналы, передаваемые по линии, искажаются, если различны затухание и фазовая скорость отдельных гармонических составляющих сигнала. Для устранения амплитудных искажений необходимо добиться постоянства коэффициента затухания ($\alpha = const$) т.е постоянной амплитудной характеристики линии. Фазовые искажения отсутствуют при постоянной фазовой скорости ($c = const$) т.е. линейной зависимости коэффициента фазы от частоты $\beta = \frac{\omega}{c}$ или, короче говоря, линейной фазовой характеристики линии.

Линия является *неискажающей*, если выполняется условие

$$\frac{L_0}{C_0} = \frac{r_0}{g_0} \quad \text{или} \quad \frac{r_0}{L_0} = \frac{g_0}{C_0} \quad (16.22)$$

При выполнении условия (25), т.е для неискажающей линии

$$\alpha = \sqrt{r_0 g_0}; \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} \quad (16.23)$$

Фазовая скорость будет определяться как

$$c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \quad (16.24)$$

Волновое сопротивление такой линии чисто активное и не зависит от частоты.

$$Z_c = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0(r_0/L_0 + j\omega)}{C_0(g_0/C_0 + j\omega)}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad (16.25)$$

Большинство линий передачи информации не относятся к типу неискажающих. Искажение сигналов в ряде случаев устраняют при помощи специальных корректирующих устройств сразу для всего тракта передачи

сигналов, который состоит не только из линии, но и фильтров, усилителей, трансформаторов и других устройств.

Неискажающая линия является одновременно и линией с минимально возможным затуханием при заданных параметрах r_0 и g_0 .

16.6 ЛИНИЯ БЕЗ ПОТЕРЬ

Потери в линии отсутствуют, если $r_0 = 0$ и $g_0 = 0$. Практически это значит, что активным сопротивлением проводов можно пренебречь по сравнению с индуктивным и активной проводимостью между проводами по сравнению с емкостной. Такую линию называют *линией без потерь*.

Для высокочастотных коротких линий, применяемых в радиотехнике, часто с достаточно большой точностью можно пренебречь сопротивлением r_0 и утечкой g_0 по сравнению с ωL_0 и ωC_0 .

У линии без потерь волновое сопротивление чисто активное и не зависит от частоты

$$Z_c = \sqrt{\frac{j\omega L_0}{j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_c; \theta = 0 \quad (16.26)$$

Коэффициент затухания равен нулю

$$\alpha = 0 \quad (16.27)$$

а коэффициент фазы пропорционален частоте

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} \quad (16.28)$$

Фазовая скорость в линии без потерь постоянна

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \quad (16.29)$$

Следовательно, *линия без потерь не искажает сигналов*.

Фазовая скорость в воздушной линии совпадает со скоростью электронных волн в вакууме (воздухе), т.е. наибольшая

$$C = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^5 \text{ км/с.} \quad (16.30)$$

Здесь ϵ_0, μ_0 - электрическая и магнитная постоянные

Для кабеля фазовая скорость равна скорости электромагнитных волн в диэлектрике, т.е. меньше скорости света в вакууме в $\sqrt{\varepsilon\mu}$ раз (ε - диэлектрическая проницаемость, μ - магнитная проницаемость)

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (16.31)$$

Уравнения однородной линии с гиперболическими функциями от комплексного аргумента заменяются для линии без потерь уравнениями с круговыми функциями от вещественного аргумента.

Если заданы \dot{U}_2 и \dot{I}_2

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \cos \beta y + j \dot{I}_2 Z_c \sin \beta y, \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 \cos \beta y + j \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sin \beta y. \end{aligned} \quad (16.32)$$

Если заданы \dot{U}_1 и \dot{I}_1 то получим

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1 \cos \beta x + j \dot{I}_1 Z_c \sin \beta x, \\ \dot{I} &= \dot{I}_1 \cos \beta x + j \frac{\dot{U}_1}{Z_c} \sin \beta x. \end{aligned} \quad (16.33)$$

Напряжение и токи в линии без потерь, как и в общем случае, можно представить в виде двух волн: прямой и обратной. Только амплитуда каждой волны остается постоянной вдоль всей линии, т.к. потерь энергии нет ($\alpha = 0$). Напряжение и ток каждой волны совпадают по фазе, т.к. волновое сопротивление часто активное ($\theta = 0$).

Входное сопротивление линии без потерь

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_c \frac{Z_l + j Z_c \operatorname{tg} \beta \ell}{Z_c + j Z_l \operatorname{tg} \beta \ell} = Z_c \frac{1 + N e^{-j 2 \beta \ell}}{1 - N e^{-j 2 \beta \ell}}. \quad (16.34)$$

16.6.1 Согласованная нагрузка линии без потерь

При согласованной (активной) нагрузке $Z_l = Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$. Используя

(16.33), учитывая, что $\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_l}$, получим

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{U}_2 \cos \beta y + j \dot{U}_2 \sin \beta y = \dot{U}_2 e^{j\beta y}, \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 \cos \beta y + j \dot{I}_2 \sin \beta y = \dot{I}_2 e^{j\beta y}.\end{aligned}\quad (16.35)$$

Из (16.35) видно, что действующие значения напряжения и тока в произвольном сечении линии одинаковые и не зависят от расстояния

$$\begin{aligned}U(y) &= U_2, \\ I(y) &= I_2\end{aligned}\quad (16.36)$$

Обратных (отраженных) волн нет ($N = 0$), в линии присутствуют прямые (бегущие) волны (рис. 16.6).

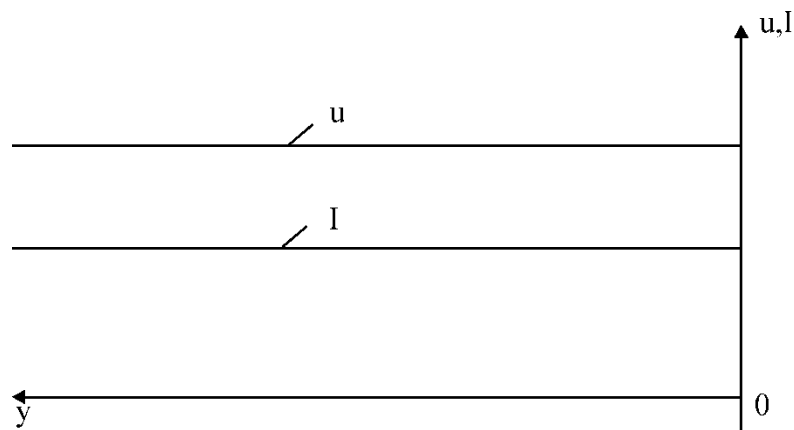


Рисунок 16.6 Распределение действующих значений напряжения и тока в линии без потерь.

16.6.2 Стоячие волны

Чем значительней отличается сопротивление нагрузки Z_n от волнового сопротивления Z_c , тем заметнее становится отраженная волна.

Рассмотрим режимы, при которых активная мощность в конце линии без потерь равна нулю. Эта может быть при:

- 1) Холостом ходе,
- 2) Коротком замыкании,
- 3) Часто реактивной нагрузке.

В этих случаях падающая волна полностью отражается от конца линии (от нагрузки).

При холостом ходе $\dot{I}_2 = 0$, $Z_f = \infty$ из (16.35) следует

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \cos \beta y \\ \dot{I} &= j \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sin \beta y \end{aligned} \quad (16.37)$$

Мгновенные значения напряжения и тока

$$\begin{aligned} U(t, y) &= U_{2m} \cos \beta y \sin \omega t, \\ i(t, y) &= \frac{U_{2m}}{Z_c} \sin \beta y \sin(\omega t + 90^\circ). \end{aligned} \quad (16.38)$$

Уравнение (16.38) представляет собой *уравнение стоячих волн*.

Стоячей волной называется процесс, получающийся от наложения прямой и обратной волн с одинаковыми амплитудами.

Распределение действующих значений напряжения и тока вдоль линии при холостом ходе показано на рис. 16.7.

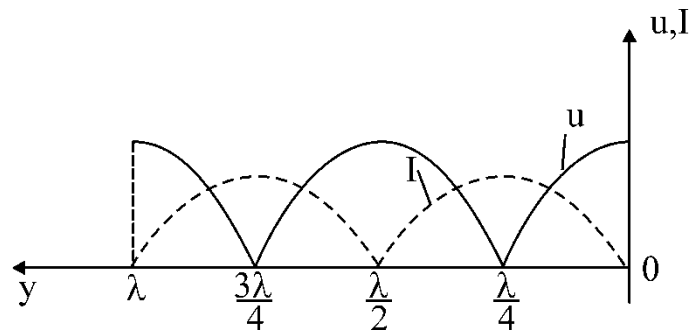


Рисунок 16.7 Распределение действующих значений напряжения и тока вдоль линии при холостом ходе

Максимальные значения напряжения и тока называют *пучностями*, нули напряжения и тока — *узлами*. Узлы и пучности напряжения и тока неподвижны. Узлы тока совпадают с пучностями напряжения и наоборот.

При коротком замыкании линии $\dot{U}_2 = 0$, $Z_i = 0$ из (8.35)

следует

$$\begin{aligned} \dot{U} &= j \dot{I}_2 Z_c \sin \beta y \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 \cos \beta y \end{aligned} \quad (16.39)$$

Напряжение и ток опять образуют стоячие волны. Из (16.39) определим распределение действующих значений напряжения и тока вдоль линии

$$\begin{aligned} U &= I_2 Z_c \sin \beta y \\ I &= I_2 \cos \beta y. \end{aligned} \quad (16.40)$$

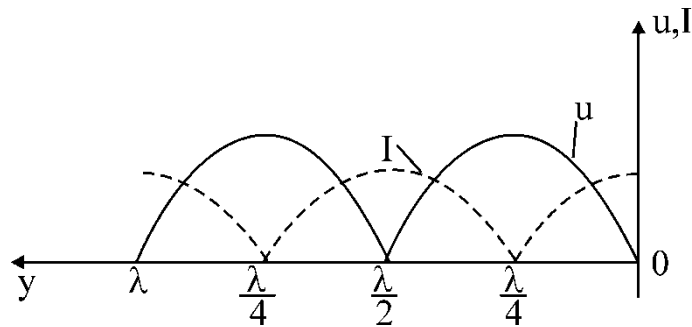


Рисунок 16.8 Распределение действующих значений напряжения и тока вдоль линии при коротком замыкании

Графики действующих значений $U(y)$ и $I(y)$ приведены на рис.16.8.

Сдвиг по фазе между напряжением и током в любой точке линии по прежнему составляет 90° .

В линии с чисто реактивной (индуктивной или активной) нагрузкой также возникают стоячие волны, так как линия без потерь с реактивной нагрузкой не поглощает энергии. Поэтому амплитуда отраженной волны равна амплитуде падающей.

Емкостное и индуктивное сопротивления можно заменить отрезком короткозамкнутой или разомкнутой линии. Действительно, входное сопротивление короткозамкнутой или разомкнутой линии без потерь в зависимости от ее длины имеет индуктивный или емкостный характер, причем величина входного сопротивления изменяется от нуля до бесконечности. Всегда длину отрезка короткозамкнутой или разомкнутой линии можно подобрать так, чтобы его входное сопротивление равнялось сопротивлению нагрузки.

Например, длина отрезка короткозамкнутой линии ℓ , которым можно заменить индуктивность L , определится из уравнения :

$$\omega L = Z_c \operatorname{tg} \beta \ell.$$

Здесь ωL -сопротивление индуктивной нагрузки; $Z_c \operatorname{tg} \beta \ell$ - входное сопротивление отрезка короткозамкнутой линии (получено из общего выражения для входного сопротивления линии без потерь).

Если индуктивность L , заменить отрезком разомкнутой линии, то его длина ℓ' определится из уравнения

$$\omega L = -Z_c \operatorname{ctg} \beta \ell'.$$

Аналогично можно получить формулы для определения длины отрезка короткозамкнутой или разомкнутой линии при замене им емкостной нагрузки.

16.6.3 Произвольная нагрузка линии без потерь

Рассмотрим режим линии без потерь при произвольном сопротивлении нагрузки $Z_H \neq Z_c$.

В этом случае, как при холостом ходе и коротком замыкании, напряжение и ток в любой точке линии можно представить состоящими из двух волн (прямой и обратной). Но при этом действующие значения напряжения и тока обратной волны не равны действующим значениям напряжения и тока прямой волны.

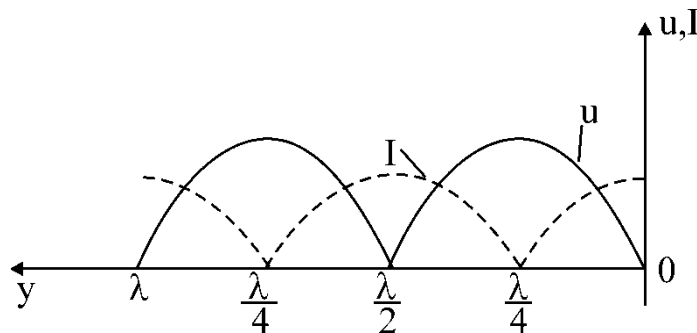


Рисунок 16.9 Распределение действующих значений напряжения и тока вдоль линии при произвольной нагрузке.

Отношение минимального напряжения к максимальному оценивает степень согласования нагрузки и называется *коэффициентом бегущей волны*.

$$K_\sigma = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{U_{2np} - U_{2обр}}{U_{2np} + U_{2обр}} = \frac{1-n}{1+n},$$

где n - модуль коэффициента отражения

Обратную величину называют *коэффициентом стоячей волны*

$$K_c = \frac{1}{K_\sigma} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{1+n}{1-n}.$$

Коэффициент бегущей волны в зависимости от согласованности нагрузки может принимать значения от 0 ($U_{\min} = 0$ при холостом ходе и коротком замыкании) до 1 ($U_{\min} = U_{\max} = U$ при согласованной нагрузке). Соответственно коэффициент стоячей волны изменяется в пределах от ∞ до 1.