Билет №1
Первообразная функция.

Определение: Функция F(x) называется **первообразной функцией** функции f(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$F'(x) = f(x)$.

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$F_1(x) = F_2(x) + C$.

Неопределенный интеграл.

Определение: **Неопределенным интегралом** функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением: F(x) + C.
Записывают:

$$\int f(x)dx = F(x) + C;$$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1.
$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f$$
$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$$

2.
$$\int dF(x) = F(x) + C;$$

3.
4.
$$\int (u + v - w)dx = \int udx + \int v$$

где u, v, w – некоторые функции от x.

1.
$$\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx;$$

Таблица неопределённых интегралов.

$$\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$$
$$\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$
$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$$
$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$
$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$$

Билет №2

Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены $x = \varphi(t)$ и $dx = \varphi'(t)dt$ получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство: Продифференцируем предлагаемое равенство:

$$d\int f(x)dx = d\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t$$

По рассмотренному выше свойству №2 неопределенного интеграла: $f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$
что с учетом введенных обозначений и является исходным предположением. Теорема доказана.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos xdx$.

Сделаем замену $t = \sin x$, $dt = \cos xdt$.

$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C =$$

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:
$(uv)' = u'v + v'u$
где u и v – некоторые функции от x.
В дифференциальной форме: $d(uv) = udv + vdu$
Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int udv + \int vdu$$ или
$$\int udv = uv - \int vdu;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

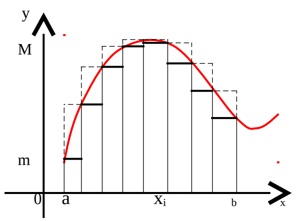
Пример.

$$\int x^2 \sin xdx = \begin{cases} u = x^2; & dv = \\ du = 2xdx; & \end{cases}$$
$$= -x^2\cos x + \int \cos x \cdot 2xdx =$$
$$= \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = \cos xdx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} =$$
$$= -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin x\right.$$
$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Билет №3
Определенный интеграл.

Пусть на отрезке [a, b] задана непрерывная функция f(x).



Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке [a, b]
Разобьем отрезок [a, b] на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, … ,$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;
На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \to m_1, M_1$; $[x_1, x_2] \to m_2, M_2$; … $[x_{n-1}, x_n] \to m_n, M_n$.

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$
$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\overline{S}$ – **верхней интегральной суммой**.

Т.к. $m_i \le M_i$, то $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$, а $m(b - a) \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le M(b - a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.
$x_0 < \varepsilon_1 < x_1$, $x_1 < \varepsilon < x_2$, … , $x_{n-1} < \varepsilon < x_n$.

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i\Delta x_i \le f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$
Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M$$
$$\underline{S}_n \le S_n \le \overline{S}_n$$

Теорема: Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла.

1)
$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx;$$

2)
$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x$$

3)
$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

4) Если $f(x) \le \varphi(x)$ на отрезке [a, b] a < b, то
$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$$

5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a, b], то:
$$m(b - a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b - a$$

6) **Теорема о среднем.** Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке существует точка ε такая, что
$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(\varepsilon)$$

Доказательство: В соответствии со свойством 5:
$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$
т.к. функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она принимает на этом отрезке все значения от m до M. Другими словами, существует такое число ε∈ [a, b], что если
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu$$ и $\mu = f(\varepsilon)$, a ≤ ε ≤ b, тогда
$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(\varepsilon).$$ Теорема доказана.

7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)($$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

Билет №4
Вычисление определенного интеграла.

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел a = const, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$. Найдем производную функции Φ(x) по переменному верхнему пределу x.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

Теорема: Для всякой функции f(x), непрерывной на отрезке [a, b], существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

Теорема: (**Теорема Ньютона – Лейбница**)
Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
это выражение известно под названием ***формулы Ньютона – Лейбница.***

Доказательство: Пусть F(x) – первообразная функции f(x). Тогда в соответствии с приведенной выше теоремой, функция $\int_a^x f(t)dt$ - первообразная функция от f(x). Но т.к. функция может иметь бесконечно много первообразных, которые будут отличаться друг от друга только на какое – то постоянное число C, то
$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$
при соответствующем выборе C это равенство справедливо для любого x, т.е. при x = a:
$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$$
$$0 = F(a) + C$$
$$C = -F(a)$$
Тогда $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.
А при x = b:
$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left| tg \frac{x}{2} \right| + C$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции f(x) ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

8) $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

<u>Обобщенная теорема о среднем.</u> Если функции f(x) и φ(x) непрерывны на отрезке [a, b], и функция φ(x) знакопостоянна на нем, то на этом отрезке существует точка ε, такая, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\varepsilon)\int_a^b \varphi(x)dx$$

Заменив переменную t на переменную x, получаем формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Теорема доказана.

Билет №5
Интегрирование по частям.

Если функции u = φ(x) и v = ψ(x) непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Замена переменных.

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) – непрерывная функция на отрезке [a, b].
Введем новую переменную в соответствии с формулой x = φ(t).
Тогда если
1) φ(α) = a, φ(β) = b
2) φ(t) и φ´(t) непрерывны на отрезке [α, β]
3) f(φ(t)) определена на отрезке [α, β], то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)d$$

Тогда

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta$$

$$= F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b)$$

Пример.

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{cases} x=\sin t; \\ \alpha=0;\ \beta=\pi/2 \end{cases}$$

$$= \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2}\cos^2 t$$

$$= \frac12\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac12\left(t+\frac12\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}+\frac14\sin$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция sin) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Билет №6
Вычисление площадей плоских фигур.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой *y=f(x)* *[f(x) ≥ 0]*, прямыми *x=a* и *x=b* и отрезками *[a; b]* оси *Ox*, вычисляется по формуле:

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ $[f_1(x) \le f_2(x)]$ и прямыми *x=a* и *x=b*, находится по формуле:

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx.$$

Если кривая задана **параметрическими** уравнениями *x=x(t), y=y(t)*, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми *x=a*, *x=b* и отрезком *[a; b]* оси *Ox*, выражается формулой:

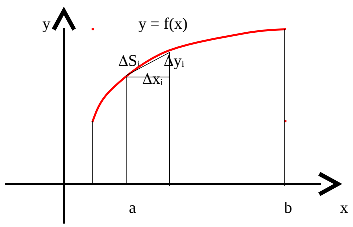
$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt.$$

где t_1 и t_2 определяются из уравнений $a=x(t_1)$, $b=x(t_2)$ $[y(t) \ge 0$ при $t_1 \le t \le t_2]$.

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в **полярных координатах** уравнением *ρ=ρ(θ)* и двумя полярными радиусами *θ=α*, *θ=β (α < β)*, выражается интегралом:

$$S=\frac12\int_\alpha^\beta \rho^2 d\theta.$$

Билет №7
Вычисление длины дуги кривой.



Длина ломаной линии, которая соответствует дуге, может быть найдена как $S_n=\sum_{i=1}^n \Delta S_i$.
Тогда длина дуги равна

$$S=\lim_{\max\Delta S_i\to 0}\sum_{i=1}^n\Delta S_i.$$

Из геометрических соображений:

$$\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right.}$$

В то же время

Тогда можно показать (из соображений

$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

), что

$$S=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n\Delta S_i = \int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right.}$$

$$S=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Т.е.
Если уравнение кривой задано параметрически, то с учетом правил вычисления производной параметрически заданной функции, получаем

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt,$$

где x = φ(t) и y = ψ(t).
Если задана **пространственная кривая**, и x = φ(t), y = ψ(t) и z = Z(t), то

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[Z'(t$$

Если кривая задана в **полярных координатах**, то

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\varphi, \quad \rho = f(\varphi).$$

Пример: Найти длину окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = r^2$.

1 способ. Выразим из уравнения переменную y.

$$y=\sqrt{r^2-x^2}$$

Найдем производную

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

Тогда

$$\frac14 S=\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=\int_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2}}$$

$$=r\cdot\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r = r\frac{\pi}{2}$$

Тогда S = 2πr. Получили общеизвестную формулу длины окружности.

2 способ. Если представить заданное уравнение в полярной системе координат, то получим: $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$, т.е. функция ρ = f(φ) = r,

$$\rho'=\frac{df(\varphi)}{d\varphi}=0$$

тогда

Билет №8
Несобственные интегралы.

Пусть функция f(x) определена и непрерывна на интервале [a, ∞). Тогда она непрерывна на любом отрезке [a, b].

Определение: Если существует конечный предел $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, то этот предел называется **несобственным интегралом** от функции f(x) на интервале [a, ∞).

Обозначение:

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx=\int_a^\infty f(x)dx$$

Если этот предел **существует** и **конечен**, то говорят, что несобственный интеграл **сходится**.
Если предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл расходится.

Аналогичные рассуждения можно привести для несобственных интегралов вида:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x$$

Конечно, эти утверждения справедливы, если входящие в них интегралы существуют.

Пример.

$$\int_0^\infty \cos x\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b\cos x\,dx =$$

$$=\lim_{b\to\infty}\sin x\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}(\sin b - \sin 0)$$

-не существует.
Несобственный интеграл расходится.

Пример.

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to-\infty}\int_b^{-1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to-\infty}\left[-\frac1x\right.$$

$$\lim_{b\to-\infty}\left(1+\frac1b\right)=1$$

- интеграл сходится

Теорема: Если для всех x (x ≥ a) выполняется условие $0\le f(x)\le\varphi(x)$ и интеграл $\int_a^\infty\varphi(x)dx$ сходится, то $\int_a^\infty f(x)dx$ тоже сходится и $\int_a^\infty\varphi(x)dx \ge \int_a^\infty f(x)dx$.

Теорема: Если для всех x (x ≥ a) выполняется условие $0\le\varphi(x)\le f(x)$ и интеграл $\int_a^\infty\varphi(x)dx$ расходится, то $\int_a^\infty f(x)dx$ тоже расходится.

Теорема: Если $\int_a^\infty |f(x)|dx$ сходится, то $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится и интеграл.

В этом случае интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ называется **абсолютно сходящимся**.

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}$$

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{0 + r^2}\, d\varphi = r \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r$$

Билет №9

Функции нескольких переменных

При рассмотрении функций нескольких переменных ограничимся подробным описанием функций двух переменных, т.к. все полученные результаты будут справедливы для функций произвольного числа переменных.

Определение: Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому - либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной z, то переменная z называется **функцией двух переменных.**

z = f(x, y)

Определение: Если паре чисел (x, y) соответствует одно значение z, то функция называется **однозначной**, а если более одного, то – *многозначной.*

Определение: **Областью определения** функции z называется совокупность пар (x, y), при которых функция z существует.

Определение: *Окрестностью точки* $M_0(x_0, y_0)$ радиуса r называется совокупность всех точек (x, y), которые удовлетворяют условию

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$$

Определение: Число A называется **пределом** функции f(x, y) при стремлении точки M(x, y) к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа ε > 0 найдется такое число r > 0, что для любой точки M(x, y), для которых верно условие

$$MM_0 < r$$

также верно и условие

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

Записывают:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$$

Определение: Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции f(x, y). Тогда функция z = f(x, y) называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0, y_0)$, если

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y$$

(1)

причем точка M(x, y) стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом.

Производные и дифференциалы функций нескольких переменных.

Определение. Пусть в некоторой области задана функция z = f(x, y). Возьмем произвольную точку M(x, y) и зададим приращение Δx к переменной x. Тогда величина $\Delta_x z$ = f(x + Δx, y) – f(x, y) называется **частным приращением функции по x.**

Можно записать

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Билет №10

Полный Дифференциал.

Пусть функция **z = F(x ,y)** определена в некоторой окрестности точки $\mathbf{M_0 (x_0 ,y_0)}$.

Дадим x_0 приращение **Δx, y - Δy.**

Разность $\mathbf{\Delta z = F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) – F(x_0 ,y_0)}$ – называется полным приращением функции.

$\mathbf{\Delta_x z = F(x_0 + \Delta x, y_0) – F(x_0 ,y_0)}$ – ч.п.по аргум.**x**

$\mathbf{\Delta_x z = F(x_0, y_0 + \Delta y) – F(x_0 ,y_0)}$ - ч.п.по аргум.**y**

Необходимое условие дифференцируемости:

Если функция z = F(x , y) дифференцируема в точке M_0, то она имеет в точке M_0 частные производные по x и по y, причём:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = A \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = B \qquad (1)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \qquad (2)$$

Доказательство:

По условию **z = F(x ,y)** дифференцируема в точке $\mathbf{M_0}$, то есть

$\Delta z = F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) – F(x_0 ,y_0) = A\Delta x + B\Delta y + O(r)$ (3)

а) Δx ≠ 0, Δy ≠ 0, тогда $\Delta_x z = F(x_0 + \Delta x, y_0) – F(x_0 ,y_0) = A\Delta x + O(\Delta x)$

Тогда:

$$\frac{\Delta x Z}{\Delta x} = \frac{A \cdot \Delta x + \overline{o}(\Delta x)}{\Delta x} \cdot A + \overline{o}(1)$$

$$\Rightarrow Z'_x = A \quad , \quad \text{òàêæå} \quad Z'_y =$$

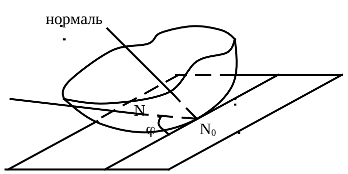
Отсюда вытекает доказательство формулы (2)

Достаточное условие дифференцируемости:

Пусть **z = F(x ,y)** имеет в некоторой точке M_0 частные производные **δz/δx , δz/δy** , причём они непрерывны в точке $\mathbf{M_0}$, тогда **z = F(x ,y)** дифференцируема в точке $\mathbf{M_0}$ и имеет дифференциал **dz.**

Билет №11

Касательная плоскость и нормаль к поверхности.



касательная плоскость

Пусть N и N_0 – точки данной поверхности. Проведем прямую NN_0. Плоскость, которая проходит через точку N_0, называется **касательной плоскостью** к поверхности, если угол между секущей NN_0 и этой плоскостью стремится к нулю, когда стремится к нулю расстояние NN_0.

Определение. **Нормалью** к поверхности в точке N_0 называется прямая, проходящая через точку N_0 перпендикулярно касательной плоскости к этой поверхности.

В какой – либо точке поверхность имеет, либо только одну касательную плоскость, либо не имеет ее

Экстремум функции нескольких переменных.

Определение. Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)$$

то точка M_0 называется **точкой максимума.**

Определение. Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) < f(x, y)$$

то точка M_0 называется **точкой минимума.**

Теорема. (Необходимые условия экстремума). Если функция f(x,y) в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует.

Эту точку (x_0, y_0) будем называть **критической точкой.**

Билет №12

Достаточное условие функции экстремумов 2-ух переменных.

Утверждение 1.

Пусть *f*(x, y) – дважды непревывно дифференцируемая функция в окрестности точки (x_0, y_0). Для того, чтобы точка (x_0, y_0) была точкой локального минимума (максимума) достоточно, чтобы $dl\, f(x_0, y_0) = 0$ и $dl^2 f(x_0, y_0) = 0$ был бы положительно (отрицательно) определённой квадратичной формой.

Доказательство.

Пусть $\Phi(x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$ - квадратичная форма.

Ф положительно определена $\overset{def}{\Leftrightarrow} \Phi(x) > 0$

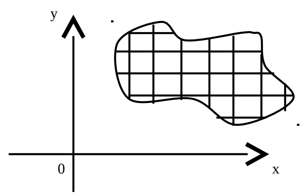
Ф отрицательно определена $\overset{def}{\Leftrightarrow} \Phi(x) > 0$

Если $\forall e\, \varphi'(0) = 0 \quad \text{è} \quad \varphi''(0) > 0$, то φ имеет минимум при *t* = 0 $\forall e \Rightarrow f$ имеет локальный минимум в точке (x_0, y_0).

Билет №13

Двойные интегралы.

Рассмотрим на плоскости некоторую замкнутую кривую, уравнение которой f(x, y) = 0.



Совокупность всех точек, лежащих внутри кривой и на самой кривой назовем замкнутой областью Δ. Если выбрать точки области без учета точек, лежащих на кривой, область будет называется незамкнутой область Δ.

С геометрической точки зрения Δ - площадь фигуры, ограниченной контуром.

Разобьем область Δ на n частичных областей сеткой прямых, отстоящих друг от друга по оси x на расстояние Δx_i, а по оси y – на Δy_i. Вообще говоря, такой порядок разбиения наобязателен, возможно разбиение области на частичные участки произвольной формы и размера.

Получаем, что площадь S делится на элементарные прямоугольники, площади которых равны $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$.

В каждой частичной области возьмем произвольную точку $P(x_i, y_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i;$$

где f – функция непрерывная и однозначная для всех точек области Δ.

Если бесконечно увеличивать количество частичных областей Δ_i, тогда, очевидно, площадь каждого частичного участка S_i стремится к нулю.

Определение: Если при стремлении к нулю шага разбиения области Δ интегральные суммы $\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i$ имеют конечный предел, то этот предел называется **двойным интегралом** от функции f(x, y) по области Δ.

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) S_i = \iint_{\Delta} f(x, y)$$

С учетом того, что $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ получаем:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) S_i = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i$$

В приведенной выше записи имеются два знака Σ, т.к. суммирование производится по двум переменным x и y.

Т.к. деление области интегрирования произвольно, также произволен и выбор точек P_i, то, считая все площади S_i одинаковыми, получаем формулу:

Теорема без (док-ва): Если f(x,y)-непрерывна на K, то $\iint_K f(x, y)dxdy$ существует.

Теорема: Если $K = K_1 \cup K_2$ и $S(K_2)=0$, то можно отбросить K_2, т.к. $S(K_2)=0$

$$\Rightarrow \iint_K f(x, y)dxdy = \iint_{K_1} f(x, y)dxdy$$

Свойства двойного интеграла.

1)

$$\iint_{\Delta} [f_1(x, y) + f_2(x, y) - f_3(x, y$$

$$= \iint_{\Delta} f_1(x, y)dydx + \iint_{\Delta} f_2(x, y)$$

2)

$$\iint_{\Delta} kf(x, y)dydx = k \iint_{\Delta} f(x, y)$$

3) Если $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, то

$$\iint_{\Delta} f(x, y)dydx = \iint_{\Delta_1} f(x, y)dy$$

4) Теорема о среднем. Двойной интеграл от функции f(x, y) равен произведению значения этой функции в некоторой точке области интегрирования на площадь области интегрирования.

$$\iint_{\Delta} f(x, y)dydx = f(x_0, y_0) \cdot S$$

5) Если f(x, y) ≥ 0 в области Δ, то

$$\iint_{\Delta} f(x, y)dydx \ge 0$$

6) Если $f_1(x, y) \le f_2(x, y)$, то

$$\iint_{\Delta} f_1(x, y)dydx \le \iint_{\Delta} f_2(x, y)d$$

7)

$$\left| \iint_{\Delta} f(x, y)dydx \right| \le \iint_{\Delta} |f(x, y)|$$

Вычисление двойного интеграла.

Теорема. *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями x = a, x = b, (a < b), y = φ(x), y = ψ(x), где φ и ψ - непрерывные функции и φ ≤ ψ, тогда*

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной** функции z = f(x, y) по x.

Обозначение:

$$\frac{\partial z}{\partial x};\quad z'_x;\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x};\quad f'_x(x,$$

Аналогично определяется частная производная функции по y.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x}{\Delta y}$$

Геометрическим смыслом частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ (допустим $\dfrac{\partial z}{\partial x}$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

вовсе.

Если поверхность задана уравнением z = f(x, y), где f(x, y) – функция, дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0)$, касательная плоскость в точке $N_0(x_0,y_0,(x_0,y_0))$ существует и имеет уравнение:

$$z-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)(x-x$$
$$+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Уравнение нормали к поверхности в этой точке:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

$$\varphi'(0)=dl\ f(x_0,y_0)[e_1,e_2]$$

$$\varphi''(0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+t\cdot e_1,y_0+t$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0+t\cdot e_1,y_0+t\cdot e_2)e_2^{2}$$
$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+t\cdot e_1,y_0+t\cdot e_2)e$$
$$=dl^2\ f(x_0+t\cdot e_1,y_0+t\cdot e_2)[e$$
$$\varphi''(0)=dl^2\ f(x_0,y_0)[e_1,e_2]$$

Если $\varphi''(0)>0$, то

$$dl^2\ f(x_0,y_0)[e_1,e_2]>0\Rightarrow \Phi$$

положительно определена $\Rightarrow$ f имеет локальный минимум в точке (x_0, y_0).

$$\int\limits_{\Delta}\int f(x,y)dydx=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sum$$

Геометрический смысл двойного интеграла функции f(x,y) на компакте K: (f(x,y)>0)

V= $\int\limits_{K}\int f(x,y)dxdy$ – объем цилиндроида, изображенного на рис.6

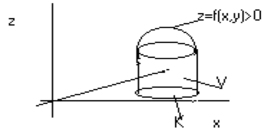
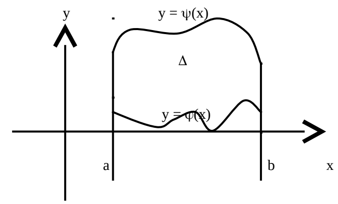


рис. 6

$$\int\limits_{\Delta}\int f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y\right.$$
$$=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy$$



Билет №14

Тройной интеграл.

Определение. Тройным интегралом от функции f(x, y, z) по области Ω называется предел интегральной суммы $\lim\limits_{d\to 0} S$, если он существует.

Тройной интеграл обозначается $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz.$

Пусть V - ограниченная замкнутая пространственная область, границей которой является кусочно-гладкая поверхность, и пусть функция $f(x,y,z)$ определена и ограничена в V. Посредством сетки кусочно-гладких поверхностей разобьем V на конечное число элементарных областей $V_i(i=1,2,...,n)$ с объемами ΔV_i (разбиение Z). Пусть $\Delta(Z)$ наибольший из диаметров областей V_i, получающийся при разбиении Z. В каждой из элементарных областей выберем произвольную точку $M_i=(x_i,y_i,z_i)$.

Число $\sigma_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$ ставится в соответствие каждому разбиению Z и каждому выбору точек M_i и называется интегральной суммой. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty,\Delta(Z)\to 0}\sigma_n$ и он не зависит от выбора разбиения Z и точек, M_i то функция называется интегрируемой по Риману в области V, а сам предел называется тройным интегралом от функции $f(x,y,z)$ по области V и обозначается

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz.$$

Свойства тройных интегралов такие же, как и у двойных интегралов.

Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.

Билет №15

Двойной интеграл в полярной системе координат:

Пусть требуется посчитать $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ по области D, которая задается в полярных координатах условиями

$$\begin{cases}\alpha\le\phi\le\beta\\ r\le r(\phi)\end{cases}.$$

Сделаем замену переменных $\begin{cases}x=r\cos\phi\\ y=r\sin\phi\end{cases}.$

При этой замене нарушается взаимная однозначность отображения. Точке $(0,0)$ соответствует целый отрезок $[\alpha,\beta]$ на оси ϕ. Однако точка имеет нулевую площадь и теорема справедлива. Осталось вычислить J.

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\phi,\ \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\phi,$$

$$\frac{\partial x}{\partial\phi}=-r\sin\phi,\ \frac{\partial y}{\partial\phi}=r\cos\phi.$$

$$J=\begin{vmatrix}\cos\phi & -r\sin\phi\\ \sin\phi & r\cos\phi\end{vmatrix}=r\cos^2\phi+r\sin^2\phi=r.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_\alpha^\beta d\phi\int\limits_0^{r(\phi)}f(r\cos\phi,r\sin\phi)rdr$$

Замена переменных в двойном интеграле.

Билет №16

Замена переменных в тройном интеграле.

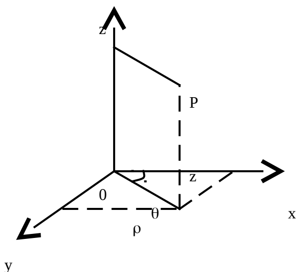
Операция замены переменных в тройном интеграле аналогична соответсвующей операции для двойного интеграла.

Можно записать:

$$\int\limits_{r}\int\int F(x,y,z)dxdydz=$$
$$=\int\limits_{\tau}\int\int F(f(u,v,w),\varphi(u,v,w),$$

$$|i|=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w}\\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$

Цилиндрическая система координат.



Связь координат произвольной точки P пространства в цилиндрической системе с

Билет №17

Замена переменных в тройном интеграле.

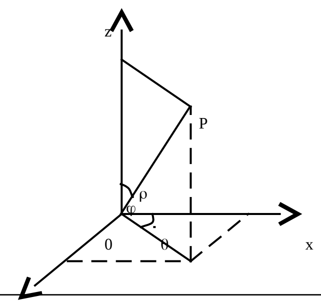
Операция замены переменных в тройном интеграле аналогична соответсвующей операции для двойного интеграла.

Можно записать:

$$\int\limits_{r}\int\int F(x,y,z)dxdydz=$$
$$=\int\limits_{\tau}\int\int F(f(u,v,w),\varphi(u,v,w),$$

$$|i|=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w}\\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$

Сферическая система координат.



Билет №18

Площадь гладкой поверхности.

Рассмотрим кусок поверхности S, заданной уравнением $F(x,y,z)=0$. Пусть выполняется условие $(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2\ne 0$, что означает, что в каждой точке поверхности существует нормаль с направляющим вектором $\vec N=\{F'_x,F'_y,F'_z\}$. Разобьем поверхность S сеткой гладких кривых на элементарные области $\Delta S_i,\ i=1,2,...,n$ (разбиение Z). Пусть $\Delta(Z)$ - наибольший из диаметров элементарных областей. Если независимо от разбиения Z существует $\lim\limits_{n\to\infty,\Delta(Z)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta S_i=S$, то он и называется площадью данной поверхности. Пусть S однозначно проектируется на плоскость $x0y$ и G - эта проекция. Элементу площади $dxdy$ области G на плоскости $x0y$ соответствует элемент площади поверхности S, равный: $dS=\dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|}$, где γ - угол между нормалью к поверхности S и осью $0z$. Поэтому вычисление площади поверхности сводится к вычислению двойного интеграла

$$S=\iint\limits_G\frac{dxdy}{|\cos\gamma|}$$ по проекции поверхности на плоскость.

Если поверхность задана уравнением $z=f(x,y)$, то $|\cos\gamma|=\dfrac{1}{\sqrt{(f'_x)^2+(f'_y)^2+1}}$ и площадь поверхности вычисляется по формуле

$$S=\iint\limits_G\sqrt{(f'_x)^2+(f'_y)^2+1}\cdot dxdy,$$

здесь G - проекция поверхности S на плоскость $x0y$. Если поверхность однозначно проектируется на другие

Пусть V является цилиндрическим телом, проекция которого на плоскость $x0y$ есть область S и которое ограничено снизу поверхностью $z = z_1(x,y)$, а сверху v поверхностью $z = z_2(x,y)$, где z_1, z_2 - непрерывные функции в . Тогда

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_S \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy,$$

то есть интегрированием по z тройной интеграл сводится к двойному интегралу по области S. Для областей более сложной формы вычисление двойных и тройных интегралов производится разбиением областей на конечное число простых областей с уже рассмотренными свойствами.

Основные свойства тройного интеграла -- его линейность, аддитивность и монотонность:

$$\iiint_\Omega (\alpha f + \beta g) = \alpha \iiint_\Omega f + \beta \iiint_\Omega g, \qquad \alpha, \beta = Const,$$

$$\iiint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f = \iiint_{\Omega_1} f + \iiint_{\Omega_2} f, \qquad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing,$$

$$f \leqslant g \quad \Rightarrow \quad \iiint_\Omega f \leqslant \iiint_\Omega g.$$

Пусть функции $x = x(u,v), y = y(u,v)$ взаимно однозначно отображают открытое множество, содержащее область G плоскости u, v на открытое множество, содержащее область S, и пусть S является образом G. Если $x(u,v), y(u,v)$ и их частные производные непрерывны, а определитель

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

, то

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \iint_G f(x(u,v), y(u,v))|J|dudv.$$

Выражение $|J|dudv$ называется элементом площади в криволинейных координатах, функциональный определитель J - якобианом.

координатами в декартовой прямоугольной системе осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \theta = arctg\frac{y}{x}; \quad z$$

Для представления тройного интеграла в цилиндрических координатах вычисляем Якобиан:

$$|i| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho$$

Итого:

$$\int_r \int F \int (x,y,z)dxdydz = \int_\tau \int F \int$$

y

Связь координат произвольной точки P пространства в сферической системе с координатами в декартовой прямоугольной системе осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos \\ y = \rho\sin\varphi\sin \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \theta = arctg\frac{y}{x};$$

$$\varphi = arctg\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z};$$

Для представления тройного интеграла в сферических координатах вычисляем Якобиан:

$$|i| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos \\ \sin\varphi\sin \\ \cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \cos\varphi(\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta +$$

$$+ \rho\sin\varphi(\rho\sin^2\varphi\cos^2\theta + \rho\sin$$

$$= \rho^2\cos^2\varphi\sin\varphi + \rho^2\sin^3\varphi =$$

Окончательно получаем:

$$\int_r \int F \int (x,y,z)dxdydz =$$

$$= \int_\tau \int f \int (\rho,\varphi,\theta)\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

координатные плоскости, то соответственно изменится формула вычисления площади поверхности.

Поверхностный интеграл 1-го рода.

Пусть некоторая функция $\varphi(x,y,z)$ определена и на гладкой поверхности S. Выберем разбиение Z поверхности S и точки $M_i = (x_i, y_i, z_i)$ на каждой элементарной области $\Delta S_i, i = 1,2,...,n$ и составим интегральную сумму

$$\sigma_n(Z,\{M_i\}) = \sum_{i=0}^{n} \varphi(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i.$$

Если независимо от выбора разбиения Z и точек M_i существует $\lim\limits_{n\to\infty, \Delta(Z)\to 0} \sigma_n(Z,\{M_i\})$, то он называется поверхностным интегралом по площади поверхности S (1-го рода) от функции $\varphi(x,y,z)$ и обозначается $\iint_S \varphi(x,y,z)dS$.

Свойства и вычисление поверхностного интеграла по площади поверхности.

Если поверхность задана уравнением $z = f(x,y)$ и однозначно проектируется на плоскость $x0y$, то поверхностный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле

$$\iint_S \varphi(x,y,z)dS = \iint_G \varphi(x,y,f(x,y))\sqrt{(f_x')^2 + (f_y')^2 + 1}dxdy.$$

Нетрудно получить аналогичные формулы, если поверхность однозначно проектируется на другие координатные плоскости. Поскольку вычисление поверхностного интеграла сводится к двойному интегралу, то, естественно, все свойства поверхностного интеграла 1-го рода такие же, как и у двойного.
Отметим, что в определении интеграла первого типа сторона поверхности не участвует. Пример задачи, моделью которой служит поверхностный интеграл первого типа – нахождение массы поверхности (S), поверхностная плотность которой в точке (x,y,z) равна $f(x,y,z)$.
Для вычисления поверхностного интеграла 1-го типа удобно использовать следующие формулы:

Теорема 1. Пусть поверхность (S) задана уравнением $z = z(x,y),\ (x,y) \in D_0$, где z - непрерывно дифференцируемая на квадрируемой области D_0

Билет №19

Скалярное поле

Производной скалярной функции **U=f(x,y,z)** по направлению вектора $\overline{m} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ в точке **M0(x0,y0,z0)** называется предел, если он существует, отношения приращения **ΔU0** функции при смещении из точки **M0(x0,y0,z0)** в направлении вектора $\overline{m}$ в точку **M1(x,y,z)** к величине этого смещения $\rho = |M_0M_1|$, когда **ρ → 0**, то есть

$$\frac{\partial U}{\partial \overline{m}} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta U}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\frac{U(M_1) - U(M_0)}{\rho}. \qquad (3.25)$$

Следовательно, $\frac{\partial U}{\partial \overline{m}}$ характеризует скорость изменения величины **U** в точке **M₀** в направлении вектора $\overline{m}$.
Очевидно, что функция **U** имеет бесчисленное множество производных по направлениям в каждой точке **M.**
Получим формулу для вычисления производной по направлению. Так как

Билет №20

Векторное поле.

Векторное поле $\vec{A}$ характеризуется тремя функциями $\vec{A}_1(\vec{r}), \vec{A}_2(\vec{r}), \vec{A}_3(\vec{r})$, которые известным образом преобразуются при поворотах осей координат.

Определение: Векторными линиями поля $\vec{A}(\vec{r})$ называются линии, касательные к которым в каждой точке имеют направление вектора $\vec{A}(\vec{r})$.

Пусть вектор d $\vec{r}$ совпадает по направлению с касательной к векторной линии в точке с радиус-вектором $\vec{r}$. Это означает, что он параллелен вектору $A(r)$ и

$$dr \times A(r) = 0 \qquad (2.14)$$

т.е.

dx2A3 – dx3A2 =0
dx3A1 – dx1A3 =0 (2.15)
dx1A2 – dx2A1 =0
Из (2.15) следует, что

Билет №21

Дивергенция векторного поля.

Пусть задано векторное поле

$$\overline{a}(M) = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}.$$

Определение:

Дивергенцией или ***расходимостью векторного поля*** $\overline{a}(M)$ называется скалярная функция, определяемая равенством:

$$div\ \overline{a}(M) = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(}{}$$

На этот раз векторное поле $\overline{a}(M)$ порождает скалярное поле $div\ \overline{a}(M)$.
С учетом понятий дивергенции и потока векторного поля (**формулу Остроградского**) можно представить в форме:

$$\int_S (\oint \overline{a}(M) \cdot \overline{n}^0)dS = \int_V \int div \oint \overline{a}(M$$

т. е. поток векторного поля $\overline{a}(M)$ через замкнутую поверхность **S** в направлении внешней нормали равен

Инвариантное определение дивергенции и его свойства: можно записать с помощью символического вектора Гамильтона

$$\overline{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

в следующем виде:

$$div\ \overline{a}(M) = (\nabla, \overline{a}) = \nabla \cdot \overline{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x}$$

Отметим свойства дивергенции:

1) $div(\overline{a} + \overline{b}) = div\ \overline{a} + div\ \overline{b};$

2) $div(U \cdot \overline{a}) = \overline{a} \cdot \overline{grad\ U} + U$

где U – скалярная функция.

Теорема Гаусса-Остроградского.

«*Поток векторного поля* **F(r)** *через замкнутую поверхность* **G** *в направлении ее внешней нормали равен тройному интегралу по области* **D**$_G$, ограниченной этой поверхностью:

функция, $D_0 \subset \mathbf{R}^2$. Тогда для любой непрерывной на поверхности (S) функции f

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_0} f(x,y,z(x,y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dxdy$$

Теорема 2. Если поверхность (S) задана параметрическими уравнениями

$$x = x(u,v),\quad y = y(u,v),\quad z = z(u,v),\qquad (u,v) \in D \subset \mathbf{R}^2,$$

где x, y, z - непрерывно дифференцируемые функции на D. Пусть y непрерывна на (S). Тогда

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

.

$$M_1(x,y,z) = M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) =$$

$$= M_1(x_0 + \rho\cos\alpha, y_0 + \rho\cos\beta, z_0 + \rho\cos\gamma),$$

где величины **x_0, y_0, z_0, cosα, cosβ, cosγ** фиксированы, то **U(M₁)** есть функция только смещения **ρ**.
Обозначим эту функцию

$$\psi(\rho) = U(x_0 + \rho\cos\alpha, y_0 + \rho\cos\beta, z_0 + \rho\cos\gamma) = U(x,y,z).$$

При **ρ = 0** имеем **ψ(0) =U(x0,y0,z0)=U(M0).**
Следовательно:

$$\frac{\partial U}{\partial m} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\psi(\rho) - \psi(0)}{\rho} = \frac{d\psi}{d\rho} = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{dx}{d\rho} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\rho} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{dz}{d\rho} =$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma.$$

Т. е. получим формулу:

$$\frac{\partial U}{\partial m} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (3.26)$$

выражающую производную от функции **U = f(x,y,z)** по направлению вектора

$$\overline{m} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Пусть **f(x,y)** – функция двух переменных.
Вектор с координатами **(∂f(x,y)/ ∂x, ∂f(x,y)/ ∂y)** называется градиентом функции **f(x,y)** и обозначается **grad f**.

$$grad\ f = \left(\frac{df}{\partial x}, \frac{df}{\partial y}\right)$$ из формулы сразу следует,что

$$\left(\frac{df}{d\overline{n}}\right)' = grsd\ f \cdot \overline{n}.$$

Теперь вычислим

$$grad\ f \cdot \overline{n} = |grad\ f| \cdot |\overline{n}| \cdot \cos\varphi = grad\ f \cdot \cos\varphi,$$

итак мы получим следующую формулу

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{n}} = |gradf| \cdot \cos\varphi$$

, где **φ**- угол между градиентом **f** и вектором **n.**
Итак мы получим следующее важное свойство градиентов:
1. производная по любому направлению **f(x,y)** не превосходит длины градиента **f** .
2. длина градиента **f** совпадает с производной по тому направлению , по которому производная **f(x,y)** достигает максимума.

$$\frac{dx_1}{A_1(x_1,x_2,x_3)} = \frac{dx_2}{A_2(x_1,x_2,x_3)} = \frac{dx_3}{A_3(x_1,x_2,x_3)} \qquad (2.16)$$

Решением этих двух дифференциальных уравнений будет два семейства поверхностей, пересечением которых являются *векторные линии*.

Рассмотрим в пространстве, в котором определено векторное поле, некую поверхность **S**. Ориентацию элементов **dS** этой поверхности будем характеризовать единичными векторами внешних нормалей.

__Определение__: *Поток вектора через поверхность S называется скалярная величина, определяемая интегралом*

$$\iint\limits_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS = \iint\limits_S A_n\,dS \qquad \textbf{(2.28)}$$

Интегралы такого типа широко встречаются в физике. Для примера рассмотрим стационарное поле скоростей частиц жидкости или газа. Объем жидкости, протекающий через элемент поверхности ΔS за время Δt, равен

$$\Delta V = |\vec{v}|\Delta t\cdot\Delta S\cdot Cos(\vec{v}\cdot\vec{n}) = (\vec{v}\cdot\vec{n})\Delta t\cdot\Delta S$$

Умножим это выражение на плотность жидкости ρ и разделим на Δt, получим массу жидкости, протекающей через элемент поверхности ΔS в единицу времени. Просуммировав по всем элементам ΔS, на которые разбита поверхность, и перейдя к пределу $\Delta S \to 0$, получим, что масса жидкости, протекающая через поверхность *S* за еденицу времени, выражается ингералом

$$\iint\limits_S (\rho\,\vec{v}\cdot\vec{n})dS \qquad \textbf{(2.30)}$$

, который имеет смысл потока вектора $\rho\cdot\vec{v}$ через поверхность *S*.

тройному интегралу от дивергенции векторного поля по области, ограниченной этой поверхностью.
На основании формулы (3.38) можно записать:

$$div\,\overline{a}(M_{cp}) = \frac{\iint\limits_S a_n\,dS}{V},$$

и, переходя к пределу, стягивая **V** в точку **M** (при этом величина **V → 0**), имеем:

$$div\,\overline{a}(M) = \lim_{V\to 0}\frac{\oint\limits_S a_n dS}{V} \qquad (3.3$$

То есть
$div\,\overline{a}(M)$
есть предел отношения потока поля
$\overline{a}(M)$
через бесконечно малую замкнутую поверхность, окружающую точку **M**, к величине объёма, ограниченного этой поверхностью. Из этого следует, что дивергенция не зависит от выбора системы координат.
Если поток

$$\Pi = \iint\limits_S a_n\,dS > 0,$$

то в область **V** втекает большее количество жидкости (если следовать ранее рассмотренному примеру о течении несжимаемой жидкости), чем вытекает из неё, т.е. внутри области **V** имеются источники жидкости.
Если **Π < 0**, то внутри области **V** есть стоки.
Но поток векторного поля характеризует интенсивность источников и стоков лишь суммарно, т. е. при **Π ≥ 0** внутри области **V** могут быть как источники, так и стоки.

Гидромеханический смысл:

Для характеристики точки можно использовать
$div\,\overline{a}(M)$.
Если $div\,\overline{a}(M)$ > 0, то данная точка есть источник,
если $div\,\overline{a}(M)$ < 0 - то сток.

$$\oint\limits_G (\vec{F}\cdot\vec{n}_G)d\sigma = \int\limits_{D_G}\!\!\int\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial}\right.$$

Билет №22

Соленоидальное поле. Векторная трубка в соленоидальном поле

__Опр.__ $\overline{F}$ - **соленоидальное** поле, если $\operatorname{div}\overline{F} = 0$.
Векторная линия обладает тем свойством, что в любой ее точке вектор касательной к линии совпадает с $\overline{F}$.

Векторная трубка – это совокупность векторных линий.
Пусть $(S_1),(S_2)$- сечения векторной трубки и (S_3)- ее боковая поверхность.
$(S) = (S_1)\cup(S_2)\cup(S_3)$.

Рассмотрим внешнюю нормаль к (S) и применим теорему Остроградского: $\iint\limits_{(S)}\overline{F}\cdot\overline{n}\cdot dS = \iiint\limits_{V}\operatorname{div}\overline{F}dxdydz = 0$,
в случае соленоидального поля. Итак,

$$\iint\limits_{(S_1)}\overline{F}\cdot\overline{n}dS + \iint\limits_{(S_2)}\overline{F}\cdot\overline{n}dS + \iint\limits_{(S_3)}\overline{F}\cdot\overline{n}dS = 0.$$

На (S_3) по определению векторной линии $\overline{F}\cdot\overline{n} = 0$,
поэтому (S_1) или $-\iint\limits_{(S_1)}\overline{F}\cdot\overline{n}dS = \iint\limits_{(S_2)}\overline{F}\cdot\overline{n}dS$.
Изменяя направление нормали на (S_1) на противоположное получаем, что поток соленоидального поля через поперечные сечения векторных трубок постоянен.

Билет №23

Криволинейный Интеграл

Пусть в области D⊂R³ заданы : 1) __непрерывное__ векторное поле
F(**r**) =[f_x(x,y.z); f_y(**r**); f_z(**r**)]ᵀ∈ R³;
(координаты вектора **F** - непрерывные функции $f_{x,y,z}$(x,y,z) трех переменных)
и 2) __параметрическое__ уравнение __гладкой__ линии L ⊂ D, соединяющей точки A и B:

$$L: \vec{r}(t) = \begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{vmatrix}$$; A(x(t_A),

__Опр:__ __Криволинейным интегралом__ (II рода≡ по координатам) от непрерывного векторного поля **F(r)** вдоль гладкой кривой **L :** $A \xrightarrow{L} B$ называют __число__

$$\int\limits_{A\xrightarrow{L}B}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{A\xrightarrow{L}B}(f_x dx$$

$$= \int\limits_{t_A}^{t_B}[\,f_x^*(t)dx(t) + f_y^*(t)dy(t)$$

Из определения следует:

Физический смысл:

1) Так как скалярное произведение векторов **F**(t)•d**r**(t)= ||**F**|| ||d**r**||cos(**F,r**), для силового поля **F** криволинейный интеграл равен работе по перемещению материальной точки из точки **A** в точку

Билет №24

__**Циркуляция векторного поля по замкнутому контуру.**__

Проведем в векторном поле замкнутую кривую и примем для нее определенное направление обхода. Затем разобьем ее на малые дуги. Хорды, стягивающие эти элементы кривой, имеют направления, совпадающие с направлением обхода. Обозначим их $\Delta\vec{L}_i$. В произвольной точке i –того участка кривой возьмем вектор поля $\vec{A}_i$ и составим сумму

$$\sum_i \vec{A}_i\cdot\Delta\vec{L}_i \qquad (2.37)$$

После этого устремим $\Delta\vec{L}_i$ к нулю. Если при этом предел суммы (2.37) существует и не зависит от способа разбиения кривой и выбора точек определения векторов $\vec{A}_i$, то мы приходим к криволинейному интегралу

__**Теорема:**__ *Поток вихря* $rot\,\vec{A}$ *через поверхность S,,натянутую на замкнутый контур L , равен циркуляции векторного поля* $\vec{A}$ *по этому контуру, если компоненты поля вместе с их частными производными непрерывны на S и L.*

$$\oint\limits_L \vec{A}\cdot d\vec{R} = \iint\limits_S (\vec{n}\cdot rot\,\vec{A})dS \qquad \textbf{(2.43)}$$

__**Билет №25**__

Потенциальное поле:

Если формула Грина

__**Оглавление**__

$y(t_A), z(t_A)) = A(t_A)$, $B(t_B)$.

(функции x(t), y(t), z(t) - дифференцируемые)

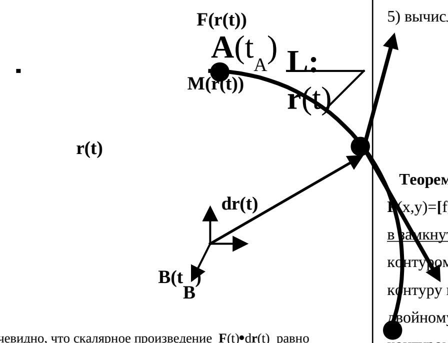
Запишем в произвольной точке линии M(**r**(t))∈**L**

-векторное поле **F**(t)=**F**(**r**(t))= **F**(x(t), y(t),

z(t))= $\begin{vmatrix} f_x^*(t) = f_x(r(t)) \\ f_y^*(t) \\ f^*_z(t) \end{vmatrix}$.

- и вектор d**r**(t) бесконечно-малого перемещения в точке (по касательной к линии L)

d**r**(t)=[dx(t),dy(t), dz(t)]ᵗ



Очевидно, что скалярное произведение **F**(t)•d**r**(t) равно

$$\vec{F}(t) \bullet d\vec{r}(t) = \begin{vmatrix} f_x^*(t) \\ f_y^*(t) \\ f_z^*(t) \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} d \\ d \\ d \end{vmatrix}$$

$$= f_X(t)x'(t)dt + f_y(t)y'(t)d$$

и определяется одной переменной - параметром "t" точки линии.

B по линии **L** в поле силы **F.**

Вычисление К.Р.:

2) Алгоритм вычисления криволинейного интеграла :

а) записывается параметрическое уравнение ггладкой линии **L**

L : r(t) ⇔ x=x(t); y=y(t); z=z(t);

и находятся соответствующие параметрические координаты **t_A и t_B** точек ***A*** и ***B*** ;

б) уравнение линии дифференцируется

d**r**(t)=**r**'(t)dt=[dx(t);dy(t);dz(t)];

в) записывается векторное поле в точках линии

F(t)=[f_X^*(t); f_Y^*(t); f_Z^*(t)] ᵗ;

4) вычисляется скалярное произведение векторов (**F**(t),d**r**(t)) и находится явный вид подынтегрального выражения

(f_X^*(t)x'(t)+ f_Y^*(t)y'(t)+ f_Z^*(t)z'(t))dt = **Φ**(t)dt;

5) вычисляется определенный интеграл

$$\int_{t_A}^{t_B} \Phi(t)dt$$

Теорема Грина. Если плоское векторное поле **F**(x,y)=[f_X(x,y);f_Y(x,y)]ᵗ непрерывно дифференцируемо в замкнутой области **D_K** ⊂R^2, ограниченной гладким контуром «K», криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении (+K) равен двойному интегралу по области, ограниченной этим контуром

$$\oint_{+K} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{D_K} \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right)$$ -

формула Грина

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{L} = \lim_{\Delta L_i \to 0} \sum_i \vec{A}_i \cdot \Delta \vec{L}_i \quad (2.38)$$

Определение:

Криволинейный интеграл (2.38) называется *циркуляцией* векторного поля $\vec{A}$ по замкнутому контуру *L*.Если, например, $\vec{A}$ - это силовое поле, то ***физический смысл*** циркуляции состоит в том, что она выражает работу поля по пути *L*.

Ротор векторного поля.

Рассмотрим в пространстве замкнутый контур L с выбранным направлением обхода, лежащий в ориентированной плоскости на ее положительной стороне (из конца единичного вектора нормали $\vec{n}$ обход контура представляется против часовой стрелки). Ротором $rot(\vec{v})$ (или вихрем) векторного поля в точке M называется вектор, проекция которого на направление вектора нормали есть $\lim\limits_{L \to 0} \frac{\oint_L \vec{v} d\vec{r}}{L}$. Точка лежит M на плоскости внутри контура L, который стягивается в эту точку при вычислении предела. Поскольку ротор поля определяется через циркуляцию, то он тоже является мерой завихренности поля. Найдем компоненты ротора в декартовой системе координат, воспользовавшись формулой Стокса. Для этого выберем сначала координатную плоскость y0z с нормальным вектором $\vec{n} = \vec{i}$, затем x0z, $\vec{n} = \vec{j}$, затем x0y, $\vec{n} = \vec{k}$. Применяя каждый раз теорему о среднем для интеграла, получим:

$$rot(\vec{v}(x,y,z)) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Теперь **теорема Стокса** может быть сформулирована следующим образом: циркуляция векторного поля вдоль контура равна потоку ротора поля через поверхность, натянутую на этот контур. Выражение для ротора поля проще запомнить, если записать его в виде определителя:

$$rot(\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Используя свойства частных производных и определителей, получим следующие свойства ротора векторного поля:

$$rot(\vec{c}) = 0$$

$$rot(c\vec{v}) = c \cdot rot(\vec{v})$$

$$rot(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = rot(\vec{v}_1) + rot(\vec{v}_2)$$

$$rot(u \cdot \vec{v}) = u \cdot rot(\vec{v}) + [(grad u) \times \vec{v}]$$

$$\oint_{+K} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{D_K} \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right)$$

верна для области **D_K** ⊂R^2 , она верна для любого контура K_1⊆D_K , целиком лежащего в области. Кроме того,

$$\oint_{+K = L1 \cup L2} F \cdot dr = \int_{L1} F \cdot dr + \int_{L2} F$$

Следствия. Если плоское векторное поле

F=[f_x; f_y] удовлетворяет условию

$$\forall (x,y) \in D: \frac{\partial f_y}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f_x}{\partial y}$$

, то

1) КИ по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в области, равен нулю.
2) КИ по гладкой линии L⊂D, соединяющей точки **A, B ,** **не зависит от формы линии** , определяется только положением точек **A** и **B** на плоскости

$$\oint_{+K = L1 \cup L2} F \cdot dr = 0 = \int_{L1, A->B} F \cdot dr + \int_{L2, B->A} F \cdot dr = \int_{L1, A->B} F \cdot dr - \int_{L2, A->B} F \cdot dr \Leftrightarrow \int_{L1, A->B} F \cdot dr = \int_{L2, A->B} \ldots = U(B) - U(A)$$

и равен разности значений некоторой функции U(x,y) в этих точках.

Определение. Плоское векторное поле, криволинейный интеграл в котором не зависит от формы пути, называется **потенциальным** векторным полем, а функция U(x,y) называется **потенциалом** векторного поля.

Частные производные I-ого порядка и их геометрический смысл. Предел и непрерывность.

10. Полный дифференциал. Необходимое условие дифференцирования. Дифференциал функции 2-ух переменных. Достаточное условие дифференцируемости функции (без доказательства).

11. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, в заданной точке. Экстремумы функции 2-ух переменных. Необходимое условие экстремумов.

12. Достаточное условие функции экстремумов 2-ух переменных (сначала доказать теорему о знаке квадратичной формы, а затем применить её к достаточному условию).

13. Двойной интеграл, его свойства и геометрический смысл. Классы интегрируемых функций. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах с помощью 2-ух последовательных интегрирований (сначала дать без доказательства теорему Фубини => применить её к теореме о вычислении интеграла в криволинейной области).

14. Тройной интеграл, его геометрический смысл и его свойства. Классы интегрирования функций. Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат сведением к повторному интегралу.

15. Криволинейные интегралы. Якобиан и его геометрический смысл. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярной системе координат. Вычисление площади в полярной системе координат (в формуле $S = \iint_Q dxdy$ сделать замену переменных x=pcos(*a*) и y=sin(*a*), где *a* – угол).

16. Замена переменных в тройном интеграле (теорема без доказательства), её вычисление и связь с градиентом. Геометрический смысл Якобиана. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.

17. Замена переменных в тройном интеграле (теорема без доказательства). Геометрический смысл Якобиана. Тройной интеграл в сферических координатах.

18. Понятие площади поверхности. Вычисление площади поверхности заданной уравнением f=f(x,y). Поверхностный интеграл I-ого рода (по площади поверхности). Его свойства и вычисление.

19. Скалярное поле. Примеры. Градиент. Производная по направлению, её вычисление и связь с градиентом. Свойства градиента. Инвариантное определение градиента.

20. Векторное поле и примеры векторных полей. Векторные линии и векторные трубки. Поток векторного поля через поверхность и его физический смысл. Свойство потока и его вычисление.

21. Дивергенция векторного поля и её гидромеханический смысл. Теорема Остроградского-Гаусса. Инвариантное определение дивергенции и его свойства.

22. Соленоидальное поле. Условие соленоидальности. Поток соленоидальности через поперечное сечение трубки (закон сохранения интенсивтности векторной трубки).

23. Криволинейный интегралл и его вычисление. Криволинейный интеграл II-ого рода, его сведение к интегралу I-ого рода и вычисление. Физический смысл интеграла Iого рода и II-ого рода. Формула Грина.

24. Циркуляция векторного поля вдоль замкнутой кривой и её физический смысл. Ротор и его свойства. Инвариантное определение ротора. Теорема Стокса.

25. Потенциальное поле и примеры потенциальных полей. Условие потенциальности. Условие независимости криволинейного интеграла II-ого рода от формы пути