Глава 3. Непрерывность функции одной переменной.

§1. Непрерывность функции в точке

Существует несколько определений непрерывности функции одной переменной в точке, каждое из которых используется в определенном случае.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 если :

1) определена в точке x_0 и в точках некоторой ее окрестности;
2) имеет в этой точке конечные односторонние пределы, равные значению функции в точке x_0 , т.е. если

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 если:

1) определена в точке x_0 и в точках некоторой ее окрестности;
2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 3. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке и в некоторой ее окрестности и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из выполнения неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует выполнимость неравенства $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, т.е. для любых x из δ-окрестности точки x_0, $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, значения функции находятся в ε-окрестности точки $f(x_0)$, $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$.

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке и в некоторой ее окрестности и бесконечно малому приращению Δx аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение Δy функции, т.е.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Приведенные определения эквивалентны. Использование разных из них позволяет упрощать решения различных задач.

Из определения 2, в частности, следует, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x),$$

т.е. если функция непрерывна, то **предел функции равен функции предела**.

Определение 5. Если функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0)$ слева от нее и

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0),$$

то функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке x_0 слева.*

Определение 6. Если функция $y = f(x)$ определена в точке *x_0* и в некоторой окрестности $(x_0,\ x_0 + \delta)$ справа от нее и

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0),$$

то функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке x_0 справа.*

Определение 7. Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в точке x_0 и слева и справа, то она называется *непрерывной в этой точке.*

§2. Свойства функций, непрерывных в точке

Свойства функций, непрерывных в точке x_0, можно сформулировать в виде ряда теорем.

Теорема 1. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке x_0, то непрерывны в этой точке также их алгебраическая сумма $f_1(x) \pm f_2(x)$, произведение $f_1(x) \cdot f_2(x)$ и при условии $f_2(x_0) \neq 0$ частное $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$.

Эта теорема вытекает из аналогичной теоремы о пределах.

Примечание. Для алгебраической суммы и произведения теорема 1 распространяется на любое конечное число функций.

Теорема 2. Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Согласно непрерывности функции $u = \varphi(x)$ имеем $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, т.е. при $x \to x_0$ также и $u \to u_0$.

Поэтому, в силу непрерывности функции $f(u)$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = \lim\limits_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) = f(\varphi(x_0))$, что и доказывает теорему 2.

Таким образом, сложная функция $y = f(\varphi(x))$, образованная из двух непрерывных функций $f(u)$ и $\varphi(x)$, является непрерывной функцией, т.е. суперпозиция двух непрерывных функций есть непрерывная функция.

Имеет место и следующая теорема.

Теорема 3. Если $f(x)$ — непрерывная функция, имеющая однозначную обратную функцию, то обратная функция тоже непрерывна.

Вместо доказательства ограничимся следующим наглядным соображением: если график функции $y = f(x)$— непрерывная кривая, то график обратной к ней функции тоже непрерывная кривая.

Теорема 4. Все основные элементарные функции непрерывны там, где они определены.

Доказательство. Постоянная функция $y=C$ непрерывна при любом значении $x = x_0$, так как $\Delta y = C - C = 0$, и, следовательно, $\lim\limits_{\Delta\to 0} \Delta y = 0$. Так как функция $y=x$ непрерывна при любом x, то согласно теореме 1 степенная функция $y = x^n$, где n — натуральное число, также непрерывна при любом x. Непрерывность тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$ имеет место всюду; tgx и $ctgx$ непрерывны всюду, где они определены как отношения двух непрерывных функций $\sin x$ и $\cos x$.

Можно доказать непрерывность $y = x^\alpha$ (α —действительное) и других основных элементарных функций там, где они определены.

Из теорем 1, 2 и 4 вытекает.

Следствие. Всякая элементарная функция непрерывна во всех точках, принадлежащих ее области определения.

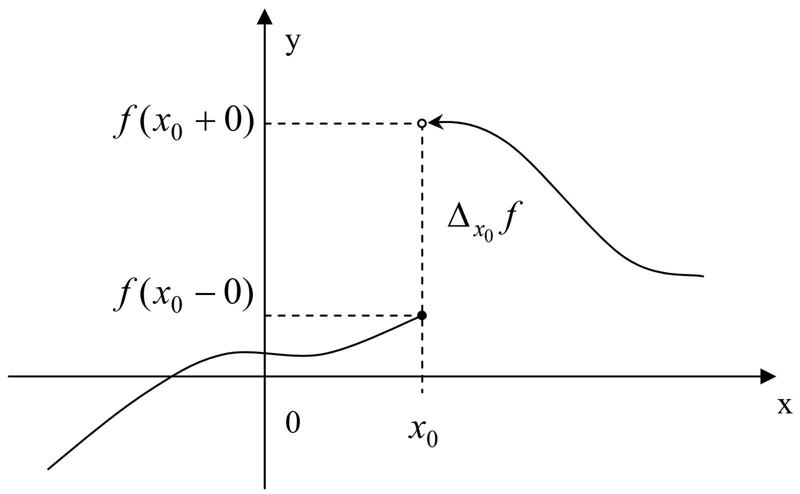
Теорема 5. Функция $f(x)$, непрерывная в точке x_0 и не равная нулю в этой точке, сохраняет знак $f(x_0)$ в некоторой окрестности точки x_0.

§3. Точки разрыва функций и их классификация

Определение 1. Точка x_0 называется *точкой разрыва функции* $f(x)$, если в ней не выполняются условия непрерывности.

Определение 2. Точка x_0 разрыва функции $y = f(x)$ называется *точкой разрыва первого рода*, если односторонние пределы функции в этой точке существуют и конечны.

Определение 3. Разность $f(x_0+0) - f(x_0-0) = \Delta_{x_0} f$ называется *скачком функции* $f(x)$ в точке x_0.



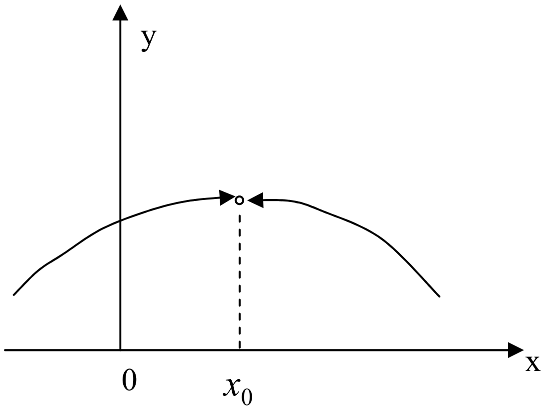
Определение 4. Если

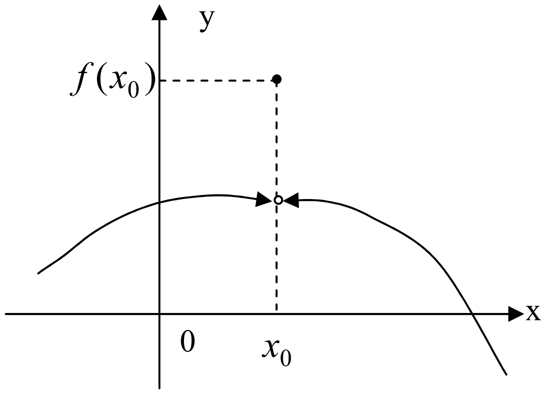
$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0), \text{ то есть,}$$

1. предел слева существует и конечен,
2. предел справа существует и конечен.
3. они равны между собой,

но не равны значению функции в точке, то такая точка называется *точкой устранимого разрыва.*

Разрыв можно устранить либо доопределив функцию, либо переопределив ее в точке x_0.





<u>Определение 5</u>. Точка x_0 разрыва функции называется *точкой разрыва второго рода,* если хотя бы один из односторонних пределов в этой точке не существует или бесконечен.

Точки разрыва могут принадлежать, могут и не принадлежать области определения функции.

<u>Определение 6</u>. Функция, непрерывная в каждой точке интервала *(a,b),* называется непрерывной на этом интервале.

§4. Свойства функций, непрерывных на сегменте

<u>Определение1</u>..Функция $f(x)$ называется непрерывной на сегменте $[a, \ b]$, если она непрерывна на интервале $(a, \ b)$ и, кроме того, в точке a непрерывна справа, а в точке b – слева.

Свойства функций, непрерывных на сегменте, сформулируем в виде ряда теорем без доказательств.

Первая теорема называется теоремой Вейерштрасса о достижении функцией своего наибольшего и наименьшего значений. Карл Вейерштрасс (1815-1897) – немецкий математик.

<u>Теорема 1</u>. Функция $f(x)$, непрерывная на сегменте $[a, \ b]$, достигает в этом сегменте своего наибольшего и наименьшего значений, т.е. существуют такие точки x_1 и x_2 отрезка $[a, \ b]$, что для всех x из $[a, \ b]$ выполняются неравенства $f(x_1) \geq f(x)$ и $f(x_2) \geq f(x)$.

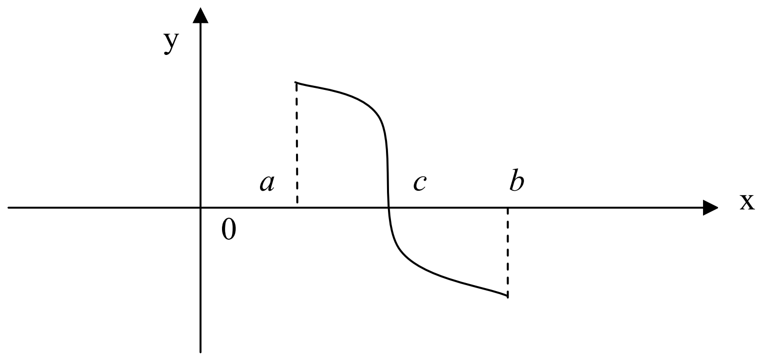
<u>Следствие.</u> Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, \ b]$, то она ограничена на нем, т.е. существует такое положительное число M, что $|f(x)| \le M$ при $a \le x \le b$.

Доказательство. Обозначим через m и $\widetilde{m}$ соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на сегменте $[a, \ b]$. Тогда для любого x, принадлежащего сегменту $[a, \ b]$, имеют место неравенства $\widetilde{m} \le f(x) \le m$. Пусть M – наибольшее из чисел $|\widetilde{m}|$, $|m|$. Тогда $|f(x)| \le M$ при $a \le x \le b$.

Вторая теорема называется о корнях функции.

<u>Теорема 2</u>. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, \ b]$ и на концах его принимает значения разных знаков, то между точками a и b найдется точка *c*, такая, что $f(c) = 0$.

Эта теорема имеет простой геометрический смысл: если непрерывная кривая переходит с одной стороны оси *Ox* на другую, то она пересекает ось *Ox*.



Теорема 3 называется теоремой Коши о промежуточных значениях. Огюстен Коши (1789-1857) –французский математик.

<u>Теорема 3</u>. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, \ b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тогда для любого числа *C*, заключенного между *A* и *B*, найдется внутри этого сегмента такая точка *c*, что $f(c) = C$.

Эта теорема геометрически очевидна. Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Пусть $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тогда прямая $y = C$, где *C* любое число, заключенное между *A* и *B*, пересечет его по крайней мере в одной точке.

Таким образом, непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, обязательно проходит через все промежуточные значения.