Таблица разложений некоторых функций в степенные ряды

$e^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+...+\frac{\alpha^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}$, область сходимости ряда: $-\infty<\alpha<+\infty$
$\sin\alpha=\alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\frac{\alpha^7}{7!}+...+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\cdot\alpha^{2n-1}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\alpha^{2n-1}}{(2n-1)!}$ Область сходимости ряда: $-\infty<\alpha<+\infty$
$\cos\alpha=1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\frac{\alpha^6}{6!}+...+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\alpha^{2n}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^{2n}}{(2n)!}$ Область сходимости ряда: $-\infty<\alpha<+\infty$
$\ln(1+\alpha)=\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{3}-\frac{\alpha^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{\alpha^n}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\alpha^n}{n}$ Ряд сходится при $-1<\alpha<1$ или, то же самое, при $\lvert\alpha\rvert<1$ **Кроме того**, в каждом конкретном случае нужно исследовать концы интервала сходимости – там ряд тоже может сходиться!
Биномиальное разложение: $(1+\alpha)^k=1+\alpha\cdot k+\frac{k(k-1)}{2!}\cdot\alpha^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\cdot\alpha^3+...+\frac{k(k-1)(k-2)\cdot...\cdot(k-n+1)}{n!}\cdot\alpha^n+...=$ $=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k(k-1)(k-2)\cdot...\cdot(k-n+1)}{n!}\cdot\alpha^n$ Ряд сходится при $-1<\alpha<1$ $\left(\lvert\alpha\rvert<1\right)$. **Как и в предыдущем пункте** – концы интервала подлежат исследованию!
Распространенные частные случаи биномиального разложения: $\sqrt{1+\alpha}=1+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2\cdot4}\cdot\alpha^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\cdot\alpha^3-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\alpha^4+...$ $\sqrt{1-\alpha}=1-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2\cdot4}\cdot\alpha^2-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\cdot\alpha^3-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\alpha^4-...$ $\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}=1-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\alpha^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\alpha^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\alpha^4-...$ $\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}=1+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\alpha^2+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\alpha^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\alpha^4+...$ $\frac{1}{1+\alpha}=1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4-\alpha^5+...$ $\frac{1}{1-\alpha}=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+...$

$$arctg\alpha=\alpha-\frac{\alpha^3}{3}+\frac{\alpha^5}{5}-\frac{\alpha^7}{7}+...+(-1)^n\cdot\frac{\alpha^{2n+1}}{2n+1}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^{2n+1}}{2n+1}$$ Область сходимости ряда: $-1\le\alpha\le1$ или, то же самое: $\lvert\alpha\rvert\le1$
$$\arcsin\alpha=\alpha+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{\alpha^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\alpha^7}{7}++\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\alpha^9}{9}+...+\frac{(2n-1)!!\cdot\alpha^{2n+1}}{(2n)!!\cdot(2n+1)}+...$$ Область сходимости ряда: $-1\le\alpha\le1$ или, то же самое: $\lvert\alpha\rvert\le1$

Поскольку речь идёт о степенных рядах, то **разложения справедливы не только для значения** $\alpha=x$, но и для других степеннЫх одночленов, таких как $\alpha=-x$, $\alpha=2x$, $\alpha=x^2$, $\alpha=-5x^3$, $\alpha=3\sqrt{x}$, $\alpha=\sqrt[3]{x}$, $\alpha=3x^4$ и т.п.

При этом в общем случае фактическая область сходимости **будет другой!** Так, например, при $\alpha=\frac{x}{2}$ разложение функции $f(x)=\arcsin\frac{x}{2}$ сходится к ней на промежутке:

$-1\le\frac{x}{2}\le1 \quad\Rightarrow\quad -2\le x\le2$ *(умножили все части неравенства на 2)*

Более того, табличный «шаблон» может быть «урезан», типичные примеры:

1) если $\alpha=\sqrt{x}$, то функция $f(x)=e^{\sqrt{x}}$ определена только для неотрицательных значений аргумента, и поэтому область сходимости соответствующего ряда: $0\le x<+\infty$;

2) аналогично, если $\alpha=\sqrt[4]{x}$, то разложение функции $f(x)=\ln(1+\sqrt[4]{x})$ сойдётся к ней лишь в области $0\le x\le1$.