Четырехполюсники и многополюсники

Лекция 14

Цель лекции №14:

Ознакомившись с лекцией №14 по теории электрических цепей студент должен знать:

1. Определение и классификацию четырехполюсников;
2. Основные схемы замещения четырехполюсников;
3. Уравнения формы А четырехполюсника;
4. Условие обратимости четырехполюсника;
5. Методы определения обобщенных коэффициентов четырехполюсника;
6. Характеристические параметры четырехполюсника;
7. Характеризовать режим согласованной нагрузки и режим полного согласования четырехполюсника.
8. Уметь определять комплексную передаточную функцию четырехполюсника;
9. Рассчитывать, строить и анализировать АЧХ и ФЧХ четырехполюсника.
10. Виды соединений четырехполюсников и условие регулярного соединения.

14.1 ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ И СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ

14.1.1 Определение и классификация четырехполюсников

Четырехполюсник – электрическая цепь с двумя парами зажимов, включенная таким образом, что через каждую пару зажимов проходят попарно равные и противоположно направленные токи (рис. 14.1).

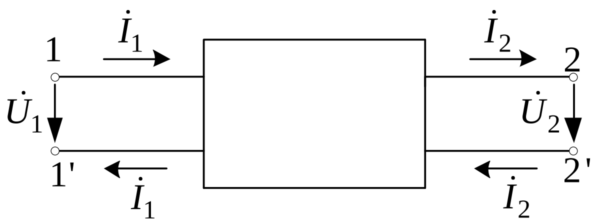


Рис. 14.1

Четырехполюсники имеют важное практическое значение. При анализе электромагнитных процессов в большинстве электротехнических устройств (линиях, усилителях, трансформаторах и т.п.) эквивалентные схемы могут быть представлены в виде четырехполюсников.

Различают следующие виды четырехполюсников:
– линейные и нелинейные;
– пассивные и активные;
– обратимые и необратимые;
– с сосредоточенными и распределенными параметрами.

Четырехполюсники, которые удовлетворяют теореме обратимости (взаимности), называются *обратимыми (взаимными)*. В противном случае четырехполюсники называются *необратимыми*. Пассивные четырехполюсники, содержащие только пассивные элементы, являются обратимыми, т. е. отвечают свойству обратимости: отношение напряжения на входе к току на выходе (передаточное сопротивление) не зависит от того, какая пара зажимов является входной и выходной.

На рис.14.1 показано общее представление четырехполюсника. Зажимы 1-1’ называются входными, зажимы 2-2’ – выходными. Напряжение U_1 и ток I_1 -входными и напряжение U_2 и ток I_2 – выходными.

14.1.2 Схемы замещения четырехполюсников

На рис. 14.2 представлены Г - образная (рис. 14.2, а), Т - образная (рис. 14.2, б), П - образная (рис. 14.2, в), мостовая (рис. 14.3, г) схемы четырехполюсника.

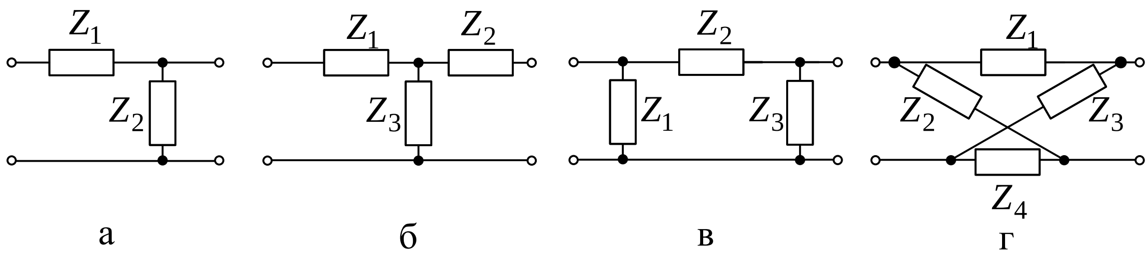


Рисунок *14.2* Схемы замещения четырехполюсников.

Четырехполюсник называется *структурно-симметричным*, если его левая и правая части зеркально отображают друг друга, например, схема Т-образного симметричного четырехполюсника (рис. 14.2, б, в).

Структурно - симметричные относятся к категории симметричных четырехполюсников. *У симметричных четырехполюсников* при перемене местами его входных и выходных зажимов токи и напряжения цепи, в которую включен четырехполюсник, не изменяются. Четырехполюсники, не удовлетворяющие этому условию, называются *несимметричными.*

14.2 УРАВНЕНИЯ ПЕРЕДАЧИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Свойства четырехполюсника как системы передачи энергии определяются соотношениями между напряжениями на его внешних зажимах и токами, проходящими через эти зажимы.

Уравнения передачи четырехполюсника – это уравнения, связывающие комплексные амплитуды напряжений и токов на двух парах зажимов четырехполюсника.

Будем излагать все вопросы применительно к установившемуся синусоидальному изменению напряжения, приложенного к входным зажимам. При этом токи на входе и выходе будут иметь комплексные значения $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$, напряжения – $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$, а общая схема четырехполюсника с обозначениями их направлений имеет вид, показанный на рис. 14.4.

При передаче электрических сигналов слева направо (*прямое включение*) зажимы $1-1'$ являются входными, а зажимы $2-2'$ – выходными. При *обратном включении* передача энергии происходит от зажимов $2-2'$, которые являются входными, к выходным зажимам $1-1'$ (рис. 14.3).

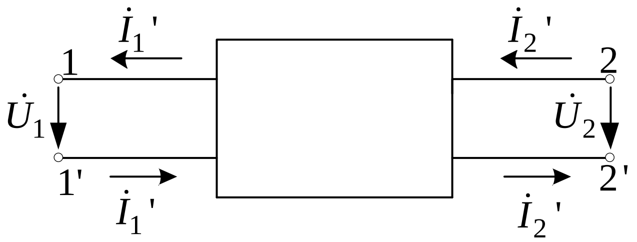


Рис. 14.3

Связь между параметрами режима $\dot{U}_1$, $\dot{I}_1$, $\dot{U}_2$, $\dot{I}_2$ устанавливается при помощи *уравнений передачи четырехполюсника* и некоторых коэффициентов. Эти коэффициенты входят в уравнения передачи и называются *обобщенными параметрами четырехполюсника*.

Различают следующие формы уравнений передачи четырехполюсника:

форма A (применяется при прямой передаче энергии)

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= A_{11}\cdot\dot{U}_2 + A_{12}\cdot\dot{I}_2;\\ \dot{I}_1 &= A_{21}\cdot\dot{U}_2 + A_{22}\cdot\dot{I}_2;\end{aligned}\qquad \begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot{U}_2\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}; \tag{14.1}$$

форма В (применяется при обратной передаче энергии)

$$\begin{aligned}\dot{U}_2 &= B_{11}\cdot\dot{U}_1 + B_{12}\cdot\dot{I}_1;\\ \dot{I}_2' &= B_{21}\cdot\dot{U}_1 + B_{22}\cdot\dot{I}_1;\end{aligned}\qquad \begin{bmatrix}\dot{U}_2\\ \dot{I}_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_1\end{bmatrix}; \tag{14.2}$$

форма Z

$$\dot{U}_1 = Z_{11} \cdot \dot{I}_1 + Z_{12} \cdot \dot{I}_2';\qquad \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix}; \tag{14.3}$$
$$\dot{U}_2 = Z_{21} \cdot \dot{I}_1 + Z_{22} \cdot \dot{I}_2';$$

форма Y

$$\dot{I}_1 = Y_{11} \cdot \dot{U}_1 + Y_{12} \cdot \dot{U}_2;\qquad \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}; \tag{14.4}$$
$$\dot{I}_2' = Y_{21} \cdot \dot{U}_1 + Y_{22} \cdot \dot{U}_2;$$

форма H

$$\dot{U}_1 = H_{11} \cdot \dot{I}_1 + H_{12} \cdot \dot{U}_2;\qquad \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}; \tag{14.5}$$
$$\dot{I}_2' = H_{21} \cdot \dot{I}_1 + H_{22} \cdot \dot{U}_2;$$

форма F

$$\dot{I}_1 = F_{11} \cdot \dot{U}_1 + F_{12} \cdot \dot{I}_2';\qquad \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix}. \tag{14.6}$$
$$\dot{U}_2 = F_{21} \cdot \dot{U}_1 + F_{22} \cdot \dot{I}_2';$$

В этих уравнениях A; B; Z; Y; H; F − *обобщенные параметры четырехполюсника*. Размерность параметров очевидна из уравнений четырехполюсника в соответствующей форме. Из уравнений (14.1 – 14.6) видно, что параметры A_{11} и A_{22} являются безразмерными величинами, A_{12} − имеет размерность сопротивления, а A_{21} − проводимости.

Каждая система параметров полностью определяет четырехполюсник.

Следует заметить, что если в данной системе параметров хотя бы один равен бесконечности, то эта система параметров для рассматриваемого четырехполюсника не существует.

Определитель матрицы $|A|$ обратимого четырехполюсника равен 1.

Если пассивный четырехполюсник симметричный, то:

$$A_{11} = A_{22};\quad Z_{11} = Z_{22};\quad Y_{11} = Y_{22}.$$

Таким образом, у пассивного несимметричного четырехполюсника три параметра в каждой системе параметров позволяют найти четвертый параметр и полностью характеризуют четырехполюсник. Симметричный пассивный четырехполюсник определяется двумя параметрами.

Применение той или иной формы уравнений определяется поставленной задачей и заданной схемой четырехполюсника.

Параметры четырехполюсника можно определять следующими методами:

1) *Метод холостого хода и короткого замыкания*. Применяется в случае простых и сложных схем, а также при определении параметров четырехполюсника экспериментальным путем.

2) *Метод приравнивания коэффициентов* заключается в составлении уравнений по законам Кирхгофа; методом контурных токов; методом узловых напряжений и приведении их к сопоставимому виду с уравнениями передачи и дальнейшим приравниванием коэффициентов.

14.3 ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Наряду с обобщенными параметрами в теории четырехполюсников применяются характеристические параметры: *характеристические сопротивления и характеристическая постоянная передачи.*

Характеристические параметры выгодно применять по сравнению с А - параметрами при расчетах каскадного соединения четырехполюсников.

14.3.1 Характеристические сопротивления четырехполюсника

Несимметричный четырехполюсник имеет два характеристических сопротивления: Z_{1c} − со стороны входа (со стороны зажимов 1−1' (рис. 14.4, а)); Z_{2c} − со стороны выхода (со стороны зажимов 2−2' (рис. 14.4, б)).

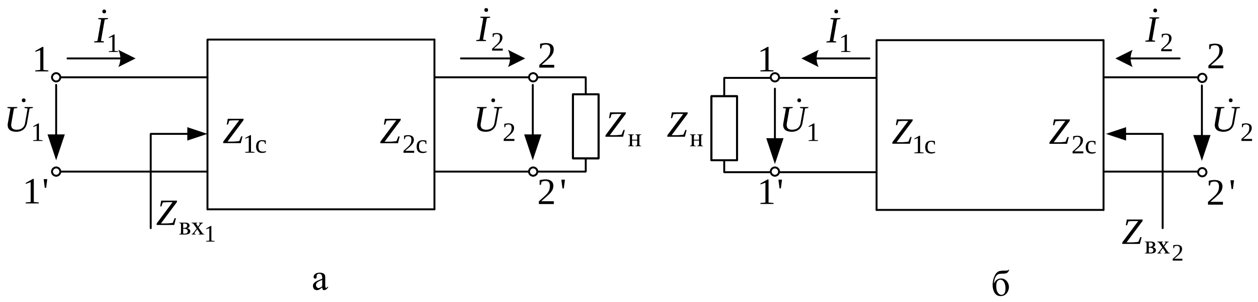


Рисунок *14.4* Характеристические сопротивления четырехполюсника со стороны входных и выходных зажимов при прямой (а) и обратной передаче энергии (б).

Характеристические сопротивления удовлетворяют следующим условиям:

1. Входное сопротивление $Z_{\text{вх}_1}$ четырехполюсника, нагруженного на $Z_{\text{н}} = Z_{2\text{c}}$ (рис. 14.4, а), равно $Z_{1\text{c}}$ ($Z_{\text{вх}_1} = Z_{1\text{c}}$).

2. Входное сопротивление четырехполюсника, нагруженного на $Z_{\text{н}} = Z_{1\text{c}}$ (рис. 14.4, б) равно $Z_{2\text{c}}$ ($Z_{\text{вх}_2} = Z_{2\text{c}}$).

Условие, когда четырехполюсник нагружен на соответствующее характеристическое сопротивление, называется *условием согласованной нагрузки* или *согласованным включением*.

Режим работы четырехполюсника, $Z_{1\text{c}}$ которого равно внутреннему сопротивлению генератора, а $Z_{2\text{c}}$ равно сопротивлению нагрузки, называется *режимом полного согласования* (рис. 14.5).

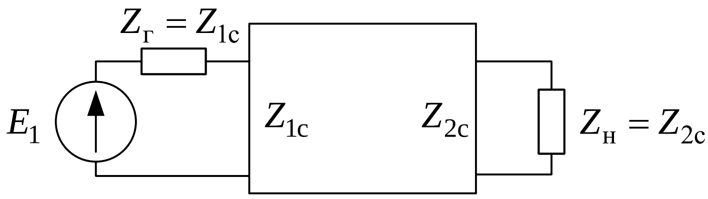


Рисунок *14.5* Четырехполюсник в режиме полного согласования.

Характеристические сопротивления определяются выражениями:

$$Z_{1\text{c}} = \sqrt{Z_{1\text{k}} \cdot Z_{1\text{x}}}; \; Z_{2\text{c}} = \sqrt{Z_{2\text{k}} \cdot Z_{2\text{x}}},$$

где $Z_{1\text{k}}$ и $Z_{1\text{x}}$ – сопротивления короткого замыкания и холостого хода соответственно со стороны входных зажимов;

$Z_{2\text{k}}$ и $Z_{2\text{x}}$ – сопротивления короткого замыкания и холостого хода соответственно со стороны выходных зажимов.

Следовательно, *характеристическим сопротивлением четырехполюсника* называется среднее геометрическое из соответствующих его сопротивлений холостого хода и короткого замыкания.

Через *A*-параметры характеристические сопротивления выражаются следующим образом:

$$Z_{1\text{c}} = \sqrt{\frac{A_{11} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{22}}}; \; Z_{2\text{c}} = \sqrt{\frac{A_{22} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{11}}}.$$

Симметричный четырехполюсник имеет одно характеристическое сопротивление, т.к. для него $A_{11} = A_{22}$:

$$Z_{1c} = Z_{2c} = Z_c = \sqrt{Z_k \cdot Z_x} = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}}.$$

Это означает, что всякому симметричному четырехполюснику соответствует некоторое характеристическое сопротивление Z_c, обладающее следующим свойством − если нагрузить данный четырехполюсник сопротивлением $Z_н = Z_c$, то отношение напряжения к току на входе и выходе будет одинаковым:

$$Z_н = Z_c = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2}. \qquad (14.7)$$

14.3.2 Характеристическая постоянная передачи

Характеристическая (или *собственная*) постоянная передачи четырехполюсника для прямого направления передачи энергии равна:

$$g = a + jb, \qquad (14.8)$$

где g − комплексное число,

a − характеристическое (собственное) затухание, измеряется в неперах (Нп);

b − характеристическая (собственная) фазовая постоянная, измеряется в радианах.

Характеристическая постоянная передачи определяется величиной обратной функции передачи по току или напряжению

$$e^g = e^a e^{jb} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{U_1}{U_2} e^{j\left(\psi_{U_1} - \psi_{U_2}\right)} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{I_1}{I_2} e^{j\left(\psi_{i_1} - \psi_{i_2}\right)}$$

или

$$g = a + jb = \ln\frac{U_1}{U_2} + j\left(\psi_{U_1} - \psi_{U_2}\right) = \ln\frac{I_1}{I_2} + j\left(\psi_{i_1} - \psi_{i_2}\right).$$

Затуханию 1Нп соответствует уменьшение амплитуды или действующего значения напряжения или тока в e = 2,718 раза.

Следует заметить, что характеристическая постоянная передачи, а следовательно, a и b определяются *при условии согласованной нагрузки*.

Заметим, если известны А-параметры, то в практических расчетах используется формула:

$$g = \ln\left(\sqrt{A_{11} \cdot A_{22}} + \sqrt{A_{12} \cdot A_{21}}\right).$$

14.4 КОМПЛЕКСНАЯ ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА. АМПЛИТУДОЧАСТОТНАЯ И ФАЗОЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА.

Частотные характеристики линейной цепи отражают ее реакцию на гармоническое воздействие. Они определяются *комплексной передаточной функций:*

$$K(j\omega) = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1},$$

представляющей собой отношение комплексных амплитуд реакции (напряжения или тока на выходе четырехполюсника) и воздействия (напряжения или тока на входе четырехполюсника).

При определении передаточной функции необходимо помнить, что именно выходная величина делится на входную.

В частных случаях в качестве комплексной передаточной функции могут выступать коэффициент передачи по напряжению $K_{\mathrm{U}}(j\omega)$; коэффициент передачи по току $K_{\mathrm{I}}(j\omega)$.

Комплексную передаточную функцию можно представить в алгебраической показательной формах записи:

$$K(j\omega) = K_1(\omega) + jK_2(\omega) = K(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}. \tag{14.9}$$

Выражение (14.9) представляет собой запись двух характеристик: *амплитудночастотной* (АЧХ) и *фазочастотной* (ФЧХ).

АЧХ – это зависимость модуля передаточной функции от частоты $K(\omega)$;

ФЧХ – это зависимость аргумента передаточной функции от частоты $\varphi(\omega)$.

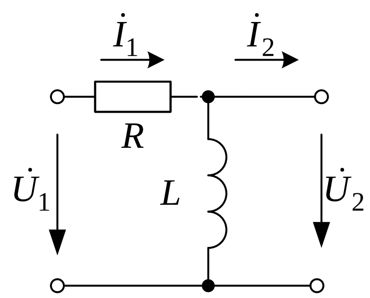
$K(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ определяются по формулам (14.10, 14.11).

$$K(\omega) = \sqrt{K_1^2(\omega) + K_2^2(\omega)}; \tag{14.10}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{K_2(\omega)}{K_1(\omega)}.$$

(14.11)

Пример: для четырехполюсника, изображенного ниже, найти выражения АЧХ и ФЧХ. Качественно построить эти характеристики.



Рассчитаем комплексную передаточную функцию по напряжению в режиме холостого хода:

$$K_{\text{U}}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}_1 \cdot j\omega L}{\dot{I}_1 \cdot (R + j\omega L)} = \frac{\dot{I}_1 \cdot j\omega L \cdot (R - j\omega L)}{\dot{I}_1 \cdot (R + j\omega L)\cdot(R - j\omega L)} = \frac{(\omega L)^2}{R^2 + (\omega L)^2} +$$
$$+ j\frac{R\cdot\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Рассчитываем АЧХ, используя формулу (14.10):

$$K(\omega) = \sqrt{\left(\frac{(\omega L)^2}{R^2 + (\omega L)^2}\right)^2 + \left(\frac{R\cdot\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(\omega L)^4 + (R\cdot\omega L)^2}{\left(R^2 + (\omega L)^2\right)^2}} =$$
$$= \frac{\omega L\cdot\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{(\omega L)^2} + 1}};$$

(14.12)

Рассчитываем ФЧХ, используя формулу (14.11):

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{R\cdot\omega L\cdot\left(R + (\omega L)^2\right)}{\left(R^2 + (\omega L)^2\right)\cdot(\omega L)^2} = \operatorname{arctg}\frac{R}{\omega L}.$$

(14.13)

Проанализируем выражения (14.12, 14.13) для трех значений частот:

$\omega_1 = 0;$ $\quad K_1(\omega_1) = 0;$ $\quad \varphi_1(\omega_1) = 90^\circ;$

$\omega_2 = \dfrac{R}{L};$ $\quad K_2(\omega_2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}};$ $\quad \varphi_2(\omega_2) = 45^\circ;$

$\omega_3 \to \infty;$ $\quad K_3(\omega_3) \to 1;$ $\quad \varphi_3(\omega_3) = 0^\circ.$

На рис. 14.8 (а; б) представлены АЧХ и ФЧХ данного четырехполюсника:

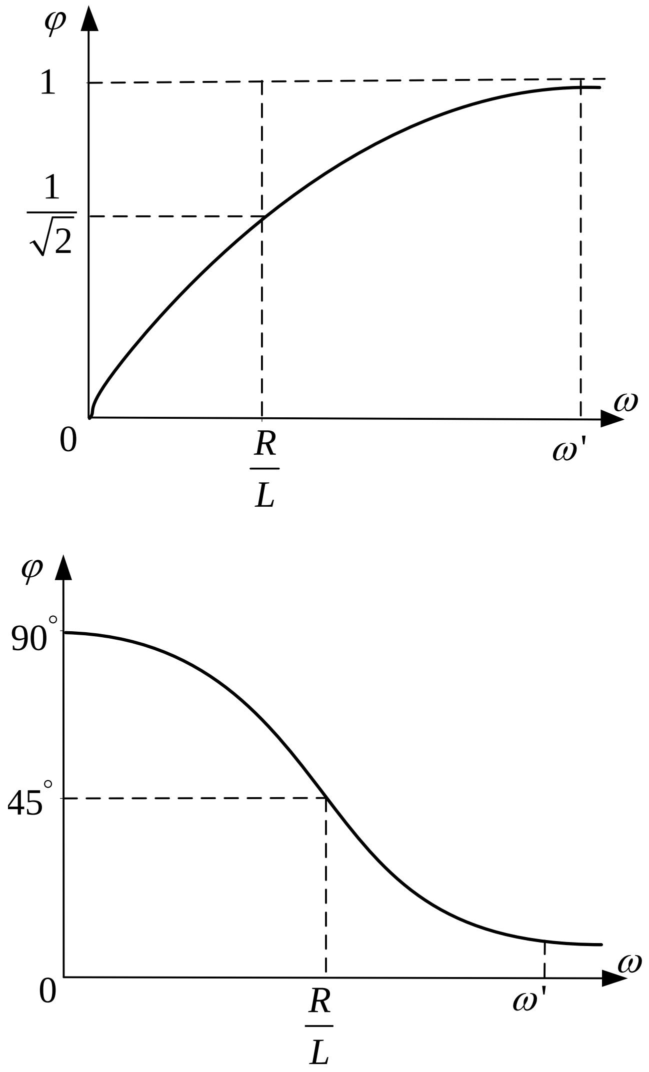


Рисунок *14.6* АЧХ и ФЧХ четырехполюсника. **Исправить верхний рис. K(ω)**

Вывод: рабочим диапазоном частот для данного четырехполюсника является диапазон от $\frac{R}{L}$ до ω', а сдвиг фаз между напряжением на входе и выходе равен нулю, что говорит нам о том, что сигнал, поданный на вход четырехполюсника, проходит через него без искажений. $K(\omega)$

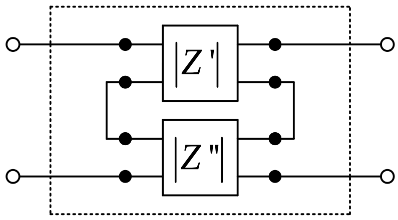
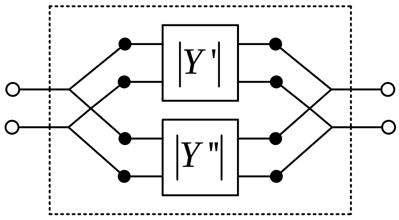
14.6 РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ СЛОЖНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ. РЕГУЛЯРНОСТЬ СОЕДИНЕНИЯ.

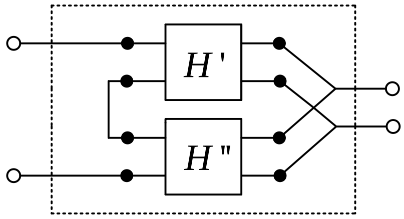
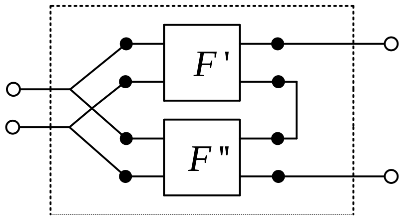
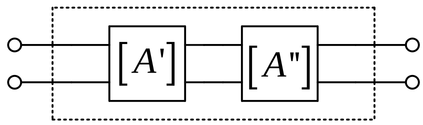
Сложные четырехполюсники рассматривают как различные соединения простых четырехполюсников. Существуют следующие способы соединения: последовательное, параллельное, последовательно-параллельное, параллельно-последовательное и каскадное.

Эти способы соединений и формулы для определения соответствующих матриц сложного четырехполюсника приведены в табл. 14.1.

Таблица 14.1

Схемы соединения четырехполюсников

Соединение	Схема	Формулы для определения параметров
Последовательное	 Рис. 14.7	$[Z]=[Z']+[Z'']$
Параллельное	 Рис. 14.8	$[Y]=[Y']+[Y'']$

Последовательно-параллельное	 Рис. 14.9	$[H]=[H']+[H'']$
Параллельно-последовательное	 Рис. 14.10	$[F]=[F']+[F'']$
Каскадное	 Рис. 14.11	$[A]=[A']\cdot[A'']$

При умножении матриц нужно следить за тем, чтобы матрицы-сомножители следовали в том порядке, в каком осуществляется передача энергии двумя каскадно-соединенными четырехполюсниками.

Все указанные в табл. 14.1 формулы справедливы только в случае *регулярного соединения* четырехполюсников, при котором параметры отдельных четырехполюсников после соединения остаются неизменными.

Условие регулярности формулируется следующим образом: при соединении четырехполюсников для любой общей нагрузки токи, проходящие через оба первичных и оба вторичных зажима, должны быть соответственно равны по величине и противоположны по направлению (для каждого четырехполюсника).

Примером *нерегулярного соединения* двух простых четырехполюсников служит сложный четырехполюсник, представленный на рис. 14.12.

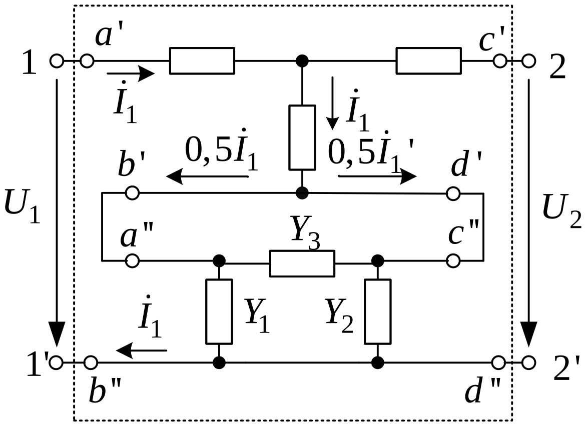


Рисунок *14.12* Пример нерегулярного соединения четырехполюсников.

При равенстве проводимостей Y_1 и Y_2 в разомкнутых зажимах $2-2'$ ток $\dot{I}_1$ распределяется так, как показано на рис. 14.12. Токи во входных и выходных ветвях простых четырехполюсников не равны. Следовательно, условие регулярности не выполняется ни для первого, ни для второго четырехполюсника.

Кроме того, при нерегулярном соединении четырехполюсников может изменяться значение матрицы параметров одного из четырехполюсников. Например, при соединении двух четырехполюсников, изображенных на рис. 14.12, элемент Y_3 замыкается накоротко нижней ветвью первого четырехполюсника. Таким образом, матрица Y-параметров нижнего четырехполюсника, когда он изолирован, будет отличаться от матрицы Y-параметров, когда он соединен параллельно (в данном примере) с другим четырехполюсником.

При соединении простых четырехполюсников необходимо убедиться, что все их параметры сохраняют свои значения.