

# Переходные процессы в электрических цепях с сосредоточенными параметрами и методы их расчета

## Лекция 13

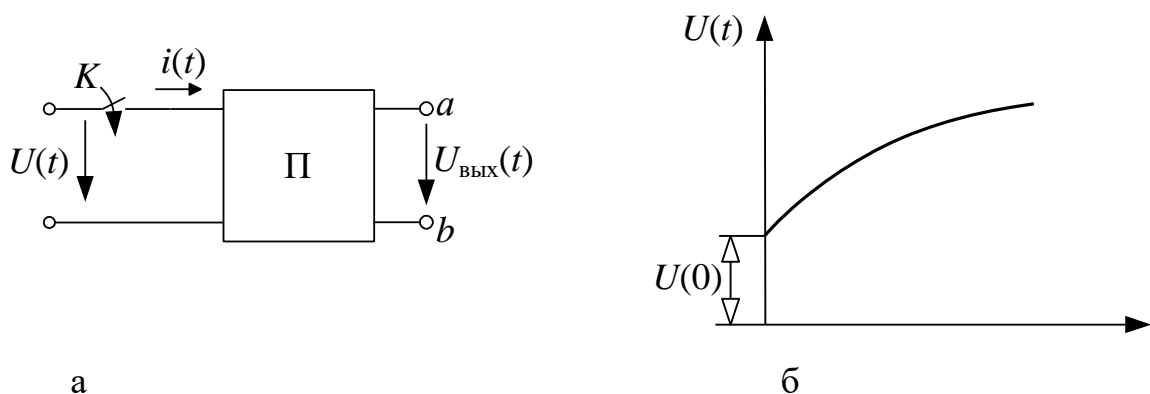
### Цель лекции №13:

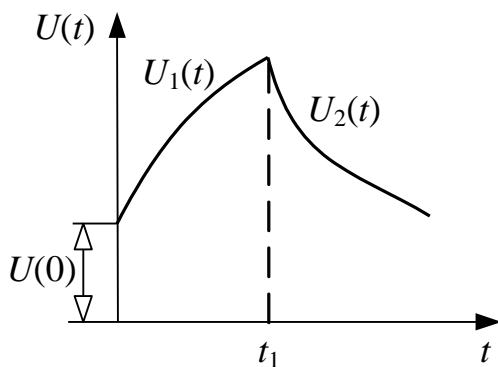
Ознакомившись с лекцией №13 по теории электрических цепей студент должен знать:

- 1 Область применения интеграла Дюамеля для расчета переходных процессов.
- 2 Владеть методикой расчета переходных характеристик по току и напряжению.
- 3 Рассчитывать переходной ток и напряжение на отдельных участках цепи, используя интеграл Дюамеля при воздействии на входе напряжения произвольной аналитической и кусочно-аналитической формы..

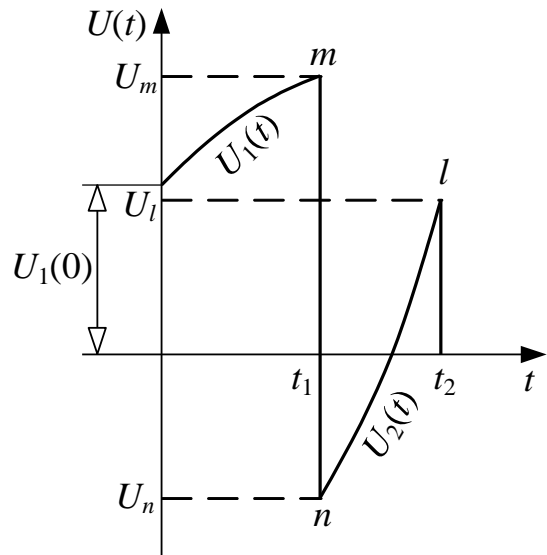
### 13.1 РАСЧЕТЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НАПРЯЖЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ. ИНТЕГРАЛ НАЛОЖЕНИЯ (ДЮАМЕЛЯ) И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ АНАЛИЗЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ.

Интеграл Дюамеля применяют для расчета переходного процесса (выходного сигнала) в линейной пассивной электрической цепи с нулевыми начальными условиями при воздействии на нее напряжения  $U(t)$ , имеющего произвольную аналитическую или кусочно - аналитическую форму (рис. 13.1)





в



г

Рисунок 13.1 Электрическая цепь (а) и воздействующие на нее напряжения произвольной формы (б, в, г)

Применение интеграла Дюамеля требует знания выражений для переходной характеристики цепи и входного воздействия (сигнала)  $f_{\text{вх}}(t)$ .

### 13.1.1 Расчет переходных характеристик цепи

*Переходной характеристикой цепи* называют реакцию цепи с нулевыми начальными условиями на единичное воздействие, т.е. на входной сигнал единичной величины.

Т.к. воздействие и реакция могут быть током или напряжением, то возможны четыре их сочетания. Различают переходную проводимость  $g(t)$ , переходное сопротивление  $z(t)$  и переходные характеристики передачи по току —  $h_i(t)$  и по напряжению  $h_u(t)$ .

Переходная характеристика цепи совпадает с переходным током или напряжением при подключении цепи к источнику постоянного напряжения (тока) единичной величины.

Например, при заданных  $R$  и  $L$ , требуется определить переходную проводимость  $g(t)$  и переходные функции по напряжению на участках с резистором и индуктивностью:  $h_{U_R}(t)$ ,  $h_{U_L}(t)$

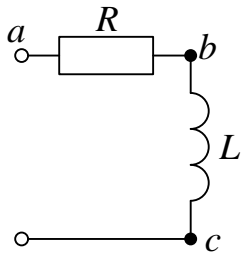


Рисунок 13.2 Цепь R – L для определения переходных характеристик по току и напряжению.

Известно, что при подключении такой цепи на постоянное напряжение  $U$  ток переходного режима определяется соотношением:

$$i(t) = \frac{U}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Напряжение на активном сопротивлении и на индуктивности определяют выражениями:

$$U_R(t) = U \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right);$$

$$U_L(t) = U e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Тогда 
$$g(t) = i(t)|_{U=1} = \frac{1}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right);$$

$$h_{U_R}(t) = U_R(t)|_{U=1} = \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right);$$

$$h_{U_L}(t) = U_L(t)|_{U=1} = e^{-\frac{R}{L}t}.$$

### 13.1.2 Применение интеграла Дюамеля

Таблица 13.1

$f_{\text{BX}}(t)$	$f_{\text{ВЫХ}}(t)$	$h(t)$	$f_{\text{ВЫХ}}(t) = f_{\text{BX}}(0)h(t) + \int_0^t f'_{\text{BX}}(\tau)h(t-\tau)d\tau$
$u$	$u$	$h_u(t)$ – переходная характеристика по напряжению	$u_{\text{ВЫХ}}(t) = u_{\text{BX}}(0)h_u(t) + \int_0^t u'_{\text{BX}}(\tau)h_u(t-\tau)d\tau$
$i$	$i$	$h_i(t)$ – переходная характеристика по току	$i_{\text{ВЫХ}}(t) = i_{\text{BX}}(0)h_i(t) + \int_0^t i'_{\text{BX}}(\tau)h_i(t-\tau)d\tau$
$u$	$i$	$g(t)$ – переходная проводимость	$i_{\text{ВЫХ}}(t) = u_{\text{BX}}(0)g(t) + \int_0^t u'_{\text{BX}}(\tau)g(t-\tau)d\tau$
$i$	$u$	$z(t)$ – переходное сопротивление	$u_{\text{ВЫХ}}(t) = i_{\text{BX}}(0)z(t) + \int_0^t i'_{\text{BX}}(\tau)z(t-\tau)d\tau$

Если напряжение, воздействующее на линейную пассивную цепь (Рис.13.1, а), является непрерывно изменяющейся функцией времени (рис. 13.1, б), то ток в любой ветви определяется формулой (13.1), а напряжение на отдельном участке формулой (13.2):

$$i(t) = U(0)y(t) + \int_0^t U'(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad (13.1)$$

$$U_{ab}(t) = U(0) \cdot h_u(t) + \int_0^t U'(\tau)h'_u(t-\tau)d\tau \quad (13.2)$$

где  $U(0)$  – входное напряжение в момент включения;

$U'(\tau)$  – производная по времени от входного напряжения, в которой  $t$  заменено на  $\tau$ ;

$y(t), h_u(t)$  – переходные проводимость и функция по напряжению соответственно;

$y(t-\tau), h_u(t-\tau)$  – переходные проводимость и функция по напряжению, в которых  $t$  заменено на  $t-\tau$ .

В зависимости от вида входного и выходного сигналов (см. табл. 13.1) выбирается соответствующая формула записи интеграла Дюамеля.

Если воздействующее на цепь напряжение изменяется хотя и непрерывно, но имеет разные аналитические выражения на отдельных интервалах времени (рис. 13.1, в), то ток и напряжение на каком-либо участке цепи в переходном режиме находятся для каждого интервала отдельно. Так, если воздействующее на цепь напряжение имеет два аналитических выражения  $U_1(t)$  и  $U_2(t)$  (рис. 13.1, в), то ток и напряжение на каком-либо участке в переходном режиме будут определяться двумя аналитическими выражениями. Одно из них будет соответствовать первому интервалу времени от 0 до  $t_1$ , когда входное напряжение изменяется по закону  $U_1(t)$ , другое будет соответствовать интервалу времени от  $t_1$  до  $\infty$ , когда входное напряжение изменяется по закону  $U_2(t)$ . В первом интервале времени  $0 \leq t < t_1$ , ток в какой-либо ветви и напряжение на каком либо участке цепи  $ab$  определятся формулами (13.3) и (13.4) соответственно:

$$i_1(t) = U_1(0)g(t) + \int_0^t U_1'(\tau)g(t-\tau)d\tau, \quad (13.3)$$

$$U_{ab1}(t) = U_1(0) \cdot h_u(t) + \int_0^t U_1'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau. \quad (13.4)$$

Во втором интервале времени  $t_1 \leq t < \infty$  ток в этой же ветви и напряжение на этом же участке цепи  $ab$  определятся формулами (13.5), (13.6):

$$i_2(t) = U_1(0)g(t) + \int_0^t U_1'(\tau)g(t-\tau)d\tau + \int_{t_1}^t U_2'(\tau)g(t-\tau)d\tau, \quad (13.5)$$

$$U_{ab2}(t) = U_1(0) \cdot h_u(t) + \int_0^t U_1'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau + \int_{t_1}^t U_2'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau \quad (13.6)$$

Следует особое внимание обратить на случай, когда воздействующее на цепь напряжение не только определяется несколькими аналитическими выражениями, но и претерпевает скачки в какие-то моменты времени. Так, если на цепь действует напряжение, имеющее форму, показанную на рис 13.1, г, то время переходного процесса разбивается на три интервала:

- 1) Интервал  $0 \leq t < t_1$ , не включая скачка напряжения от  $U_m$  до  $-U_n$ . В этом интервале ток в ветви и напряжение на участке цепи  $ab$  определяется по формулам (13.3) и 13.(4);
- 2) Второй интервал  $t_1 \leq t < t_2$ , не включая скачка от  $U_l$  до нуля. В этом интервале ток и напряжение в переходном режиме определяются формулами (13.7) и (13.8):

$$i_2(t) = U_1(0)g(t) + \int_0^{t_1} U'_1(\tau)g(t-\tau)d\tau - (U_m + U_n)g(t-t_1) + \int_{t_1}^t U'_2(\tau)g(t-\tau)d\tau; \quad (13.7)$$

$$U_{ab_2}(t) = U_1(0) \cdot h_u(t) + \int_0^{t_1} U'_1(\tau)h_u(t-\tau)d\tau - (U_m + U_n)h_u(t-t_1) + \int_{t_1}^t U'_2(\tau)h_u(t-\tau)d\tau. \quad (13.8)$$

*Примечание:* Определенные пределы у интегралов отражают окончание и начало их действия. Переходная характеристика в третьем члене выражения получила смещение на величину  $t_1$ , т.к. определяется реакция цепи для  $t > t_1$ . Во втором интеграле этого смещения вводить не нужно, т.к. оно учтено нижним пределом интегрирования.

Заметим также, что *нельзя использовать предыдущий результат расчета*, т.к. изменились пределы интегрирования.

- 3) Третий интервал  $t_2 \leq t < \infty$ . В этом интервале воздействующее напряжение равно нулю. Ток и напряжение  $U_{ab}$  переходного режима в этом интервале определяются выражениями (13.9) и (13.10):

$$i_2(t) = U_1(0)g(t) + \int_0^{t_1} U'_1(\tau)g(t-\tau)d\tau - (U_m + U_n)g(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} U'_2(\tau)g(t-\tau)d\tau - U_l g(t-t_2) + 0, \quad (13.9)$$

$$\begin{aligned}
U_{ab_3}(t) = & U_1(0) \cdot h_u(t) + \int_0^{t_1} U_1'(\tau) h_u(t - \tau) d\tau - (U_m + U_n) h_u(t - t_1) + \\
& + \int_{t_1}^{t_2} U_2'(\tau) h_u(t - \tau) d\tau - U_l h_u(t - t_2) + 0.
\end{aligned}
\tag{13.10}$$

### 13.1.3 Алгоритм расчета переходного процесса с помощью интеграла Дюамеля

1. Рассчитывают необходимые переходные характеристики цепи.
2. Записывают аналитически выражение входного сигнала  $f(t)$  на каждом интервале времени.
3. Определяют формулу интеграла Дюамеля для каждого интервала времени.
4. Записывают необходимые для решения интеграла функции, которые получают путем подстановки  $t = \tau$  или  $t - \tau$  в выражения  $g(t)$ ,  $h(t)$ ,  $h'(t)$ ,  $f(t)$ ,  $f'(t)$ .
5. Получают выражения для расчета выходного сигнала на каждом интервале, приводя их к более простому виду.
6. Делают оценку полученных результатов (верно – неверно).
7. Результаты расчета сводят в таблицу.
8. Строят в масштабе совмещенные графики входного и выходного сигналов (масштабы для сигнала и реакции выбирают так, чтобы графики получались соизмеримыми).