

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра информационных технологий автоматизированных систем

**С. С. Смородинский, Н. В. Батин**

## **СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

### **Сборник заданий и методические указания по курсовому проектированию**

для студентов специальности I - 53 01 02  
«Автоматизированные системы обработки информации»  
дневной и дистанционной форм обучения

Минск 2006

УДК 519.6 (075.8)

ББК 22 я 7

С 51

**Смородинский, С. С.**

**С 51** Системный анализ и исследование операций : сборник заданий и метод. указания по курсовому проектированию для студ. спец. I-53 01 02 “Автоматизированные системы обработки информации” дневн. и дистанц. форм обуч. / С. С. Смородинский, Н. В. Батин. – Мн. : БГУИР, 2006. – 72 с.  
ISBN 985-488-052-4

В издании приводится практический материал по анализу и оптимизации решений на основе методов математического программирования, предназначенный для курсового проектирования по дисциплине “Системный анализ и исследование операций”.

Адресовано студентам специальности “Автоматизированные системы обработки информации”, изучающим перспективные технологии поддержки принятия решений в задачах планирования, прогнозирования, проектирования и управления. Рекомендуется использовать также при изучении других дисциплин, связанных с методами поддержки принятия решений, и в дипломном проектировании. Представляет интерес для специалистов, практическая деятельность которых связана с решением задач оптимизации.

**УДК 519.6 (075.8)**

**ББК 22 я 7**

“Сегодня теория исследования операций является основным и неотъемлемым инструментом при принятии решений в самых разнообразных областях человеческой деятельности”.

Х.Таха, 2005 [2, с.21]

“Исследование операций как инструмент задачи принятия решений можно рассматривать и как науку, и как искусство. Наука здесь представлена всей мощью математических методов, а искусство – тем обстоятельством, что успех на всех этапах, предшествующих получению оптимального решения математической модели, в большей степени зависит от творчества и опыта всей команды, занимающейся решением задачи исследования операций”.

Х.Таха, 2005 [2, с.28]

## Введение

Данное пособие содержит методические указания и сборник заданий по курсовому проектированию в рамках дисциплины “Системный анализ и исследование операций” для студентов специальности “Автоматизированные системы обработки информации”. Основные цели и задачи дисциплины связаны с освоением современной методологии системного анализа и исследования операций, включая научный инструментарий моделирования и оптимизации управленческих решений с использованием перспективных программных средств компьютерной техники [1].

Курсовое проектирование выполняется по проблематике исследования операций и ориентируется на решение сложных системных задач, которые поддаются математической формализации и решаются с помощью тех или иных вычислительных методов, методик, моделей, алгоритмов и процедур [2].

Тематика курсовых проектов охватывает основные разделы математического программирования и связана с аналитическим моделированием систем, операций и процессов в задачах анализа и оптимизации управленческих решений в различных сферах целенаправленной деятельности человека. Пакет базовых заданий по решению оптимизационных задач включает 80 вариантов заданий, которые выполняются на основе современной методологии и технологии операционного исследования.

В любом операционном исследовании реализуются следующие основные этапы: 1) выявление проблемной ситуации и постановка задачи операционного исследования; 2) определение конкурирующих стратегий достижения цели; 3) построение математической модели операции; 4) оценка эффективности конкурирующих стратегий; 5) выбор оптимальной стратегии достижения цели;

б) проверка и корректировка математической модели; 7) реализация оптимальной или рациональной стратегии на практике; 8) мониторинг и сопровождение реализуемой стратегии.

Задачи оптимизации могут решаться на основе аппарата математического программирования, который изучает задачи оптимизации и методы их решения с ориентацией на перспективные средства компьютерной техники. Сущность задач оптимизации: определить значения переменных таким образом, чтобы “вписаться” в заданное множество ограничений и обеспечить экстремум целевой функции (максимум или минимум). Любое решение, удовлетворяющее заданным ограничениям, является допустимым решением и таких решений может быть великое множество. Оптимальное решение находится на множестве допустимых решений на основе итерационного вычислительного алгоритма, т.е. в результате постепенной пошаговой оптимизации на основе процедур целенаправленного поиска оптимальных решений (перебор допустимых решений без определенной стратегии практически невозможен из-за астрономического числа допустимых решений).

Математическая модель операции на «языке» математического программирования – это прежде всего целевая функция и множество ограничений. Целевая функция определяет стратегию оперирующей стороны и реализует критерий эффективности операции в виде функционала, который зависит от множества параметров, характеризующих состояние операции и внешних условий ее проведения (контролируемые параметры, характеризующие состояние операции, и неконтролируемые параметры внешней среды). Оценка эффективности стратегии состоит в решении экстремальной задачи при наличии ограничений: определяется набор переменных задачи таким образом, чтобы “вписаться” в заданное множество ограничений и обеспечить максимум или минимум целевой функции. Решение экстремальной задачи повторяется для всех конкурирующих стратегий. В результате решения задач выявляется оптимальная или рациональная стратегия достижения цели.

Сложность задач оптимизации зависит от следующих факторов: 1) от размерности решаемой задачи, т.е. от количества переменных задачи оптимизации или количества элементов решения; 2) от вида функциональной зависимости, т.е. от связи целевой функции с элементами решения, которая может быть линейной, нелинейной, квадратичной или какой-либо другой; 3) от количества, вида и структуры ограничений, т.е. от множества ограничений, которые могут быть линейными или нелинейными, типа “меньше или равно”, “равно” или “больше или равно”, причем для многих задач возможна комбинация различного типа ограничений. В реальной жизни задачи оптимизации “могут содержать тысячи переменных и ограничений”.

В курсовом проектировании в рамках дисциплины “Системный анализ и исследование операций” решаются задачи, включающие применение методов математического программирования для принятия, анализа и оптимизации управленческих решений.

Рекомендуемая литература включает источники по линейному программированию и другим методам математического программирования [1-18], а также по оформлению расчетно-пояснительной записки к курсовому проекту [19, 20].

## **1 ЗАДАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

### **Задание 1**

Предприятие выпускает шляпы двух фасонов: “ковбойские” и “сомбреро”. Трудоемкость изготовления ковбойской шляпы вдвое выше трудоемкости изготовления шляпы фасона “сомбреро”. Если бы предприятие выпускало только шляпы “сомбреро”, то объем производства мог бы составить 500 шляп в день. Спрос на ковбойские шляпы не превышает 150 штук в день, а на шляпы “сомбреро” - 200 штук. Кроме того, для выполнения контракта фирма должна выпускать не менее 100 шляп “сомбреро” в день. Прибыль предприятия от продажи ковбойской шляпы равна 8 ден.ед., а шляпы “сомбреро” - 5 ден.ед. Определить, сколько шляп каждого фасона следует выпускать ежедневно, чтобы получить максимальную прибыль.

### **Задание 2**

Предприятие выпускает пластмассовые плиты трех видов (П1, П2 и П3). Для их изготовления используется один вид пластмассы, запас которого составляет 4000 единиц. Расход пластмассы на одну плиту вида П1, П2 и П3 составляет 2, 3 и 5 единиц соответственно.

Трудоемкость изготовления плиты вида П1 вдвое больше трудоемкости плиты вида П2 и втрое больше трудоемкости плиты вида П3. Численность рабочих предприятия позволяет выпустить 1500 плит вида П1, если выпускать только эти плиты. По условиям комплектации соотношение выпуска плит видов П1, П2 и П3 должно быть равно 2:1:5. Известно также, что спрос на плиты П2 не превышает 200 единиц, а на плиты П3 - 150 единиц. Прибыль от реализации одной плиты вида П1, П2 и П3 составляет 30, 20 и 50 ден.ед. соответственно.

Определить объемы выпуска плит каждого вида, при которых прибыль предприятия будет максимальной.

### **Задание 3**

Автозавод выпускает автомобили двух моделей: “Шторм” и “Торнадо”. На заводе работает 1000 неквалифицированных и 800 квалифицированных рабочих, работающих по 40 ч в неделю. Для производства одного автомобиля “Шторм” требуется 30 ч неквалифицированного и 50 ч квалифицированного труда, для производства автомобиля “Торнадо” - 40 ч неквалифицированного и 20 ч квалифицированного труда. Для выпуска каждого автомобиля “Шторм” требуются затраты в размере 1500 ден.ед. на сырье и комплектующие, для

каждого автомобиля “Торнадо” - 500 ден.ед. Суммарные затраты на сырье и комплектующие не должны превосходить 900 тыс.ден.ед. в неделю. Рабочие, осуществляющие доставку автомобилей торговым организациям, работают по пять дней в неделю и могут вывезти с автозавода не более 210 автомобилей в день.

Каждый автомобиль “Шторм” приносит автозаводу прибыль в размере 1000 ден.ед., каждый автомобиль “Торнадо” - 500 ден.ед.

Составить план выпуска автомобилей, обеспечивающий автозаводу максимальную прибыль.

#### Задание 4

Предприятие-производитель безалкогольных напитков имеет две разливочные машины (А и В). Производительность машин (количество бутылок, заполняемых в минуту) приведена в таблице.

Разливочная машина	Производительность, бутылок/мин	
	бутылки емкостью 0,5 л	бутылки емкостью 1 л
А	50	20
В	40	30

Каждая из машин может работать не более 30 ч в неделю. Поставщики пустых бутылок могут поставить предприятию не более 44 000 пол-литровых и не более 30 000 литровых бутылок в неделю. Возможности сбыта безалкогольных напитков не превышают 50 000 л в неделю.

Прибыль предприятия от продажи одной пол-литровой бутылки составляет 4 ден.ед., а от литровой - 10 ден.ед.

Составить план работы предприятия, обеспечивающий ему максимальную прибыль.

#### Задание 5

Предприятие производит отопительные радиаторы четырех моделей (А,В,С,Д). Имеется возможность использовать для производства радиаторов не более 500 человеко-часов рабочего времени и не более 2500 м<sup>2</sup> стальных листов. Затраты рабочего времени и стальных листов на выпуск одного радиатора, а также цены радиаторов приведены в таблице.

Модель радиатора	А	В	С	Д
Рабочее время, человеко-часы	0,5	1,5	2	1,5
Стальной лист, м <sup>2</sup>	4	2	6	8
Цена, ден.ед.	140	150	255	230

Стоимость одного часа рабочего времени - 20 ден.ед, одного квадратного метра стального листа - 5 ден.ед. Прочие расходы на выпуск одного радиатора любой модели составляют 60 ден.ед.

Для выполнения контрактов предприятие должно выпустить не менее 200 радиаторов модели А.

Составить план производства радиаторов, обеспечивающий максимальную прибыль предприятия.

### Задание 6

Предприятие производит подшипники двух типов (А и В). Изготовление каждого подшипника включает обработку на трех станках: токарном, шлифовальном и сверлильном. Время обработки одного подшипника на каждом из станков приведено в таблице.

Тип подшипника	Время обработки на станке, мин		
	токарный	шлифовальный	сверлильный
А	1	2	4
В	2	1	1

В течение недели токарные станки, имеющиеся на предприятии, могут использоваться 160 часов, шлифовальные – 120 часов, сверлильные – 150 часов. Затраты на один час работы токарного или шлифовального станка составляют 24 ден.ед., сверлильного – 30 ден.ед. Материал для изготовления одного подшипника стоит 6 ден.ед. Подшипники типа А продаются по цене 10 ден.ед., В - 9 ден.ед.

Для выполнения заказа предприятие должно выпустить не менее 1000 подшипников типа В.

Составить план производства подшипников, обеспечивающий максимальную прибыль предприятия.

### Задание 7

Предприятие выделило на рекламу своей продукции 0,5 млн.ден.ед. Имеется возможность использовать четыре вида рекламы: на телевидении, на радио, в газетах, на уличных стендах. По результатам анализа эффективности рекламы известно, что прибыль предприятия, получаемая от каждой денежной единицы, затраченной на рекламу, составляет: для рекламы на телевидении – 10 ден.ед., на радио – 3 ден.ед., в газетах – 7 ден.ед., на уличных стендах – 4 ден.ед.

Предприятие распределяет денежные средства на рекламу в соответствии со следующими правилами: 1) требуется приобрести не менее 30 мин рекламного времени на телевидении (цена одной минуты - 2000 ден.ед.); 2) на рекламу в газетах необходимо выделять не менее половины суммы средств, затрачиваемых на рекламу по телевидению и радио; 3) на рекламу на уличных стендах необходимо расходовать не менее 10% всех средств, выделяемых на рекламу.

Найти, сколько средств должно выделить предприятие на каждый вид рекламы, чтобы получить максимальную прибыль.

### Задание 8

Нефтеперерабатывающий завод выпускает бензин и мазут. Бензин продается по цене 2000 ден.ед. за тонну, мазут – по цене 1000 ден.ед. за тонну. Как бензин, так и мазут могут производиться из нефти двух сортов (А и В). Нефть сорта А закупается заводом по цене 600 ден.ед. тонну, нефть сорта В - по 900 ден.ед. за тонну. Из каждых 100 т нефти сорта А производится 30 т бензина и 50 т мазута, а из каждых 100 т нефти сорта В - 60 т бензина и 10 т мазута. Всего завод может переработать не более 10 000 т нефти в месяц. Поставщики могут обеспечить поставку не более 6000 т нефти сорта А и не более 8000 т нефти сорта В в месяц. Спрос на бензин не превышает 5000 т в месяц, на мазут – 3200 т в месяц.

Определить, сколько нефти каждого сорта необходимо закупить и как ее использовать, чтобы получить максимальную прибыль.

### Задание 9

Механический завод выпускает два типа деталей: зубчатые колеса и трансмиссии. Для выпуска каждой из деталей могут применяться два технологических способа. Нормы расхода времени на изготовление каждого изделия по каждому из технологических способов приведены в таблице.

Деталь		Зубчатое колесо		Трансмиссия	
Технологический способ		1	2	1	2
Обработка на станке, мин	токарный	4	9	5	3
	фрезерный	5	-	6	2
	сверлильный	3	5	4	5

Это означает, например, что для выпуска одного зубчатого колеса первым технологическим способом требуется обработка на токарном станке в течение 4 мин, на фрезерном – 5 мин, на сверлильном – 3 мин.

Фонд времени работы токарных станков, имеющихся на предприятии, составляет 250 ч, фрезерных – 450 ч, сверлильных – 600 ч.

Прибыль предприятия от выпуска одного зубчатого колеса составляет 12 ден.ед., одной трансмиссии – 18 ден.ед.

Для выполнения контракта предприятию требуется выпустить не менее 200 зубчатых колес.

Составить план выпуска деталей, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

### Задание 10

Мебельная фабрика выпускает столы, стулья, бюро и шкафы. При изготовлении этих изделий используются два типа досок: обычные и пропитанные специальным составом для придания долговечности. Еженедельно фабрика может закупать не более 1500 м обычных досок и не



более 1000 м пропитанных досок. Расход досок на изготовление одного изделия приведен в таблице.

Доски	Расход досок на одно изделие, м			
	стол	стул	бюро	шкаф
Обычные	7	2	8	10
Пропитанные	1	1	3	2

Трудозатраты на выпуск одного стола или бюро в 4 раза, а одного шкафа - в 8 раз превышают трудозатраты на выпуск одного стула. Численность рабочих фабрики позволяет выпускать 800 стульев в неделю (если выпускать только стулья).

По заказу фабрика должно выпускать не менее 10 бюро в неделю.

Прибыль фабрики от выпуска одного стола, стула, бюро и шкафа составляет соответственно 15, 8, 17 и 10 ден.ед.

Составить план производства мебели, обеспечивающий фабрике максимальную прибыль.

### Задание 11

Ткань трех артикулов (A1, A2, A3) производится на ткацких станках двух типов (СТ1 и СТ2). Фонд времени работы станков типа СТ1 составляет 50 тыс. ч, станков типа СТ2 – 30 тыс. ч. Производительность станков приведена в таблице.

Станки	Производительность, м/ч		
	A1	A2	A3
СТ1	10	6	20
СТ2	20	20	5

Для изготовления ткани используются пряжа и краситель. Предприятие имеет возможность использовать 60 т пряжи и 5 т красителя. Нормы расхода пряжи и красителя (в килограммах на 1000 м ткани) приведены в таблице.

Ресурс	Расход, кг на 1000 м		
	A1	A2	A3
Пряжа	140	100	200
Краситель	5	5	8

Для выполнения заказов требуется выпустить не менее 5 тыс. м ткани артикула A2.

Прибыль предприятия от продажи 1 м ткани артикулов A1 или A3 составляет 15 ден.ед., от 1 м ткани артикула A2 - 10 ден.ед.

Составить план производства тканей, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

### Задание 12

Предприятие может работать по трем технологическим процессам (ТП1, ТП2, ТП3). При работе по первому технологическому процессу предприятие выпускает 120 изделий в день, по второму – 250, по третьему - 350 изделий в день. Расходы предприятия, связанные с различными производственными факторами, приведены в таблице.

Производственные факторы	Расходы, ден.ед./день		
	ТП1	ТП2	ТП3
Сырье	500	250	300
Электроэнергия	80	40	50
Зарплата	50	80	100
Прочие расходы	40	100	50

Это означает, например, что в случае, если предприятие в течение одного дня работает по технологическому процессу ТП1, то его расходы на сырье составляют 500 ден.ед., на электроэнергию - 80, на зарплату - 50, прочие расходы - 40 ден.ед.

Предприятие имеет возможность израсходовать на сырье не более 6 млн ден.ед., на электроэнергию – не более 1,5 млн ден.ед., на зарплату – не более 1,8 млн ден.ед., на прочие расходы – не более 1,5 млн ден.ед.

Найти, сколько времени должно работать предприятие по каждому из технологических процессов, чтобы выпустить максимальное количество изделий.

### Задание 13

Предприятие выпускает металлоизделия трех видов (А, В, С). Для их выпуска используется три вида сырья (сталь, алюминий, сплав для покрытия). Нормы расхода сырья на одно изделие приведены в таблице.

Изделие	Расход сырья на одно изделие, кг		
	сталь	алюминий	сплав для покрытия
А	6	0	4
В	8	5	0
С	5	8	2

Предприятие имеет возможность использовать в течение недели не более 80 т стали, 40 т алюминия и 20 т сплава для покрытия.

Численность работающих на предприятии позволяет выпустить за неделю 15 тыс. изделий типа А (если выпускать только эти изделия). Изделие В в 1,5 раза более трудоемкое, чем изделие А, изделие С - в 2 раза. Для выполнения заказов предприятию необходимо выпустить не менее 4 тыс. изделий типа В.

Составить план выпуска металлоизделий, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

### Задание 14

Для выращивания некоторой сельскохозяйственной культуры может использоваться посевная площадь в размере 450 тыс. га, из которых 100 тыс. га расположены в климатической зоне А, 150 тыс.- в зоне В, 200 тыс. - в зоне С. Урожайность данной культуры составляет для климатических зон А, В, С соответственно 12, 14 и 10 центнеров/га.

Для выращивания культуры необходимо использовать фосфорные, азотные и калийные удобрения. Запасы этих удобрений составляют соответственно 40, 30 и 10 тыс. тонн. Количество удобрений, которое необходимо вносить на один гектар в каждой из климатических зон, приведено в таблице.

Климатическая зона	Расход удобрений, кг/га		
	фосфорные	азотные	калийные
А	200	100	100
В	100	200	125
С	100	50	-

Составить план использования посевных площадей, обеспечивающий максимальный урожай.

### Задание 15

Предприятие может работать по трем технологическим процессам (ТП1, ТП2, ТП3). При работе по первому технологическому процессу предприятие выпускает 300 изделий в день, по второму – 250, по третьему - 450 изделий в день. Расходы ресурсов, необходимые для работы предприятия в течение дня по каждому из технологических процессов, приведены в таблице.

Ресурсы	Технологические процессы		
	ТП1	ТП2	ТП3
Рабочая сила, тыс. человеко-ч/день	15	20	25
Электроэнергия, тыс кВт-ч/день	35	60	60
Сырье, т/день	20	30	25

Это означает, например, что в случае, если предприятие в течение одного дня работает по технологическому процессу ТП1, то для этого требуется 15 тыс. человеко-ч рабочей силы, 35 тыс. кВт-ч электроэнергии, 20 т сырья.

Предприятие располагает рабочей силой в количестве 1,2 млн человеко-ч, электроэнергией – 3 млн кВт-ч, сырьем - 1500 т.

По требованию заказчика необходимо выпустить не менее 500 изделий по второму технологическому процессу.

Найти, сколько времени должно работать предприятие по каждому из технологических процессов, чтобы выпустить максимальное количество изделий.

### Задание 16

Предприятие выпускает пластмассовые банки трех видов: для пищевых продуктов, для непищевых продуктов, для огнеопасных жидкостей. Для производства банок могут использоваться четыре станка (СТ1, СТ2, СТ3, СТ4). Каждый станок работает восемь часов в день. Производительность станков приведена в таблице.

Станки	Производительность, изделий/ч		
	банки для пищевых продуктов	банки для непищевых продуктов	банки для огнеопасных жидкостей
СТ1	500	1200	-
СТ2	1000	1500	-
СТ3	1500	1500	1000
СТ4	-	1600	800

Это означает, например, что на станке СТ1 в течение часа можно выпустить 500 банок для пищевых продуктов или 1200 банок для непищевых продуктов. Банки для огнеопасных жидкостей на этом станке выпускаться не могут.

Эксплуатационные расходы, связанные с работой станков СТ1, СТ2, СТ3, СТ4, составляют соответственно 500, 450, 800 и 600 ден.ед./ч.

Кроме того, для выпуска пластмассовых банок используется пластмасса, покрытие и краситель. Нормы расхода этих материалов на выпуск одной банки (в граммах) приведены в таблице.

Материал	Расход на одну банку, г		
	банки для пищевых продуктов	банки для непищевых продуктов	банки для огнеопасных жидкостей
Пластмасса	200	250	175
Покрытие	10	-	15
Краситель	12	20	-

Один килограмм пластмассы стоит 30 ден.ед., покрытия – 35 ден.ед., красителя – 25 ден.ед.

Банки для пищевых продуктов, для непищевых продуктов и для огнеопасных жидкостей продаются по цене 50, 45 и 35 ден.ед. соответственно.

Составить план производства пластмассовых банок, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

### Задание 17

Предприятие изготавливает топливные смеси трех видов (ТС1, ТС2, ТС3), в состав которых входит торф, уголь и горючий сланец. Имеется возможность закупить 400 т торфа, 250 т угля и 350 т горючего сланца. Торф закупается по цене 320 ден.ед./т, уголь - 800 ден.ед./т, горючий сланец - 500 ден.ед./т.

Для изготовления топливных смесей торф, уголь и горючий сланец смешиваются в следующих пропорциях: ТС1 - 3:5:2, ТС2 - 1:2:1, ТС3 - 2:2:1.

Топливные смеси продаются по следующим ценам: ТС1 - 1200 ден.ед./т, ТС2 - 1000 ден.ед./т, ТС3 - 1500 ден.ед./т.

Для выполнения имеющихся заказов необходимо выпустить не менее 20 т топливной смеси ТС1. Топливные смеси ТС2 и ТС3 должны выпускаться в соотношении 1:10.

Составить план выпуска топливных смесей, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

### Задание 18

В цехе площадью 74 м<sup>2</sup> имеется возможность установить станки двух типов: СТ1 и СТ2. На приобретение станков выделено 42 тыс. ден.ед. Станки обоих типов могут использоваться для изготовления изделий двух видов: кранов и задвижек. Характеристики станков приведены в таблице.

Характеристики		Станок	
		СТ1	СТ2
Необходимая площадь для размещения, м <sup>2</sup>		12	6
Стоимость, тыс. ден.ед.		6	4
Производительность, изделий/ч	краны	70	40
	задвижки	40	30

Характеристики изделий, выпускаемых в цехе, приведены в таблице.

Характеристики		Изделие	
		кран	задвижка
Себестоимость, ден.ед.	при изготовлении на станке СТ1	10	8
	при изготовлении на станке СТ2	7	6
Продажная цена, ден.ед.		12	10

Краны и задвижки должны выпускаться в соотношении 2:1. Каждый станок должен использоваться для выпуска изделий только одного вида.

Продолжительность рабочей смены – 8 ч.

Найти, сколько станков каждого вида должно закупить предприятие и как их использовать, чтобы получать максимальную прибыль.

### Задание 19

Предприятие имеет 30 технологических модулей типа ТМ1 и 50 технологических модулей типа ТМ2. Технологические модули обоих типов могут использоваться для производства изделий двух видов: пластмассовых коробок для видеокассет и компакт-дисков. Данные о производительности модулей и о себестоимости изделий при их выпуске на модуле каждого типа приведены в таблице.

Характеристики		Технологический модуль	
		ТМ1	ТМ2
Производительность, шт/час	коробки для видеокассет	80	60
	коробки для компакт-дисков	120	100
Себестоимость, ден.ед.	коробки для видеокассет	4	3,5
	коробки для компакт-дисков	3	2

Продолжительность рабочей смены – 8 ч. В течение всей смены каждый технологический модуль должен использоваться для выпуска изделий только одного вида.

Коробки для видеокассет продаются предприятием по цене 5 ден.ед., коробки для компакт-дисков – по 4,5 ден.ед.

В течение смены предприятие должно выпускать не менее 10000 коробок для видеокассет и не менее 12000 коробок для компакт-дисков.

Составить план использования технологических модулей, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

### Задание 20

Кондитерская фабрика выпускает карамель трех видов: “Мечта”, “Заря” и “Полет”. Для производства карамели используются три основных вида сырья: сахарный песок, патока и фруктовое пюре. Фабрика может закупить не более 800 т сахарного песка, не более 600 т патоки и не более 120 т фруктового пюре.

Сырье закупается по следующим ценам (за одну тонну): сахарный песок – 1220 ден.ед., патока – 1500 ден.ед., фруктовое пюре – 2100 ден.ед. Нормы расхода сырья (в тоннах) на выпуск одной тонны карамели каждого вида приведены в таблице.

Вид сырья	Расход на 1 т карамели, т		
	“Мечта”	“Заря”	“Полет”
Сахарный песок	0,8	0,5	0,6
Патока	0,2	0,4	0,3
Фруктовое пюре	-	0,1	0,1

Прочие расходы на выпуск одной тонны карамели любого вида составляют 450 ден.ед.

По заказу фабрика должна выпустить не менее 40 т карамели “Мечта”.

Карамель продается по следующим ценам: “Мечта” - 2040, “Заря” - 1990, “Полет” - 1970 ден.ед./т.

Составить план производства карамели, обеспечивающий кондитерской фабрике максимальную прибыль.

### Задание 21

На текстильной фабрике имеются два ткацких станка (А и В). На каждом станке можно выпускать ткани трех видов: миткаль, бязь и ситец. Значения производительности станков и себестоимости тканей приведены в таблице.

Станок	Производительность, м/ч			Себестоимость, ден.ед./м		
	миткаль	бязь	ситец	миткаль	бязь	ситец
А	24	30	18	2	1	3
В	12	15	9	3	2	4

Станок А может использоваться для выпуска тканей не более 90 ч, станок В – не более 220 ч.

Фабрике требуется выпустить не менее 1200 м миткаля и не менее 900 м бязи. Ткани продаются по следующим ценам: миткаль - 8, бязь - 4, ситец – 6 ден.ед./м.

Составить план производства тканей, обеспечивающий текстильной фабрике максимальную прибыль.

### Задание 22

Металлургическое предприятие выпускает серый чугун. Для его производства предприятие имеет возможность использовать три вида материалов: литейный чугун, брикеты из чугунной стружки и стальной лом. Цена одной тонны материалов каждого вида следующая: литейный чугун – 7080 ден.ед., брикеты – 5100 ден.ед., стальной лом – 4010 ден.ед.

Выплавляемый серый чугун должен содержать не более 2,5% кремния, не менее 0,45% и не более 0,7% марганца. Содержание каждого из этих элементов в исходных материалах и потери элементов при выплавке серого чугуна приведены в таблице.

Содержание, %	Материал			Потери при выплавке, %
	литейный чугун	брикеты	стальной лом	
Кремний	1,8	2,2	0,4	15
Марганец	0,7	0,6	0,4	20

Определить состав смеси материалов для выпуска чугуна, имеющий минимальную стоимость.

### Задание 23

Для изготовления сплава из меди, олова и цинка в качестве сырья используют два других сплава этих же металлов (сплав А и сплав В). Цена сплава А - 4 ден.ед./кг, сплава В – 6 ден.ед./кг. Данные о составе этих сплавов приведены в таблице.

Металл	Содержание металлов, %	
	сплав А	сплав В
Медь	10	10
Олово	10	30
Цинк	80	60

Получаемый сплав должен содержать не более 2 кг меди, не менее 3 кг олова; содержание цинка может составлять от 7,2 до 12,8 кг.

Определить, какое количество сплавов А и В необходимо использовать для получения нового сплава с минимальными затратами.

### Задание 24

Нефтеперерабатывающий завод закупает сырую нефть у двух компаний: “Севернефть” (по цене 75 000 ден.ед./т) и “Афройл” (67 000 ден.ед./т). Нефть, поставляемая компанией “Севернефть”, содержит 10% примесей, которые необходимо удалять при очистке. Нефть, поставляемая компанией “Афройл”, содержит 15% таких примесей.

Очищенная нефть смешивается для получения двух видов смазочных материалов: “Люкс” и “Стандарт”. Смазочный материал “Люкс” должен содержать не менее 10% нефти компании “Севернефть” и не более 25% нефти компании “Афройл”. Смазочный материал “Стандарт” должен содержать не менее 15% нефти компании “Севернефть”.

Смазочные материалы продаются по следующим ценам: “Люкс” – 90 000 ден.ед./т, “Стандарт” – 87 000 ден.ед./т. Спрос на смазочный материал “Люкс” не превышает 100 000 т., “Стандарт” – 120 000 т.

Составить план закупок и использования нефти, обеспечивающий нефтеперерабатывающему заводу максимальную прибыль.

### Задание 25

Предприятие закупает красные вина двух марок: бургундское (по цене 1,08 ден.ед./л) и испанское (0,5 ден.ед./л). Имеется возможность закупить не более 100 тыс. л бургундского и не более 150 тыс. л испанского вина.

Эти вина смешиваются для получения столовых вин двух марок: “Божеле” и “Луара”. В вине “Божеле” должно содержаться не менее 30% бургундского, в вине “Луара” – не менее 30% бургундского и не более 30% испанского вина.

Столовые вина продаются по следующим ценам: “Божеле” – 1,95 ден.ед./л, “Луара” – 2,46 ден.ед./л. Спрос на вино “Божеле” не превышает 200 тыс. л.



Составить план закупки и использования красных вин, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

### Задание 26

Предприятию требуется выпустить 2000 т сплава меди, хрома и никеля. Сплав должен содержать не более 80% меди, не более 30% хрома и не менее 50% никеля.

Для выплавки металлов, необходимых для получения сплава, предприятие имеет возможность закупать руду от трех поставщиков: уральскую (по цене 300 ден.ед./т), якутскую (400 ден.ед./т) и памирскую (500 ден.ед./т). Данные о составе руд приведены в таблице.

Руда	Содержание, %			
	медь	хром	никель	другие компоненты
Уральская	20	10	30	40
Якутская	10	20	30	40
Памирская	5	5	70	20

Имеется возможность закупить не более 1000 т уральской и не более 2000 т якутской руды.

Определить, какие руды и в каком количестве следует закупить для выпуска сплава с минимальными затратами.

### Задание 27

Нефтеперерабатывающему заводу требуется выпустить 20 тыс. т авиационного и 30 тыс. т автомобильного бензина. Для производства бензина завод использует нефть двух видов: ямальскую и каспийскую. Ямальская нефть поставляется по цене 14 тыс. ден.ед./т, каспийская – 10 тыс. ден.ед./т. В состав нефти входят три фракции (А, В, С). Данные о составе нефти приведены в таблице.

Нефть	Фракция, %		
	А	В	С
Ямальская	0,8	0,1	0,1
Каспийская	0,3	0,3	0,4

При очистке нефти теряется 20% фракции А и по 10% фракций В и С.

В авиационном бензине должно содержаться не менее 20% фракции А и не более 35% фракции С, в автомобильном бензине – не более 30% фракции С.

Определить, какую нефть и в каких количествах необходимо закупить, чтобы обеспечить производство бензина с минимальными затратами.

### Задание 28

Цех выпускает три вида сплавов: для художественных изделий, специальный и технический. Состав сплавов приведен в таблице.

Сплав	Состав сплава, %			
	никель	медь	цинк	свинец
Для художественных изделий	20	50	30	-
Специальный	10	70	10	10
Технический	-	60	20	20

Металлы, используемые для производства сплавов, закупаются по следующим ценам: никель - 8, медь - 6, цинк и свинец - по 4 ден.ед./кг. Сплавы продаются по следующим ценам: сплав для художественных изделий - 20, специальный - 10, технический – 8 ден.ед./кг.

Имеется возможность закупить не более 150 т никеля, не более 900 т меди и не более 300 т цинка. Свинец может поставляться в неограниченном количестве.

Для выполнения заказа цеху необходимо выпустить не менее 200 т технического сплава.

Составить план выпуска сплавов, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

### Задание 29

Нефтеперерабатывающее предприятие выпускает мазут и бензин, используя в качестве сырья нефть двух сортов: тяжелую и легкую.

Предприятие может закупить до 10 тыс. т тяжелой нефти по цене 150 ден.ед./т и до 17 тыс. т легкой нефти по цене 200 ден.ед./т.

Нефть может перерабатываться двумя способами. Для первого способа переработки тяжелая и легкая нефть требуется в соотношении 1:2, для второго – в соотношении 2:1. При первом способе переработки из одной тонны смеси тяжелой и легкой нефти (в заданном соотношении) вырабатывается 0,4 т мазута и 0,6 т бензина, при втором - 0,8 т мазута и 0,2 т бензина. Предприятие продает мазут по цене 200 ден.ед./т, бензин - по 1000 ден.ед./т.

Для выполнения заказа предприятие должно выпустить не менее 5 тыс. т мазута.

Составить план закупки и переработки нефти, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

### Задание 30

В дневном рационе некоторых сельскохозяйственных животных должны содержаться следующие питательные вещества: кормовые единицы (не менее 1,6 кг), протеин (не менее 200 г), каротин (не менее 10 мг). При откорме животных используется ячмень, бобы и сенная мука, причем в рационе должно содержаться не более 1,5 кг ячменя.

Содержание питательных веществ в 1 кг каждого из кормов приведено в таблице.

Питательное вещество	Содержание питательных веществ в 1 кг корма		
	ячмень	бобы	сенная мука
Кормовые единицы, кг	0,8	0,9	0,6
Протеин, г	80	280	240
Каротин, мг	5	5	100

Корма закупаются по следующим ценам (за 1 кг): ячмень – 3 ден.ед., бобы – 4 ден.ед, сенная мука – 5 ден.ед.

Составить рацион для откорма животных, имеющий минимальную стоимость.

### Задание 31

Предприятие выпускает калийные и фосфорные удобрения. Для производства калийных и фосфорных удобрений используется разное сырье. Цена сырья для производства обоих видов удобрений одинакова: 60 ден.ед./тонну.

Сырье, используемое для производства удобрений, подвергается очистке. При производстве калийных удобрений потери сырья при очистке составляют 10%, при производстве фосфорных удобрений – 20%. Удобрения, полученные в результате очистки сырья, расфасовываются в пакеты. Вес пакета калийных удобрений составляет 2 кг, фосфорных – 3 кг. Калийные удобрения продаются по цене 0,65 ден.ед, фосфорные – по 1,35 ден.ед. за пакет.

На предприятии имеются три единицы оборудования: установка для производства калийных удобрений, для производства фосфорных удобрений и упаковочная машина, используемая для расфасовки удобрений обоих видов в пакеты. Характеристики оборудования приведены в таблице.

Характеристики	Оборудование		
	установка для производства калийных удобрений	установка для производства фосфорных удобрений	упаковочная машина
Максимальное время работы, ч/день	6	5	10
Производительность, т/ч	5	4	см. ниже
Эксплуатационные расходы, ден.ед/ч	288	336	360

Эти данные, например, означают, что установка для производства калийных удобрений может использоваться не более 6 ч в день. Установка перерабатывает 5 т сырья в час. Затраты, связанные с работой установки,

составляют 288 ден.ед./ч (простои оборудования не связаны с какими-либо расходами).

Производительность упаковочной машины составляет 1500 пакетов калийных удобрений или 1000 пакетов фосфорных удобрений в час.

Составить план производства калийных и фосфорных удобрений, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

### **Задание 32**

Предприятие по техническому обслуживанию автомобилей работает с 6 до 22 ч. В период времени с 6 до 10 ч на предприятии должно находиться не менее 8 рабочих, с 10 до 14 ч – не менее 10, с 14 до 18 ч – не менее 7, с 18 до 22 ч – не менее 12 рабочих.

Рабочие могут приниматься на предприятие на условиях полного рабочего дня (т.е. работающие 8 ч) и неполного рабочего дня (работающие 4 ч). Оплата труда рабочего составляет 3 ден.ед./ч. Кроме того, за каждого рабочего, занятого на условиях неполного рабочего дня, предприятие платит налог, составляющий 2 ден.ед./день за каждого такого рабочего.

Рабочие, занятые на условиях полного рабочего дня, могут выходить на работу в 6.00, 10.00 и 14.00, а занятые на условиях неполного рабочего дня – в 6.00, 10.00, 14.00 и 18.00.

Составить график выхода рабочих на работу, обеспечивающий минимальные затраты предприятия, связанные с оплатой труда рабочих (включая затраты на выплату налога).

### **Задание 33**

Университет составляет план приема студентов из своей страны и иностранных студентов. Всего университет принимает не более 5000 студентов, причем не менее 1000 и не более 4000 студентов - из своей страны.

В университете работают 440 преподавателей. Для обучения 12 студентов из своей страны или 10 иностранных студентов требуется один преподаватель. Необходимо также, чтобы одновременно не менее 40% обучающихся в университете студентов из своей страны и не менее 80% иностранных студентов могли находиться на занятиях; количество мест в аудиториях - 2800. Университет получает 2000 ден.ед. в год из государственных средств на каждого студента из своей страны и берет плату в размере 3000 ден.ед. в год за каждого иностранного студента.

Составить план приема студентов, обеспечивающий получение университетом максимальной денежной выручки.

### **Задание 34**

Составляется план развития сельского хозяйства в некоторой стране, где основная сельскохозяйственная культура – хлопок. В стране выращиваются три сорта хлопка: “Шемаха”, “Зеравшан” и “Эльтон”. Для выращивания хлопка пригодны 1,4 млн га песчаных почв и 1,2 млн га глинистых почв. Прибыль от

продажи урожая хлопка каждого сорта, выращенного на землях с различными почвами, приведена в таблице.

Сорт хлопка	Прибыль от продажи урожая с 1 га, тыс. ден.ед.	
	песчаные почвы	глинистые почвы
“Шемаха”	6	6
“Зеравшан”	8	5
“Эльтон”	4	5

Для выращивания хлопка требуется орошение. Имеющаяся ирригационная система обеспечивает не более 56 млн м<sup>3</sup> воды в год. Величины расхода воды на орошение одного гектара земли при выращивании хлопка различных сортов приведены в таблице.

Сорт хлопка	Расход воды на орошение 1 га, м <sup>3</sup>	
	песчаные почвы	глинистые почвы
“Шемаха”	20	30
“Зеравшан”	30	30
“Эльтон”	30	20

Население, занятое в сельском хозяйстве, составляет 7 млн человек. Для выращивания хлопка сорта “Шемаха” требуются 2 человека на каждый гектар, для хлопка сорта “Зеравшан” – 1 человек на гектар, для хлопка сорта “Эльтон” – 3 человек на гектар.

Составить план использования земель для выращивания хлопка, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

### Задание 35

Составляется план перевозки пассажиров по двум авиалиниям. В течение летнего сезона по авиалинии Л1 требуется перевезти не менее 15 тыс. пассажиров, по авиалинии Л2 – не менее 20 тыс. Для обслуживания авиалиний могут использоваться 25 самолетов типа Як-90 и 30 самолетов типа Ту-384. Каждый самолет закрепляется на весь сезон за определенной авиалинией. В течение сезона один самолет типа Як-90 может перевезти 800 пассажиров, один самолет типа Ту-384 – 1200 пассажиров. Эксплуатационные расходы, связанные с использованием одного самолета на каждой из авиалиний, приведены в таблице.

Тип самолета	Эксплуатационные расходы, тыс. ден.ед.	
	авиалиния Л1	авиалиния Л2
Як-90	80	60
Ту-384	100	70

Это означает, например, что использование одного самолета типа Як-90 на авиалинии Л1 в течение сезона потребует расходов в размере 80 тыс. ден.ед.

Распределить самолеты по авиалиниям таким образом, чтобы обеспечить выполнение пассажирских перевозок с минимальными затратами.

### Задание 36

Предприятие выпускает два вида деталей обуви: подошвы и ремни. Необходимо выпустить не менее 300 тыс. подошв и не менее 500 тыс. ремней. Для их выпуска используется два вида кожи (чепрак и ворот); при этом кожа каждого вида может быть тонкой или толстой.

Чепрак используется только для изготовления подошв. Из 1000 м<sup>2</sup> тонкого чепрака можно изготовить 26 тыс. подошв, из 1000 м<sup>2</sup> толстого чепрака – 51 тыс. подошв.

Тонкий чепрак может использоваться для изготовления как подошв, так и ремней. Из 1000 м<sup>2</sup> тонкого чепрака можно изготовить 45,7 тыс. подошв или 50 тыс. ремней. Из 1000 м<sup>2</sup> толстого чепрака можно изготовить 72,5 тыс. ремней (для изготовления подошв этот вид кожи не используется).

Стоимость одного квадратного метра кожи приведена в таблице.

Вид кожи	Чепрак		Ворот	
	тонкий	толстый	тонкий	толстый
Стоимость, ден.ед.	14,4	16	12,8	10,5

Имеется возможность закупить не более 5000 м<sup>2</sup> тонкого ворота и не более 6000 м<sup>2</sup> толстого ворота. Возможности закупки чепрака не ограничены.

Составить план закупок кожи для обеспечения выпуска деталей обуви с минимальными затратами.

### Задание 37

Для посевов зерновых культур может использоваться 0,8 млн га земли в западной части некоторого региона и 0,6 млн га - в восточной. Данные об урожайности зерновых культур с одного гектара приведены в таблице.

Зерновая культура	Урожайность, центнеров/га	
	запад	восток
Озимые	20	25
Яровые	28	18

Прибыль от продажи одного центнера озимых составляет 8 ден.ед., от продажи одного центнера озимых – 7 ден.ед.

Необходимо произвести не менее 20 млн центнеров озимых и не менее 6 млн центнеров яровых.

Составить план использования земель, обеспечивающий максимальную прибыль от выращенного урожая.

### Задание 38

Хлопкоочистительный завод выпускает два вида продукции: волокно для текстильной промышленности (цена – 650 ден.ед. за тонну) и техническое волокно (400 ден.ед. за тонну).

На завод поступает необработанное волокно двух сортов хлопка: “Зеравшан” и “Эльтон”. Предприятию может быть поставлено в день до 100 т волокна сорта “Зеравшан” по цене 325 ден.ед. за тонну и до 30 т волокна сорта “Эльтон” по цене 340 ден.ед. за тонну. Необработанное волокно поступает на установку для основной очистки, мощность которой – 100 т в день. Затраты на основную очистку одной тонны необработанного волокна – 35 ден.ед.

В результате основной очистки 20% волокна уходит в отходы. Из каждой тонны необработанного волокна сорта “Зеравшан” вырабатывается 0,15 т тонкого волокна и 0,65 т грубого волокна. Из каждой тонны необработанного волокна сорта “Эльтон” вырабатывается 0,25 т тонкого волокна и 0,55 т грубого волокна.

Тонкое волокно поступает на установку для дополнительной очистки. Мощность установки – 80 т волокна в день. Затраты на дополнительную очистку одной тонны тонкого волокна – 10 ден.ед. При дополнительной очистке теряется 10% тонкого волокна. В результате дополнительной очистки вырабатывается волокно для текстильной промышленности.

Грубое волокно поступает на установку для переработки. Мощность установки – 50 т волокна в день. Затраты на переработку одной тонны грубого волокна – 25 ден.ед. При переработке теряется 10% грубого волокна. Из каждой тонны грубого волокна вырабатывается 0,45 т волокна для текстильной промышленности и 0,45 т технического волокна.

Составить план работы предприятия, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

### Задание 39

Из одного города в другой ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда. Количество вагонов каждого типа, входящих в состав поездов, приведено в таблице.

Поезда	Вагоны				
	багажные	почтовые	плацкартные	купейные	мягкие
Скорый	1	1	5	6	3
Пассажирский	1	-	8	4	1

Вместимость плацкартного вагона - 58 пассажиров, купейного – 40, мягкого – 32. Багажные и почтовые вагоны не используются для перевозки пассажиров.

Всего имеется 12 багажных вагонов, 8 почтовых, 81 плацкартный, 70 купейных, 26 мягких.

Требуется по меньшей мере один скорый поезд.

Определить количество скорых и пассажирских поездов, которые необходимо формировать ежедневно, чтобы перевезти максимальное количество пассажиров.

#### Задание 40

На некотором маршруте автобусные перевозки выполняются в течение десяти часов ежедневно. Для каждого часа известно минимально необходимое количество автобусов. Превышение необходимого количества автобусов на маршруте приводит к убыткам из-за недогрузки автобусов. Минимально необходимое количество автобусов, а также убытки от каждого лишнего автобуса приведены в таблице.

Номер часа	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Минимально необходимое количество автобусов	10	20	22	23	25	22	20	15	10	5
Убытки от каждого лишнего автобуса, ден.ед.	5	5	6	6	6	8	10	15	15	20

Первая группа автобусов выходит на маршрут в начале первого часа. Через час к ним добавляется вторая группа, еще через час - третья. Каждый автобус работает на маршруте непрерывно в течение восьми часов.

Найти количество автобусов, которые требуется выпускать на маршрут в начале первого, второго и третьего часа, чтобы обеспечить перевозки пассажиров с минимальными убытками.

#### Задание 41

В городе имеется 80 мест, подходящих для постройки жилых домов. Строительное предприятие строит жилые дома по пяти типовым проектам (П1, П2, П3, П4, П5). Характеристики домов для каждого из типовых проектов приведены в таблице.

Типовой проект	П1	П2	П3	П4	П5
Срок строительства, рабочих дней	60	50	90	60	50
Жилая площадь, м <sup>2</sup>	3000	2000	5000	4000	6000

По имеющимся заказам предприятие должно построить не менее 12 домов по проекту П1, и не менее 15 – по проекту П2.

Параллельно предприятие может вести строительство десяти домов.

Составить план работы строительного предприятия, обеспечивающий строительство домов с максимальной жилой площадью в течение года (300 рабочих дней).



### Задание 42

Составляется план перевозки пассажиров по трем авиалиниям. В течение месяца по авиалинии Л1 требуется перевезти не менее 2 тыс. пассажиров, по авиалинии Л2 – не менее 5 тыс., по авиалинии Л3 – не менее 4 тыс. Для обслуживания авиалиний могут использоваться 10 самолетов типа Ил-156 и 25 самолетов типа Як-80. Вместимость самолета Ил-156 - 40 пассажиров, Як-80 – 20 пассажиров. Затраты на один рейс самолета каждого типа по каждой из авиалиний приведены в таблице.

Тип самолета	Затраты на один рейс, ден.ед.		
	Л1	Л2	Л3
Ил-156	2400	2400	3200
Як-80	1600	1400	1100

Цена билета на рейс по линии Л1 составляет 80 ден.ед., по линии Л2 – 60 ден.ед., по линии Л3 – 150 ден.ед. (независимо от типа самолета). Спрос на авиаперевозки велик, поэтому нераспроданных билетов не остается.

В течение месяца каждый самолет может выполнить не более 20 рейсов.

Найти, сколько рейсов по каждой авиалинии должны выполнить самолеты каждого типа, чтобы обеспечить максимальную прибыль от пассажирских перевозок.

### Задание 43

Предприятие, владеющее двумя шахтами (Ш1 и Ш2) и металлургическим заводом, составляет план работы на три года. Известно, что в первом году предприятию требуется выплавить не менее 300 тыс. т некоторого металла, во втором году – не менее 250 тыс. т, в третьем – не менее 200 тыс. т. На шахте Ш1 может добываться не более 2 млн т руды в год, на шахте Ш2 – не более 2,5 млн т в год. Содержание металла в руде, добываемой на шахте Ш1, составляет 10%, на шахте Ш2 – 7%. Затраты на добычу одной тонны руды на шахте Ш1 составляют 6 тыс. ден.ед, на шахте Ш2 – 5,5 тыс. ден.ед. Выплавленный металл продается по цене 80 тыс. ден.ед. за тонну.

Найти, сколько руды требуется добыть на каждой шахте в каждом году, чтобы обеспечить получение максимальной прибыли.

### Задание 44

Нефтеперерабатывающее предприятие выпускает нефтепродукты четырех видов: дизельное топливо, бензин, смазочные материалы и авиационное топливо. Спрос на эти виды продукции не превышает соответственно 14, 30, 10 и 8 тыс. баррелей в день.

Для производства нефтепродуктов используется нефть двух сортов (Н1 и Н2). Стоимость одного барреля нефти Н1 составляет 40 ден.ед., нефти Н2 – 45 ден.ед. В общем объеме нефти, используемой предприятием, нефть Н1 составляет не менее 40%.

Количество нефтепродуктов (в баррелях), получаемых из одного барреля нефти каждого вида, приведено в таблице.

Сорт нефти	Дизельное топливо	Бензин	Смазочные материалы	Авиационное топливо
Н1	0,2	0,25	0,1	0,15
Н2	0,1	0,6	0,15	0,1

Стоимость одного барреля дизельного топлива – 55 ден.ед., бензина – 60 ден.ед., смазочных материалов – 50 ден.ед, авиационного топлива – 70 ден.ед.

Найти, сколько нефти каждого сорта следует переработать, чтобы получить максимальную прибыль от выпуска нефтепродуктов.

### Задание 45

Денежные средства в размере 100 млн ден.ед. могут быть вложены в четыре объекта (А,В,С,Д). Характеристики объектов приведены в таблице.

Объект	Доходность, %	Срок, годы	Надежность, баллы
А	5,5	2	5
В	6,0	4	2
С	8,0	5	4
Д	7,0	2	3

Это означает, например, что средства, вложенные в объект А, через два года принесут прибыль в размере 5,5% от вложенных средств. Вложение средств в объект А достаточно надежно (оценка надежности – пять баллов).

Денежные средства распределяются с учетом следующих требований: 1) доля средств, вложенных в любой из объектов, не может превышать 40% от имеющихся средств; 2) более половины всех средств должны представлять собой долгосрочные инвестиции со сроком получения дохода не менее трех лет; 3) в объекты, для которых оценка надежности вложения составляет менее четырех баллов, может быть вложено не более 20% от имеющихся средств.

Составить план вложения денежных средств, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

### Задание 46

Предприятие выпускает консервированные напитки: апельсиновый, грейпфрутовый и ананасный сок, а также коктейль (смесь указанных соков в соотношении 2:2:1). Напитки продаются в коробках емкостью 0,5 л по следующим ценам: апельсиновый сок - 3 ден.ед., грейпфрутовый – 2,8 ден.ед., ананасный – 2,2 ден.ед., коктейль – 3,5 ден.ед. за коробку.

Для выпуска напитков предприятие закупает необработанный апельсиновый, грейпфрутовый и ананасный сок, выполняет их консервацию и

розлив. Предприятие может закупить не более 400 л апельсинового сока, не более 300 л грейпфрутового и не более 200 л ананасного сока, а также не более 2000 коробок для напитков.

Соки, используемые для производства напитков, закупаются по следующим ценам: апельсиновый сок - 2 ден.ед., грейпфрутовый – 1,6 ден.ед., ананасный – 1,4 ден.ед. за литр. Прочие расходы, связанные с выпуском одной коробки любого из напитков (стоимость коробки, затраты на консервацию и т.д.), составляют 0,4 ден.ед.

Для выполнения заказов предприятию требуется выпустить не менее чем по 100 коробок грейпфрутового и ананасного соков.

Составить план производства напитков, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

### Задание 47

Составляется план работы молочного комбината на некоторый период. На складе молочного комбината имеется 120 кг творога, из них 70 кг требуется обязательно использовать в связи с ограниченностью срока годности. Творог может продаваться на развес (без какой-либо обработки), расфасовываться в пластиковые коробки по 0,5 кг, а также использоваться для приготовления творожной массы или десерта, которые продаются в пластиковых коробках по 0,25 кг.

Нормы расхода других ингредиентов на 1 кг творожных продуктов приведены в таблице.

Ингредиенты	Расход ингредиентов на 1 кг творожного продукта, г		
	творог фасованный	творожная масса	десерт
Ванилин	-	5	10
Изюм	25	100	100

Молочный комбинат имеет возможность использовать не более 1 кг ванилина и не более 10 кг изюма.

Комбинат имеет две фасовочные машины, одна из которых выполняет расфасовку творожных продуктов в коробки по 0,5 кг, другая – в коробки по 0,25 кг. За плановый период каждая из этих машин может расфасовать не более 50 кг продукта.

Прибыль комбината от продажи одного килограмма развесного творога составляет 2 ден.ед., одной коробки фасованного творога – 1,5 ден.ед., одной коробки творожной массы – 0,8 ден.ед., одной коробки десерта – 1 ден.ед.

Составить план работы молочного комбината, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

### Задание 48

Банк выделяет кредиты общим объемом 12 млн. ден.ед. Виды кредитов, предоставляемых банком, и их характеристики приведены в таблице.

Виды банковских кредитов	Процентная ставка	Вероятность безнадежных долгов
Кредиты физическим лицам	0,140	0,10
Кредиты на покупку автомобилей	0,130	0,07
Кредиты на покупку жилья	0,120	0,03
Сельскохозяйственные кредиты	0,125	0,05
Коммерческие кредиты	0,100	0,02

Это означает, например, следующее: из всех кредитов, выданных физическим лицам, 90% возвращаются с прибылью в размере 14%, а 10% - не возвращаются вообще.

Кредиты выделяются в соответствии со следующими требованиями: 1) в кредиты на покупку жилья вкладывается не менее 50% от общей суммы кредитов физическим лицам, кредитов на покупку автомобилей и кредитов на покупку жилья; 2) в сельскохозяйственные и коммерческие кредиты вкладывается не менее 40% общей суммы кредитов; 3) отношение безнадежных долгов ко всей сумме кредитов не должно превышать 0,04.

Составить план выделения кредитов, обеспечивающий банку максимальную прибыль.

### Задание 49

Магазин продает два вида безалкогольных напитков: “Келла” и “Спрейт”. Напитки закупаются магазином у предприятия-поставщика в двухлитровых бутылках по следующим ценам: “Келла” – 5 ден.ед., “Спрейт” – 7 ден.ед. за бутылку.

Магазин продает напитки в бутылках и на разлив (через торговые автоматы). Известно, что ежедневный спрос на напитки в бутылках составляет не менее 100 бутылок, а на напитки, продаваемые на разлив – не менее 40 и не более 70 л. Известно также, что спрос на напиток “Келла” составляет не менее 60% от всего спроса на напитки, продаваемые в бутылках, и не менее 50% от спроса на напитки, продаваемые на разлив.

Напитки в бутылках продаются по следующим ценам: “Келла” – 7 ден.ед., “Спрейт” – 10 ден.ед. за бутылку. На разлив напитки продаются порциями по 0,2 л. Цена одной порции напитка “Келла” – 0,9 ден.ед, “Спрейт” – 1,2 ден.ед.

Составить план закупки и реализации напитков, обеспечивающий магазину максимальную прибыль.

### Задание 50

Флодоовощной комбинат выпускает соки, пасту и джем из некоторых фруктов. Для изготовления одой банки сока требуется 1,5 кг фруктов, одной банки пасты – 1,2 кг, одной банки джема – 1 кг.

Фрукты, поступающие на предприятие, проходят контроль качества и сортировку. Всего за рабочий день может быть проверено и отсортировано не более 6 т фруктов. По результатам контроля качества 10% фруктов отбраковываются, 60% относятся к первому сорту, 30% - ко второму. Для производства пасты и джема могут использоваться только фрукты первого сорта, для производства сока – фрукты любого сорта.

Продукция упаковывается в ящики по 10 банок в каждом. Из-за ограниченной вместимости склада за рабочий день можно выпустить не более 400 ящиков продукции.

Ящики с продукцией направляются в магазин. Прибыль комбината от продажи одной банки сока составляет 0,8 ден.ед., банки пасты – 1,4 ден.ед., банки джема – 2 ден.ед.

Для выполнения имеющихся заказов комбинат должен выпустить не менее чем по 50 банок пасты и джема.

Составить план работы плодоовощного комбината, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

### **Задание 51**

Предприятие производит из сахарного тростника четыре вида продуктов: желтый сахар, белый сахар, сахарную пудру и патоку. Из сахарного тростника, поступающего на предприятие, вырабатывается желтый сахар и патока. Эти продукты могут продаваться как готовые. Кроме того, из желтого сахара может производиться белый сахар, а из белого сахара – сахарная пудра.

В течение недели предприятие может переработать не более 4000 т сахарного тростника. Из одной тонны тростника получается 0,3 т желтого сахара и 0,1 т патоки. Из одной тонны желтого сахара получается 0,8 т белого. Из одной тонны белого сахара получается 0,95 т сахарной пудры.

Установка для переработки желтого сахара в белый может за неделю переработать не более 1000 т желтого сахара. Мельница для производства сахарной пудры может за неделю переработать не более 500 т белого сахара.

Прибыль от продажи одной тонны желтого сахара, белого сахара, сахарной пудры и патоки составляет 150, 200, 230 и 35 ден.ед. соответственно.

Составить план работы предприятия, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

### **Задание 52**

Компания, владеющая 800 гектарами земли, планирует построить на этой площади дома для сдачи их в аренду. Имеется возможность строить дома по трем проектам (П1, П2, П3). Характеристики проектов (для одного дома) приведены в таблице.

Характеристики	Проект		
	П1	П2	П3
Необходимая площадь для строительства, га	3	4	5
Необходимое водоснабжение, тыс. л	4	6	8,5
Прибыль от сдачи в аренду, млн ден.ед.	10	12	15

Имеющаяся водопроводная система может обеспечить водоснабжение не более 1 млн л.

Трудовые ресурсы, имеющиеся в распоряжении компании, достаточны для строительства 80 домов по проекту П1 (если строить дома только по этому проекту). Трудозатраты на строительство дома по проекту П2 в 1,1 раза, а по проекту П3 – в 1,6 раза выше, чем на строительство дома по проекту П1.

Компания также считает необходимым построить не менее двух домов по проекту П3.

Составить план строительства домов, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

### Задание 53

Фармацевтическое предприятие планирует выпуск поливитаминов в виде таблеток весом 0,5 г. Каждая таблетка должна содержать не менее 28 мг витамина В, от 54 до 60 мг витамина С и не менее 36 мг витамина Е.

Для изготовления таблеток могут использоваться три витаминных концентрата: VM100, VM200 и VM300, а также (для доведения веса таблетки до 0,5 г) нейтральное вещество-заполнитель. Содержание витаминов в концентратах (в миллиграммах на грамм), а также цены (за один грамм) на компоненты, используемые при изготовлении таблеток, приведены в таблице.

Компоненты	Витамины, мг/г			Цена, ден.ед./г
	В	С	Е	
VM100	200	340	20	0,8
VM200	100	250	30	0,35
VM300	200	-	280	0,5
Заполнитель	-	-	-	0,05

Определить, какие компоненты и в каком количестве следует использовать для изготовления поливитаминов, чтобы их стоимость была минимальной.

### Задание 54

Строительная фирма может принять на работу опытных рабочих, выпускников строительного училища (имеющих минимальный опыт работы) и учащихся (не имеющих опыта работы). Выпускники и учащиеся должны проходить обучение, поэтому они могут выполнить меньший объем работ, чем опытные рабочие. За месяц каждый опытный рабочий может отработать 200 часов, выпускник строительного училища – 180 часов, учащийся – 150 часов.

В течение месяца фирме требуется выполнить работы общей трудоемкостью 10 000 человеко-часов, из них 3000 человеко-часов относится к работам, которые могут выполнять только опытные рабочие, остальные работы могут выполняться любыми работниками. Кроме того, требуется, чтобы на каждых десять выпускников и на каждых пять учащихся приходилось хотя бы по одному опытному рабочему.

Оплата труда опытного рабочего (за всю работу, выполненную в течение месяца) составляет 1000 ден.ед., выпускника – 800 ден.ед., учащегося – 500 ден.ед.

Определить, сколько опытных рабочих, выпускников и учащихся требуется принять на работу, чтобы выполнить весь объем работ с минимальными затратами.

### **Задание 55**

Цех выпускает три вида технических лаков: матовый, полировочный и защитный. Для их производства используются два химиката: СА и СВ. Для изготовления матового лака эти химикаты смешиваются в соотношении 1:1, для полировочного – 1:2, для защитного – 1:4. Цена одного литра химиката СА – 2 ден.ед., СВ – 8 ден.ед. Из-за ограниченной вместимости склада цех может использовать не более 3000 л химикатов в сутки.

Оборудование цеха включает установку для производства лаков и разливочную машину. Установка для производства лаков может использоваться 20 часов в сутки. Производительность установки – 100 л матового лака, или 50 л полировочного, или 40 л защитного лака в час. Затраты, связанные с работой установки – 100 ден.ед./ч.

Разливочная машина разливает готовый лак в бутылки емкостью 0,5 л. Разливочная машина может использоваться 16 часов в сутки. Производительность разливочной машины – 120 бутылей в час. Затраты, связанные с ее работой – 80 ден.ед./ч.

Лаки продаются по следующим ценам: матовый – 8 ден.ед., полировочный – 12 ден.ед., защитный – 16 ден.ед. за бутылку. Спрос на защитный лак не превышает 200 л в сутки.

Составить план производства лаков в течение суток, обеспечивающий максимальную прибыль.

### **Задание 56**

В авиационное топливо вносятся добавки, содержащие химикаты для защиты от замерзания, вспенивания, нагара и биологического загрязнения. Минимально необходимое содержание защитных химикатов в одном литре авиационного топлива следующее: химикат для защиты от замерзания – 400 мг, от вспенивания – 140 мг, от нагара – 180 мг, от биологического загрязнения – 200 мг. Всего требуется обработать 1000 л топлива. Имеется возможность использовать три добавки: “Альфа”, “Дельта” и “Каппа”. Данные о содержании

защитных химикатов в добавках (в граммах на литр добавки) приведены в таблице.

Добавка	Содержание химикатов, г/л			
	для защиты от замерзания	для защиты от вспенивания	для защиты от нагара	для защиты от биологического загрязнения
“Альфа”	40	20	30	25
“Дельта”	50	10	10	20
“Каппа”	60	30	30	15

Содержание добавок не должно превышать 0,02 л на литр топлива.

Стоимость одного литра добавки “Альфа” – 1,8 ден.ед., “Дельта” – 2 ден.ед., “Каппа” – 2,5 ден.ед.

Составить план обработки топлива с минимальными затратами.

### Задание 57

Нефтеперерабатывающее предприятие выпускает два вида бензина: обычный и повышенного качества. Выпуск одного барреля обычного бензина приносит предприятию прибыль в размере 7 ден.ед., бензина повышенного качества – 12 ден.ед. Для выполнения заказов предприятию необходимо выпускать не менее 20 тыс. баррелей обычного бензина в день. Спрос на обычный бензин не превышает 80 тыс. баррелей в день, на бензин повышенного качества – 50 тыс. баррелей в день.

Сырая нефть, поступающая на предприятие, проходит обработку на перегонной колонне. В результате перегонки вырабатывается бензиновый полуфабрикат. Мощность перегонной колонны – 600 тыс. баррелей сырой нефти в день. На производство одного барреля бензинового полуфабриката расходуется пять баррелей сырой нефти.

Часть бензинового полуфабриката непосредственно используется для производства бензина, часть – направляется на крекинг-установку, где производится бензиновый дистиллят. Мощность крекинг-установки – 40 тыс. баррелей бензинового полуфабриката в день. При обработке на крекинг-установке 20% бензинового полуфабриката теряется.

Для получения обычного бензина полуфабрикат и дистиллят смешиваются в соотношении 3:1, для получения бензина повышенного качества – в соотношении 1:4.

Составить план работы нефтеперерабатывающего предприятия, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

### Задание 58

Технологический процесс переработки нефти на некотором предприятии включает следующие этапы: 1) перегонка сырой нефти на перегонной колонке, в результате чего вырабатывается полуфабрикат; 2) переработка части



полуфабриката на крекинг-установке, в результате чего вырабатывается дистиллят; 3) смешивание полуфабриката и дистиллята для получения бензина.

Предприятие выпускает два вида бензина: обычный и повышенного качества. Для получения обычного бензина полуфабрикат и дистиллят смешиваются в соотношении 4:1, для получения бензина повышенного качества – в соотношении 1:9. Продажа одного барреля обычного бензина приносит предприятию прибыль в размере 7 ден.ед., бензина повышенного качества – 12 ден.ед.

Кроме того, полуфабрикат и дистиллят могут продаваться как готовые нефтепродукты. Продажа одного барреля полуфабриката приносит предприятию прибыль в размере 4 ден.ед., дистиллята – 5 ден.ед.

Для выполнения заказов предприятию необходимо продавать не менее 10 тыс. баррелей обычного бензина и не менее 10 тыс. баррелей дистиллята в день. Спрос на бензин повышенного качества не превышает 50 тыс. баррелей в день.

Перегонная колонна может переработать не более 600 тыс. баррелей сырой нефти в день, крекинг-установка – не более 40 тыс. баррелей бензинового полуфабриката в день. На производство одного барреля бензинового полуфабриката расходуется пять баррелей сырой нефти. При обработке на крекинг-установке 20% бензинового полуфабриката теряется.

Составить план работы нефтеперерабатывающего предприятия, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

### **Задание 59**

В состав предприятия входит цех основного производства, а также заготовительный и механический цех.

Заготовительный цех из металлических болванок выпускает заготовки прямоугольного и круглого сечения. Из одной болванки можно получить 20 заготовок прямоугольного сечения или 30 – круглого. Каждая болванка используется для получения заготовок только одного типа. Стоимость болванки – 10 ден.ед. Затраты на ее обработку в заготовительном цехе составляют 6 ден.ед., если из нее изготавливаются заготовки прямоугольного сечения, или 10 ден.ед. – при изготовлении заготовок круглого сечения. За месяц заготовительный цех может обработать не более 1000 болванок.

Заготовки направляются в механический цех для механообработки. Производительность оборудования для механообработки – 12 заготовок прямоугольного сечения или 15 заготовок круглого сечения в час. Фонд времени работы оборудования для механообработки – 300 часов в месяц. Затраты, связанные с работой этого оборудования – 20 ден.ед. в час.

Цеху основного производства требуется не менее 4000 заготовок прямоугольного сечения и не менее 5000 заготовок круглого сечения в месяц.

При необходимости заготовки могут закупаться у другого предприятия. Цена заготовки прямоугольного сечения – 8 ден.ед., круглого – 6 ден.ед.

Составить план работы предприятия, позволяющий обеспечить заготовками цех основного производства с минимальными затратами.

### Задание 60

На птицефабрике содержится 20 тыс. цыплят. Каждому цыпленку требуется 900 г корма в неделю. Корм должен содержать не менее 8% и не более 12% кальция, не менее 22% белка, не более 5% клетчатки. Корм может состояться из трех ингредиентов: известняка, зерна и соевой муки. Содержание кальция, белка и клетчатки в каждом из ингредиентов (в граммах на килограмм ингредиентов) приведено в таблице.

Ингредиент	Содержание вещества, г/кг		
	кальций	белок	клетчатка
Известняк	380	0	0
Зерно	1	90	20
Соевая мука	2	50	80

Цена одного килограмма известняка – 0,25 ден.ед., зерна – 0,9 ден.ед., соевой муки – 3 ден.ед.

Найти, сколько ингредиентов требуется птицефабрике, чтобы обеспечить содержание цыплят с минимальными затратами.

### Задание 61

На птицефабрике выращиваются цыплята трех пород (П1, П2, П3). Цыпленку породы П1 или П3 требуется ровно 600 г корма в неделю, цыпленку породы П2 – 800 г. Корм для цыплят составляется из трех ингредиентов: известняка, зерна и соевой муки. Для цыплят породы П1 эти ингредиенты должны содержаться в корме в соотношении 1:3:1, для породы П2 – 1:2:2, для породы П3 – 1:3:2. В течение недели птицефабрика может использовать не более 3 т известняка, 6 т зерна и 5 т соевой муки.

Из-за ограниченной площади на птицефабрике может содержаться не более 20 тыс. цыплят. Требуется вырастить не менее 5 тыс. цыплят породы П2.

Прибыль птицефабрики от продажи одного цыпленка породы П1 составляет 3 ден.ед., П2 – 6 ден.ед., П3 – 4 ден.ед.

Определить, сколько цыплят каждой породы необходимо выращивать на птицефабрике, чтобы обеспечить получение максимальной прибыли.

### Задание 62

Молочный комбинат выпускает три вида продукции: молоко, кефир и сметану. Комбинат имеет возможность переработать не более 150 т молока в неделю. Для производства 1 кг кефира и сметаны требуется соответственно 1,1 и 8 кг молока. Молоко и кефир разливаются в пакеты по 1 кг, сметана расфасовывается в пакеты по 0,5 кг.

Характеристики оборудования, имеющегося на комбинате, приведены в таблице.

Оборудование	Производительность	Возможное время работы
Линия розлива молока	2 т/ч	80 ч/неделю
Линия расфасовки сметаны	300 кг/ч	50 ч/неделю
Автомат для производства пакетов	1500 пакетов для молока или 2000 пакетов для сметаны в час	60 ч/неделю

Из опыта торговли молочными продуктами известно, что на каждые 100 купленных пакетов молока обычно приобретается от 10 до 20 пакетов кефира и не менее 10 пакетов сметаны.

Прибыль комбината от продажи одного пакета молока составляет 0,06 ден.ед., кефира – 0,03 ден.ед., сметаны – 0,05 ден.ед.

Составить недельный план производства молочных продуктов, обеспечивающий комбинату максимальную прибыль.

### Задание 63

Сельскохозяйственное предприятие выращивает виноград двух сортов: “Алиготе” и “Фетяска”. Для выращивания винограда предприятие имеет возможность использовать 26 га равнинной местности и 20 га – холмистой.

Предприятие имеет 3,5 т удобрений и 4,2 тыс. л химиката для защиты от вредителей. Расход удобрений и химиката в зависимости от сорта винограда и местности, где он выращивается, приведен в таблице.

Сорт винограда	Расход удобрений, кг/га		Расход химиката, л/га	
	на равнинной местности	на холмистой местности	на равнинной местности	на холмистой местности
“Алиготе”	95	70	120	80
“Фетяска”	80	75	100	80

Для сбора урожая винограда “Алиготе” на каждом гектаре должны работать 22 человека, для винограда “Фетяска” – 25 человек. Всего предприятие имеет возможность нанять на работу не более 1000 человек.

Прибыль от продажи урожая винограда с одного гектара приведена в таблице.

Сорт винограда	Прибыль от урожая с одного гектара, тыс. ден.ед.	
	на равнинной местности	на холмистой местности
“Алиготе”	6	3
“Фетяска”	5	2

Разработать план выращивания винограда, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

### Задание 64

Горнодобывающая компания владеет тремя шахтами (“Северная”, “Восточная” и “Западная”) и металлургическим комбинатом. Руда, добываемая на шахтах и содержащая некоторый металл, доставляется поездами на металлургический комбинат, где производится выплавка металла из руды.

Показатели работы шахт приведены в таблице.

Показатели	Шахта		
	“Северная”	“Восточная”	“Западная”
Максимальная добыча, т	740	680	600
Содержание металла, %	28	25	30
Извлечение, %	80	75	80
Затраты, ден.ед./т	600	700	1000

Это означает, например, что за период, для которого составляется план работы, на шахте “Северная” можно добыть не более 740 т руды. Содержание металла в ней составляет 28%. На металлургическом комбинате имеется возможность извлечь 80% металла, содержащегося в руде. Затраты на добычу одной тонны руды составляют 600 ден.ед.

Для доставки руды с шахт на металлургический комбинат компания имеет возможность организовать 20 рейсов поездов. За один рейс доставляется 100 т руды. Затраты на один рейс составляют 30 тыс. ден.ед.

Руда, поступающая на металлургический комбинат, должна иметь содержание металла не менее 27%. Для этого руда с разных шахт на металлургическом комбинате может смешиваться. Затраты на выплавку металла из одной тонны руды составляют 200 ден.ед.

Выплавленный металл продается по цене 5 тыс. ден.ед. за тонну.

Составить план добычи и доставки руды, обеспечивающий компании максимальную прибыль.

### Задание 65

Сельскохозяйственное предприятие производит зерно, сахарную свеклу и подсолнечник. Характеристики культур, выращиваемых предприятием, приведены в таблице.

Показатели	Сельскохозяйственные культуры		
	зерновые	сахарная свекла	подсолнечник
Урожайность, ц/га	26	275	18
Цена продукции, ден.ед./ц	215	75	370
Затраты на выращивание:			
труд, человеко-дней/га	1,5	4,5	1,5
минеральные удобрения, кг/га	5	15	6
прочие, тыс. ден.ед./га	2,7	12,7	3,5

Предприятие имеет 3200 га земли. Имеется возможность использовать 15 т минеральных удобрений. Трудовые ресурсы предприятия составляют 7000 человеко-дней. Цена одной тонны удобрений – 300 тыс. ден.ед. Оплата одного человеко-дня труда – 30 ден.ед.

Для выполнения заключенных договоров предприятие должно получить не менее 65 тыс. центнеров зерна.

Площадь, выделенная под сахарную свеклу и подсолнечник, не должна превышать 25% от всей используемой земли.

Составить план работы сельскохозяйственного предприятия, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

### Задание 66

Нефтеперерабатывающий завод имеет возможность закупать нефть у трех компаний-поставщиков: “Дальнефть” (по цене 70 ден.ед. за баррель), “Югройл” (50 ден.ед.), “Севернефть” (80 ден.ед.). Для обеспечения надежности поставок требуется, чтобы доля каждого из поставщиков в общем объеме поставок не превышала 40%.

Завод имеет возможность перерабатывать нефть двумя способами. В результате выпускаются три вида нефтепродуктов: бензол (продается по цене 200 ден.ед./баррель), лигроин (120 ден.ед./баррель), мазут (100 ден.ед./баррель). Величины выхода каждого из нефтепродуктов приведены в таблице.

Способ переработки	Выход нефтепродуктов при переработке одного барреля нефти								
	“Дальнефть”			“Югройл”			“Севернефть”		
	Бензол	лигроин	мазут	бензол	лигроин	мазут	бензол	лигроин	мазут
А	0,2	0,4	0,1	0,1	0,3	0,3	0,3	0,4	0,1
В	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3	0,1

Это означает, например, следующее: если переработать один баррель нефти компании “Дальнефть”, используя способ переработки А, то будет получено 0,2 барреля бензола, 0,4 барреля лигроина и 0,1 барреля мазута.

Производственные мощности завода позволяют переработать не более 100 тыс. баррелей нефти способом А, и не более 80 тыс. баррелей нефти – способом В. Кроме того, необходимо учитывать, что спрос на бензол не превышает 30 тыс. баррелей.

Составить план закупок и использования нефти, обеспечивающий нефтеперерабатывающему заводу максимальную прибыль.

### Задание 67

Сборочное предприятие запускает в производство автомобили трех классов: седаны, пикапы и спортивные автомобили. Для запуска в производство седанов требуется израсходовать 2 млн ден.ед., пикапов – 3 млн ден.ед., спортивных автомобилей – 7 млн ден.ед. Другие характеристики выпускаемых автомобилей приведены в таблице.

Класс автомобиля	Прибыль от продажи одного автомобиля, ден.ед.	Затраты времени на сборку одного автомобиля, ч
Седан	6000	12
Пикап	8000	15
Спортивный	11 000	24

Для выполнения заказов предприятию требуется выпустить не менее 100 седанов, не менее 200 пикапов и не менее 300 спортивных автомобилей.

Составить план производства автомобилей, обеспечивающий кратчайший срок окупаемости затрат, необходимых для запуска автомобилей в производство.

### Задание 68

Звероферма выращивает животных трех видов: черно-бурых лисиц, песцов и нутрий. Звероферма имеет 10 тыс. клеток. В одной клетке могут находиться две лисы, или один песец, или четыре нутрии.

На звероферме используются три вида кормовых смесей: основной корм для лисиц и песцов, основной корм для нутрий, а также витаминная добавка, применяемая для всех животных. Потребности животных в корме (для одного животного) приведены в таблице.

Корм	Потребность в корме, единиц/день		
	лисица	песец	нутрия
Основной	5	4	2
Витаминная добавка	0,4	0,2	0,1

Максимальное количество корма, которое может ежедневно использовать звероферма, следующее: основной корм для лисиц и песцов – 200 тыс. единиц, основной корм для нутрий – 80 тыс. единиц, витаминная добавка – 30 тыс. единиц.

Для выполнения заказов на поставку меха предприятию необходимо содержать не менее 3 тыс. лисиц и не менее 6 тыс. песцов.

Прибыль от продажи одной шкурки лисицы составляет 10 ден.ед., песца – 7 ен.ед., нутрии – 4 ден.ед.

Определить, сколько животных каждого вида должна содержать звероферма, чтобы получить максимальную прибыль.

### Задание 69

Производственное объединение имеет возможность приобрести акции трех компаний. Всего на покупку акций может быть выделено не более 100 000 ден.ед. Характеристики компаний, акции которых можно приобрести, приведены в таблице.

Компания	Сфера деятельности	Цена акции, ден.ед.	Ожидаемый годовой доход на акцию, ден.ед.	Количество акций, выставленных на продажу
“Дальнефть”	добыча нефти	60	7	1000
“Югройл”	добыча нефти	35	4	1000
“Уралмет”	металлургия	40	5	1500

Руководством производственного объединения утверждены следующие требования к покупке акций: 1) не менее 50% всех средств, расходуемых на покупку акций, должны быть вложены в акции нефтедобывающих компаний; 2) не разрешается вкладывать более 40% всех расходуемых средств в акции какой-либо одной компании.

Определить, сколько акций каждой компании необходимо приобрести производственному объединению, чтобы получить максимальную прибыль.

### Задание 70

Предприятие пищевой промышленности выпускает два вида острых приправ (П1 и П2). Для изготовления приправ используется красный и черный перец. В приправе П1 должно содержаться не менее 25% красного и не менее 25% черного перца, в приправе П2 – не более 75% красного перца.

Всего предприятие имеет возможность использовать не более 40 кг красного и не более 30 кг черного перца. Цена красного перца – 16 ден.ед./кг, черного – 26 ден.ед./кг. Приправы продаются по следующим ценам: П1 – 35 ден.ед./кг, П2 – 30 ден.ед./кг.

Составить план производства приправ, обеспечивающих предприятию получение максимальной прибыли.

### Задание 71

Объем работ, которые требуется выполнять в ремонтной службе крупного предприятия, различен в разное время суток. Данные об объеме работ, который необходимо выполнять в различные периоды суток, приведены в таблице.

Время	7.00–11.00	11.00–15.00	15.00–19.00
Объем работ, человеко-часы	150	500	400
В том числе квалифицированного труда, человеко-часы	70	200	250

Это означает, например, что ежедневно за время с 7.00 до 11.00 требуется выполнять работы объемом 150 человеко-часов, из них 70 человеко-часов представляют собой квалифицированный труд.

На предприятии могут работать квалифицированные и неквалифицированные рабочие. Работы, представляющие собой квалифицированный труд, могут выполняться только квалифицированными рабочими, остальные работы - любыми рабочими. Каждый рабочий работает

восемь часов подряд. Рабочие могут выходить на работу в 7.00 и 11.00. Оплата труда квалифицированного рабочего составляет 10 ден.ед./ч (независимо от того, какие работы он выполняет), неквалифицированного – 6 ден.ед./ч.

Определить необходимое количество рабочих различной квалификации и составить график их выхода на работу, обеспечивающий минимальные затраты предприятия на оплату труда.

### Задание 72

Предприятие может принять на работу опытных рабочих и учащихся, не имеющих опыта работы. Учащиеся должны проходить обучение, поэтому они могут выполнить меньший объем работ, чем опытные рабочие. За месяц каждый опытный рабочий может отработать 200 часов, учащийся – 150 часов.

В течение месяца предприятию требуется выполнить работы общей трудоемкостью 20 000 человеко-часов, из них 8000 человеко-часов относится к квалифицированным работам, остальные – к неквалифицированным. Квалифицированные работы могут выполняться только опытными рабочими, неквалифицированные – как опытными рабочими, так и учащимися. Кроме того, требуется, чтобы на каждых десять учащихся приходилось хотя бы по одному опытному рабочему.

Оплата труда опытного рабочего при выполнении им квалифицированных работ составляет 10 ден.ед., за человеко-час, при выполнении неквалифицированных работ – 8 ден.ед. за человеко-час. Оплата труда учащегося составляет 5 ден.ед. за человеко-час.

Найти, сколько работников различной квалификации требуется принять на работу и как распределить их по работам, чтобы затраты предприятия на оплату труда рабочих были минимальными.

### Задание 73

Сельскохозяйственное предприятие, имеющее 2000 га земли, планирует выращивать пшеницу и люцерну, а также откармливать бычков. Характеристики сельскохозяйственных культур, которые планируется выращивать, приведены в таблице.

Культура	Затраты на выращивание, ден.ед./га	Урожайность, ц/га	Цена при продаже, ден.ед./ц
Пшеница	1000	50	120
Люцерна	1400	100	50

Для выполнения заказа предприятию необходимо получить не менее 8 тыс. т пшеницы.

Предприятие может откармливать не более тысячи бычков. Для откорма одного бычка требуется 0,25 га земли, а также 5 центнеров люцерны. Для откорма может использоваться как люцерна, выращиваемая самим



предприятием, так и закупаемая у других предприятий по цене 50 ден.ед./ц. Прочие затраты, связанные с откормом одного бычка, составляют 1000 ден.ед., а выручка при продаже – 3000 ден.ед.

Составить план работы сельскохозяйственного предприятия, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

### Задание 74

Тепловая электростанция должна ежемесячно вырабатывать не менее 7200 МВт·ч электроэнергии. Электростанция состоит из двух энергоблоков. Первый энергоблок (максимальная мощность – 5000 МВт·ч в месяц) работает на природном газе, второй (максимальная мощность – 3000 МВт·ч в месяц) – на твердом топливе. В качестве твердого топлива может использоваться уголь, горючий сланец, а также мусор с городских свалок. За сжигание одной тонны мусора электростанция получает 200 ден.ед. за счет государственной программы охраны окружающей среды. Остальные виды топлива закупаются электростанцией. Характеристики топлива приведены в таблице.

Вид топлива	Стоимость	Выход энергии при сжигании
Мусор	-200 ден.ед./т	4 МВт·ч/т
Уголь	1000 ден.ед./т	12 МВт·ч/т
Горючий сланец	700 ден.ед./т	8 МВт·ч/т
Природный газ	120 ден.ед./1000 м <sup>3</sup>	1,5 МВт·ч/1000 м <sup>3</sup>

В течение месяца электростанция имеет возможность использовать не более 200 т мусора и не более 500 т горючего сланца.

Составить план использования топлива электростанцией, обеспечивающий выработку необходимой электроэнергии с минимальными затратами.

### Задание 75

Предприятие планирует провести рекламную кампанию на телевидении. Реклама может быть размещена во время телепередач четырех видов: детектив, мелодрама, образовательная программа, аналитическая программа. Характеристики телепередач приведены в таблице.

Телепередача	Дни выхода в эфир	Время выхода в эфир	Максимальное рекламное время, мин	Цена рекламного времени, ден.ед./мин
Детектив	будни	вечер	10	600
Мелодрама	выходные	день	15	400
Образовательная программа	будни	день	5	200
Аналитическая программа	выходные	вечер	5	300

По имеющимся оценкам, эффективность рекламы во время детектива или аналитической программы в четыре раза выше, а во время мелодрамы – в два раза выше, чем во время образовательной программы.

Всего на рекламную компанию выделено 10 тыс. ден.ед. При планировании рекламы необходимо обеспечить не менее 5 мин рекламного времени в вечернее время, и не менее 5 мин – в выходные дни.

Составить план наиболее эффективной рекламной компании.

### Задание 76

Учебный центр открывает курсы кройки и шитья, ремонта бытовой техники, английского языка. На курсы кройки и шитья, а также на курсы ремонта бытовой техники слушатели принимаются только индивидуально. На курсы английского языка слушатели принимаются как индивидуально, так и группами, направляемыми от предприятий. Из опыта работы известно, что средняя численность группы слушателей, направляемой от предприятия для изучения английского языка, составляет три человека.

Плата слушателя за обучение на курсах кройки и шитья составляет 100 ден.ед., на курсах ремонта бытовой техники – 150 ден.ед. Плата за обучение на курсах английского языка составляет: для слушателей, обучающихся индивидуально – 500 ден.ед., для направленных от предприятий – 400 ден.ед. (с каждого слушателя).

Из-за ограниченности помещений, имеющихся у учебного центра, общее количество слушателей курсов не может превышать 600 человек. Количество слушателей в группе на курсах кройки и шитья, а также на курсах ремонта бытовой техники – 15 человек, на курсах иностранного языка – 8 человек. С каждой группой работает один преподаватель. В учебном центре работают 20 преподавателей кройки и шитья, 22 преподавателя ремонта бытовой техники, 10 преподавателей английского языка. Учебный центр планирует принять на обучение не менее 30 человек на курсы кройки и шитья, а также группы для изучения английского языка не менее чем от пяти предприятий.

Составить план приема слушателей на обучение, обеспечивающий учебному центру максимальную выручку.

### Задание 77

Тепловая электростанция, работающая на угле, должна ежемесячно вырабатывать не менее 10 000 МВт·ч электроэнергии. Электростанция состоит из двух энергоблоков. Их характеристики приведены в таблице.

Энергоблок	Максимальная мощность, МВт·ч/месяц	Затраты на выработку электроэнергии, ден.ед./МВт·ч	Эффективность системы очистки, %
Первый	7000	40	60
Второй	5000	50	80

Показатель эффективности системы очистки означает, например, что на первом энергоблоке 60% вредных примесей, содержащихся в сжигаемом угле,

задерживаются системами очистки (а остальные 40% - выделяются в атмосферу).

В качестве топлива для электростанции может использоваться уголь с двух шахт: “Северная” и “Южная”. Характеристики углей приведены в таблице.

Шахта - поставщик угля	Выход энергии при сжигании, МВт·ч/т	Содержание вредных примесей, %		Цена, ден.ед./т
		сернистые	ароматические	
“Северная”	12	0,18	0,24	1000
“Южная”	14	0,14	0,5	1200

Для соблюдения установленных требований по защите окружающей среды необходимо, чтобы выбросы сернистых соединений не превышали 0,4 т, а ароматических соединений – 0,3 т в месяц.

Составить план закупок и использования угля, обеспечивающий выработку необходимой электроэнергии с минимальными затратами.

### Задание 78

Предприятие планирует выпуск жидкой смеси для подкормки растений. Смесь выпускается в бутылках емкостью 1,5 л. Каждая бутылка должна содержать следующие микроэлементы: не менее 0,1 г железа, от 6 до 8 г кальция и не менее 3 г фосфора.

Для изготовления смеси могут использоваться четыре концентрата: K100, K200, K300 и K400, причем содержание концентрата K400 в смеси не должно превышать 20%. Содержание микроэлементов в концентратах (в граммах на литр), а также цены концентратов (за один литр) приведены в таблице.

Концентрат	Микроэлементы, г/л			Цена, ден.ед./л
	железо	кальций	фосфор	
K100	0,1	4	8	0,8
K200	0,16	6	5,5	0,6
K300	0,12	8	5	0,4
K400	0,08	7	-	0,3

Определить состав смеси, при котором ее стоимость будет минимальной.

### Задание 79

Предприятие имеет 20 станков, которые необходимо периодически заправлять смазочными материалами. Расход смазочного материала на одну заправку станка составляет 0,25 л.

Предприятие планирует организовать собственное производство смазочных материалов. Кроме того, имеется возможность закупать смазочные материалы “Люкс” (по цене 20 ден.ед. за литр) и “Экстра” (28 ден.ед. за литр). При заправке станка смазочным материалом собственного производства новая

заправка требуется через 10 дней работы, при использовании материала “Люкс” – через 15 дней, “Экстра” – через 20 дней.

Для изготовления смазочного материала собственного производства требуется смешивать три химиката (С1, С2 и С3) в соотношении 2:1:2, причем в процессе изготовления смазочного материала теряется по 20% каждого из химикатов. Другими словами, из одного литра смеси химикатов С1, С2 и С3 (в соотношении 2:1:2) получается 0,8 л смазочного материала. Цена одного литра химикатов С1, С2 и С3 – 12, 15 и 20 ден.ед. соответственно. Из-за ограниченной вместимости складов предприятие может использовать не более 5000 л химикатов в год.

Руководство предприятия считает необходимым обеспечивать потребности предприятия в смазочных материалах за счет собственного производства не менее чем на 40%.

Составить план производства и закупки смазочных материалов на год (360 дней), при котором затраты предприятия, связанные со смазочными материалами, будут минимальными.

### Задание 80

Производство муки на мукомольном комбинате включает следующие основные этапы: сушка зерна (в сушилке), его очистка (на очистной установке), размол (на мельнице).

Комбинат имеет возможность закупать зерно трех сортов: высокой твердости (по цене 220 ден.ед. за тонну), средней твердости (140 ден.ед.) и низкой твердости (100 ден.ед.).

Зерно, поступающее на комбинат, направляется на сушку. Известно, что на комбинат поступает примерно 60% зерна обычной влажности и 40% - повышенной (влажность зерна не зависит от его сорта). При сушке зерна обычной влажности его вес снижается на 10%, повышенной – на 20%.

Высушенное зерно направляется на очистку, а очищенное зерно – на размол. Характеристики зерна различных сортов приведены в таблице.

Сорт зерна	Потери при очистке, %	Выпуск муки из 1 т очищенного зерна, т		
		высший сорт	первый сорт	второй сорт
Высокой твердости	5	0,6	0,2	-
Средней твердости	8	0,3	0,3	0,2
Низкой твердости	10	-	0,2	0,5

В следующей таблице приведены характеристики оборудования мукомольного комбината.

Оборудование	Производительность, т/ч	Время работы, ч/сутки	Затраты на эксплуатацию, ден.ед./ч
Сушилка	30 (для зерна обычной влажности) или 20 (для зерна повышенной влажности)	20	120
Очистная установка	40	15	100
Мельница	15	20	160

Это означает, например, что мельница может переработать 15 т высушенного и очищенного зерна в час. Мельница может использоваться 20 ч в сутки. Затраты на ее эксплуатацию составляют 160 ден.ед. в час.

Мука высшего сорта продается по цене 800 ден.ед. за тонну, первого – 600 ден.ед., второго – 300 ден.ед.

Составить план работы мукомольного комбината, обеспечивающий ему получение максимальной прибыли.

## 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО КУРСОВОМУ ПРОЕКТИРОВАНИЮ

Выполнение курсового проекта по дисциплине “Системный анализ и исследование операций” включает следующие основные этапы:

- анализ литературных источников по тематике моделирования и оптимизации;
- решение поставленной задачи оптимизации, в том числе с использованием современных программных средств, как правило – с использованием табличного процессора Excel;
- анализ и интерпретация полученных результатов;
- выявление недостатков объекта моделирования, разработка предложений по их устранению;
- разработку модифицированной модели, соответствующей улучшенному варианту объекта моделирования, и оценку достигнутых результатов;
- обзор задач оптимизации по предметной области, к которой относится решенная задача.

Результаты выполнения курсового проекта представляются в виде расчетно-пояснительной записки. Рекомендуются следующая структура расчетно-пояснительной записки.

Введение	
1	Постановка задачи оптимизации
2	Построение базовой аналитической модели
3	Обоснование вычислительной процедуры
4	Решение задачи оптимизации на основе симплекс-метода
5	Анализ базовой аналитической модели на чувствительность
6	Определение оптимального целочисленного решения
7	Построение модифицированной аналитической модели и анализ результатов модификации
8	Примеры постановок и решения оптимизационных задач
Заключение	
Список использованных источников	
Приложения	

**Введение** должно содержать аналитический обзор литературных источников по проблематике моделирования и оптимизации решений в управленческой деятельности. Во введении может приводиться классификация задач оптимизации и методов их решения, сведения из истории развития методов оптимизации, сведения о современных программных средствах для решения задач оптимизации, примеры применения методов и программных средств оптимизации в управлении предприятиями и организациями и т.д. При

подготовке введения необходимо использовать источники (книги, журналы, Интернет-ресурсы) по таким разделам знаний, как методы оптимизации, экономико-математические методы, математические методы в управлении и бизнесе и т.д. Все источники, использовавшиеся при подготовке введения, должны быть указаны в списке использованных источников. В тексте введения должны быть приведены ссылки на все использованные источники, оформленные согласно установленным правилам.

*Не допускается* включение во введение материалов лекций, практических и лабораторных занятий, а также используемых на занятиях методических пособий.

В разделе **“Постановка задачи оптимизации”** приводится текст задания к курсовому проекту, а также необходимые пояснения, уточняющие постановку задачи. В некоторых случаях целесообразно привести иллюстрацию постановки задачи в виде рисунка (например, в виде схемы технологического процесса, описываемого в постановке задачи).

В разделе **“Построение базовой аналитической модели”** приводится описание переменных, ограничений и целевой функции, используемых в аналитической модели. Если при построении аналитической модели выполнялись какие-либо расчеты, преобразования и т.д., то они также приводятся в данном разделе.

В разделе **“Обоснование вычислительной процедуры”** указываются методы, выбранные для решения задачи (двухэтапный метод, методы целочисленного программирования). Например, если для решения задачи требуется использовать двухэтапный метод, то необходимо указать, какие ограничения, имеющиеся в математической модели, делают необходимым использование этого метода. Если требуется использование методов целочисленного программирования (обычно – метода ветвей и границ), то необходимо указать, какие переменные в математической модели должны принимать целочисленные значения. Если задача может быть решена только с помощью простого симплекс-метода, это также необходимо обосновать в данном разделе.

В разделе **“Решение задачи оптимизации на основе симплекс-метода”** описывается приведение математической модели к стандартной форме, ход решения задачи с использованием симплекс-таблиц, результаты решения задачи. В описании хода решения задачи должны быть приведены *все* симплекс-таблицы, а также пояснения (например, о выборе ведущего элемента, о получении допустимого решения и т.д.). По окончании решения задачи должны быть указаны оптимальные значения *всех* переменных (включая остаточные и избыточные) и целевой функции, с указанием их содержательного смысла и размерности. Кроме того, могут быть приведены дополнительные результаты, рассчитанные на основе найденных оптимальных значений переменных (например, в задачах планирования производства – количество ресурсов, необходимых для реализации оптимального плана; в

задачах на составление смесей – состав полученной смеси или расходы на ее получение, и т.д.).

В разделе **“Анализ базовой аналитической модели на чувствительность”** указывается статус и ценность рассматриваемых в задаче ресурсов (если они есть), выполняется анализ результатов на чувствительность к изменениям ограничений и коэффициентов целевой функции. Как правило, требуется выполнить анализ на чувствительность к изменению правой части одного ограничения “больше или равно”, одного ограничения “меньше или равно”, одного коэффициента целевой функции. Если в задаче имеются ограничения, существенно различающиеся по своему физическому смыслу (например, несколько ограничений на финансовые ресурсы, и несколько – на технические характеристики выпускаемой продукции), то следует выполнить анализ на чувствительность к изменению одного из ограничений каждой такой группы. При описании анализа на чувствительность необходимо четко указать физический смысл полученных результатов.

В разделе **“Определение оптимального целочисленного решения”** приводится описание поиска оптимального целочисленного решения, если это требуется по смыслу задачи. Как правило, для этого используется метод ветвей и границ. В этом случае процесс решения задачи должен быть показан в виде дерева. Описание хода решения задачи должно быть достаточно подробным. Должен быть описан порядок включения новых задач в список решаемых задач и их исключения из этого списка, указаны оценки задач, показан порядок выбора задач для решения и т.д. По окончании решения задачи должны быть указаны оптимальные значения *всех* переменных (включая остаточные и избыточные) и целевой функции, с указанием их содержательного смысла и размерности. Пример описания поиска оптимального целочисленного решения приведен в [1].

Если по смыслу задачи поиск целочисленного решения не требуется, то раздел **“Определение оптимального целочисленного решения”** не включается в пояснительную записку.

В разделе **“Построение модифицированной аналитической модели и анализ результатов модификации”** анализируются возможности улучшения полученных результатов. Как правило, указываются недостатки объекта моделирования, выявленные в результате решения задачи оптимизации, и приводятся предложения по их устранению. Например, если решалась задача составления оптимального плана производства, и какое-либо изделие не вошло в оптимальный план, то следует проанализировать, насколько требуется снизить затраты на его производство, чтобы оно стало выгодным. Если в оптимальном решении остался неизрасходованным значительный запас какого-либо ресурса, то следует проанализировать возможность увеличения запасов других (дефицитных) ресурсов, чтобы обеспечить использование всех ресурсов и увеличение объема производства, и т.д. Составляется модифицированная аналитическая модель; при этом необходимо четко указать, какие именно



изменения внесены в нее по сравнению с базовой моделью (увеличен запас ресурсов, повышена цена изделия и т.д.). Задача решается на основе модифицированной модели (с помощью программных средств), и приводятся полученные результаты. Выполняется сравнение результатов, полученных с использованием базовой и модифицированной модели.

В данном разделе может рассматриваться несколько вариантов изменений в объекте моделирования. В этом случае составляется несколько вариантов модифицированной модели, и сравниваются результаты, полученные с использованием этих моделей. Может выполняться варьирование некоторого параметра задачи с целью получения желанного результата. Например, если некоторое изделие не вошло в оптимальный план производства, то можно решить задачу несколько раз, варьируя цену на такое изделие (т.е. соответствующий коэффициент целевой функции), чтобы подобрать такое значение цены, при котором производство изделия становится выгодным.

Для задач, решаемых на основе модифицированных моделей, подробное описание хода решения (симплекс-таблицы, выбор ведущего элемента и т.д.) не требуется. Достаточно привести модифицированную математическую модель, результаты решения задачи и их сравнение с результатами, полученными для базовой модели.

Как и при решении задачи на основе базовой модели, могут приводиться дополнительные результаты, вычисляемые на основе оптимальных значений переменных.

В разделе **“Примеры постановок и решения оптимизационных задач”** приводятся примеры оптимизационных задач из предметной области, к которой относится задача, решавшаяся в курсовом проекте. Например, если в курсовом проекте решалась задача составления оптимального плана производства, то в данном разделе могут быть приведены другие задачи, где также требуется определить оптимальный план производства. Если решалась задача распределения транспортных средств по маршрутам, то в данном разделе можно привести другие задачи управления перевозками, и т.д.

Задачи в данном разделе должны быть приведены по результатам обзора литературы и Интернет-источников. Они должны существенно отличаться от основной задачи, решавшейся в курсовом проекте. В данный раздел *не разрешается* включать задачи, рассматривавшиеся в лекциях, на практических и лабораторных занятиях, а также задачи из методических пособий, используемых на занятиях.

Для задач, включенных в данный раздел, должны быть приведены математические модели с объяснением смысла переменных, ограничений и целевой функции. Большинство задач из этого раздела требуется решить, используя программные средства (как правило, Excel), и привести результаты решения с объяснением их смысла. Подробное описание хода решения таких задач (симплекс-таблицы и т.д.) не требуется.

В раздел **“Примеры постановок и решения оптимизационных задач”** могут включаться задачи, для решения которых требуется применять методы,

отличные от линейного программирования (например, задачи, решаемые методами динамического программирования, экспертного анализа и т.д.). Для таких задач приводить решение необязательно.

В **заключении** приводятся основные результаты решения поставленной задачи, выявленные недостатки и возможности улучшения полученных результатов, предложенные изменения и их результаты.

**Список использованных источников** содержит все источники, использовавшиеся при выполнении курсового проекта: книги, методические пособия, журналы, Интернет-источники и т.д. На все источники, указанные в списке, должны быть приведены ссылки в тексте пояснительной записки.

*Не допускается* включение в список использованных источников конспекта лекций и практических занятий, систем оперативной подсказки программных средств (help), поисковых систем (например, [www.rambler.ru](http://www.rambler.ru)).

В **приложениях** обычно приводятся результаты решения задач, рассматривавшихся в курсовом проекте, с использованием программных средств. Как правило, пояснительная записка должна содержать следующие приложения:

- протокол решения задачи на основе базовой аналитической модели с использованием пакета прикладных программ для решения задач линейного программирования;
- рабочий лист Excel с результатами решения задачи на основе базовой аналитической модели;
- рабочий лист Excel с результатами решения задачи на основе модифицированной аналитической модели;
- результаты решения задач из раздела “Примеры постановок и решения оптимизационных задач”, полученные с использованием Excel или других программных средств.

В пояснительную записку могут включаться и другие приложения, содержащие копии информационных материалов из Интернет-источников, копии экранов программных средств для решения задач оптимизации и другие материалы по тематике курсового проекта.

На все приложения, имеющиеся в пояснительной записке, должны быть приведены ссылки в тексте записки.

Если в одном приложении приводятся результаты решения нескольких задач (например, результаты использования нескольких модифицированных моделей), то результаты решения каждой из них оформляются в приложении как отдельный рисунок или таблица. В этом случае в тексте пояснительной записки должны быть указаны ссылки на каждый из таких рисунков или таблиц.

Решение задач оптимизации с использованием Excel рассмотрено в [1,7]. Пример оформления приложения, представляющего собой рабочий лист с результатами решения задачи оптимизации в Excel, приведен в Приложении А.

**Оформление расчетно-пояснительной записки.** Вся расчетно-пояснительная записка должна быть оформлена в соответствии с действующими правилами оформления текстовых документов, приведенными в [19,20].

### 3 ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

#### 3.1 Постановка задачи

Нефтеперерабатывающий завод выпускает авиационный бензин трех видов: для сельскохозяйственной, легкомоторной и пассажирской авиации. Для производства бензина завод закупает три полуфабриката: алкилат, крекинг-бензин и бензин прямой перегонки. Максимально возможные поставки полуфабрикатов следующие: алкилат – 40 тыс.т, крекинг-бензин – 25 тыс.т, бензин прямой перегонки – 35 тыс.т.

Для получения авиационного бензина полуфабрикаты (алкилат, крекинг-бензин и бензин прямой перегонки) смешиваются в следующих соотношениях: бензин для сельскохозяйственной авиации - 2:3:5, для легкомоторной - 3:1:1, для пассажирской авиации - 2:2:1.

По заказу завод должен выпустить не менее 60 тыс. т бензина для сельскохозяйственной авиации.

Прибыль завода от продажи одной тонны бензина следующая: бензин для сельскохозяйственной авиации – 1200 ден.ед., для легкомоторной – 700 ден.ед., для пассажирской - 1500 ден.ед.

Составить план производства авиационного бензина, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

#### 3.2 Построение базовой аналитической модели

В данной задаче требуется определить, сколько бензина каждого вида требуется выпустить, чтобы получить максимальную прибыль.

Для построения математической модели задачи введем переменные. Обозначим через  $X_1$  выпуск бензина для сельскохозяйственной авиации, через  $X_2$  – для легкомоторной, через  $X_3$  – для пассажирской (в тысячах тонн).

В данной задаче имеются ограничения на расход ресурсов - полуфабрикатов (алкилата, крекинг-бензина и бензина прямой перегонки). Чтобы сформулировать их, найдем расход каждого ресурса на выпуск единицы каждого вида продукции.

Найдем расход полуфабрикатов на выпуск бензина для сельскохозяйственной авиации. Из постановки задачи видно, что в этом виде бензина содержание алкилата составляет  $2/(2+3+5)=0,2$ . Содержание крекинг-бензина составит  $3/(2+3+5)=0,3$ , содержание бензина прямой перегонки –  $5/(2+3+5)=0,5$ . Таким образом, на выпуск одной тонны бензина для сельскохозяйственной авиации расходуется 0,2 т алкилата, 0,3 т крекинг-бензина, 0,5 т бензина прямой перегонки.

Аналогично найдем расход полуфабрикатов на выпуск одной тонны бензина других видов. Результаты приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Расход полуфабрикатов на выпуск авиационного бензина

Продукция	Расход полуфабрикатов на выпуск одной тонны продукции, т		
	алкилат	крекинг-бензин	бензин прямой перегонки
Бензин для сельскохозяйственной авиации	0,2	0,3	0,5
Бензин для легкомоторной авиации	0,6	0,2	0,2
Бензин для пассажирской авиации	0,4	0,4	0,2

Составим ограничение на расход алкилата. На выпуск одной тонны бензина для сельскохозяйственной авиации расходуется 0,2 т алкилата; значит, расход алкилата на весь выпуск данного вида бензина составит  $0,2X_1$  тыс.т. На выпуск бензина для легкомоторной авиации будет израсходовано  $0,6X_2$  тыс.т алкилата, на выпуск бензина для пассажирской авиации -  $0,4X_3$  тыс.т алкилата. Таким образом, общий расход алкилата составит  $0,2X_1 + 0,6X_2 + 0,4X_3$  тыс.т. Эта величина не должна превышать 40 тыс.т. Поэтому можно записать следующее ограничение:

$$0,2X_1 + 0,6X_2 + 0,4X_3 \leq 40.$$

Аналогично можно составить ограничение на расход крекинг-бензина:

$$0,3X_1 + 0,2X_2 + 0,4X_3 \leq 25$$

и на расход бензина прямой перегонки:

$$0,5X_1 + 0,2X_2 + 0,2X_3 \leq 35.$$

Имеется также ограничение на выпуск бензина для сельскохозяйственной авиации. Чтобы выполнить заказ, необходимо выпустить не менее 60 тыс. т такого бензина:

$$X_1 \geq 60.$$

Кроме того, переменные  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  по своему физическому смыслу не могут принимать отрицательных значений, так как они обозначают выпуск бензина. Поэтому необходимо указать ограничения неотрицательности:  $X_i \geq 0, i=1, \dots, 3$ .

В данной задаче требуется определить выпуск бензина, обеспечивающий максимальную прибыль. Прибыль от выпуска одной тонны бензина для сельскохозяйственной авиации составляет 1200 ден.ед.; значит, прибыль от выпуска этого вида бензина составит  $1200X_1$  тыс. ден.ед. Прибыль от выпуска бензина для легкомоторной авиации составит  $700X_2$  тыс. ден.ед., для

пассажирской -  $1500X_3$  тыс. ден.ед. Таким образом, общая прибыль от выпуска бензина составит  $1200X_1 + 700X_2 + 1500X_3$  тыс. ден.ед. Требуется найти такие значения переменных  $X_1, X_2, X_3$ , при которых эта величина будет максимальной. Таким образом, целевая функция для данной задачи будет иметь следующий вид:

$$E = 1200X_1 + 700X_2 + 1500X_3 \rightarrow \max.$$

Приведем полную математическую модель рассматриваемой задачи:

$$X_1 \geq 60$$

$$0,2X_1 + 0,6X_2 + 0,4X_3 \leq 40$$

$$0,3X_1 + 0,2X_2 + 0,4X_3 \leq 25 \quad (3.1)$$

$$0,5X_1 + 0,2X_2 + 0,2X_3 \leq 35$$

$$X_i \geq 0, i=1, \dots, 3.$$

$$E = 1200X_1 + 700X_2 + 1500X_3 \rightarrow \max. \quad (3.2)$$

В данной задаче все переменные по своему физическому смыслу могут принимать дробные значения, поэтому ограничения целочисленности на них не накладываются.

### 3.3 Обоснование вычислительной процедуры

Все ограничения и целевая функция в данной задаче линейны, поэтому для ее решения можно использовать симплекс-метод.

В математической модели задачи имеется ограничение “больше или равно”. После приведения такого ограничения к стандартной форме (см. подраздел 3.4) в нем не содержится базисной переменной. Поэтому для решения задачи потребуется использовать один из методов искусственного базиса. В данном случае будет применен двухэтапный метод.

Все переменные в задаче по своему физическому смыслу могут принимать дробные значения, поэтому применение методов целочисленного программирования не потребуется.

### 3.4 Решение задачи оптимизации на основе симплекс-метода

Приведем математическую модель задачи к стандартной форме. Для этого в ограничение “больше или равно” потребуется ввести избыточную переменную, а в ограничения “меньше или равно” – остаточные:

$$X_1 - X_4 = 60$$

$$0,2X_1 + 0,6X_2 + 0,4X_3 + X_5 = 40$$

$$0,3X_1 + 0,2X_2 + 0,4X_3 + X_6 = 25$$

$$0,5X_1 + 0,2X_2 + 0,2X_3 + X_7 = 35$$

$$X_i \geq 0, i=1, \dots, 7.$$

$$E = 1200X_1 + 700X_2 + 1500X_3 \rightarrow \max.$$

В ограничении  $X_1 - X_4 = 60$  отсутствует базисная переменная (т.е. переменная, входящая только в данное ограничение с коэффициентом, равным единице). Поэтому требуется ввести искусственную переменную:

$$X_1 - X_4 + X_8 = 60.$$

Таким образом, в каждом ограничении имеется базисная переменная ( $X_8, X_5, X_6, X_7$ ). Остальные переменные – небазисные.

Составляется искусственная целевая функция – сумма искусственных переменных (в данном случае имеется только одна искусственная переменная):

$$W = X_8 \rightarrow \min.$$

Искусственная целевая функция выражается через небазисные переменные. Для этого сначала выразим искусственную переменную  $X_8$  через небазисные переменные:

$$X_8 = 60 - X_1 + X_4.$$

и подставим ее в искусственную целевую функцию:

$$W = 60 - X_1 + X_4 \rightarrow \min.$$

Для приведения всей задачи к стандартной форме требуется перейти к искусственной целевой функции, подлежащей максимизации. Для этого она умножается на  $-1$ :

$$-W = -60 + X_1 - X_4 \rightarrow \max.$$

Приведем полную математическую модель задачи в стандартной форме и с искусственным базисом:

$$X_1 - X_4 + X_8 = 60$$

$$0,2X_1 + 0,6X_2 + 0,4X_3 + X_5 = 40$$

$$0,3X_1 + 0,2X_2 + 0,4X_3 + X_6 = 25$$

$$0,5X_1 + 0,2X_2 + 0,2X_3 + X_7 = 35$$

$$X_i \geq 0, i=1, \dots, 8.$$

$$E = 1200X_1 + 700X_2 + 1500X_3 \rightarrow \max.$$

$$-W = -60 + X_1 - X_4 \rightarrow \max.$$

Составим первую симплекс-таблицу (таблица 3.2).

Таблица 3.2

Базис	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	Решение
$E$	-1200	-700	-1500	0	0	0	0	0	0
$-W$	-1	0	0	1	0	0	0	0	-60
$X_8$	1	0	0	-1	0	0	0	1	60
$X_5$	0,2	0,6	0,4	0	1	0	0	0	40
$X_6$	0,3	0,2	0,4	0	0	1	0	0	25
$X_7$	0,5	0,2	0,2	0	0	0	1	0	35

Приведенное в таблице 3.2 начальное решение ( $X_1=X_2=X_3=X_4=0$ ,  $X_5=40$ ,  $X_6=25$ ,  $X_7=35$ ,  $X_8=60$ ) является недопустимым: оно не соответствует начальной системе ограничений (3.1), так как не выполняется условие  $X_1 \geq 60$ .

Для поиска начального допустимого решения реализуется **первый этап двухэтапного метода**: минимизация искусственной целевой функции на основе процедур симплекс-метода.

Выбирается переменная для включения в базис: это переменная  $X_1$ , так как ей соответствует максимальный по модулю отрицательный коэффициент в строке искусственной целевой функции.

Для определения переменной, исключаемой из базиса, найдем симплексные отношения:  $60/1=60$ ;  $40/0,2=200$ ;  $25/0,3=83,33$ ;  $35/0,5=700$ . Минимальное симплексное отношение соответствует переменной  $X_8$ ; значит, эта переменная исключается из базиса.

В результате преобразований по правилам симплекс-метода будет получена следующая симплекс-таблица (таблица 3.3).

Таблица 3.3

Базис	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	Решение
$E$	0	-700	-1500	-1200	0	0	0	1200	72000
$-W$	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$X_1$	1	0	0	-1	0	0	0	1	60
$X_5$	0	0,6	0,4	0,2	1	0	0	-0,2	28
$X_6$	0	0,2	0,4	0,3	0	1	0	-0,3	7
$X_7$	0	0,2	0,2	0,5	0	0	1	-0,5	5

Как видно из таблицы 3.3, искусственная целевая функция равна нулю, и в базисе нет искусственных переменных. Получено допустимое решение:  $X_1=60$ ,  $X_5=28$ ,  $X_6=7$ ,  $X_7=5$ ,  $X_2=X_3=X_4=X_8=0$ . В том, что оно допустимо, легко убедиться, подставив значения переменных в систему ограничений (3.1).



Таким образом, первый этап двухэтапного метода завершен. Искусственная целевая функция и искусственные переменные исключаются из симплекс-таблицы (таблица 3.4).

Таблица 3.4

Базис	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	Решение
$E$	0	-700	-1500	-1200	0	0	0	72000
$X_1$	1	0	0	-1	0	0	0	60
$X_5$	0	0,6	0,4	0,2	1	0	0	28
$X_6$	0	0,2	0,4	0,3	0	1	0	7
$X_7$	0	0,2	0,2	0,5	0	0	1	5

Полученное решение является допустимым, но не оптимальным: признак неоптимальности решения – наличие отрицательных коэффициентов в строке целевой функции  $E$ . Поэтому реализуется второй этап двухэтапного метода: максимизация основной целевой функции  $E$ .

В базис включается переменная  $X_3$ , так как ей соответствует максимальный по модулю отрицательный коэффициент в строке целевой функции. Для определения переменной, исключаемой из базиса, вычисляются симплексные отношения:  $28/0,4=70$ ;  $7/0,4=17,5$ ;  $5/0,2=25$ . Минимальное симплексное отношение соответствует переменной  $X_6$ ; значит, эта переменная исключается из базиса. После преобразований по правилам симплекс-метода будет получена новая симплекс-таблица (таблица 3.5).

Таблица 3.5

Базис	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	Решение
$E$	0	50	0	-75	0	3750	0	98250
$X_1$	1	0	0	-1	0	0	0	60
$X_5$	0	0,4	0	-0,1	1	-1	0	21
$X_3$	0	0,5	1	0,75	0	2,5	0	17,5
$X_7$	0	0,1	0	0,35	0	-0,5	1	1,5

Решение, полученное в таблице 3.5, еще не является оптимальным (в строке целевой функции имеется отрицательный коэффициент). Поэтому продолжают вычисления по правилам симплекс-метода. В базис включается переменная  $X_4$ . Для определения переменной, исключаемой из базиса, вычисляются симплексные отношения:  $17,5/0,75=23,33$ ;  $1,5/0,35=4,29$ . Минимальное симплексное отношение соответствует переменной  $X_7$ ; значит, эта переменная исключается из базиса. По результатам преобразований по правилам симплекс-метода будет получена новая симплекс-таблица (таблица 3.6).

Таблица 3.6

Базис	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	Решение
$E$	0	71,43	0	0	0	3642,86	214,29	98571,43
$X_1$	1	0,29	0	0	0	-1,43	2,86	64,29
$X_5$	0	0,43	0	0	1	-1,14	0,29	21,43
$X_3$	0	0,29	1	0	0	3,57	-2,14	14,29
$X_4$	0	0,29	0	1	0	-1,43	2,86	4,29

Получено оптимальное решение (признак его оптимальности – отсутствие отрицательных элементов в строке целевой функции). Основные переменные задачи приняли следующие значения:  $X_1=64,29$ ,  $X_2=0$ ,  $X_3=14,29$ . Это означает, что необходимо выпустить 64,29 тыс. т бензина для сельскохозяйственной авиации и 14,29 тыс. т бензина для пассажирской авиации. Бензин для легкомоторной авиации выпускать не следует. Значение целевой функции  $E=98571,43$  показывает, что прибыль при таких объемах производства бензина составит 98571,43 тыс. ден.ед. (т.е. примерно 98,57 млн ден.ед.).

Избыточная переменная  $X_4=4,29$  означает, что выпуск бензина для сельскохозяйственной авиации на 4,29 тыс. т превысит минимально необходимую величину (требуется выпустить не менее 60 тыс. т, а оптимальный объем производства - 64,29 тыс. т).

Остаточные переменные приняли следующие значения:  $X_5=21,43$ ,  $X_6=0$ ,  $X_7=0$ . Это означает, что останется неизрасходованным 21,43 тыс. т алкилата. Крекинг-бензин и бензин прямой перегонки расходуются полностью. Таким образом, для реализации оптимального плана выпуска авиационного бензина требуется израсходовать  $40-21,43 = 18,57$  тыс. т алкилата, 25 тыс. т крекинг-бензина и 35 тыс. т бензина прямой перегонки.

Рабочий лист с результатами решения задачи с использованием табличного процессора Excel приведен в приложении А.

### 3.5 Анализ базовой аналитической модели на чувствительность

#### 3.5.1 Статус и ценность ресурсов

В рассматриваемой задаче ресурсами являются полуфабрикаты (алкилат, крекинг-бензин и бензин прямой перегонки), используемые для выпуска авиационного бензина.

Как видно из значений остаточных переменных, алкилат израсходован не полностью, т.е. он является недефицитным ресурсом. Поэтому увеличение его поставок нецелесообразно: оно приведет только к увеличению неизрасходованного остатка. Поставки алкилата можно уменьшить на 21,43 тыс. т (до 18,57 тыс. т); это никак не повлияет на оптимальный план выпуска авиационного бензина. Если поставки алкилата снизятся более чем на 21,43 тыс. т (т.е. составят менее 18,57 тыс. т), то потребуются заново определять

оптимальный план производства авиационного бензина; по смыслу задачи очевидно, что в этом случае прибыль снизится.

Крекинг-бензин и бензин прямой перегонки израсходованы полностью, т.е. эти полуфабрикаты являются дефицитными ресурсами. Увеличение поставок этих полуфабрикатов позволит увеличить прибыль; снижение поставок приведет к снижению прибыли.

Ценности ресурсов представляют собой коэффициенты  $E$ -строки при остаточных переменных, соответствующих остаткам ресурсов, в симплекс-таблице с оптимальным решением (таблица 3.6). Ценность алкилата равна нулю, ценность крекинг-бензина - 3642,86 тыс. ден.ед., ценность бензина прямой перегонки - 214,29 тыс. ден.ед. Это означает, что увеличение поставок крекинг-бензина на 1 тыс. т приводит к увеличению прибыли завода в среднем на 3642,86 тыс. ден.ед. (т.е. примерно на 3,64 млн ден.ед.). Увеличение поставок бензина прямой перегонки на 1 тыс. т приводит к увеличению прибыли завода в среднем на 214,29 тыс. ден.ед. Снижение поставок крекинг-бензина или бензина прямой перегонки приведет к соответствующему снижению прибыли. Нулевое значение ценности алкилата означает, что увеличение его поставок или их снижение (не более чем на 21,43 тыс. т) не приведет к изменению прибыли, так как данный ресурс недефицитен.

Из значений ценности ресурсов можно также сделать следующие выводы:

- если имеется возможность увеличить поставки только одного из полуфабрикатов, то целесообразно увеличить поставки крекинг-бензина;
- увеличивать поставки крекинг-бензина целесообразно только при условии, что его цена не будет превышать 3642,86 тыс. ден.ед. за тысячу тонн (т.е. примерно 3643 ден.ед. за тонну), иначе затраты на закупку крекинг-бензина превысят прибыль от его использования. Аналогично, увеличивать поставки бензина прямой перегонки выгодно при цене не выше 214,29 тыс. ден.ед. за тысячу тонн (примерно 214 ден.ед. за тонну).

### **3.5.2 Анализ на чувствительность к изменениям поставок полуфабриката**

Проанализируем, как влияют на оптимальный план производства изменения возможностей поставок одного из полуфабрикатов, например, крекинг-бензина.

Пусть максимально возможные поставки крекинг-бензина изменились на  $d$  тыс. т, т.е. составляют не 25, а  $25+d$  тыс. т. Для определения нового оптимального решения при изменившихся поставках крекинг-бензина используются коэффициенты окончательной симплекс-таблицы (таблица 3.6) из столбца остаточной переменной  $X_6$ , так как эта переменная входит в изменившееся ограничение. Новое оптимальное решение определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
X_1 &= 64,29 - 1,43d \\
X_5 &= 21,43 - 1,14d \\
X_3 &= 14,29 + 3,57d \\
X_4 &= 4,29 - 1,43d. \\
E &= 98571,43 + 3642,86d.
\end{aligned}
\tag{3.3}$$

Пусть, например, максимально возможные поставки крекинг-бензина составляют не 25, а 27 тыс. т. Найдём новое оптимальное решение:

$$\begin{aligned}
X_1 &= 64,29 - 1,43 \cdot 2 = 61,43 \\
X_5 &= 21,43 - 1,14 \cdot 2 = 19,15 \\
X_3 &= 14,29 + 3,57 \cdot 2 = 21,43 \\
X_4 &= 4,29 - 1,43 \cdot 2 = 1,43. \\
E &= 98571,43 + 3642,86 \cdot 2 = 105857,15.
\end{aligned}$$

Таким образом, в новых условиях (при поставках крекинг-бензина в размере 27 тыс. т) нефтеперерабатывающему заводу следует выпускать 61,43 тыс. т бензина для сельскохозяйственной авиации и 21,43 тыс. т бензина для гражданской авиации. Выпуск бензина для сельскохозяйственной авиации превысит минимально необходимую величину на 1,43 тыс. т. Крекинг-бензин и бензин прямой перегонки будут израсходованы полностью, т.е. будет использовано 27 тыс. т крекинг-бензина и 35 тыс. т бензина прямой перегонки. Из 40 тыс. т алкилата не будет использовано 19,15 тыс. т, т.е. расход алкилата составит 20,85 тыс. т. Будет получена прибыль в размере примерно 105,86 млн ден.ед. Таким образом, увеличение поставок крекинг-бензина позволило увеличить прибыль.

Пусть максимально возможные поставки крекинг-бензина составляют не 25, а 22 тыс. т. Найдём новое оптимальное решение:

$$\begin{aligned}
X_1 &= 64,29 - 1,43 \cdot (-3) = 68,58 \\
X_5 &= 21,43 - 1,14 \cdot (-3) = 24,85 \\
X_3 &= 14,29 + 3,57 \cdot (-3) = 3,58 \\
X_4 &= 4,29 - 1,43 \cdot (-3) = 8,58. \\
E &= 98571,43 + 3642,86 \cdot (-3) = 87642,85.
\end{aligned}$$

Таким образом, в случае снижения поставок крекинг-бензина до 22 тыс. т нефтеперерабатывающему заводу следует выпускать 68,58 тыс. т бензина для сельскохозяйственной авиации и 3,58 тыс. т бензина для гражданской авиации. Выпуск бензина для сельскохозяйственной авиации превысит минимально необходимую величину на 8,58 тыс. т. Крекинг-бензин и бензин прямой перегонки будут израсходованы полностью, т.е. будет использовано 22 тыс. т крекинг-бензина и 35 тыс. т бензина прямой перегонки. Из 40 тыс. т алкилата не будет использовано 24,85 тыс. т, т.е. расход алкилата составит 15,15 тыс. т.

Прибыль составит примерно 87,64 млн ден.ед. Как и следовало ожидать, снижение поставок крекинг-бензина привело к уменьшению прибыли.

Проанализируем случай, когда максимально возможные поставки крекинг-бензина составляют не 25, а 30 тыс. т. Попытаемся найти новое оптимальное решение, подставив величину  $d=5$  в систему уравнений (3.3). Получим:  $X_1 = 57,14$ ,  $X_5 = 15,73$ ,  $X_3 = 32,14$ ,  $X_4 = -2,86$ . Таким образом, одна из переменных приняла отрицательное значение, что недопустимо по их физическому смыслу. Это значит, что для поиска оптимального решения в новых условиях (при поставках крекинг-бензина в количестве 30 тыс. т) требуется решить задачу заново, изменив ограничение на поставки крекинг-бензина следующим образом:  $0,3X_1 + 0,2X_2 + 0,4X_3 \leq 30$ .

Определим диапазон изменений поставок крекинг-бензина, при которых состав переменных в оптимальном базисе остается прежним (т.е. базис оптимального решения будет состоять из переменных  $X_1$ ,  $X_3$ ,  $X_4$ ,  $X_5$ ). Этот диапазон находится из условия неотрицательности всех переменных:

$$X_1 = 64,29 - 1,43d \geq 0$$

$$X_5 = 21,43 - 1,14d \geq 0$$

$$X_3 = 14,29 + 3,57d \geq 0$$

$$X_4 = 4,29 - 1,43d \geq 0.$$

Решив эту систему неравенств, получим:  $-4 \leq d \leq 3$ . Это означает, что базис оптимального решения будет состоять из переменных  $X_1$ ,  $X_3$ ,  $X_4$ ,  $X_5$ , если поставки крекинг-бензина будут составлять от 25-4 до 25+3 тыс. т (т.е. от 21 до 28 тыс. т). Для любой величины поставок крекинг-бензина, входящей в этот диапазон, новое оптимальное решение можно найти из уравнений (3.3). Если поставки крекинг-бензина составят менее 21 или более 28 тыс. т, то для определения оптимального решения потребуется решать задачу заново (с новым ограничением на поставку крекинг-бензина).

### **3.5.3 Анализ на чувствительность к изменениям минимально необходимого объема производства**

Проанализируем, как влияют на оптимальный план производства изменения размера заказа на бензин для сельскохозяйственной авиации.

Пусть минимально необходимый объем производства бензина для сельскохозяйственной авиации изменился на  $d$  тыс. т, т.е. составляют не 60, а  $60+d$  тыс. т. Для определения нового оптимального решения при изменившемся размере заказа используются коэффициенты окончательной симплекс-таблицы (таблица 3.6) из столбца избыточной переменной  $X_4$ , так как эта переменная входит в изменившееся ограничение. Так как ограничение, для которого выполняется анализ на чувствительность, имеет вид “больше или равно”,

коэффициенты из столбца избыточной переменной используются с обратными знаками. Новое оптимальное решение определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}X_1 &= 64,29 + 0d \\X_5 &= 21,43 + 0d \\X_3 &= 14,29 + 0d \\X_4 &= 4,29 - 1d. \\E &= 98571,43 + 0d.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Пусть, например, заводу требуется выпустить не менее 63 тыс. т бензина для сельскохозяйственной авиации. Подставив в систему уравнений (3.4) величину  $d=3$ , получим новое оптимальное решение задачи:

$$\begin{aligned}X_1 &= 64,29 + 0 \cdot 3 = 64,29 \\X_5 &= 21,43 + 0 \cdot 3 = 21,43 \\X_3 &= 14,29 + 0 \cdot 3 = 14,29 \\X_4 &= 4,29 - 1 \cdot 3 = 1,29. \\E &= 98571,43 + 0 \cdot 3 = 98571,43.\end{aligned}$$

Таким образом, оптимальное решение задачи (объемы производства авиационного бензина, прибыль, расход полуфабрикатов) не изменилось. Изменилась только избыточная переменная  $X_4$ , обозначающая выпуск бензина для сельскохозяйственной авиации сверх минимально необходимого. Такой результат легко объяснить: выпуск бензина в количестве 64,29 тыс. т достаточен для выполнения увеличившегося заказа, составляющего 63 тыс. т.

Определим диапазон изменений заказа на бензин для сельскохозяйственной авиации, при которых состав переменных в оптимальном базисе остается прежним (т.е. базис оптимального решения будет состоять из переменных  $X_1, X_3, X_4, X_5$ ). Для этого используем условие неотрицательности всех переменных:

$$\begin{aligned}X_1 &= 64,29 + 0d \geq 0 \\X_5 &= 21,43 + 0d \geq 0 \\X_3 &= 14,29 + 0d \geq 0 \\X_4 &= 4,29 - 1d \geq 0.\end{aligned}$$

Решив эту систему неравенств, получим:  $-\infty \leq d \leq 4,29$ . Это означает, что базис оптимального решения будет состоять из переменных  $X_1, X_3, X_4, X_5$ , если минимально необходимый объем производства бензина для сельскохозяйственной авиации (т.е. заказ на этот вид бензина) будет составлять не более 64,29 тыс. т. Для любой величины заказа, входящей в этот диапазон, новое оптимальное решение можно найти из уравнений (3.4). Если заказ на бензин для сельскохозяйственной авиации превысит 64,29 тыс. т, то для

составления оптимального плана производства потребуется решать задачу заново (с новым ограничением на минимально необходимое производство бензина для сельскохозяйственной авиации).

### 3.5.4 Анализ на чувствительность к изменениям прибыли от продажи единицы продукции

Проанализируем, как влияют на оптимальный план производства изменения величины прибыли от продажи одного из видов продукции, например, бензина для сельскохозяйственной авиации.

Пусть прибыль от продажи одной тонны бензина для сельскохозяйственной авиации изменилась на  $d$  ден.ед., т.е. составляет не 1200, а  $1200+d$  ден.ед. Для анализа влияния этих изменений на оптимальное решение используются коэффициенты окончательной симплекс-таблицы (таблица 3.6) из строки переменной  $X_1$ , так как для этой переменной изменился коэффициент целевой функции. Новые значения коэффициентов  $E$ -строки при небазисных переменных (т.е. при переменных  $X_2, X_6, X_7$ ) для окончательной симплекс-таблицы, а также новое оптимальное значение целевой функции определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}F_2 &= 71,43 + 0,29d \\F_6 &= 3642,86 - 1,43d \\F_7 &= 214,29 + 2,86d. \\E &= 98571,43 + 64,29d.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Пусть, например, прибыль от продажи одной тонны бензина для сельскохозяйственной авиации снизилась на 50 ден.ед., т.е. составляет не 1200, а 1150 ден.ед. ( $d=-50$ ). Найдем новые значения коэффициентов  $E$ -строки при небазисных переменных для окончательной симплекс-таблицы и новое оптимальное значение целевой функции:

$$\begin{aligned}F_2 &= 71,43 + 0,29 \cdot (-50) = 56,93 \\F_6 &= 3642,86 - 1,43 \cdot (-50) = 3714,36 \\F_7 &= 214,29 + 2,86 \cdot (-50) = 71,29. \\E &= 98571,43 + 64,29 \cdot (-50) = 95356,93.\end{aligned}$$

Видно, что коэффициенты  $E$ -строки остались неотрицательными. Это значит, что оптимальное решение не изменяется:  $X_1=64,29$ ,  $X_2=0$ ,  $X_3=14,29$ ,  $X_4=4,29$ ,  $X_5=21,43$ ,  $X_6=0$ ,  $X_7=0$ . Таким образом, в новых условиях (при снижении прибыли от продажи одной тонны бензина для сельскохозяйственной авиации до 1150 ден.ед.) заводу для получения максимальной прибыли по-прежнему следует выпускать 64,29 тыс. т бензина для сельскохозяйственной авиации и 14,29 тыс. т – для пассажирской. Прибыль от производства бензина в

таких объемах составит около 95,36 млн ден.ед. Следует еще раз обратить внимание, что для новых условий это максимально возможная прибыль.

Предположим, что прибыль от продажи одной тонны бензина для сельскохозяйственной авиации составляет 1100 ден.ед. ( $d=-100$ ). Проанализируем влияние такого изменения на оптимальное решение. Подставив величину  $d=-100$  в систему уравнений (3.5), получим:  $F_2 = 42,43$ ,  $F_6 = 3785,86$ ,  $F_7 = -74,71$ . Таким образом, один из коэффициентов  $E$ -строки (при переменной  $X_7$ ) принял отрицательное значение. Это означает, что прежнее решение в новых условиях уже не является оптимальным. Для определения нового оптимального решения требуется решить задачу заново с системой ограничений (3.1) и целевой функцией  $E = 1100X_1 + 700X_2 + 1500X_3 \rightarrow \max$ .

Определим диапазон изменений прибыли от продажи одной тонны бензина для сельскохозяйственной авиации, при которых остается оптимальным решение, найденное для исходной постановки задачи ( $X_1=64,29$ ,  $X_2=0$ ,  $X_3=14,29$ ,  $X_4=4,29$ ,  $X_5=21,43$ ,  $X_6=0$ ,  $X_7=0$ ). Условием оптимальности решения является неотрицательность всех коэффициентов  $E$ -строки:

$$F_2 = 71,43 + 0,29d \geq 0$$

$$F_6 = 3642,86 - 1,43d \geq 0$$

$$F_7 = 214,29 + 2,86d \geq 0.$$

Решив эту систему неравенств, получим:  $-74,93 \leq d \leq 2547,45$ . Это означает, что решение, найденное для исходной постановки задачи ( $X_1=64,29$ ,  $X_2=0$ ,  $X_3=14,29$ ,  $X_4=4,29$ ,  $X_5=21,43$ ,  $X_6=0$ ,  $X_7=0$ ), оптимально, если прибыль от продажи одной тонны бензина для сельскохозяйственной авиации будет составлять от 1200-74,93 до 1200+2547,45 ден.ед., т.е. от 1125,07 до 3747,45 ден.ед. Если эта прибыль составит меньше 1125,07 или превысит 3747,45 ден.ед., то для получения оптимального решения потребуется решить задачу заново, используя симплекс-метод (изменив в математической модели коэффициент целевой функции при  $X_1$ ). Новое оптимальное решение будет отличаться от прежнего не только значениями, но и составом переменных в оптимальном базисе.

### **3.6 Построение модифицированной аналитической модели и анализ результатов модификации**

Проанализировав результаты решения задачи оптимизации (см. подраздел 3.4), можно выделить следующие недостатки в работе нефтеперерабатывающего завода:

– значительная часть имеющегося алкилата (21,43 тыс. т из 40) не используется;



– не производится бензин для легкомоторной авиации.

В зависимости от конкретных условий работы завода эти недостатки (вместе или по отдельности) могут устраняться по-разному.

### **Обеспечение полного использования ресурсов**

Нефтеперерабатывающий завод не использует весь имеющийся алкилат из-за нехватки других полуфабрикатов (крекинг-бензина и бензина прямой перегонки), так как для производства любого вида авиационного бензина необходимы все три полуфабриката. Найдем, на какую величину необходимо увеличить поставки других полуфабрикатов, чтобы использовать все полуфабрикаты по возможности более полно. Это позволит также увеличить выпуск авиационного бензина и получить большую прибыль.

Предположим, например, что поставки крекинг-бензина увеличены до 30 тыс. т, а поставки бензина прямой перегонки – до 40 тыс. т. Внесем соответствующие изменения в правые части ограничений (3.1) и решим задачу заново, используя программные средства (например, Excel). Получим следующее оптимальное решение:  $X_1=71,43$ ,  $X_2=0$ ,  $X_3=21,43$ ,  $X_4=11,43$ ,  $X_5=17,14$ ,  $X_6=0$ ,  $X_7=0$ ,  $E=117857,14$ . Неизрасходованный остаток алкилата снизился (с 21,43 до 17,14 тыс. т), однако остается значительным.

Варьируя величины поставки крекинг-бензина и бензина прямой перегонки, подберем такие величины этих поставок, чтобы расход полуфабрикатов был как можно более полным. Для следующей математической модели

$$X_1 \geq 60$$

$$0,2X_1 + 0,6X_2 + 0,4X_3 \leq 40$$

$$0,3X_1 + 0,2X_2 + 0,4X_3 \leq 47$$

$$0,5X_1 + 0,2X_2 + 0,2X_3 \leq 47$$

$$X_i \geq 0, i=1, \dots, 3.$$

$$E = 1200X_1 + 700X_2 + 1500X_3 \rightarrow \max.$$

оптимальное решение будет следующим:  $X_1=67,5$ ,  $X_2=0$ ,  $X_3=66,25$ ,  $X_4=7,5$ ,  $X_5=0$ ,  $X_6=0,25$ ,  $X_7=0$ ,  $E=180375$ . Таким образом, полуфабрикаты используются практически полностью (остается неиспользованным только 250 т крекинг-бензина). Сравнительная характеристика двух планов работы предприятия (при базовом и новом варианте поставок полуфабрикатов) приведена в таблице 3.7.

Таблица 3.7 – Сравнительная характеристика планов работы предприятия

Показатели	Базовый вариант	Новый вариант
Поставки полуфабрикатов, тыс. т		
алкилат	40	40
крекинг-бензин	25	47
бензин прямой перегонки	35	47
Производство бензина, тыс. т		
для сельскохозяйственной авиации	64,29	67,5
для легкомоторной авиации	0	0
для пассажирской авиации	14,29	66,25
Остатки полуфабрикатов, тыс. т		
алкилат	21,43	0
крекинг-бензин	0	0,25
бензин прямой перегонки	0	0
Прибыль, млн ден.ед.	98,57	180,38

Видно, что увеличение поставок крекинг-бензина и бензина прямой перегонки позволяет существенно улучшить показатели: увеличивается производство авиационного бензина (и, соответственно, прибыль), а также обеспечивается полное использование ресурсов.

### ***Обеспечение выпуска продукции за счет повышения ее прибыльности***

Предположим, что завод имеет возможность повысить прибыль от продажи бензина для легкомоторной авиации, например, увеличив цену на него или снизив затраты на его производство. Найдем, на какую величину необходимо повысить прибыль от продажи одной тонны такого бензина, чтобы его производство стало выгодным (задача полного использования имеющихся полуфабрикатов при этом не ставится).

Пусть прибыль от продажи одной тонны бензина для легкомоторной авиации может быть увеличена до 710 ден.ед. Используя программные средства, решим задачу заново с системой ограничений (3.1) и целевой функцией  $E = 1200X_1 + 710X_2 + 1500X_3 \rightarrow \max$ . Оптимальное решение окажется таким же, как и для исходной постановки задачи. Значит, прибыль в размере 710 ден.ед. за тонну недостаточна, чтобы производство бензина для легкомоторной авиации стало выгодным.

Решим задачу несколько раз, увеличивая прибыль от одной тонны бензина для легкомоторной авиации с шагом 10 ден.ед. При значении этой прибыли 780 ден.ед. (т.е. для целевой функции  $E = 1200X_1 + 780X_2 + 1500X_3 \rightarrow \max$ ) будет получено следующее оптимальное решение:  $X_1=60$ ,  $X_2=15$ ,  $X_3=10$ ,  $E=98700$ . Таким образом, производство бензина для легкомоторной авиации становится выгодным, если прибыль от одной тонны этого бензина составляет не менее 780 ден.ед.

### **Обеспечение выпуска продукции за счет снижения общей прибыли**

Предположим, что заводу необходимо выпускать бензин для легкомоторной авиации, однако сделать его производство более прибыльным невозможно. В этом случае производство такого бензина неизбежно приведет к снижению общей прибыли. Предположим, что руководство завода считает допустимым снижение прибыли, но не более чем на 10%. Это составляет 9857,14 тыс. ден.ед. (так как максимально возможная прибыль - 98571,43 тыс. ден.ед.). Значит, общая прибыль должна составить не менее  $98571,43 - 9857,14 = 88714,29$  тыс. ден.ед. Для упрощения округлим эту величину до 90000 тыс. ден.ед., т.е. 90 млн ден.ед. Таким образом, поставлена следующая задача: обеспечить максимальный выпуск бензина для легкомоторной авиации, получив при этом общую прибыль не менее 90 млн ден.ед. Математическая модель этой задачи имеет следующий вид:

$$1200X_1 + 700X_2 + 1500X_3 \geq 90\,000$$

$$X_1 \geq 60$$

$$0,2X_1 + 0,6X_2 + 0,4X_3 \leq 40$$

$$0,3X_1 + 0,2X_2 + 0,4X_3 \leq 25$$

$$0,5X_1 + 0,2X_2 + 0,2X_3 \leq 35$$

$$X_i \geq 0, i=1, \dots, 3.$$

$$E = X_2 \rightarrow \max.$$

Здесь первое из ограничений представляет собой ограничение на прибыль. Целевая функция – объем производства бензина для легкомоторной авиации.

Решив эту задачу, получим:  $X_1=60$ ,  $X_2=24,38$ ,  $X_3=0,62$ . Таким образом, требуется выпускать 60 тыс. т бензина для сельскохозяйственной авиации, 24,38 тыс. т – для легкомоторной, 0,62 тыс. т – для пассажирской. Вычислим прибыль при таком плане производства:  $1200 \cdot 60 + 700 \cdot 24,38 + 1500 \cdot 0,62 \approx 90\,000 = 90$  млн ден.ед. Таким образом, обеспечено производство бензина для легкомоторной авиации при заданной прибыли. Следует, однако, обратить внимание, что при этом существенно снизилось производство бензина для пассажирской авиации.

### **3.7 Примеры постановок и решения оптимизационных задач**

**Пример 1.** Для ремонта внутренних трубопроводов на нефтеперерабатывающем заводе требуются комплекты труб. Каждый комплект должен состоять из четырех труб длиной 3 м, двух труб длиной 4 м и двух труб длиной 5 м. Для их изготовления разрезаются трубы длиной 10 м. Всего имеется 100 таких труб. Способы раскроя десятиметровых труб приведены в таблице 3.8.

Таблица 3.8 – Исходные данные для примера 1

Трубы	Количество труб, вырезаемых из одной десятиметровой трубы					
	способ 1	способ 2	способ 3	способ 4	способ 5	способ 6
3 м	3	-	-	2	1	-
4 м	-	2	-	1	-	1
5 м	-	-	2	-	1	1

Это означает, например, что при раскрое одной десятиметровой трубы первым способом вырезается три трехметровых трубы. Отрезок трубы длиной 1 м остается в качестве отходов.

Требуется разработать план раскроя десятиметровых труб, позволяющий получить максимальное количество комплектов.

Для составления математической модели введем переменные:  $X_1, X_2, \dots, X_6$  – количество десятиметровых труб, раскраиваемых каждым из способов (например,  $X_1$  – количество труб, раскраиваемых первым способом). Введем также переменную  $X_7$ , обозначающую количество комплектов.

Составим систему ограничений. Запишем ограничение на общее количество раскраиваемых труб:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \leq 100.$$

Приведем ограничения на комплектность. Из описания способов раскроя (таблица 3.8) видно, что общее количество трехметровых труб, полученных в результате раскроя, определяется как  $3X_1 + 2X_4 + X_5$ , количество четырехметровых труб –  $2X_2 + X_4 + X_6$ , пятиметровых –  $2X_3 + 2X_4 + X_5$ . Согласно требованиям комплектности, количество трехметровых труб должно быть в два раза больше, чем четырехметровых и пятиметровых. Эти требования можно записать в виде следующих ограничений:

$$3X_1 + 2X_4 + X_5 = 2(2X_2 + X_4 + X_6)$$

$$3X_1 + 2X_4 + X_5 = 2(2X_3 + 2X_4 + X_5).$$

Примечание – Ограничения, устанавливающие соотношение количества труб, можно сформулировать и по-другому. Например, вместо одного из приведенных ограничений можно указать следующее ограничение:  $2X_2 + X_4 + X_6 = 2X_3 + 2X_4 + X_5$  (количество четырехметровых и пятиметровых труб должно быть одинаковым).

Так как в комплект входят четыре трехметровых трубы, количество комплектов можно выразить следующим ограничением:

$$X_7 = 0,25(3X_1 + 2X_4 + X_5).$$

Примечание – Количество комплектов можно выразить и через количество четырехметровых или пятиметровых труб:  $X_7 = 0,5(2X_2 + X_4 + X_6)$  или  $X_7 = 0,5(2X_3 + 2X_4 + X_5)$ .

По своему физическому смыслу все переменные в данной задаче должны быть неотрицательными и целочисленными.

Примечание – Данная задача является полностью целочисленной, так как целочисленными должны быть как основные переменные задачи ( $X_1, X_2, \dots, X_7$ ), так и остаточная переменная, которая будет введена в ограничение  $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \leq 100$  для приведения его к стандартной форме. Эта остаточная переменная будет обозначать количество неиспользованных десятиметровых труб.

Так как требуется получить максимальное количество комплектов труб, целевая функция будет иметь следующий вид:

$$E = X_7 \rightarrow \max.$$

Приведем математическую модель задачи в целом (ограничения на комплектность записаны в форме, более удобной для решения задачи симплекс-методом):

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \leq 100$$

$$3X_1 - 4X_2 + X_5 - X_6 = 0$$

$$3X_1 - 4X_3 + 2X_4 - X_5 - 2X_6 = 0$$

$$0,75X_1 + 0,5X_4 + 0,25X_5 - X_7 = 0$$

$$X_i \geq 0, \quad X_i - \text{целые}, \quad i=1, \dots, 7.$$

$$E = X_7 \rightarrow \max.$$

Решив задачу симплекс-методом и методом ветвей и границ, получим:  $X_1=0, X_2=0, X_3=33, X_4=66, X_5=0, X_6=0, X_7=33, E=33$ . Это значит, что требуется раскроить 33 десятиметровых трубы третьим способом и 66 труб – четвертым способом. Будет получено 33 комплекта труб.

**Пример 2.** Жидкость для чистки оборудования на нефтеперерабатывающем заводе готовится путем смешивания трех очистителей (А, В, С). Очистители содержат активные компоненты для удаления твердых отложений и ржавчины. Содержание активных компонентов в очистителях приведено в таблице 3.9.

Таблица 3.9 – Исходные данные для примера 2

Очиститель	Содержание активных компонентов, %	
	для удаления твердых отложений	для удаления ржавчины
А	20	40
В	50	10
С	30	25

Стоимость очистителей А, В, С – 200, 350 и 300 ден.ед. за литр.

В жидкости для чистки оборудования должно содержаться не менее 30% компоненты для удаления твердых отложений и не менее 20% компонента для удаления ржавчины.

Требуется определить состав жидкости для чистки оборудования, имеющий минимальную стоимость.

Для составления математической модели введем переменные:  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  – доли очистителей А, В, С в жидкости для чистки оборудования. Составим ограничения на содержание активных компонентов:

$$20X_1 + 50X_2 + 30X_3 \geq 30$$

$$40X_1 + 10X_2 + 25X_3 \geq 20$$

Ограничение, указывающее, что сумма долей очистителей в смеси должна быть равна единице:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1.$$

По физическому смыслу все переменные в задаче должны быть неотрицательными.

Целевая функция (стоимость жидкости для чистки оборудования) будет иметь следующий вид:

$$E = 200X_1 + 350X_2 + 300X_3 \rightarrow \min.$$

Приведем математическую модель в целом:

$$20X_1 + 50X_2 + 30X_3 \geq 30$$

$$40X_1 + 10X_2 + 25X_3 \geq 20$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

$$X_i \geq 0, \quad i=1, \dots, 3.$$

$$E = 200X_1 + 350X_2 + 300X_3 \rightarrow \min.$$

Решив задачу симплекс-методом, получим:  $X_1=0,67$ ;  $X_2=0,33$ ;  $X_3=0$ ;  $E=250$ . Это значит, что жидкость для чистки оборудования должна на 67% состоять из очистителя А и на 33% - из очистителя В. Использовать очиститель С нецелесообразно. Стоимость одного литра жидкости для чистки оборудования составит 250 ден.ед. Легко подсчитать, что в жидкости будет содержаться 30% компонентов для удаления твердых отложений и 30% компонентов для удаления ржавчины.

## Литература

<i>Основная</i>	
1	Сморodinский, С.С. Оптимизация решений на основе методов и моделей математического программирования / С.С. Смородинский, Н.В. Батин. - Мн.: БГУИР, 2003. – 136 с.
2	Таха, Х. Введение в исследование операций. - М.: Издательский дом “Вильямс”, 2005. – 912 с.
3	Эддоус, М. Методы принятия решений / М. Эддоус, Р. Стэнсфилд. - М.: Юнити, 1997. – 590 с.
4	Экономико-математические методы и модели / Под ред. А.В. Кузнецова. - Мн.: БГЭУ, 1999. – 413 с.
5	Кузнецов, А.В. Высшая математика: Математическое программирование / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод. - Мн.: Вышэйшая школа, 2001. – 351 с.
6	Сборник задач и упражнений по высшей математике: Математическое программирование / Под общей ред. А.В. Кузнецова, Р.А. Рутковского. - Мн.: Вышэйшая школа, 2002. – 447 с.
7	Мур, Дж.Х. Экономическое моделирование в Microsoft Excel / Дж.Х. Мур, Л.Р. Уэдерфорд. – М.: Издательский дом “Вильямс”, 2004. – 1024 с.

<i>Дополнительная</i>	
8	Экономико-математические методы и модели. Компьютерные технологии решения / И.Л. Акулич, Б.И. Велеско [и др.]. - Мн.: БГЭУ, 2003. – 348 с.
9	Экономико-математические методы и прикладные модели / Под ред. В.В. Федосеева. - М.: ЮНИТИ, 1999. – 391 с.
10	Вентцель, Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. - М.: Высшая школа, 2001. – 208 с.
11	Волков, И.И. Исследование операций / И.И. Волков, Е.А. Загоруйко. - М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 438 с.
12	Исследование операций в экономике / Под ред. Н.Ш. Кремера. - М.: Банки и биржи - Юнити, 2001. – 407 с.
13	Замков, О.О. Математические методы в экономике / О.О. Замков, А.В. Толстомятенко, Ю.Н. Черемных. - М.: Дело и сервис, 2001. – 368 с.
14	Минюк, С.А. Математические методы и модели в экономике / С.А. Минюк, Б.А. Ровба, К.К. Кузьмич. - Мн.: Тетрасистемс, 2002. – 432 с.
15	Бережная, Е.В. Математические методы моделирования экономических систем / Е.В. Бережная, В.И. Бережной. - Финансы и статистика, 2005. – 432 с.
16	Большаков, А.С. Моделирование в менеджменте. - М.: Филинь, 2000. – 464 с.
17	Конюховский, П.В. Математические методы исследования операций в экономике. СПб.: Питер, 2000. – 208 с.
18	Вентцель, Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей. - М.: Академия, 2003. – 448 с.
19	ГОСТ 2.105-95 Единая система конструкторской документации. Общие требования к текстовым документам.
20	ГОСТ 7.1-2003 Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Библиографическое описание документа. Общие требования и правила оформления.

## Приложение А (справочное)

Рабочий лист Excel с результатами решения задачи линейного программирования

[illegible]



## Содержание

Введение .....	3
<b>1 ЗАДАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.....</b>	<b>5</b>
<b>2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО КУРСОВОМУ ПРОЕКТИРОВАНИЮ .....</b>	<b>45</b>
<b>3 ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.....</b>	<b>50</b>
<b>3.1</b> Постановка задачи.....	<b>50</b>
<b>3.2</b> Построение базовой аналитической модели .....	<b>50</b>
<b>3.3</b> Обоснование вычислительной процедуры .....	<b>52</b>
<b>3.4</b> Решение задачи оптимизации на основе симплекс-метода .....	<b>52</b>
<b>3.5</b> Анализ базовой аналитической модели на чувствительность .....	<b>56</b>
<b>3.6</b> Построение модифицированной аналитической модели и анализ результатов модификации .....	<b>62</b>
<b>3.7</b> Примеры постановок и решения оптимизационных задач .....	<b>65</b>
Литература.....	69
<b>Приложение А (справочное) Рабочий лист Excel с результатами решения задачи линейного программирования .....</b>	<b>70</b>

Учебное издание

**Сморodinский Сергей Степанович**  
**Батин Николай Владимирович**

## **СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

### **Сборник заданий и методические указания по курсовому проектированию**

для студентов специальности I - 53 01 02  
«Автоматизированные системы обработки информации»  
дневной и дистанционной форм обучения

В авторской редакции.  
Отв. за выпуск С. Н. Воробьева.

Подписано в печать 09.10.2006.  
Гарнитура «Таймс».  
Уч.-изд. л. 3,8.

Формат 60x84 1/16.  
Печать ризографическая.  
Тираж 150 экз.

Бумага офсетная.  
Усл. печ. л. 4,3.  
Заказ 338.

---

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»  
ЛИ №02330/0056964 от 01.04.2004. ЛП №02330/0131666 от 30.04.2004.  
220013, Минск, П. Бровки, 6