Глава 4. Основные теоремы дифференциального исчисления. Раскрытие неопределенностей.

§1.Основные теоремы дифференциального исчисления.

<u>**Теорема Ферма**</u> (Пьер Ферма (1601-1665) – французский математик).
Если функция $y = f(x)$**:**

1) **определена в интервале** (a,b)**,**
2) **достигает в некоторой точке** ***C*** **этого интервала наибольшего (или наименьшего) значения ,**
3) **существует производная** $f'(C)$**,**

тогда следует, что $f'(C) = 0$

Доказательство. Допустим, что в точке C функция $y = f(x)$ достигает наибольшего значения. Придадим значению С достаточно малое приращение Δx. Тогда $f(C) > f(C + \Delta x)$. Отсюда при $\Delta x < 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(C + \Delta x) - f(C)}{\Delta x} > 0 \text{, и, следовательно,}$$

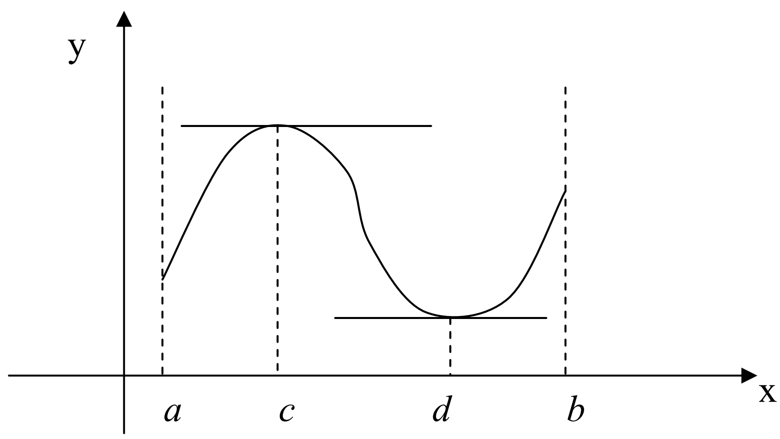
$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(C) \geq 0 \qquad (1)$$

При $\Delta x > 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(C) \leq 0 \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) следует, что $f'(C) = 0$.

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой C параллельна оси абсцисс.



Примечание 1. Все условия теоремы Ферма существенны. Например, функция $y=\sin x$ в промежутке $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ достигает в точке $x_0=0$ наименьшего значения, но ее производная в этой точке равна единице.
Производная будет равна $y'=\cos x$. Согласно теоремы Ферма точка, в которой функция принимает свое наименьшее значение, должна принадлежать открытому интервалу. Т.к. в данном случае точка x=0, в которой функция принимает наименьшее значение является граничной, то $y'=\cos x$ при x=0 равна 1 ($y'(0)=\cos 0=1$), что противоречит утверждению теоремы, согласно которой $y'(0)$ должно быть равно 0.

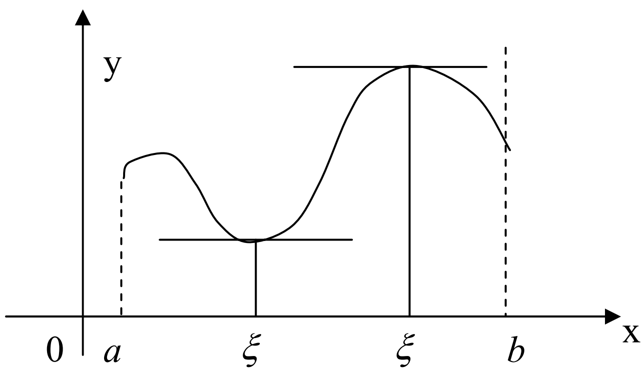
Теорема Ролля (Мишель Ролль (1652-1719) – французский математик).
Если функция $y=f(x)$:

1) **непрерывна на сегменте [*a;b*]**
2) **дифференцируема в интервале (*a;b*),**
3) **принимает на концах этого интервала равные значения $f(a)=f(b)$,**

то в интервале (*a; b*) существует точка *c*, такая, что выполняется равенство $f'(c)=0$.

Доказательство. Так как функция $y=f(x)$ непрерывна на сегменте [*a;b*], то, как известно, она принимает на этом сегменте как свое наибольшее значение *M*, так и свое наименьшее значение *m*. Возможны два случая:
1) *M*=*m*, тогда $f(x)$ постоянна на [*a;b*] : в самом деле, неравенство $m \le f(x) \le M$ в этом случае дает $f(x)=M$ для всех *x* из [*a;b*].Поэтому в любой точке интервала (*a;b*) $f'(x)=0$
2) $M>m$. Так как $f(a)=f(b)$, то хоть одно из значений M или m достигается в некоторой точке c ($a<c<b$). Следовательно, согласно теореме Ферма $f'(c)=0$. Теорема доказана.

Геометрически теорема Ролля означает следующее: если крайние ординаты кривой $y=f(x)$ равны, то на кривой найдется точка, где касательная параллельна абсцисс.



Примечание 2. Условия теоремы Ролля являются существенными. Так, например, для функции $f(x)=|x|$, $-1\le x\le 1$, выполнены все условия теоремы Ролля, кроме существования производной в точке $x=0$. Одновременно с этим замечаем, что в интервале $(-1,\ 1)$ нет такой точки, где производная равна нулю: $f'(x)=-1$, если $-1<x<0$, $f'(x)=1$, если $0<x<1$, а при $x=0$ производная $f'(x)$, как уже отмечалось, не существует.

Теорема Лагранжа (Жозеф-Луи Лагранж (1736-1813)- французский математик и механик).

Если функция $y=f(x)$:

1) **непрерывна на сегменте [*a; b*] ,**
2) **дифференцируема в интервале (*a; b*),**

то в интервале (*a; b*) найдется такая точка *c*, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad \textbf{(3)}$$

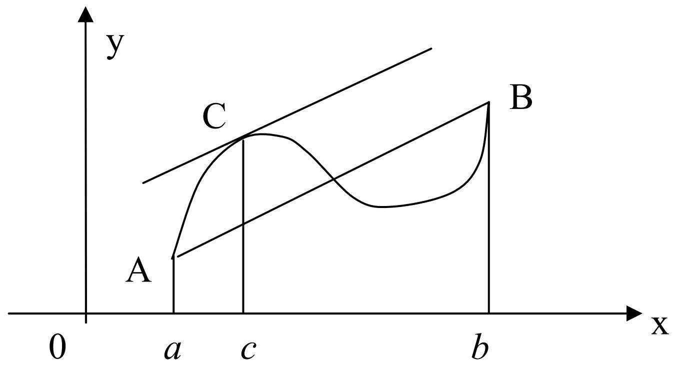
Доказательство.

Положим
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\lambda \qquad (4)$$

и рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\lambda(x-a)$.

Эта функция удовлетворяет первым двум условиям теоремы Ролля как алгебраическая сумма трех непрерывных и дифференцируемых функций. При этом $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. Следовательно, к функции $\varphi(x)$ применима теорема Ролля, т.е. существует точка c, $a<c<b$, такая, что $\varphi'(c)=0$. Но $\varphi'(x)=f'(x)-\lambda$. Поэтому $f'(c)-\lambda=0$, или $\lambda=f'(c)$. Отсюда с учетом формулы (4) получаем искомое равенство (3).

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл: на графике функции $y=f(x)$ между точками *A* и *B* есть внутренняя точка *C*, такая, что касательная к нему в точке *C* параллельна хорде *AB*. В самом деле, левая часть равенства (3) – угловой коэффициент хорды *AB*, а правая – угловой коэффициент касательной к графику в точке *C*.



Примечание 3. Теорема Лагранжа является обобщением теоремы Ролля, так как если $f(a)=f(b)$, то из равенства (3) следует $f'(c)=0$.

Формула (3) называется формулой Лагранжа или формулой конечных приращений. Из нее получаем $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$. Наконец, взяв вместо a и b соответственно x_0 и x и обозначив $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, формулу Лагранжа запишем так:

$$\Delta y = f'(c)\Delta x$$

Из теоремы Лагранжа вытекает

Следствие. Если $f'(x)=0$ в интервале $(a,\ b)$, то в этом интервале функция $f(x)$ постоянна.

Доказательство. Для любых значений x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ из рассматриваемого интервала выполняется теорема Лагранжа, т.е. $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$, где $x_1 < c < x_2$. Но $f'(c)=0$, а потому и

$f(x_2)-f(x_1)=0$, т.е. $f(x_2)=f(x_1)$, а это значит, что $f(x)=Const$ в интервале $(a,\ b)$.

Теорема Коши. Если функции $y=f(x)$ **и** $y=g(x)$**:**

1) **Непрерывны на отрезке [*a;b*];**
2) **Дифференцируемы по *x* в интервале (*a;b*)**
3) $g'(x) \neq 0$ **в этом интервале,**

то в интервале (*a;b*) существует точка с, такая, что имеет место равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{5}$$

Доказательство. Отметим, что $g(b)-g(a)\neq 0$, т.к. в противном случае имели бы, что $g(b)=g(a)$, и тогда по теореме Ролля $g'(c_1)=0$, где c_1- некоторая точка из интервала (*a; b*), что противоречит условию 3.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - \lambda(g(x)-g(a)),$$

где $\lambda = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Имеем $\Phi(b)=\Phi(a)=0$

Функция $\Phi(x)$ удовлетворяет и остальным условиям теоремы Ролля. В самом деле, $\Phi(x)$ непрерывна на [*a;b*], т.к. непрерывны на [*a;b*] $f(x)$ и $g(x)$; производная $\Phi'(x)$ существует в (*a;b*), она равна:

$$\Phi'(x) = f'(x) - \lambda g'(x)$$

Следовательно, в интервале $(a;b)$ существует такая точка с, что

$$\Phi'(c) = 0 \quad \text{или} \quad f'(x) - \lambda g'(x) = 0, \text{ откуда} \qquad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lambda .$$

Подставляя в последнее равенство значение λ, получаем искомое равенство (5).

Примечание. Заметим, что теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши, соответствующим $g(x) \equiv x$.

§2. Раскрытие неопределенностей

Отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. Раскрыть эту неопределенность - это значит найти $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, если он существует.

Теорема 1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в окрестности точки $x = a$, за исключением, быть может, самой точки *a*, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, $g(x)$ и $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности. Тогда если существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и имеет место равенство

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} . \tag{1}$$

Доказательство. Будем считать, что a – конечное число. (В случае $a = \infty$ см. ниже замечание 3.). Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = a$, полагая $f(a) = g(a) = 0$. Тогда эти функции будут непрерывны в точке a. Рассмотрим отрезок $[a, x]$, где $x > a$ или $x < a$. На $[a, x]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, а на (a, x) дифференцируемы, поэтому по теореме Коши существует точка $\xi \in (a, x)$ такая, что

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{или} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \text{ так как } \xi \in (a, x)$$

Когда $x \to a$, то и $\xi \to a$, поэтому в силу условия теоремы имеем

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{2}$$

при условии, что предел в правой части равенства существует.

Этим теорема доказана.

Замечание 1. Если предел справа в (1) не существует, то предел слева может существовать.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0,$$

Однако $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ не существует.

Замечание 2. Если выражение $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ представляет неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ и функции $f'(x)$, $g'(x)$ удовлетворяют условию теоремы 1, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

При этом эти равенства надо понимать в том смысле, что если существует третий предел, то существует и второй и первый.

Теорема 2 $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. **Пусть**

1) $f(x)$ **и** $g(x)$ **определены,**

2) дифференцируемы в окрестности точки $x=a$**,**

3) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$**,** $g(x)$ **и** $g'(x)\neq 0$ **в этой окрестности.**

Тогда если

$$\exists\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},\ \textbf{то}\ \exists\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

и

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство этой теоремы мы не приводим в силу его сложности.

Замечание 3. Если $a=\infty$, то замена $x={}^{1}\!/_{t}$ сводит дело к $a=0$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left({}^{1}\!/_{t}\right)}{g\left({}^{1}\!/_{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(f\left({}^{1}\!/_{t}\right)\right)'}{\left(g\left({}^{1}\!/_{t}\right)\right)'}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left({}^{1}\!/_{t}\right)\left(-{}^{1}\!/_{t^2}\right)}{g'\left({}^{1}\!/_{t}\right)\left(-{}^{1}\!/_{t^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Неопределенности вида $0 \cdot \infty$ ($\left(f(x) \cdot g(x)\right)$, $f(x) \to 0$, $g(x) \to \infty$ при $x \to a$) сводятся к неопределенностям вида $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$ следующим образом:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{g}{1/f} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \text{ или } f(x) \cdot g(x) = \frac{f}{1/g} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Пример 2.

$\lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha} \ln x = 0 \quad \forall \alpha > 0$;

$$\lim_{x \to 0} x^{\alpha} \ln x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \to 0} x^{\alpha} = 0.$$

Неопределенности вида 0^0**;** ∞^0**;** 1^{∞} для выражения f^g сводятся к неопределенности $0 \cdot \infty$. Согласно определению этой функции $f^g = e^{g \ln f}$ ($f > 0$).

Если $\lim\limits_{x \to a} g \ln f = k$, то $\lim\limits_{x \to 0} f^g = e^k$.

Неопределенность вида $\infty - \infty$ ($f(x) - g(x)$, $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ при $x \to a$) сводится к неопределенности $\frac{0}{0}$. Легко видеть, что

$$f - g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f} \cdot \frac{1}{g}} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

§3. Формула Тейлора для многочлена

Рассмотрим произвольный многочлен степени n:

$$P_n(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k,$$

где, таким образом, b_k - постоянные числа- коэффициенты многочлена. Пусть x_0 - любое фиксированное число. Полагая $x = (x - x_0) + x_0$, получим

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k [(x - x_0) + x_0]^k, \tag{1}$$

откуда, возводя в степени квадратные скобки и приводя подобные по степеням $x - x_0$, получим выражение для $P_n(x)$ в следующей форме:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k, \qquad (2)$$

называемое *разложением многочлена* $P_n(x)$ *по степеням* $(x - x_0)$. Здесь $a_0, a_1, \ldots, a_n$ -числа, зависящие от b_i и x_0, являющиеся коэффициентами разложения P_n по степеням $x - x_0$.

Например, $a_0 = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x_0^n$. Из (1) очевидно, что $P_n(x)$ на самом деле от x_0 не зависит.

Найдём последовательные производные $P_n(x)$:

$$\left.\begin{array}{l}
P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1}, \\
P_n''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - x_0) + \ldots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_n^{(k)}(x) = 1 \cdot 2 \ldots k a_k + \ldots + n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n(x - x_0)^{n-k}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_n^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \ldots n a_n.
\end{array}\right\} \qquad (3)$$

Производные порядка выше n равны нулю. Полагая в формулах (2) и (3) $x = x_0$, получаем

$$P_n(x_0) = a_0, \qquad P_n'(x_0) = a_1,$$

$$P_n''(x_0) = 1 \cdot 2a_2, \ldots, P_n^{(k)}(x_0) = k! a_k, \ldots, P_n^{(n)}(x_0) = n! a_n$$

или

$$a_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n), \qquad (4)$$

где учитываем, что $0! = 1, \quad P_n^{(0)}(x) = P_n(x)$.

Формулы (4) показывают, что один и тот же многочлен $P_n(x)$ степени n можно разложить по степеням $x - x_0$ единственным образом, т.е. если для всех значений x

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \beta_k' (x - x_0)^k,$$

где β_k и β_k' -постоянные, то $\beta_k = \beta_k' \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$. Ведь как числа β_k, так и β_k' вычисляются по одной и той же формуле (4).

В силу (4) формулу (2) можно переписать так:

$$\begin{array}{l}
P_n(x) = P_n(x_0) + \dfrac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \dfrac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \\
= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.
\end{array} \qquad (2')$$

Формула $(2')$ называется *формулой Тейлора для многочлена* $P_n(x)$ *по степеням* $(x - x_0)$. Отметим, что правая часть $(2')$ фактически не зависит от x_0.

Пример 1. Пусть $P_n(x) = (a + x)^n$ и $x_0 = 0$. Тогда в силу $(2')$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_n^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

где в данном случае

$$P_n^k(x) = n(n-1)\ldots(n-k+1)(a+x)^{n-k},$$

$$P_n^{(k)}(0) = n(n-1)\ldots(n-k+1)a^{n-k},$$

и мы получили известную формулу *бинома Ньютона*

$$(a + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} a^{n-k} x^k. \qquad (5)$$

§4. **Формула Тейлора для функции с остаточным членом в форме Лагранжа.**

Рассмотрим теперь любую функцию $f(x)$, которая имеет непрерывные производные всех порядков до $(n+1)$-го в некоторой окрестности точки x_0. Мы можем формально составить многочлен

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \qquad (6)$$

который называется *многочленом Тейлора* n*-й степени или* n*-м многочленом Тейлора функции* f *по степеням* $x - x_0$.

Многочлен $Q_n(x)$ совпадает с функцией $f(x)$ в точке x_0, но для всех x он не равен $f(x)$ (если $f(x)$ не является многочленом степени n). Кроме того,

$$Q_n^{'}(x_0) = f'(x_0), \ldots, Q_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0). \qquad (7)$$

Положим

$$f(x) == Q_n(x) + r_n(x). \qquad (8)$$

Формула (8) носит название *формулы Тейлора для функции* $f(x)$; $r_n(x)$ называется *остаточным членом формулы Тейлора*,- подробнее, n*-м остаточным членом формулы Тейлора функции* f *по степеням* $x - x_0$. Функция $r_n(x)$ показывает, какую погрешность мы допускаем при замене $f(x)$ на многочлен Тейлора (6).

Найдем выражение для $r_n(x)$ через производную $f^{(n+1)}(x)$.

В силу (7) и (8) $r_n(x_0)=r_n^{'}(x_0)=\ldots=r_n^{(n)}(x_0)=0.$ Положим $\varphi(x)=(x-x_0)^{n+1}$. Ясно, что $\varphi(x_0)=\varphi^{'}(x_0)=\ldots=\varphi^{(n)}(x_0)=0$. Применяя теорему Коши к функциям $r_n(x)$ и $\varphi(x)$, будем иметь

$$\frac{r_n(x)}{\varphi(x)}=\frac{r_n(x)-r_n(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}=\frac{r_n^{'}(x_1)}{\varphi^{'}(x_1)}=\frac{r_n^{'}(x_1)-r_n^{'}(x_0)}{\varphi^{'}(x_1)-\varphi^{'}(x_0)}=\frac{r_n^{''}(x_2)}{\varphi^{''}(x_2)}=\ldots$$

$$\ldots=\frac{r_n^{(n)}(x_n)}{\varphi^{(n)}(x_n)}=\frac{r_n^{(n)}(x_n)-r_n^{(n)}(x_0)}{\varphi^{(n)}(x_n)-\varphi^{(n)}(x_0)}=\frac{r_n^{(n+1)}(x_{n+1})}{\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})}$$

$\left(x_1\in(x_0,x)\quad \text{и} \quad x_{k+1}\in(x_0,x_k),\quad k=1,2,\ldots n\right).$

Но $\varphi^{(n+1)}=(n+1)!,\quad r_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x).$

Следовательно,

$$r_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c), \tag{9}$$

где $c=x_{n+1}$-некоторая точка, лежащая между x_0 и x.

Таким образом, формулу (8) можно записать в виде (8')

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{8'}$$

Формула (8') называется формулой Тейлора с остаточным членом в *форме Лагранжа.*

Таким образом, доказана следующая теорема.

<u>Теорема.</u> Если функция f **имеет в окрестности точки** x_0 **непрерывную производную** $f^{(n+1)}(x)$**, то для любого** x **из этой окрестности найдется точка** $c\in(x_0,x)$ **такая, что** $f(x)$ **можно записать по формуле** (8')**.**

Если точка $x_0=0$, то формулу (8) называют *формулой Маклорена*.

Известны и другие формы остаточного члена формулы Тейлора. Так, большое значение имеет *форма Коши*

$$r_n(x)==\frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right), \tag{10}$$

где $\theta(0<\theta<1)$ зависит от n и x.

Уменьшая окрестность точки x_0, получим, что производная $f^{(n+1)}(x)$ есть непрерывная функция от x на *замкнутом* отрезке $[x_0-\delta,x_0+\delta]$. Но тогда она ограничена на этом отрезке:

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le M_n \qquad (x_0-\delta\le x\le x_0+\delta). \tag{11}$$

Здесь M_n-положительное число, не зависящее от указанных x, но, вообще говоря, зависящее от n. Тогда

$$|r_n(x)| \le \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \le \frac{M_n|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad (12)$$
$$|x-x_0|<\delta.$$

Неравенство (12) можно использовать в двух целях: для того чтобы исследовать поведение $r_n(x)$ при фиксированном n в окрестности точки x_0 и для того, чтобы исследовать поведение $r_n(x)$ при $n \to \infty$.

Из (12), например, следует, что при фиксированном n имеет место свойство

$$r_n(x) = o((x-x_0)^n), \qquad x \to x_0, \qquad (13)$$

показывающее, что если $r_n(x)$ разделить на $(x-x_0)^n$, то полученное частное будет продолжать стремится к нулю при $x \to x_0$.

В силу (13) из (8') следует:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n). \qquad (14)$$

Эта формула называется *формулой Тейлора с остаточным членом в смысле Пеано (Д. Пеано(1850-1932)* –итальянский математик). Она приспособлена для изучения функции f в окрестности точки x_0.

Теорема 2 (единственности). Пусть одна и та же функция f из различных соображений оказалась представленной в окрестности точки x_0 в виде

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n), \\ f(x) &= b_0 + b_1(x-x_0) + \ldots + b_n(x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n). \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Тогда

$$a_k = b_k \qquad (k = 0,1,\ldots,n). \qquad (16)$$

Доказательство. Если приравнять правые части (15) и перейти к пределу при $x \to x_0$, то получим $a_0 = b_0$. Теперь в этом равенстве можно сократить на $(x-x_0)$ $(x \ne x_0)$ и опять перейти к пределу при $x \to x_0$. Тогда получим $a_1 = b_1$. И так продолжаем до тех пор, пока получим $a_n = b_n$.

Пример 2. Мы знаем, что

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad (x \ne 1).$$

Поэтому

$$\psi(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+\frac{x^{n+1}}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+\underset{x\to 0}{o(x^n)}. \qquad (17)$$

С другой стороны, функция ψ имеет в окрестности точки $x=0$ производные любого порядка, поэтому для нее имеет место формула Тейлора с остатком в форме Пеано

$$\psi(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\psi^{(k)}(0)}{k!}x^k+\underset{x\to 0}{o(x^n)}. \qquad (18)$$

Сопоставляя формулы (17) и (18), на основании теоремы единственности получим

$$1=\frac{\psi^k(0)}{k!} \qquad (k=0,1,\ldots,n). \qquad (19)$$

§5. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора и Маклорена.

1.Пусть $f(x)=e^x$. Эта функция бесконечно дифференцируема (имеет производные любого порядка) на $(-\infty,\infty)$. При этом

$f^k(x)=e^x, \quad f^k(0)=1 \quad (k=0,1,\ldots), \quad f^{n+1}(c)=e^c.$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид

$$e^x=\sum\frac{x^k}{k!}+r_n(x), \quad r_n(x)=\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad c\in(0,x), \qquad (1)$$

где x может быть положительным и отрицательным. На отрезке $[-A,A], \quad A>0,$

$$|r_n(x)|\le\frac{e^A A^{n+1}}{(n+1)!}\to 0, \quad n\to\infty. \qquad (2)$$

Это показывает, что функция e^x разлагается на $[-A,A]$ в сходящийся к ней ряд Тейлора по степеням x (ряд Маклорена):

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}. \qquad (3)$$

Но $A>0$- произвольное число, поэтому это равенство имеет место на всей действительной оси $(x\in(-\infty,\infty))$. В данном случае $\left|f^{(k)}(x)\right|=\left|e^x\right|\le e^A \quad (k=0,1,2,\ldots)$ на отрезке $[-A,A]$.

Вычислим число e с точностью до 0,001. Имеем

$$e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+r_n(1), \qquad (4)$$

где

$$r_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} \qquad (0 < c < 1). \tag{5}$$

Надо подобрать n настолько большим, чтобы

$$r_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} \le 0{,}001 \qquad (0 < c < 1).$$

Так как $e^c < 3$, то для этого достаточно решить неравенство $3/(n+1)! \le 0{,}001$.

Оно выполняется при $n = 6$. Следовательно,

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{6!} = 2{,}718$$

с точностью до 0,001.

Примечание. Так как $1 < e^c < 3$ при $0 < c < 1$, то при $n > 2$ $e^c/(n+1) = \theta$, где $0 < \theta < 1$. Поэтому равенство (4) можно записать в следующем виде: $e = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\theta}{n!}$.

2.Пусть $y = \sin x$. Данная функция имеет производную любого порядка и

$$\left|(\sin x)^{(k)}\right| = \left|\sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1 \qquad \forall k.$$

Поэтому в силу теоремы 1 функция $\sin x$ разлагается в сходящийся к ней на $(-\infty, \infty)$ ряд Тейлора по степеням x:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Надо учесть, что

$$(\sin x)^{(n)}\Big|_{x=0} = \sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n = 2k, \\ (-1)^k & \text{при} \quad n = 2k+1. \end{cases}$$

Формула Тейлора функции $\sin x$ по степеням x имеет вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{\nu+1} \frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} + r_{2\nu}(x), \tag{6}$$

где

$$r_{2\nu}(x) = \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \sin\left(\theta x + (2\nu+1)\frac{\pi}{2}\right) \qquad (0 < \theta < 1).$$

Отсюда следует, что

$$r_{2\nu}(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^{2\nu})$$

и

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{\nu+1}\frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2\nu}).$$

3.Пусть $y = \cos x$. Совершенно аналогично можно получить, что

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$.

Имеем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \qquad (7)$$

поэтому

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{3!} + \frac{o(x^3)}{\underset{x\to 0}{x^3}} = -\frac{1}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(1) \to -\frac{1}{3!},$$

т.е.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

На самом деле в (7) остаток имеет вид $\underset{x\to 0}{o}(x^4)$. Но для наших целей достаточно $\underset{x\to 0}{o}(x^3)$. Надо иметь в виду, что если некоторая функция от x есть $\underset{x\to 0}{o}(x^4)$, то она есть также $\underset{x\to 0}{o}(x^3)$ (но вообще не наоборот!).

4. Пусть функция $f(x) = \ln(1+x)$ определена и сколько угодно раз дифференцируема для $x > -1$. Поэтому для нее формулу Тейлора можно написать для любого $n = 1,2,\ldots$ при $x > -1$. Так как

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!,$$

то формула Тейлора имеет вид

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + r_n(x).$$

Используя формы Лагранжа и Коши остаточного члена можно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \text{ при } -1 < x \le 1.$$

В самом деле, используя форму Лагранжа остаточного члена, имеем для $0 \le x \le 1$:

$$|r_n(x)| = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \le \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty, \ \ 0 < \theta < 1);$$

используя форму Коши остаточного члена, имеем для $-1 < x < 0$:

$$|r_n(x)| = \left| (-1)^n x^{n+1} \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \right| \le \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n \le \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \to 0 \ \ (n \to \infty, \ \ 0 < \theta < 1).$$

Поэтому функция $\ln(1+x)$ разлагается в указанном промежутке в ряд Тейлора по степеням x:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \quad (-1 < x \le 1).$$

1. Функция $f(x) = (1+x)^m$. Для этой функции

$f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$,

$f^{(n)}(0) = m(m-1)\ldots(m-n+1)$.

Формула Тейлора по степеням x имеет вид

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1`)}{n!}x^n + r_n(x).$$

Можно доказать, что при любом m

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0 \qquad (-1 < x < 1).$$

Поэтому для любого действительного m имеет место разложение функции $(1+x)^m$ в ряд Тейлора по степеням x

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!} x^k \quad (-1 < x < 1).$$

Если m натуральное, то функция $(1+x)^m$ есть многочлен. В этом случае $r_n(x) \equiv 0$ для $n > m$, и ряд справа в (8) представляет собой конечную сумму-многочлен Тейлора.