Методология решения хорошо структурированных задач

История происхождения системного анализа

Причины возникновения теории:

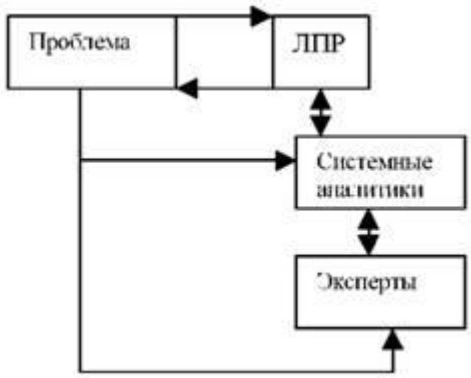
Научно техническая революция (начало 60х годов). Усиление специализации и кооперации при производстве сложных систем. Появилась необходимость в теоретической разработке **управления проектами.**

Быстрая сменяемость изделий и необходимость снижения сроков технологической подготовки привело к появлению новой дисциплины **прогнозирование.**

Колоссальный рост масштабов производства повысил требования к точности правления.

ИО был создан во время 2ой мировой войны. Исследование операций + Экономическая теория + Системный подход = Системный анализ (компания РЭНД). Суть системного подхода:

Рассмотрение всех элементов организации или процесса в их взаимной связи, взаимозависимости и взаимном влиянии в интересах наиболее оптимального достижения, как частных, так и общих целей системы.



Обязательный анализ процессов проектирования или управления на базе **количественных методов** с целью выработки и принятия количественно обоснованных решений в условиях неопределенности.

Проблема – состояния дел или развития, которые не удовлетворяют субъекта.

ЛПР (лицо, принимающее решения) – субъект или коллектив людей, которые имеют возможность влиять на решение проблемы и в полномочии действовать так, чтобы изменить проблему.

Системные аналитики – анализируют проблему и предлагают альтернативу ее решения.

Эксперты – опытные специалисты в конкретной области, принимаемые системными аналитиками для решения конкретных вопросов.

Наибольшая проблема – выработка альтернатив. Вторая проблема – сравнительный анализ альтернатив.

Классификация задач и методов исследования операций

План снабжения предприятий. Есть поставщики, есть потребители, необходимо так обеспечить сырьем, чтобы минимизировать, например, транспортные расходы.

1. Планирование, внедрение сырья в производство.
2. Продажа сезонных товаров. Организуется ярмарка – определить количество товаров для получения максимальной прибыли.
3. Военные операции.

Общее в задачах:

– Все задачи развернуты во времени.
– Есть условия зависящие от нас и не зависящие.
– Необходимо принять оптимальное решение.

Решение включает параметры операции. Динамика процесса – это и есть операция.

Цель исследования операций – предварительное количественное обоснование оптимального решения.

Вводим вектор $X = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_s)$ – вектор решений.

Множество управляемых условий проведения операций: $\{\alpha\}$.

Множество неуправляемых условий проведения операций: $\{\beta\}$. Для количественного исследования операций вводится показатель эффективности – E, и строится математическая модель операции:

$$E\,/ = (x \in X, \{\boldsymbol{\alpha}\}, \{\boldsymbol{\beta}\})$$

/= – оператор модельного отображения. Он показывает, с помощью какой математики мы строим модель, т.е. указывает на аппарат.

Написанное выше выражение читается так: найти такое x , принадлежащее X, которое обеспечило экстремум E с учетом совокупности α и β.

Применяемые разделы математики используются в:

– Математическое программирование;
– Теория массового обслуживания;
– Теория игр;
– Теория графов;

– Методы Монте-Карло (статистических испытаний);
– Теория расписаний;
– Комбинаторика;
– Теория автоматов.

ТЕМА 1 АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассматривается класс задач, для которого математическая модель операций имеет вид:

$$E\,/ = \left(x \in X, \{\boldsymbol{\alpha}\}, \{\boldsymbol{\beta}\}\right) \rightarrow extr,$$

т.е. β известна и вся поглощена α . Необходимо найти такой x , принадлежащий X, которые бы обеспечили экстремум E с учетом ограничений на X. Ограничения на X отражаются совокупностью α. Задачи с такой постановкой – задачи математического программирования.

Математическое программирование – метод, указывающий вычислительную процедуру, которая приводит к решению задачи, т.е. программу решения задачи. Виды задач МП:

– Линейное программирование. Развито;
– Нелинейное программирование;
– Динамическое программирование;
– Стохастичное программирование;
– Квадратичное программирование;
– Многоцелевое программирование.

Наиболее изучены задачи линейного программирования. Вид такой задачи:

$$E = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow extr$$

Ограничения накладываемые на целевую функцию:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq (\geq) b_1 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq (\geq) b_m \end{cases}$$

$x_1 \ldots x_n$- компоненты решения;

c_i и a_j - коэффициенты;

m - число уравнений-ограничений.

Все задачи линейного программирования приводят к общему виду ***(основная задача линейного программирования):***

$$E = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max \qquad (**)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (*)$$

Все неравенства заменены равенствами.

Допустимые решения ОЗЛП: набор неотрицательных x1…..xn которые бы удовлетворяли системе (*).

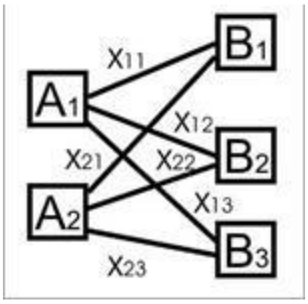
Оптимальное решение x1…..xn – то из допустимых, которое приводит к экстремуму функции (**).

Транспортная задача

Есть пункты отправления: $\{A_j\}$. Есть пункты назначения: $\{B_i\}$.

Известна стоимость перевозки единицы топлива, запасы и потребность. Необходимо найти план перевозок, который бы минимизировал затраты на перевозку.

$\{A_j\}$ \ $\{B_i\}$	B_1	B_2	B_3	Запасы топлива
A_1	$C_{11}=4$	$C_{12}=9$	$C_{13}=3$	$a_1=20$
A_2	$C_{21}=4$	$C_{22}=8$	$C_{23}=1$	$a_2=30$
Потребность	$b_1=10$	$b_2=30$	$b_3=10$	



Общая стоимость перевозки:

$$C = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23}$$

.

Больше, чем есть в пункте мы не вывезем.

Все больше нуля:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq a_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq a_2 \\ x_{11} + x_{21} = b \\ x_{12} + x_{22} = b_2 \\ x_{13} + x_{23} = b_3 \\ x_{ij} > 0 \end{cases}$$

Приведение задачи к ОЗЛП

Максимизировать целевую функцию $E = 4x_1 - x_2 + 2x_3$ при ограничениях:

$$\begin{aligned} &3x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 4 \\ &x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ &x, x_2, x_3 \geq 0 \\ &3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4 \geq 0 \\ &-x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &y_1 = 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4 \\ &y_2 = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10 \\ &x, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Существование решения ОЗЛП и способы его нахождения

Есть ограничения:

$$\begin{cases} A_{11}X_1 + \ldots + A_{1n}X_n = B_1 \\ \ldots \\ A_{m1}X_1 + \ldots + A_{mn}X_n = B_m \end{cases} \quad (1)$$

И целевая функция:

$$C_1X_1 + \ldots + C_nX_n \rightarrow \max \quad (2)$$

1. m=n – тогда привлекается аппарат обычной алгебры. Одно единственное решение.

2. m>n – поступаем, как и в случае 1, но до этого делаем так, чтобы .

3. m<n – тогда система 1 имеет бесчисленное множество решений. Нас из этого множества интересуют только те наборы, которые положительны. Здесь варианты:

– Система (1) несовместна. Решений нет;

– Система (2) совместна, но захватывает область отрицательных значений – решений нет.

Графическая интерпретация области допустимых решений

Рассмотрим случай m>n *на 2:*

– Определяют m базисных переменных;

– m,n - свободные переменные;

– Уравнение (1) разрешают относительно базисных переменных.

x_3, x_n – базисные переменные

x_1, x_2 – свободные переменные.

$$\begin{cases} x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + b_3 \\ \dots \\ xn = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + b_n \end{cases} \quad (3)$$

x1,x2– координата точки.

Получим уравнение прямой:

$$x_3 = 0$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + b_3 = 0 \; .$$

Нас интересуют решения правее этой прямой.

Для прямой x4 нас не устраивают решения ниже прямой, далее для x3.

Часть полуплоскости, удовлетворяющая всем ограничениям, и будет областью допустимых решений. Подставив 3 в целевую функцию 2, получим запись целевой функции через x1, x2.

$$c = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + b_3$$
$$. \; c = u_1x_1 + u_2x_2 + u_0$$

Если С принадлежит минимизации, передвигаем параллельным переносом прямую назад и ищем минимальное значение.

Выводы:

– Для оптимального решения, как минимум 2 переменные должны быть равны нулю;

– Оптимальное решение находится на одной из вершин многоугольника;

– Решения для вершин называются опорными решениями;

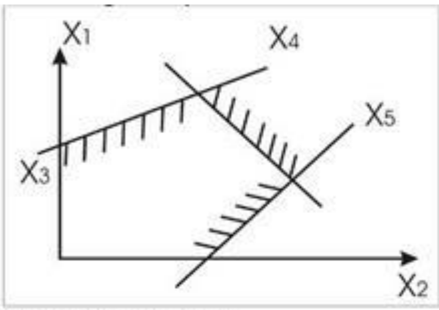
– Оптимальное решение – это то из опорных, которое приводит к экстремуму целевую функцию С;

– Оптимальное решение отыскивается переходом от одной опорной точки к другой;

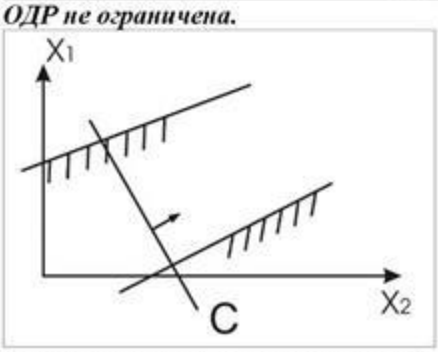
– Симплекс–метод оптимизирует процедуру перебора опорных решений, т.е. следующее опорное решение не хуже предыдущего.

Эффективность симплекс–метода зависит от того, насколько быстро он приводит нас к оптимальному решению.

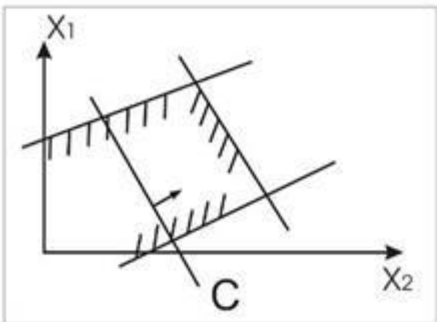
Рассмотрим случай, когда система не совместна.



ОДР не ограничена.



Бесчисленное множество решений.



Определение базисных переменных

Определить базисные переменные для $E = \mathbf{3}x_1 + \mathbf{2}x_2 \rightarrow \mathbf{max}$.

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 270 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 600 \\ 3x_1 + x_2 \leq 240 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 270 = x_3 \\ -4x_1 - 6x_2 + 600 = x_4 \\ -3x_1 - x_2 \le 240 = x_5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \\ \\ E = 3x_1 + 2x_2 \to \max \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + \mathbf{3}x_2 + x_3 = \mathbf{270} \\ \mathbf{4}x_1 + \mathbf{6}x_2 + x_4 = \mathbf{600} \\ \mathbf{3}x_1 + x_2 + x_5 = \mathbf{240} \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge \mathbf{0} \end{cases}$$

В качестве базисных переменных берем те переменные, которые входят в каждое из уравнений с коэффициентом «+**1»** и исключены из остальных уравнений. В целевую функцию они входят с нулевыми коэффициентами. Берем: $x_3; x_4; x_5$.

Решение транспортной задачи графическим методом

См. условие выше.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 20 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 30 \\ x_{11} + x_{21} = 10 \\ x_{12} + x_{22} = 30 \\ x_{13} + x_{23} = 10 \end{cases}$$

Свободные переменные: x_{11}, x_{12} .

$$\begin{cases} x_{13} = 20 - x_{11} - x_{12} \\ x_{21} = 10 - x_{11} \\ x_{22} = 30 - x_{12} \\ x_{23} = 30 - (10 - x_{11}) - (30 - x_{12}) = -10 + x_{11} + x_{12} \\ x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} > 0 \\ C = 330 - 2x_1 - x_{12} \to \min \end{cases}$$

Решение:

$\{A_j\}$	$\{B_i\}$			Запасы топлива
	B_1	B_2	B_3	
A_1	$x_{11}=10$	$x_{12}=10$	$x_{13}=0$	$a_1=20$
A_2	$x_{21}=0$	$x_{22}=20$	$x_{23}=10$	$a_2=30$
Потребность	$b_1=10$	$b_2=30$	$b_3=10$	

Целочисленное программирование

В ряде случаев есть ограничения по целочисленности компонент входящих в задачу. Т.е. нас интересуют дискретные точки ОДР (ОДР превращается в набор дискретных точек). Оптимальное решение находится в одной из дискретных точек. Например, если бы мы в транспортной задаче везли бы станки.

$$C = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{11}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

$x_i \geq 0$, i принадлежит n1

$x_j \geq 0$, целые, j принадлежит n2

n1 и n2 = n

Это частично целочисленная задача. А если n2=n, то полностью.

Решаем задачу симплекс-методом. Если полученное решение целочисленное, то все в порядке. В ином случае применяем метод Гомори. Метод Гомори:

1. Вводится дополнительное ограничение (уравнение) в систему ограничений;
2. Это дополнительное ограничение проходит через дискреты ОДР и отсекает оптимальное решение;
3. Задача с расширением ограничений снова решается симплекс-методом. Если полученное решение дискретно, то все завершается, если нет, то вводится дополнительное ограничение.

Требование целочисленности ухудшает целевую функцию.

Пример:

$$21x_1 + 11x_2 \rightarrow \max$$
$$7x_1 + 4x_2 \leq 13$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$ x1, x2 – целые.

Решение симплекс-методом: $x_1 = 13/7;\ x_2 = 0$.

Попробуем просто округлить $x_1 = 2;\ x_2 = 0$ – не попало в ОДР.

$x_1 = 0;\ x_2 = 1$

$x_1 = 0;\ x_2 = 2 x_1 = 0;\ x_2 = 0$

$x_1 = 1;\ x_2 = 2 x_1 = 2;\ x_2 = 2$ - вот оптимальное решение.

Отказ от целочисленности называется ослаблением исходной задачи целочисленной задачи линейного программирования. Ослабление решается путем введения дополнительных ограничений на переменные.

Пример: $5x_1 + x_2 \to \max$ (1)

$2x_1 + x_3 = 3$ (2)

$x_1, x_2 \geq 0$ (3)

$x_1, x_2 - \textit{целые}$ (4)

Если решим без учета целочисленности: x1 = 3/2; x2 = 0. Введем дополнительное ограничение:

И решим с ограничениями 1,2,3,5. Решение x1 = 1, x2 = 1.

Выбор КТС (комплексно-технических средств) на ранних стадиях проектирования

В КТС входят: технические средства, программные средства.

Задача: необходимо выбрать КТС по 2-м основным параметрам:

– Производительность процессора;

– Емкость памяти.

Y1 – производительность процессора;

Y2 – емкость памяти.

Они не определены – будем их рассматривать, как случайные величины. K1 и K2 – требуемые значения, соответственно процессора и памяти.

$$\alpha_1 \leq \frac{K_1}{Y_1} \leq \alpha_2$$

$$\beta_1 \leq \frac{K_2}{Y_2} \leq \beta_2$$

α_1, β_1 – заданный уровень дефицита;

$\alpha_2; \beta_2$ – заданный уровень избытка.

$$\alpha = 0{,}7$$
$$\alpha = 1{,}4$$
$$\beta = 0{,}9$$
$$\beta = 1{,}5$$

Стоимость КТС.

Разработчик обладает следующей статистикой по Y:

Таблица 1

Y_1	$0{,}2*10^6$	$0{,}4*10^6$	$0{,}6*10^6$	$0{,}8*10^6$	$1*10^6$	$1{,}4*10^6$	$1{,}6*10^6$
$P(Y_1)$	0,05	0,1	0,3	0,3	0,1	0,1	0,05

Таблица 2

Y_2	0,3	0,5	0,7	0,9	1,5	2,5
$P(Y_2)$	0,06	0,05	0,1	0,4	0,3	0,1

Разработчик располагает 5 альтернативами КТС:

Таблица 3

S_i	S1	S2	S3	S4	S5
k_{1i}	0.3	0.6	0.9	1,5	2,5
k_{2i}	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0
k_{3i}	0.7	1.2	2.2	3.5	4.6

k3j – стоимость.

Выбрать из этих 5 вариантов комплекс, который бы удовлетворял заказчика. В качестве критерия выбора разработчик предлагает степень удовлетворения требований:

При этом разработчик имеет положительный опыт использования математического программирования. Решаем задачу в условиях риска (параметры Y1 и Y2 имеют распределение). Критерий эффективности выбора:

Задача свелась к целочисленной модели программирования. Переход к математическому ожиданию:

Вводим ограничения на компоненты, входящие в целевую функцию: Выбираем только 1 вычислительный комплекс из той 5-ки, которую имеем:

Теперь запишем задачу в числовом виде. M1 рассчитываем с помощью таблицы 1:

M1 рассчитываем с помощью таблицы 2:

Преобразуем таблицу 3:

S_i	S1	S2	S3	S4	S5
k_{1i}*M_1	0.48	0.96	1.45	2.4	3.75
k_{2i}*M_2	0.55	1.1	1.65	2.2	3.3

$$E = 1{,}03x_1 + 2{,}06x_2 + 3{,}1x_3 + 4{,}6x_4 + 7{,}05x_5 \rightarrow \max$$

Решим эту задачу, но предварительно сузим пример: ограничимся первыми тремя вычислительными комплексами:

Параметры	ВК		
	1	2	3
k_{1i}	0.3	0.6	0.9
k_{2i}	0.5	1	1.5
k_{3i}	0.7	1.2	2.2

Возьмем только следующие ограничения (для упрощения решения):

Распределение	Варианты Y_1.Y_2		
	1	2	3
Y_2	0.2	0.4	0.6
$P(Y_1)$	0.3	0.4	0.3
Y_2	0.3	0.5	0.7
$P(Y_2)$	0.2	0.5	0.3

Получили:

$$M_1 = 3, M_2 = 2{,}1$$

S_i	S1	S2	S3
k_{1i}*M_1	0.9	1.8	2.7
k_{2i}*M_2	1.05	2.1	3.15
k_{1i}*M_1– k_{2i}*M_2	1.95	3.9	5.85

Запишем формальную постановку задачи.

При ограничениях.

Приведем эту задачу к ОЗЛП.

$$0{,}9x_1 + 1{,}8x_2 + 2{,}7x_3 + x_4 = 1{,}5$$
$$1{,}05x_1 + 2{,}1x_2 + 3{,}15x_3 - x_5 = 0{,}9$$
$$0{,}7x_1 + 1{,}2x_2 + 2{,}2x_3 + x_6 = 2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_i = 0{,}1 i = 1{,}2{,}3$$
$$x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Уйдем от x_3 заменой:

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2$$

Получаем:

$$F(X) = 5{,}85 - 3{,}9x_1 - 1{,}95x_2 \to \max$$
$$1{,}8x_1 + 0{,}9x_2 - x_4 = 1{,}2$$
$$2{,}1x_1 + 1{,}05x_2 + x_5 = 2{,}25$$

Алгоритм:

1. Решается задача до получения оптимального плана;
2. Если оптимальное решение целочисленное, то процесс заканчивается, если нет, то переходим к следующему пункту;
3. На основании последней симплекс-таблицы оптимального плана для базисной переменной, имеющей наибольшую дробную часть, строится сечение. Сечение – это дополнительное ограничение;
4. Добавление сечения к условиям оптимального нецелочисленного плана приводит к расширенной задаче, после чего возврат к пункту 1.

1. Определим начальный опорный план. Для этого исходную задачу разрешим относительно базисных переменных: x3 – x6

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2$$
$$x_4 = -1{,}2 + 1{,}8x_1 + 0{,}9x_2$$
$$x_5 = 2{,}25 - 2{,}1x_1 - 1{,}05x_2$$
$$x_6 = -0{,}2 + 1{,}5x_1 + x_2$$
$$x_i = 0{,}1, i = 1{,}2{,}3$$
$$x_4, x_5, x_6 \geq 0$$
$$F(X) = 5{,}85 - 3{,}9x_1 - 1{,}95x_2$$

2. Заносим задачу в симплекс-таблицу:

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные		
		$-x_1$	$-x_2$	i
x_3	1	1	1	1
x_4	-1,2	-1,8	-0,9	2
x_5	2,25	2,1	1,05	3
x_6	-0,2	-1,5	-1	4
F	5,85	3,9	1,95	5
j	0	1	2	

Т.к. среди СЧ есть отрицательные переменные – план не является опорным. **Алгоритм** нахождения начального опорного плана:

– Просматриваем строку с максимальным по модулю отрицательным СЧ (2ая строка) и по отрицательным элементам этой строки (условимся выбирать элементы с большим абсолютным значением ($|-1.8|$)) определяем разрешающий столбец (1-ый). Если просматриваемая строка не содержит отрицательных элементов, то система ограничений не совместна (решений нет).

– По минимальному симплекс-отношению (отношение элементов столбца СЧ к соответствующим элементам разрешающего столбца) определяем разрешающую (4-ую) строку: $\min\left(1/1;-1,2/-1,8;2,25/2,1;-0,2/-1,5\right) \to 0,2/-1,5$

– Определяется разрешающий элемент на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки.

– С выбранным разрешающим элементом производим симплексное преобразование и получаем новую симплексную таблицу.

Таблица 4

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные		
		-	-	
	0,87	0,67	0,33	1
	-0,96	-1,2	0,3	2
	1,97	1,4	1,05	3
	0,13	-0,67	0,67	4
	5,85	-0,67	-0,65	5
	0	1	2	

Преобразуем элементы этой таблицы получаем:

1. Разрешающий элемент B_{ij} – заменяется обратной величиной;

2. Остальные элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и меняют знак на противоположный;

3. Остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент (замены знака не происходит);

4. Все прочие элементы таблицы вычисляются по формуле:

Например:

$$0,33 = \frac{1 \cdot (-1,5) - 1 \cdot (-1)}{-1,5}$$

$$5,33 = \frac{5,85 \cdot (-1,5) - 3,9 \cdot (-0,2)}{-1,5}$$

Среди свободных членов есть отрицательный элемент. Таблица 4 не является опорной. Проводим повторно симплекс-преобразование и переходим к таблице 5.

Таблица 5

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные		
		$-x_4$	$-x_2$	i
x_3	0,33	0,56	0,5	1
x_6	0,8	-0,83	-0,25	2
x_5	0,85	1,17	0	3
x_1	0,67	-0,56	0	4
F	3,25	2,17	0,5	5
j	0	1	2	

Все свободные члены положительный план является опорным. Т. о. начальный опорный план запишется:

$$x_0 = (0,67;0;0,33;0;0,85;0,8)$$

Если в симплекс-таблице, содержащей опорный план все элементы F строки не считая СЧ не отрицательны, то данный опорный план – оптимальный. Т.о. наш начальный опорный является оптимальным. *Этот план будет единственным, если все элементы строки больше нуля.*

Если среди неотрицательных элементов встречается хотя бы 1 нулевой, то задача имеет бесконечное множество оптимальных планов.

Если хотя бы 1 элемент F строки меньше 0, оптимальный план находится по алгоритму:

Если найти решение задачи симплексным методом, то оно может оказаться как целочисленным, так и нет (примером задачи линейного программирования, решение которой всегда является целочисленным, служит транспортная задача). В общем же случае для определения оптимального плана задачи требуются специальные методы. В настоящее время существует несколько таких методов, из которых наиболее известным является *метод Гомори*, в основе которого лежит описанный выше симплексный метод.

Метод Гомори. Нахождение решения задачи целочисленного программирования методом Гомори начинают с определения симплексным методом оптимального плана задачи без учета целочисленности переменных. После того как этот план найден, просматривают его компоненты. Если среди компонент нет дробных чисел, то найденный план является оптимальным планом задачи целочисленного программирования. Если же в оптимальном плане задачи переменная принимает дробное значение, то к системе уравнений добавляют неравенство

$$\sum_j f(a_{ij}^*)x_j \geq f(b_i^*) \qquad (*)$$

и находят решение основной задачи и (*).

В неравенстве (*) a_{ij}^* и b_i^* – преобразованные исходные величины a_{ij} и b_i значения которых взяты из последней симплекс–таблицы, а $f(a_{ij}^*)$ и $f(b_i^*)$ – дробные части чисел (под дробной частью некоторого числа а понимается наименьшее неотрицательное число *b* такое, что разность между *a* и *b* есть целое). Если в оптимальном плане основной задачи дробные значения принимают несколько переменных, то дополнительное неравенство (*) определяется наибольшей дробной частью.

Если в найденном плане основной задачи и (*) переменные принимают дробные значения, то снова добавляют одно дополнительное ограничение и процесс вычислений повторяют. Проводя конечное число итераций, либо получают оптимальный план основной задачи целочисленного программирования, либо устанавливают ее неразрешимость.

Если требование целочисленности относится лишь к некоторым переменным, то такие задачи называются *частично целочисленными.* Их решение также находят последовательным решением задач, каждая из которых получается из предыдущей с помощью введения дополнительного ограничения. В этом случае такое ограничение имеет вид

$$\sum_j \gamma_{ij} x_j \geq f(b_i^*), \qquad (**)$$

Где γ_{ij} определяются из следующих соотношений:

1) для , которые могут принимать нецелочисленные значения,

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} a_{ij}^* & \text{при } a_{ij}^* \geq 0, \\ \dfrac{f(b_i^*)}{1 - f(b_i^*)}\left|a_{ij}^*\right| & \text{при } a_{ij}^* < 0; \end{cases} \qquad (***)$$

2) для , которые могут принимать только целочисленные значения,

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} f(a_{ij}^*) & \text{при } f(a_{ij}^*) \le f(b_i^*), \\ \frac{f(b_i^*)}{1 - f(b_i^*)}\left[1 - f(a_{ij}^*)\right] & \text{при } f(a_{ij}^*) > f(b_i^*). \end{cases} \quad (****)$$

Из изложенного выше следует, что процесс определения оптимального плана задачи целочисленного программирования методом Гомори включает следующие *основные этапы*:

1. Используя симплексный метод, находят решение основной задачи без учета требования целочисленности переменных.

2. Составляют дополнительное ограничение для переменной, которая в оптимальном плане основной задачи имеет максимальное дробное значение, а в оптимальном плане задачи должна быть целочисленной.

3. Используя двойственный симплекс-метод, находят решение задачи, получающейся из основной задачи в результате присоединения дополнительного ограничения.

4. В случае необходимости составляют еще одно дополнительное ограничение и продолжают итерационный процесс до получения оптимального плана основной задачи или установления ее неразрешимости.

Строим для x_1 :

i = 4

Должны иметь: b_{40}, b_{41}, b_{42} дополнительное ограничение в соответствии с формулой: $0{,}67 - 1{,}14x_4 - 0{,}5x_2 \le 0$

Для получения равенства вводим переменную x_7.

$$1{,}14x_4 + 0{,}5x_2 \ge 0{,}67$$
$$1{,}14x_4 + 0{,}5x_2 - x_7 = 0{,}67$$
$$1{,}14x_4 + 0{,}5x_2 - 0{,}67 = x_7$$

Получаем таблицу 6

Таблица 6

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные		
		$-x_4$	$-x_2$	i
x_3	0,33	0,56	0,5	1
x_6	0,8	-0,83	-0,25	2
x_5	0,85	1,17	0	3
x_1	0,67	-0,56	0,5	4
x_7	-0,67	-1,14	-0,5	5
F	3,25	2,17	0	
j				

В СЧ отрицательный элемент. Начинаем преобразование:

Получаем таблицу 7:

Таблица 7

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные		
		$-x_7$	$-x_2$	i
x_3	0	0,49	0,25	1
x_6	0,31	0,73	-0,61	2
x_5	0,16	1,03	-0,51	3
x_1	1	-0,49	0,75	4
x_4	0,56	-0,88	0,44	5
F	1,98	1,9	-0,95	
j				

Имеем опорный план, но не оптимальный (В строке отрицательный элемент). Повторное симплекс преобразование не меняют решения относительно , с получением строки, не содержащей отрицательных элементов.

Решение:

$$x_0^* = (1;0;0;0,56;0,16;0,31;0)$$

Произошло ухудшение значения целевой функции.

$$F_{жиблмцаб} = 3,25$$
$$F_{жиблмцаб} = 1,98$$

ТЕМА 2 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Постановка задачи нелинейного программирования

Задачи нелинейного программирования – это задачи, в которых (как и в задачах линейного программирования) требуется найти значения переменных X_1, X_2,...,X_n, обеспечивающие максимальное или минимальное значение некоторой целевой функции при соблюдении системы ограничений. При этом целевая функция и/или некоторые из ограничений являются нелинейными, т.е. содержат нелинейные составляющие, например, , X_1X_2, и т.д.

Как и в задачах линейного программирования, любые значения переменных X_1,X_2,...,X_n, удовлетворяющие ограничениям задачи, называются *допустимыми* решениями, а все множество допустимых решений - *областью допустимых решений* (ОДР). Допустимые значения переменных X_1,X_2,...,X_n, при которых целевая функция принимает экстремальное значение, представляют собой *оптимальное решение*. В задачах нелинейного программирования оптимальное решение может находиться как на границе, так и внутри ОДР.

Так как математические модели задач нелинейного программирования очень разнообразны, не существует универсальных методов, позволяющих решать любую задачу нелинейного программирования. Разработано большое количество методов, каждый из которых предназначен для решения определенного класса задач. Классификация методов нелинейного программирования приведена в табл.2.1.

Таблица 2.1 – Классификация методов нелинейного программирования

Признак классификации	Классы методов	Описание
Используемый математический аппарат	Аналитические (классические)	Поиск решения на основе использования необходимых и достаточных условий экстремумов функций (например, равенства нулю производных)
	Численные	Поиск решения на основе постепенного сужения диапазона, в котором ищется решение
	Покоординатные	Поиск решения на основе поочередного поиска экстремума целевой функции по каждой из переменных
	Градиентные	Поиск решения на основе использования градиента целевой функции

	Случайного поиска	Поиск решения на основе многократного случайного выбора возможных решений
Решаемые задачи	Методы решения задач без ограничений	Предназначены для решения задач, в которых требуется найти экстремум нелинейной функции без ограничений на значения переменных
	Методы квадратичного программирования	Предназначены для решения задач с линейными ограничениями и квадратичной целевой функцией, т.е. целевой функцией, содержащей квадраты переменных (например,) и/или их попарные произведения (например, X_1X_2)
	Методы сепарабельного программирования	Предназначены для решения задач, в которых ограничения и целевая функция являются сепарабельными, т.е. могут быть представлены в виде сумм функций одной переменной

Примеры задач нелинейного программирования

Пример 2.1. Для транспортировки некоторого химиката требуется изготовить контейнеры. Требования к контейнерам следующие: 1) емкость контейнера - 6 м^3; 2) высота может составлять от 1 до 3 м; 3) основание контейнера должно быть квадратным. Дно и стенки контейнера, непосредственно соприкасающиеся с химикатом, должны быть изготовлены из более стойкого материала, чем крышка контейнера. Стоимость материала дна и стенок контейнера – 6 ден.ед./м^2, стоимость материала крышки - 4 ден.ед./м^2. Требуется найти габаритные размеры контейнера (размеры основания и высоту), при которых его стоимость будет минимальной.

Обозначим высоту контейнера как H, а размеры его основания (длину и ширину) - как L. Тогда для данной задачи можно построить следующую математическую модель:

$H \geq 1$

$H \leq 3$

$H \cdot L^2 = 6$

$E = 6*L^2 + 24*H*L + 4*L^2 \quad -> min$

Здесь первое и второе ограничения устанавливают, что высота контейнера должна составлять от 1 до 3 м; третье ограничение устанавливает, что емкость контейнера равна 6 м^3. Целевая функция E выражает стоимость контейнера (первое слагаемое - стоимость материала для основания, второе - стоимость материала для стенок, третье

- для крышки). Данная задача представляет собой задачу нелинейного программирования: нелинейными здесь являются целевая функция и ограничение на емкость контейнера.

Пример 2.2. Предприятие выпускает электроприборы двух типов (А и В) и запасные части к ним. В комплект запасных частей, выпускаемых вместе с каждым прибором, может входить от трех до шести запасных частей, причем количество запасных частей для всех приборов одного типа должно быть одинаковым. Расход материалов на выпуск приборов и запасных частей следующий.

Таблица 2.2

Материал	Прибор А	Запасная часть к прибору А	Прибор В	Запасная часть к прибору В
Провод, см	7	3	10	2
Пластмасса, г	12	2	8	1,5

Предприятие имеет возможность израсходовать на выпуск приборов не более 0,6 м провода и не более 0,5 кг пластмассы.

Прибыль предприятия от выпуска одного прибора А составляет 8 ден.ед., одной запасной части к прибору А - 2 ден.ед., одного прибора В - 9 ден.ед., одной запасной части к прибору В - 1,5 ден.ед.

Требуется определить, сколько приборов каждого типа и запасных частей к ним должно выпустить предприятие, чтобы получить максимальную прибыль.

Введем переменные: X_1 - количество приборов типа А; X_2 - количество запасных частей к ним; X_3 - количество запасных частей в комплекте к *одному* прибору типа А (соотношение количества запасных частей и приборов типа А); X_4 - количество приборов типа В; X_5 - количество запасных частей к ним; X_6 - количество запасных частей в комплекте к *одному* прибору типа В (соотношение количества запасных частей и приборов типа В).

Составим математическую модель задачи:

$X_2 = X_1 X_3$

$X_3 \leq 6$

$X_3 \geq 3$

$X_5 = X_4 X_6$

$X_6 \leq 6$

$X_6 \geq 3$

$7X_1 + 3X_2 + 10X_4 + 2X_5 \leq 600$

$12X_1 + 2X_2 + 8X_4 + 1,5X_5 \leq 500$

X_i - целые, i=1,...,6

$X_i \geq 0$, i=1,...,6

$E = 8X_1 + 2X_2 + 9X_4 + 1,5X_5 \rightarrow max$.

Здесь первое ограничение устанавливает, что общее количество запасных частей к приборам типа А (X_2) должно быть равно произведению количества этих приборов (X_1) на количество запасных частей в одном комплекте (X_3). Второе и третье ограничения устанавливают, что количество запасных частей к одному прибору типа А должно составлять не менее трех и не более шести. Четвертое, пятое и шестое ограничения имеют тот же смысл, но для приборов типа В. Седьмое и восьмое ограничения устанавливают предельный расход провода и пластмассы. Целевая функция выражает прибыль от выпуска приборов и запасных частей.

В этой задаче нелинейными являются первое и четвертое ограничения.

Пример 2.3. Предприятие выпускает электронные изделия двух типов (изделия А и В). На выпуск изделий расходуется платина и палладий. На одно изделие А требуется 13 г платины и 8 г палладия, на одно изделие В - 6 г платины и 11 г палладия. Предприятие имеет возможность использовать не более 90 г платины и не более 88 г палладия.

Изделия А продаются по цене 12 тыс. ден.ед., изделия В – по 10 тыс. ден.ед.

Величины себестоимости изделий (т.е. затраты на их выпуск) зависят от объема их производства и приближенно описываются следующими формулами:

- себестоимость одного изделия А: 7+0,2X_1, где X_1 - объем производства изделий А;
- себестоимость одного изделия В: 8+0,2X_2, где X_2 - объем производства изделий В.

Требуется составить план производства, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

Как отмечено выше, объемы производства изделий А и В обозначены через переменные X_1 и X_2.

Составим целевую функцию задачи, выражающую прибыль от производства изделий. Будем считать, что прибыль от продажи одного изделия представляет собой разность его цены и себестоимости. Прибыль от продажи *одного*изделия А можно выразить следующей формулой: 12-(7+0,2X_1) = 5-0,2X_1. Аналогично выразим прибыль от продажи одного изделия В: 10-(8+0,2X_2) = 2-

-0,2X_2. Таким образом, целевая функция задачи (прибыль от продажи всех изделий А и В) имеет следующий вид:

E = (5-0,2X_1)X_1 + (2-0,2X_2)X_2 = 5X_1 - 0,2 + 2X_2 - 0,2→ *max*.

Приведем математическую модель задачи:

$13X_1 + 6X_2 \leq 90$

$8X_1 + 11X_2 \leq 88$

$X_1, X_2 \geq 0$

X_1, X_2 - целые

E = 5X_1 - 0,2 + 2X_2 - 0,2→ *max*.

Здесь ограничения устанавливают предельный расход платины и палладия.

В этой задаче система ограничений линейная, а целевая функция – нелинейная (квадратичная). Таким образом, данная задача представляет собой задачу нелинейного квадратичного программирования.

Решение задач нелинейного программирования. Градиентные методы. Метод Франка-Вульфа

Наиболее универсальными из методов нелинейного программирования являются градиентные методы. Эти методы основаны на использовании градиента целевой функции.

Напомним, что градиент любой функции нескольких переменных $F(X_1,X_2,...,X_n)$ – это *вектор*, координаты которого представляют собой частные производные этой функции:

$$grad\ F = \left(\frac{\partial F}{\partial X_1}, \frac{\partial F}{\partial X_2}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial X_n}\right).$$

Из высшей математики известно важное свойство градиента: он указывает направление наискорейшего возрастания функции. Вектор -*grad F* называется *антиградиентом* функции F и указывает направление ее наискорейшего убывания.

Принцип работы всех градиентных методов заключается в пошаговом переходе от некоторого начального решения к новым решениям в направлении градиента (для задач, в которых требуется максимизация целевой функции) или антиградиента (для задач минимизации). В большинстве случаев решение задачи на основе градиентных методов включает следующие основные этапы.

1. Определяется некоторое начальное допустимое решение задачи.

2. Выполняется переход от текущего решения к новому решению в направлении градиента (или антиградиента). Величина этого перехода определяется по-разному в зависимости от условий задачи и используемого метода.

3. Определяется разность значений целевой функции для нового и предыдущего решений. Если эта разность мала (не превышает некоторой заданной точности), то найденное решение принимается в качестве оптимального. В противном случае выполняется возврат к шагу 2.

Рассмотрим один из градиентных методов – метод Франка-Вульфа. Этот метод предназначен для решения задач с линейной системой ограничений и нелинейной целевой функцией. Метод наилучшим образом подходит для решения задач с квадратичной целевой функцией, хотя может применяться и для решения задач с целевыми функциями другого вида.

Решим задачу из **примера 2.3**, используя метод Франка-Вульфа.

Предварительно найдем градиент целевой функции:

$grad\ E = \left(\frac{\partial E}{\partial X_1}; \frac{\partial E}{\partial X_2} \right)$ =(5-0,4X_1, 2-0,4X_2).

Найдем также начальное допустимое решение. В качестве такого решения можно использовать любой набор значений X_1 и X_2, удовлетворяющий системе ограничений. Начальное допустимое решение можно найти, например, следующим образом: исключить из целевой функции все нелинейные элементы и решить симплекс-методом полученную задачу линейного программирования. Для рассматриваемого примера такая задача будет следующей:

$13X_1 + 6X_2 \le 90$

$8X_1 + 11X_2 \le 88$

$X_1, X_2 \ge 0$

$E = 5X_1 + 2X_2 \to max.$

Решив эту задачу, получим начальное допустимое решение: =6,923, =0. Найдем значение целевой функции для этого решения: $E^{(0)}$ = 5·6,923 - -0,2·6,923^2 + 2·0 - 0,2·0^2 = 25,03.

Необходимо также задать требуемую точность решения задачи (ε). Зададим ее равной 500 ден.ед., т.е. будем считать, что решение найдено, если переход к новому решению приводит к увеличению целевой функции не более чем на 500 ден.ед. В данной задаче целевая функция выражается в тысячах ден.ед., поэтому ε=0,5.

Решим задачу, используя итерационный алгоритм на основе метода Франка-Вульфа.

Итерация 1

1. Определяется градиент целевой функции в точке ОДР, соответствующей текущему решению:

$grad\ E\ (X^{(0)})$= (5-0,4·6,923; 2-0,4·0) = (2,2; 2).

2. Определяется угловая точка ОДР, соответствующая предельно допустимому (без нарушения ограничений) перемещению от текущего решения в направлении градиента. Для этого решается задача линейного программирования с исходной системой ограничений и целевой функцией, коэффициентами которой являются координаты градиента:

$13X_1 + 6X_2 \le 90$

$8X_1 + 11X_2 \le 88$

$X_1, X_2 \ge 0$

$W = 2{,}2X_1 + 2X_2 \to max.$

Решение этой задачи следующее: =4,863, = 4,463. Это означает, что поиск нового решения будет выполняться в направлении от точки $X^{(0)}$ = = (6,923; 0) к точке X^*= (4,863; 4,463).

3. Составляются уравнения для перехода к новому решению:

$X_1^{(1)} = X_1^{(0)} + \lambda(X_1^* - X_1^{(0)})$;

$X_2^{(1)} = X_2^{(0)} + \lambda(X_2^* - X_2^{(0)})$,

где λ – коэффициент, задающий величину перемещения от текущего решения к новому решению в направлении точки X^*. Этот коэффициент определяется на следующем шаге.

Для рассматриваемого примера эти уравнения имеют следующий вид:

$X_1^{(1)}$ = 6,923 + λ(4,863-6,923) = 6,923 – 2,06λ;

$X_2^{(1)}$ = 0 + λ(4,463-0) = 4,463λ.

4. Определяется коэффициент λ. Этот коэффициент находится таким образом, чтобы переход к новому решению обеспечивал максимальное значение целевой функции. С этой целью уравнения для перехода к новому решению, построенные на шаге 3, подставляются в целевую функцию E. В результате целевая функция представляется как функция от коэффициента λ:

E = 5(6,923 – 2,06λ) - 0,2(6,923 – 2,06λ)^2 + 2·4,463λ - 0,2(4,463λ)^2 =

$= -4{,}8\ \lambda^2 + 4{,}3\ \lambda + 25.$

Значение λ находится из условия экстремума целевой функции, т.е. из условия $dE/d\lambda=0$:

$dE/d\lambda=-9{,}6\lambda + 4{,}3 = 0.$

λ=0,448.

Примечания:

1. Если значение λ, найденное из уравнения $dE/d\lambda=0$, оказывается *больше единицы*, то принимается $\lambda=1$. Это означает, что экстремум целевой функции в направлении, задаваемом градиентом, находится за пределами ОДР. В этом случае новое решение должно находиться на границе ОДР (т.е. в точке X^*), но не выходить за нее.

2. Если уравнение $dE/d\lambda=0$ не имеет решений (например, не зависит от λ), то также принимается $\lambda=1$.

5. Из уравнений, составленных на шаге 3, определяется новое решение:

$X_1^{(1)} = 6{,}923 - 2{,}06 \cdot 0{,}448 = 6;$

$X_2^{(1)} = 4{,}463 \cdot 0{,}448 = 2.$

Определяется значение целевой функции для полученного решения: $E^{(1)} = 5 \cdot 6 - 0{,}2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 2 - 0{,}2 \cdot 2^2 = 26.$

6. Проверяется условие окончания поиска решения. Для этого определяется разность значений целевой функции для нового и предыдущего решения: Эта величина сравнивается с заданной точностью ε. Если $\Delta E \le \varepsilon$, то текущее решение принимается в качестве оптимального. В данном случае $\Delta E = 0{,}97$, $\varepsilon = 0{,}5$. Таким образом, условие окончания поиска решения не выполняется. Требуется следующая итерация.

Итерация 2

1. Определяется градиент целевой функции в точке ОДР, соответствующей текущему решению:

$grad\ E\ (X^{(1)}) = (5-0{,}4 \cdot 6;\ 2-0{,}4 \cdot 2) = (2{,}6;\ 1{,}2).$

2. Определяется угловая точка ОДР, соответствующая предельно допустимому перемещению от текущего решения в направлении градиента. Для этого решается следующая задача линейного программирования:

$13X_1 + 6X_2 \le 90$

$8X_1 + 11X_2 \le 88$

$X_1, X_2 \ge 0$

$W = 2{,}6X_1 + 1{,}2X_2 \to max.$

Решение этой задачи следующее: =4,863, = 4,463.

3. Составляются уравнения для перехода к новому решению:

$X_1^{(2)}$ = 6 + λ(4,863-6) = 6 – 1,137λ;

$X_2^{(2)}$ = 2 + λ(4,463-2) = 2 + 2,463λ.

4. Определяется коэффициент λ из условия экстремума целевой функции:

$E = 5(6 – 1{,}137\lambda) - 0{,}2(6 – 1{,}137\lambda)^2 + 2(2 + 2{,}463\lambda) - 0{,}2(2 + 2{,}463\lambda)^2 =$

$= -1{,}5\lambda^2 + 26.$

$dE/d\lambda = -3\lambda = 0.$

λ=0.

5. Из уравнений, составленных на шаге 3, определяется новое решение:

$X_1^{(2)}$ = 6 – 1,137·0 = 6;

$X_2^{(2)}$ = 2 + 2,463·0 = 2.

Определяется значение целевой функции для полученного решения: $E^{(2)} = 5\cdot6 - 0{,}2\cdot6^2 + 2\cdot2 - 0{,}2\cdot2^2 = 26.$

6. Проверяется условие окончания поиска решения. Определяется разность значений целевой функции для нового и предыдущего решения:

$$\Delta E = \left|E^{(2)} - E^{(1)}\right| = 0.$$

Так как $\Delta E \le \varepsilon$, оптимальное решение найдено: X_1=6, X_2=2. Оптимальное значение целевой функции E=26.

Таким образом, предприятию следует выпустить 6 изделий типа А и 2 изделия типа В. Такой план производства обеспечит предприятию максимальную прибыль в размере 26 тыс ден.ед.

Примечания:

1. В данном случае решение оказалось целочисленным, как и требуется по смыслу задачи. Если бы оно оказалось дробным, то для поиска оптимального целочисленного решения потребовалось бы применять специальные методы нелинейного целочисленного программирования. Эти методы достаточно сложны и не рассматриваются в данном пособии.

2. В рассмотренном примере решалась задача с целевой функцией, подлежащей максимизации. Если требуется минимизация целевой функции, то задача решается точно так же. Единственное отличие состоит в том, что целевая функция W в задаче, решаемой на шаге 2, также подлежит минимизации.

Решение задач нелинейного программирования средствами табличного процессора Excel

Решение задач нелинейного программирования в Excel в основном аналогично решению задач линейного программирования.

Рассмотрим решение примера 2.3 средствами Excel.

Предположим, что желательно получить результаты (значения переменных X_1 и X_2) в ячейках B2 и C2. В ячейке B3 введем формулу целевой функции:

=5*B2-0,2*B2^2+2*C2-0,2*C2^2

В ячейке B4 введем формулу первого ограничения (на расход платины):

=13*B2+6*C2

В ячейке D4 введем правую часть этого ограничения: 90.

Аналогично в ячейке B5 введем формулу ограничения на расход палладия (=8*B2+11*C2), в ячейке D5 – правую часть этого ограничения (88).

Укажем также некоторые поясняющие надписи и обозначения (хотя это и необязательно). Рабочий лист будет иметь примерно такой вид, как показано на рис.2.1.

Примечание. Значения 0 в ячейках B3-B5 получены автоматически для начальных значений переменных, равных нулю.

Для решения задачи из меню “Сервис” выберем элемент “Поиск решения”. В поле “Установить целевую ячейку” указывается ячейка B3, где находится формула целевой функции. Используя переключатели, необходимо указать, что требуется установить ячейку B3 “равной максимальному значению” (так как целевая функция в этой задаче подлежит максимизации). В поле “Изменяя ячейки” указываются ячейки, в которых должны находиться значения переменных: B2:C2.

В области “Ограничения” указываются ограничения2. Необходимо ввести ограничения на расход платины и палладия, заданные на рабочем листе, а также ограничение на неотрицательность всех переменных (B2:C2>=0) и ограничение на их целочисленность (в поле “Ссылка на ячейку” указать B2:C2, а в поле знака ограничения выбрать отметку “цел”).

Для решения задачи следует нажать кнопку “Выполнить”. Рабочий лист с результатами решения показан на рис.2.2.

	A	B	C	D
1		X1	X2	
2		0	0	
3	Целевая функция	0	->	max
4	Ограничения	0	<=	90
5		0	<=	88
6				

. Рабочий лист Excel для решения примера 2.3

	A	B	C	D
1		X1	X2	
2		6	2	
3	Целевая функция	26	->	max
4	Ограничения	90	<=	90
5		70	<=	88
6				

. Рабочий лист Excel с результатами решения примера 2.3

В ячейках B2 и C2 получены оптимальные значения переменных, в ячейке B3 – оптимальное значение целевой функции. Эти величины совпадают с результатами, полученными по методу Франка-Вульфа.

В ячейках B4 и B5 находятся значения левых частей ограничений. Видно, что на выпуск изделий будет израсходовано 90 г платины и 70 г палладия.

Примечания.

1. В табличном процессоре Excel для решения задач оптимизации (элемент меню “Поиск решения”) используются именно градиентные методы.

2. В некоторых случаях табличный процессор Excel не находит решения задачи при нулевых начальных значениях переменных. Обычно это происходит в случаях, когда в целевой функции или в каком-либо ограничении используется операция деления. При нулевых значениях переменных происходит деление на ноль и выводится сообщение об ошибке. В таких случаях в ячейках, в которых определяются значения переменных, перед началом решения задачи следует указать произвольные начальные значения (например, единицы).

ТЕМА 3 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

3.1 Постановка задачи. Принцип работы метода динамического программирования

Метод динамического программирования предназначен для задач, решение которых может быть представлено как некоторая многошаговая операция, т.е. последовательность однотипных шагов. Решение на каждом шаге принимается с учетом результатов предыдущих шагов, а также с учетом последствий принимаемого решения для последующих шагов.

К числу задач, для которых может применяться метод динамического программирования, относится большинство задач планирования на несколько периодов времени (например, на несколько лет). Шагом в таких задачах является один плановый период (например, один год). Метод динамического

программирования применяется также для многих задач, в которых имеется возможность искусственно представить процесс принятия решения как последовательность из нескольких однотипных шагов.

Общая постановка задачи, решаемой методом динамического программирования, следующая. Имеется некоторая операция, находящаяся в начальном состоянии S_0. Операция реализуется за N шагов. На каждом шаге принимается некоторое решение U_k, где k – номер шага (k=1,...,N). Выбор каждого решения U_k вызывает переход операции из состояния S_{k-1} в новое состояние S_k, а также обеспечивает некоторое значение критерия эффективности Z_k. Требуется определить последовательность решений U_1, U_2, ...,U_k, обеспечивающих экстремальное (максимальное или минимальное) значение общего критерия эффективности E, зависящего от значений критерия эффективности на отдельных шагах Z_1, Z_2,...,Z_k.

<u>Примечание</u>. В литературе по динамическому программированию вместо термина “решение” обычно используется термин “управление”.

Основной принцип решения задач на основе метода динамического программирования (*принцип оптимальности*, или *принцип Беллмана*) состоит в следующем: решение на каждом шаге выбирается таким образом, чтобы обеспечить максимальную эффективность *на данном шаге и на всех последующих шагах*.

Задача, представленная в виде многошаговой операции, может быть решена методом динамического программирования, если она удовлетворяет следующим свойствам:

− *отсутствие последействия*: состояние операции по окончании каждого шага (S_k) и критерий эффективности на каждом шаге (Z_k) зависят только от решения, принятого на данном шаге (U_k), и от состояния операции в начале данного шага (S_{k-1}), и не зависят от того, каким образом операция перешла в состояние S_{k-1};

− *аддитивность или мультипликативность критерия эффективности*: общий критерий эффективности представляет собой сумму критериев эффективности на отдельных шагах ($E = Z_1+Z_2+...+Z_N$) или их произведение ($E = Z_1 \cdot Z_2 \cdot ... \cdot Z_N$).

Решение задач динамического программирования обычно включает два цикла: сначала – *от последнего шага к первому* (обратная прогонка, или условная оптимизация), затем – *от первого шага к последнему* (прямая прогонка, или безусловная оптимизация).

В цикле условной оптимизации для каждого шага находится множество *возможных* состояний операции в начале данного шага. Для *каждого* из этих состояний находится *условно оптимальное решение*, т.е. решение, оптимальное *для данного состояния*. Поиск условно оптимальных решений начинается с *последнего* (N-го) шага, так как на этом шаге имеется возможность выбирать решение только с учетом эффективности на данном шаге (последующих шагов нет). Затем на других шагах (N-1-м, N-2-м,...,первом) условно оптимальные решения выбираются согласно принципу оптимальности, т.е. с учетом эффективности на данном шаге и на последующих шагах. На всех шагах от N-го до *второго* определяется несколько условно оптимальных решений – по одному для каждого возможного состояния. Для *первого* шага начальное состояние (S_0) обычно известно точно, поэтому для этого шага находится только одно (безусловно оптимальное) решение U1*.

В цикле безусловной оптимизации для каждого шага определяется безусловно оптимальное решение. Поиск безусловно оптимальных решений начинается с первого шага, так как для него известно начальное состояние S_0, поэтому можно определить единственное (безусловно оптимальное) решение U1. Определяется состояние S_1, в которое переходит операция из состояния S_0 в результате решения U1, т.е. состояние в начале второго шага. Для него в цикле условной оптимизации уже найдено оптимальное решение U2. Определяется состояние операции в начале третьего шага – состояние S_2, в которое операция переходит в результате решения U2. Для этого состояния в цикле условной оптимизации также найдено оптимальное решение U3. Аналогично определяются безусловно оптимальные решения для последующих шагов.

Важно отметить, что для метода динамического программирования *не существует* вычислительной процедуры, одинаковой для всех задач (в отличие, например, от симплекс-метода). Это означает, что правила вычислений, составления таблиц и т.д. полностью зависят от конкретной задачи. Общими являются лишь основные принципы решения: принцип оптимальности, решение задачи с использованием условной и безусловной оптимизации.

3.2 Примеры решения задач на основе метода динамического программирования

При рассмотрении примеров будем использовать следующие обозначения: S_k – состояние в конце k-го шага (или, другими словами, состояние в начале k+1-го шага); U_k – любое возможное (допустимое) решение на k-м шаге; Uk* - *оптимальное* решение на k-м шаге; Z_k – критерий эффективности на k-м шаге; E_k – *суммарный* критерий эффективности *на всех шагах*, начиная с k-го (т.е. на шагах от k-го до N-го); Ek* - *оптимальный* (в рассматриваемых примерах – максимальный) суммарный критерий эффективности *на всех шагах*, начиная с k-го.

Пример 3.1. Денежные средства в размере 60 млн ден.ед. распределяются между четырьмя предприятиями (П1, П2, П3, П4), принадлежащими одной крупной фирме.

Денежные средства выделяются в размерах, кратных 20 млн ден.ед. Каждым предприятием разработаны планы использования денежных средств на развитие производства. Определена прибыль, которую получит каждое предприятие в результате использования выделенных средств (табл.3.1).

Таблица 3.1

Выделенные средства, млн ден.ед.	Прибыль предприятий, млн ден.ед.			
	П1	П2	П3	П4
0	0	0	0	0
20	9	10	6	12
40	16	18	12	17
60	22	20	25	20

Например, если предприятию П1 не будут выделены средства, то оно не получит никакой прибыли. Если этому предприятию будет выделено 20 млн ден.ед., то его прибыль от использования этих средств составит 9 млн ден.ед. Если будет выделено 40 млн ден.ед., то прибыль составит 16 млн ден.ед., а при выделении 60 млн –22 млн ден.ед.

Требуется распределить имеющиеся средства (60 млн ден.ед.) между предприятиями таким образом, чтобы общая прибыль фирмы была максимальной.

В данной задаче в качестве шагов будем рассматривать выделение средств предприятиям: первый шаг – выделение средств предприятию П1, второй – П2, и т.д. (всего 4 шага). Таким образом, распределение средств между предприятиями можно рассматривать как многошаговую операцию. В качестве состояния этой операции будем использовать величину имеющихся средств, которые требуется распределить. Начальное состояние S_0=60. Решение на каждом шаге – это денежные средства, выделяемые предприятию (U_k, k=1,...,4). Критерий эффективности для каждого шага – прибыль, полученная *предприятием* (Z_k, k=1,...,4). Общий критерий эффективности – это прибыль фирмы, т.е. сумма прибылей всех предприятий: $E = Z_1+Z_2+Z_3+Z_4$.

Задача удовлетворяет свойству отсутствия последействия. Состояние по окончании каждого шага (т.е. имеющаяся сумма средств, подлежащая распределению, S_k) зависит только от суммы, имевшейся в начале шага (S_{k-1}) и от решения, принятого на данном шаге (т.е. от выделенной на данном шаге денежной суммы U_k): $S_k=S_{k-1}-U_k$. Критерий эффективности на каждом шаге (т.е. прибыль предприятия Z_k) зависит только от решения на данном шаге, т.е. от выделенной предприятию суммы U_k, и не зависит от того, сколько средств выделено другим предприятиям.

Задача удовлетворяет также свойству аддитивности критерия эффективности: общий критерий эффективности (прибыль фирмы) равен сумме критериев эффективности на отдельных шагах (прибылей предприятий).

Задача решается в два цикла.

Цикл условной оптимизации

Шаг 4 (выделение средств предприятию П4)

Определяются все возможные состояния S_3 к началу шага 4 (или к концу шага 3), т.е. все возможные значения остатка денежных средств после их выделения предприятиям П1, П2 и П3. Этот остаток может составлять 0 ден.ед. (если все средства выделяются предприятиям П1, П2 и П3), 20 млн ден.ед. (если предприятиям П1, П2, П3 выделяется 40 млн ден.ед.), 40 млн ден.ед. (если предприятиям П1, П2, П3 выделяется 20 млн ден.ед.) или 60 млн ден.ед. (если предприятиям П1, П2, П3 средства вообще не выделяются).

Для каждого из возможных состояний определяется условно оптимальное решение, т.е. решение, оптимальное при условии, что остаток денежных средств равен S_3. Так как предприятие П4 – последнее (предполагается, что другим предприятиям средства уже выделены), оптимальное решение состоит в выделении предприятию П4 *всех* оставшихся средств.

Возможные состояния в начале четвертого шага S_3, соответствующие им условно оптимальные решения U4* и значения критерия эффективности (прибыль предприятия П4) E4* приведены в табл.3.2.

Важно обратить внимание, что по результатам четвертого шага *не выяснено*, сколько средств требуется выделять предприятию П4. Это пока невозможно, так как неизвестно начальное состояние четвертого шага S_3. Поэтому найдены условно оптимальные решения для *всех* возможных состояний.

Таблица 3.2

S_3		
0	0	0
20	20	12
40	40	17
60	60	20

Шаг 3 (выделение средств предприятиям П3 и П4)

Все расчеты для шага 3 приведены в табл.3.3.

Таблица 3.3

S_2	U_3	Z_3	S_3		E_3		
0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	20	12	12	0	12
	20	6	0	0	6		
40	0	0	40	17	17	20	18
	20	6	20	12	18		
	40	12	0	0	12		
60	0	0	60	20	20	60	25
	20	6	40	17	23		
	40	12	20	12	24		
	60	25	0	0	25		

В таблице использованы следующие обозначения: S_2 – возможные суммы денежных средств, распределяемые между предприятиями П3 и П4 (т.е. оставшиеся после выделения средств предприятиям П1 и П2); U_3 – возможные варианты выделения средств предприятию П3; Z_3 – прибыль предприятия П3 от выделения средств в размере U_3; S_3 – остаток денежных средств после их выделения предприятиям П1, П2 и П3 (т.е. средства, выделяемые предприятию П4); E4* - прибыль предприятия П4 от выделенных ему средств в размере S_3; E_3 – суммарная прибыль предприятий П3 и П4 (сумма величин из столбцов Z_3 и E4*); U3* - условно оптимальное решение для состояния S_2 (денежные средства, которые следует выделить предприятию П3 при наличии суммы S_2); E3* - условно оптимальный критерий эффективности для предприятий П3 и П4, т.е. прибыль, получаемая этими предприятиями в результате решения U3*.

Рассмотрим порядок решения для шага 3.

Определяются все возможные состояния S_2 к началу шага 3 (или к концу шага 2), т.е. все возможные значения денежных средств, распределяемых между предприятиями П3 и П4. Этот остаток может составлять 0 ден.ед. (если все средства выделяются предприятиям П1 и П2), 20 млн ден.ед. (если предприятиям П1 и П2 выделено 40 млн ден.ед.), 40 млн ден.ед. (если предприятиям П1 и П2 выделено 20 млн ден.ед.) или 60 млн ден.ед. (если предприятиям П1 и П2 средства вообще не выделяются).

Для каждого из возможных состояний определяется условно оптимальное решение, т.е. решение, оптимальное при условии, что остаток денежных средств равен S_2. Средства для предприятия П3 должны выделяться таким образом, чтобы обеспечить максимальную *суммарную* прибыль для П3 и П4.

Предположим, что денежные средства, распределяемые между предприятиями П3 и П4, составляют 20 млн ден.ед. (S_2=20). Эти средства можно оставить для предприятия П4 (тогда предприятию П3 средства не выделяются, U_3=0) или выделить их предприятию П3 (U_3=20). Если U_3=0, то предприятие П3 не получит прибыли (Z_3=0). В этом случае остаток средств (состояние) в конце третьего шага составит S_3=20 млн ден.ед. Эти средства будут выделены предприятию П4, и его прибыль составит Е4*=12 млн ден.ед. Суммарная прибыль предприятий П3 и П4 составит E_3=0+12=12 млн ден.ед. Если U_3=20, то предприятие П3 получит прибыль Z_3=6 млн ден.ед. Остаток средств (состояние) в конце третьего шага составит S_3=0. Предприятию П4 не будет выделено никаких средств, и оно не получит прибыли (Е4*=0). Суммарная прибыль предприятий П3 и П4 составит E_3=6+0=6 млн ден.ед. Таким образом, если между предприятиями П3 и П4 распределяется сумма в размере 20 млн ден.ед., то эти средства не следует выделять предприятию П3; их следует выделить предприятию П4, так как общая прибыль в этом случае будет максимальной. Другими словами, для состояния S_2=20 условно оптимальное решение U3*=0, условно оптимальный критерий эффективности Е3*=12.

Предположим, что денежные средства, распределяемые между предприятиями П3 и П4, составляют 40 млн ден.ед. (S_2=40). Предприятию П3 можно выделить 0, 20 или 40 млн ден.ед. (U_3=0, 20 или 40). Если U_3=0, то предприятие П3 не получит прибыли (Z_3=0). В этом случае остаток средств (состояние) в конце третьего шага составит S_3=40 млн ден.ед. Эти средства будут выделены предприятию П4, и его прибыль составит Е4*=17 млн ден.ед. *Суммарная* прибыль предприятий П3 и П4 составит E_3=0+17=17 млн ден.ед. Аналогично можно определить, что при выделении предприятию П3 суммы в размере 20 млн ден.ед. (т.е. при U_3=20) суммарная прибыль предприятий П3 и П4 составит E_3=6+12=18 млн ден.ед. При U_3=40 суммарная прибыль предприятий П3 и П4 составит E_3=12+0=12 млн ден.ед. Таким образом, для состояния S_2=40 условно оптимальное решение U2*=20, условно оптимальный критерий эффективности Е3*=18 млн ден.ед. Это означает, что при распределении между предприятиями П3 и П4 средств в размере 40 млн ден.ед. предприятию П3 следует выделить 20 млн ден.ед.

Аналогично можно определить, что при распределении между предприятиями П3 и П4 средств в размере 60 млн ден.ед. предприятию П3 следует выделить все 60 млн ден.ед. (для состояния S_2=60 условно оптимальное решение U3*=60, условно оптимальный критерий эффективности Е3*=25 млн ден.ед.).

Шаг 2 (выделение средств предприятиям П2, П3 и П4)

Все расчеты для шага 2 приведены в табл.3.4.

Таблица 3.4

S_1	U_2	Z_2	S_2		E_2		
0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	20	12	12	0	12
	20	10	0	0	10		
40	0	0	40	18	18	20	22
	20	10	20	12	22		
	40	18	0	0	18		
60	0	0	60	25	25	40	30
	20	10	40	18	28		
	40	18	20	12	30		
	60	20	0	0	20		

Обозначения в таблице: S_1 – возможные суммы денежных средств, распределяемые между предприятиями П2, П3 и П4 (т.е. оставшиеся после выделения средств предприятию П1); U_2 – возможные варианты выделения средств предприятию П2; Z_2 – прибыль предприятия П2 от выделения средств в размере U_2; S_2 – остаток денежных средств после их выделения предприятиям П1 и П2 (т.е. средства, выделяемые предприятиям П3 и П4); E3*- максимальная *суммарная* прибыль предприятий П3 и П4 от выделенных им средств в размере S_2 (*определяется из табл.7.3*); E_2 – суммарная прибыль предприятий П2, П3 и П4 (сумма величин из столбцов Z_2 и); U2* - условно оптимальное решение для состояния S_1 (денежные средства, которые следует выделить предприятию П2 при наличии суммы S_1); E2* - условно оптимальный критерий эффективности для предприятий П2, П3 и П4, т.е. прибыль, получаемая этими предприятиями в результате решения U2*. Рассмотрим порядок решения для шага 2.

Определяются все возможные состояния S_1 к началу шага 2, т.е. все возможные значения денежных средств, распределяемых между предприятиями П2, П3 и П4. Этот остаток может составлять 0, 20, 40 или 60 млн ден.ед. (в зависимости от того, сколько средств выделяется предприятию П1).

Для каждого из возможных состояний S_1 определяется условно оптимальное решение, т.е. оптимальная денежная сумма, выделяемая предприятию П2 при условии, что имеются денежные средства в размере S_1. Средства для предприятия П2 должны выделяться таким образом, чтобы обеспечить максимальную *суммарную* прибыль предприятий П2, П3 и П4.

Предположим, что денежные средства, распределяемые между предприятиями П2, П3 и П4, составляют 20 млн ден.ед. (S_1=20). Предприятию П2 можно выделить 0 или 20 млн ден.ед. (U_2=0 или U_2=20). Если U_2=0, то предприятие П2 не получит прибыли (Z_2=0). В этом случае остаток средств (состояние) в конце второго шага составит S_2=20 млн ден.ед. Эти средства будут *распределены* между предприятиями П3 и П4. Из табл. 3.3 видно, что при оптимальном распределении таких средств между предприятиями П3 и П4 максимальная суммарная прибыль этих предприятий составит E3*=12 млн ден.ед. Суммарная прибыль предприятий П2, П3 и П4 составит E_2=0+12=12 млн ден.ед. Если U_2=20, то предприятие П2 получит прибыль Z_2=10 млн ден.ед. Остаток средств (состояние) в конце третьего шага составит S_3=0. Предприятиям П3 и П4 не будет выделено никаких средств, и они не получат прибыли (E3*=0), а суммарная прибыль предприятий П2, П3 и П4 составит E_2=10+0=10 млн ден.ед. Таким образом, для состояния S_1=20 условно оптимальное решение U2*=0, условно оптимальный критерий эффективности E2*=12 млн ден.ед. Это означает, что при распределении средств в размере 20 млн ден.ед. между предприятиями П2, П3 и П4, предприятию П2 не следует выделять средства; все имеющиеся средства следует распределить между предприятиями П3 и П4.

Предположим, что денежные средства, распределяемые между предприятиями П2, П3 и П4, составляют 40 млн ден.ед. (S_1=40). Предприятию П2 можно выделить 0, 20 или 40 млн ден.ед. (U_2=0, 20 или 40). Если U_2=0, то предприятие П2 не получит прибыли (Z_2=0). Остаток средств в конце второго шага составит S_2=40 млн ден.ед. Эти средства будут распределены между предприятиями П3 и П4. Из табл.7.3 видно, что максимальная прибыль этих предприятий от использования таких средств составит E3*=18 млн ден.ед. Суммарная прибыль предприятий П2, П3 и П4 составит E_2=0+18=18 млн ден.ед. Аналогично можно определить, что при U_2=20 *суммарная* прибыль предприятий П2, П3 и П4 составит E_2=10+12=22 млн ден.ед. При U_2=40 суммарная прибыль предприятий П2, П3 и П4 составит E_2=18+0=18 млн ден.ед. Таким образом, для состояния S_1=40 условно оптимальное решение U2*=20, условно оптимальный критерий эффективности E2*=22 млн ден.ед. Это означает, что при распределении средств в размере 40 млн ден.ед. между предприятиями П2, П3 и П4, предприятию П2 следует выделить 20 млн ден.ед.

Аналогично можно определить, что при распределении между предприятиями П2, П3 и П4 средств в размере 60 млн ден.ед. предприятию П2 следует выделить 40 млн ден.ед.

Шаг 1 (выделение средств предприятиям П1, П2, П3 и П4)

Все расчеты для шага 1 приведены в табл.3.5. Обозначения в таблице: S_0 – начальная сумма денежных средств, распределяемых между всеми предприятиями; U_1 – возможные варианты выделения средств предприятию П1; Z_1 – прибыль предприятия П1 от выделения средств в размере U_1; S_1 – остаток денежных средств после их выделения предприятию П1 (т.е. средства, выделяемые предприятиям П2, П3 и П4); E2*- максимальная *суммарная* прибыль предприятий П2, П3 и П4 от выделенных им средств в размере S_1 (*определяется из табл.7.4*); E_1 – суммарная прибыль предприятий П1, П2, П3 и П4, т.е. *всех* предприятий (сумма величин из столбцов Z_1 и E2*); U1*- *безусловно* оптимальное решение для состояния S_0 (денежные средства, которые следует выделить предприятию П1 при наличии суммы S_0); E1*- *безусловно* оптимальный критерий эффективности для предприятий П1, П2, П3 и П4, т.е. прибыль, получаемая *всеми* предприятиями в результате решения U1*.

Начальная сумма денежных средств (состояние S_0) известна: S_0=60. Требуется определить, сколько средств необходимо выделить предприятию П1, чтобы обеспечить максимальную *суммарную* прибыль предприятий П1, П2, П3 и П4, т.е. *всех* предприятий. Так как начальное состояние на этом шаге известно точно (в отличие от других шагов), будет найдено *безусловно оптимальное* решение.

Таблица 3.5

S_0	U_1	Z_1	S_1		E_1		
60	0	0	60	30	30	20	31
	20	9	40	22	31		
	40	16	20	12	28		
	60	22	0	0	22		

Предприятию П1 можно выделить 0, 20, 40 или 60 млн ден.ед. (U_1=0, 20, 40 или 60). В зависимости от выделенных средств прибыль предприятия П1 (Z_1) может составлять 0, 9, 16 или 22 млн ден.ед. Остаток средств в конце первого шага S_1 (сумма, выделяемая предприятиям П2, П3 и П4) может составлять 60, 40, 20 или 0 млн ден.ед. Из табл.7.4 определяется максимальная прибыль предприятий П2, П3 и П4 (E2*) от использования средств в размере S_1: она может составлять 30, 22, 12 или 0 млн ден.ед. Для всех случаев определяется суммарная прибыль предприятий П1, П2, П3 и П4 (E_1): она может составлять 30, 31, 28 или 22 млн ден.ед. Таким образом, максимальная прибыль предприятий П1, П2, П3 и П4 (т.е. *всех* предприятий) достигается, если выделить предприятию П1 20 млн ден.ед. (при условии, что для остальных предприятий средства также будут распределяться оптимальным образом). Это означает, что оптимальным решением является выделение предприятию П1 средств в размере 20 млн ден.ед.: U1*=20. Прибыль *всех* предприятий в этом случае составит 31 млн ден.ед.

Цикл безусловной оптимизации

Для первого шага (выделение средств предприятию П1) получено безусловно оптимальное решение: U1*=20 млн ден.ед. Для предприятий П2, П3 и П4 остается 40 млн ден.ед. Таким образом, состояние в начале второго шага S_1=40. Из табл. 3.4 для этого состояния определяется оптимальное решение: U2*=20 (предприятию П2 выделяется 20 млн ден.ед.). Для предприятий П3 и П4 остается 20 млн ден.ед. (состояние в начале третьего шага S_2=20). Из табл. 3.3 для этого состояния определяется оптимальное решение: U3*=0 (предприятию П3 средства не выделяются). Для предприятия П4 остается 20 млн ден.ед. (S_3=20). Поэтому U4*=20.

Таким образом, оптимальное решение задачи следующее. Предприятию П1 следует выделить 20 млн ден.ед., предприятию П2 – также 20 млн ден.ед., предприятию П3 – не выделять средства, предприятию П4 – выделить 20 млн ден.ед. Общая прибыль составит 31 млн ден.ед., в том числе прибыль предприятия П1 – 9 млн ден.ед., П2 – 10 млн ден.ед., П3 – 0, П4 – 12 млн ден.ед.

Пример 3.2. Фирма владеет двумя предприятиями (П1 и П2). В связи с тем, что спрос на продукцию этих предприятий имеет сезонный характер, прибыль от вложения средств в производство продукции на этих предприятиях различна в разные периоды года. Прибыль (в процентах) для различных периодов года приведена в табл.3.6.

В конце каждого квартала выручка каждого предприятия распределяется следующим образом: 20% выплачивается акционерам фирмы, 80% - перераспределяется между предприятиями.

В начале года для вложения в производство выделена сумма в размере 5 млн ден.ед. Требуется составить план распределения средств в течение года таким образом, чтобы сумма, выплачиваемая акционерам в течение года, была максимальной.

Таблица 3.6

Предприятие	Прибыль, %			
	Январь-март	Апрель-июнь	Июль-сентябрь	Октябрь-декабрь
П1	80	50	50	70
П2	40	120	80	40

Величины в таблице обозначают следующее: если, например, предприятию П1 в начале января будет выделен 1 млн ден.ед., то прибыль предприятия к концу марта составит 800 тыс ден.ед. (80% от выделенной суммы). Таким образом, выручка предприятия за квартал составит 1 млн 800 тыс ден.ед.

В данной задаче в качестве шагов будем рассматривать выделение средств предприятиям в начале каждого квартала: первый шаг – первый квартал, и т.д.

В качестве состояния операции будем использовать величину имеющихся средств, которые требуется распределить. Начальное состояние S_0=5. Состояние в начале k-го шага будем обозначать как S_{k-1}. Решение на каждом шаге – это денежные средства, выделяемые каждому из предприятий. Будем обозначать средства, выделяемые предприятию П1, как U_k, а средства, выделяемые предприятию П2 – как S_{k-1} - U_k, k=1,...,4. Критерий эффективности для каждого шага – сумма выплат акционерам (Z_k, k=1,...,4). Общий критерий эффективности – это выплаты акционерам в течение года: $E = Z_1+Z_2+Z_3+Z_4$.

Цикл условной оптимизации

Шаг 4 (распределение средств в четвертом квартале)

Пусть в конце третьего квартала между предприятиями распределяется сумма в размере S_3. Пусть предприятию П1 выделяется сумма в размере U_4, а предприятию П2 – S_3–U_4. Тогда выручка предприятий к концу четвертого квартала составит 1,7*U_4+1,4*(S_3–U_4). Из этой суммы акционерам будет выплачено 20%. Таким образом, выплаты акционерам в конце четвертого квартала определяются следующим образом:

$$E_4=Z_4=0,2*(1,7*U_4+1,4*(S_3-U_4)) = 0,06*U_4 + 0,28*S_3.$$

Видно, что максимальные выплаты акционерам обеспечиваются при максимальном значении U_4. Это означает, что предприятию П1 в четвертом квартале следует выделить всю имеющуюся сумму: $U4^*$ =S_3. Здесь $U4^*$ - условно оптимальное решение для четвертого шага. Условно оптимальное значение критерия эффективности (выплаты акционерам) на четвертом шаге определяется следующим образом: $E4^* = 0,06*S_3 + 0,28*S_3 = 0,34*S_3$.

Шаг 3 (распределение средств в третьем и четвертом кварталах)

Пусть в конце второго квартала между предприятиями распределяется сумма в размере S_2. Пусть предприятию П1 выделяется сумма в размере U_3, а предприятию П2 – S_2–U_3. Тогда выручка предприятий к концу третьего квартала составит 1,5*U_3+1,8*(S_2–U_3). Из этой суммы 20% будет выплачено акционерам, а 80% - распределено между предприятиями. Выплаты акционерам за *третий и четвертый* кварталы определяются следующим образом:

$$E_3=Z_3+E4^*=0,2*(1,5*U_3+1,8*(S_2-U_3)) + E4^*.$$

Выразим величину E_3 через U_3 и S_2. Как показано выше, $E4^*=0,34*S_3$, где S_3 – сумма средств, распределяемых между предприятиями в начале четвертого квартала.

Эта сумма составляет 80% от выручки предприятий в третьем квартале: S_3=0,8*(1,5*U_3+1,8*(S_2–U_3)). Таким образом, E4*=0,34*0,8*(1,5*U_3+1,8*(S_2–

–U_3)) = 0,49*S_2–0,08*U_3.

Подставляя эту величину в уравнение для E_3, получим:

E_3= 0,2*(1,5*U_3+1,8*(S_2–U_3)) + 0,49*S_2–0,08*U_3 = 0,85*S_2–0,14*U_3.

Видно, что максимальные выплаты акционерам обеспечиваются при *минимальном* значении U_3 (так как коэффициент при U_3 отрицательный). Таким образом, условно оптимальное решение для третьего квартала состоит в том, чтобы не выделять средства предприятию П1: U3*=0. Подставляя U_3=0, получим выражение для условно оптимального значения критерия эффективности на третьем и четвертом шагах: E3* = 0,85*S_2.

Шаг 2 (распределение средств во втором - четвертом кварталах)

Пусть в конце первого квартала между предприятиями распределяется сумма в размере S_1. Пусть предприятию П1 выделяется сумма в размере U_2, а предприятию П2 – сумма в размере S_1–U_2. Тогда выручка предприятий к концу второго квартала составит 1,5*U_2+2,2*(S_1–U_2). Из этой суммы 20% будет выплачено акционерам, а 80% - распределено между предприятиями. Выплаты акционерам за второй - четвертый кварталы определяются следующим образом:

E_2=Z_2+=0,2*(1,5*U_2+2,2*(S_1–U_2)) + E3*.

Выполнив расчеты, аналогичные приведенным на шаге 3, выразим величину E_2 через U_2 и S_1:

E_2 = 0,2*(1,5*U_2+2,2*(S_1–U_2)) +E3* = 0,2*(1,5*U_2+2,2*(S_1–U_2)) + 0,85*S_2 =

= 0,2*(1,5*U_2+2,2*(S_1–U_2)) + 0,85*0,8*(1,5*U_2+2,2*(S_1–U_2)) =

= 1,94*S_1 – 0,62*U_2.

Видно, что максимальные выплаты акционерам обеспечиваются при минимальном значении U_2 (так как коэффициент при U_2 отрицательный). Таким образом, условно оптимальное решение для второго квартала состоит в том, чтобы не выделять средства предприятию П1: =0. Подставляя U_2=0 в выражение для E_2, получим выражение для условно оптимального значения критерия эффективности на втором - четвертом шагах: = 1,94*S_1.

Шаг 1 (распределение средств в первом - четвертом кварталах)

В начале первого квартала между предприятиями распределяется сумма в размере S_0=5. Пусть предприятию П1 выделяется сумма в размере U_1, а предприятию П2 – сумма в размере $S_0–U_1$. Выручка предприятий к концу первого квартала составит $1,8*U_1+1,4*(S_0–U_1)$. Как и в другие кварталы, 20% из этой суммы будет выплачено акционерам, а 80% - распределено между предприятиями. Выплаты акционерам за первый - четвертый кварталы определяются следующим образом:

$E_1=Z_1+=0,2*(1,8*U_1+1,4*(S_0–U_1))$ + E2*.

Выполнив расчеты, аналогичные приведенным на предыдущих шагах, выразим величину E_1 через U_1 и S_0:

$E_1 = 0,2*(1,8*U_1+1,4*(S_0–U_1))$ +E2* $= 0,2*(1,8*U_1+1,4*(S_0–U_1)) + 1,94*S_1 =$
$= 0,2*(1,8*U_1+1,4*(S_0–U_1)) + 1,94*0,8*(1,8*U_1+1,4*(S_0–U_1)) = 2,45*S_0 + 0,7*U_1$.

Видно, что максимальные выплаты акционерам *за весь год* обеспечиваются при максимальном значении U_1. Таким образом, *безусловно* оптимальное решение для первого квартала состоит в том, чтобы выделить предприятию П1 все имеющиеся средства:U1* = S_0. Для первого шага (в отличие от остальных шагов) начальное состояние известно: S_0 = 5 млн ден.ед. Итак, в первом квартале предприятию П1 следует выделить 5 млн ден.ед.

Цикл безусловной оптимизации

Шаг 1 (распределение средств в первом квартале)

Безусловно оптимальное решение для первого квартала найдено выше:U1* = 5 (все имеющиеся средства выделяются предприятию П1).

Выручка предприятия П1 к концу первого квартала составит 1,8*5 = 9 млн ден.ед. Найдем сумму выплат акционерам в первом квартале: Z_1=0,2*9 = 1,8 млн ден.ед. Найдем состояние в конце первого квартала, т.е. сумму средств, распределяемых между предприятиями в начале второго квартала: S_1=0,8*9 = 7,2 млн ден.ед.

Шаг 2 (распределение средств во втором квартале)

Состояние в начале второго шага S_1= 7,2 млн ден.ед. В ходе условной оптимизации выяснено, что все эти средства следует выделить предприятию П2 (U2*=0).

Выручка предприятия П2 к концу второго квартала составит 2,2*7,2= =15,84 млн ден.ед. Выплаты акционерам во втором квартале составят Z_2=0,2*15,84 = 3,17 млн ден.ед. Состояние в конце второго шага (т.е. сумма средств, распределяемых между предприятиями в начале третьего квартала) следующее: S_2=0,8*15,84 = 12,67 млн ден.ед.

Шаг 3 (распределение средств в третьем квартале)

Состояние в начале третьего шага S_2= 12,67 млн ден.ед. В ходе условной оптимизации выяснено, что все эти средства следует выделить предприятию П2 (U3*=0).

Выручка предприятия П2 к концу третьего квартала составит 1,8*12,67= =22,81 млн ден.ед. Выплаты акционерам в третьем квартале составят Z_3=0,2*22,81 = 4,56 млн ден.ед. Состояние в конце третьего шага (т.е. сумма средств, распределяемых между предприятиями в начале четвертого квартала) следующее: S_3=0,8*22,81 = 18,25 млн ден.ед.

Шаг 4 (распределение средств в четвертом квартале)

Состояние в начале четвертого шага S_3= 18,25 млн ден.ед. В ходе условной оптимизации выяснено, что все эти средства следует выделить предприятию П1 (U3* = S_3 = 18,25).

Выручка предприятия П1 к концу четвертого квартала составит 1,7*18,25= =31,03 млн ден.ед. Выплаты акционерам в четвертом квартале составят Z_4=0,2*31,03 = 6,21 млн ден.ед.

Таким образом, оптимальное решение задачи следующее. В первом квартале следует выделить предприятию П1 5 млн ден.ед, во втором квартале выделить предприятию П2 7,2 млн ден.ед., в третьем квартале выделить предприятию П2 12,67 млн ден.ед., в четвертом квартале выделить предприятию П1 18,25 млн ден.ед. Выплаты акционерам в первом квартале составят 1,8 млн ден.ед., во втором – 3,17, в третьем – 4,56, в четвертом – 6,21 млн ден.ед. Таким образом, выплаты акционерам в течение года составят 15,74 млн ден.ед.