

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра информационных технологий автоматизированных систем

Отчет по лабораторной работе №6
«АНАЛИЗ И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ
НА ОСНОВЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ»
Вариант №5

Выполнил:
Ст. Гр. 820601
Шведов А.Р.
Проверила:
Протченко Е.В.

Минск 2020

Задание:

1. В ходе разработки плана мероприятий по повышению эффективности работы предприятий некоторой отрасли исследуется связь между объемом производства и себестоимостью продукции. Имеются данные об объеме производства и себестоимости продукции по пяти предприятиям:

Предприятие	1	2	3	4	5
Объем производства, тыс. шт./месяц	15	27	12	42	30
Себестоимость продукции, ден.ед./штуку	40	25	38	12	28

1.1. Используя стандартные функции Excel, найти коэффициент корреляции между себестоимостью продукции и объемом производства. Выполнить проверку его значимости. Построить модель связи между исследуемыми величинами и проверить ее адекватность (2.3.2).

1.2. Найти среднюю ожидаемую величину себестоимости продукции для предприятия, на котором объем производства составляет 35 тыс.штук в месяц (2.4.2).

1.3. Найти ожидаемую величину себестоимости продукции с точностью 95% для предприятия, на котором объем производства составляет 35 тыс.штук в месяц (2.4.2).

1.4. Найти, каким должен быть объем производства, чтобы с вероятностью 95% себестоимость продукции не превысила 35 ден.ед./шт. (2.4.3).

При оформлении отчета:

- привести ручной расчет коэффициента корреляции и проверку его значимости(2.2);
- привести ручной расчет для построения линейной модели связи между исследуемыми величинами и для ее проверки на адекватность (2.3.1);
- определить смысл коэффициентов модели, найти коэффициент эластичности (2.4.1).

2. В условиях задания 1 учитывается также цена на сырье. Имеются данные по тем же пяти предприятиям:

Предприятие	1	2	3	4	5
Объем производства, тыс. шт./месяц	15	27	12	42	30
Цена сырья, тыс.ден.ед./тонну	7	9	5	8	12
Себестоимость продукции, ден.ед./штуку	40	25	38	12	28

2.1. Используя Excel, построить модель связи себестоимости продукции с объемом производства и ценой сырья. Проверить ее на адекватность. (2.5.1, 2.5.2).

2.2. Определить смысл коэффициентов модели. Найти коэффициенты эластичности. Найти ожидаемую величину себестоимости продукции для предприятия, на котором объем производства составляет 35 тыс.штук в месяц, а сырье закупается по цене 10 тыс ден.ед./тонну. (2.5.3)

Ход работы:

Эконометрические модели представляют собой один из видов экономико-математических моделей, применяемых для анализа и оптимизации управленческих решений. Эконометрическая модель – это уравнение (или система уравнений), выражающее связь некоторого показателя Y с факторами X_1, X_2, \dots, X_M , влияющими на этот показатель.

1. Выбор вида эконометрической модели

Требуется выяснить, имеется ли линейная связь между исследуемыми величинами.

Здесь объем производства – входная (независимая) переменная X , а себестоимость продукции – выходная переменная Y . Для каждой из переменных известно по пять значений ($N=5$).

Чтобы выяснить, существует ли линейная связь между исследуемыми величинами, находится коэффициент корреляции:

$$R_{xy} = \frac{\sum_{j=1}^N x_j y_j - N \bar{X} \bar{Y}}{(N-1) \sqrt{S_x^2 \cdot S_y^2}},$$

где \bar{X} и \bar{Y} – средние выборочные значения исследуемых величин:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j, \quad \bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j;$$

S_x^2, S_y^2 – выборочные дисперсии исследуемых величин:

$$S_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (x_j - \bar{X})^2, \quad S_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (y_j - \bar{Y})^2.$$

Найдем коэффициент корреляции для рассматриваемого примера:

$$\bar{X} = (15+27+12+42+30)/5 = 25,2;$$

$$\bar{Y} = (40+25+38+12+28)/5 = 28,6;$$

$$S_x^2 = ((15-25,2)^2 + (27-25,2)^2 + (12-25,2)^2 + (42-25,2)^2 + (30-25,2)^2)/4 = 146,7$$

$$S_y^2 = 126,8$$

$$\sum_{j=1}^N \bar{X}_j * \bar{Y}_j = 3075$$

Коэффициент корреляции: $R_{xy} = -0.969$.

Если коэффициент корреляции близок к 1, то можно считать, что между исследуемыми величинами имеется линейная связь. Если коэффициент корреляции близок к -1, то линейная связь существует,

но с ростом X уменьшается Y . Если коэффициент корреляции близок к нулю, то величины X и Y не связаны друг с другом, или связь между ними нелинейная.

Выясним, можно ли считать коэффициент корреляции значимым (т.е. близким к 1 или к -1), определив следующий критерий:

$$T = |R_{xy}| \sqrt{\frac{N-2}{1-R_{xy}^2}}$$

Этот критерий сравнивается с величиной, определяемой по таблицам распределения Стьюдента ($T_{\text{табл}}$ или $T_{\alpha/2;s}$), где α - это уровнем значимости (обычно - из диапазона от 0,05 до 0,1), а s - число степеней свободы (параметр распределения Стьюдента).

Если $T > T_{\text{табл}}$, то коэффициент корреляции можно считать значимым. Это означает, что с вероятностью, равной $1-\alpha$, можно считать, что между исследуемыми величинами имеется линейная связь.

$$\alpha = 0.05, s = N - 2$$

$$T = 6.793, \text{ а } T_{\text{табл}} = T_{0.025;3} = 3.182.$$

Можно считать, что линейная связь между объемом производства и себестоимостью продукции существует. С увеличением объема производства себестоимость продукции снижается.

Таким образом, зависимость себестоимости продукции (Y) от объема производства (X) может быть описана линейной эконометрической моделью: $Y = A_0 + A_1 \cdot X$.

2. Построение и проверка линейных эконометрических моделей с одной входной переменной

Построим линейную модель зависимости себестоимости продукции (Y) и объема производства (X).

Основным методом построения эконометрических моделей является метод наименьших квадратов. Решим следующую систему уравнений:

$$A_0 \cdot N + A_1 \cdot \sum_{j=1}^N x_j = \sum_{j=1}^N y_j$$

$$A_0 \cdot \sum_{j=1}^N x_j + A_1 \cdot \sum_{j=1}^N x_j^2 = \sum_{j=1}^N x_j \cdot y_j$$

$$5A_0 + 126A_1 = 143,$$

$$126A_0 + 3762A_1 = 3075.$$

Решив эту систему уравнений, получим: $A_0 = 51,3$, $A_1 = -0,9$. Таким образом, зависимость между объемом производства (X) и потерями от брака (Y) может быть выражена следующей эконометрической моделью:

$$Y = 51,3 - 0,9X.$$

Проверим построенную модель на адекватность.

Найдем модельные значения \hat{y}_j ($j=1, \dots, N$), также вспомогательные элементы (сумма квадратов, обусловленная моделью, и сумма квадратов ошибки):

$$Q_r = \sum_{j=1}^N (\hat{y}_j - \bar{Y})^2,$$

$$Q_e = \sum_{j=1}^N (y_j - \hat{y}_j)^2.$$

Модельные значения \hat{Y} :

$$\hat{y}_1 = 51,3 - 0,9 * 15 = 37,8$$

$$\hat{y}_2 = 27, \hat{y}_3 = 40,3, \hat{y}_4 = 13,5, \hat{y}_5 = 24,3$$

Сумма квадратов, обусловленная моделью:

$$Q_r = 476.2$$

Сумма квадратов ошибки:

$$Q_e = 31.03$$

Для проверки модели на адекватность находится следующий критерий:

$$F = \frac{Q_r / k}{Q_e / (N - k - 1)},$$

где k - количество коэффициентов модели, не считая A_0 (для модели с одной входной переменной $k=1$).

Получим: $F=46.04$. Это значение сравниваем с величиной распределения Фишера ($F_{\text{табл}}$ или $F_{\alpha, s1, s2}$). $s1=1$, $s2=3$, $\alpha=0.05$.

$$F_{\alpha, s1, s2} = 10,13.$$

Так как $F > F_{\alpha, s1, s2}$, можно считать, что модель $Y = 51.3 - 0.9X$ достаточно точно описывает зависимость Y (себестоимость продукции) от X (объем производства).

Оценка точности (коэффициент детерминации):

$$R^2 = \frac{Q_r}{Q_r + Q_e}.$$

В данном случае $R^2=0.94$. Это означает, что различия в значениях себестоимости продукции на 94% объясняются различиями в значениях объема производства, и на 6% - другими факторами, неучтенными при построении эконометрической модели.

3. Построение и проверка модели с использованием табличного процессора Excel

	A	B	C	D	E	F
1	Объем производства, тыс. шт./месяц	15	27	12	42	30
2	Себестоимость продукции, ден. ед./штуку	40	25	38	12	28

Рис.1. Рабочий лист Excel с исходными данными для построения эконометрической модели

Функция ЛИНЕЙН	
-0.90082	51.30061
0.13276	3.641605
0.938826	3.215981
46.0402	3
476.1724	31.02761

Рис.2. Результаты применения функции ЛИНЕЙН

Коэффициент корреляции	-0.96893
T	6.785293
СТЮДРАСПОБР	3.182446

Рис.3. Результаты применения функций КОРРЕЛ, СТЮДРАСПОБР

4. Применение линейной эконометрической модели с одной входной переменной

В некоторых случаях требуется проанализировать влияние изменения переменной X на изменение Y не в абсолютных величинах, а в процентах.

Для этого используется коэффициент эластичности:

$$E = A_1 \cdot \frac{\bar{X}}{\bar{Y}}$$

$$E = -0.9 \cdot 25.2 / 28.6 = -0.79$$

Значит, повышение объема производства на 1% позволяет снизить себестоимость продукции в среднем на 0,79%.

Прогнозирование значения выходной переменной при заданном значении входной переменной(1.2, 1.3)

Задание: найти *среднюю* ожидаемую величину себестоимости продукции для предприятия, на котором объем производства составляет 35 тыс.штук в месяц(1.2).

Получим: $1,3 - 0,9 \cdot 35 = 19,8$ ден.ед./шт

Задание: найти ожидаемую величину себестоимости продукции с *точностью 95%* для предприятия, на котором объем производства составляет 35 тыс.штук в месяц (1.3).

Границы диапазона, в котором будет находиться выходная переменная Y при заданном значении входной переменной X_0 с заданной вероятностью P , находятся по следующей формуле:

$$Y_0 \pm T_{\alpha/2,s} \cdot \sqrt{\frac{Q_e}{N-2} \cdot \left(1 + \frac{1}{N} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_{j=1}^N x_j^2 - N \cdot \bar{X}^2}\right)},$$

где Y_0 – среднее ожидаемое значение выходной переменной, найденное путем подстановки значения X_0 в построенную линейную эконометрическую модель;

$T_{\alpha/2;s}$ – величина, определяемая по таблицам распределения Стьюдента по уровню значимости $\alpha = 1 - P$ и числу степеней свободы $s = N - 2$;

Подставив величины в формулу, получим интервал $19,8 \pm 11,9 = (7,9; 31,7)$. Это значит, что при объеме производства равном 35 тыс.штук в месяц, себестоимость продукции с вероятностью 95% составит не менее 7,9 и не более 31,7 ден.ед./штуку.

Определение значения входной переменной для получения заданного значения выходной переменной(1.4)

Задание: найти, каким должен быть объем производства, чтобы с вероятностью 95% себестоимость продукции не превысила 35 ден.ед./шт. (1.4).

Значение X , при котором выходная переменная Y с заданной вероятностью примет значение не больше заданной величины Y_0 , находится путем решения следующего уравнения:

$$A_0 + A_1 \cdot X + T_{\alpha,s} \cdot \sqrt{\frac{Q_e}{N-2} \cdot \left(1 + \frac{1}{N} + \frac{(X - \bar{X})^2}{\sum_{j=1}^N x_j^2 - N \cdot \bar{X}^2}\right)} = Y_0$$

Смысл всех используемых величин показан выше.

Получим: $X = 27,4$. Это значит, что при объеме производства 27,4 тыс.шт/месяц себестоимость продукции с вероятностью 95% не превысит 35 ден.ед./шт.

5. Линейные эконометрические модели с несколькими входными переменными

Для построения линейной эконометрической модели удобно воспользоваться табличным процессором Excel.

	A	B	C	D	E	F
1	Объем производства, тыс. шт./месяц	15	27	12	42	30
2	Цена сырья, тыс. ден. ед./тонну	7	9	5	8	12
3	Себестоимость продукции, ден. ед./штуку	40	25	38	12	28

Рис.4. Рабочий лист Excel с исходными данными для построения линейной эконометрической модели с двумя входными переменными

Для построения модели воспользуемся функцией ЛИНЕЙН.

Функция ЛИНЕЙН			
0.995632	-1.02095	46.16364247	
0.59504	0.127165	4.208861741	
0.974509	2.542548	#N/A	
38.22934	2	#N/A	
494.2709	12.9291	#N/A	

Рис.5. Результаты применения функции ЛИНЕЙН

В результате: $A_0=46,2$, $A_1=1,02$, $A_2=-0,996$;
 $Q_r=494,3$, $Q_e=9,22$;
 $F=38,2$, $R^2=0,87$.

Величина $F_{\alpha, s1, s2}$, необходимая для проверки адекватности модели, находится с помощью функции ФРАСПОБР со следующими аргументами (для данного примера):

Вероятность: 0,05

Степени_свободы1: 2

Степени_свободы2: 2

Получим: $F_{\alpha, s1, s2}=19$, а $F=38,2$. Выполнение условия $F > F_{\alpha, s1, s2}$ означает, что построенная модель $\hat{Y}=46,2-1,02X_1+0,996X_2$ достаточно точна.

6. Определение смысла коэффициентов модели. Найти коэффициенты эластичности.

Коэффициенты данной модели:

$A_1=-1,02$ означает, что увеличение объема производства на одну тысячу штук позволяет снизить себестоимость продукции в среднем на 1,02 ден.ед;

$A_2=0,996$ означает, что увеличение цены сырья на одну тысячу ден.ед. увеличивает себестоимость продукции в среднем на 0,996 ден.ед;

$A_0=46,2$ - средняя себестоимость продукции при отсутствии цены сырья и объема производства.

Найдем коэффициент эластичности для каждой из входной переменной(2.1):

$$E_i = A_i \cdot \frac{\bar{X}_i}{\bar{Y}}.$$

$$E_1=-1,02*8,2/28,6=-0,29, E_2=0,88$$

Это означает, что увеличение объема производства на 1% позволяет снизить себестоимость продукции в среднем на 0,29%. Повышение цены сырья на 1% увеличивает себестоимость продукции в среднем на 0,88%.

Прогнозирование среднего значения выходной переменной при заданных значениях входных переменных(2.2).

Найти ожидаемую величину себестоимости продукции для предприятия, на котором объем производства составляет 35 тыс.штук в месяц, а сырье закупается по цене 10 тыс ден.ед./тонну.

Можно сказать, что себестоимость продукции тогда составит в среднем $46,2-1,02*35+0,996*10=20,46$ ден.ед./шт.