СБОРНИК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В трех частях

Под общей редакцией
доктора физико-математических наук,
профессора *А. П. Рябушко*

Часть 3

Допущено Министерством
народного образования БССР
в качестве учебного пособия
для студентов инженерно-технических
специальностей вузов

**Минск
«Вышэйшая школа»
1991**

ББК 22.11я73
С23
УДК 51(076.1)(075.8)

Авторы: *А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть*

Рецензенты: кафедра высшей математики Московского энергетического института; зав. кафедрой высшей математики Минского радиотехнического института, д-р физ.-мат. наук, проф. Л. А. Черкас

С23 **Сборник** индивидуальных заданий по высшей математике: Учеб. пособие. В 3 ч. Ч.3/ А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; Под общ. ред. А. П. Рябушко.— Мн.: Выш. шк., 1991.—288 с.: ил.
ISBN 5-339-00328-0.

Книга является составной частью комплекса учебных пособий по курсу высшей математики, направленных на развитие и активизацию самостоятельной работы студентов вузов. Содержатся теоретические сведения и наборы задач для аудиторных и индивидуальных заданий по рядам, кратным и криволинейным интегралам и элементам теории поля.

Для студентов инженерно-технических специальностей вузов.

$$С\frac{1602010000-041}{М304(03)-91}9-91$$

ББК 22.11я73

ISBN 5-339-00328-0 (ч. 3)
ISBN 5-339-00483-X

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга является третьей частью комплекса учебных пособий под общим названием «Сборник индивидуальных заданий по высшей математике», написанного в соответствии с действующими программами курса высшей математики в объеме 380—450 часов для инженерно-технических специальностей вузов. Этот комплекс также может быть использован в вузах других профилей, в которых количество часов, отведенное на изучение высшей математики, значительно меньше. (Для этого из предлагаемого материала следует сделать необходимую выборку.) Кроме того, он вполне доступен для студентов вечерних и заочных отделений вузов.

Настоящий комплекс пособий адресован преподавателям и студентам и предназначен для проведения практических занятий, самостоятельных (контрольных) работ в аудитории и выдачи индивидуальных домашних заданий по всем разделам курса высшей математики.

В третьей части «Сборника индивидуальных заданий по высшей математике» содержится материал по рядам, кратным и криволинейным интегралам и элементам теории поля. Ее структура аналогична структуре предыдущих частей, а нумерация глав, параграфов и рисунков продолжает соответствующую нумерацию.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензентам — коллективу кафедры высшей математики Московского энергетического института, возглавляемой членом-корреспондентом АН СССР, доктором физико-математических наук, профессором С. И. Похожаевым, и заведующему кафедрой высшей математики Минского радиотехнического института, доктору физико-математических наук, профессору Л. А. Черкасу, а также сотрудникам этих кафедр кандидатам физико-математических наук, доцентам Л. А. Кузнецову, П. А. Шмелеву, А. А. Карпуку — за ценные замечания и советы, способствовавшие улучшению книги.

Все отзывы и пожелания просьба присылать по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11, издательство «Вышэйшая школа».

Авторы

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Охарактеризуем структуру пособия, методику его использования, организацию проверки и оценки знаний, навыков и умений студентов.

Весь практический материал по курсу высшей математики разделен на главы, в каждой из которых даются необходимые теоретические сведения (основные определения, формулировки теорем, формулы), используемые при решении задач и выполнении упражнений. Изложение этих сведений иллюстрируется решенными примерами. (Начало решения примеров обозначается символом ▶, а конец — ◀.) Затем даются подборки задач с ответами для всех практических аудиторных занятий (АЗ) и для самостоятельных (миниконтрольных) работ на 10—15 минут во время этих занятий. И, наконец, приводятся недельные индивидуальные домашние задания (ИДЗ), каждое из которых содержит 30 вариантов и сопровождается решением типового варианта. Часть задач из ИДЗ снабжена ответами. В конце каждой главы предлагаются дополнительные задачи повышенной трудности.

В приложении приведены двухчасовые контрольные работы (каждая — по 30 вариантов) по важнейшим темам курса.

Нумерация АЗ сквозная и состоит из двух чисел: первое из них указывает на главу, а второе — на порядковый номер АЗ в этой главе. Например, шифр АЗ-12.1 означает, что АЗ относится к двенадцатой главе и является первым по счету. В третьей части пособия содержится 21 АЗ и 10 ИДЗ.

Для ИДЗ также принята нумерация по главам. Например, шифр ИДЗ-12.2 означает, что ИДЗ осносится к двенадцатой главе и является вторым. Внутри каждого ИДЗ принята следующая нумерация: первое число означает номер задачи в данном задании, а второе — номер варианта. Таким образом, шифр ИДЗ-12.2:16 означает, что студент должен выполнять 16-й вариант из ИДЗ-12.2, который содержит задачи 1.16, 2.16, 3.16 и т. д. При выдаче ИДЗ студентам номера́ выполняемых вариантов можно менять от задания к заданию по какой-либо системе или случайным образом. Более того, можно при выдаче ИДЗ любому студенту составить его вариант, комбинируя однотипные задачи из разных вариантов. Например, шифр ИДЗ-12.2:1.2; 2.4; 3.6; 4.1; 5.15 означает, что студенту следует решать в ИДЗ-12.2 первую задачу из варианта 2, вторую — из варианта 4, третью — из варианта 6, четвертую — из варианта 1 и пятую — из варианта 15. Такой комбинированный метод выдачи ИДЗ позволяет из 30 вариантов получить большое количество новых вариантов.

Внедрение ИДЗ в учебный процесс некоторых втузов (Белорусский институт механизации сельского хозяйства, Белорусский политехнический институт, Дальневосточный политехнический институт и др.) показало, что целесообразнее выдавать ИДЗ не после каждого АЗ (которых, как правило, два в неделю), а одно недельное ИДЗ, включающее в себя основной материал двух АЗ данной недели.

Дадим некоторые общие рекомендации по организации работы студентов в соответствии с настоящим пособием.

1. В вузе студенческие группы по 25 человек, проводятся два АЗ в неделю, планируются еженедельные необязательные для посещения студентами консультации, выдаются недельные ИДЗ. При этих условиях для систематического контроля с выставлением оценок, указанием ошибок и путей их исправления могут быть использованы выдаваемые каждому преподавателю матрицы ответов и банк листов решений, которые кафедра заготавливает для ИДЗ (студентам они не выдаются). Если матрицы ответов составляются для всех задач из ИДЗ, то листы решений разрабатываются только для тех задач и вариантов, где важно проверить правильность выбора метода, последовательности действий, навыков и умений при вычислениях. Кафедра определяет, для каких ИДЗ нужны листы решений. Листы решений (один вариант располагается на одном листе) используются при самоконтроле правильности выполнения заданий студентами, при взаимном студенческом контроле, а чаще при комбинированном контроле: преподаватель проверяет лишь правильность выбора метода, а студент по листу решений — свои вычисления. Эти методы позволяют проверить

ИДЗ 25 студентов за 15—20 минут с выставлением оценок в журнал.

2. Студенческие группы в вузе по 15 человек, проводятся два АЗ в неделю, в расписание для каждой группы включены обязательные два часа в неделю самоподготовки под контролем преподавателя. При этих условиях (которые созданы, например, в Белорусском институте механизации сельского хозяйства) организация индивидуальной, самостоятельной, творческой работы студентов, оперативного контроля за качеством этой работы значительно улучшается. Рекомендованные выше методы пригодны и в данном случае, однако появляются новые возможности. На АЗ быстрее проверяются и оцениваются ИДЗ, во время обязательной самоподготовки можно проконтролировать проработку теории и решение ИДЗ, выставить оценки части студентов, принять задолженности по ИДЗ у отстающих.

Накапливание большого количества оценок за ИДЗ, самостоятельные и контрольные работы в аудитории позволяет контролировать учебный процесс, управлять им, оценивать качество усвоения изучаемого материала.

Все это дает возможность отказаться от традиционного итогового семестрового (годового) экзамена по материалу всего семестра (учебного года) и ввести так называемый блочно-цикловой (модульно-цикловой) метод оценки знаний и навыков студентов, состоящий в следующем. Материал семестра (учебного года) разбивается на блоки (модули), по каждому из которых выполняются АЗ, ИДЗ и в конце каждого цикла двухчасовая письменная коллоквиум-контрольная работа, в которую входят 2—3 теоретических вопроса и 5—6 задач. Учет оценок по АЗ, ИДЗ и коллоквиуму-контрольной позволяет вывести объективную общую оценку за каждый блок (модуль) и итоговую оценку по всем блокам (модулям) семестра (учебного года). Подобный метод внедряется, например, в Белорусском институте механизации сельского хозяйства.

В заключение отметим, что пособие в основном ориентировано на студента средних способностей, и усвоение содержащегося в нем материала гарантирует удовлетворительные и хорошие знания по курсу высшей математики. Для одаренных и отлично успевающих студентов необходима подготовка заданий повышенной сложности (индивидуальный подход в обучении!) с перспективными поощрительными мерами. Например, можно разработать для таких студентов специальные задания на весь семестр, включающие задачи настоящего пособия и дополнительные более сложные задачи и теоретические упражнения (для этой цели, в частности, предназначены дополнительные задачи в конце каждой главы). Преподаватель может выдать эти задания в начале семестра, установить график их выполнения под своим контролем, разрешить свободное посещение лекционных или практических занятий по высшей математике и в случае успешной работы выставить отличную оценку до экзаменационной сессии.

12. РЯДЫ

12.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Выражение вида

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{12.1}$$

где $u_n \in \mathbf{R}$, называется *числовым рядом*. Числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называются *членами ряда*, число u_n — *общим членом ряда*.

Суммы

$$S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 + u_2,\ \ldots,\ S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

называются *частичными суммами*, а S_n — *n-й частичной суммой ряда (12.1)*. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует и равен числу S, т. е. $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд (12.1) называется *сходящимся*, а S — его *суммой*. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует (в частности, бесконечен), то ряд (12.1) называется *расходящимся*. Сумма

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} + \ldots$$

называется *n-м остатком ряда (12.1)*.

Если ряд (12.1) сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} (S - S_n) = 0.$$

Пример 1. Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Установить сходимость этого ряда и найти его сумму.

▶ Запишем n-ю частичную сумму данного ряда и преобразуем ее:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Поскольку

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

то данный ряд сходится и его сумма $S = 1$. ◀

Ряд вида

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \tag{12.2}$$

представляет собой сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем q. Известно, что при $|q| < 1$ ряд (12.2) сходится и его сумма $S = a/(1-q)$. Если $|q| \geqslant 1$, то ряд (12.2) расходится.

Теорема 1 (необходимый признак сходимости ряда). *Если числовой ряд (12.1) сходится, то* $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.

Обратное утверждение неверно. Например, в *гармоническом ряде*

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

общий член стремится к нулю, однако ряд расходится.

Теорема 2 (достаточный признак расходимости ряда). *Если* $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = a \neq 0$, *то ряд (12.1) расходится.*

Сходимость или расходимость числового ряда не нарушается, если в нем отбросить любое конечное число членов. Но его сумма, если она существует, при этом изменяется.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1}$.

▶ Запишем общий член данного ряда:

$$u_n = \frac{n}{3n+1}.$$

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} \neq 0,$$

т. е. ряд расходится. ◀

Рассмотрим некоторые *достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами.*

Теорема 3 (признаки сравнения). *Если даны два ряда*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{12.3}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{12.4}$$

и для всех $n \geqslant n_0$ *выполняются* неравенства $0 < u_n \leqslant v_n$, *то:*

1) *из сходимости ряда (12.4) следует сходимость ряда (12.3);*
2) *из расходимости ряда (12.3) следует расходимость ряда (12.4).*

В качестве рядов для сравнения целесообразно выбирать ряд, представляющий сумму членов геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$, а также гармонический (расходящийся) ряд.

Пример 3. Доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 3^n} + \ldots \tag{1}$$

▶ Для установления сходимости ряда (1) воспользуемся неравенством

$$u_n = \frac{1}{n \cdot 3^n} < \frac{1}{3^n} \quad (n \geqslant 2)$$

и сравним данный ряд со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, $q = \frac{1}{3} < 1$.

Согласно признаку сравнения (см. теорему 3, п. 1), ряд (1) сходится. ◀

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$.

▶ Так как $\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} > \frac{1}{n}$ для любого $n \geqslant 2$, то члены данного ряда больше соответствующих членов расходящегося гармонического ряда. Значит, исходный ряд расходится. ◀

Теорема 4 (признак Д'Аламбера). *Пусть для ряда (12.1) $u_n > 0$ (начиная с некоторого $n = n_0$) и существует предел*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q.$$

Тогда:

1) при $q < 1$ данный ряд сходится;

2) при $q > 1$ ряд расходится.

При $q = 1$ признак Д'Аламбера не дает ответа на вопрос о сходимости или расходимости ряда: он может и сходиться, и расходиться. В этом случае сходимость ряда исследуют с помощью других признаков.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}}$.

▶ Поскольку $u_n = \frac{n^2}{2^{n-1}}$, $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^n}$, то

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 2^{n-1}}{n^2 \cdot 2^n} = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1$$

Следовательно, данный ряд сходится. ◀

Теорема 5 (радикальный признак Коши). *Если, начиная с некоторого $n = n_0$, $u_n > 0$ и $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = q$, то при $q < 1$ ряд (12.1) сходится, а при $q > 1$ расходится.*

При $q = 1$ радикальный признак Коши неприменим.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{8n-1}\right)^n$

▶ Воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$q = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{8n-1}\right)^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{8n-1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + 1/n}{8 - 1/n} = \frac{1}{8} < 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится. ◀

Теорема 6 (интегральный признак Коши). *Пусть члены ряда (12.1) монотонно убывают и функция $y = f(x)$, непрерывная при $x \geqslant a \geqslant 1$, такова, что $f(n) = u_n$. Тогда ряд (12.1) и интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся.*

Например, поскольку $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ ($\alpha \in \mathbf{R}$) сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$, то *ряд Дирихле* $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Сходимость многих рядов можно исследовать путем сравнения их с соответствующим рядом Дирихле.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{2n}{(n^2+1)^2}$.

▶ Положим, что $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$. Эта функция удовлетворяет всем требованиям интегрального признака Коши. Тогда несобственный интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx = \lim_{B\to\infty}\int\limits_1^B \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx = -\lim_{B\to\infty}\frac{1}{(x^2+1)}\Bigg|_1^B = \frac{1}{2},$$

т. е. сходится, а значит, данный ряд также сходится. ◀

Числовой ряд (12.1), члены u_n которого после любого номера N ($n > N$) имеют разные знаки, называется *знакопеременным*.

Если ряд

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{12.5}$$

сходится, то ряд (12.1) также сходится (это легко доказывается) и называется *абсолютно сходящимся*. Если ряд (12.5) расходится, а ряд (12.1) сходится, то ряд (12.1) называется *условно (неабсолютно) сходящимся*.

При исследовании ряда на абсолютную сходимость используются признаки сходимости с положительными членами рядов.

Пример 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{\sin n\alpha}{n^2}$ ($\alpha \in \mathbf{R}$).

▶ Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$ ($\alpha \in \mathbf{R}$). Так как $|\sin n\alpha| \leqslant 1$, то члены исходного ряда не больше членов ряда Дирихле $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ ($\alpha = 2$), который, как известно, сходится. Следовательно, на основании признака сравнениям (см. теорему 3, п. 1) данный ряд сходится абсолютно. ◀

Ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n-1}u_n + \ldots, \qquad (12.6)$$

где $u_n \geqslant 0$, называется *знакочередующимся рядом.*

Теорема 7 (признак Лейбница). *Если для знакочередующегося ряда (12.6)* $u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то *ряд (12.6) сходится и его сумма* S *удовлетворяет условию* $0 < S < u_1$.

Следствие. Остаток r_n *ряда (12.6) всегда удовлетворяет условию* $|r_n| < u_{n+1}$.

Например, ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

сходится, так как выполнены условия признака Лейбница. Он сходится условно, так как ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ расходится.

Абсолютно сходящиеся ряды (в отличие от условно сходящихся) обладают свойствами сумм конечного числа слагаемых (например, от перемены мест слагаемых сумма не меняется).

Верна следующая

Теорема 8. *Если числовой ряд сходится условно, то, задав любое число а, можно так переставить члены ряда, что его сумма окажется равной а. Более того, можно так переставить члены условно сходящегося ряда, что ряд, полученный после перестановки, будет расходящимся.*

Проиллюстрируем теорему 8 на примере. Рассмотрим условно сходящийся ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots = S.$$

Переставим его члены так, чтобы после каждого положительного члена стояли два отрицательных. Получим

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots + \\ + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \ldots$$

Сложим теперь каждый положительный член с последующим отрицательным:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \ldots = \\ = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \right. \\ \left. + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \ldots\right) = \frac{1}{2}S.$$

Очевидно, что сумма исходного ряда уменьшилась вдвое!

Пример 9. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}. \qquad (1)$$

▶ Так как члены данного знакочередующегося ряда монотонно убывают и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}=0$, то, согласно признаку Лейбница, ряд (1) сходится.

Рассмотрим теперь ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1), т. е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}, \qquad (2)$$

общий член которого задается функцией $f(x)=\frac{2x+1}{x(x+1)}$ при $x=n$. Найдем

$$\int_1^{\infty}\frac{2x+1}{x(x+1)}dx=\lim_{B\to\infty}\int_1^B\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=\lim_{B\to\infty}(\ln|x|+\ln|x+1|)\Big|_1^B=\lim_{B\to\infty}(\ln B(B+1)-\ln 2)=\infty.$$

Следовательно, ряд (2) расходится, и поэтому ряд (1) сходится условно. ◀

Пример 10. Вычислить сумму ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots$$

с точностью $\delta=0{,}001$.

▶ Всякая n-я частичная сумма сходящегося ряда является приближением к его сумме с точностью, не превосходящей абсолютной величины остатка этого ряда. Выясним, при каком количестве членов n-й частичной суммы выполняется неравенство $|r_n|\leqslant\delta$.

Для данного ряда

$$r_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{(n+2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}+\ldots$$

Так как $(n+1)!<(2n+2)!<(2n+3)!<\ldots$, то

$$r_n\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots\right)=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Путем подбора легко найти, что $r_n<\frac{1}{120\cdot 16}<0{,}001$ при $n=4$. Следовательно, сумма данного ряда (с точностью $\delta=0{,}001$)

$$S\approx S_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{48}+\frac{1}{384}=0{,}648. ◀$$

Пример 11. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2\cdot 2^n}$$

с точностью $\delta=0{,}001$.

▶ Так как данный ряд — знакочередующийся, сходящийся, то величина отброшенного при вычислении остатка ряда, который также является знакочередующимся рядом, не превосходит первого отброшенного члена (на основании следствия из признака Лейбница). Нужное число членов n найдем путем подбора из неравенства $\frac{1}{n^2\cdot 2^n}\leqslant$ $\leqslant 0{,}001$. При $n=6$ последнее неравенство выполняется, значит, если отбросить в данном ряде все члены, начиная с шестого, то требуемая точность будет обеспечена. Следовательно,

$$S\approx S_5=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{72}-\frac{1}{256}+\frac{1}{800}=0{,}449. \blacktriangleleft$$

АЗ-12.1

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+2^n}{10^n}$.

(*Ответ*: а) 1/3; *b*) 5/4.)

2. Исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^3-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(n+2)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2+2n}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}n\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2^{n+1}}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

3. Доказать, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^n!}=0$ при $a>1$.

4. С помощью интегрального признака Коши исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$;

в) $\sum\limits_{=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

Самостоятельная работа

1. 1. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+5^n}{15^n}$ и найти его сумму. (*Ответ*: 3/4)

2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$.

2. 1. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ и найти его сумму. (*Ответ*: 1/2.)

2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+4)^2}$.

3. 1. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ и найти его сумму. (*Ответ*: 1/6.)

2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$.

АЗ-12.2

1. Исследовать на условную и абсолютную сходимости следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n \cdot 2^{-n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2-9}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{6n+5}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\alpha)}{n^2+1}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$.

2. Составить разность двух расходящихся рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ и исследовать на сходимость полученный ряд.

3. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2}$ с точностью $\delta = 0{,}01$. (*Ответ*: 0,58.)

4. Сколько первых членов ряда нужно взять, чтобы их сумма отличалась от суммы ряда на величину, меньшую, чем 10^{-6}:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$?

(*Ответ*: а) $n = 10^3$; б) $n = 10^6$.)

Самостоятельная работа

1. 1. Исследовать на условную и абсолютную сходимости ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln^2 n}$.

2. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(0{,}6)^n}{n^2+1}$, ограничившись тремя его членами. Оценить абсолютную погрешность вычислений. (*Ответ*: $S = 0{,}266$, $\delta = 0{,}01$.)

2. 1. Исследовать на условную и абсолютную сходимости ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

2. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(0{,}7)^n}{(n-1)!}$, ограничившись тремя его первыми членами. Оценить абсолютную погрешность вычислений. (*Ответ*: $S = 0{,}56$, $\delta = 0{,}1$.)

для всех $x \in D$, то ряд (12.7) называется *равномерно сходящимся в* D. В случае равномерной сходимости функционального ряда его n-я частичная сумма является приближением суммы ряда с одной и той же точностью для всех $x \in D$.

Функциональный ряд (12.7) называется *мажорируемым* в некоторой области D, если существует сходящийся числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \quad (\alpha_n > 0), \tag{12.9}$$

такой, что для всех $x \in D$ справедливы неравенства:

$$|u_k(x)| \leqslant \alpha_k \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Ряд (12.9) называется *мажорантным (мажорирующим) рядом.*

Например, функциональный ряд

$$\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^2} + \ldots$$

мажорируется рядом $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots$, так как $|\cos nx| \leqslant 1$. Данный функциональный ряд равномерно сходится на всей оси Ox, поскольку он мажорируется при любом x.

Равномерно сходящиеся ряды обладают некоторыми общими свойствами:

1) если члены равномерно сходящегося ряда непрерывны на некотором отрезке, то его сумма также непрерывна на этом отрезке;

2) если члены ряда (12.7) непрерывны на отрезке $[a;\ b]$ и ряд равномерно сходится на этом отрезке, то в случае, когда $[\alpha;\ \beta] \subset [a;\ b]$,

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x)dx,$$

где $S(x)$ — сумма ряда (12.7);

3) если ряд (12.7), составленный из функций, имеющих непрерывные производные на отрезке $[a;\ b]$, сходится на этом отрезке к сумме $S(x)$ и ряд $u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots$ равномерно сходится на том же отрезке, то

$$u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots = S'(x).$$

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

где $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ — постоянные числа, называемые *коэффициентами ряда*, x_0 — фиксированное число. При $x_0 = 0$ получаем степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{12.10}$$

Теорема 1 (Абеля). 1. *Если степенной ряд (12.10) сходится при некотором значении $x = x_1 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всяком значении x, удовлетворяющем условию $|x| < |x_1|$.*

2. *Если степенной ряд (12.10) расходится при некотором значении $x = x_2$, то он расходится при любых x, для которых $|x| > |x_2|$.*

Неотрицательное число R, такое, что при всех $|x| < R$ степенной ряд (12.10) сходится, а при всех $|x| > R$ — расходится, называется *радиусом сходимости ряда*. Интервал $(-R;\ R)$ называется *интервалом сходимости ряда (12.10)*.

Радиус сходимости степенного ряда (12.10) определяется формулой

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{ или } R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}, \qquad (12.11)$$

если, начиная с некоторого $n \geqslant n_0$, все $a_n \neq 0$. (Предполагается, что указанные пределы существуют или бесконечны.) Формулы (12.11) легко получить, воспользовавшись соответственно признаком Д'Аламбера или радикальным признаком Коши.

Пример 2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{3^n\cdot\sqrt{n}}$.

► Так как

$$a_n = \frac{2^n}{3^n\sqrt{n}},\quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}\sqrt{n+1}},$$

то

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 3^{n+1}\sqrt{n+1}}{2^{n+1}\cdot 3^n\sqrt{n}} = \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = \frac{3}{2}.$$

Значит, степенной ряд сходится в интервале $(-3/2;\ 3/2)$. На концах этого интервала ряд может сходиться или расходиться. В нашем примере при $x = -3/2$ данный ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$. Он сходится по признаку Лейбница. При $x = 3/2$ получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, члены которого больше соответствующих членов расходящегося гармонического ряда. Значит, при $x = 3/2$ степенной ряд расходится. Следовательно, областью сходимости исходного степенного ряда является полуинтервал $[-3/2;\ 3/2)$. ◄

Если дан ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, то его радиус сходимости R определяется также по формуле (12.11), а интервалом сходимости будет интервал с центром в точке $x = x_0$: $(x_0 - R;\ x_0 + R)$.

Пример 3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^n\sqrt{n+1}}.$$

▶ Найдем радиус сходимости данного ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}\sqrt{n+2}}{2^n\sqrt{n+1}}\right) = 2\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} = 2,$$

т. е. ряд сходится в интервале (0; 4). При $x=0$ получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, который расходится, так как его члены больше членов расходящегося гармонического ряда, а при $x=4$ — ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, где $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0$, сходящийся по признаку Лейбница. Область сходимости данного ряда (0; 4]. ◀

Пример 4. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

▶ Находим радиус сходимости ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n!}:\frac{1}{(n+1)!}\right) = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Следовательно, данный ряд сходится на всей числовой прямой. Отсюда, в частности, с учетом необходимого признака сходимости ряда (см. § 12.1, теорему 1) получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ для любого конечного x. ◀

На всяком отрезке $[\alpha;\ \beta]$, лежащем внутри интервала сходимости, степенной ряд сходится равномерно, поэтому его сумма в интервале сходимости является непрерывной функцией. Степенные ряды можно почленно интегрировать и дифференцировать в их интервалах сходимости. Радиус сходимости при этом не изменяется.

Пример 5. Найти сумму ряда

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$

▶ При $|x|<1$ данный ряд сходится (так как $R=1$), значит, его можно почленно дифференцировать в интервале сходимости. Обозначив сумму ряда через $S(x)$, имеем

$$S'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n-2} + \ldots$$

Так как $|x|<1$, полученный ряд есть сумма членов убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=x^2$ и его сумма $S'(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Проинтегрировав ряд из производных, найдем сумму данного ряда:

$$S(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \quad (|x|<1). ◀$$

АЗ-12.3

1. Найти область сходимости каждого из следующих рядов:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\cdot 2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$;

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2+1}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4^n x^n}{3^n \sqrt{(n+1)^3}}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n-1)\cdot 4^n}$; е) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{2(n-1)}}{\sqrt{n^3-1}}$.

(*Ответ:* а) $-2 \leqslant x < 2$; б) $-1 < x < 1$; в) $-1/2 \leqslant x \leqslant 1/2$; г) $-3/2 \leqslant x \leqslant 3/2$; д) $-8 \leqslant x < 2$; е) $-\sqrt{2}/2 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}/2$.)

2. Найти область равномерной сходимости следующих рядов:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$.

3. Применив почленное интегрирование и дифференцирование, найти суммы указанных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$.

$\left(\text{\textit{Ответ:} а) } -\ln(1-x)\ (-1 \leqslant x < 1);\ \text{б) } \frac{1}{(x-1)^2}\ (|x| < 1).\right)$

Самостоятельная работа

1. 1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{7^{n-1} x^n}{5^n \sqrt{n^2-1}}$.

$\left(\text{\textit{Ответ:} } -\frac{5}{7} \leqslant x < \frac{5}{7}.\right)$

2. Найти сумму ряда $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \ldots + \frac{n}{x^n} + \ldots$

$\left(\text{\textit{Ответ:} } \frac{x}{(x-1)^2}\ (|x| > 1).\right)$

2. 1. Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{5^n \sqrt{n^3 - 0{,}5}}$ и исследовать сходимость на концах этого интервала. (*Ответ:* (1/2; 11/2), ряд сходится при $x = 1/2$ и $x = 11/2$.)

2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 x^2}}{n^2}$.

3. 1. Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 10^n x^{n-1}$ и исследовать сходимость на концах этого интервала. (*Ответ:* (−1/10; 1/10), ряд расходится при $x = \pm 1/10$.)

2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$.

12.3. ФОРМУЛЫ И РЯДЫ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Если функция $y = f(x)$ имеет производные в окрестности точки $x = x_0$ до $(n+1)$-го порядка включительно, то существует точка $c = x_0 + \theta(x - x_0)$ $(0 < \theta < 1)$, такая, что

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x), \qquad (12.12)$$

где $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

Формула (12.12) называется *формулой Тейлора* функции $y = f(x)$ для точки x_0, $R_n(x)$ — *остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа*. Многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называется *многочленом Тейлора* функции $y = f(x)$.

При $x_0 = 0$ приходим к частному случаю формулы (12.12):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \qquad (12.13)$$

где $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^n$; $c = \theta x$ $(0 < \theta < 1)$.

Формула (12.13) называется *формулой Маклорена* функции $y = f(x)$.

Пример 1. Разложить по степеням разности $x-1$ функцию $y = x^4 - 3x^2 + 2x + 2$.

▶ Для того чтобы воспользоваться формулой Тейлора при $x_0 = 1$, найдем:

$$y(1) = 2,\ y'(1) = (4x^3 - 6x^2 + 2)|_{x=1} = 0,$$
$$y''(1) = (12x^2 - 12x)|_{x=1} = 0,\ y'''(1) = (24x - 12)|_{x=1} = 12,$$
$$y^{IV}(1) = 24,\ y^{V}(x) = 0$$

и т. д.

Следовательно,

$$x^4 - 3x^2 + 2x + 2 = 2 + 2(x-1)^3 + (x-1)^4. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Записать многочлен Тейлора функции $y = \frac{1}{x}$ в точке $x_0 = 1$.

▶ Находим производные данной функции и их значения в точке $x_0 = 1$:

$$y(x)|_{x=1} = 1,\ y'(1) = -\left.\frac{1}{x^2}\right|_{x=1} = -1,$$
$$y''(1) = \left.\frac{2}{x^3}\right|_{x=1} = 2,\ y'''(1) = \left.\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}\right|_{x=1} = -6,$$
$$y^{IV}(1) = \left.\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{x^5}\right|_{x=1} = 24,\ \ldots,\ y^{(n)}(1) = (-1)^n \left.\frac{n!}{x^{n+1}}\right|_{x=1} = (-1)^n n!.$$

Следовательно,

$$P_n(x) = 1 - \frac{(x-1)}{1!} + \frac{2}{2!}(x-1)^2 - \frac{6}{3!}(x-1)^3 + \ldots +$$
$$+ (-1)^n \frac{n!}{n!}(x-1)^n = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \ldots + (-1)^n (x-1)^n.$$

Остаточный член формулы Тейлора для данной функции имеет вид

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^{n+1}}{(1+\theta(x-1))^{n+2}}\quad (0 < \theta < 1). \blacktriangleleft$$

Сформулируем *условие разложимости функции в ряд Тейлора. Если функция $f(x)$ дифференцируема в окрестности точки x_0 любое число раз и в некоторой окрестности этой точки* $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ *или*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0, \qquad (12.14)$$

то

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \qquad (12.15)$$

В частности, при $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad (12.16)$$

Ряд (12.15) называется *рядом Тейлора*, а ряд (12.16) — *рядом Маклорена.*

Условие (12.14) является необходимым и достаточным для того, чтобы ряд, построенный по схеме (12.15) или (12.16), сходился к функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки $x=x_0$. В каждом конкретном случае необходимо находить область сходимости ряда к данной функции.

Пример 3. Разложить в ряд Маклорена функцию $\operatorname{ch} x$ и найти область, в которой ряд сходится к данной функции.

▶ Находим производные функции $f(x)=\operatorname{ch} x$, $f'(x)=\operatorname{sh} x$, $f''(x)=\operatorname{ch} x$, $f'''(x)=\operatorname{sh} x$, ... Таким образом, $f^{(n)}(x)=\operatorname{ch} x$, если n — четное. и $f^{(n)}(x)=\operatorname{sh} x$, если n — нечетное. Полагая $x_0=0$, получаем: $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=1$, $f'''(0)=0$, ..., $f^{(n)}(0)=1$ при n четном и $f^{(n)}(0)=0$ при n нечетном. Подставим найденные производные в ряд (12.16). Имеем

$$\operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \tag{1}$$

Воспользовавшись условием (12.14), определим интервал, в котором ряд (1) сходится к данной функции.

Если n — нечетное, то

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\operatorname{ch}\theta x,$$

если же n — четное, то

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\operatorname{sh}\theta x.$$

Так как $0<\theta<1$, то $|\operatorname{ch}\theta x|=(e^{\theta x}+e^{-\theta x})/2\leqslant e^{|x|}$ и $|\operatorname{sh}\theta x|\leqslant e^{|x|}$. Значит,

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|}.$$

Но, как было установлено в примере 4 из 12.2, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$ при любом x. Следовательно, при любом x $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ и ряд (1) сходится к функции $\operatorname{ch} x$. ◀

Аналогично можно получить разложения в степенные ряды многих других функций:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\quad(-\infty<x<\infty), \tag{12.17}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\quad(-\infty<x<\infty), \tag{12.18}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$
$$(-\infty<x<\infty), \tag{12.19}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$
$$(-1<x\leqslant 1), \tag{12.20}$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots\quad(-1<x<1). \qquad (12.21)$$

Для каждого случая в скобках указана область, в которой степенной ряд сходится к соответствующей функции. Последний ряд, называемый *биномиальным*, на концах интервала сходимости ведет себя по-разному в зависимости от $m\in\mathbf{R}$: при $m\geqslant 0$ абсолютно сходится в точках $x=\pm 1$; при $-1<m<0$ расходится в точке $x=-1$ и условно сходится в точке $x=1$; при $m\leqslant -1$ расходится в точках $x=\pm 1$.

В общем случае разложение в степенные ряды основано на использовании рядов Тейлора или Маклорена. Но на практике степенные ряды многих функций можно найти формально, используя ряды (12.17) — (12.21) или формулу для суммы членов геометрической прогрессии. Иногда при разложении полезно пользоваться почленным дифференцированием или интегрированием рядов. В интервале сходимости ряды сходятся к соответствующим функциям.

Например, при разложении в степенной ряд функции $\cos\sqrt{x}$ в формулу (12.18) вместо x подставляем $\sqrt{x}$. Тогда

$$\cos\sqrt{x}=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{(2n)!}+\ldots$$

Полученный ряд сходится при любых $x\in\mathbf{R}$, но следует помнить, что функция $\cos\sqrt{x}$ не определена при $x<0$. Поэтому найденный ряд сходится к функции $\cos\sqrt{x}$ только в полуинтервале $0\leqslant x<\infty$.

Аналогично можно записать степенные ряды функций $f(x)=e^{-2x}$ и $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$:

$$e^{-2x}=1-\frac{2x}{1!}+\frac{4x^2}{2!}-\frac{8x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{2^nx^n}{n!}+\ldots,$$

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}+\ldots$$

Пример 4. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\dfrac{3}{(1-x)(1+2x)}$.

▶ Разложим данную функцию на сумму простейших рациональных дробей:

$$\frac{3}{(1-x)(1+2x)}=\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1+2x}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\quad(|x|<1), \qquad (1)$$

$$\frac{1}{1+2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^nx^n\quad(|2x|<1), \qquad (2)$$

то

$$\frac{3}{(1-x)(1+2x)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n 2^{n+1}) x^n. \qquad (3)$$

Так как ряд (1) сходится при $|x| < 1$, а ряд (2) — при $|x| < 1/2$, то ряд (3) сходится к данной функции при $|x| < 1/2$. ◀

Пример 5. Разложить в степенной ряд функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

▶ Очевидно, что

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} + \ldots$$

Полученный ряд сходится внутри отрезка $[-1;\ 1]$, значит, его можно почленно интегрировать на любом отрезке $[0;\ x] \subset (-1;\ 1)$. Следовательно,

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^{2(n-1)}\,dt,$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1},$$

т. е. получили ряд, сходящийся к данной функции при $|x| < 1$. ◀

АЗ-12.4

1. Разложить по степеням $x+1$ многочлен $f(x) = x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x + 1$.

2. Разложить в ряд по степеням x функцию $y = \frac{1}{x+1}$, непосредственно используя ряд Маклорена.

3. Разложить в ряд по степеням x указанную функцию и найти область сходимости полученного ряда:

а) e^{-x^2}; б) $x\cos 2x$; в) $1/\sqrt{4-x^2}$;

г) $\arcsin x$; д) $\frac{3x+5}{x^2-3x+2}$; е) $\cos^2 x$.

4. Разложить в ряд по степеням $x+2$ функцию $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+7}$.

5. Записать разложение функции $y = \ln(2+x)$ в ряд по степеням $1+x$.

6. Найти первые три члена разложения в степенной ряд функции, заданной уравнением $xy + e^x = y$, если известно, что $y = 1$ при $x = 0$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \ldots \right)$

Самостоятельная работа

1. 1. Найти первые три члена разложения функции $f(x) = \sqrt{x}$ в ряд по степеням $x - 4$.

2. Разложить в степенной ряд функцию $f(x) = \ln(1 - 3x)$ и найти область сходимости этого ряда. (*Ответ:* $-1/3 \leqslant x < 1/3$.)

2. 1. Найти разложение в степенной ряд функции $f(x) = x \sin 2x$.

2. Разложить в степенной ряд функцию $f(x) = \frac{3}{(1+x)(1-2x)}$ и найти область сходимости этого ряда. (*Ответ:* $|x| < 1/2$.)

3. 1. Разложить по степеням суммы $x + 1$ многочлен $f(x) = x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 3$.

2. Разложить в степенной ряд функцию $f(x) = \ln(1 + 2x)$ и найти область сходимости этого ряда. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ -\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{1}{2}. \right)$

12.4. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ В ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Вычисление значений функции. Пусть дан степенной ряд функции $y = f(x)$. Задача вычисления значения этой функции заключается в отыскании суммы ряда при заданном значении аргумента. Ограничиваясь определенным числом членов ряда, находим значение функции с точностью, которую можно устанавливать путем оценивания остатка числового ряда либо остаточного члена $R_n(x)$ формул Тейлора или Маклорена.

Пример 1. Вычислить $\ln 2$ с точностью $\delta = 0{,}0001$

▶ Известно, что степенной ряд

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \qquad (1)$$

при $x = 1$ сходится условно (см. § 12.1, пример 8). Для того чтобы вычислить $\ln 2$ с помощью ряда (1) с точностью $\delta = 0{,}0001$, необходимо взять не менее 10 000 его членов. Поэтому воспользуемся рядом, который получается в результате вычитания степенных рядов функций $\ln(1 + x)$ и $\ln(1 - x)$:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots\right) \qquad (2)$$

При $|x| < 1$ ряд (2) сходится абсолютно, так как его радиус сходимости $R = 1$, что легко устанавливается с помощью признака Д'Аламбера.

Поскольку $\frac{1+x}{1-x} = 2$ при $x = 1/3$, то, подставив это значение x в ряд, получим

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)3^{2n-1}} + \ldots\right).$$

Для вычисления $\ln 2$ с заданной точностью необходимо найти такое число n членов частичной суммы S_n, при котором сумма остатка $|r_n| < \delta$. В нашем случае

$$r_n = 2\left(\frac{1}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+3) \cdot 3^{2n+3}} + \ldots\right). \qquad (3)$$

Поскольку числа $2n+3$, $2n+5$, ... больше, чем $2n+1$, то, заменив их на $2n+1$, мы увеличим каждую дробь в формуле (3). Поэтому

$$r_n < \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{3^{2n+3}} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{2}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{2}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}} \frac{1}{1 - 1/9} = \frac{1}{4(2n+1) \cdot 3^{2n-1}}.$$

Путем подбора значений n находим, что для $n = 3$ $r_n < 0{,}00015$, при этом $\ln 2 = 0{,}6931$. ◀

Пример 2. Вычислить $\sqrt{e}$ с точностью $\delta = 0{,}001$.

▶ Воспользуемся разложением в степенной ряд функции e^x (см. формулу 12.17), в котором примем $x = 1/2$. Тогда получим

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2! \cdot 2^2} + \ldots + \frac{1}{n! \cdot 2^n} + \ldots$$

Остаток этого ряда

$$r_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)! \cdot 2^{n+k}} < \frac{1}{(n+1)! \cdot 2^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{(n+1)! \cdot 2^n},$$

так как $(n+1)! < (n+2)! < \ldots$ При $n = 4$ $r_n < \frac{1}{5! \cdot 2^4} < 0{,}001$.

Следовательно,

$$e^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} \approx 1{,}674.$$

Для определения числа членов ряда, обеспечивающих заданную точность вычисления, можно воспользоваться остаточным членом формулы Маклорена

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

где $0 < \theta < 1$; $x = 1/2$. Тогда при $n = 4$

$$\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{2(1/2)^{n+1}}{(n+1)!} < 0{,}001. \blacktriangleleft$$

Пример 3. Вычислить $\sin\frac{1}{2}$ с точностью $\delta = 10^{-3}$.

$\blacktriangleright$ Подставим в формулу (12.19) значение $x = 1/2$. Тогда

$$\sin\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3!\cdot 2^3} + \frac{1}{5! + 2^5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!\cdot 2^{2n-1}} + \ldots$$

Так как остаток знакочередующегося ряда $|r_n| \leqslant u_{n+1}$ (см. ряд (12.6) и следствие из признака Лейбница), то достаточно найти первый член u_{n+1}, для которого $u_{n+1} < \delta$. Тогда S_n даст значение функции требуемой точности. Очевидно, что уже третий член ряда $\frac{1}{5!\cdot 2^5} < 10^{-3}$, поэтому с точностью $\delta = 10^{-3}$

$$\sin\frac{1}{2} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{48} \approx 0{,}479. \blacktriangleleft$$

Пример 4. Вычислить $\sqrt[5]{34}$ с точностью $\delta = 10^{-3}$.

$\blacktriangleright$ Очевидно, что $\sqrt[5]{34} = \sqrt[5]{32+2} = 2(1 + 1/16)^{1/5}$. Воспользуемся биномиальным рядом (см. формулу (12.21) при $m = 1/5$, $x = 1/16$:

$$\left(1 + \frac{1}{16}\right)^{1/5} = 1 + \frac{1}{5}\,\frac{1}{16} + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)}{2}\,\frac{1}{16^2} +$$

$$+ \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)\left(\frac{1}{5} - 2\right)}{3!}\,\frac{1}{16^3} + \ldots = 1 + \frac{1}{80} - \frac{1}{3200} + \ldots =$$

$$= 1 + 0{,}0125 - 0{,}0003 + \ldots \approx 1{,}012,$$

поскольку уже третий член можно отбросить в силу того, что он меньше $\delta = 10^{-3}$ (см. следствие из признака Лейбница). Следовательно, $\sqrt[5]{34} = 2(1 + 1/16)^{1/5} \approx 2{,}024$. $\blacktriangleleft$

Вычисление интегралов. Так как степенные ряды сходятся равномерно на любом отрезке, лежащем внутри их интервалов сходимости, то с помощью разложений функций в степенные ряды можно находить неопределенные интегралы в виде степенных рядов и приближенно вычислять соответствующие определеные интегралы.

Пример 5. Вычислить $\int\limits_0^1 \sin(x^2)dx$ с точностью $\delta = 10^{-3}$.

$\blacktriangleright$ Воспользуемся формулой (12.19). Заменив в ней x на x^2, получим ряд

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \ldots$$

Он сходится на всей числовой прямой, поэтому его можно всюду почленно интегрировать. Следовательно,

$$\int_0^1 \sin(x^2)dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \ldots\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)(2n-1)!} + \ldots\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(4n-1)(2n-1)!} + \ldots \approx$$

$$\approx \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} = 0{,}3333 - 0{,}0381 = 0{,}295,$$

поскольку уже третий член полученного знакочередующегося ряда меньше $\delta = 10^{-3}$. ◀

Пример 6. Найти интеграл $\int \frac{\sin x}{x}dx$ в виде степенного ряда и указать область его сходимости.

▶ Воспользовавшись формулой (12.19), получим ряд для подынтегральной функции

$$\frac{1}{x}\sin x = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \ldots$$

Он сходится на всей числовой прямой, и, следовательно, его можно почленно интегрировать:

$$\int \frac{\sin x}{x}dx = C + x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \ldots + $$
$$+ (-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!} + \ldots$$

Так как при интегрировании степенного ряда его интервал сходимости не изменяется, то полученный ряд сходится также на всей числовой прямой. ◀

Приближенное решение дифференциальных уравнений. В случае, когда точно проинтегрировать дифференциальное уравнение с помощью элементарных функций не удается, его решение удобно искать в виде степенного ряда, например ряда Тейлора или Маклорена.

При решении задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{12.22}$$

используется ряд Тейлора

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \tag{12.23}$$

где $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, а остальные производные $y^{(n)}(x_0)$ ($n = 2, 3, \ldots$) находятся путем последовательного дифференцирования уравнения (12.22) и подстановки начальных данных в выражения для этих производных.

Пример 7. Найти пять первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2$, если $y(1) = 1$

▶ Из данного уравнения находим, что $y'(1) = 1 + 1 = 2$. Дифференцируем исходное уравнение:

$$y'' = 2x + 2yy', \; y''(1) = 6;$$
$$y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy'', \; y'''(1) = 22;$$
$$y^{IV} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''', \; y^{IV}(1) = 116$$

и т. д.

Подставляя найденные значения производных в ряд (12.23), получаем

$$y(x) = 1 + 2(x-1) + \frac{6(x-1)^2}{2} + \frac{22}{6}(x-1)^3 + \frac{116}{24}(x-1)^4 + \ldots =$$
$$= 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + \frac{11}{3}(x-1)^3 + \frac{29}{6}(x-1)^4 + \ldots \blacktriangleleft$$

Пример 8. Найти шесть первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'' - (1 + x^2)y = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0) = -2$, $y'(0) = 2$.

▶ Подставив в уравнение начальные условия, получим

$$y''(0) = 1 \cdot (-2) = -2.$$

Дифференцируя исходное уравнение, последовательно находим:

$$y''' = 2xy + (1 + x^2)y', \; y'''(0) = 2;$$
$$y^{IV} = 2y + 2xy' + 2xy' + (1 + x^2)y'', \; y^{IV}(0) = -6;$$
$$y^{V} = 6y' + 6xy'' + (1 + x^2)y''', \; y^{V}(0) = 14.$$

Подставляя найденные значения производных в ряд Маклорена, получаем

$$y(x) = -2 + 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{60}x^5 + \ldots \blacktriangleleft$$

Решение задачи Коши $y = \varphi(x)$ для дифференциального уравнения можно также искать в виде разложения в степенной ряд

$$y = \varphi(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \quad (12.24)$$

с неопределенными коэффициентами a_i $(i = 0, 1, \ldots, n, \ldots)$.

Пример 9. Использовав ряд (12.24), записать четыре первых ненулевых члена разложения решения задачи Коши $y' = x + y^2 - 1$, $y(1) = 2$.

▶ В ряде (12.24) $x_0 = 1$. Поэтому, положив $x = 1$, с учетом начального условия находим, что $a_0 = 2$. Продифференцируем ряд (12.24) и подставим полученную производную y', а также y в виде ряда (12.24) в данное дифференциальное уравнение. Тогда

$$y' = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots =$$
$$= x - 1 + (a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots)^2.$$

Теперь в правой и левой частях последнего равенства приравняем коэффициенты при одинаковых степенях разности $x - 1$ (т. е. при $(x-1)^0$, $(x-1)^1$ и $(x-1)^2$). Получаем простые уравнения:

$$a_1 = a_0^2, \; 2a_2 = 1 + 2a_0a_1, \; 3a_3 = a_1^2 + 2a_0a_2,$$

из которых, учитывая, что $a_0 = 2$, находим: $a_1 = 4$, $a_2 = 17/2$, $a_3 = 50/3$.

Следовательно, искомое разложение решения имеет вид

$$y=2+4(x-1)+\frac{17}{2}(x-1)^2+\frac{50}{3}(x-1)^3+\ldots \blacktriangleleft$$

АЗ-12.5

1. С помощью степенных рядов вычислить приближенно с точностью $\delta=0{,}001$ указанные величины:

а) $\sqrt[3]{e}$; б) $\sqrt[3]{10}$; в) $\cos 10°$; г) $\sqrt[10]{1027}$; д) $\ln 3/2$. (*Ответ:* а) 1,396; б) 2,154; в) 0,985; г) 2,001; д) 0,405.)

2. С помощью степенных рядов вычислить с точностью $\delta=0{,}001$ следующие определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{1/2}\sqrt{1+x^3}\,dx$; б) $\int\limits_0^1\cos\sqrt{x}\,dx$;

в) $\int\limits_0^4 e^{1/x}dx$; г) $\int\limits_0^{1/4}e^{-x^2}dx$.

(*Ответ:* а) 0,508; б) 0,764; в) 2,835; г) 0,245.)

3. Найти неопределенный интеграл в виде степенного ряда и указать область сходимости этого ряда:

а) $\int\frac{\cos x}{x}dx$; б) $\int\frac{e^x}{x}dx$.

4. Записать пять первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям:

а) $y'=e^y+xy,\ y(0)=0$;
б) $y'=1+x+x^2-2y^2,\ y(1)=1$;
в) $y''=x^2y-y',\ y(0)=1,\ y'(0)=0$;
г) $y''=x+y^2,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$.

Самостоятельная работа

1. 1. С помощью степенного ряда вычислить $\sin 1$ с точностью $\delta=0{,}001$. (*Ответ:* 0,841.)

2. Найти три первых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=x^2-y$, если $y(1)=1$.

2. 1. С помощью степенного ряда вычислить $\sqrt[3]{70}$ с точностью $\delta=0{,}001$. (*Ответ:* 4,125.)

2. Найти четыре первых члена разложения в сте-

пенной ряд решения дифференциального уравнения $y'' = x^2 - y$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

3. 1. С помощью степенного ряда вычислить $\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin 2x}{x} dx$ с точностью $\delta = 0{,}001$. (*Ответ:* 0,946.)

2. Найти три первые члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x^2 y + y^3$, если $y(0) = 1$.

12.5. РЯДЫ ФУРЬЕ

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{12.25}$$

где коэффициенты a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ определяются по формулам:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \end{aligned} \tag{12.26}$$

называется *рядом Фурье функции* $f(x)$. Отметим, что всегда $b_0 = 0$.

Функция $f(x)$ называется *кусочно-монотонной на отрезке* $[a; b]$, если этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов n $(a; x_1)$, $(x_1; x_2)$, ..., $(x_{k-1}; b)$ таким образом, чтобы в каждом из них функция была монотонна.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ периодическая (период $\omega = 2\pi$), кусочно-монотонная и ограниченная на отрезке $[-\pi; \pi]$, то ее ряд Фурье сходится в любой точке $x \in \mathbf{R}$ и его сумма*

$$S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

Из теоремы следует, что $S(x) = f(x)$ в точках непрерывности функции $f(x)$ и сумма $S(x)$ равна среднему арифметическому пределов слева и справа функции $f(x)$ в точках разрыва первого рода.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию (с периодом 2π):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

▶ Так как данная функция кусочно-монотонная и ограниченная, то она разлагается в ряд Фурье. Находим коэффициенты ряда:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} xdx=\frac{1}{\pi}\,\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\cos nxdx=\left|\begin{matrix} u=x, & dv=\cos nxdx, \\ du=dx, & v=\dfrac{1}{n}\sin nx \end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\bigg|_0^{\pi}-\int\limits_{0}^{\pi}\frac{1}{n}\sin nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{n^2}\cos nx\bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n-1),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n^2}\sin nx\bigg|_0^{\pi}\right)=$$

$$=-\frac{\pi}{\pi\cdot n}\cos n\pi=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\quad (n\in\mathbf{N}).$$

Подставляя найденные коэффициенты в ряд (12.25), получаем

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos((2n-1)x)+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx\right).$$

Этот ряд сходится к заданной периодической функции с периодом 2π при всех $x\neq(2n-1)\pi$. В точках $x=(2n-1)\pi$ сумма ряда равна $(\pi+0)/2=\pi/2$ (рис. 12.1). ◀

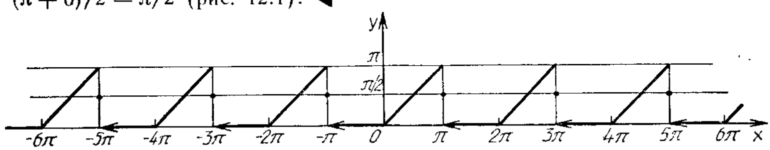


Рис. 12.1

Если функция $y=f(x)$ имеет период $2l$, то ее ряд Фурье записывается в виде

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right), \tag{12.27}$$

где

$$a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)ax,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx. \tag{12.28}$$

Теорема 2. Если периодическая функция с периодом $2l$ кусочно-монотонная и ограниченная на отрезке $[-l;\ l]$, то ее ряд Фурье (12.28) сходится для любого $x \in \mathbf{R}$ к сумме

$$S(x) = (f(x-0) + f(x+0))/2$$

(ср. с теоремой 1).

Пример 2. Найти разложение в ряд Фурье периодической функции с периодом 4;

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad -2 < x < 0, \\ 2 & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

(рис. 12.2).

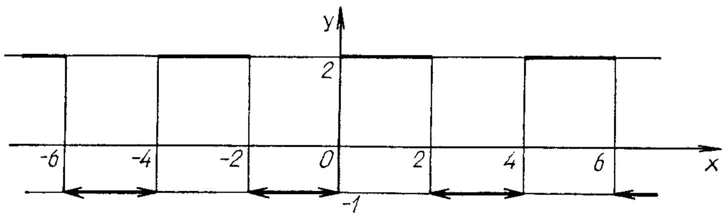


Рис. 12.2

▶ Находим коэффициенты ряда:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)dx + \int_{0}^{2} 2dx\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-x\Big|_{-2}^{0} + 2x\Big|_{0}^{2}\right) = \frac{1}{2}(-2+4) = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx + \int_{0}^{2} 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Big|_{-2}^{0} + \frac{4}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Big|_{0}^{2}\right) = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx + \int_{0}^{2} 2\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Big|_{-2}^{0} - \frac{4}{\pi n}(\cos \pi n - 1)\right) =$$
$$= -\frac{3}{\pi n}(\cos \pi n - 1) = -\frac{3}{\pi n}((-1)^n - 1).$$

Подставив найденные коэффициенты в ряд (12.28), получим

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right). \blacktriangleleft$$

Если периодическая функция $f(x)$ четная, то она разлагается в ряд Фурье только по косинусам, при этом

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx;$$

если же периодическая функция $f(x)$ нечетная, то она разлагается в ряд Фурье только по синусам и

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx.$$

Так как для всякой периодической функции $f(x)$ периода $2l$ и любого $\lambda\in\mathbf{R}$ справедливо равенство

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx=\int_{\lambda-l}^{\lambda+l} f(x)dx,$$

то коэффициенты ряда Фурье можно вычислять по формулам:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx,$$

где $n=0, 1, 2, \ldots$

Пусть функция $f(x)$ кусочно-монотонна и ограничена на отрезке $[a;\ b]\subset(-l;\ l)$. Чтобы разложить эту функцию в ряд Фурье, продолжим ее произвольным образом на интервал $(-l;\ l)$ так, чтобы она оставалась кусочно-монотонной и ограниченной в $(-l;\ l)$. Найденную функцию разложим в ряд Фурье, который сходится к заданной функции на отрезке $[a;\ b]$. Если заданную функцию продолжить на $(-l;\ l)$ четным образом, то получим ее разложение только по косинусам, если же продолжить ее нечетным образом, получим разложение только по синусам.

Например, функция $f(x)$, определенная на $[a;\ b]\subset(-l;\ l)$ и продолженная в $(-l;\ l)$ в соответствии с равенствами

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } -l<x<-b,\\ -f(x) & \text{при } -b\leqslant x\leqslant -a,\\ 0 & \text{при } -a<x<a,\\ f(x) & \text{при } a\leqslant x\leqslant b,\\ 0 & \text{при } b<x<l,\end{cases}$$

разлагается только по синусам. Сумма $S(x)$ ряда Фурье такой функции равна $f(x)$ внутри отрезка $[a;\ b]$, а $S(a)=f(a)/2$, $S(b)=f(b)/2$ согласно теореме 2 (рис. 12.3).

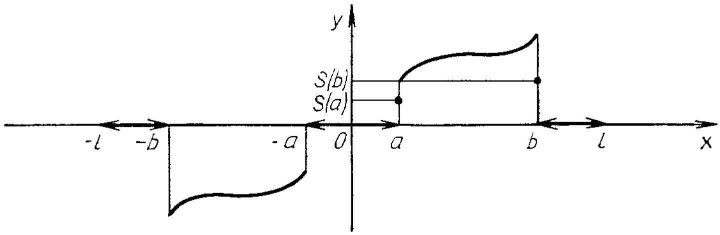


Рис. 12.3

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=|x|$ $(-2\leqslant x\leqslant 2)$.

▶ Так как данная функция четная, то она разлагается в ряд Фурье только по косинусам, т. е. $b_n=0$. Далее находим:

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=2,$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx=\int_0^2 x\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx=$$

$$=\frac{2x}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Big|_0^2+\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Big|_0^2=$$

$$=\frac{4}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n-1\right).$$

Отсюда следует, что $a_n=0$ при n четном, $a_n=-8/(\pi^2 n^2)$ при n нечетном.

Искомый ряд Фурье данной функции

$$f(x)=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right).$$

Его сумма равна заданной функции на отрезке $[-2;\ 2]$, а на всей числовой прямой эта сумма определяет периодическую функцию с периодом $\omega=4$ (рис. 12.4). ◀

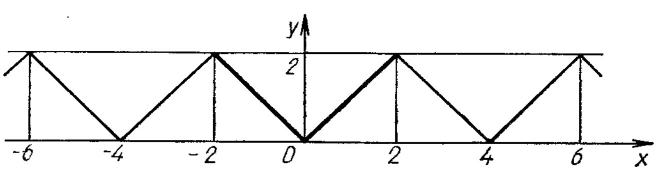


Рис. 12.4

Пример 4. Разложить в ряд по синусам функцию $f(x) = 2 - x$ на отрезке $[0;\ 2]$.

▶ Продолжим данную функцию на отрезок $[-2;\ 0]$ нечетным образом (рис. 12.5), т. е. положим

$$f(x) = \begin{cases} -2 - x \text{ при } -2 \leqslant x < 0, \\ \ \ 2 - x \text{ при } \ \ 0 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

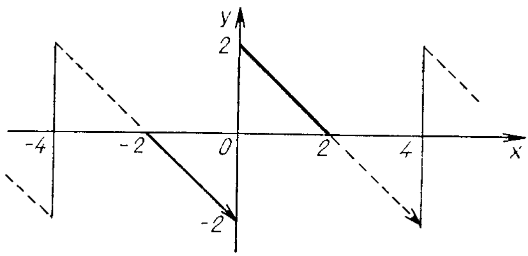


Рис. 12.5

Тогда $a_n = 0$ при $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, а

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx = \int_0^2 (2-x)\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = 2 - x, \ du = -dx, \\ dv = \sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx, \ v = -\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right) \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{2(2-x)}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx =$$

$$= \frac{4}{\pi n} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{\pi n}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в ряд Фурье, получаем

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right). \ ◀$$

Пример 5. Разложить в ряд Фурье функцию, график которой изображен на рис. 12.6 в виде сплошной линии.

▶ Продолжим данную функцию на отрезок $[-2;\ 0]$ четным образом и разложим функцию $f(x) = x$, $x \in [0;\ 2]$, по косинусам, т. е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right).$$

$$a_0=\frac{2}{2}\int\limits_0^2 x dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=2,$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int\limits_0^2 x\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx=\frac{2x}{n\pi}\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Big|_0^2-$$

$$-\frac{2}{\pi n}\int\limits_0^2 \sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx=\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Big|_0^2=$$

$$=\frac{4}{\pi^2 n^2}((-1)^n-1).$$

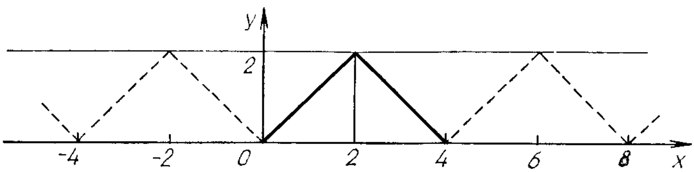


Рис. 12.6

Искомый ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right).$$

На отрезке $[0;\ 2]$ он представляет собой заданную функцию, а на всей числовой оси — периодическую функцию с периодом $\omega=4$ (см. рис. 12.6, штриховая и сплошная линии). ◀

Поскольку ряд Фурье сходится к значению соответствующей функции в точках, где функция непрерывна, то ряды Фурье часто используются для суммирования числовых рядов. Так, например, если в ряде Фурье функции, определенной в примере 5, положить $x=2$, то получим:

$$2=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\pi,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Пример 6. Разложить в ряд Фурье по косинусам кратных дуг функцию $y=x^2$ на отрезке $[0;\ \pi]$ и с помощью полученного ряда вычислить суммы числовых рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}.$$

▶ Разложим данную функцию в ряд по косинусам, продолжив ее на интервал $(-\pi; 0)$ четным образом и на всю числовую прямую периодически, с периодом 2π. Тогда:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\left. \frac{x^2}{n} \sin nx \right|_0^{\pi} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\pi} 2x \frac{1}{n} \sin nx dx \right) = - \frac{4}{\pi n} \left(- \left. \frac{x}{n} \cos nx \right|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx = \right.$$

$$= \left. \frac{4}{n^2} \cos nx \right|_0^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Получили ряд Фурье

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Так как продолженная функция непрерывна, то ее ряд Фурье сходится к заданной функции при любом значении x. Поэтому для $x = 0$ имеем

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2},$$

т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

При $x = \pi$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \blacktriangleleft$$

АЗ-12.6

1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{при} \quad -\pi < x \leqslant 0, \\ 2x & \text{при} \quad 0 < x < \pi, \end{cases}$$

имеющую период 2π.

$\left(\textit{Ответ:} \ \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + 3\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}.\right)$

2. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} \pi+2x & \text{при} \quad -\pi < x \leqslant 0, \\ -\pi & \text{при} \quad 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

$\left(\textit{Ответ:} \ -\frac{\pi}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x - \frac{1}{n}\sin nx\right).\right)$

3. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию (с периодом $\omega = 4$), если

$$f(x)=\begin{cases} 1+x & \text{при} \quad -2 < x \leqslant 0, \\ -1 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

$\left(\textit{Ответ:} \ -\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos\frac{\pi(2n-1)}{2}x - \right.\right.$

$\left.\left. - \frac{1}{n}\sin\frac{\pi n x}{2}\right).\right)$

4. Найти разложение в ряд Фурье функции $y = x^2$ на отрезке $[-\pi; \pi]$. Построить графики функции и суммы ряда. $\left(\textit{Ответ:} \ \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}.\right)$

Самостоятельная работа

1. Найти разложение в ряд Фурье функции $f(x) = -x$ на отрезке $[-2; 2]$. Построить графики данной функции и суммы ряда. $\left(\textit{Ответ:} \ 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx.\right)$

2. Найти разложение в ряд Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases} -2 & \text{при} \quad -\pi < x \leqslant 0, \\ 1 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Построить графики данной функции и суммы ряда. $\left(\textit{Ответ: } -1+\frac{6}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x.\right)$

3. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} -x & \text{при} \quad -\pi < x \leqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Построить графики данной функции и суммы ряда. $\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right).\right)$

АЗ-12.7

1. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x)=x^2$ в интервале $(0;\ \pi)$. Построить графики данной функции и суммы ряда. $\left(\textit{Ответ: } \frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^2}\left((-1)^n-1\right)\right)\sin nx.\right)$

2. Разложить в ряд Фурье по косинусам кратных дуг функцию $y=\sin x$ на отрезке $[0;\ \pi]$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{2}{\pi}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{1-(2n)^2}.\right)$

3. Разложить в ряд Фурье по синусам кратных дуг функцию $f(x)=1-x/2$ на отрезке $[0;\ 2]$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n x}{2}.\right)$

4. Разложить в ряд Фурье по косинусам кратных дуг функцию $f(x) = 1 - 2x$ на отрезке $[0;\ 1]$. $\left(\textit{Ответ:}\right.$ $\left.\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi(2n-1)x}{(2n-1)^2}.\right)$

5. Пользуясь разложением в ряд Фурье по синусам кратных дуг функции $f(x) = 1$ на отрезке $[0;\ \pi]$, найти сумму ряда $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \ldots$ (*Ответ:* $\pi/4$.)

Самостоятельная работа

1. Разложить в ряд Фурье по косинусам кратных дуг функцию $f(x) = 1 - x$ на отрезке $[0;\ 2]$. $\left(\textit{Ответ:}\right.$ $\left.\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cdot\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}x.\right)$

2. Разложить в ряд Фурье по синусам кратных дуг функцию $f(x) = \pi - x$ на отрезке $[0;\ \pi]$. $\left(\textit{Ответ:}\right.$ $\left.2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.\right)$

3. Разложить в ряд Фурье по косинусам кратных дуг функцию $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{x}$ на отрезке $[0;\ \pi]$. $\left(\textit{Ответ:}\right.$ $\left.\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}.\right)$

12.6. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 12

ИДЗ-12.1

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму.

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$. $\left(\textit{Ответ: } S = \frac{3}{4}.\right)$

1.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{5}{6}.\right)$

1.3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)(2n+7)}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{1}{10}.\right)$

1.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{5}{4}.\right)$

1.5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+5)(n+6)}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{1}{5}.\right)$

1.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 2^n}{10^n}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{3}{4}.\right)$

1.7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+7)(2n+9)}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{1}{14}.\right)$

1.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{12^n}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{1}{6}.\right)$

1.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+6)(n+7)}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{1}{7}.\right)$

1.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{15^n}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{3}{4}.\right)$

1.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+9)(n+10)}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{1}{10}.\right)$

1.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 3^n}{15^n}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{1}{4}.\right)$

1.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+7)(n+8)}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{1}{8}.\right)$

1.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 7^n}{14^n}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{7}{6}.\right)$

1.15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{1}{2}.\right)$

1.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 2^n}{14^n}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{5}{6}.\right)$

1.17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{1}{3}.\right)$

1.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{20^n}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{7}{12}.\right)$

1.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{1}{5}.\right)$

1.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 4^n}{20^n}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{1}{12}.\right)$

1.21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{1}{2}.\right)$

1.22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + 3^n}{21^n}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{2}{3}.\right)$

1.23. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{1}{6}.\right)$

1.24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 3^n}{21^n}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{1}{3}.\right)$

1.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{1}{6}.\right)$

1.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 8^n}{24^n}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{9}{14}.\right)$

1.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{1}{12}.\right)$

1.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n - 3^n}{24^n}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{5}{14}.\right)$

1.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)(3n+5)}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{1}{15}.\right)$

1.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n - 2^n}{18^n}$. $\left(\textit{Ответ:}\ S = \frac{7}{8}.\right)$

Исследовать на сходимость указанные ряды с положительными членами.

2

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+2)!}{n^5}$. (*Ответ:* расходится.)

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-1}{5^n (n+1)!}$. (*Ответ:* сходится.)

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n \left(\frac{1}{n}\right)^7$. (*Ответ:* сходится.)

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3^n}$. (*Ответ:* сходится.)

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n/2}}{3^n}$. (*Ответ:* расходится.)

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n+3)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3)}$. (*Ответ:* сходится.)

2.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n n^7$. (*Ответ:* сходится.)

2.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 7 \cdot 13 \cdots (6n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+1)}$. (*Ответ:* расходится.)

2.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(n+1)}{5^n}$. (*Ответ:* сходится.)

2.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^n}$. (*Ответ:* сходится.)

2.11. $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{2\pi}{3^n}$. (*Ответ:* сходится.)

2.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n/2}}{n!}$ (*Ответ:* сходится.)

2.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n (n+3)!}$. (*Ответ:* сходится.)

2.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdots (5n-4)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)}$. (*Ответ:* расходится.)

2.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+3)!}$. (*Ответ:* расходится.)

2.16. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5^n}$. (*Ответ:* сходится.)

2.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3)}{(n+1)!}$. (*Ответ:* сходится.)

2.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+3)!}$. (*Ответ:* сходится.)

2.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}$. (*Ответ:* расходится.)

2.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)}$. (*Ответ:* сходится.)

2.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3n-1) \sin \frac{\pi}{4^n}$. (*Ответ:* сходится.)

2.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!}$. (*Ответ:* сходится.)

2.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{\sqrt{n \cdot 7^n}}$. (*Ответ:* сходится.)

2.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}$. (*Ответ:* расходится.)

2.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4n!}$. (*Ответ:* сходится.)

2.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdots (5n-3)}$. (*Ответ:* сходится.)

2.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)!}$. (*Ответ:* расходится.)

2.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^3}{(2n)!}$. (*Ответ:* сходится.)

2.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n(2n-1)}$. (*Ответ:* сходится.)

2.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n \cdot 2^n}}$. (*Ответ:* сходится.)

3

3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$. (*Ответ:* расходится.)

3.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$. (*Ответ:* сходится.)

3.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1}\right)^n$. (*Ответ:* сходится.)

3.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+2))^n}$. (*Ответ:* сходится.)

3.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2^n}\right)^{3n}$. (*Ответ:* сходится.)

3.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+5n+8}{3n^2-2}\right)^n$. (*Ответ:* сходится.)

3.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{5^n}\right)^n$. (*Ответ:* сходится.)

3.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n/(n+1))^{n^2}}{2^n}$. (*Ответ:* сходится.)

3.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^{2n}}$. (*Ответ:* сходится.)

3.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{5^n}\right)^{3n}$. (*Ответ:* сходится.)

3.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+3))^n}$. (*Ответ:* сходится.)

3.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+4n+5}{6n^2-3n-1}\right)^{n^2}$. (*Ответ:* сходится.)

3.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n^2}$. (*Ответ:* сходится.)

3.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{\pi}{n^3}\right)^{2n}$. (*Ответ:* сходится.)

3.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}$. (*Ответ:* сходится.)

3.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{((n+1)/n)^{n^2}}$. (*Ответ:* расходится.)

3.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^{3^n}}$. (*Ответ:* сходится.)

3.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}$. (*Ответ:* сходится.)

3.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin\frac{1}{3^n}\right)^{n}$. (*Ответ:* сходится.)

3.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^2}$. (*Ответ:* сходится.)

3.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2-n-1}{7n^2+3n+4}\right)^{n}$. (*Ответ:* сходится.)

3.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n}$. (*Ответ:* сходится.)

3.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin\frac{1}{3n}\right)^{2n}$. (*Ответ:* сходится.)

3.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{5n}$. (*Ответ:* сходится.)

3.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{((n+1)/n)^{n^2}}{5^n}$. (*Ответ:* сходится.)

3.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n+1}\right)^n$. (*Ответ:* сходится.)

3.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{5n+1}\right)^n$. (*Ответ:* сходится.)

3.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n-1}\right)^{2n}$. (*Ответ:* сходится.)

3.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(\ln(n+5))^2}$. (*Ответ:* сходится.)

3.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{n+3}{2n+5}\right)^n$. (*Ответ:* сходится.)

4

4.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{4n^2+1}\right)^2$.

4.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)\ln(3n+2)}$.

4.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln^3(2n+1)}$.

4.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(4n+5)^3}}$.

4.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)\ln^2(3n+4)}$.

4.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(7n-5)^5}}$.

4.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7+n}{49+n^2}\right)^2$.

4.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln(3n-1)}$.

4.9. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$.

4.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2)\ln(5n-2)}$.

4.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6+n}{36+n^2}$.

4.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{(3+7n)^{10}}}$.

4.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{(3n-1)^4}}$.

4.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$.

4.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10n+5)\ln(10n+5)}$.

4.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{(2n+3)^7}}$.

4.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5+n}{25+n^2}$.

4.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln(n+3)\ln(\ln(n+3))}$.

4.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+2n)\ln^5(3+2n)}$.

4.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[8]{(4+9n)^5}}$.

4.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(9n-4)\ln^2(9n-4)}$.

4.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3+n}{9+n^2-2n}$.

4.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+8)\ln^3(5n+8)}$.

4.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[8]{(7n-5)^3}}$

4.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)\ln(n+4)\ln(\ln(n+4))}$.

4.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+8n)\ln^3(3+8n)}$.

4.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(4n-3)^3}}$.

4.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10n+3)\ln^2(10n+3)}$.

4.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{4+n^2-n}$.

4.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\ln(n+5)\ln(\ln(n+5))}$.

5

5.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$. (*Ответ:* сходится.)

5.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$. (*Ответ:* сходится.)

5.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+2}$. (*Ответ:* расходится.)

5.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+3n}}$. (*Ответ:* расходится.)

5.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. (*Ответ:* расходится.)

5.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)}$. (*Ответ:* расходится.)

5.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. (*Ответ:* расходится.)

5.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$. (*Ответ:* расходится.)

5.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^n}$. (*Ответ:* сходится.)

5.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)}$. (*Ответ:* расходится.)

5.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^2+1}$. (*Ответ:* расходится.)

5.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+3)}$. (*Ответ:* расходится.)

5.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^2+5}$. (*Ответ:* расходится.)

5.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 - n + 1}$. (*Ответ:* сходится.)

5.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^{n-1}}$. (*Ответ:* сходится.)

5.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+4)}$. (*Ответ:* расходится.)

5.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2\pi}{3^n}$. (*Ответ:* сходится.)

5.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$. (*Ответ:* сходится.)

5.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^{2n}}$. (*Ответ:* сходится.)

5.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \cdot 3^n}$. (*Ответ:* сходится.)

5.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n\sqrt[3]{n}}$. (*Ответ:* расходится.)

5.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n-1}$. (*Ответ:* расходится.)

5.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+2}$. (*Ответ:* расходится.)

5.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{4n}$. (*Ответ:* расходится.)

5.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$. (*Ответ:* сходится.)

5.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+5}$. (*Ответ:* сходится.)

5.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$. (*Ответ:* сходится.)

5.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+4}$. (*Ответ:* расходится.)

5.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^2+3}$. (*Ответ:* сходится.)

5.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+6)}$. (*Ответ:* сходится.)

6

6.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$.

6.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$.

6.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n^2+1}$.

6.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}$.

6.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}$.

6.6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^7 n}$.

6.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$.

6.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+3}$.

6.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{7^2}$.

6.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-1)(6n+3)}$.

6.11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

6.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2}$.

6.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+n}$.

6.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2}$.

6.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{3^n}$.

6.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$.

6.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

6.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n!}$.

6.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+5}$.

6.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+3)}}$.

6.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$.

6.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(2n)!}$.

6.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(7n-1)}$.

6.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

6.25. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{7n+1}}$.

6.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{9^n}$.

6.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-7}{3n^4+5n-2}$.

6.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+5)}$.

6.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+7}\right)^{n^2}$.

6.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{(n-1)!}$.

Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость знакочередующиеся ряды.

7

7.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$. (*Ответ:* абсолютно сходится.)

7.2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$. (*Ответ:* условно сходится.)

7.3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$. (*Ответ:* условно сходится.)

7.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n}{6n+5}$. (*Ответ:* расходится.)

7.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \dfrac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$. (*Ответ:* абсолютно сходится.)

7.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. (*Ответ:* условно сходится.)

7.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n^2}$. (*Ответ:* абсолютно сходится.)

7.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{(2n+1)\,n}$. (*Ответ:* абсолютно сходится.)

7.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. (*Ответ:* условно сходится.)

7.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$. (*Ответ:* абсолютно сходится.)

7.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2n+1}{n\,(n+1)}$. (*Ответ:* условно сходится.)

7.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \dfrac{n+5}{3^n}$. (*Ответ:* абсолютно сходится.)

7.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n}{3n-1}$. (*Ответ:* расходится.)

7.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}}{2n-1}$. (*Ответ:* условно сходится.)

7.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)\,3^n}$. (*Ответ:* абсолютно сходится.)

7.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$. (*Ответ:* условно сходится.)

7.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n}$. (*Ответ:* расходится.)

7.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2+1}$. (*Ответ:* абсолютно сходится.)

7.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$. (*Ответ:* абсолютно сходится.)

7.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 5^n}$. (*Ответ:* абсолютно сходится.)

7.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$. (*Ответ:* абсолютно сходится.)

7.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{\ln(n+1)}$. (*Ответ:* условно сходится.)

7.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{5n(n+1)}$. (*Ответ:* условно сходится.)

7.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$. (*Ответ:* условно сходится.)

7.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^n}{(2n+1)^n}$. (*Ответ:* абсолютно сходится.)

7.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+5}}$. (*Ответ:* условно сходится.)

7.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{3^n}$. (*Ответ:* абсолютно сходится.)

7.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+7}\right)^n$. (*Ответ:* абсолютно сходится.)

7.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!}$. (*Ответ:* абсолютно сходится.)

7.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$. (*Ответ:* условно сходится.)

8

8.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$.

8.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}$.

8.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$.

8.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$.

8.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n}$.

8.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n}{n^4}$.

8.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{3^n}$.

8.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^3}$.

8.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$.

8.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(\ln(n+1))^n}$.

8.11. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$.

8.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

8.13. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}$.

8.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{(n+1)!}$.

8.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{12^n}$.

8.16. $\sum\limits_{n=1}^{\rho} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)^{3/2}}$.

8.17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{9n-1}$.

8.18. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

8.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(5n+1)^n}$.

8.20. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{7^n}$.

8.21. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2}$.

8.22. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{n^2+1}$.

8.23. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{8^n}$.

8.24. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{2n+2}$.

8.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(n+4)}$.

8.26. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^n \frac{\pi}{6n}$.

8.27. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+2)}$.

8.28. $\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \frac{n-3}{n^2-1}$.

8.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}\,\sqrt[5]{(n+1)^3}}$.

8.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4n}{5n+1}\right)^n$.

Решение типового варианта

1. Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ и найти его сумму.

▶ Общий член $a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ данного ряда представим в виде суммы простейших дробей:

$$a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n^2} + \frac{C}{n+1} + \frac{D}{(n+1)^2},$$

$$2n+1 = An(n+1)^2 + B(n+1)^2 + Cn^2(n+1) + Dn^2,$$

$$\left.\begin{array}{r|l} n=0 & B=1, \\ n=-1 & D=-1, \\ n^3 & 0=A+C, \\ n & 2=A+2B, \end{array}\right\} \Rightarrow A=0,\ C=0,$$

поэтому $a_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$.

Найдем сумму первых n членов ряда:

$$S_n = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Далее вычислим сумму ряда:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1,$$

т. е. ряд сходится и его сумма $S = 1$. ◀

Исследовать на сходимость указанные ряды с положительными членами.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

▶ Воспользуемся признаком Д'Аламбера. Имеем: $a_n = \frac{n!}{n^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1} n!} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} = \frac{1}{e} < 1,$$

т. е. данный ряд сходится. ◀

3. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 3^n}$.

▶ Согласно радикальному признаку Коши, имеем:

$$a_n = \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 3^n}, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 3^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n\cdot 3} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1,$$

т. е. исходный ряд сходится. ◀

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}}$

► Воспользуемся интегральным признаком Коши. Для этого исследуем несобственный интеграл:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{xdx}{2^{x^2}} = \lim_{\beta \to \infty} \int\limits_1^{\beta} x \cdot 2^{-x^2} dx = \lim_{\beta \to \infty} \left(-\frac{1}{2} \int\limits_1^{\beta} 2^{-x^2} d(-x^2) \right) =$$

$$= \lim_{\beta \to \infty} \left(-\frac{1}{2} \frac{2^{-x^2}}{\ln 2} \right) \Bigg|_1^{\beta} = \lim_{\beta \to \infty} \left(-\frac{1}{2 \ln 2 \cdot 2^{\beta^2}} + \frac{1}{4 \ln 2} \right) = \frac{1}{4 \ln 2}$$

Поскольку данный интеграл сходится, то сходится и исследуемый ряд. ◄

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4\sqrt{n}}$.

► Исследуем данный ряд с помощью предельного признака сравнения, который состоит в следующем. Если $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, $k \in \mathbf{R}$, $k \neq 0$, то ряды с такими общими членами ведут себя одинаково в смысле сходимости: или оба сходятся, или оба расходятся. Имеем $a_n = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4\sqrt{n}}$. В качестве ряда, с которым будем сравнивать исходный ряд, возьмем гармонический расходящийся ряд с общим членом $b_n = 1/n$. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\left(\frac{\pi^2}{16n} \right) \cdot \frac{16}{\pi^2}} = \frac{\pi^2}{16} = k \neq 0.$$

(Здесь мы использовали первый замечательный предел.)

Итак, исследуемый ряд расходится. ◄

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \frac{1}{n} \right)$.

► Для этого ряда необходимый признак сходимости рядов ($\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$) не выполняется. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \sin\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0,$$

т. е. исходный ряд расходится. ◀

Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость знакочередующиеся ряды.

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 7^n}$.

▶ Воспользуемся признаком Лейбница. Имеем:

$$a_n = \frac{1}{n \cdot 7^n}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \cdot 7^n} = 0,$$

т. е. данный ряд сходится.

Исследуем ряд, составленный из абсолютных величин членов исходного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 7^n}. \qquad (1)$$

Применим признак Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 7^n}{(n+1) \cdot 7^{n+1}} = \frac{1}{7} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{7} < 1,$$

т. е. ряд (1) сходится. Следовательно, исходный ряд абсолютно сходится. ◀

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 + (-1)^n}{n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

▶ Для ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ выполняется признак Лейбница. Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — гармонический (расходящийся). Тогда ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится условно. Сумма сходящегося и расходящегося рядов представляет собой расходящийся ряд. Значит, исследуемый ряд расходится. ◀

ИДЗ-12.2

Найти область сходимости ряда.

1

1.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2+1}$. $\left(Ответ: \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].\right)$

1.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{2^{n-1} \cdot 3^n}$. (*Ответ:* $(-6; 6)$.)

1.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n}$. (*Ответ:* $(-2; 2)$.)

1.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$. (*Ответ:* $[-2; 2)$.)

1.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. (*Ответ:* $[-1; 1)$.)

1.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. (*Ответ:* $[-1; 1)$.)

1.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{2n-1}$ $\left(Ответ: \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).\right)$

1.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$. $\left(Ответ: \left(\frac{1}{e}; e\right).\right)$

1.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$. (*Ответ:* $[-1; 1]$.)

1.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n(n^2+1)}$. (*Ответ:* $[-2; 2]$.)

1.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n(n+1)x^n$. (*Ответ:* $(-1; 1)$.)

1.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$. (*Ответ:* $(-2;\ 2)$.)

1.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$. $\left(\textit{Ответ: } \left[-\frac{1}{10};\ \frac{1}{10}\right].\right)$

1.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$. (*Ответ:* $(-e,\ e)$.)

1.15. $\sum\limits_{n}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}n}$. (*Ответ:* $[-5;\ 5)$.)

1.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. (*Ответ:* $[-1;\ 1]$.)

1.17. $\sum\limits_{n=}^{\infty} \frac{(0,1)^n x^{2n}}{n}$. (*Ответ:* $(-\sqrt{10};\ \sqrt{10})$.)

1.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lg x)^n$. $\left(\textit{Ответ: } \left(\frac{1}{10};\ 10\right).\right)$

1.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$. (*Ответ:* $(-5;\ 5)$.)

1.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}$. $\left(\textit{Ответ: } \left[-\frac{\sqrt{3}}{5};\ \frac{\sqrt{3}}{5}\right].\right)$

1.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$. (*Ответ:* $[-1;\ 1]$.)

1.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$. $\left(\textit{Ответ: } \left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right).\right)$

1.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n^3}$. (*Ответ:* $[-1;\ 1]$.)

1.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \left[-\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right).\right)$

1.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{3n-1}}$. $(\textit{Ответ:}\ [-2;\ 2).)$

1.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{2n-1}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right).\right)$

1.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}$. $(\textit{Ответ:}\ (-2;\ 2).)$

1.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{6^n \sqrt[3]{n}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \left[-\frac{6}{5};\ \frac{6}{5}\right).\right)$

1.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$. $(\textit{Ответ:}\ [-1;\ 1).)$

1.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \frac{x^n}{5^n}$. $(\textit{Ответ:}\ (-5e;\ 5e).)$

2

2.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\, x^n}{n!}$.

2.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n/2} x^n}{(n+1)!}$.

2.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n^n}$.

2.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (nx)^n$.

2.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}$.

2.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$

2.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$.

2.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{2^n}$.

2.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$.

2.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$.

2.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

2.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{x^n}$.

2.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{nx^n}}$.

2.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x-2)^n}$.

2.15. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n n \ln n}$.

2.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n}$.

2.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt{2n+1}}$.

2.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(nx)^n}$.

2.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

2.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

2.21. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$.

2.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$.

2.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,x^n}$.

2.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!x^n$.

2.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$.

2.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$.

2.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$.

2.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{e^{nx}}$.

2.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$.

2.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

3

3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$. (*Ответ:* $3 \leqslant x < 5$.)

3.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n \ln(1+1/n)}$. (*Ответ:* $1 < x < 3$.)

3.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}$. (*Ответ:* $0 < x < 4$.)

3.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$. (*Ответ:* $0 < x < 2$.)

3.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^n}{n^2}$. (*Ответ:* $-9 \leqslant x \leqslant -7$.)

3.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2+x)^n$. (*Ответ:* $-3 < x < -1$.)

3.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$. (*Ответ:* $-1 \leqslant x < 3$.)

3.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\,\sqrt{n^2+1}}$. (*Ответ:* $-6 \leqslant x \leqslant -4$.)

3.9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} (x+2)^{n^2}$. (*Ответ:* $-2{,}5 < x < -1{,}5$.)

3.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \ln(n+1)}$. (*Ответ:* $-1 \leqslant x < 3$.)

3.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+10)^n}{n^n}$. (*Ответ:* $-e-10 < x < e-10$.)

3.12. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^{n^2}}{(n+1)^n}$. (*Ответ:* $-6 \leqslant x \leqslant -4$.)

3.13. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln^3(n+1)}}{n+1}(x+1)^n$. (*Ответ:* $0 \leqslant x < 2$.)

3.14. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2-x)^n \sin\frac{\pi}{2^n}$. (*Ответ:* $0<x<4$.)

3.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3-2x)^n}{n-\ln^2 n}$. (*Ответ:* $1<x\leqslant 2$.)

3.16. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$. (*Ответ:* $1\leqslant x<5$.)

3.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$. (*Ответ:* $1\leqslant x\leqslant 3$.)

3.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$. (*Ответ:* $0\leqslant x<4$.)

3.19. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$. (*Ответ:* $1<x\leqslant 3$.)

3.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\cdot 4^n}$. (*Ответ:* $-7<x<-3$.)

3.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{2^{n-1}n^n}$. (*Ответ:* $-2<x<0$.)

3.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$. (*Ответ:* $-4\leqslant x\leqslant -2$.)

3.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$. (*Ответ:* $-3\leqslant x\leqslant -1$.)

3.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}$. (*Ответ:* $1\leqslant x\leqslant 3$.)

3.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$. (*Ответ:* $2<x<4$.)

3.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$. (*Ответ:* $1 < x \leqslant 3$.)

3.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$. (*Ответ:* $-2 \leqslant x < 8$.)

3.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$. $\left(\textit{Ответ:} \ -\frac{5}{4} < x < \frac{13}{4}.\right)$

3.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$. (*Ответ:* $2 < x < 4$.)

3.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}$. (*Ответ:* $2 < x \leqslant 8$.)

4

Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$. Указать область сходимости полученного ряда к этой функции.

4.1. $f(x) = \cos 5x$. $\left(\textit{Ответ:} \ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 5^{2n} x^{2n}}{(2n)!},\ |x| < \infty.\right)$

4.2. $f(x) = x^3 \operatorname{arctg} x$. $\left(\textit{Ответ:} \ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^{2n+2}}{2n-1},\ |x| \leqslant 1.\right)$

4.3. $f(x) = \sin x^2$. $\left(\textit{Ответ:} \ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^{4n-2}}{(2n-1)!},\ |x| < \infty.\right)$

4.4. $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$. $\left(\textit{Ответ:} \ \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+2},\ |x| < 1.\right)$

4.5. $f(x) = \cos \dfrac{2x^3}{3}$. $\left(\textit{Ответ:} \ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 2^{2n} x^{6n}}{3^{2n}(2n)!},\ |x| < \infty.\right)$

4.6. $f(x)=\frac{2}{1-3x^2}$. $\left(\text{Ответ: } 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n x^{2n},\ |x|<\frac{1}{\sqrt{3}}.\right)$

4.7. $f(x)=e^{3x}$. $\left(\text{Ответ: } \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!},\ |x|<\infty.\right)$

4.8. $f(x)=\frac{1}{1+x}$. $\left(\text{Ответ: } \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,\ |x|<1.\right)$

4.9. $f(x)=\operatorname{ch}(2x^3)$. $\left(\text{Ответ: } \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{6n}}{n!},\ |x|<\infty.\right)$

4.10. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{e^x}}$. $\left(\text{Ответ: } \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n n!},\ |x|<\infty.\right)$

4.11. $f(x)=\operatorname{sh} x$. $\left(\text{Ответ: } \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},\ |x|<\infty.\right)$

4.12. $f(x)=e^{-x^4}$. $\left(\text{Ответ: } \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{n!},\ |x|<\infty.\right)$

4.13. $f(x)=2^{-x^2}$. $\left(\text{Ответ: } \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^n 2}{n!} x^{2n},\ |x|<\infty.\right)$

4.14. $f(x)=5^x$. $\left(\text{Ответ: } \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \ln^n 5}{n!},\ |x|<\infty.\right)$

4.15. $f(x)=x\cos\sqrt{x}$. $\left(\text{Ответ: } \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(2n)!},\right.$ $\left.0\leqslant x<\infty.\right)$

4.16. $f(x)=\frac{\sin 3x}{x}$. $\left(\text{Ответ: } \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot 3^{2n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-2}\right.$ $\left.|x|<\infty.\right)$

Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности указанной точки x_0. Найти область сходимости полученного ряда к этой функции.

4.17. $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=-2$. $\left(\text{Ответ: } -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n},\right.$ $\left.-4<x<0.\right)$

4.18. $f(x)=\frac{1}{x+3}$, $x_0=-2$. $\left(\text{Ответ: } \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+2)^n,\right.$ $\left.-3<x<-1.\right)$

4.19. $f(x)=e^x$, $x_0=1$. $\left(\text{Ответ: } e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!},\ |x|<\infty.\right)$

4.20. $f(x)=\frac{1}{2x+5}$, $x_0=3$.

$\left(\text{Ответ: } \frac{1}{11}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{11}\right)^n(x-3)^n,\ -\frac{5}{2}<x<\frac{17}{2}.\right)$

4.21. $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$, $x_0=1$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}(x-1)^n,\right.$ $\left.-1<x<3.\right)$

4.22. $f(x)=\sin\frac{\pi x}{4}$, $x_0=2$.

$\left(\text{Ответ: } \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}\frac{(x-2)^{2n}}{(2n)!},\ |x|<\infty.\right)$

4.23. $f(x)=\ln(5x+3)$, $x_0=\frac{2}{5}$.

$\left(\text{Ответ: } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 5^n}{n}\left(x+\frac{2}{5}\right)^n,\ -\frac{7}{5}<x\leqslant\frac{3}{5}.\right)$

4.24. $f(x)=\ln\frac{1}{x^2-2x+2}$, $x_0=1$. $\left(\textit{Ответ:}\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x-1)^{2n},\ 0\leqslant x\leqslant 2.\right)$

4.25. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4+x}}$, $x_0=-3$.

$\left(\textit{Ответ:}\ 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!}{2^n n!}(x+3)^n,\ -4<x\leqslant -2.\right)$

4.26. $f(x)=\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{n!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n,\ |x|<\infty.\right)$

4.27. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, $x_0=2$.

$\left(\textit{Ответ:}\ 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}(x-2)^n,\ 1<x\leqslant 3.\right)$

4.28. $f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}$, $x_0=-2$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{6\cdot 3^n}-\frac{1}{10\cdot 5^n}\right)(x+2)^n\right),\ -5<x<1.\right)$

4.29. $f(x)=\sin x$, $x_0=a$. $\left(\textit{Ответ:}\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(a+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x-a)^n,\ |x|<\infty.\right)$

4.30. $f(x)=\ln(5x+3)$, $x_0=1$. $\left(\textit{Ответ:}\ \ln 8+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{5}{8}\right)^n(x-1)^n,\ -\frac{3}{5}<x\leqslant\frac{13}{5}.\right)$

5. Вычислить указанную величину приближенно с заданной степенью точности α, воспользовавшись разложением в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции.

5.1. e, $\alpha = 0{,}0001$. (*Ответ:* 2,7183.)

5.2. $\sqrt[5]{250}$, $\alpha = 0{,}01$. (*Ответ:* 3,017.)

5.3. $\sin 1$, $\alpha = 0{,}00001$. (*Ответ:* 0,84147.)

5.4. $\sqrt{1{,}3}$, $\alpha = 0{,}001$. (*Ответ:* 1,140.)

5.5. $\operatorname{arctg}\frac{\pi}{10}$, $\alpha = 0{,}001$. (*Ответ:* 0,304.)

5.6. $\ln 3$, $\alpha = 0{,}0001$. (*Ответ:* 1,0986.)

5.7. $\operatorname{ch} 2$, $\alpha = 0{,}0001$. (*Ответ:* 3,7622.)

5.8. $\lg e$, $\alpha = 0{,}0001$. (*Ответ:* 0,4343.)

5.9. π, $\alpha = 0{,}00001$. (*Ответ:* 3,14159.)

5.10. e^2, $\alpha = 0{,}001$. (*Ответ:* 7,389.)

5.11. $\cos 2°$, $\alpha = 0{,}001$. (*Ответ:* 0,999.)

5.12. $\sqrt[3]{80}$, $\alpha = 0{,}001$. (*Ответ:* 4,309.)

5.13. $\ln 5$, $\alpha = 0{,}001$. (*Ответ:* 1,609.)

5.14. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $\alpha = 0{,}001$. (*Ответ:* 0,464.)

5.15. $\sqrt[6]{738}$, $\alpha = 0{,}001$. (*Ответ:* 3,006.)

5.16. $\sqrt[3]{e}$, $\alpha = 0{,}00001$. (*Ответ:* 1,3956.)

5.17. $\sin 1°$, $\alpha = 0{,}0001$. (*Ответ:* 0,0175.)

5.18. $\sqrt[3]{8{,}36}$, $\alpha = 0{,}001$. (*Ответ:* 2,030.)

5.19. $\ln 10$, $\alpha = 0{,}0001$. (*Ответ:* 2,3026.)

5.20. $\arcsin\frac{1}{3}$, $\alpha = 0{,}001$. (*Ответ:* 0,340.)

5.21. $\lg 7$, $\alpha = 0{,}001$. (*Ответ:* 0,8451.)

5.22. $\sqrt{e}$, $\alpha = 0{,}0001$. (*Ответ:* 1,6487.)

5.23. $\cos 10°$, $\alpha = 0{,}0001$. (*Ответ:* 0,9848.)

5.24. $\frac{1}{\sqrt[3]{30}}$, $\alpha = 0{,}001$. (*Ответ:* 0,302.)

5.25. $\sqrt[10]{1080}$, $\alpha = 0{,}001$. (*Ответ:* 2,031.)

5.26. $\frac{1}{e}$, $\alpha = 0{,}0001$. (*Ответ:* 0,3679.)

5.27. $\sin\frac{\pi}{100}$, $\alpha = 0{,}0001$. (*Ответ:* 0,0314.)

5.28. $\sqrt[4]{90}$, $\alpha = 0{,}001$. (*Ответ:* 3,079.)

5.29. $\frac{1}{\sqrt[7]{136}}$, $\alpha = 0{,}001$. (*Ответ:* 0,496.)

5.30. $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$, $\alpha = 0{,}001$. (*Ответ:* 0,716.)

6. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

6.1. $\int\limits_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x})\,dx$. (*Ответ:* 0,070.)

6.2. $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2}\right)dx$. (*Ответ:* 0,162.)

6.3. $\int\limits_0^{0,2} \sqrt{x}e^{-x}dx$. (*Ответ:* 0,054.)

6.4. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$. (*Ответ:* 0,487.)

6.5. $\int\limits_0^{0,2} \sqrt{x}\cos x\,dx$. (*Ответ:* 0,059.)

6.6. $\int\limits_0^{0,5} \ln(1+x^3)\,dx$. (*Ответ:* 0,015.)

6.7. $\int\limits_0^1 x^2 \sin x\,dx$. (*Ответ:* 0,223.)

6.8. $\int\limits_0^1 e^{-x^2/2}\,dx$. (*Ответ:* 0,855.)

6.9. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1+x^2}\,dx$. (*Ответ:* 0,480.)

6.10. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^5}$. (*Ответ:* 0,484.)

6.11. $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{1+x^2/4}\,dx$. (*Ответ:* 1,027.)

6.12. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{x}\,dx$. (*Ответ:* 0,493.)

6.13. $\int\limits_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} dx$. (*Ответ:* 0,103.)

6.14. $\int\limits_0^{0,5} x^2 \cos 3x dx$. (*Ответ:* 0,018.)

6.15. $\int\limits_0^{0,5} \ln(1 + x^2) dx$. (*Ответ:* 0,385.)

6.16. $\int\limits_0^{0,4} \sqrt{x} e^{-x/4} dx$. (*Ответ:* 0,159.)

6.17. $\int\limits_{0,3}^{0,5} \frac{1 + \cos x}{x^2} dx$. (*Ответ:* 2,568.)

6.18. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2} dx$. (*Ответ:* 0,498.)

6.19. $\int\limits_0^{0,8} \frac{1 - \cos x}{x} dx$. (*Ответ:* 0,156.)

6.20. $\int\limits_0^{1} \sin x^2 dx$. (*Ответ:* 0,310.)

6.21. $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1 + x)}{x} dx$. (*Ответ:* 0,098.)

6.22. $\int\limits_0^{1} \cos \sqrt[3]{x} dx$. (*Ответ:* 0,718.)

6.23. $\int\limits_0^{1} \sqrt{x} \sin x dx$. (*Ответ:* 0,364.)

6.24. $\int\limits_0^{25} \frac{e^{-2x^2}}{\sqrt{x}} dx$. (*Ответ:* 0,976.)

6.25. $\int\limits_0^{1} \cos \frac{x^2}{4} dx$. (*Ответ:* 0,994.)

6.26. $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) dx$. (*Ответ:* 0,318.)

6.27. $\int\limits_0^{0,5} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2} dx$. (*Ответ:* 0,039.)

6.28. $\int\limits_0^{0,4} \sqrt{1 - x^3} dx$. (*Ответ:* 0,397.)

6.29. $\int\limits_0^{0,5} e^{-x^2} dx$. (*Ответ:* 0,461.)

6.30. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1 + x^3} dx$. (*Ответ:* 0,508.)

7. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

7.1. $y' = xy + e^y$, $y(0) = 0$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ y = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \ldots\right)$

7.2. $y' = x^2y^2 + 1$, $y(0) = 1$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ y = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 + \ldots\right)$

7.3. $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots\right)$

7.4. $y' = x^3 + y^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \ldots\right)$

7.5. $y' = x + y^2$, $y(0) = -1$. (*Ответ:* $y = -1 + x + 3x^2 + \ldots$)

7.6. $y' = x + x^2 + y^2$, $y(0) = 1$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ y = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \ldots\right)$

7.7. $y' = 2\cos x - xy^2,\ y(0) = 1.$ $\left(\text{Ответ: } y = 1 + 2x - \right.$
$\left. - \frac{1}{2}x^2 + \ldots\right)$

7.8. $y' = e^x - y^2,\ y(0) = 0.$ $\left(\text{Ответ: } y = x + \frac{1}{2}x^2 - \right.$
$\left. - \frac{1}{6}x^3 + \ldots\right)$

7.9. $y' = x + y + y^2,\ y(0) = 1.$ $\left(\text{Ответ: } y = 1 + 2x + \right.$
$\left. + \frac{7}{2}x^2 + \ldots\right)$

7.10. $y' = x^2 + y^2, y(0) = 1.$ (Ответ: $y = 1 + x + x^2 + \ldots$)

7.11. $y' = x^2y^2 + y\sin x,\quad y(0) = \frac{1}{2}.$ $\left(\text{Ответ: } y = \frac{1}{2} + \right.$
$\left. + \frac{1}{4}x^2 + \frac{x^3}{12} + \ldots\right)$

7.12. $y' = 2y^2 + ye^x,\ y(0) = \frac{1}{3}.$ $\left(\text{Ответ: } y = \frac{1}{3} + \frac{5}{9}x + \right.$
$\left. + \frac{26}{27}x^2 + \ldots\right)$

7.13. $y' = e^{3x} + 2xy^2,\quad y(0) = 1.$ $\left(\text{Ответ: } y = 1 + x + \right.$
$\left. + \frac{5}{2}x^2 + \ldots\right)$

7.14. $y' = x + e^y,\quad y(0) = 0.$ $\left(\text{Ответ: } y = x + x^2 + \right.$
$\left. + \frac{1}{2}x^3 + \ldots\right)$

7.15. $y' = y\cos x + 2\cos y,\ y(0) = 0.$ (Ответ: $y = 2x +$
$+ x^2 - x^3 + \ldots$)

7.16. $y' = x^2 + 2y^2, y(0) = 0{,}2.$ (Ответ: $y = 0{,}2 + 0{,}08x +$
$+ 0{,}032x^2 + \ldots$)

7.17. $y' = x^2 + xy + y^2,\ y(0) = 0{,}5.$ (Ответ: $y = 0{,}5 +$
$+ 0{,}25x + 0{,}375x^2 + \ldots$)

7.18. $y' = e^{\sin x} + x,\quad y(0) = 0.$ $\left(\text{Ответ: } y = x + x^2 + \right.$
$\left. + \frac{1}{6}x^3 + \ldots\right)$

7.19. $y' = xy - y^2, y(0) = 0{,}2.$ (Ответ: $y = 0{,}2 - 0{,}04x +$
$+ 0{,}108x^2 + \ldots$)

7.20. $y' = 2x + y^2 + e^x,\ y(0) = 1.$ (Ответ: $y = 1 + 2x +$
$+ 3{,}5x^2 + \ldots$)

7.21. $y' = x\sin x - y^2$, $y(0) = 1$. (*Ответ:* $y = 1 - x + x^2 + \ldots$)

7.22. $y' = 2x^2 - xy$, $y(0) = 0$. $\left(\textit{Ответ: } y = \frac{4x^3}{3!} - \frac{16x^5}{5!} + \frac{96x^7}{7!} - \ldots\right)$

7.23. $y' = x - 2y^2$, $y(0) = 0{,}5$. (*Ответ:* $y = 0{,}5 - 0{,}5x + x^2 + \ldots$)

7.24. $y' = xe^x + 2y^2$, $y(0) = 0$. $\left(\textit{Ответ: } y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \ldots\right)$

7.25. $y' = xy + x^2 + y^2$, $y(0) = 1$. $\left(\textit{Ответ: } y = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \ldots\right)$

7.26. $y' = xy + e^x$, $y(0) = 0$. $\left(\textit{Ответ: } y = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \ldots\right)$

7.27. $y' = ye^x$, $y(0) = 1$. (*Ответ:* $y = 1 + x + x^2 + \ldots$)

7.28. $y' = 2\sin x + xy$, $y(0) = 0$. $\left(\textit{Ответ: } y = x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{11}{360}x^6 + \ldots\right)$

7.29. $y' = x^2 + e^y$, $y(0) = 0$. $\left(\textit{Ответ: } y = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \ldots\right)$

7.30. $y' = x^2 + y$, $y(0) = 1$. $\left(\textit{Ответ: } y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\right)$

8. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

8.1. $y' = \arcsin y + x$, $y(0) = \frac{1}{2}$, $k = 4$. $\left(\textit{Ответ: } y = \frac{1}{2} + \frac{\pi x}{6} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi}{3\sqrt{x}}\right)x^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi^2}{27\sqrt{3}}\right)x^3 + \ldots\right)$

8.2. $y' = xy + \ln(y + x)$, $y(1) = 0$, $k = 5$. $\left(\textit{Ответ: } y = \right.$ $\left. = \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{6} + \ldots\right)$

8.3. $y' = x + y^2, y(0) = 1, k = 3.$ $\left(\textit{Ответ: } y = x + \frac{1}{2!}x^2 + \right.$ $\left. + \frac{2}{3!}x^3 + \ldots\right)$

8.4. $y' = x + \frac{1}{y}$, $y(0) = 1$, $k = 5$. $\left(\textit{Ответ: } y = 1 + x + \right.$ $\left. + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{3} + \ldots\right)$

8.5. $y^{IV} = xy + y'x^2$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$, $y'''(0) = 1$, $k = 7$. $\left(\textit{Ответ: } y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{4x^6}{6!} + \ldots\right)$

8.6. $y' = 2x - 0{,}1y^2$, $y(0) = 1$, $k = 3$. (*Ответ:* $y = 1 - 0{,}1x + 0{,}01x^2 + \ldots$)

8.7. $y''' = y'' + y'^2 + y^3 + x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 0{,}5$, $k = 6$. $\left(\textit{Ответ: } y = 1 + 2x + \frac{x^2}{4} + \frac{11}{12}x^3 + \frac{29}{48}x^4 + \right.$ $\left. + \frac{25}{48}x^5 + \ldots\right)$

8.8. $y' = x^2 - xy$, $y(0) = 0{,}1$, $k = 3$. (*Ответ:* $y = 0{,}1 - 0{,}05x^2 + 0{,}333x^3 + \ldots$)

8.9. $y'' = 2yy', y(0) = 0, y'(0) = 1, k = 3.$ $\left(\textit{Ответ: } y = x + \right.$ $\left. + \frac{2x^3}{3!} + \frac{12x^5}{5!} + \ldots\right)$

8.10. $y' = 2x + \cos y$, $y(0) = 0$, $k = 5$. $\left(\textit{Ответ: } y = x^2 - \right.$ $\left. - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right)$

8.11. $y''' = ye^x - xy'^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 1$, $k = 6$. $\left(\textit{Ответ: } y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + 0 \cdot x^5 + \ldots\right)$

8.12. $y' = 3x - y^2$, $y(0) = 2$, $k = 3$. $\left(\textit{Ответ: } y = 2 - 4x - \right.$ $\left. - \frac{13}{2}x^2 - \ldots\right)$

8.13. $y'' = xyy'$, $y(0) = y'(0) = 1$, $k = 6$. $\left(Ответ: y = 1 + \right.$
$\left. + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{3x^5}{5!} + \ldots\right)$

8.14. $y' = x^2 - 2y$, $y(0) = 1$, $k = 3$. (*Ответ:* $y = 1 - 2x + 2x^2 + \ldots$)

8.15. $y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, $k = 4$. $\left(Ответ: y = 1 \frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{(x-1)^4}{4!} + \frac{4(x-1)^5}{5!} + \ldots\right)$

8.16. $y' = x^2 + 0{,}2y^2$, $y(0) = 0{,}1$, $k = 3$. (*Ответ:* $y = 0{,}1 + 0{,}002x + 0{,}00004x^2 + \ldots$)

8.17. $y'' = y'^2 + xy$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -2$, $k = 5$. $\left(Ответ: y = 4 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + \frac{19}{6}x^4 + \ldots\right)$

8.18. $y' = xy + y^2$, $y(0) = 0{,}1$, $k = 3$. (*Ответ:* $y = 0{,}1 + 0{,}01x + 0{,}051x^2 + \ldots$)

8.19. $y'' = e^y \sin y'$, $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = \frac{\pi}{2}$, $k = 3$. $\left(Ответ: y = 1 + \frac{\pi}{2}(x - \pi) + \frac{e}{2}(x - \pi)^2 + \ldots\right)$

8.20. $y' = 0{,}2x + y^2$, $y(0) = 1$, $k = 3$. (*Ответ:* $y = 1 + x + 1{,}1x^2 + \ldots$)

8.21. $y'' = x^2 + y^2$, $y(-1) = 2$, $y'(-1) = 0{,}5$, $k = 4$. $\left(Ответ: y = 2 + \frac{1}{2}(x + 1) + \frac{5}{2}(x + 1)^2 + \frac{15}{16}(x + 1)^4 + \ldots\right)$

8.22. $y' = x^2 + xy + e^{-x}$, $y(0) = 0$, $k = 3$. $\left(Ответ: y = x - \right.$
$\left. - \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^3}{3!} + \ldots\right)$

8.23. $y' = \frac{1 - x^2}{y} + 1$, $y(0) = 1$, $k = 5$. $\left(Ответ: y = 1 + \right.$
$\left. + 2x - x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{17}{9}x^4 + \ldots\right)$

8.24. $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $k = 3$. $\left(Ответ\ y = \right.$
$\left. = x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots\right)$

8.25. $y'' = y \cos y' + x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{\pi}{3}$, $k = 3$. $\left(Ответ: y = 1 + \frac{\pi}{3}x + \frac{1}{4}x^2 + \ldots\right)$

8.26. $y' = \cos x + x^2$, $y(0) = 0$, $k = 3$. $\left(\textit{Ответ:}\ y = x + \right.$ $\left. + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\ \ldots\right)$

8.27. $y' - 4y + 2xy^2 - e^{3x}$, $y(0) = 2$, $k = 4$. $\left(\textit{Ответ:}\ y = \right.$ $\left. = 2 + 9x + \frac{31}{2}x^2 - \frac{11}{6}x^3 + \ldots\right)$

8.28. $(1 - x)y'' + y = 0$, $\quad y(0) = y'(0) = 1$, $\quad k = 3$. $\left(\textit{Ответ:}\ y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots\right)$

8.29. $4x^2y'' + y = 0$, $\quad y(1) = 1$, $\quad y'(1) = \frac{1}{2}$, $\quad k = 3$. $\left(\textit{Ответ:}\ y = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{8}(x - 1)^2 + \ldots\right)$

8.30. $y' = 2x^2 + y^3$, $y(1) = 1$, $k = 3$. $\left(\textit{Ответ:}\ y = 1 + \right.$ $\left. + 3(x - 1) + \frac{13}{2}(x - 1)^2 + \ldots\right)$

Решение типового варианта

Найти область сходимости ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\dfrac{x^n}{n^2 + 1}}$.

▶ Воспользуемся признаком Д'Аламбера:

$$u_n = \sqrt{\frac{x^n}{n^2 + 1}}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{x^{n+1}}{(n + 1)^2 + 1}},$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\sqrt{x^{n+1}}\sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{(n + 1)^2 + 1}\sqrt{x^n}} \right| =$$

$$= \sqrt{x} \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{n^2 + 1}{n^2 + 2n + 2}} = \sqrt{x}.$$

Интервал сходимости определяется неравенством $\sqrt{x} < 1$, откуда $0 < x < 1$. Исследуем граничные точки этого интервала. При $x = 0$ получим числовой ряд, членами которого являются нули. Этот ряд сходится, точка $x = 0$ входит в его область сходимости. При $x=1$ получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$. Воспользовавшись предельным признаком сравнения рядов с положительными членами, сравним этот ряд с гармоническим расходящимся рядом, общий член которого $v_n=1/n$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1=k\neq 0.$$

Следовательно, числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ расходится и точка $x=1$ не входит в область сходимости.

Таким образом, область сходимости исследуемого ряда — $0\leqslant x<1$. ◀

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^2}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right)^n$.

▶ По признаку Д'Аламбера имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+2n+2}{n^2+2n+1}\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|^{n+1}}{\frac{n^2+1}{n^2}\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|^n}=$$

$$=\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n^2+2n+2)}{(n^2+1)(n^2+2n+1)}=\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|<1,$$

$$-1<\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}<1.$$

Решаем полученные неравенства:

$$-1<\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2},\ \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}+1>0,\ \frac{2x^2+4}{x^2+3x+2}>0.$$

Отсюда

$$x^2+3x+2>0,\ x\in(-\infty;\ -2)\cup(-1;\ \infty).$$

Далее,

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}<1,\ \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}-1<0,\ \frac{-6x}{x^2+3x+2}<0,$$

$$\frac{x}{x^2+3x+2} > 0.$$

Следовательно, $x \in (-2;\ -1) \cup (0;\ \infty)$. При $x=0$ получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2}$, для которого

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1 \neq 0,$$

т. е. необходимый признак сходимости не выполняется, следовательно, этот числовой ряд расходится. Область сходимости исследуемого ряда: $0 < x < \infty$. ◀

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3-x^2)^n$.

▶ Воспользуемся радикальным признаком Коши. Находим:

$$u_n = (3-x^2)^n,\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|3-x^2|^n} = |3-x^2| < 1,$$
$$-1 < 3-x^2 < 1.$$

Решаем полученные неравенства:

$$3-x^2 > -1,\ x^2-4<0,\ x\in(-2;\ 2);$$
$$3-x^2<1,\ x^2-2>0,\ x\in(-\infty;\ -\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\ \infty).$$

Пересечение найденных решений дает интервалы сходимости исследуемого ряда $x\in(-2;\ -\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\ 2)$.

Исследуем сходимость ряда на концах этих интервалов. При $x=\pm 2$ получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$. Этот знакочередующийся числовой ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости числового ряда $(\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0)$. При $x=\pm\sqrt{2}$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1^n$, который расходится, поскольку необходимый признак сходимости также не выполняется. Значит, область сходимости исследуемого ряда: $(-2;\ -\sqrt{2})\cup$ $\cup(\sqrt{2};\ 2)$. ◀

4. Разложить функцию $y=\cos^2 x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=\pi/3$. Найти область сходимости полученного ряда к этой функции.

▶ Преобразуем данную функцию:

$$y=\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x.$$

Разложим полученную функцию в ряд Тейлора. Для этого найдем значения данной функции и ее производных до n-го порядка включительно в точке $x_0=\pi/3$:

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x,\qquad f(x_0)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4};$$

$$f'(x)=-\sin 2x,\qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$f''(x)=-2\cos 2x,\qquad f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\cos\frac{2\pi}{3}=1;$$

$$f'''(x)=4\sin 2x,\qquad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\sin\frac{2\pi}{3}=2\sqrt{3};$$

. . . .

$$f^{(n)}(x)=-2^{n-1}\sin\left(2x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right),\ f^{(n)}\left(\frac{\pi}{3}\right)=$$
$$=-2^{n-1}\sin\left(\frac{2\pi}{3}+(n-1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Полученные числовые значения производных подставляем в ряд Тейлора при $x_0=\pi/3$:

$$\cos^2 x=\frac{1}{4}-\frac{1}{1!}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+$$
$$+\frac{1}{3!}2\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+\ldots+\frac{1}{n!}\left(-2^{n-1}\sin\left(\frac{2\pi}{3}+(n-\right.\right.$$
$$\left.\left.-1)\frac{\pi}{2}\right)\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^n+\ldots=\frac{1}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n!}\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\right.$$
$$\left.+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^n.$$

Для нахождения области сходимости полученного ряда необходимо выяснить, при каких значениях x остаточный член ряда Тейлора стремится к нулю. Он имеет вид

$$R_n(x)=\frac{-2^n}{(n+1)!}\sin\left(2\xi+n\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{n+1},$$

где $\xi\in(x;\ x_0)$. Поскольку $\left|\sin\left(2\xi+n\frac{\pi}{2}\right)\right|\leqslant 1$, достаточно найти область сходимости ряда с общим членом $\frac{2^n}{(n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}$. Согласно признаку Д'Аламбера,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(x-\pi/3)^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!\cdot 2^n(x-\pi/3)^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2|x-\pi/3|}{n+2}=0<1.$$

Полученный ряд сходится при любом x. Значит, область его сходимости к функции $f(x)=\cos^2 x$ такова: $-\infty<x<\infty$. ◀

5. Вычислить $1/\sqrt{e}$ приближенно с точностью $\alpha=0{,}0001$, воспользовавшись разложением функции $y=e^x$ в степенной ряд.

▶ Воспользуемся рядом (12.17). Так как $1/\sqrt{e}=e^{-1/2}$, то

$$e^{-1/2}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4\cdot 2!}-\frac{1}{8\cdot 3!}+\frac{1}{16\cdot 4!}-\frac{1}{32\cdot 5!}+\ldots$$

Получили знакочередующийся числовой ряд. Для того чтобы вычислить значения функции с точностью $\alpha=0{,}0001$, необходимо, чтобы первый отбрасываемый член был меньше 0,0001 (по следствию из признака Лейбница). Имеем

$$a_7=\frac{1}{64\cdot 6!}=\frac{1}{64\cdot 720}=\frac{1}{46080}<0{,}0001.$$

С заданной степенью точности:

$$e^{-1/2}\approx 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{48}+\frac{1}{384}-\frac{1}{3840},$$

$$\frac{1}{\sqrt{e}}\approx 1-0{,}5+0{,}125-0{,}02083+0{,}00260-0{,}00026\approx 0{,}6065.$$ ◀

6. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить определенный интеграл $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{8-x^3}}$ с точностью до 0,001.

▶ Воспользуемся биномиальным рядом (см. формулу (12.21)). Тогда

$$\frac{1}{\sqrt[3]{8-x^3}}=\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^3\right)^{-1/3}.$$

Получили бином вида $(1+z)^m$, где $m=-1/3$, а $z=-(x/2)^3$. Имеем:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{8-x^3}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{4}{9}\,\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\frac{28}{27}\,\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^9+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x^3}{24}+\frac{x^6}{288}+\frac{7x^9}{18176}+\ldots\right),$$

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{8-x^3}}\approx\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0}\left(1+\frac{x^3}{24}+\frac{x^6}{288}+\frac{7x^9}{18176}+\ldots\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^4}{4\cdot 24}+\frac{x^7}{7\cdot 288}+\frac{7x^{10}}{10\cdot 18176}+\ldots\right)\Bigg|_{-1}^{0}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{96}+\frac{1}{2016}-\frac{7}{181760}+\ldots\right),$$

$$\frac{1}{2016}<0{,}001.$$

С точностью до 0,001

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{8-x^3}}\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{192}\approx 0{,}5-0{,}0052\approx 0{,}495. \blacktriangleleft$$

7. Найти разложение в степенной ряд по степеням $x-1$ решения дифференциального уравнения $y'=2x+y^3$, $y(1)=1$ (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения.)

▶ Точка $x=1$ не является особой для данного уравнения, поэтому его решение можно искать в виде ряда:

$$y=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\ldots$$

Имеем: $f(1)=1$, $f'(1)=2+1^3=3$, $f''(x)=2+3y^2y'$, $f''(1)=2+3\cdot 1^2\cdot 3=11$. Подставляя найденные значения производных в искомый ряд, получаем решение данного уравнения:

$$y=1+\frac{3}{1!}(x-1)+\frac{11}{2!}(x-1)^2+\ldots \blacktriangleleft$$

8. Методом последовательного дифференцирования найти первые 5 членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $4x^2y''+y=0$ при следующих условиях: $y(1)=1$, $y'(1)=1/2$.

$\blacktriangleright$ Ищем решение данного уравнения в виде ряда:

$$y=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+$$
$$+\frac{f^{IV}(1)}{4!}(x-1)^4+\ldots,$$

$$f(1)=1,\ f'(1)=\frac{1}{2};$$

$$f''(x)=-\frac{y}{4x^2},\ f''(1)=-\frac{1}{4};$$

$$f'''(x)=-\frac{y'x^2-2xy}{4x^4},\ f'''(1)=-\frac{(1/2)\cdot 1-2\cdot 1}{4}=\frac{3}{8};$$

$$f^{IV}(x)=-((y''x^2+2xy'-2y-2xy')x^4-4x^3(y'x^2-$$
$$-2xy))/(4x^8);\ f^{IV}(1)=-\frac{15}{16}.$$

Подставляя найденные значения производных в ряд, получаем искомое решение дифференциального уравнения:

$$y=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4\cdot 2!}(x-1)^2+\frac{3}{8\cdot 3!}(x-1)^3-$$
$$-\frac{15}{16\cdot 4!}(x-1)^4+\ldots,$$

$$y=1+\frac{x-1}{2}-\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(x-1)^3}{16}-\frac{5(x-1)^4}{128}+\ldots \blacktriangleleft$$

ИДЗ-12.3

1. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega=2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\ \pi]$.

1.1. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ x-1, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$ $\left(\text{Ответ: } f(x)=\frac{\pi-2}{4}-\right.$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\frac{\pi-2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\Bigg)$$

1.2. $f(x)=\begin{cases}2x-1, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$ $\left(\text{Ответ: } f(x)=\right.$

$$=-\frac{\pi+1}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+$$

$$+\frac{2(\pi+1)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\Bigg)$$

1.3. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ x+2, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$ $\left(\text{Ответ: } f(x)=\frac{\pi+4}{4}-\right.$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+$$

$$+\frac{\pi+4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\Bigg)$$

1.4. $f(x)=\begin{cases}-x+1/2, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$ $\left(\text{Ответ: } f(x)=\right.$

$$=\frac{\pi+1}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}-\frac{\pi+1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\Bigg)$$

1.5. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ x/2+1, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$ $\left(\text{Ответ: } f(x)=\frac{\pi-4}{8}-\right.$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\frac{\pi-4}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\Bigg)$$

1.6. $f(x)=\begin{cases}2x+3, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$ $\Big($*Ответ:* $f(x)=\frac{3-\pi}{2}+$

$$+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\frac{2(\pi-3)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}-$$

$$-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\Big)$$

1.7. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ 3-x, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$ $\Big($*Ответ:* $f(x)=\frac{6-\pi}{4}+$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\frac{6-\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\Big)$$

1.8. $f(x)=\begin{cases}x-2, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$ $\Big($*Ответ:* $f(x)=$

$$=-\frac{\pi+4}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\frac{4+\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\Big)$$

1.9. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ 4x-3, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$ $\Big($*Ответ:* $f(x)=$

$$=\frac{2\pi-3}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+$$

$$+\frac{2(2\pi-3)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}-4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\Big)$$

1.10. $f(x)=\begin{cases}5-x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$ $\Big($*Ответ:* $f(x)=\frac{\pi+10}{4}-$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}-\frac{\pi+10}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\Bigg)$$

1.11. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ 3x-1, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$ $\Bigg($*Ответ:* $f(x)=$

$$=\frac{3\pi-2}{4}-\frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\frac{3\pi-2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}-$$

$$-3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\Bigg)$$

1.12. $f(x)=\begin{cases}3-2x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$ $\Bigg($*Ответ:* $f(x)=\frac{\pi+3}{2}-$

$$-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}-\frac{2(\pi+3)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}+$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\Bigg)$$

1.13. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ (\pi-x)/2, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$ $\Bigg($*Ответ:* $f(x)=$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}.\Bigg)$$

1.14. $f(x)=\begin{cases}5x+1, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$ $\Bigg($*Ответ:* $f(x)=$

$$=\frac{2-5x}{4}+\frac{10}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+$$

$$+\frac{5\pi-2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}-5\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\Bigg)$$

1.15. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1-4x, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$

$$\left(\textit{Ответ: } f(x)=\frac{1-2\pi}{2}+\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2-4\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\right)$$

1.16. $f(x)=\begin{cases}3x+2, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$

$$\left(\textit{Ответ: } f(x)=\frac{4-3\pi}{4}+\frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{3\pi-4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}-3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\right)$$

1.17. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ 4-2x, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$

$$\left(\textit{Ответ: } f(x)=\frac{4-\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2(4-\pi)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\right)$$

1.18. $f(x)=\begin{cases}x+\pi/2, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$ (*Ответ:* $f(x)=$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\Big)$$

1.19. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ 6x-5, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$

$$\left(\textit{Ответ: } f(x)=\frac{3\pi-5}{2}-\frac{12}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2(3\pi-5)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}-6\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\right)$$

1.20. $f(x)=\begin{cases}7-3x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$

$$\left(\textit{Ответ:}\ f(x)=\frac{3\pi+14}{4}-\frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{14+3\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}+3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\right)$$

1.21. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$ $\left(\textit{Ответ:}\ f(x)=\right.$

$$\left.=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\right)$$

1.22. $f(x)=\begin{cases}6x-2, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$

$$\left(\textit{Ответ:}\ f(x)=-\frac{3\pi+2}{2}+\frac{12}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2(3\pi+2)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}-6\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\right)$$

1.23. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ 4-9x, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$

$$\left(\textit{Ответ:}\ f(x)=\frac{8-9\pi}{4}+\frac{18}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{8-9\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}+9\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\right)$$

1.24. $f(x)=\begin{cases}x/3-3, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$

$$\left(\textit{Ответ:}\ f(x)=-\frac{\pi+18}{12}+\frac{2}{3\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{18+\pi}{9\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}-\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\right)$$

1.25. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ 10x-3, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$

$$\left(\textit{Ответ: } f(x)=\frac{5\pi-3}{2}-\frac{20}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2(5\pi-3)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}-10\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\right)$$

1.26. $f(x)=\begin{cases}1-x/4, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$

$$\left(\textit{Ответ: } f(x)=\frac{\pi+8}{16}-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi+8}{4\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\right)$$

1.27. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ x/5-2, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$

$$\left(\textit{Ответ: } f(x)=\frac{\pi-20}{20}+\frac{2}{5\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi-20}{5\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}-\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\right)$$

1.28. $f(x)=\begin{cases}2x-11, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$

$$\left(\textit{Ответ: } f(x)=-\frac{\pi+11}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2(\pi+11)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\right)$$

1.29. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ 3-8x, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$

$$\left(\textit{Ответ: } f(x)=\frac{3-4\pi}{2}+\frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\right.$$

$$+\frac{2(3-4\pi)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}+8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\Bigg)$$

1.30. $f(x)=\begin{cases}7x-1, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$

$$\Bigg(\textit{Ответ: } f(x)=-\frac{7\pi+2}{4}+\frac{14}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+$$

$$+\frac{7\pi+2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}-7\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\Bigg)$$

2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную в интервале $(0;\ \pi)$, продолжив (доопределив) ее четным и нечетным образом. Построить графики для каждого продолжения.

2.1. $f(x)=e^x$. $\Bigg(\textit{Ответ: } e^x=\frac{e^{\pi}-1}{\pi}+$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((-1)^n e^{\pi}-1)\cos nx}{1+n^2},\quad e^x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(1-$$

$$-(-1)^n e^{\pi})\frac{n\sin nx}{n^2+1}.\Bigg)$$

2.2. $f(x)=x^2$. $\Bigg(\textit{Ответ: } x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2},$

$$x^2=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi^2-4(2k-1)^2}{(2k-1)^3}\sin((2k-1)x)-2\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\Bigg)$$

2.3. $f(x)=2^x$. $\Bigg(\textit{Ответ: } 2^x=\frac{2^{\pi}-1}{\pi\ln 2}+$

$$+\frac{2\ln 2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\pi}(-1)^n-1}{n^2+\ln^2 2}\cos nx,$$

$$2^x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{\pi}+1}{n^2+\ln^2 2}\,n\sin nx.\Bigg)$$

2.4. $f(x)=\operatorname{ch} x$. $\Bigg(\textit{Ответ: } \operatorname{ch} x=\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\Big(1+$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{1+n^2}\Big),\ \operatorname{ch} x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\operatorname{ch}\pi}{1+n^2}n\sin nx.\Big)$$

2.5. $f(x)=e^{-x}$. $\Big($*Ответ:* $e^{-x}=\frac{1-e^{-\pi}}{\pi}+$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\cos nx,$$

$$e^{-x}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}n\sin nx.\Big)$$

2.6. $f(x)=(x-1)^2$. $\Big($*Ответ:* $(x-1)^2=\frac{\pi^2-3\pi+3}{3}+$

$$+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2-\pi}{(2k-1)^2}\cos((2k-1)x)+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{(2k)^2},\ (x-1)^2=$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\pi^2-2\pi+2}{2k-1}+\frac{4}{(2k-1)^3}\right)\sin((2k-1)x)+2(2-$$

$$-\pi)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.\Big)$$

2.7. $f(x)=3^{-x/2}$. $\Big($*Ответ:* $3^{-x/2}=\frac{2(1-3^{-\pi/2})}{\pi\ln 3}+$

$$+\frac{4\ln 3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cdot 3^{-\pi/2}}{4n^2+(\ln 3)^2},$$

$$3^{-x/2}=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cdot 3^{-\pi/2}}{4n^2+(\ln 3)^2}n\sin nx.\Big)$$

2.8. $f(x)=\operatorname{sh} 2x$. $\Big($*Ответ:* $\operatorname{sh} 2x=\frac{\operatorname{ch} 2\pi}{2\pi}+$

$$+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ch} 2\pi\cdot(-1)^n-1}{4+n^2}\cos nx,$$

$$\operatorname{sh} 2x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot \operatorname{sh} 2\pi}{n^2+4} n \sin nx \Big)$$

2.9. $f(x) = e^{2x}$. $\Big($*Ответ:* $e^{2x} = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} +$

$$+ \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{2\pi} - 1}{4+n^2} \cos nx,$$

$$e^{2x} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n e^{2\pi}}{4+n^2} n \sin nx.\Big)$$

2.10. $f(x) = (x-2)^2$. $\Big($*Ответ:* $(x-2)^2 = \frac{\pi^2 - 6\pi + 12}{3} +$

$$+ \frac{4(4-\pi)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{(2k)^2},$$

$$(x-2)^2 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2-2}{n^3} + (-1)^n \frac{2-n^2(2-\pi)^2}{n^3} \right) \sin nx.\Big)$$

2.11. $f(x) = 4^{x/3}$. $\Big($*Ответ:* $4^{x/3} = \frac{3(4^{\pi/3}-1)}{\pi} +$

$$+ \frac{6 \ln 4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^{\pi/3} - 1}{9n^2 + (\ln 4)^2} \cos nx,$$

$$4^{x/3} = \frac{18}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n \cdot 4^{\pi/3}}{9n^2 + (\ln 4)^2} n \sin nx.\Big)$$

2.12. $f(x) = \operatorname{ch} \frac{x}{2}$. $\Big($*Ответ:* $\operatorname{ch} \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{sh}(\pi/2)}{\pi} +$

$$+ \frac{4 \sin(\pi/2)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{1+4n^2},$$

$$\operatorname{ch} \frac{x}{2} = \frac{8 \operatorname{ch}(\pi/2)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{1+4n^2} n \sin nx.\Big)$$

2.13. $f(x) = e^{4x}$. $\Big($*Ответ:* $e^{4x} = \frac{e^{4\pi}-1}{4\pi} +$

$$+ \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{4\pi} - 1}{n^2+16} \cos nx,$$

$$e^{4x} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{4\pi}}{n^2+16}\, n\sin nx.\Big)$$

2.14. $f(x)=(x+1)^2$. $\Big($*Ответ:* $(x+1)^2 = \frac{\pi^2+3\pi+3}{3} -$

$$- \frac{4(\pi+2)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{(2k)^2},\quad (x+1)^2 =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-n^2)+(-1)^n((\pi-1)^2 n^2-2)}{n^3}\sin nx.\Big)$$

2.15. $f(x)=5^{-x}$. $\Big($*Ответ:* $5^{-x} = \frac{1-5^{-\pi}}{\pi\ln 5} +$

$$+ \frac{2\ln 5}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-5^{-\pi}(-1)^n}{n^2+(\ln 5)^2}\cos nx,$$

$$5^{-x} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cdot 5^{-\pi}}{n^2+(\ln 5)^2}\, n\sin nx.\Big)$$

2.16. $f(x)=\operatorname{sh} 3x$. $\Big($*Ответ:* $\operatorname{sh} 3x = \frac{\operatorname{ch} 3\pi - 1}{3\pi} +$

$$+ \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\operatorname{ch} 3\pi - 1}{n^2+9}\cos nx,$$

$$\operatorname{sh} 3x = \frac{2\operatorname{sh} 3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+9}\, n\sin nx.\Big)$$

2.17. $f(x)=e^{-x/4}$. $\Big($*Ответ:* $e^{-x/4} = \frac{4(1-e^{-\pi/4})}{\pi} +$

$$+ \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-\pi/4}}{16n^2+1}\cos nx,$$

$$e^{-x/4} = \frac{32}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-\pi/4}}{16n^2+1}\, n\sin nx.\Big)$$

2.18. $f(x)=(2x-1)^2$. $\Big($*Ответ:* $(2x-1)^2=\frac{4\pi^2-6\pi+3}{3}+$

$$+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2\pi-1)^2+1}{n^2}\cos nx,$$

$$(2x-1)^2=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-8+(-1)^n(8-(1-2n)^2)}{n^3}\sin nx.\Big)$$

2.19. $f(x)=6^{x/4}$. $\Big($*Ответ:* $6^{x/4}=\frac{4(6^{\pi/4}-1)}{\pi\ln 6}+$

$$+\frac{8\ln 6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n6^{\pi/4}-1}{16n^2+(\ln 6)^2}\cos nx,$$

$$6^{x/4}=\frac{32}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n6^{\pi/4}}{16n^2+(\ln 6)^2}n\sin nx.\Big)$$

2.20. $f(x)=\operatorname{ch} 4x$. $\Big($*Ответ:* $\operatorname{ch} 4x=\frac{\operatorname{sh} 4\pi}{4\pi}+$

$$+\frac{8\operatorname{sh} 4\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+16}\cos nx,$$

$$\operatorname{ch} 4x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\operatorname{ch} 4\pi}{n^2+16}n\sin nx.\Big)$$

2.21. $f(x)=e^{-3x}$. $\Big($*Ответ:* $e^{-3x}=\frac{1-e^{-3\pi}}{3\pi}+$

$$+\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^ne^{-3\pi}}{n^2+9}\cos nx,$$

$$e^{-3x}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^ne^{-3\pi}}{n^2+9}n\sin nx.\Big)$$

2.22. $f(x)=x^2+1$. $\Big($*Ответ:* $x^2+1=\frac{\pi^2+3}{3}+$

$$+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,$$

$$x^2+1=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2-2)+(2-n)^2(\pi^2+1)(-1)^n}{n^3}\sin nx.\Big)$$

2.23. $f(x)=7^{-x/7}$. $\Bigl($*Ответ:* $7^{-x/7}=\dfrac{7(1-7^{-\pi/7})}{\pi\ln 7}+$

$$+\frac{14\ln 7}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cdot 7^{-\pi/7}}{49n^2+(\ln 7)^2}\cos nx,$$

$$7^{-x/7}=\frac{98}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n 7^{-\pi/7}}{49n^2+(\ln 7)^2}\,n\sin nx.\Bigr)$$

2.24. $f(x)=\operatorname{sh}\frac{x}{5}$. $\Bigl($*Ответ:* $\operatorname{sh}\dfrac{x}{5}=\dfrac{5\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{5}-1\right)}{\pi}+$

$$+\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\operatorname{ch}\frac{\pi}{5}-1}{25n^2+1}\cos nx,$$

$$\operatorname{sh}\frac{x}{5}=\frac{50\operatorname{sh}\frac{\pi}{5}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{25n^2+1}\,n\sin nx.\Bigr)$$

2.25. $f(x)=e^{-2x/3}$. $\Bigl($*Ответ:* $e^{-2x/3}=\dfrac{3(1-e^{-2\pi/3})}{2\pi}+$

$$+\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-2\pi/3}}{9n^2+4}\cos nx,$$

$$e^{-2x/3}=\frac{18}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-2\pi/3}}{9n^2+4}\,n\sin nx.\Bigr)$$

2.26. $f(x)=(x-\pi)^2$. $\Bigl($*Ответ:* $(x-\pi)^2=\dfrac{\pi^2}{3}+$

$$+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2},\quad (x-\pi)^2=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2\pi^2+2)(-1)^n-1}{n^3}\sin nx.\Bigr)$$

2.27. $f(x)=10^{-x}$. $\Bigl($*Ответ:* $10^{-x}=\dfrac{1-10^{-\pi}}{\pi\ln 10}+$

$$+\frac{2\ln 10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n 10^{-\pi}}{n^2+\ln^2 10}\cos nx,$$

$$10^{-x}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cdot 10^{-\pi}}{n^2+\ln^2 10}\,n\sin nx.\Bigr)$$

2.28. $f(x)=\operatorname{ch}\frac{x}{\pi}$. $\Big($*Ответ:* $\operatorname{ch}\frac{x}{\pi}=\operatorname{sh}1+$

$$+2\operatorname{sh}1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}\cos nx,$$

$$\operatorname{ch}\frac{x}{\pi}=2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\operatorname{ch}1}{1+n^2\pi^2}\,n\sin nx.\Big)$$

2.29. $f(x)=e^{4x/3}$. $\Big($*Ответ:* $e^{4x/3}=\frac{3(e^{4\pi/3}-1)}{4\pi}+$

$$+\frac{24}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{4\pi/3}-1}{9n^2+16}\cos nx,$$

$$e^{4x/3}=\frac{18}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{4\pi/3}}{9n^2+16}\,n\sin nx.\Big)$$

2.30. $f(x)=(x-5)^2$. $\Big($*Ответ:* $(x-5)^2=\frac{\pi^2-15\pi+75}{3}+$

$$+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pi-5)^2(-1)^n+5}{n^2}\cos nx,\quad (x-5)^2=$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(25n^2-2)+(-1)^n(2-n^2(5-\pi)^2)}{n^3}\sin nx.\Big)$$

3. Разложить в ряд Фурье в указанном интервале периодическую функцию $f(x)$ с периодом $\omega=2l$.

3.1. $f(x)=|x|$, $-1<x<1$, $l=1$. $\Big($*Ответ:* $|x|=\frac{1}{2}-$

$$-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2}.\Big)$$

3.2. $f(x)=2x$, $-1<x<1$, $l=1$. $\Big($*Ответ:* $2x=1-$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi nx)}{n}.\Big)$$

3.3. $f(x)=e^x$, $\quad -2<x<2$, $\quad l=2$. $\Big($*Ответ:* $e^x=$

$$=\operatorname{sh}2\Big(\frac{1}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\cos\frac{n\pi x}{2}-\pi n\sin\frac{n\pi x}{2}}{4+n^2\pi^2}\Big).\Big)$$

3.4. $f(x)=|x|-5$, $\quad -2<x<2$. $\Big($*Ответ:* $|x|-5=$

$$=-4-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}.\Big)$$

3.5. $f(x)=\begin{cases}1, & -1\leqslant x<0,\\ x, & 0<x\leqslant 1,\end{cases}$ $l=1$. $\Big($*Ответ:* $f(x)=\frac{3}{4}-$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos(\pi(2n-1)x)}{\pi(2n-1)^2}+\sin(\pi n x).\Big)$$

3.6. $f(x)=x$, $\quad 1<x<3$, $\quad l=1$. $\Big($*Ответ:* $\quad x=2+$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(n\pi x)}{n}.\Big)$$

3.7. $f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ $l=2$. $\Big($*Ответ:* $f(x)=$

$$=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)\pi x)}{(2n-1)^2}+$$

$$+\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin((2n+1)\pi x/2)}{(2n+1)^2}.\Big)$$

3.8. $f(x)=10-x$, $5<x<15$, $l=5$. $\Big($*Ответ:* $10-x=$

$$=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(n\pi x/5)}{n}.\Big)$$

3.9. $f(x)=\begin{cases}1, & -1\leqslant x<0,\\ 1/2, & x=0,\\ x, & 0<x\leqslant 1,\end{cases}$ $l=1$. $\Big($*Ответ:* $f(x)=$

$$=\frac{3}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)\pi x)}{(2n-1)^2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi x)}{n}.\Big)$$

3.10. $f(x)=5x-1$, $-5<x<5$, $l=5$. $\left(\text{Ответ: } 5x-\right.$ $\left.-1=-1+\frac{50}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi nx}{5}.\right)$

3.11. $f(x)=\begin{cases}0, & -3<x\leqslant 0,\\ x, & 0<x<3,\end{cases}$ $l=3$. $\left(\text{Ответ: } f(x)=\frac{3}{4}-\right.$ $\left.-\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)\pi x/3)}{(2n-1)^2}-\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{3}.\right)$

3.12. $f(x)=3-x$, $-2<x<2$, $l=2$. $\left(\text{Ответ: } 3-x=\right.$ $\left.=2+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{\pi nx}{2}\right).\right)$

3.13. $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ -1, & 1<x<2,\end{cases}$ $l=1$. $\left(\text{Ответ: } f(x)=\right.$ $\left.=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((2n+1)\pi x)}{2n+1}.\right)$

3.14. $f(x)=\begin{cases}0, & -2<x<0,\\ 2, & 0<x<2,\end{cases}$ $l=2$. $\left(\text{Ответ: } f(x)=\right.$ $\left.=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}.\right)$

3.15. $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & 1<x<2,\\ 3-x, & 2\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$ $l=3$. $\left(\text{Ответ: } f(x)=\right.$ $\left.=\frac{2}{3}-\frac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi nx/3)}{n^2}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi kx)}{k^2}.\right)$

3.16. $f(x)=2x-3$, $-3<x<3$, $l=3$. $\left(\text{Ответ: } 2x-\right.$ $\left.-3=-3+\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi nx}{3}.\right)$

3.17. $f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<3/2, \\ -1, & 3/2<x<3, \end{cases}$ $l=3$. $\Big($*Ответ:* $f(x)=$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos((2n+1)\pi x/3)}{2n+1}.\Big)$$

3.18. $f(x)=3-|x|$, $-5<x<5$, $l=5$. $\Big($*Ответ:* $3-$

$$-|x|=\frac{1}{2}+\frac{20}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{5}.\Big)$$

3.19. $f(x)=\begin{cases} -x, & -4<x<0, \\ 1, & x=0, \\ 2, & 0<x<4, \end{cases}$ $l=4$. $\Big($*Ответ:* $f(x)=$

$$=2-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)\pi x/4)}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(n\pi x/4)}{n}+$$

$$+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)\pi x/4)}{2k-1}.\Big)$$

3.20. $f(x)=1+x$, $-1<x<1$, $l=1$. $\Big($*Ответ:* $1+x=$

$$=1+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin n\pi x}{n}.\Big)$$

3.21. $f(x)=\begin{cases} -1, & -2<x<0, \\ -1/2, & x=0, \\ x/2, & 0<x<2, \end{cases}$ $l=2$. $\Big($*Ответ:* $f(x)=$

$$=-\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)\pi x/2)}{(2n-1)^2}+\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)\pi x/2)}{2n-1}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\pi x)}{2k}.\Big)$$

3.22. $f(x)=2x+2$, $-1<x<3$, $l=2$. $\Big($*Ответ:* $2x+$

$$+2=2-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(n\pi x/2)}{n}.\Big)$$

3.23. $f(x)=\begin{cases} 3, & -3<x<0, \\ 3/2, & x=0, \\ -x, & 0<x<3, \end{cases}$ $l=3$. $\Big($*Ответ:* $f(x)=$

$$=\frac{3}{4}-\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)\pi x/3)}{(2n-1)^2}-\frac{9}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)\pi x/3)}{2n-1}+$$

$$+\frac{3}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi kx/3)}{2k}.\Big)$$

3.24. $f(x)=1-|x|$, $-3<x<3$, $l=3$. $\Big($*Ответ:* $1-$

$$-|x|=-\frac{1}{2}+\frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{3}.\Big)$$

3.25. $f(x)=\begin{cases} -2, & -4<x<0, \\ -1/2, & x=0, \\ 1+x, & 0<x<4, \end{cases}$ $l=4$. $\Big($*Ответ:* $f(x)=$

$$=\frac{1}{2}+\frac{32}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)\pi x/4)}{(2n-1)^2}+\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)\pi x/4)}{2n-1}-$$

$$-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\pi x/2)}{2k}.\Big)$$

3.26. $f(x)=4x-3$, $-5<x<5$, $l=5$. $\Big($*Ответ:* $4x-$

$$-3=-3+\frac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{5}.\Big)$$

3.27. $f(x)=\begin{cases} x+2, & -2<x<-1, \\ 1, & -1\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-x, & 1<x<2, \end{cases}$ $l=2$.

$$\Big(\text{Ответ: } f(x)=\frac{3}{4}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)\pi x/2)}{(2n-1)^2}-$$

$$-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2(2k-1)\pi x/2)}{(2(2k-1))^2}.\Big)$$

3.28. $f(x)=\begin{cases} -1/2, & -6<x<0, \\ 1, & 0<x<6, \end{cases}$ $l=6$. (*Ответ:* $f(x)=$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{6}.)$$

3.29. $f(x)=\begin{cases} -2x, & -2<x<0, \\ 2, & x=0, \\ 4, & 0<x<2, \end{cases}$ $l=2$. (*Ответ:* $f(x)=$

$$=3 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)\pi x/2)}{(2n-1)^2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}.)$$

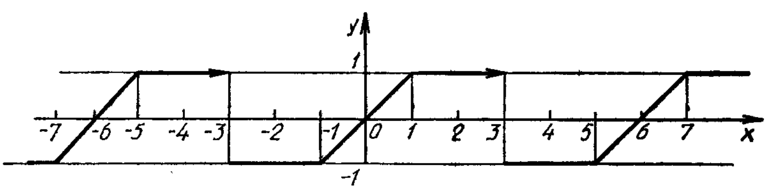
3.30. $f(x)=|x|-3$, $-4<x<4$, $l=4$. (*Ответ:* $|x|-$

$$-3 = -1 - \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} -$$

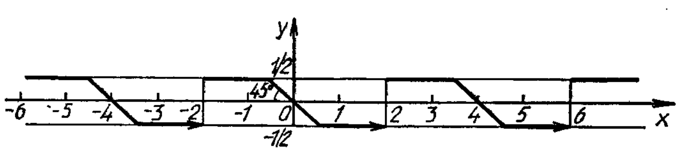
$$- \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x)}{2n} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2}.)$$

4. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную графически.

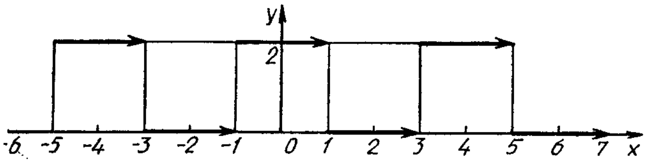
4.1.



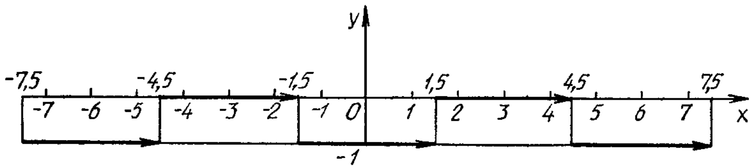
4.2.



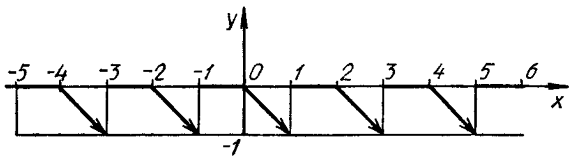
4.3.


y
2
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
x

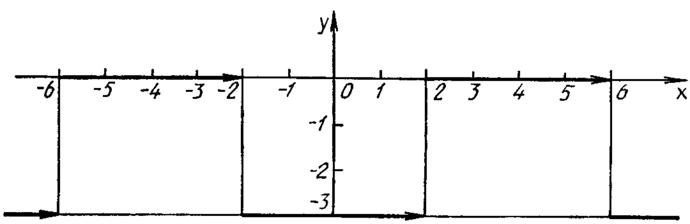
4.4.


y
-7,5
-4,5
-1,5
1,5
4,5
7,5
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
x
-1

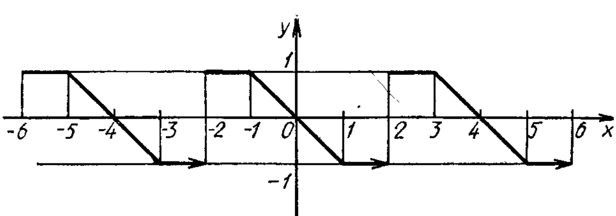
4.5.


y
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
x
-1

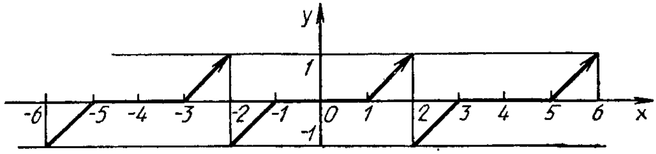
4.6.


y
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
x
-1
-2
-3

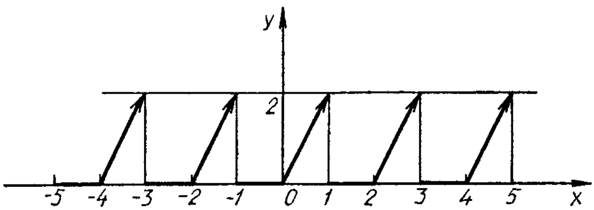
4.7.


y
1
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
x
-1

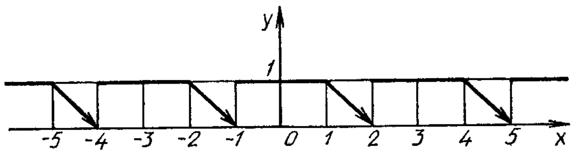
4.8.



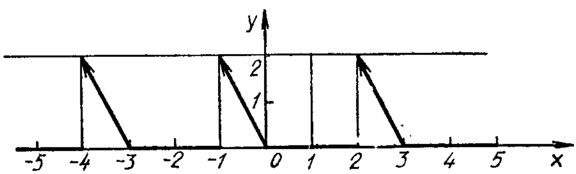
4.9.



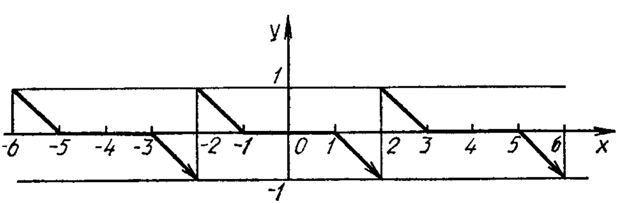
4.10.



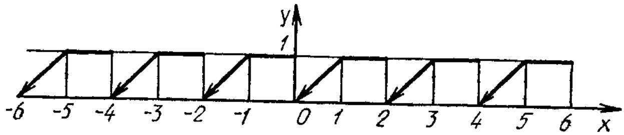
4.11.



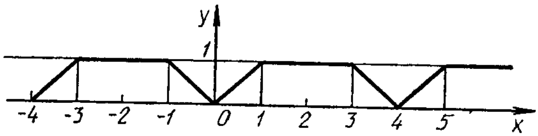
4.12.



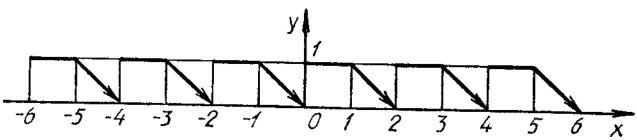
4.13.



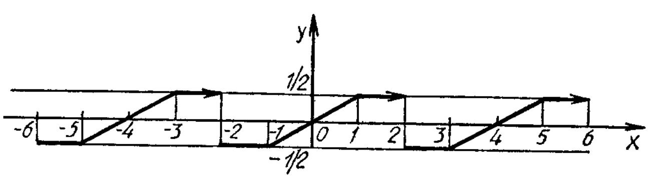
4.14.



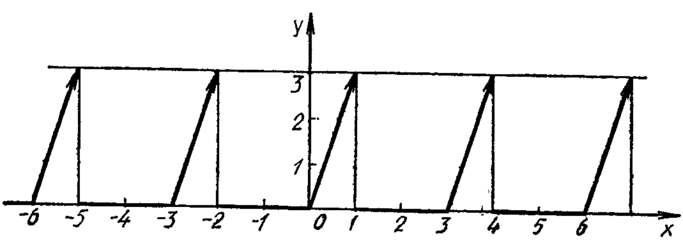
4.15.



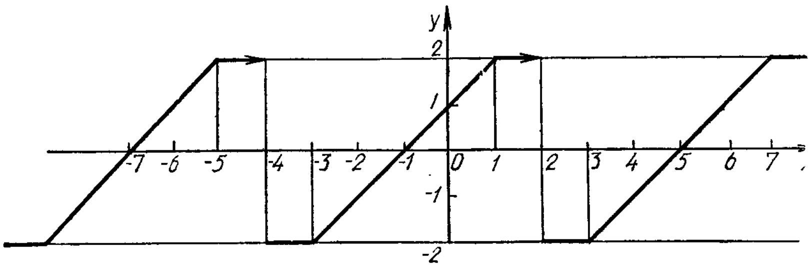
4.16.



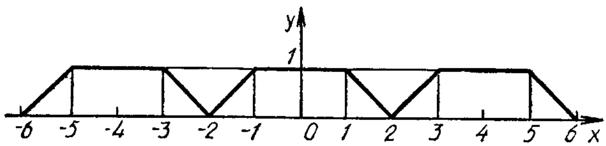
4.17.



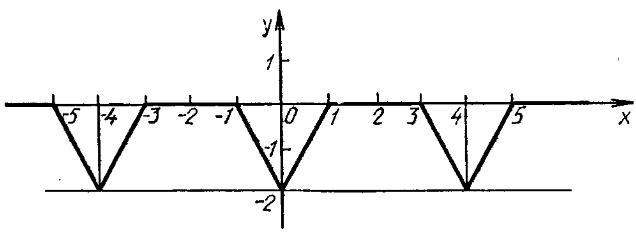
4.18.



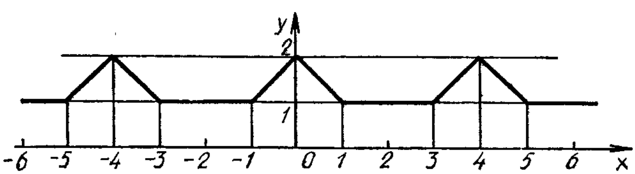
4.19.



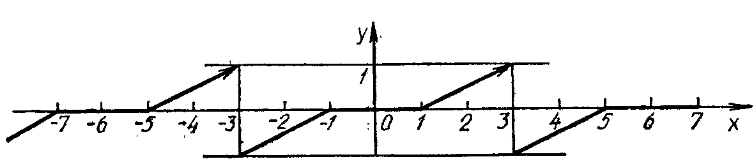
4.20.



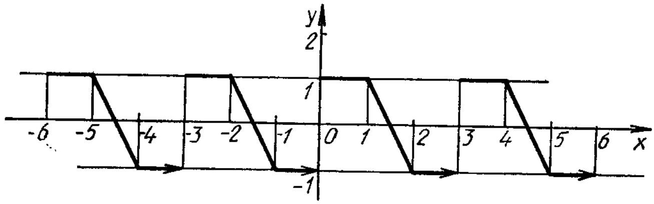
4.21.



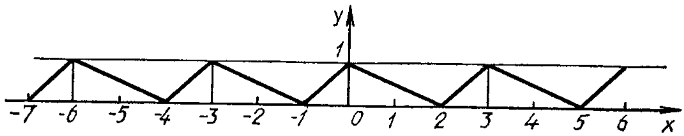
4.22.



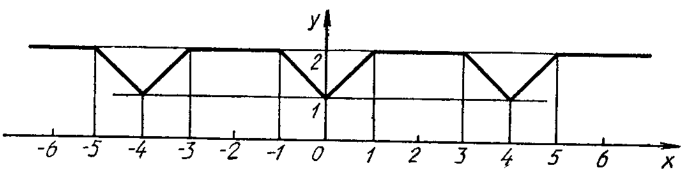
4.23.



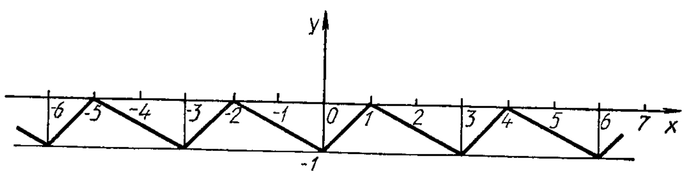
4.24.



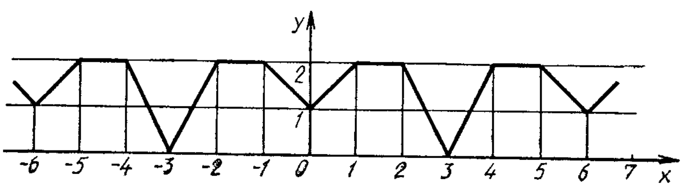
4.25.



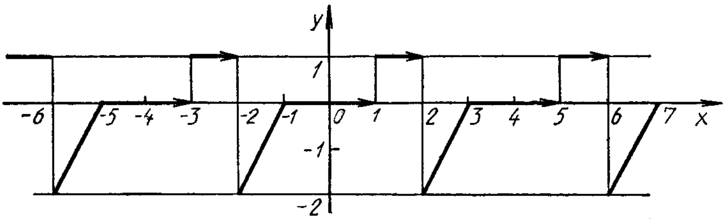
4.26.



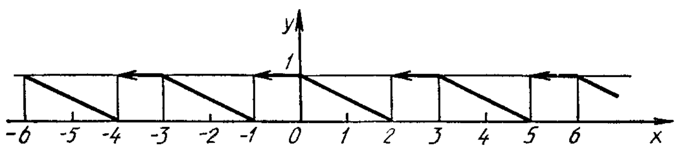
4.27.



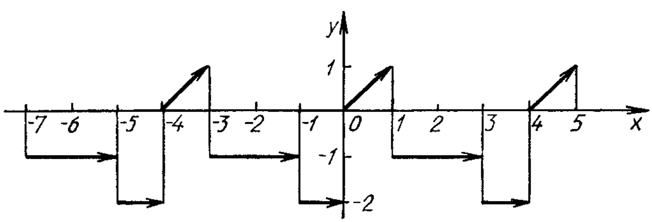
4.28.



4.29.



4.30.



5. Воспользовавшись разложением функции $f(x)$ в ряд Фурье в указанном интервале, найти сумму данного числового ряда.

5.1. $f(x)=|x|$, $(-\pi;\ \pi)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{\pi^2}{8}.\right)$

5.2. $f(x)=|\sin x|$, $(-\pi;\ \pi)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}.\right)$

5.3. $f(x)=x^2$, $[-\pi;\ \pi]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{\pi^2}{12}.\right)$

5.4. $f(x)=x$, $[0;\ \pi]$, по косинусам, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi^2}{8}.\right)$

5.5. $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ x^2/\pi, & 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3-(-1)^n}{n^2}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{7\pi^2}{12}.\right)$

5.6. $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0,\\ 1, & 0<x<\pi,\\ 0, & x=-\pi,\ x=0,\ x=\pi,\end{cases}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi}{4}.\right)$

5.7. $f(x)=\frac{\pi}{4}$, $(0;\ \pi)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi}{4}.\right)$

5.8. $f(x)=\cos x$, $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k+1)}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{2-\pi}{4}.\right)$

5.9. $f(x)=x$, $(0;\ \pi)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi^2}{8}.\right)$

5.10. $f(x)=x^2$, $(-\pi;\ \pi)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi^2}{6}.\right)$

5.11. $f(x)=x(\pi-x)$, $(0;\ \pi)$, по синусам, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi^3}{32}.\right)$

5.12. $f(x)=|\sin x|$, $(-\pi;\ \pi)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{2-\pi}{4}.\right)$

5.13. $f(x)=\begin{cases}0, & -3<x\leqslant 0,\\ x, & 0<x<3,\end{cases}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi^2}{8}.\right)$

5.14. $f(x)=\begin{cases}1, & -1\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi^2}{8}.\right)$

5.15. $f(x)=|x|$, $(-1;\ 1)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi^2}{8}.\right)$

5.16. $f(x)=x^2$, $(-\pi;\ \pi)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi^2}{8}.\right)$

5.17. $f(x)=\begin{cases}1, & -1\leqslant x<0,\\ 1/2, & x=0,\\ x, & 0<x\leqslant 1,\end{cases}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi^2}{8}.\right)$

5.18. $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ -1, & 1<x<2,\end{cases}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi}{4}.\right)$

5.19. $f(x)=\begin{cases}-x, & -4<x<0,\\ 1, & x=0,\\ 2, & 0<x<4,\end{cases}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi^2}{8}.\right)$

5.20. $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<3/2,\\ -1, & 3/2<x<3,\end{cases}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi}{4}.\right)$

5.21. $f(x)=\begin{cases}-1, & -2<x<0,\\ -1/2, & x=0,\\ x/2, & 0<x<2,\end{cases}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi^2}{8}.\right)$

5.22. $f(x)=\begin{cases}-2x, & -2<x<0,\\ 2, & x=0,\\ 4, & 0<x<2,\end{cases}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi^2}{8}.\right)$

5.23. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \leqslant x < 0, \\ x-1, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases} \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi^2}{8}.\right)$

5.24. $f(x)=\begin{cases} -2x, & -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ 3x, & 0 < x \leqslant \pi, \end{cases} \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)}{n^2}.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{7\pi^2}{20}.\right)$

5.25. $f(x)=\pi^2-x^2,\ (-\pi;\ \pi),\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.\ \left(\textit{Ответ: } \frac{\pi^2}{12}.\right)$

5.26. $f(x)=x\sin x,\ [-\pi;\ \pi],\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1}.\ \left(\textit{Ответ: } \frac{1}{4}.\right)$

5.27. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases} \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.\ \left(\textit{Ответ: } \frac{\pi}{4}.\right)$

5.28. $f(x)=\begin{cases} -a, & -\pi \leqslant x < 0, \\ a, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases} \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}.\ \left(\textit{Ответ: } \frac{\pi}{4}.\right)$

5.29. $f(x)=|\cos x|,\ [-\pi;\ \pi],\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi-2}{4}.\right)$

5.30. $f(x)=\left|\cos\frac{x}{2}\right|,\ [-\pi;\ \pi],\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi-2}{4}.\right)$

Решение типового варианта

1. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega=2\pi$) функцию

$$f(x)=\begin{cases}\pi+x, & -\pi\leqslant x<0,\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$$

► Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi+x)dx=\frac{1}{\pi}\left.\frac{(\pi+x)^2}{2}\right|_{-\pi}^{0}=\frac{1}{\pi}\,\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi+x)\cos nxdx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=\pi+x, & du=dx,\\ dv=\cos nxdx, & v=\frac{1}{n}\sin nx,\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{\pi+x}{n}\sin nx\right)\bigg|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n^2}\cos nx\bigg|_{-\pi}^{0}=\frac{1}{\pi n^2}(1-(-1)^n)=\frac{2}{\pi(2n-1)^2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi+x)\sin nxdx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=\pi+x, & du=dx,\\ dv=\sin nxdx, & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left(-\frac{\pi+x}{n}\cos nx\right)\bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}+\frac{1}{n^2}\sin nx\bigg|_{-\pi}^{0}\right)=-\frac{1}{n}.$$

Ряд Фурье для данной функции запишется в виде

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)\pi x)}{(2n-1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi x)}{n}.\ ◄$$

2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=8^{x/2}$, заданную в интервале $(0;\ \pi)$, продолжив (доопределив) ее четным и нечетным образом. Построить графики для каждого продолжения.

▶ Продолжим данную функцию четным образом (рис. 12.7). Тогда:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 8^{x/2}dx = \frac{2}{\pi}\cdot 2\cdot\frac{8^{x/2}}{\ln 8}\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi\ln 8}(8^{\pi/2}-1),$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 8^{x/2}\cos nx dx.$$

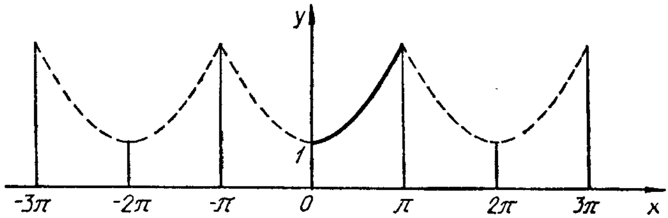


Рис. 12.7

Найдем неопределенный интеграл $\int 8^{x/2}\cos nx dx$, выполнив дважды интегрирование по частям:

$$\int 8^{x/2}\cos nx dx = \left| \begin{matrix} u = 8^{x/2}, & du = \frac{1}{2}\cdot 8^{x/2}\ln 8dx, \\ dv = \cos nx dx, & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{n}8^{x/2}\sin nx - \frac{\ln 8}{2n}\int 8^{x/2}\sin nx dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = 8^{x/2}, & du = \frac{1}{2}\cdot 8^{x/2}\ln 8dx, \\ dv = \sin nx dx, & v = -\frac{1}{n}\cos nx, \end{matrix} \right| = \frac{1}{n}\cdot 8^{x/2}\sin nx +$$

$$+ \frac{\ln 8}{2n^2}\cdot 8^{x/2}\cos nx - \frac{\ln^2 8}{4n^2}\int 8^{x/2}\cos nx dx,$$

$$\left(1 + \frac{\ln^2 8}{4n^2}\right)\int 8^{x/2}\cos nx dx = \frac{1}{n}\cdot 8^{x/2}\sin nx + \frac{\ln 8}{2n^2}\times$$

$$\times 8^{x/2}\cos nx,$$

$$\int 8^{x/2}\cos nx dx = \frac{4n^2}{4n^2+\ln^2 8}\left(\frac{1}{n}8^{x/2}\sin nx +\right.$$

$$\left. + \frac{\ln 8}{2n^2}\cdot 8^{x/2}\cos nx\right).$$

Вычислим коэффициенты a_n:

$$a_n = \frac{8n^2}{\pi(4n^2+(\ln 8)^2)}\left(\frac{1}{n}\cdot 8^{x/2}\sin nx + \frac{\ln 8}{2n^2}\cdot 8^{x/2}\cos nx\right)\Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{4\ln 8(8^{\pi/2}(-1)^n - 1)}{\pi(4n^2+(\ln 8)^2)}.$$

Следовательно, разложение данной функции по косинусам имеет вид

$$8^{x/2} = \frac{2(8^{\pi/2}-1)}{\pi\ln 8} + \frac{4\ln 8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^{\pi/2}\cdot(-1)^n - 1}{4n^2+(\ln 8)^2}\cos nx.$$

Теперь продолжим данную функцию нечетным образом (рис. 12.8). Тогда:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 8^{x/2}\sin nx dx,$$

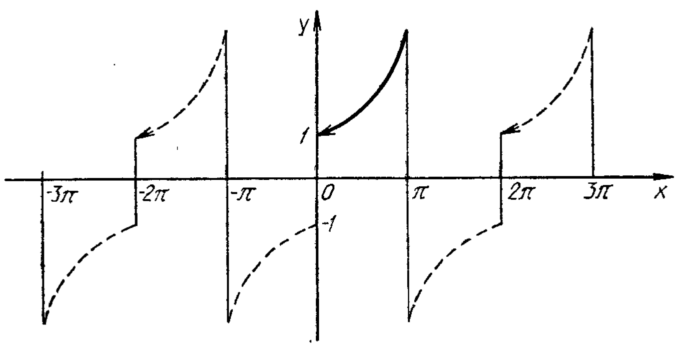


Рис. 12.8

$$\int 8^{x/2}\sin nx dx = \left|\begin{array}{l} u = 8^{x/2},\ du = \frac{1}{2}\cdot 8^{x/2}\ln 8 dx, \\ dv = \sin nx dx,\ v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array}\right| =$$

$$= -\frac{1}{n}8^{x/2}\cos nx + \frac{\ln 8}{2n}\int 8^{x/2}\cos nx dx =$$

$$= \left|\begin{array}{l} u = 8^{x/2},\ du = \frac{1}{2}8^{x/2}\ln 8 dx, \\ dv = \cos nx dx,\ v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right| =$$

$$= -\frac{1}{n}\cdot 8^{x/2}\cos nx + \frac{\ln 8}{2n^2}\cdot 8^{x/2}\sin nx -$$

$$- \frac{\ln^2 8}{4n^2}\int 8^{x/2}\sin nx dx,$$

$$b_n = \frac{8n^2}{\pi(4n^2+(\ln 8)^2)}\left(-\frac{1}{n}8^{x/2}\cos nx + \frac{\ln 8}{2n^2}\times\right.$$

$$\left.\times 8^{x/2}\sin nx\right)\Big|_0^\pi = \frac{8n\,(8^{\pi/2}(-1)^{n+1}+1)}{\pi\,(4n^2+(\ln 8)^2)}.$$

Следовательно, разложение данной функции по синусам имеет вид

$$8^{x/2} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^{\pi/2}(-1)^{n+1}}{4n^2+\ln^2 8}\,n\sin nx. \blacktriangleleft$$

3. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega = 2$) функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leqslant x < 0, \\ 0{,}5, & x = 0, \\ x, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

▶ Вычисляем коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \int_{-1}^{0} dx + \int_0^1 x dx = x\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$a_n = \int_{-1}^{0}\cos(n\pi x)\,dx + \int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x,\ du = dx, \\ dv = \cos(n\pi x)\,dx,\ v = \dfrac{\sin(n\pi x)}{\pi n} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\sin(n\pi x)\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{n\pi}x\sin(n\pi x)\Big|_0^1 -$$

$$- \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin(n\pi x) dx = \frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 = \frac{1}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1),$$

$$a_n = \frac{-2}{\pi^2(2n-1)^2},$$

$$b_n = \int_{-1}^{0} \sin(n\pi x)\,dx + \int_{0}^{1} x \sin(n\pi x)\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} u = x,\ du = dx, \\ dv = \sin(n\pi x)\,dx,\ v = \frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x) \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_{-1}^{0} - \frac{x}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_{0}^{1} +$$

$$+ \frac{1}{n\pi}\int_{0}^{1}\cos(n\pi x)\,dx = -\frac{1}{n\pi}(1-(-1)^n) - \frac{1}{n\pi}(-1)^n -$$

$$- \frac{1}{n^2\pi^2}\sin(n\pi x)\Big|_{0}^{1} = \frac{(-1)^n}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} - \frac{(-1)^n}{n\pi} = -\frac{1}{n\pi}.$$

В итоге получаем следующий ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)\pi x)}{(2n-1)^2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi x)}{n}. \blacktriangleleft$$

4. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную графически (рис. 12.9).

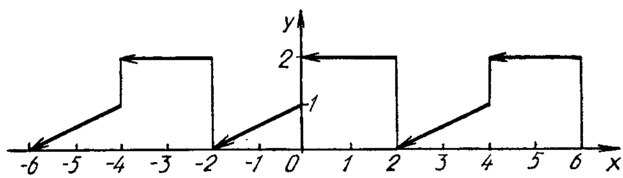


Рис. 12.9

▶ Запишем аналитическое выражение данной функции:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5x^2 + 1, & -2 < x \leqslant 0, \\ 2, & 0 < x \leqslant 2, \end{cases} \quad \omega = 4.$$

Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 2dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} + x\right)\Big|_{-2}^{0} +$$

$$+ x\Big|_{0}^{2} = -\frac{1}{2}(1-2) + 2 = \frac{5}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}x+1\right)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int\limits_{0}^{2}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx =$$

$$= \left|\begin{array}{l} u = x/2+1,\ du = (1/2)dx, \\ dv = \cos\frac{n\pi x}{2}dx,\ v = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{x/2+1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_{-2}^{0} - \frac{1}{2n\pi}\int\limits_{-2}^{0}\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx +$$

$$+ \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_{0}^{2} = \frac{1}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_{-2}^{0} =$$

$$= \frac{1}{n^2\pi^2}((-1)^{n+1}+1) = \frac{2}{\pi^2(2n-1)^2},$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}x+1\right)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int\limits_{0}^{2}\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx =$$

$$= \left|\begin{array}{l} u = x/2+1,\ du = (1/2)dx, \\ dv = \sin\frac{n\pi x}{2}dx,\ v = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} \end{array}\right| =$$

$$= -\frac{x/2+1}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_{-2}^{0} + \frac{1}{2n\pi}\int\limits_{-2}^{0}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx -$$

$$- \frac{2}{n\pi}((-1)^n-1) - \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_{0}^{2} = -\frac{1}{n\pi} +$$

$$+ \frac{1}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_{-2}^{0} - \frac{2}{n\pi}(-1)^n + \frac{2}{n\pi} =$$

$$= \frac{1}{n\pi} - \frac{2}{n\pi}(-1)^n = \frac{(1+2(-1)^{n+1})}{n\pi}.$$

Следовательно, искомый ряд Фурье

$$f(x) = \frac{5}{4} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)\pi x/2)}{(2n-1)^2} +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+2(-1)^{n+1})}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}. \blacktriangleleft$$

5. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

на отрезке [0; 2] (рис. 12.10) и найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

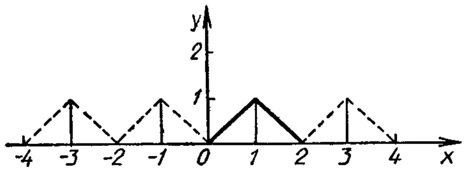


Рис. 12.10

▶ Продолжим функцию четным образом и вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0=\int\limits_0^1 x\,dx+\int\limits_1^2(2-x)\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=$$

$$=\frac{1}{2}+(4-2)-\left(2-\frac{1}{2}\right)=1,$$

$$a_n=\int\limits_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx+\int\limits_1^2(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=x,\ du=dx,\\ dv=\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx,\ v=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{array}\right|+$$

$$+\left|\begin{array}{l} u=2-x,\ du=-dx,\\ dv=\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx,\ v=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1-\frac{2}{n\pi}\int\limits_0^1\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx+$$

$$+\frac{2(2-x)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2+\frac{2}{n\pi}\int\limits_1^2\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-$$

$$-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2=-\frac{4}{\pi^2(2n+1)^2}.$$

Следовательно,

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}.$$

Полагая $x=0$, получаем:

$$0=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Таким образом, с помощью ряда Фурье мы нашли сумму числового ряда. ◀

12.7. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 12

1. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+5)}.$$

(*Ответ:* 1/90.)

2. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{7}+\left(\frac{5}{10}\right)^{3/2}+\ldots+\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n/2}+\ldots$$

(*Ответ:* сходится.)

3. Показать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ абсолютно сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}a_n$ также абсолютно сходится.

4. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 3^n}{(2n+1)^n}$. (*Ответ:* абсолютно сходится.)

5. Показать, что ряд, полученный при перемножении двух расходящихся рядов: $1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ и $1+$ $+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}(2^n+2^{-(n+1)})$, абсолютно сходится.

6. Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\cdot 2^n}$ нужно взять, чтобы абсолютная погрешность при замене суммы S этого ряда его n-й частичной суммой S_n не превышала $\alpha=$ $=10^{-3}$, т. е. чтобы $|S-S_n|=|r_n|\leqslant\alpha$? (*Ответ:* $n\geqslant 7$.)

7. Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{n^2}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01? (*Ответ:* $n=200$.)

8. С помощью почленного дифференцирования и интегрирования найти сумму ряда $1-3x^2+5x^4+\ldots+$ $+(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ S(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},\ |x|<1.\right)$

9. Доказать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}$, $0\leqslant$ $\leqslant x\leqslant\pi$.

10. Подобрать два таких ряда, чтобы их сумма была сходящимся рядом, а разность — расходящимся.

11. Доказать равномерную сходимость функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ на отрезке $[0;\ 1]$.

12. Исследовать на сходимость ряд с общим членом $u_n=\int\limits_0^{1/n}\frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2+1}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \text{сходится},\ u_n\leqslant\frac{2}{3n^{3/2}}.\right)$

13. Показать, что функция $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}$ является решением дифференциального уравнения $y'-xy=0$.

13. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

13.1. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ВЫЧИСЛЕНИЕ

На плоскости Oxy рассмотрим некоторую замкнутую область D, ограниченную замкнутой линией L. Пусть в D задана функция $z = f(x, y)$. Произвольными линиями разобьем D на n элементарных областей S_i, площади которых ΔS_i $(i = \overline{1, n})$ (рис. 13.1). В каждой области S_i выберем произвольную точку $P_i(x_i, y_i)$. *Диаметром* d_i *области* S_i называется длина наибольшей из хорд, соединяющих граничные точки S_i.

Выражение вида

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \tag{13.1}$$

называется *n-й интегральной суммой для функции* $z = f(x, y)$ *в области* D. Вследствие произвольного разбиения области D на элементарные области S_i и случайного выбора в них точек P_i можно составить бесчисленное множество указанных сумм. Однако, согласно теореме существования и единственности, если функция $z = f(x, y)$, например, непрерывна в D и линия L — кусочно-гладкая, то предел всех этих сумм, найденных при условии $d_i \to 0$, всегда существует и единствен.

Двойным интегралом функции $z = f(x, y)$ *по области* D называется предел $\lim\limits_{d_i \to 0} I_n$, обозначаемый $\iint\limits_D f(x, y)dS$. Таким образом, по определению

$$\iint\limits_D f(x, y)dS = \lim_{d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i. \tag{13.2}$$

Здесь и далее будем предполагать, что функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области D и линия L — кусочно-гладкая, поэтому указанный в формуле (13.2) предел всегда существует.

Укажем основные свойства двойного интеграла и его геометрический и физический смыслы.

1. $\iint\limits_D dS = S_D$, где S_D — площадь области интегрирования D.

2. Если подынтегральная функция $z = f(x, y) = \mu(x, y)$ — поверхностная плотность материальной пластины, занимающей область D, то масса этой пластины определяется по формуле

$$m = \iint\limits_D \mu(x, y)dS. \tag{13.3}$$

В этом заключается *физический смысл двойного интеграла.*

3. Если $f(x, y) \geqslant 0$ в области D, то двойной интеграл (13.2) численно равен объему V цилиндрического тела, находящегося над

плоскостью Oxy, нижним основанием которого является область D, верхним — часть поверхности $z = f(x, y)$, проектирующаяся в D, а боковая поверхность — цилиндрическая, причем ее прямолинейные образующие параллельны оси Oz и проходят через границу L области D (рис. 13.2). Если $f(x, y) \leqslant 0$ в области D, то двойной интеграл численно равен

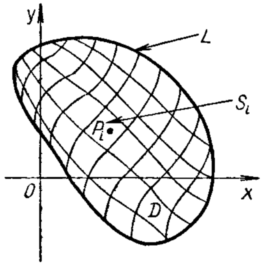


Рис. 13.1

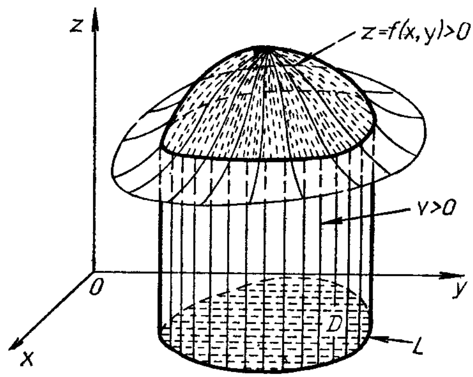


Рис. 13.2

объему цилиндрического тела, находящегося под плоскостью Oxy (рис. 13.3), взятому со знаком «—» ($-v$). Если же функция $f(x, y)$ в области D меняет знак, то двойной интеграл численно равен разности объемов цилиндрических тел, находящихся над плоскостью Oxy и под ней, т. е.

$$\iint\limits_D f(x, y)dS = v_1 - v_2 \tag{13.4}$$

(рис. 13.4). Это свойство выражает *геометрический смысл двойного интеграла*.

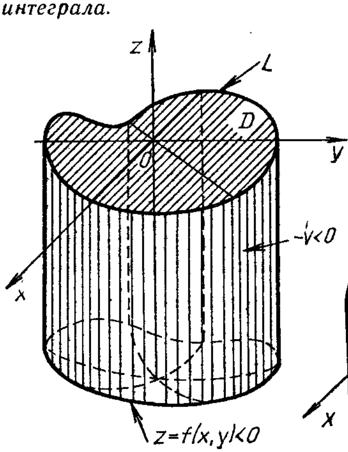


Рис. 13.3

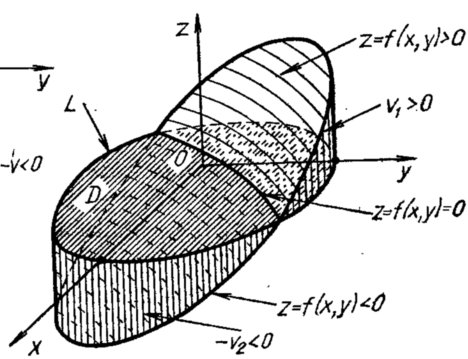


Рис. 13.4

4. Если функции $z=f_j(x, y)$ $(j=\overline{1, k})$ непрерывны в области D, то верна формула

$$\iint\limits_D \left(\sum_{j=1}^{k} f_j(x, y)\right) dS = \sum_{j=1}^{k} \cdot \iint\limits_D f_j(x, y) dS.$$

5. Постоянный множитель C подынтегральной функции можно выносить за знак двойного интеграла:

$$\iint\limits_D Cf(x, y)dS = C \iint\limits_D f(x, y)dS.$$

6. Если область D разбить на конечное число областей D_1, D_2, ..., D_k, не имеющих общих внутренних точек, то интеграл по области D равен сумме интегралов по областям D_k:

$$\iint\limits_D f(x, y)dS = \iint\limits_{D_1} f(x, y)dS + \iint\limits_{D_2} f(x, y)dS + \ldots + \iint\limits_{D_k} f(x, y)dS.$$

7 (теорема о среднем). Для непрерывной функции $z=f(x, y)$ в области D, площадь которой S_D, всегда найдется хотя бы одна точка $P(\xi, \eta) \in D$, такая, что

$$\iint\limits_D f(x, y)dS = f(\xi, \eta)S_D.$$

Число $f(\xi, \eta)$ называется *средним значением функции* $z=f(x, y)$ *в области* D.

8. Если в области D для непрерывных функций $f(x, y)$, $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ выполнены неравенства $f_1(x, y) \leqslant f(x, y) \leqslant f_2(x, y)$, то

$$\iint\limits_D f_1(x, y)dS < \iint\limits_D f(x, y)dS < \iint\limits_D f_2(x, y)dS.$$

9. Если функция $z=f(x, y) \neq \text{const}$ и непрерывна в области D, $M=\max\limits_{(x, y)\in D} f(x, y)$, $m=\min\limits_{(x, y)\in D} f(x, y)$, то

$$mS_D < \iint\limits_D f(x, y)dS < MS_D.$$

Замечание. Так как предел n-й интегральной суммы I_n (см. формулы (13.1), (13.2)) не зависит от способа разбиения области D на элементарные области S_i (теорема существования и единственности), то в декартовой системе координат область D удобно разбивать на элементарные области S_i прямыми, параллельными осям координат. Полученные при таком разбиении элементарные области S_i, принадлежащие области D, являются прямоугольниками. Следовательно, $dS=dxdy$ и

$$\iint\limits_D f(x, y)dS = \iint\limits_D f(x, y)dxdy.$$

Область интегрирования D называется *правильной в направлении оси Ox (оси Oy)*, если любая прямая, параллельная оси Ox (оси Oy), пересекает границу L области D не более двух раз (рис. 13.5, *а*). Область D считается также правильной, если часть ее границы или вся граница L состоит из отрезков прямых, параллельных осям координат (рис. 13.5, *б*).

Рассмотрим методы вычисления двойного интеграла по областям, правильным в направлении координатных осей; так как практически любую область можно представить в виде объединения правильных областей (рис. 13.5, *в*), то, согласно свойству 6 двойных интегралов, эти методы пригодны для их вычисления по любым областям.

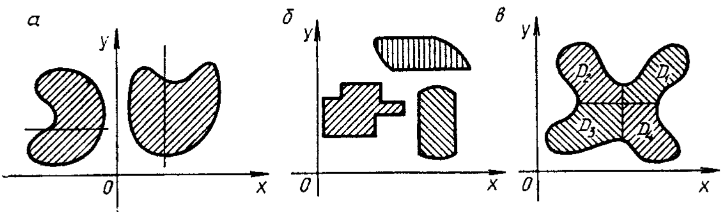


Рис. 13.5

Для вычисления двойного интеграла нужно проинтегрировать подынтегральную функцию $z = f(x, y)$ по одной из переменных (в пределах ее изменения в правильной области D) при любом постоянном значении другой переменной. Полученный результат проинтегрировать по второй переменной в максимальном диапазоне ее изменения в D. Тогда все произведения $f(x, y)dxdy$ в двойном интеграле (предел суммы (13.2)) будут учтены при суммировании точно по одному разу, и мы избавимся от лишних, не принадлежащих области D, произведений.

Если область D, правильная в направлении оси Oy, проектируется на ось Ox в отрезок $[a; b]$, то ее граница L разбивается на две линии: AmB, задаваемую уравнением $y = \varphi_1(x)$, и AnB, задаваемую уравнением $y = \varphi_2(x)$ (рис. 13.6). Тогда область D определяется системой неравенств:

$$D\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ \ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x),$$

и двойной интеграл вычисляется по правилу (внутреннее интегрирование ведется по переменной y, а внешнее — по переменной x)

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy. \tag{13.5}$$

Если область D, правильная в направлении оси Ox, проектируется на ось Oy в отрезок $[c; d]$, то ее граница L разбивается на две линии: CpD^*, задаваемую уравнением $x = \psi_1(y)$, и CqD^*, задаваемую уравнением $x = \psi_2(y)$ (рис. 13.7). В этом случае область D определяется системой неравенств:

$$D\colon\ c \leqslant y \leqslant d,\ \ \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y),$$

и двойной интеграл вычисляется по правилу (внутреннее интегрирование ведется по переменной x, а внешнее — по переменной y)

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx. \tag{13.6}$$

Выражения, стоящие в правых частях равенств (13.5), (13.6), называются *повторными* (или *двукратными*) *интегралами*.

Из равенств (13.5) и (13.6) следует, что

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx. \qquad (13.7)$$

Переход от левой части равенства (13.7) к правой его части и обратно называется *изменением порядка интегрирования в повторном интеграле*.

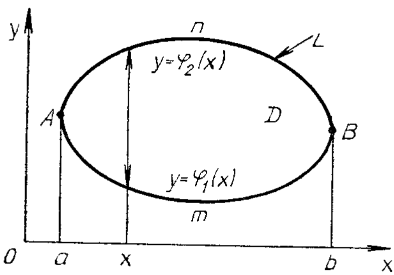


Рис. 13.6

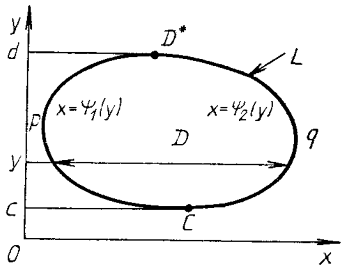


Рис. 13.7

Пример 1. На плоскости Oxy построить область интегрирования D по заданным пределам изменения переменных в повторном интеграле $I = \int_0^4 dx \int_{3x^2/8}^{3\sqrt{x}} dy$. Изменить порядок интегрирования и вычислить интеграл при заданном и измененном порядках интегрирования.

▶ Область интегрирования D расположена между прямыми $x = 0$ и $x = 4$, ограничена снизу параболой $y = 3x^2/8$, сверху параболой $y = 3\sqrt{x}$ (рис. 13.8). Следовательно,

$$I = \int_0^4 \left(y\Big|_{3x^2/8}^{3\sqrt{x}}\right)dx = \int_0^4 \left(3\sqrt{x} - 3x^2/8\right)dx = (2x^{3/2} - x^3/8)\Big|_0^4 = 8.$$

С другой стороны, область интегрирования D расположена между прямыми $y = 0$ и $y = 6$, а переменная x изменяется в данной области при каждом фиксированном значении y от точек параболы $x = y^2/9$ до точек параболы $x = \sqrt{8y/3}$, т. е., согласно формуле (13.7), имеем

$$I = \int_0^6 dy \int_{y^2/9}^{\sqrt{8y/3}} dx = \int_0^6 \left(\sqrt{\frac{8y}{3}} - \frac{y^2}{9}\right) dy =$$

$$= \left(2\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2}{3} y^{3/2} - y^3 \cdot \frac{1}{27}\right)\Big|_0^6 = 8. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле.

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y)dy.$$

▶ Область интегрирования D ограничена линиями $x=0$, $x=1$, $y=x^2$ и $y=2-x$ (рис. 13.9). Так как правый участок границы области D задан двумя линиями, то прямая $y=1$ разбивает ее на области D_1: $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{y}$ и D_2: $1 \leqslant y \leqslant 2$, $0 \leqslant x \leqslant 2-y$. В результате получаем

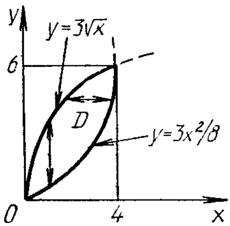


Рис. 13.8

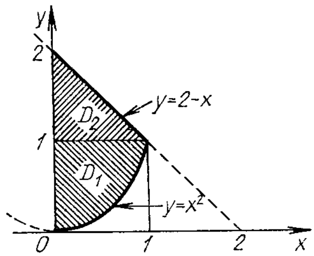


Рис. 13.9

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y)dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y)\,dx. \blacktriangleleft$$

Пример 3. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D (x+y+3)\,dxdy,$$

если область D ограничена линиями $x+y=$ $=2$, $x=0$, $y=0$.

▶ Область интегрирования D ограничена прямой $y=2-x$ и осями координат (рис. 13.10). Следовательно,

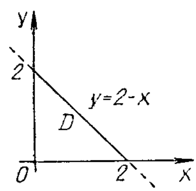


Рис. 13.10

$$\iint_D (x+y+3)\,dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x+y+3)\,dy =$$

$$= \int_0^2 \frac{(x+y+3)^2}{2}\Bigg|_{y=0}^{y=2-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (25-(x+3)^2)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(25x - \frac{(x+3)^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{26}{3}. \blacktriangleleft$$

Пример 4. Найти среднее значение функции $z=x+6y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $y=x$, $y=3x$, $x=2$.

▶ Средним значением функции $z = f(x, y)$ в области D является число (см. свойство 7 двойных интегралов)

$$\bar{f} = \frac{1}{S_D}\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy.$$

Вычислим сначала площадь области D:

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{3x} dy = \int\limits_0^2 (3x - x)\,dx = x^2\Big|_0^2 = 4.$$

Аналогично получаем

$$\iint\limits_D (x + 6y)\,dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{3x} (x + 6y)\,dy = \int\limits_0^2 \frac{1}{12}(x + 6y)^2\Big|_x^{3x} dx =$$

$$= \frac{1}{12}\int\limits_0^2 ((19x)^2 - (7x)^2)dx = \frac{1}{12}\int\limits_0^2 312x^2dx = 26\int\limits_0^2 x^2dx =$$

$$= \frac{26}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{208}{3}.$$

Таким образом,

$$\bar{f} = \frac{1}{4}\cdot\frac{208}{3} = \frac{52}{3}. \blacktriangleleft$$

АЗ-13.1

1. Вычислить следующие повторные интегралы:

а) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^1 (x^2 + 2y)dx;$

б) $\int\limits_{-3}^{8} dy \int\limits_{y^2-4}^{5} (x + 2y)dx;$ в) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{1/x}^{x} \frac{x^2dy}{y^2}.$

(*Ответ:* а) 14/3; б) 50,4; в) 2,25.)

2. Расставить пределы интегрирования в повторном интеграле для двойного интеграла $\iint\limits_D (x, y)\,dxdy$, если известно, что область интегрирования D:

а) ограничена прямыми $x = 1$, $x = 4$, $3x - 2y + 4 = 0$, $3x - 2y - 1 = 0$;

б) ограничена линией $x^2 + y^2 - 4x = 0$;

в) является треугольной областью с вершинами в точках $O(0, 0)$, $A(1, 3)$, $B(1, 5)$;

г) ограничена линиями $y = x^3 + 1$, $x = 0$, $x + y = 4$

3. Изменить порядок интегрирования в данных повторных интегралах:

а) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy$; б) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x}^{5x} f(x, y)\,dy$;

в) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\,dx$.

4. Вычислить $\iint\limits_D (x^2 + y)\,dxdy$, если область D ограничена линиями $y = x^2$ и $y^2 = x$. (*Ответ*: 33/140.)

5. Вычислить $\iint\limits_D x^3y^2\,dxdy$, если область D ограничена линией $x^2 + y^2 = 9$. (*Ответ*: 0.)

6. Вычислить $\iint\limits_D x\cos(x + y)\,dxdy$, если область D ограничена линиями $y = 0$, $x = \pi$, $y = x$. (*Ответ*: $-\pi/2$.)

7. Вычислить $\iint\limits_D y\,dxdy$, если область D ограничена первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox. $\left(\textit{Ответ: } \frac{5}{2}\pi a^3.\right)$

Самостоятельная работа

1. 1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$ в виде повторного интеграла при разных порядках интегрирования по x и по y, если известно, что область D ограничена линиями $y = 2x$, $x = 0$, $y + x = 3$.

2. Вычислить $\iint\limits_D x\,dxdy$, если область D ограничена линиями $y = x^2$, $y = 2x$. (*Ответ*: 4/3.)

2. 1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{x^2/2-3}^{2x-3} f(x, y)\,dy.$$

2. Вычислить $\iint\limits_D x\,dxdy$, если область D ограничена линиями $x = 0$, $y = 0$, $y = \sqrt{4 - x^2}$. (*Ответ*: 8/3.)

3. 1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int\limits_{-4}^{8} dy \int\limits_{(y+4)/2}^{\sqrt{3y+12}} f(x,\ y)\,dx.$$

2. Вычислить $\iint\limits_D x^2 dxdy$, если область D ограничена линиями $y = x$, $y = 1/x$, $x = 2$. (*Ответ:* 2.)

13.2. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДВОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Пусть переменные x, y связаны с переменными u, v соотношениями $x = \varphi(u,\ v)$, $y = \psi(u,\ v)$, где $\varphi(u,\ v)$, $\psi(u,\ v)$ — непрерывные и дифференцируемые функции, взаимно однозначно отображающие область D плоскости Oxy на область D' плоскости $O'uv$, при этом якобиан

$$J = J(x,\ y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

сохраняет постоянный знак в D. Тогда верна *формула замены переменных в двойном интеграле*.

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f(\varphi(u,\ v),\ \ \psi(u,\ v))\,|J|\,dudv. \qquad (13.8)$$

Пределы в новом интеграле расставляются по рассмотренному ранее правилу с учетом вида области D'.

Пример 1. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D (x + y)\,dxdy$$

по области D плоскости Oxy, ограниченной линиями $y = x - 1$, $y = x + 2$, $y = -x - 2$, $y = -x + 3$.

▶ Положим

$$\left.\begin{aligned} u &= y - x, \\ v &= y + x. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Тогда прямые $y = x - 1$ и $y = x + 2$ перейдут соответственно в прямые $u = -1$, $u = 2$ плоскости $O'uv$, а прямые $y = -x - 2$, $y = -x + 3$ — в прямые $v = -2$ и $v = 3$ этой же плоскости. При этом область D отобразится в прямоугольник D' плоскости $O'uv$, для которого $-1 \leqslant u \leqslant 2$, $-2 \leqslant v \leqslant 3$.

Из системы (1) находим:

$$\left.\begin{aligned} x &= (-u + v)/2, \\ y &= (\ \ u + v)/2. \end{aligned}\right\}$$

Следовательно,

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2},$$

а $|J| = 1/2$. Поэтому, согласно формуле (13.8),

$$\iint\limits_D (x+y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} v\cdot\frac{1}{2}\,dudv =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2} du \int\limits_{-2}^{3} vdv = \frac{15}{4}. \blacktriangleleft$$

Известно, что прямоугольные декартовы $(x,\ y)$ и полярные $(\rho,\ \varphi)$ координаты связаны между собой следующими соотношениями:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ (\rho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi).$$

Если в двойном интеграле перейти от декартовых к полярным координатам, то получим формулу (так как якобиан $J = \rho$)

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho d\varphi. \tag{13.9}$$

В обобщенных полярных координатах, для которых

$$x = a\rho\cos\varphi,\ y = b\rho\sin\varphi\ (\rho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi), \tag{13.10}$$

имеем (так как якобиан $J = ab\rho$):

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dxdx = ab\iint\limits_{D'} f(a\rho\cos\varphi,\ b\rho\sin\varphi)\,\rho d\rho d\varphi. \tag{13.11}$$

Представление двойных интегралов в виде повторных в правых частях формул (13.9), (13.11) приводит к разным пределам в зависимости от того, где находится полюс O полярной системы координат вне, внутри или на границе области D.

1. Если полюс O полярной системы координат находится вне области D, ограниченной лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ и линиями AmB, AnB (их уравнения соответственно $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, где $\rho_1(\varphi)$, $\rho_2(\varphi)$ $(\rho_1(\varphi) \leqslant \rho_2(\varphi))$ — функции, заданные на отрезке $[\alpha;\ \beta]$), то двойной интеграл в полярных координатах сводится к повторному интегралу по правилу (рис. 13.11)

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho. \tag{13.12}$$

2. Если полюс O находится внутри области D и уравнение границы области D в полярной системе координат имеет вид $\rho = \rho(\varphi)$, то в формуле (13.12) $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, $\rho_1(\varphi) = 0$, $\rho_2(\varphi) = \rho(\varphi)$ (рис. 13.12).

3. Если полюс O находится на границе области D и уравнение ее границы в полярной системе координат имеет вид $\rho = \rho(\varphi)$, то в формуле (13.12) $\rho_1(\varphi) = 0$, $\rho_2(\varphi) = \rho(\varphi)$, а α и β могут принимать различные значения (рис. 13.13, 13.14).

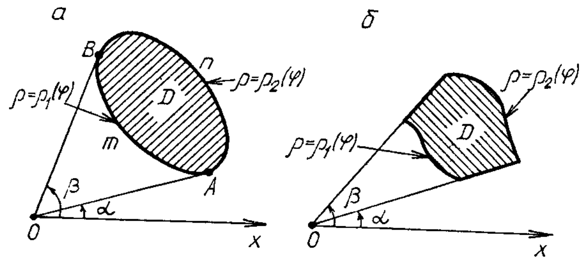


Рис. 13.11

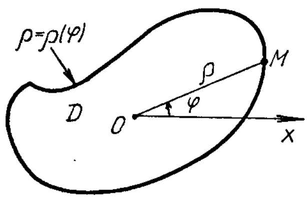


Рис. 13.12

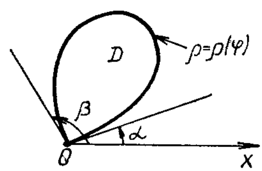


Рис. 13.13

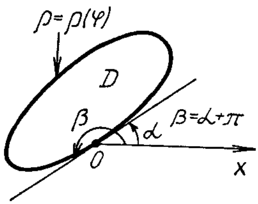


Рис. 13.14

Аналогичные формулы имеют место и для случая обобщенных полярных координат.

Пример 2. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{(x^2+y^2)^3}\,dxdy$, если область D — круг радиусом R с центром в начале координат.

▶ Если область D — круг или его часть, то многие интегралы проще вычислять в полярных координатах. Согласно формулам (13.9) и (13.12) (случай 2), имеем:

$$\iint\limits_D \sqrt{(x^2+y^2)^3}\,dxdy = \iint\limits_D \sqrt{(\rho^2\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\varphi)^3}\,\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \iint\limits_D \rho^4 d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^4 d\rho = 2\pi\frac{R^5}{5}. \ ◀$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

▶ В интеграле $\iint\limits_D dxdy$, выражающем площадь эллипса в декартовой системе координат, перейдем к обобщенным полярным координатам с помощью равенств (13.10). Уравнение эллипса в обобщенных полярных координатах имеет вид $\rho = 1$. Следовательно, согласно формуле (13.11), получаем

$$\iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D'} ab\rho d\rho d\varphi = ab\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho = \pi ab. \quad ◀$$

АЗ-13.2

1. Вычислить $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, если область D ограничена прямыми $2x+y=1$, $2x+y=3$, $x-y=-1$, $x-y=2$. (*Ответ:* 2,5.)

2. Использовав полярные координаты, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, если область D ограничена окружностью $x^2+y^2=4x$. (*Ответ:* 24π.)

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=6x$, $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y=\sqrt{3}x$. (*Ответ:* $5\pi/6$.)

4. Вычислить $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dxdy$, где D — часть кольца, ограниченного линиями $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$, $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y=\sqrt{3}x$. (*Ответ:* $\pi^2/6$.)

5. Найти $\iint\limits_D xydxdy$, если область D ограничена эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и прямыми $x=0$, $y=0$. (*Ответ:* $a^2b^2/8$.)

6. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$, использовав значение интеграла $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$, взятого по области D, ограниченной окружностью $x^2+y^2=R^2$ (*Ответ:* $\sqrt{\pi}$.)

Самостоятельная работа

1. Вычислить $\iint\limits_D (12-x-y)dxdy$, если область D ограничена окружностью $x^2+y^2=9$. (*Ответ:* 108π.)

2. Вычислить $\iint\limits_D (6 - 2x - 3y)dxdy$, если область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 4$. (*Ответ:* 24π.)

3. Вычислить $\iint\limits_D (4 - x - y)dxdy$, если область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 2x$. (*Ответ:* 3π.)

13.3. ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Вычисление площадей плоских фигур. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x$, $y = x$.

► По уравнениям границы области D строим данную фигуру (рис. 13.15). Так как линии, ограничивающие ее, пересекаются в точках $O(0, 0)$ и $M_0(3, 3)$, то в D справедливы неравенства: $0 \leqslant x \leqslant 3$, $x^2 - 2x \leqslant y \leqslant x$. Следовательно, на основании свойства 1 двойных интегралов искомая площадь

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_{x^2-2x}^{x} dy = \int\limits_0^3 (x - x^2 + 2x)dx =$$

$$= \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{9}{2}. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $a > 0$.

► Перейдем к полярной системе координат, в которой уравнение данной кривой примет вид:

$$\rho^4 = a^2\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi),$$

$$\rho^2 = a^2\cos 2\varphi, \quad \rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Последнее уравнение задает кривую, которая называется *лемнискатой Бернулли* (рис. 13.16).

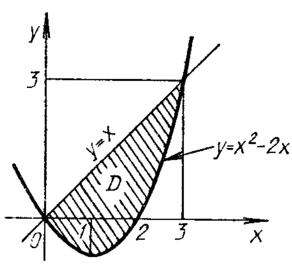


Рис. 13.15

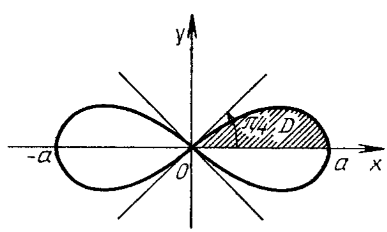


Рис. 13.16

Как видно из полученного уравнения и рис. 13.16, кривая симметрична относительно координатных осей, и площадь S фигуры, ограниченной этой кривой, выражается двойным интегралом $S =$

$= 4\iint\limits_D \rho d\rho d\varphi$. Здесь D — фигура (область), лежащая в первом квадранте, для которого $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$, $0 \leqslant \rho \leqslant a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Следовательно,

$$S = 4\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho d\rho = 4\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= 2a^2 \int\limits_0^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = a^2. \blacktriangleleft$$

Вычисление объемов тел. Рассмотрим следующие примеры.

Пример 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

$\blacktriangleright$ Данное тело ограничено координатными плоскостями, плоскостью $x + y = 1$, параллельной оси Oz, и параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$ (рис. 13.17). На основании геометрического смысла двойного

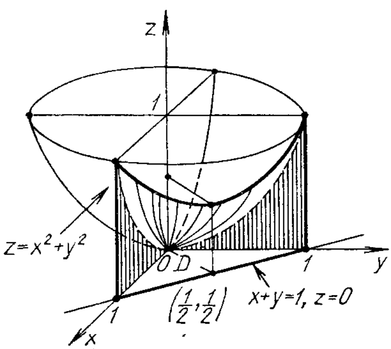


Рис. 13.17

интеграла (см. § 13.1, свойство 3) искомый объем v можно вычислить по формуле

$$v = \iint\limits_D (x^2 + y^2) dx dy,$$

где область D ограничена треугольником, лежащим в плоскости Oxy, для которого $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1 - x$. Следовательно,

$$v = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy = \int\limits_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{(1-x)^3}{3}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(1-x)^4}{12}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}. \blacktriangleleft$$

Пример 4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y = 1 + x^2 + z^2$, $y = 5$.

▶ Рассматриваемое тело ограничено параболоидом вращения с осью Oy и плоскостью $y=5$, перпендикулярной к оси Oy (рис. 13.18). Его проекция на плоскость Oxz — круг, определяемый уравнениями $y=0$, $x^2+z^2 \leqslant 4$. Искомый объем

$$y = \iint\limits_D (5-1-x^2-z^2)dxdz = \iint\limits_D (4-x^2-z^2)dxdz.$$

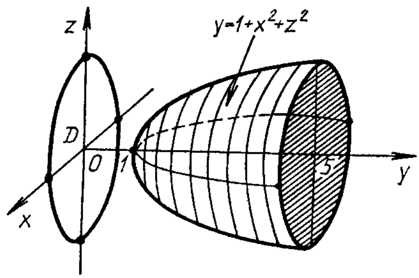


Рис. 13.18

Перейдем в полученном интеграле к полярным координатам с помощью равенств $x=\rho\cos\varphi$, $z=\rho\sin\varphi$. Тогда $dxdz=\rho d\rho d\varphi$ и

$$v = \iint\limits_D (4-\rho^2)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 (4\rho-\rho^3)d\rho =$$

$$= 2\pi\left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^2 = 8\pi. \blacktriangleleft$$

Вычисление площадей поверхностей. Пусть в области D_z плоскости Oxy задана непрерывная функция $z=f(x, y)$, имеющая непрерывные частные производные. Поверхность, определяемая такой функцией, называется *гладкой*. Очевидно, что область D_z есть проекция рассматриваемой поверхности на плоскость Oxy. Площадь Q_z поверхности $z=f(x, y)$, $(x, y)\in D_z$, вычисляется по формуле

$$Q_z = \iint\limits_{D_z} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy. \qquad (13.13)$$

В случае, когда гладкая поверхность задана функцией $x=f(y, z)$ (в области D_x) или функцией $y=f(x, z)$ (в области D_y), площадь этой поверхности вычисляется по формуле

$$Q_x = \iint\limits_{D_x} \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dydz \qquad (13.14)$$

или

$$Q_y = \iint\limits_{D_y} \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz. \qquad (13.15)$$

Пример 5. Вычислить площадь части конуса $y = 2\sqrt{x^2 + z^2}$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + z^2 = 4x$.

▶ Так как поверхность задана функцией вида $y = f(x, z)$, то ее площадь Q_y следует вычислять по формуле (13.15), где область D_y — проекция данной поверхности на плоскость Oxz (рис. 13.19). Эта проек-

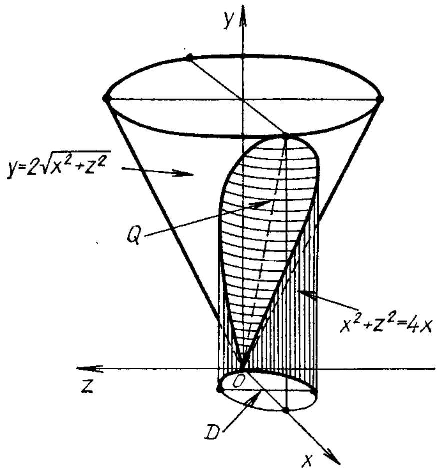


Рис. 13.19

ция представляет собой круг, органиченный окружностью $(x - 2)^2 + z^2 = 4$.

Так как

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2z}{\sqrt{x^2 + z^2}},$$

то искомая площадь

$$Q_y = \iint\limits_{D_y} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{x^2 + z^2} + \frac{4z^2}{x^2 + z^2}}\, dxdz =$$

$$= \sqrt{5} \iint\limits_{D_y} dxdy = \left| \begin{matrix} z = \rho \cos \varphi, & dxdz = \rho d\rho d\varphi, \\ x = \rho \sin \varphi, & \rho = 4 \sin \varphi \end{matrix} \right| =$$

$$= \sqrt{5} \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{4 \sin \varphi} \rho d\rho = 8\sqrt{5} \int\limits_0^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{5} \int\limits_0^{\pi} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = 4\sqrt{5} \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Bigg|_0^{\pi} = 4\pi\sqrt{5}. \ ◀$$

Вычисление массы материальной пластинки. Покажем, как это делается, на примере.

Пример 6. Вычислить массу материальной пластинки, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $x=(y-1)^2$, $y=x-1$, если ее поверхностная плотность $\mu = y$.

▶ Найдем координаты точек пересечения линий, ограничивающих область D: $A(1, 0)$, $B(4, 3)$ (рис. 13.20). Тогда из физического смысла двойного интеграла (см. § 13.1, свойство 2) следует, что искомая масса

$$m = \iint_D y dxdy = \int_0^3 dy \int_{(y-1)^2}^{y+1} y dx =$$

$$= \int_0^3 y(y+1-(y-1)^2)\,dy = \int_0^3 (3y^2 - y^3)dy =$$

$$= \left(y^3 - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^3 = \frac{27}{4}. \blacktriangleleft$$

Вычисление статических моментов и координат центра масс материальной пластинки. Если на плоскости Oxy дана материальная пластинка D непрерывной поверхностной плотностью $\mu(x, y)$, то координаты ее центра масс $C(x_C, y_C)$ определяются по формулам:

$$x_C = \frac{\iint_D x\mu(x, y)dxdy}{\iint_D \mu(x, y)dxdy}, \quad y_C = \frac{\iint_D y\mu(x, y)dxdy}{\iint_D \mu(x, y)dxdy} \tag{13.16}$$

Величины

$$M_x = \iint_D y\mu(x, y)dxdy, \quad M_y = \iint_D x\mu(x, y)dxdy \tag{13.17}$$

называются *статическими моментами пластинки* D относительно осей Ox и Oy соответственно.

Пример 7. Найти координаты центра масс пластинки D, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y=x$, $y=2x$, $x=2$ (рис. 13.21), если ее плотность $\mu(x, y) = xy$.

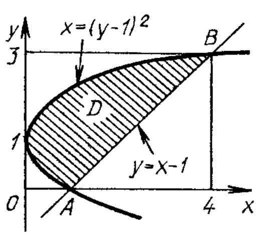


Рис. 13.20

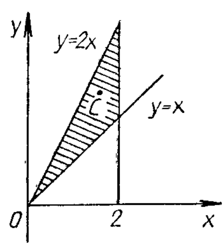


Рис. 13.21

▶ Вначале определим массу пластинки D:

$$m = \iint_D xydxdy = \int_0^2 xdx \int_x^{2x} ydy = \int_0^2 x \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_x^{2x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 x(4x^2 - x^2)dx = \frac{3}{2}\int_0^2 x^3dx = \frac{3}{8}x^4\Big|_0^2 = 6.$$

Согласно формулам (13.16), координаты центра масс:

$$x_C = \frac{1}{m}\iint_D x^2y\,dxdy = \frac{1}{6}\int_0^2 x^2dx\int_x^{2x} ydy =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^2 x^2\,\frac{1}{2}(4x^2 - x^2)dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x^4dx = \frac{x^5}{20}\Big|_0^2 = \frac{8}{5},$$

$$y_C = \frac{1}{m}\iint_D xy^2dxdy = \frac{1}{6}\int_0^2 xdx\int_x^{2x} y^2dy =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^2 x\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_x^{2x} = \frac{7}{18}\int_0^2 x^4dx = \frac{112}{45}. \blacktriangleleft$$

Вычисление моментов инерции материальной пластинки. Моменты инерции относительно начала координат и осей координат Ox, Oy материальной пластинки D непрерывно распределенной поверхностной плотностью $\mu(x, y)$, которая лежит в плоскости Oxy, вычисляются соответственно по формулам:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\mu(x, y)dxdy,$$
$$I_x = \iint_D y^2\mu(x, y)dxdy, \quad I_y = \iint_D x^2\mu(x, y)dxdy. \qquad (13.18)$$

Пример 8. Вычислить моменты инерции относительно точки границы однородного круга и его диаметра, если радиус круга R, а вес P.

▶ Поместим начало координат в точке, лежащей на границе круга, а центр круга — в точке $C(R; 0)$ (рис. 13.22). Тогда задача сведется

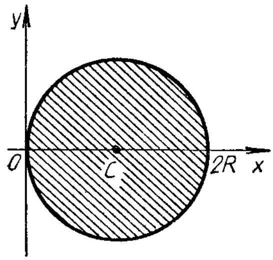


Рис. 13.22

к нахождению моментов инерции круга относительно начала координат и оси Ox.

Так как круг однороден, то его плотность μ постоянна и $\mu = P/(g\pi R^2)$. Уравнение окружности в декартовой системе координат имеет вид $(x-R)^2+y^2=R^2$, а в полярной — $\rho = 2R\cos\varphi$. Для данного круга выполняются соотношения $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \rho \leqslant 2R\cos\varphi$.

Следовательно, на основании формул (13.18) имеем:

$$I_0 = \mu \iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy =$$

$$= \mu \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2R\cos\varphi} \rho^3 d\rho = \mu\cdot 4R^4 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi =$$

$$= 8\mu R^4 \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = 2\mu R^4 \int\limits_0^{\pi/2} \left(1+2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= 2\mu R^1 \left(\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{3}{2}\mu\pi R^4 = \frac{3}{2}\frac{P}{g}R^2,$$

$$I_x = \mu \iint\limits_D y^2 dxdy = \mu \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2R\cos\varphi} \rho^3 \sin^2\varphi d\rho =$$

$$= 4\mu R^4 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi \sin^2\varphi d\varphi = 8\mu R^1 \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\sin^2 2\varphi \cdot \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= \mu R^4 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 2\varphi d\varphi + \mu R^4 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi d\varphi =$$

$$= \mu R^4 \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-\cos 4\varphi)d\varphi + \mu R^4 \frac{\sin^3 2\varphi}{6}\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\mu R^4 \left(\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}\mu R^4 = \frac{1}{4}\frac{P}{g}R^2 \blacktriangleleft$$

АЗ-13.3

1. Вычислить площади фигур, ограниченных следующими линиями:

а) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x = 4$;

б) $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = -6x + 9$; в) $\rho = a\sin 2\varphi$, $a > 0$.
$\left(\right.$*Ответ:* а) $\frac{16}{3}$; б) $\frac{16}{3}\sqrt{15}$; в) $\frac{1}{2}\pi a^2$.$\left.\right)$

2. Вычислить объемы тел, ограниченных указанными поверхностями:

а) плоскостями $x=0$, $y=0$,, $z=0$, $x=4$, $y=4$ и параболоидом $z=1+x^2+y^2$;

б) цилиндрами $x^2+y^2=R^2$, $x^2+z^2=R^2$;

в) параболоидом $z=x^2+y^2$ и плоскостями $z=0$, $y=1$, $y=2x$, $y=6-x$;

г) цилиндром $x^2+y^2=4$ и плоскостями $z=0$, $z=x+y+10$;

д) эллиптическим цилиндром $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ и плоскостями $z=12-3x-4y$, $z=1$. $\left(\textit{Ответ:}\ \text{а) } 186\frac{2}{3};\ \text{б) } \frac{16}{3}R^3;\ \text{в) } 78\frac{15}{32};\ \text{г) } 40\pi;\ \text{д) } 22\pi.\right)$

3. Вычислить площадь части плоскости $6x+3y+2z=12$, которая расположена в первом октанте. (*Ответ:* 14.)

4. Вычислить площадь части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ расположенной внутри цилиндра $x^2+y^2=4x$. (*Ответ*: $4\sqrt{2}\pi$.)

5. Вычислить площадь части поверхности параболоида $2z=x^2+y^2$, лежащей внутри цилиндра $x^2+y^2=1$ $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{3}\pi(\sqrt{8}-1).\right)$

6. Вычислить массу квадратной пластины со стороной a, если ее плотность в любой точке M пропорциональна квадрату расстояния от этой точки до точки пересечения диагоналей, а в угловых точках квадрата равна единице. (*Ответ:* $a^2/3$.)

Самостоятельная работа

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2-x$, $y^2=4x+4$. (*Ответ:* 64/3.)

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=1$, $z=0$, $x+y+z=4$. (*Ответ:* 4π.)

3. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндром $z=y^2/2$ и плоскостями $2x+3y=12$, $x=0$, $y=0$, $z=0$. (*Ответ:* 16.)

АЗ-13.4

1. Вычислить координаты центра масс однородной плоской фигуры, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$. (*Ответ:* $x_C = 2/5$, $y_C = 0$.)

2. Вычислить координаты центра масс фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y^2 = x$, если плотность фигуры $\mu(x, y) = xy$. (*Ответ:* $x_C = 9/14$, $y_C = 3/56$.)

3. Найти координаты центра масс однородной плоской фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ x_C = \frac{5}{6}a,\ y_C = 0.\right)$

4. Вычислить момент инерции относительно начала координат фигуры, ограниченной линией $x^2 + y^2 - 2x = 0$, если ее плотность $\mu(x, y) = 3, 5$. (*Ответ:* $21\pi/4$.)

5. Вычислить моменты инерции относительно начала координат и осей координат пластины плотностью $\mu(x, y) = x^2 y$, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 1$. (*Ответ:* $I_0 = 104/495$, $I_x = 4/33$, $I_y = 4/45$.)

6. Вычислить момент инерции относительно полюса пластины, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 - \cos\varphi)$, если ее плотность $\mu = 1{,}6$. (*Ответ:* $7\pi a^4/2$.)

7. Вычислить момент инерции относительно центра ($\mu(x, y) = 1$) эллиптической пластины с полуосями a и b. (*Ответ:* $\pi ab(a^2 + b^2)/4$.)

Самостоятельная работа

1. Вычислить момент инерции относительно начала координат фигуры плотностью $\mu(x, y) = 1$, ограниченной линиями $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$. (*Ответ:* 4.)

2. Вычислить координаты центра масс однородной фигуры, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y = -x^2 + 2x$, $y = 0$. (*Ответ:* $x_C = 1$, $y_C = 1/4$.)

3. Вычислить момент инерции относительно точки пересечения диагоналей прямоугольной пластинки со сторонами 4 и 6, если ее плотность $\mu(x, y) = 2$. (*Ответ:* 208.)

13.4. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЕ

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ непрерывна в замкнутой области $V \in \mathbf{R}^3$, ограниченной некоторой замкнутой кусочно-гладкой поверхностью S. С помощью произвольных гладких поверхностей разобьем область V на n элементарных областей V_i $(i=\overline{1, n})$, объемы которых обозначим через Δv_i. В каждой элементарной области V_i выберем произвольно точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и построим сумму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i. \qquad (13.19)$$

Через d_i обозначим максимальный диаметр элементарной области V_i.

Сумма (13.19) называется *n-й интегральной суммой функции $f(x, y, z)$ в области V.*

Предел сумм (13.19), найденный при условии, что $d_i \to 0$, называется *тройным интегралом функции $f(x, y, z)$ по области V* и обозначается $\iiint\limits_V f(x, y, z)dv$. Таким образом, по определению

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dv = \lim_{d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i. \qquad (13.20)$$

Если подынтегральная функция $f(x, y, z)$ непрерывна в области V, то интеграл (13.20) существует и не зависит от способа разбиения V на элементарные области V_i и выбора точек M_i.

Многие отмеченные в § 13.1 свойства двойных интегралов справедливы и для тройных интегралов, поэтому приведем только те их свойства, которые несколько отличаются от свойств двойных интегралов.

1. Если в области V $f(x, y, z) \equiv 1$, то

$$\iiint\limits_V dv = v, \qquad (13.21)$$

где v — объем области V.

2. В случае, когда подынтегральная функция $f(x, y, z)$ задает плотность $\delta(x, y, z)$ тела, занимающего область V, тройной интеграл выражает массу этого тела:

$$m = \iiint\limits_V \delta(x, y, z)dv. \qquad (13.22)$$

Следует подчеркнуть, что в декартовой системе координат область V удобно разбивать на элементарные области плоскостями, параллельными координатным плоскостям; при этом элемент объема $dv = dxdydz$.

Считаем область V правильной (т. е. такой, что прямые, параллельные осям координат, пересекают границу области V не более, чем в двух точках). Для правильной области V справедливы неравенства (рис. 13.23): $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$, $\psi_1(x, y) \leqslant z \leqslant \psi_2(x, y)$ и следующая формула для вычисления тройного интеграла

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)dz. \qquad (13.23)$$

Таким образом, при вычислении тройного интеграла в случае простейшей правильной области V вначале интегрируют функцию $f(x, y, z)$ по одной из переменных (например, z) при условии, что оставшиеся две переменные принимают любые постоянные значения в области интегрирования, затем результат интегрируют по второй переменной (например, y) при любом постоянном значении третьей переменной в V и, наконец, выполняют интегрирование по третьей переменной (например, x) в максимальном диапазоне ее изменения в V

Более сложные области интегрирования разбиваются на конечное число правильных областей, и результаты вычисления по этим областям суммируются. В частности, если область интегрирования — прямоугольный параллелепипед, задаваемый неравенствами $V=\{a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant \leqslant y\leqslant d,\ p\leqslant z\leqslant q\}$, то

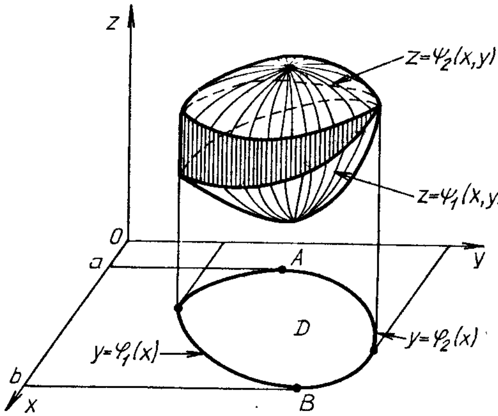


Рис. 13.23

$$\iiint\limits_V f(x,\ y,\ z)dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d dy\int\limits_p^q f(x,\ y,\ z)dz. \qquad (13.24)$$

Пример 1. Вычислить тройной интеграл $I=\iiint\limits_V(2x+y)dxdydz$, где V ограничена поверхностями: $y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=1,\ z=1+x^2+y^2$.

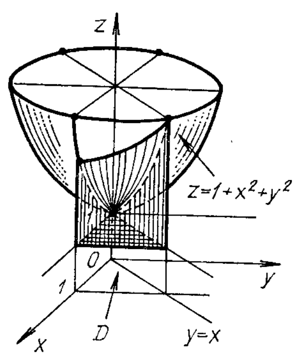


Рис. 13.24

▶ По заданным поверхностям строим область интегрирования (рис. 13.24). В области V справедливы неравенства: $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant x,\ 1\leqslant z\leqslant 1+x^2+y^2$. Тогда

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_1^{1+x^2+y^2} (2x+y)dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x (2x+y)z \Big|_1^{1+x^2+y^2} dy = \int_0^1 dx \int_0^x (2x+y)(x^2+y^2)dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x (2x^3 + y^3 + 2xy^2 + x^2y)\, dy =$$

$$= \int_0^1 \left(2x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{2}{3}xy^3 + \frac{1}{4}y^4\right)\Big|_0^x dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{41}{12}x^4 dx = \frac{41}{60}. \blacktriangleleft$$

Пусть функции

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u,\ v,\ w), \\ y &= \psi(u,\ v,\ w), \\ z &= \chi(u,\ v,\ w). \end{aligned}\right\} \qquad (13.25)$$

непрерывны, имеют непрерывные частные производные, якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

и сохраняет знак в области V' изменения переменных u, v, w. Функции (13.25) отображают взаимно однозначно область V в область V' Тогда верна формула

$$\iiint\limits_V f(x,\ y,\ z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(\varphi(u,\ v,\ w),\ \ \psi(u,\ v,\ w),\ \chi(u,\ v,\ w))\,|J|\,dudvdw.$$

В цилиндрических координатах ρ, φ, z (рис. 13.25) имеем:

$$\left.\begin{aligned} x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z, \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \rho < \infty,\ -\infty < z < \infty, \\ J = \rho,\ dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz. \end{aligned}\right\} \qquad (13.26)$$

В сферических координатах r, φ, θ (r — радиус-вектор, φ — долгота, θ — широта или склонение) (рис. 13.26) получаем:

$$\left.\begin{aligned} x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta, \\ 0 \leqslant r < \infty,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \\ J = r^2\sin\theta,\ dxdydz = r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (13.27)$$

В обобщенных сферических координатах

$$\left.\begin{aligned} x = ar\sin\theta\cos\varphi,\ y = br\sin\theta\sin\varphi,\ z = cr\cos\theta, \\ J = abcr^2\sin\theta,\ dxdydz = abcr^2\sin\theta dr d\varphi d\theta. \end{aligned}\right\} (13.28)$$

Соотношения (13.26) — (13.28) позволяют осуществлять в тройных интегралах переход от декартовых к цилиндрическим, сферическим или обобщенным сферическим координатам. Формула (13.23) для вычисления тройных интегралов в декартовых координатах справедлива также в цилиндрических и сферических координатах.

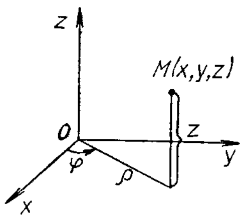


Рис. 13.25

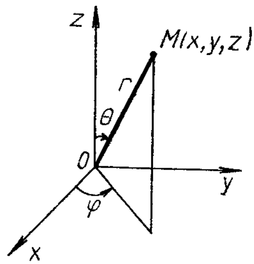


Рис. 13.26

Пример 2. Вычислить $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, если область интегрирования V ограничена поверхностями $x^2+y^2=4$, $z=1$, $z=2+ + x^2+y^2$.

▶ По заданным поверхностям построим область V (рис. 13.27). Перейдем в заданном интеграле к цилиндрической системе координат:

$$I = \iiint\limits_{V'} \rho\rho d\rho d\varphi dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^2 d\rho \int_1^{2+\rho^2} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^2(1+\rho^2)d\varphi =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi} \int_0^2 (\rho^2+\rho^4)d\rho = 2\pi\left(\frac{\rho^3}{3}+\frac{\rho^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{272}{15}\pi. ◀$$

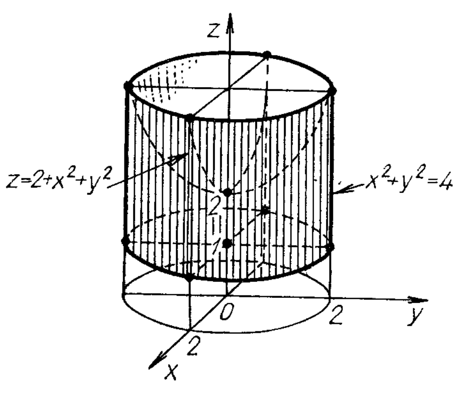


Рис. 13.27

Пример 3. Вычислить $I=\iiint\limits_V \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\,dxdydz$, если область интегрирования V ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=4$ и плоскостью $y=0$ $(y\geqslant 0)$.

▶ Область V представляет собой полушар, расположенный правее плоскости Oxz $(y\geqslant 0)$, т. е. сферические координаты r, φ, θ изменяются в V следующим образом: $0\leqslant z\leqslant 2$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. Это означает, что

$$I=\iiint\limits_{V'} r^3r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta=$$

$$=\int_0^\pi d\varphi\int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^2 r^5dr=\varphi\Big|_0^\pi\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^\pi\cdot\frac{r^6}{6}\Big|_0^2=\frac{64}{3}\pi.$$ ◀

АЗ-13.5

1. Вычислить $\iiint\limits_V x^2y^2z\,dxdydz$, если область V определяется неравенствами $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant x$, $0\leqslant z\leqslant xy$. (*Ответ:* 1/110.)

2. Вычислить $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, если область V ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right).\right)$

3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y=x^2$, $y+z=4$, $z=0$. (*Ответ:* 256/15.)

4. Вычислить $\iiint\limits_V x^2y^2dxdydz$, если область V ограничена поверхностями $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=x^2+y^2$. (*Ответ:* $\pi/32$.)

5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=10x$, $x^2+y^2=13x$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$, $y\geqslant 0$. (*Ответ:* 266.)

6. Вычислить

$$\iiint\limits_V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz,$$

если область V — внутренность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{4}{5}\pi abc.\right)$

7. Вычислить объем части шара $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной внутри конуса $z^2=x^2+y^2$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{4}{3}\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

Самостоятельная работа

1. 1. Расставить пределы интегрирования в интеграле $\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz$, если область V ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x+3y+4z=12$.

2. Вычислить $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями $z=x^2+y^2$, $z=1$. (*Ответ:* $4\pi/15$.)

2. 1. Расставить пределы интегрирования в интеграле $\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями $y=x$, $y=2x$, $z=0$, $x+z=2$.

2. Вычислить $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+z^2}\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями $y=x^2+z^2$, $z=1$. (*Ответ:* $4\pi/15$.)

3. 1. Расставить пределы интегрирования в интеграле $\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями $y=x^2$, $z=0$, $y+z=4$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=9$, $z=1$, $x+y+z=11$. (*Ответ:* 90π.)

13.5. ПРИЛОЖЕНИЯ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Вычисление объемов тел. Объем v области V (объем тела) обычно вычисляют по формуле (13.21), в которой в тройном интеграле можно переходить (если это удобно) к различным координатам (цилиндрическим, сферическим и др.).

Пример 1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=1$, $z=5-x^2-y^2$.

▶ По заданным уравнениям поверхностей в декартовых координатах строим область V (рис. 13.28). Тогда в цилиндрической системе координат искомый объем

$$v=\iiint\limits_{V'} \rho d\rho d\varphi dz,$$

где V': $\{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\rho\leqslant 2,\ 1\leqslant z\leqslant 5-\rho^2\}$. Следовательно,

$$v = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \rho d\rho \int\limits_1^{5-\rho^2} dz =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{2} \rho(5 - \rho^2 - 1) d\rho = 2\pi\left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = 8\pi. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Вычислить объем тела, ограниченного эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

▶ В обобщенных сферических координатах верны формулы (13.26), и поэтому искомый объем

$$v = \iiint\limits_{V'} abcr^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta,$$

где V' — область, в которую отображается внутренность эллипсоида при переходе к обобщенным сферическим координатам. Уравнение поверхности, ограничивающей область V', в обобщенных сферических координатах получается путем подстановки в уравнение эллипсоида значений x, y, z из формул (13.28):

$$r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + r^2 \cos^2\theta = 1,$$

т. е. $r = 1$. Следовательно,

$$v = abc \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin^2\theta d\theta \int\limits_0^{1} r^2 dz = \frac{4}{3}\pi abc. \blacktriangleleft$$

Вычисление массы тела. Масса m тела вычисляется по формуле (13.22).

Пример 3. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностью конуса $(z-2)^2 = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 0$, если плотность тела $\delta(x, y, z) = z$.

▶ Вершина конуса находится в точке $O_1(0, 0, 2)$, и в сечении конуса плоскостью $z = 0$ получается окружность $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ (рис. 13.29). На поверхности рассматриваемого тела $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ Тогда масса

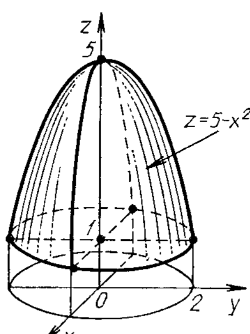


Рис. 13.28

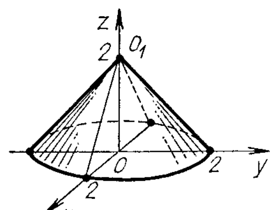


Рис. 13.29

$$m = \iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_V z\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho\,d\rho \int\limits_0^{2-\rho} dz =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^2 \rho(2-\rho)\,d\rho = 2\pi\left(\rho^2 - \frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{3}\pi. \blacktriangleleft$$

Вычисление координат центра масс тела. Пусть в пространстве $\mathbf{R}^3$ задано некоторое тело V непрерывно распределенной объемной плотностью $\delta = \delta(x, y, z)$. Тогда координаты центра масс этого тела определяются по формулам:.

$$x_C = \frac{\iiint\limits_V x\delta(x, y, z)\,dv}{\iiint\limits_V \delta(x, y, z)\,dv}, \quad y_C = \frac{\iiint\limits_V y\delta(x, y, z)\,dv}{\iiint\limits_V \delta(x, y, z)\,dv}, \quad z_C = \frac{\iiint\limits_V z\delta(x, y, z)\,dv}{\iiint\limits_V \delta(x, y, z)\,dv}.$$

Величины

$$M_x = \iiint\limits_V x\delta(x, y, z)\,dv, \; M_y = \iiint\limits_V y\delta(x, y, z)\,dv, \; M_z = \iiint\limits_V z\delta(x, y, z)\,dv$$

называются *статическими моментами тела* относительно координатных плоскостей Oyz, Oxz и Oxy соответственно. Если $\delta(x, y, z) = \mathrm{const}$, координаты центра масс не зависят от плотности тела V.

Пример 4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями $x = y^2 + z^2$, $x = 4$.

▶ Строим тело, ограниченное данными поверхностями (рис. 13.30). Область V ограничена поверхностью параболоида, отсеченного плос-

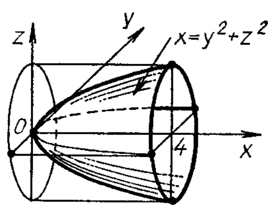


Рис. 13.30

костью $x = 4$. Его проекция на плоскость Oyz представляет собой круг, ограниченный окружностью $y^2 + z^2 = 4$ радиусом 2. Вычислим вначале массу тела в цилиндрических координатах, считая, что его плотность $\delta = 1$:

$$m = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho\,d\rho \int\limits_{\rho^2}^4 dx =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^2 \rho(4 - \rho^2)\,d\rho = 2\pi\left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^2 = 8\pi.$$

Тогда

$$x_C = \frac{1}{m}\iiint\limits_V x\,dxdydz = \frac{1}{8\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho d\rho \int\limits_{\rho^2}^4 x dx =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\cdot 2\pi\int\limits_0^2 \rho\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{\rho^2}^4 d\rho = \frac{1}{8}\int\limits_0^2 \rho(16-\rho^4)d\rho =$$

$$= \frac{1}{8}\left(8\rho^2 - \frac{\rho^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \frac{16}{5}.$$

Аналогично определяются y_C и z_C, но так как тело — однородное и симметричное относительно оси Ox, то можно сразу записать, что $y_C = 0$ и $z_C = 0$. ◀

Вычисление моментов инерции тел. Момент инерции относительно начала координат тела $V \in \mathbf{R}^3$ плотностью $\delta(x, y, z)$ определяется по формуле

$$I_0 = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\delta(x, y, z)dxdydz;$$

моменты инерции относительно координатных осей Ox, Oy, Oz соответственно:

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\delta(x, y, z)dxdydz,$$

$$I_y = \iiint\limits_V (x^2 + z^2)\delta(x, y, z)dxdydz,$$

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\delta(x, y, z)dxdydz;$$

моменты инерции относительно координатных плоскостей Oxy, Oyz, Oxz соответственно:

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2\delta(x, y, z)dxdydz,$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_V x^2\delta(x, y, z)dxdydz,$$

$$I_{xz} = \iiint\limits_V y^2\delta(x, y, z)dxdydz.$$

Пример 5. Вычислить моменты инерции однородного шара радиусом R и весом P относительно его центра и диаметра.

▶ Так как объем шара $v = \frac{4}{3}\pi R^3$, то его постоянная плотность $\delta = 3P/(4g\pi R^3)$. Поместим центр шара в начале координат, тогда его поверхность будет определяться уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Момент инерции относительно центра шара удобно вычислять в сферических координатах:

$$I_0 = \delta\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz = \delta\iiint\limits_{V'} r^4 \sin\theta dr d\varphi d\theta =$$

$$= \delta\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_0^R r^4 dr = \delta\cdot 2\pi\cdot 2\frac{R^5}{5} = \frac{3}{5}\frac{P}{g}R^2.$$

Так как вследствие однородности и симметрии шара его моменты инерции относительно любого диаметра равны, вычислим момент инерции относительно диаметра, лежащего, например, на оси Oz:

$$I_z = \delta \iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz =$$

$$= \delta \iiint\limits_{V'} r^2 \sin^2\theta r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta =$$

$$= \delta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \int\limits_0^R r^4 dr =$$

$$= -\delta 2\pi \frac{R^5}{5} \int\limits_0^{\pi} (1 - \cos^2\theta) d(\cos\theta) =$$

$$= -\delta 2\pi \frac{R^5}{5} \left(\cos\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{5}\frac{P}{g}R^2. \blacktriangleleft$$

АЗ-13.6

1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $2 - z = x^2 + y^2$. (*Ответ:* $4\pi/3$.)

2. Вычислить массу тела, ограниченного плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, если плотность тела $\delta(x, y, z) = 1/(x + y + z + 1)^4$. (*Ответ:* $1/48$.)

3. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндром $x = y^2$ и плоскостями $x + z = 1$, $z = 0$. (*Ответ:* $8/15$.)

4. Вычислить объем тела, ограниченного сферами $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ и конусом $z^2 = x^2 + y^2$ (тела, лежащего внутри конуса). $\left(\textit{Ответ: } \frac{28\pi}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).\right)$

5. Найти координаты центра масс части однородного шара радиусом R с центром в начале координат, расположенной выше плоскости Oxy. $\left(\textit{Ответ: } C\left(0,\ 0,\ \frac{3}{8}R\right).\right)$

6. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного плоскостями $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. $\left(\textit{Ответ: } \left(\frac{1}{4}a,\ \frac{1}{4}a,\ \frac{1}{4}a\right).\right)$

7. Вычислить момент инерции относительно оси однородного круглого прямого конуса весом P, высотой H и радиусом основания R. $\left(\textit{Ответ: } \frac{3}{10}\frac{P}{g}R^2.\right)$

Самостоятельная работа

1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=x^2$, $3x+2y=12$, $y=0$, $z=0$. (*Ответ:* 32.)

2. Вычислить момент инерции относительно плоскости Oyz тела, ограниченного плоскостями $x+2y-z=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, если его плотность $\delta(x, y, z)=x$. (*Ответ:* 4/15.)

3. Вычислить координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями $2z=4-x^2-y^2$, $z=$ $=0$. (*Ответ:* (0, 0, 2/3).)

13.6. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 13

ИДЗ-13.1

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ в виде повторного интеграла с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если область D задана указанными линиями.

1.1. D: $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=\sqrt{3x}$, $x\geqslant 0$.
1.2. D: $x^2=2y$, $5x-2y-6=0$.
1.3. D: $x=\sqrt{8-y^2}$, $y\geqslant 0$, $y=x$.
1.4. D: $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $y\leqslant 1$, $y=\ln x$.
1.5. D: $x^2=2-y$, $x+y=0$.
1.6. D: $y=\sqrt{2-x^2}$, $y=x^2$.
1.7. D: $y=x^2-2$, $y=x$.
1.8. D: $x\geqslant 0$, $y\geqslant 1$, $y\leqslant 3$, $y=x$.
1.9. D: $y^2=2x$, $x^2=2y$, $x\leqslant 1$.
1.10. D: $x\geqslant 0$, $y\geqslant x$, $y=\sqrt{9-x^2}$.
1.11. D: $y^2=2-x$, $y=x$.
1.12. D: $x=\sqrt{2-y^2}$, $x=y^2$, $y\geqslant 0$.
1.13. D: $y\geqslant 0$, $x+2y-12=0$, $y=\lg x$.
1.14. D: $x\leqslant 0$, $y\geqslant 1$, $y\leqslant 3$, $y=-x$.
1.15. D: $y=0$, $y\geqslant x$, $y=-\sqrt{2-x^2}$.
1.16. D: $y\geqslant 0$, $x=\sqrt{y}$, $y=\sqrt{8-x^2}$.
1.17. D: $y=-x$, $y^2=x+3$.
1.18. D: $y=\sqrt{4-x^2}$, $x\geqslant 0$, $x=1$, $y=0$.
1.19. D: $x=-1$, $x=-2$, $y\geqslant 0$, $y=x^2$.
1.20. D: $y\leqslant 0$, $x^2=-y$, $x=\sqrt{1-y^2}$.

1.21. D: $y \geqslant 0$, $y \leqslant 1$, $y = x$, $x = -\sqrt{4 - y^2}$.
1.22. D: $x \leqslant 0$, $y = 1$, $y = 4$, $y = -x$.
1.23. D: $y = 3 - x^2$, $y = -x$.
1.24. D: $x = 0$, $x = -2$, $y \geqslant 0$, $y = x^2 + 4$.
1.25. D: $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$, $(x - 3)^2 + y^2 = 1$.
1.26. D: $x = \sqrt{9 - y^2}$, $y = x$, $y \geqslant 0$.
1.27. D: $x + 2y - 6 = 0$, $y = x$, $y \geqslant 0$.
1.28. D: $y = -x$, $3x + y = 3$, $y = 3$.
1.29. D: $x \geqslant 0$, $y = 1$, $y = -1$, $y = \log_{1/2} x$.
1.30. D: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y = 1$, $x = \sqrt{4 - y^2}$.

2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями.

2.1. $\iint\limits_D (x^2 + y)dxdy$, D: $y = x^2$, $x = y^2$.

2.2. $\iint\limits_D xy^2 dxdy$, D: $y = x^2$, $y = 2x$.

2.3. $\iint\limits_D (x + y)dxdy$, D: $y^2 = x$, $y = x$.

2.4. $\iint\limits_D x^2 y dxdy$, D: $y = 2 - x$, $y = x$, $x \geqslant 0$.

2.5. $\iint\limits_D (x^3 - 2y)dxdy$, D: $y = x^2 - 1$, $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$.

2.6. $\iint\limits_D (y - x)dxdy$, D: $y = x$, $y = x^2$.

2.7. $\iint\limits_D (1 + y)dxdy$, D: $y^2 = x$, $5y = x$.

2.8. $\iint\limits_D (x + y)dxdy$, D: $y = x^2 - 1$, $y = -x^2 + 1$.

2.9. $\iint\limits_D x(y - 1)dxdy$; D: $y = 5x$, $y = x$, $x = 3$.

2.10. $\iint\limits_D (x - 2)ydxdy$; D: $y = x$, $y = \frac{1}{2}x$, $x = 2$.

2.11. $\iint\limits_D (x - y^2)dxdy$, D: $y = x^2$, $y = 1$.

2.12. $\iint\limits_D x^2 y dxdy$, D: $y = 2x^3$, $y = 0$, $x = 1$.

2.13. $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$, D: $x = y^2$, $x = 1$.

2.14. $\iint\limits_D xydxdy$, D: $y = x^3$, $y = 0$, $x \leqslant 2$.

2.15. $\iint\limits_D (x + y)dxdy$, D: $y = x^3$, $y = 8$, $y = 0$, $x = 3$.

2.16. $\iint\limits_D x(2x+y)dxdy,\ D\colon\ y=1-x^2,\ y\geqslant 0.$

2.17. $\iint\limits_D y(1-x)dxdy,\ D\colon\ y^3=x,\ y=x.$

2.18. $\iint\limits_D xy^3dxdy,\ D\colon\ y^2=1-x,\ x\geqslant 0.$

2.19. $\iint\limits_D x(y+5)dxdy,\ D\colon\ y=x+5,\ x+y+5=0,\ x\leqslant 0.$

2.20. $\iint\limits_D (x-y)dxdy,\ D\colon\ y=x^2-1,\ y=3.$

2.21. $\iint\limits_D (x+1)y^2dxdy,\ D\colon\ y=3x^2,\ y=3.$

2.22. $\iint\limits_D xy^2dxdy,\ D\colon\ y=x,\ y=0,\ x=1.$

2.23. $\iint\limits_D (x^3+y)dxdy,\ D\colon x+y=1, x+y=2, x\leqslant 1, x\geqslant 0.$

2.24. $\iint\limits_D xy^3dxdy,\ D\colon\ y=x^3,\ y\geqslant 0,\ y=4x.$

2.25. $\iint\limits_D (x^3+3y)dxdy,\ D\colon\ x+y=1,\ y=x^2-1,\ x\geqslant 0.$

2.26. $\iint\limits_D xydxdy,\ D\colon\ y=\sqrt{x},\ y=0,\ x+y=2.$

2.27. $\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}dxdy,\ D\colon\ y=x,\ xy=1,\ y=2.$

2.28. $\iint\limits_D y(1+x^2)dxdy;\ D\colon\ y=x^3,\ y=3x.$

2.29. $\iint\limits_D y^2(1+2x)dxdy,\ D\colon\ x=2-y^2,\ x=0.$

2.30. $\iint\limits_D e^y dxdy,\ D\colon\ y=\ln x,\ y=0,\ x=2.$

3. Вычислить двойной интеграл, используя полярные координаты.

3.1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dy.$

3.2. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$

3.3. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy.$

3.4. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dy.$

3.5. $\int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx.$

3.6. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} \frac{xy}{x^2+y^2}\,dy.$

3.7. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dy.$

3.8. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \operatorname{tg}(x^2+y^2)\,dy.$

3.9. $\int\limits_0^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos(x^2+y^2)\,dy.$

3.10. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dy.$

3.11. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,dy.$

3.12. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (1+x^2+y^2)\,dy.$

3.13. $\int\limits_0^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{1+x^2+y^2}.$

3.14. $\int\limits_0^{1} dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}.$

3.15. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy.$

3.16. $\int\limits_0^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}.$

3.17. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}$.

3.18. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy$.

3.19. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{ctg}\sqrt{x^2+y^2}}$.

3.20. $\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \frac{xy}{x^2+y^2}\, dy$.

3.21. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \cos(x^2+y^2)\, dy$.

3.22. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin(x^2+y^2)\, dy$.

3.23. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\, dy$.

3.24. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, e^{x^2+y^2}\, dy$.

3.25. $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\, dy$.

3.26. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\, dy$.

3.27. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\ln\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy$.

3.28. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\, dy$.

3.29. $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin(x^2+y^2)\, dy$.

3.30. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy.$

4. Вычислить площадь плоской области D, ограниченной заданными линиями.

4.1. D: $y^2=4x$, $x+y=3$, $y\geqslant 0$. (*Ответ:* 10/3.)
4.2. D: $y=6x^2$, $x+y=2$, $x\geqslant 0$. (*Ответ:* 5/8.)
4.3. D: $y^2=x+2$, $x=2$. (*Ответ:* 32/3.)
4.4. D: $x=-2y^2$, $x=1-3y^2$, $x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$. (*Ответ:* 16/3.)
4.5. D: $y=8/(x^2+4)$, $x^2=4y$. (*Ответ:* $2\pi-4/3$.)
4.6. D: $y=x^2+1$, $x+y=3$. (*Ответ:* 9/2.)
4.7. D: $y^2=4x$, $x^2=4y$. (*Ответ:* 16/3.)
4.8. D: $y=\cos x$, $y\leqslant x+1$, $y\geqslant 0$. (*Ответ:* 3/2.)
4.9. D: $x=\sqrt{4-y^2}$, $y=\sqrt{3x}$, $x\geqslant 0$. (*Ответ:* $2\pi-\sqrt{3}/6$.)
4.10. D: $y=x^2+2$, $x\geqslant 0$, $x=2$, $y=x$. (*Ответ:* 14/3.)
4.11. D: $y=4x^2$, $9y=x^2$, $y\leqslant 2$. (*Ответ:* $20\sqrt{2}/3$.)
4.12. D: $y=x^2$, $y=-x$. (*Ответ:* 1/6.)
4.13. D: $x=y^2$, $x=\frac{3}{4}y^2+1$. (*Ответ:* 8/3.)
4.14. D: $y=\sqrt{2-x^2}$, $y=x^2$. (*Ответ:* $\pi/2+1/3$.)
4.15. D: $y=x^2+4x$, $y=x+4$. (*Ответ:* 125/6.)
4.16. D: $2y=\sqrt{x}$, $x+y=5$, $x\geqslant 0$. (*Ответ:* 28/3.)
4.17. D: $y=2^x$, $y=2x-x^2$, $x=2$, $x=0$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{3}{\ln 2}-\frac{4}{3}.\right)$
4.18. D: $y=-2x^2+2$, $y\geqslant -6$. (*Ответ:* 64/3.)
4.19. D: $y^2=4x$, $x=8/(y^2+4)$. (*Ответ:* $2\pi-4/3$.)
4.20. D: $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$. (*Ответ:* 9.)
4.21. D: $x=y^2+1$, $x+y=3$. (*Ответ:* 9/2.)
4.22. D: $x^2=3y$, $y^2=3x$. (*Ответ:* 3.)
4.23. D: $x=\cos y$, $x\leqslant y+1$, $x\geqslant 0$. (*Ответ:* 1/2.)
4.24. D: $x=4-y^2$, $x-y+2=0$. (*Ответ:* 125/6.)
4.25. D: $x=y^2$, $x=\sqrt{2-y^2}$. (*Ответ:* $\pi/2+1/3$.)
4.26. D: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$, $y\leqslant\frac{1}{2}x$, $y\geqslant 0$. (*Ответ:* $\pi/4$.)
4.27. D: $y^2=4-x$, $y=x+2$, $y=2$, $y=-2$. (*Ответ:* 56/3.)

4.28. D: $y=x^2$, $y=\frac{3}{4}x^2+1$. (*Ответ*: 8/3.)

4.29. D: $x=y^2$, $y^2=4-x$. (*Ответ*: $16\sqrt{2}/3$.)

4.30. D: $xy=1$, $x^2=y$, $y=2$, $x=0$. (*Ответ*: $2/3+$ $+\ln 2$.)

5. С помощью двойных интегралов вычислить в полярных координатах площадь плоской фигуры, ограниченной указанными линиями.

5.1. $(x^2+y^2)^2=a^2(4x^2+y^2)$.
5.2. $(x^2+y^2)^3=a^2x^2y^2$.
5.3. $(x^2+y^2)^3=a^2x^2(4x^2+3y^2)$.
5.4. $(x^2+y^2)^2=a^2(3x^2+2y^2)$.
5.5. $x^4-y^4=(x^2+y^2)^3$ **5.6.** $\rho=a\sin^2 2\varphi$.
5.7. $\rho=a\sin^2\varphi$. **5.8.** $\rho=a(1-\cos\varphi)$.
5.9. $(x^2+y^2)^2=a^2(2x^2+3y^2)$.
5.10. $(x^2+y^2)^2=a^2(5x^2+3y^2)$.
5.11. $(x^2+y^2)^2=a^2(7x^2+5y^2)$.
5.12. $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$.
5.13. $(x^2+y^2)^3=4x^2y^2$. **5.14.** $(x^2+y^2)^3=a^4y^2$.
5.15. $(x^2+y^2)^3=a^4x^2$. **5.16.** $\rho=a\cos^2\varphi$.
5.17. $\rho^2=a^2(1+\sin^2\varphi)$. **5.18.** $(x^2+y^2)^3=a^2x^4$.
5.19. $(x^2+y^2)^2=4(3x^2+4y^2)$.
5.20. $(x^2+y^2)^3=a^2x^2y^2$.
5.21. $(x^2+y^2)^3=a^2(x^4+y^4)$.
5.22. $(x^2+y^2)^3=2ay^3$.
5.23. $(x^2+y^2)^3=4a^2xy(x^2-y^2)$.
5.24. $\rho=a\sin 2\varphi$.
5.25. $\rho=a\cos 5\varphi$. **5.26.** $\rho=4(1+\cos\varphi)$.
5.27. $\rho=2a(2+\cos\varphi)$. **5.28.** $\rho^2=a^2\cos 3\varphi$.
5.29. $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$. **5.30.** $\rho=a\sin 3\varphi$.

6. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями.

6.1. $z=x^2+y^2$, $x+y=1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. (*Ответ*: 1/6.)

6.2. $z=2-(x^2+y^2)$, $x+2y=1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. (*Ответ*: 53/96.)

6.3. $z=x^2$, $x-2y+2=0$, $x+y-7=0$, $z\geqslant 0$. (*Ответ*: 32.)

6.4. $z=2x^2+3y^2$, $y=x^2$, $y=x$, $z\geqslant 0$. (*Ответ*: 29/140.)

6.5. $z=2x^2+y^2$, $y\leqslant x$, $y=3x$, $x=2$, $z\geqslant 0$. (*Ответ*: 152/3.)

6.6. $z=x$, $y=4$, $x=\sqrt{25-y^2}$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. (*Ответ:* 118/3.)

6.7. $y=\sqrt{x}$, $y=x$, $x+y+z=2$, $z\geqslant 0$. (*Ответ:* 11/60.)

6.8. $y=1-x^2$, $x+y+z=3$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. (*Ответ:* 104/30.)

6.9. $z=2x^2+y^2$, $x+y=4$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. (*Ответ:* 64.)

6.10. $z=4-x^2$, $x^2+y^2=4$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. (*Ответ:* 3π.)

6.11. $2x+3y-12=0$, $2z=y^2$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. (*Ответ:* 16.)

6.12. $z=10+x^2+2y^2$, $y=x$, $x=1$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. (*Ответ:* 65/12.)

6.13. $z=x^2$, $x+y=6$, $y=2x$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. (*Ответ:* 4.)

6.14. $z=3x^2+2y^2+1$, $y=x^2-1$, $y=1$, $z\geqslant 0$. (*Ответ:* $264\sqrt{2}/35$.)

6.15. $3y=\sqrt{x}$, $y\leqslant x$, $x+y+z=10$, $y=1$, $z=0$. (*Ответ:* 303/20.)

6.16. $y^2=1-x$, $x+y+z=1$, $x=0$, $z=0$. (*Ответ:* 49/60.)

6.17. $y=x^2$, $x=y^2$, $z=3x+2y+6$, $z=0$. (*Ответ:* 11/4.)

6.18. $x^2=1-y$, $x+y+z=3$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. (*Ответ:* 52/15.)

6.19. $x=y^2$, $x=1$, $x+y+z=4$, $z=0$. (*Ответ:* 68/15.)

6.20. $z=2x^2+y^2$, $x+y=1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. (*Ответ:* 1/4.)

6.21. $y=x^2$, $y=4$, $z=2x+5y+10$, $z\geqslant 0$. (*Ответ:* 704/3.)

6.22. $y=2x$, $x+y+z=2$, $x\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. (*Ответ:* 4/9.)

6.23. $y=1-z^2$, $y=x$, $y=-x$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. (*Ответ:* 8/15.)

6.24. $x^2+y^2=4y$, $z^2=4-y$, $z\geqslant 0$. (*Ответ:* 256/15.)

6.25. $x^2+y^2=1$, $z=2-x^2-y^2$, $z\geqslant 0$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{3}{2}\pi.\right)$

6.26. $y=x^2$, $z=0$, $y+z=2$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{32}{15}\sqrt{2}.\right)$

6.27. $z^2=4-x$, $x^2+y^2=4x$, $z\geqslant 0$. (*Ответ:* 256/15.)

6.28. $z = x^2 + 2y^2$, $y = x$, $x \geqslant 0$, $y = 1$, $z \geqslant 0$. (*Ответ:* 7/12.)

6.29. $z = y^2$, $x + y = 1$, $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. (*Ответ:* 1/12.)

6.30. $y^2 = x$, $x = 3$, $z = x$, $z \geqslant 0$. (*Ответ:* $36\sqrt{3}/5$.)

Решение типового варианта

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D (x, y)dxdy$ в виде повторного интеграла с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если область D ограничена линиями $x = \sqrt{y}$, $x = \sqrt{2 + y}$, $x = 0$, $x = 2$.

▶ Область D изображена на рис. 13.31 и ограничена дугами парабол $x^2 = y + 2$, $x^2 = y$ и прямыми $x = 0$, $x = 2$. Следовательно,

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2-2}^{x^2} f(x, y)dy =$$

$$= \int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y+2}} f(x, y)dx + \int\limits_0^2 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt{y+2}} f(x, y)dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2} f(x, y)dx. ◀$$

2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x - 2y)dxdy$ по области D, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 7 - x$, $y = \frac{1}{2}x + 1$.

▶ Область D изображена на рис. 13.32. Если выбрать внутреннее интегрирование по y, а внешнее — по x, то

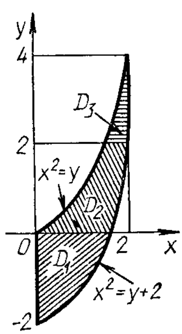


Рис. 13.31

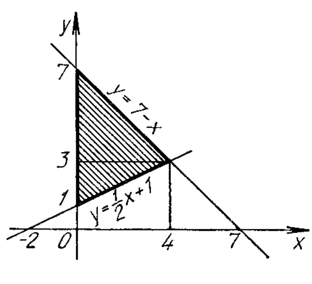


Рис. 13.32

двойной интеграл по этой области выразится одним повторным интегралом:

$$\iint\limits_D (x-2y)\,dxdy = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{1}{2}x+1}^{7-x} (x-2y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^4 (xy - y^2)\Big|_{\frac{1}{2}x+1}^{7-x} dx = \int\limits_0^4 \Big(7x - x^2 - 49 + 14x - x^2 -$$

$$- \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 + 1\Big)dx = \int\limits_0^4 \Big(-\frac{9}{4}x^2 + 21x - 48\Big)dx =$$

$$= \Big(-\frac{3}{4}x^3 + \frac{21}{2}x^2 - 48x\Big)\Big|_0^4 = -72. \blacktriangleleft$$

3. Вычислить двойной интеграл

$$I = \int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{\ln\left(1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dy.$$

используя полярные координаты. Найти его численное значение при $R = 1$.

▶ Область интегрирования D представляет собой четверть круга, расположенного во втором квадранте (рис. 13.33).

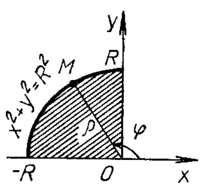


Рис. 13.33

Перейдем к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $x^2 + y^2 = \rho^2$, где $0 \leqslant \rho \leqslant R$; $\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Тогда

$$I = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^R \frac{\ln(1+\rho)}{\rho}\,\rho\,d\varphi =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \ln(1+\rho), & du = d\rho/(1+\rho), \\ dv = d\rho, & v = \rho, \end{vmatrix} =$$

$$= \rho\Big|_{\pi/2}^{\pi}\left(\rho\ln(1+\rho)\Big|_0^R - \int_0^R \frac{\rho}{1+\rho}\,d\rho\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(R\ln(1+R) - \rho\Big|_0^R + \ln(1+\rho)\Big|_0^R\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(R\ln(1+R) - R + \ln(1+R)\right).$$

При $R = 1$ получаем

$$I = \frac{\pi}{2}(2\ln 2 - 1). \blacktriangleleft$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 3x$ и $3x + y - 4 = 0$.

▶ Данная плоская фигура ограничена снизу параболой $y = x^2 - 3x$, сверху прямой $3x + y - 4 = 0$ (рис. 13.34). Следовательно,

$$S = \iint_D dx\,dy = \int_{-2}^{2} dx \int_{x^2-3x}^{4-3x} dy = \int_{-2}^{2} (4 - 3x - x^2 + 3x)\,dx =$$

$$= \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}. \blacktriangleleft$$

5. С помощью двойного интеграла вычислить в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной линией $(x^2 + y^2)^2 = 2y^3$.

▶ Уравнение линии в полярных координатах имеет вид $\rho = 2\sin^3\varphi$. Она изображена вместе с ограниченной ею областью D на рис. 13.35. Полюс O лежит на границе

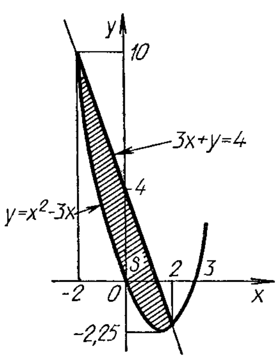


Рис. 13.34

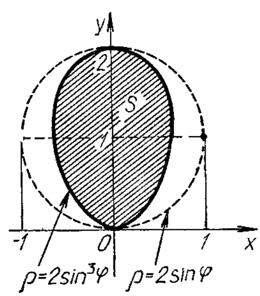


Рис. 13.35

области D, и поэтому, согласно формуле (13.12) (случай 3; см. также пример 2 из § 13.2) имеем:

$$S=\iint\limits_D \rho d\rho d\varphi=\int\limits_0^\pi d\varphi\int\limits_0^{2\sin^3\varphi}\rho d\rho=\int\limits_0^\pi d\varphi\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{2\sin^3\varphi}=$$

$$=2\int\limits_0^\pi \sin^6\varphi d\varphi=\frac{1}{4}\int\limits_0^\pi(1-\cos 2\varphi)^3 d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^\pi(1-3\cos 2\varphi+3\cos^2 2\varphi-\cos^3 2\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}\Big(\pi-\frac{3}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^\pi+\frac{3}{2}\int\limits_0^\pi(1+\cos 4\varphi)d\varphi-$$

$$-\int\limits_0^\pi\cos 2\varphi(1-\sin^2 2\varphi)d\varphi=\frac{5}{8}\pi. \blacktriangleleft$$

6. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{1-y}$, $y=x$, $y=-x$, $z=0$.

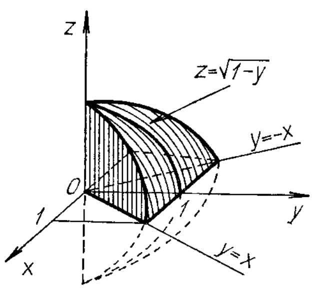


Рис. 13.36

▶ Данное тело ограничено сверху параболическим цилиндром $z=\sqrt{1-y}$ (рис. 13.36), поэтому

$$v=\iint\limits_D\sqrt{1-y}\,dxdy=2\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^y\sqrt{1-y}\,dx=$$

$$=2\int\limits_0^1\sqrt{1-y}\,x\Big|_0^y dy=2\int\limits_0^1 y\sqrt{1-y}\,dy=\Big|\sqrt{1-y}=t,$$

$y = 1 - t^2$, $dy = -2tdt$, $t = 1$ при $y = 0$ и $t = 0$ при $y = 1 \,| = 2\int\limits_0^1 (1 - t^2)t(-2tdt) = -4\int\limits_1^0 (t^2 - t^4)dt =$

$$= -4\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)\Big|_1^0 = \frac{8}{15}. \blacktriangleleft$$

ИДЗ-13.2

1. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz$, если область V ограничена указанными поверхностями. Начертить область интегрирования.

1.1. V: $x = 2$, $y = 4x$, $y = 3\sqrt{x}$; $z \geqslant 0$, $z = 4$.
1.2. V: $x = 1$; $y = 3x$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $z = 2(x^2 + y^2)$.
1.3. V: $x = 1$, $y = 4x$, $z \geqslant 0$, $z = \sqrt{3y}$.
1.4. V: $x = 3$, $y = x$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $z = 3x^2 + y^2$.
1.5. V: $y = 2x$, $y = 2$, $z \geqslant 0$, $z = 2\sqrt{x}$.
1.6. V: $x = 0$, $y = x$, $y = 5$, $z \geqslant 0$, $z = 2x^2 + y^2$.
1.7. V: $x \geqslant 0$, $y = 2x$, $y = 1$, $z \geqslant 0$, $x + y + z = 3$.
1.8. V: $x \geqslant 0$, $y = 3x$, $y = 3$, $z \geqslant 0$, $x = 3\sqrt{z}$.
1.9. V: $x = 5$, $y = x/5$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $z = x^2 + 5y^2$.
1.10. V: $x = 2$, $y = 4x$, $z \geqslant 0$, $y = 2\sqrt{z}$.
1.11. V: $x = 3$, $y = \frac{1}{3}x$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
1.12. V: $x = 4$, $y = x/4$, $z \geqslant 0$, $z = 4y^2$.
1.13. V: $x \geqslant 0$, $y = 3x$, $y = 3$, $z \geqslant 0$, $z = 2(x^2 + y^2)$.
1.14. V: $x \geqslant 0$, $y = 4x$, $y = 8$, $z \geqslant 0$, $z = 3x^2 + y^2$.
1.15. V: $x \geqslant 0$, $y = 5x$, $y = 10$, $z \geqslant 0$, $z = x^2 + y^2$.
1.16. V: $y = x$, $y = -x$, $y = 2$, $z \geqslant 0$, $z = 3(x^2 + y^2)$.
1.17. V: $x = 1$, $y = 2x$, $y = 3x$, $z \geqslant 0$, $z = 2x^2 + y^2$.
1.18. V: $y = x$, $y = -2x$, $y = 1$, $z \geqslant 0$ $z = x^2 + 4y^2$.
1.19. V: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $x + y = 1$, $z = 3x^2 + 2y^2$.
1.20. V: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $3x + 2y = 6$, $z = x^2 + y^2$.
1.21. V: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $x + y = 2$, $z = 4 - x^2 - y^2$.
1.22. V: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $x + y = 3$, $z = 9 - x^2 - y^2$.
1.23. V: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $3x + 4y = 12$, $z = 6 - x^2 - y^2$.
1.24. V: $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $y = x$, $y = 3$, $z = 18 - x^2 - y^2$.

1.25. V: $x=2,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0,\ y=3x,\ z=4(x^2+y^2)$.

1.26. V: $x\geqslant 0,\ y=2x,\ y=4,\ z\geqslant 0,\ z=10-x^2-y^2$.

1.27. V: $x=3,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0,\ y=2x,\ z=4\sqrt{y}$.

1.28. V: $x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,\quad z\geqslant 0,\quad 2x+3y=6,\quad z=3+$ $+x^2+y^2$.

1.29. V: $x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,\quad z\geqslant 0,\quad x+y=4,\quad z=16-$ $-x^2-y^2$.

1.30. V: $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0,\ 5x+y=5,\ z=x^2+y^2$.

2. Вычислить данные тройные интегралы.

2.1. $\iiint\limits_V (2x^2+3y+z)dxdydz$, V: $2\leqslant x\leqslant 3,\ -1\leqslant y\leqslant 2,$ $0\leqslant z\leqslant 4$.

2.2. $\iiint\limits_V x^2yzdxdydz$, $\quad V$: $-1\leqslant x\leqslant 2,\quad 0\leqslant y\leqslant 3,\quad 2\leqslant$ $\leqslant z\leqslant 3$.

2.3. $\iiint\limits_V (x+y+4z^2)dxdydz$, V: $-1\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 2,$ $-1\leqslant z\leqslant 1$.

2.4. $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$; V: $0\leqslant x\leqslant 3,\ -1\leqslant y\leqslant 2,$ $0\leqslant z\leqslant 2$.

2.5. $\iiint\limits_V x^2y^2zdxdydz$, V: $-1\leqslant x\leqslant 3,\ 0\leqslant y\leqslant 2,\ -2\leqslant$ $\leqslant z\leqslant 5$.

2.6. $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$, $\quad V$: $0\leqslant x\leqslant 1,\quad -1\leqslant y\leqslant 0,$ $1\leqslant z\leqslant 2$.

2.7. $\iiint\limits_V (2x-y^2-z)\,dxdydz$, $\quad v$: $1\leqslant x\leqslant 5,\quad 0\leqslant y\leqslant 2,$ $-1\leqslant z\leqslant 0$.

2.8. $\iiint\limits_V 2xy^2zdxdydz$, $\quad V$: $0\leqslant x\leqslant 3,\quad -2\leqslant y\leqslant 0,\quad 1\leqslant$ $\leqslant z\leqslant 2$.

2.9. $\iiint\limits_V 5xyz^2dxdydz$, $\quad V$: $-1\leqslant x\leqslant 0,\quad 2\leqslant y\leqslant 3,\quad 1\leqslant$ $\leqslant z\leqslant 2$.

2.10. $\iiint\limits_V (x^2+2y^2-z)dxdydz$, V: $0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 3,$ $-1\leqslant z\leqslant 2$.

2.11. $\iiint\limits_V (x+2yz)dxdydz$, $\quad V$: $-2\leqslant x\leqslant 0,\quad 0\leqslant y\leqslant 1,$ $0\leqslant z\leqslant 2$.

2.12. $\iiint\limits_V (x+yz^2)dxdydz$, V: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$, $-1 \leqslant z \leqslant 3$.

2.13. $\iiint\limits_V (xy+3z)dxdydz$, V: $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $1 \leqslant z \leqslant 2$.

2.14. $\iiint\limits_V (xy-z^2)\,dxdydz$, v: $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $-1 \leqslant z \leqslant 3$.

2.15. $\iiint\limits_V (x^3+yz)\,dxdydz$, v: $-1 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

2.16. $\iiint\limits_V (x^3+y^2-z)\,dxdydz$, v: $0 \leqslant x \leqslant 2$, $-1 \leqslant y \leqslant 0$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

2.17. $\iiint\limits_V (2x^2+y-z^3)dxdydz$, v: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $-2 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

2.18. $\iiint\limits_V x^2yz^2dxdydz$, v: $0 \leqslant x \leqslant 2$, $1 \leqslant y \leqslant 2$, $-1 \leqslant z \leqslant 0$.

2.19. $\iiint\limits_V (x+y-z)\,dxdydz$, v: $0 \leqslant x \leqslant 4$, $1 \leqslant y \leqslant 3$, $-1 \leqslant z \leqslant 5$.

2.20. $\iiint\limits_V (x+2y+3z^2)\,dxdydz$, v: $-1 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $1 \leqslant z \leqslant 2$.

2.21. $\iiint\limits_V (3x^2+2y+z)\,dxdydz$, v: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $-1 \leqslant z \leqslant 3$.

2.22. $\iiint\limits_V (xy-z^3)\,dxdydz$, v: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 2$, $0 \leqslant z \leqslant 3$.

2.23. $\iiint\limits_V x^3yzdxdydz$, v: $-1 \leqslant x \leqslant 2$, $1 \leqslant y \leqslant 3$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

2.24. $\iiint\limits_V xy^2zdxdydz$, v: $-2 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$, $0 \leqslant z \leqslant 3$.

2.25. $\iiint\limits_V xyz^2dxdydz$, v: $0 \leqslant x \leqslant 2$, $-1 \leqslant y \leqslant 0$, $0 \leqslant z \leqslant 4$.

2.26. $\iiint\limits_V (x+yz)\,dxdydz$, v: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 4$, $0 \leqslant$ $\leqslant z \leqslant 2$.

2.27. $\iiint\limits_V (x+y^2-z^2)dxdydz$, v: $-2 \leqslant x \leqslant 0$, $1 \leqslant y \leqslant 2$, $0 \leqslant z \leqslant 5$.

2.28. $\iiint\limits_V (x+y+z^2)\,dxdydz$, v: $-1 \leqslant x \leqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $2 \leqslant z \leqslant 3$.

2.29. $\iiint\limits_V (x+y^2-2z)\,dxdydz$, v: $1 \leqslant x \leqslant 2$, $-2 \leqslant y \leqslant 3$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

2.30. $\iiint\limits_V (x-y-z)\,dxdydz$, v: $0 \leqslant x \leqslant 3$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $-2 \leqslant z \leqslant 1$.

3. Вычислить тройной интеграл с помощью цилиндрических или сферических координат.

3.1. $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, v: $x^2+y^2+z^2=4$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. (*Ответ:* $16\pi/5$.)

3.2. $\iiint\limits_V y\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, v: $z \geqslant 0$, $z=2$, $y \geqslant \pm x$, $z^2 = 4(x^2+y^2)$. (*Ответ:* $\sqrt{2}/10$.)

3.3. $\iiint\limits_V z^2dxdydz$, v: $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 36$, $y \geqslant x$, $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. (*Ответ:* $1555\pi/12$.)

3.4. $\iiint\limits_V ydxdydz$, v: $x^2+y^2+z^2=32$, $y^2=x^2+z^2$, $y \geqslant 0$. (*Ответ:* 128π.)

3.5. $\iiint\limits_V xdxdydz$, v: $x^2+y^2+z^2=8$, $x^2=y^2+z^2$, $x \geqslant 0$. (*Ответ:* 8π.)

3.6. $\iiint\limits_V ydxdydz$, v: $4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 16$, $y \leqslant \sqrt{3}x$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. (*Ответ:* $15\pi/2$.)

3.7. $\iiint\limits_V ydxdydz$, v: $z=\sqrt{8-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $y \geqslant 0$. (*Ответ:* $8(\pi/2-1)$.)

3.8. $\iiint\limits_V \frac{y^2dxdydz}{x^2+y^2+z^2}$, v: $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $y \geqslant \sqrt{3}x$, $4 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 36$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{52}{27}(2\pi + 3\sqrt{3}).\right)$

3.9. $\iiint\limits_V \frac{y^2zdxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, v: $y \geqslant 0$, $y \leqslant \sqrt{3}x$, $z = 3(x^2+y^2)$, $z = 3$. (*Ответ:* $3(4\pi - 3\sqrt{3})/20$.)

3.10. $\iiint\limits_V \frac{x^2dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$, v: $x^2+y^2+z^2 = 16$, $z \geqslant 0$. (*Ответ:* $16\pi/3$.)

3.11. $\iiint\limits_V \frac{xzdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, v: $z = 2(x^2+y^2)$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}x$, $z = 18$. (*Ответ:* 81.)

3.12. $\iiint\limits_V \frac{xydxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, v: $z = x^2+y^2$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant x$, $z = 4$. (*Ответ:* $4/3$.)

3.13. $\iiint\limits_V \frac{zdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, v: $x^2+y^2 = 4y$, $y+z = 4$, $z \geqslant 0$. (*Ответ:* $1472/45$.)

3.14. $\iiint\limits_V \frac{ydxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, v: $x^2+y^2 = 2x$, $x+z = 2$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. (*Ответ:* $4/5$.)

3.15. $\iiint\limits_V \frac{xdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, v: $x^2+y^2 = 16y$, $y+z = 16$, $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. (*Ответ:* $2048/5$.)

3.16. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, v: $x^2+y^2 = 2x$, $x+z = 2$, $z \geqslant 0$. (*Ответ:* $128/45$.)

3.17. $\iiint\limits_V xydxdydz$, v: $2 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 8$, $z^2 = x^2+y^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. (*Ответ:* $31(4\sqrt{2}-5)/15$.)

3.18. $\iiint\limits_V \frac{y\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, v: $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$, $x\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, $z=6$. (*Ответ*: 24.)

3.19. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, v: $x^2+y^2+z^2=36$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, $y\leqslant -x$. (*Ответ*: 81π.)

3.20. $\iiint\limits_V \frac{x\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, v: $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $z\geqslant 0$, $z=4$, $y\geqslant 0$, $y\leqslant x$. (*Ответ*: $10\sqrt{2}$.)

3.21. $\iiint\limits_V \frac{z\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, v: $1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 9$, $y\geqslant 0$, $y\leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}x$, $z\geqslant 0$. (*Ответ*: $13\pi/8$.)

3.22. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, v: $x^2-2x+y^2=0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, $x+z=2$. (*Ответ*: 64/45.)

3.23. $\iiint\limits_V x^2\,dx\,dy\,dz$, v: $1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 16$, $y\geqslant 0$, $y\leqslant x$, $z\geqslant 0$. (*Ответ*: $341(\pi+2)/20$.)

3.24. $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, v: $x^2+y^2=4y$, $y+z=4$, $z\geqslant 0$. (*Ответ*: 64/3.)

3.25. $\iiint\limits_V \frac{y\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, v: $4\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 16$, $y\leqslant \sqrt{3}x$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. (*Ответ*: $7\pi/3$.)

3.26. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, v: $x^2+y^2=2x$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, $z=3$. (*Ответ*: 8.)

3.27. $\iiint\limits_V \frac{x\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, v: $1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4$, $x\geqslant 0$, $y\leqslant x$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. (*Ответ*: $7\sqrt{2}\pi/24$.)

3.28. $\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz$, v: $x^2 = 2(y^2 + z^2)$, $x = 4$, $x \geqslant 0$.
(*Ответ*: 32π.)

3.29. $\iiint\limits_V \frac{x\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, v: $1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9$, $y \leqslant x$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. (*Ответ*: $13\sqrt{2}\pi/2$.)

3.30. $\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz$, v: $z = \sqrt{18 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x \geqslant 0$. $\left(\text{Ответ: } \frac{81}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).\right)$

4. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертеж.

4.1. $z^2 = 4 - x$, $x^2 + y^2 = 4x$. (*Ответ*: $512/15$.)
4.2. $z = 4 - y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $z \geqslant 0$. (*Ответ*: 12π.)
4.3. $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2 - x - y$, $z \geqslant 0$. (*Ответ*: 2π.)
4.4. $z = y^2$, $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $x + y = 2$. (*Ответ*: $4/3$.)
4.5. $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $z = x$, $x = \sqrt{9 - y^2}$, $x = \sqrt{25 - y^2}$. (*Ответ*: $98/3$.)
4.6. $x^2 + y^2 = 4$, $z = 4 - x - y$, $z \geqslant 0$. (*Ответ*: 16π.)
4.7. $z \geqslant 0$, $z = x^2$, $x - 2y + 2 = 0$, $x + y = 7$. (*Ответ*: 32.)
4.8. $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $z = y$, $x = 4$, $y = \sqrt{25 - x^2}$. (*Ответ*: $118/3$.)
4.9. $z \geqslant 0$, $z = 4 - x$, $x = 2\sqrt{y}$, $y = 2\sqrt{x}$. (*Ответ*: $176/15$.)
4.10. $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $2x - y = 0$, $x + y = 9$, $z = x^2$. (*Ответ*: $1053/2$.)
4.11. $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $x = 4$, $y = 2x$, $z = x^2$. (*Ответ*: 128.)
4.12. $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $y = 2x$, $y = 3$, $z = \sqrt{y}$. (*Ответ*: $9\sqrt{3}/5$.)
4.13. $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $x = 3$, $y = 2x$, $z = y^2$. (*Ответ*: 54.)
4.14. $z \geqslant 0$, $y^2 = 2 - x$, $z = 3x$. (*Ответ*: $32\sqrt{2}/5$.)
4.15. $z \geqslant 0$, $y = \sqrt{9 - x^2}$, $z = 2y$. (*Ответ*: 36.)
4.16. $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $x + y = 2$, $z = x^2 + y^2$. (*Ответ*: $8/3$.)

4.17. $z \geqslant 0,\ x^2 + y^2 = 9,\ z = 5 - x - y$ (*Ответ:* 45π.)

4.18. $z \geqslant 0,\ z = x,\ x = \sqrt{4 - y^2}$. (*Ответ:* 16/3.)

4.19. $y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x + y = 2,\ z = x^2$. (*Ответ:* 4/3.)

4.20. $y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ y = 4,\ z = x,\ x = \sqrt{25 - y^2}$. (*Ответ:* 118/3.)

4.21. $z \geqslant 0,\ x^2 + y^2 = 9,\ z = y^2$. (*Ответ:* $81/8\pi$.)

4.22. $x \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ y \geqslant x,\ z = 1 - x^2 - y^2$. (*Ответ:* $\pi/16$.)

4.23. $z \geqslant 0,\ x^2 + y^2 = 4,\ z = x^2 + y^2$. (*Ответ:* 8π.)

4.24. $z \geqslant 0,\ y = 2,\ y = x,\ z = x^2$. (*Ответ:* 4/3.)

4.25. $z \geqslant 0,\ y + z = 2,\ x^2 + y^2 = 4$. (*Ответ:* 8π.)

4.26. $y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x - y = 0,\ 2x + y = 2,\ 4z = y^2$. (*Ответ:* 1/162.)

4.27. $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ 2x + y = 2,\ z = y^2$. (*Ответ:* 2/3.)

4.28. $z \geqslant 0,\ x = y^2,\ x = 2y^2 + 1,\ z = 1 - y^2$. (*Ответ:* 8/5.)

4.29. $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ y = 3 - x,\ z = 9 - x^2$. (*Ответ:* 135/4.)

4.30. $x \geqslant 0, z \geqslant 0, x + y = 4, z = 4\sqrt{y}$. (*Ответ:* 512/15.)

Решение типового варианта

1. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,\ y,\ z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями $x = 1, y = x, z = 0, z = y^2$. Начертить область интегрирования.

► Согласно формуле (13.23), имеем:

$$\iiint\limits_V f(x,\ y,\ z)\,dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{y^2} f(x,\ y,\ z)dz.$$

Область интегрирования изображена на рис. 13.37. ◄

2. Вычислить $\iiint\limits_V (3x + 2y - z^3)dxdydz$, если V: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2,\ 1 \leqslant z \leqslant 3$.

► Для данной области V (рис. 13.38) на основании формулы (13.24) получаем

$$\iiint\limits_V (3x + 2y - z^3)dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_1^3 (3x + 2y - z^3)dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 \left(3xz + 2yz - \frac{z^4}{4}\right)\Big|_1^3 dy = \int_0^1 dx \int_0^2 (6x + 4y - 20)\,dy =$$

$$= \int_0^1 (6xy + 2y^2 - 20y)\big|_0^2 dx = \int_0^1 (12x - 32)\,dx =$$

$$= (6x^2 - 32x)\big|_0^1 = -26. \blacktriangleleft$$

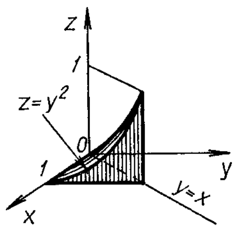


Рис. 13.37

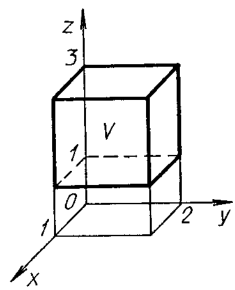


Рис. 13.38

3. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V \frac{xz\,dx\,dy\,dz}{x^2 + y^2 - R^2}$ по области, расположенной в первом октанте и ограниченной плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = h$ и конусом $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$, с помощью цилиндрических координат.

▶ На рис. 13.39 изображена область интегрирования V и ее проекция D на плоскость Oxy.

Перейдя к цилиндрическим координатам ρ, φ, z по формулам (13.26), в которых для данной области $0 \leqslant z \leqslant h$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \rho \leqslant R$, получим:

$$z^2 = h^2\rho^2/R^2, \quad z = h\rho/R,$$

$$\iiint\limits_V \frac{xz\,dx\,dy\,dz}{x^2 + y^2 - R^2} = \iiint\limits_V \frac{\rho^2 \cos\varphi z\,d\varphi\,d\rho\,dz}{\rho^2 - R^2} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\,d\varphi \int_0^R \frac{\rho^2}{\rho^2 - R^2}\,d\rho \int_{h\rho/R}^{h} z\,dz =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\,d\varphi \int_0^R \frac{\rho^2}{\rho^2 - R^2} \frac{z^2}{2}\Big|_{h\rho/R}^{h} d\rho =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^R \frac{\rho^2}{\rho^2 - R^2} \left(h^2 - \frac{h^2}{R^2} \rho^2 \right) d\rho =$$

$$= - \frac{h^2}{2R^2} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^R \rho^2 d\rho = - \frac{h^2}{2R^2} \sin \varphi \Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^R =$$

$$= - \frac{1}{6} Rh^2. \blacktriangleleft$$

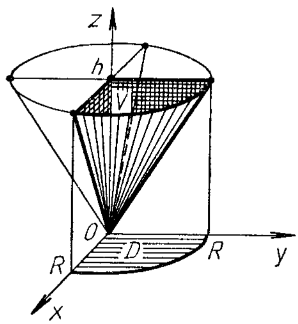


Рис. 13.39

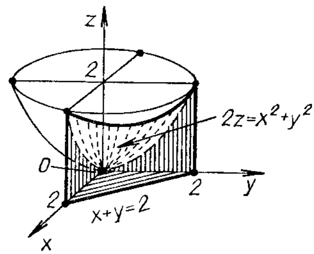


Рис. 13.40

4. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$, $2z = x^2 + y^2$.

► Уравнение $2z = x^2 + y^2$ определяет параболоид вращения, остальные поверхности — плоскости. Искомое тело изображено на рис. 13.40. Его объем v вычисляем в соответствии с формулами (13.21) и (13.23):

$$v = \iiint_V dxdydz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{(x^2+y^2)/2} dz =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} z \Big|_0^{(x^2+y^2)/2} dy = \frac{1}{2} \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x^2 + y^2) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{2-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \left(x^2(2-x) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} (2-x)^3 \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \left(2x^2 - x^3 + \frac{1}{3} (2-x)^3 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{12} (2-x)^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}. \blacktriangleleft$$

ИДЗ-13.3

1. Вычислить массу неоднородной пластины D, ограниченной заданными линиями, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\mu = \mu(x, y)$.

1.1. D: $y^2 = x$, $x = 3$, $\mu = x$. (*Ответ:* $36\sqrt{3}/5$.)
1.2. D: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $\mu = x^2$. (*Ответ:* $1/12$.)
1.3. D: $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y = 6$, $\mu = y^2/2$. (*Ответ:* 1.)
1.4. D: $x^2 + y^2 = 4x$, $\mu = 4 - x$. (*Ответ:* 8π.)
1.5. D: $x = 0$, $y = 1$, $y = x$, $\mu = x^2 + 2y^2$. (*Ответ:* $7/12$.)
1.6. D: $x^2 + y^2 = 1$, $\mu = 2 - x - y$. (*Ответ:* 2π.)
1.7. D: $x^2 + y^2 = 4y$, $\mu = \sqrt{4 - y}$. (*Ответ:* $256/15$.)
1.8. D: $y = x$, $y = -x$, $y = 1$, $\mu = \sqrt{1 - y}$. (*Ответ:* $8/15$.)
1.9. D: $x = 0$, $y = 2x$, $x + y = 2$, $\mu = 2 - x - y$. (*Ответ:* $4/9$.)
1.10. D: $x = 1$, $x = y^2$, $\mu = 4 - x - y$. (*Ответ:* $68/15$.)
1.11. D: $y = 0$, $x^2 = 1 - y$, $\mu = 3 - x - y$. (*Ответ:* $14/5$.)
1.12. D: $y = x^2$, $x = y^2$, $\mu = 3x + 2y + 6$. (*Ответ:* $11/4$.)
1.13. D: $y = x^2$, $y = 4$, $\mu = 2x + 5y + 10$. (*Ответ:* $752/3$.)
1.14. D: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $\mu = 2x^2 + y^2$. (*Ответ:* $1/4$.)
1.15. D: $x = 0$, $y^2 = 1 - x$, $\mu = 2 - x - y$. (*Ответ:* $32/15$.)
1.16. D: $y = \sqrt{x}$, $y = x$, $\mu = 2 - x - y$. (*Ответ:* $51/60$.)
1.17. D: $y = x^2 - 1$, $y = 1$, $\mu = 3x^2 + 2y^2 + 1$. (*Ответ:* $264\sqrt{2}/35$.)
1.18. D: $x = 1$, $y = 0$, $y = x$, $\mu = x^2 + 2y^2 + 10$. (*Ответ:* $65/12$.)
1.19. D: $y = 0$, $y = 2x$, $x + y = 6$, $\mu = x^2$. (*Ответ:* 104.)
1.20. D: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x^2 + y^2 = 4$, $\mu = 4 - x^2$. (*Ответ:* 3π.)
1.21. D: $y = x^2$, $y = 2$, $\mu = 2 - y$. (*Ответ:* $32\sqrt{2}/15$.)
1.22. D: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $\mu = x^2 + y^2$. (*Ответ:* $1/6$.)
1.23. D: $y = x^2 + 1$, $x + y = 3$, $\mu = 4x + 5y + 2$. (*Ответ:* $351/6$.)
1.24. D: $y = x^2 - 1$, $x + y = 1$, $\mu = 2x + 5y + 8$. (*Ответ:* 45.)

1.25. D: $x=0$, $y=0$, $y=4$, $x=\sqrt{25-y^2}$, $\mu=x$. (*Ответ:* 118/3.)

1.26. D: $x=2$, $y=x$, $y=3x$, $\mu=2x^2+y^2$. (*Ответ:* 152/3.)

1.27. D: $y=x$, $y=x^2$, $\mu=2x+3y$. (*Ответ:* 11/30.)

1.28. D: $x=0$, $x+2y+2=0$, $x+y=1$, $\mu=x^2$. (*Ответ:* 32/3.)

1.29. D: $x=0$, $y=0$, $x+2y=1$, $\mu=2-(x^2+y^2)$. (*Ответ:* 43/96.)

1.30. D: $x=0$, $y=0$, $x+y=2$, $\mu=x^2+y^2$. (*Ответ:* 8/3.)

2. Вычислить статический момент однородной пластины D, ограниченной данными линиями, относительно указанной оси, использовав полярные координаты.

2.1. D: $x^2+y^2-2ay=0$, $x-y\leqslant 0$, Ox.
2.2. D: $x^2+y^2-2ax=0$, $x+y\leqslant 0$, Oy.
2.3. D: $x^2+y^2+2ay=0$, $x-y\geqslant 0$, Ox.
2.4. D: $x^2+y^2+2ax=0$, $x+y\geqslant 0$, Ox.
2.5. D: $x^2+y^2+2ax\geqslant 0$, $x^2+y^2+2ay\leqslant 0$, $x\leqslant 0$, Ox.
2.6. D: $x^2+y^2-2ay\geqslant 0$, $x^2+y^2+2ax\leqslant 0$, $y\geqslant 0$, Oy.
2.7. D: $x^2+y^2-2ay\leqslant 0$, $x^2+y^2-2ax\geqslant 0$, $x\geqslant 0$, Ox.
2.8. D: $x^2+y^2-2ax\leqslant 0$, $x^2+y^2+2ay\geqslant 0$, $y\leqslant 0$, Oy.
2.9. D: $x^2+y^2-2ax\geqslant 0$, $x^2+y^2+2ay\leqslant 0$, $x\geqslant 0$, Ox.
2.10. D: $x^2+y^2+2ax\leqslant 0$, $x^2+y^2+2ay\geqslant 0$, $y\leqslant 0$, Oy.
2.11. D: $x^2+y^2-2ay\leqslant 0$, $x^2+y^2+2ax\geqslant 0$, $x\leqslant 0$, Ox.
2.12. D: $x^2+y^2-2ay\geqslant 0$, $x^2+y^2-2ax\leqslant 0$, $y\geqslant 0$, Oy.
2.13. D: $x^2+y^2+2ay=0$, $x^2+y^2+ay=0$, $x\leqslant 0$, Ox.
2.14. D: $x^2+y^2-2ax=0$, $x^2+y^2-ax=0$, $y\geqslant 0$, Oy.
2.15. D: $x^2+y^2+2ay=0$, $x^2+y^2+ay=0$, $x\geqslant 0$, Ox.
2.16. D: $x^2+y^2-2ay=0$, $x^2+y^2-ay=0$, $x\geqslant 0$, Ox.
2.17. D: $x^2+y^2-2ay=0$, $x^2+y^2-ay=0$, $x\leqslant 0$, Ox.
2.18. D: $x^2+y^2+2ax=0$, $x^2+y^2+ax=0$, $y\geqslant 0$, Oy.
2.19. D: $x^2+y^2-2ax=0$, $x^2+y^2-ax=0$, $y\leqslant 0$, Ox.
2.20. D: $x^2+y^2+2ax=0$, $x^2+y^2+ax=0$, $y\leqslant 0$, Oy.
2.21. D: $x^2+y^2+2ay=0$, $x+y\leqslant 0$, $x\geqslant 0$, Ox.
2.22. D: $x^2+y^2-2ay=0$, $y-x\geqslant 0$, $x\geqslant 0$, Ox.
2.23. D: $x^2+y^2+2ax=0$, $y-x\geqslant 0$, $y\leqslant 0$, Oy.
2.24. D: $x^2+y^2-2ay=0$, $x+y\geqslant 0$, $x\leqslant 0$, Ox.
2.25. D: $x^2+y^2+2ax=0$, $x+y\leqslant 0$, $y\geqslant 0$, Oy.
2.26. D: $x^2+y^2-2ax=0$, $y-x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$, Ox.
2.27. D: $x^2+y^2-2ax=0$, $y-x\leqslant 0$, $x+y\geqslant 0$, Oy.
2.28. D: $x^2+y^2-2ay=0$, $y-x\geqslant 0$, $x+y\geqslant 0$, Ox.

2.29. D: $x^2+y^2+2ax=0$, $x+y\leqslant 0$, $y-x\geqslant 0$, Oy.
2.30. D: $x^2+y^2+2ay=0$, $y-x\leqslant 0$, $x+y\leqslant 0$, Ox.

3. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную указанными поверхностями.

3.1. V: $x=6(y^2+z^2)$, $y^2+z^2=3$, $x=0$. (*Ответ:* (6, 0, 0).)

3.2. V: $y=3\sqrt{x^2+z^2}$, $x^2+z^2=36$, $y=0$. (*Ответ:* (0, 27/4, 0).)

3.3. V: $x=7(y^2+z^2)$, $x=28$. (*Ответ:* (56/3, 0, 0).)

3.4. V: $z=2\sqrt{x^2+y^2}$, $z=8$. (*Ответ:* (0, 0, 6).)

3.5. V: $z=5(x^2+y^2)$, $x^2+y^2=2$, $z=0$. (*Ответ:* (0, 0, 10/3).)

3.6. V: $x=6\sqrt{y^2+z^2}$, $y^2+z^2=9$, $x=0$. (*Ответ:* (27/4, 0, 0).)

3.7. V: $z=8(x^2+y^2)$, $z=32$. (*Ответ:* (0, 0, 64/3).)

3.8. V: $y=3\sqrt{x^2+z^2}$, $y=9$. (*Ответ:* (0, 27/4, 0).)

3.9. V: $9y=x^2+z^2$, $x^2+z^2=4$, $y=0$. (*Ответ:* (0, 4/27, 0).)

3.10. V: $3z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=4$, $z=0$. (*Ответ:* (0, 0, 1/4).)

3.11. V: $x^2+z^2=6y$, $y=8$. (*Ответ:* (0, 16/3, 0).)

3.12. V: $8x=\sqrt{y^2+z^2}$, $x=1/2$. (*Ответ:* (3/8, 0, 0.)

3.13. V: $2x=y^2+z^2$, $y^2+z^2=4$, $x=0$. (*Ответ:* (2/3, 0, 0).)

3.14. V: $4y=\sqrt{x^2+z^2}$, $x^2+z^2=16$, $y=0$. (*Ответ:* (0, 3/8, 0).)

3.15. V: $y^2+z^2=8x$, $x=2$. (*Ответ:* (4/3, 0, 0).)

3.16. V: $z=9\sqrt{x^2+y^2}$, $z=36$. (*Ответ:* (0, 0, 27).)

3.17. V: $z=3(x^2+y^2)$, $x^2+y^2=9$, $z=0$. (*Ответ:* (0, 0, 9).)

3.18. V: $x=2\sqrt{y^2+z^2}$, $y^2+z^2=4$, $x=0$. (*Ответ:* (3/2, 0, 0).)

3.19. V: $x^2+z^2=4y$, $y=9$. (*Ответ:* (0, 6, 0).)

3.20. V: $x=5\sqrt{y^2+z^2}$, $x=20$. (*Ответ:* (15, 0, 0).)

3.21. V: $y=x^2+z^2$, $x^2+z^2=10$, $y=0$. (*Ответ:* (0, 10/3, 0).)

3.22. V: $y=3\sqrt{x^2+z^2}$, $x^2=z^2=16$, $y=0$. (*Ответ*: $(0,\ 9/2,\ 0)$.)

3.23. V: $y^2+z^2=3x$, $x=9$. (*Ответ*: $(6,\ 0,\ 0)$.)

3.24. V: $y=\sqrt{x^2+z^2}$, $y=4$. (*Ответ*: $(0,\ 3,\ 0)$.)

3.25. V: $x=y^2+z^2$, $y^2+z^2=9$, $x=0$. (*Ответ*: $(3,\ 0,\ 0)$.)

3.26. V: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=3$. (*Ответ*: $(3/4,\ 3/4,\ 3/4)$.)

3.27. V: $z=2\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=9$, $z=0$. (*Ответ*: $(0,\ 0,\ 9/4)$.)

3.28. V: $x^2+y^2=2z$, $z=3$. (*Ответ*: $(0,\ 0,\ 2)$.)

3.29. V: $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=4$. (*Ответ*: $(0,\ 0,\ 3)$.)

3.30. V: $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=4$, $z=0$. (*Ответ*: $(0,\ 0,\ 4/3)$.)

4. Вычислить момент инерции относительно указанной оси координат однородного тела, занимающего область V, ограниченную данными поверхностями. Плотность тела δ принять равной 1.

4.1. V: $y^2=x^2+z^2$, $y=4$, Oy. (*Ответ*: $512\pi/5$.)

4.2. V: $x=y^2+z^2$, $x=2$, Ox. (*Ответ*: $4\pi/3$.)

4.3. V: $y^2=x^2+z^2$, $y=2$, Oy. (*Ответ*: $16\pi/5$.)

4.4. V: $x=y^2+z^2$, $x=9$, Ox. (*Ответ*: $243\pi/2$.)

4.5. V: $x^2=y^2+z^2$, $x=2$, Ox. (*Ответ*: $16\pi/5$.)

4.6. V: $y=x^2+z^2$, $y=2$, Oy. (*Ответ*: $4\pi/3$.)

4.7. V: $x^2=y^2+z^2$, $x=3$, Ox. (*Ответ*: $243\pi/10$.)

4.8. V: $x=y^2+z^2$, $x=3$, Ox. (*Ответ*: $9\pi/2$.)

4.9. V: $y=2\sqrt{x^2+z^2}$, $y=2$, Oy. (*Ответ*: $\pi/5$.)

4.10. V: $y=x^2+z^2$, $y=3$, Oy. (*Ответ*: $9\pi/2$.)

4.11. V: $x^2=y^2+z^2$, $y^2+z^2=1$, $x=0$, Ox. (*Ответ*: $2\pi/5$.)

4.12. V: $x=y^2+z^2$, $y^2+z^2=1$, $x=0$, Ox. (*Ответ*: $\pi/3$.)

4.13. V: $z^2=x^2+y^2$, $z=3$, Oz. (*Ответ*: $243\pi/10$.)

4.14. V: $z=x^2+y^2$, $z=3$, Oz. (*Ответ*: $9\pi/2$.)

4.15. V: $y^2=x^2+z^2$, $x^2+z^2=4$, $y=0$, Oy. (*Ответ*: $64\pi/5$.)

4.16. V: $2y=x^2+z^2$, $y=2$, Oy. (*Ответ*: $16\pi/3$.)

4.17. V: $x^2=y^2+z^2$, $x=2$, Ox. (*Ответ*: $16\pi/5$.)

4.18. V: $2z=x^2+y^2$, $z=2$, Oz. (*Ответ*: $16\pi/3$.)

4.19. V: $x^2 = y^2 + z^2$, $y^2 + z^2 = 4$, $x = 0$, Ox. (*Ответ:* $64\pi/5$.)

4.20. V: $2z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, Oz. (*Ответ:* $32\pi/3$.)

4.21. V: $z = 2(x^2 + y^2)$, $z = 2$, Oz. (*Ответ:* $\pi/3$.)

4.22. V: $x = 1 - y^2 - z^2$, $x = 0$, Ox. (*Ответ:* $\pi/6$.)

4.23. V: $y = 4 - x^2 - z^2$, $y = 0$, Oy. (*Ответ:* $32\pi/3$.)

4.24. V: $x = 3(y^2 + z^2)$, $x = 3$, Ox. (*Ответ:* $\pi/2$.)

4.25. V: $z = 9 - x^2 - y^2$, $z = 0$, Oz. (*Ответ:* $243\pi/2$.)

4.26. V: $z = 4\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 2$, Oz (*Ответ:* $\pi/80$.)

4.27. V: $z = 3(x^2 + y^2)$, $z = 3$, Oz. (*Ответ:* $\pi/2$.)

4.28. V: $x = 2\sqrt{y^2 + z^2}$, $x = 2$, Ox. (*Ответ:* $\pi/5$.)

4.29. V: $y = 3(x^2 + z^2)$, $y = 3$, Oy. (*Ответ:* $\pi/2$.)

4.30. V: $z = 3 - x^2 - y^2$, $z = 0$, Oz. (*Ответ:* $9\pi/2$.)

Решение типового варианта

1. Вычислить массу m неоднородной пластины D, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = x$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\mu = x^2 + 2xy$.

▶ Для вычисления массы m плоской пластины заданной поверхностной плотностью μ воспользуемся физическим смыслом двойного интеграла (см. § 13.1, свойство 2) и формулой $m = \iint\limits_D (x^2 + 2xy)\,dxdy$, где область интегрирования D изображена на рис. 13.41. Это позволит легко представить записанный двойной интеграл в виде повторного:

$$m = \int_0^1 dx \int_x^{2x - x^2} (x^2 + 2xy)\,dy = \int_0^1 (x^2y + xy^2)\Big|_x^{2x - x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 (2x^3 - x^4 - x^3 + 4x^3 - 4x^4 + x^5 - x^3)\,dx =$$

$$= \int_0^1 (x^5 - 5x^4 + 4x^3)dx = \left(\frac{x^6}{6} - x^5 + x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}. \blacktriangleleft$$

2. Вычислить статический момент относительно оси Oy однородной пластины D, ограниченной линиями $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $x^2 + y^2 - ax = 0$, $y - x = 0$, $y + x = 0$ (рис. 13.42), использовав полярные координаты. Поверхностная плотность пластины $\mu = 2$.

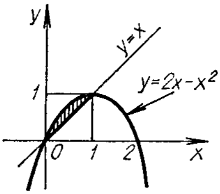


Рис. 13.41

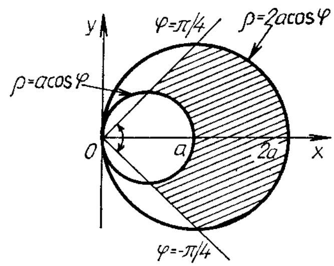


Рис. 13.42

▶ Статический момент относительно оси Oy данной пластины определяется по формуле (13.17). В полярной системе координат область D преобразуется в область D': $a\cos\varphi \leqslant \rho \leqslant 2a\cos\varphi$, $-\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$. Тогда

$$M_y = \iint_{D'} 2\rho\cos\varphi \cdot \rho d\rho d\varphi = 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\varphi d\varphi \int_{a\cos\varphi}^{2a\cos\varphi}\rho^2 d\rho =$$

$$= 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\varphi \cdot \frac{\rho^3}{3}\Big|_{a\cos\varphi}^{2a\cos\varphi} d\varphi = 2\cdot\frac{7a^3}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^4\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{28}{3}a^3\int_0^{\pi/4}\frac{(1+\cos 2\varphi)^2}{4}d\varphi =$$

$$= \frac{7}{3}a^3\int_0^{\pi/4}(1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)\,d\varphi = \frac{7a^3}{3}\Big((\varphi +$$

$$+\sin 2\varphi)\Big|_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4\varphi\right)d\rho\Big) =$$

$$= \frac{7}{3}a^3\left(\frac{3}{8}\pi+1\right). \blacktriangleleft$$

3. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную поверхностями $y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+z^2}$, $y = 2$.

▶ Данное тело симметрично относительно оси Oy (рис. 13.43), поэтому $x_C = z_C = 0$, а

$$y_C = \iiint_V y dxdydz \Big/ \iiint_V dxdydz.$$

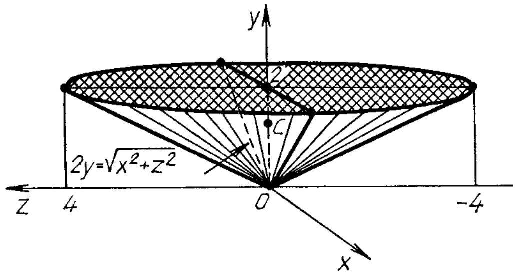


Рис. 13.43

Переходим к цилиндрическим координатам по формулам, аналогичным формулам (13.26): $x=\rho\cos\varphi$, $z=\rho\sin\varphi$, $y=y$. Тогда

$$\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{V'} y\rho\,d\rho\,d\varphi\,dy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^4\rho\,d\rho\int\limits_{\rho/2}^2 y\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^4\rho\left(4-\frac{1}{4}\rho^2\right)d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(2\rho^2-\frac{\rho^4}{16}\right)\Big|_0^4 d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 16\varphi\Big|_0^{2\pi}=16\pi,$$

$$\iiint\limits_V dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{V'}\rho\,d\varphi\,d\rho\,dy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^4\rho\,d\rho\int\limits_{\rho/2}^2 dy=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^4\rho\left(2-\frac{1}{2}\rho\right)d\rho=\int\limits_0^{2\pi}\left(\rho^2-\frac{1}{6}\rho^3\right)\Big|_0^4 d\varphi=$$

$$=\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{16}{3}=\frac{32}{3}\pi.$$

Следовательно,

$$y_C=\frac{16\pi\cdot 3}{32\pi}=\frac{3}{2}$$

и центр масс $C(0,\ 3/2,\ 0)$. ◀

4. Вычислить момент инерции относительно оси Oy однородного тела (плотность $\delta=\mathrm{const}$), занимающего область V, ограниченную поверхностью $y=5-x^2-z^2$ и плоскостью $y=1$.

▶ Согласно формулам (13.18), искомый момент инерции

$$I_y = \iiint\limits_V \delta(x,\ y,\ z)(x^2+z^2)\,dxdydz =$$

$$= \delta \iiint\limits_V (x^2+z^2)\,dxdydz.$$

(Область V изображена на рис. 13.44.)

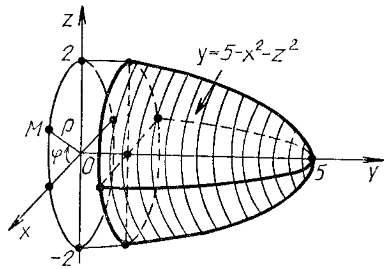


Рис. 13.44

Переходим к цилиндрическим координатам по формулам $x = \rho \cos \varphi$, $z = \rho \sin \varphi$, $y = y$. Тогда

$$I_y = \delta \iiint\limits_V \rho^2 \rho d\rho d\varphi dy = \delta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 d\rho \int\limits_1^{5-\rho^2} dy =$$

$$= \delta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 y\Big|_1^{5-\rho^2} \cdot \rho^3 d\rho = \delta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3(5-\rho^2-1)\,d\rho =$$

$$= \delta \int\limits_0^{2\pi} \left(\rho^4 - \frac{\rho^6}{6}\right)\Big|_0^2 d\varphi = \delta\left(2^4 - \frac{2^6}{6}\right)\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{32}{3}\pi\delta. \blacktriangleleft$$

13.7. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 13

1. Доказать равенства:

$$\iint\limits_D x^2 dxdy = \iint\limits_D y^2 dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy,$$

если область D определяется неравенствами $x > 0$, $y > 0$, $x^2 + y^2 < a^2$.

2. Использовав полярные координаты, вычислить

$$\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy,$$

где область D — лепесток лемнискаты $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-$ $-y^2)$, $x\geqslant 0$. $\left(\textit{Ответ: } \left(\frac{\pi}{3}-\frac{16\sqrt{2}-20}{9}\right)\frac{a^2}{2}.\right)$

3. Построить область, площадь которой выражается интегралом

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{a}^{a(1+\cos\varphi)} \rho d\rho.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}\right)^2=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}$. (*Ответ:* 6.)

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $(x^2+y^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2)$ и $x^2+y^2=ay\sqrt{3}$. (*Ответ:* $3a^2\sqrt{3}/2$.)

6. В каком отношении гиперболоид $x^2+y^2-z^2=a^2$ делит объем шара $x^2+y^2+z^2\leqslant 3a^2$? (*Ответ:* $3\sqrt{3}-$ $-2/2$.)

7. Доказать, что объем тела, ограниченного поверхностями $z=0$ и $z=e^{-x^2-y^2}$, равен π.

8. Вычислить координаты центра масс однородной пластины, ограниченной кардиоидой $\rho=a(1+\cos\varphi)$. $\left(\textit{Ответ: } \left(\frac{5}{6}a,\ 0\right).\right)$

9. Вычислить момент инерции относительно оси Ox однородной пластины, ограниченной кривой $x^4+y^4=$ $=x^2+y^2$. (*Ответ:* $3\pi/(2\sqrt{2})$.)

10. Вычислить

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz,$$

преобразовав его предварительно к цилиндрическим координатам. (*Ответ:* $8a^2/9$.)

11. Вычислить

$$\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz,$$

преобразовав его предварительно к сферическим координатам. (*Ответ:* $4\pi R^5/15$.)

12. Вычислить массу тела, ограниченного прямым круглым цилиндром радиусом R и высотой H, если его плотность в любой точке численно равна квадрату расстояния от этой точки до центра основания цилиндра. $\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi R^2 H}{6}(3R^2+2H^2).\right)$

13. Вычислить координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $z=0$ и $x+z=6$. (*Ответ:* (14/15, 26/15, 8/3).)

14. Вычислить координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=z$ и $x+y+z=0$. (*Ответ:* $(-1/2,\ -1/2,\ 5/6)$.)

15. Найти момент инерции относительно начала координат однородного тела, ограниченного конусом $z^2=x^2-y^2$ и сферой $x^2+y^2+z^2=R^2$ (*Ответ:* $2\pi(2-\sqrt{2})R^5/5$.)

16. Найти момент инерции относительно диаметра основания круглого конуса, высота которого H, радиус основания R и плотность $\gamma=\mathrm{const}$. (*Ответ:* $\pi\gamma HR^2(2H^2+3R^2)/60$.)

17. Показать, что сила притяжения, действующая со стороны однородного шара на внешнюю материальную точку, не изменится, если всю массу шара сосредоточить в его центре.

18. Дано однородное тело, ограниченное двумя концентрическими сферами. Доказать, что сила притяжения данным сферическим слоем точки, находящейся во внутренней полости тела, равна нулю.

19. Вычислить массу полушара радиусом R, если плотность распределения массы в каждой его точке пропорциональна (k — коэффициент пропорциональности) расстоянию от нее до некоторой точки O на границе основания полушара. (*Ответ:* $4k\pi R^4/5$.)

20. Вычислить объем V общей части шара радиусом R и кругового цилиндра радиусом $R/2$ при условии, что центр шара лежит на поверхности цилиндра. $\left(\textit{Ответ: } \frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).\right)$

21. Вычислить площадь части сферической поверхности радиусом R, которая высекается круговой цилиндрической поверхностью радиусом $R/2$ при условии, что центр сферы лежит на цилиндрической поверхности. (*Ответ:* $2R^2(\pi-2)$.)

14. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

14.1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ВЫЧИСЛЕНИЕ

Криволинейные интегралы первого рода (по длине дуги). Пусть в пространстве $\mathbf{R}^3$ задана гладкая дуга L_{AB} кривой L, во всех точках которой определена непрерывная функция $u = f(x, y, z)$. Дугу L_{AB} произвольным образом разобьем на n частей l_i длиной Δl_i $(i = \overline{1, n})$. В каждой элементарной части l_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ (рис. 14.1) и составим интегральную сумму

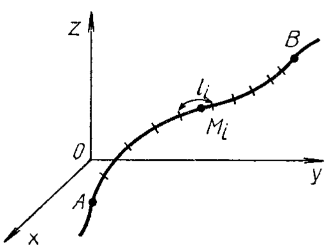


Рис. 14.1

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta l_i.$$

Тогда предел $\lim\limits_{\Delta l_i \to 0} I_n$ всегда существует, называется *криволинейным интегралом первого рода* или *криволинейным интегралом по длине дуги* L_{AB} от функции $f(x, y, z)$ и обозначается $\int\limits_{L_{AB}} f(x, y, z)\,dl$.

Таким образом, по определению

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y, z)dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta l_i.$$

Если кривая L лежит в плоскости Oxy и вдоль этой кривой задана непрерывная функция $f(x, y)$, то

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta l_i. \qquad (14.1)$$

В случае, когда гладкая кривая L задана в пространстве $\mathbf{R}^3$ параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ и параметр t изменяется монотонно на отрезке $[\alpha; \beta]$ $(\alpha < \beta)$ при перемещении по кривой L из точки A в точку B, верна формула для вычисления криволинейного интеграла

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y, z)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt. \qquad (14.2)$$

В случае плоской кривой формула (14.2) упрощается.

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)\, dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt. \qquad (14.3)$$

Если уравнение плоской кривой $\rho = \rho(\varphi)$ задано в полярных координатах ρ, φ, функция $\rho(\varphi)$ и ее производная $\rho' = d\rho/d\varphi$ непрерывны, то имеет место частный случай формулы (14.3), где в качестве параметра t взят полярный угол φ:

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)\, dl = \int\limits_{\varphi_A}^{\varphi_B} f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi \qquad (14.4)$$

(φ_A и φ_B — значения φ, определяющие на кривой точки A и B).

Если плоская кривая задана непрерывной и непрерывно дифференцируемой на $[a; b]$ функцией $y = y(x)$, где a и b — обсциссы точек A и B, то

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)\, dl = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx. \qquad (14.5)$$

Итак, во всех случаях вычисление криволинейных интегралов первого рода сводится к вычислению определенного интеграла (см. гл. 9 во второй части настоящего пособия).

Пример 1. Вычислить $I = \int\limits_{L} \left(2z - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dl$, где L — первый виток конической винтовой линии $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

▶ Находим

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt =$$
$$= \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\, dt = \sqrt{2 + t^2}\, dt.$$

Тогда

$$I = \int\limits_0^{2\pi} (2t - t)\sqrt{2 + t^2}\, dt = \int\limits_0^{2\pi} t\sqrt{2 + t^2}\, dt =$$
$$= \frac{1}{3}(2 + t^2)^{3/2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left((1 + 2\pi^2)^{3/2} - 1\right). \blacktriangleleft$$

Пример 2. Вычислить $I = \int\limits_{L} \frac{dl}{x + 2y + 5}$, где L — отрезок прямой $y = 2x - 2$, заключенный между точками $A(0, -2)$, $B(1, 0)$.

▶ Находим

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \sqrt{1 + 4}\, dx = \sqrt{5}\, dx.$$

Следовательно,

$$I=\int_0^1 \frac{\sqrt{5}\,dx}{x+2(2x-2)+5}=\sqrt{5}\int_0^1 \frac{dx}{5x+1}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\ln|5x+1|\Big|_0^1=\frac{\sqrt{5}}{5}\ln 6. \blacktriangleleft$$

Так как, согласно формулам (14.2) — (14.5), криволинейный интеграл первого рода выражается через определенный интеграл, то укажем только те его свойства, которые обобщают свойства определенного интеграла.

1. $\int\limits_{L_{AB}} dl = l_{AB}$, где l_{AB} — длина дуги AB *(геометрический смысл криволинейного интеграла первого рода).*

2. Если $f(x, y, z)=\delta(x, y, z)$ — линейная плотность материальной дуги L_{AB}, то ее масса m вычисляется по формуле

$$m=\int\limits_{L_{AB}} \delta(x, y, z)\,dl \tag{14.6}$$

(механический смысл криволинейного интеграла первого рода).

3. Координаты центра масс материальной дуги L_{AB}, имеющей линейную плотность $\delta=\delta(x, y, z)$, определяются по формулам:

$$x_C=\frac{1}{m}\int\limits_{L_{AB}} x\delta(x, y, z)\,dl,\quad y_C=\frac{1}{m}\int\limits_{L_{AB}} y\delta(x, y, z)\,dl,$$

$$z_C=\frac{1}{m}\int\limits_{L_{AB}} z\delta(x, y, z)\,dl, \tag{14.7}$$

где m — масса дуги L_{AB}.

4. Моменты инерции относительно начала координат O, осей координат Ox, Oy, Oz и координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz материальной дуги L_{AB}, имеющей линейную плотность $\delta=\delta(x, y, z)$, вычисляются соответственно по формулам:

$$\left.\begin{aligned} I_0&=\int\limits_{L_{AB}}(x^2+y^2+z^2)\,\delta dl,\quad I_x=\int\limits_{L_{AB}}(y^2+z^2)\,\delta dl,\\ I_y&=\int\limits_{L_{AB}}(x^2+z^2)\,\delta dl,\quad I_z=\int\limits_{L_{AB}}(x^2+y^2)\,\delta dl,\\ I_{xy}&=\int\limits_{L_{AB}} z^2\delta dl,\quad I_{xz}=\int\limits_{L_{AB}} y^2\delta dl,\quad I_{yz}=\int\limits_{L_{AB}} x^2\delta dl.\end{aligned}\right\} \tag{14.8}$$

Моменты инерции связаны следующими соотношениями:

$$2I_0=I_x+I_y+I_z,\quad I_0=I_{xy}+I_{xz}+I_{yz}.$$

Если дуга L_{AB} лежит в плоскости Oxy, то рассматриваются только моменты I_0, I_x, I_y (при условии, что $z=0$).

5 Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет размерность длины и $f(x, y) > 0$ во всех точках плоской дуги L_{AB}, лежащей в плоскости Oxy. Тогда

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)\, dl = S,$$

где S — площадь части цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz и проходящими через точки дуги L_{AB}, ограниченной снизу дугой L_{AB}, сверху — линией пересечения цилиндрической поверхности с поверхностью $z = f(x, y)$, а с боков — прямыми, прохо-

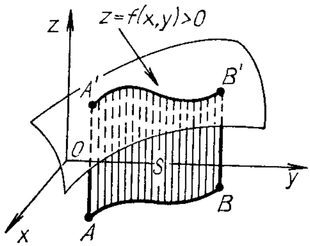


Рис. 14.2

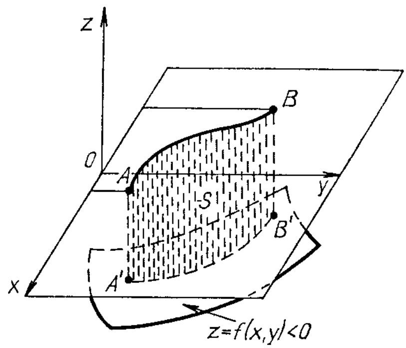


Рис. 14.3

дящими через точки A и B параллельно оси Oz. На рис. 14.2 изображена описанная часть цилиндрической поверхности $ABB'A'$. Если $f(x, y) < 0$ во всех точках плоской дуги L_{AB}, то

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)\, dl = -S$$

(рис. 14.3). И, наконец, в некоторых точках плоской дуги L_{AB} функция $f(x, y)$ меняет знак, тогда интеграл $\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)\, dl$ выражает разность площадей частей описанной цилиндрической поверхности, находящихся над плоскостью Oxy и под ней (рис. 14.4):

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)\, dl = S_1 - S_2 + S_3.$$

Пример 3. Вычислить массу m и координаты центра масс x_c, y_c плоской материальной дуги $y = \frac{2}{3} x^{3/2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, линейная плотность которой $\delta(x, y) = y\sqrt{1 + x}$.

▶ Согласно формулам (14.5) и (14.6), для случая плоской дуги имеем.

$$m = \int\limits_0^1 \delta(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx = \frac{2}{3} \int\limits_0^1 x^{3/2} \sqrt{1 + x} \sqrt{1 + x}\, dx =$$

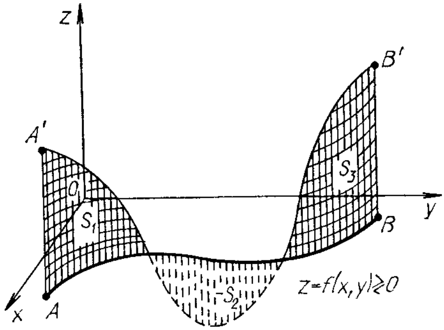


Рис. 14.4

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 (x^{3/2} + x^{5/2})\, dx = \frac{16}{35}.$$

По формулам (14.7) находим:

$$x_c = \frac{35}{16}\int_0^1 (x^{5/2} + x^{7/2})\, dx = \frac{10}{9},$$

$$y_c = \frac{35}{16}\int_0^1 \frac{2}{3} x^{3/2} (x^{3/2} + x^{5/2})\, dx = \frac{35}{24}\int_0^1 (x^3 + x^4)\, dx = \frac{21}{32}. \blacktriangleleft$$

Пример 4. Вычислить площадь части цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = 4$, заключенной между плоскостью Oxy и поверхностью $z = 2 + x^2/2$ (рис. 14.5).

▶ Искомая площадь S цилиндрической поверхности выражается интегралом

$$S = \int_L (2 + x^2/2)\, dl,$$

где L — окружность в плоскости Oxy: $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, уравнение которой в параметрическом виде $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$. Тогда $dl = 2dt$ и

$$S = \int_0^{2\pi} \left(2 + \frac{1}{2}\cdot 4\cos^2 t\right) 2dt =$$

$$= 4\int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 t)\, dt = 4\int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt = 12\pi. \blacktriangleleft$$

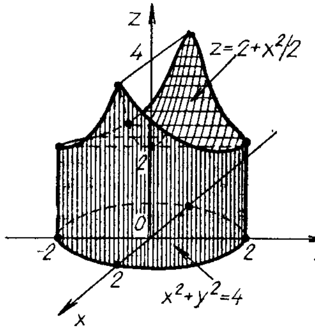


Рис. 14.5

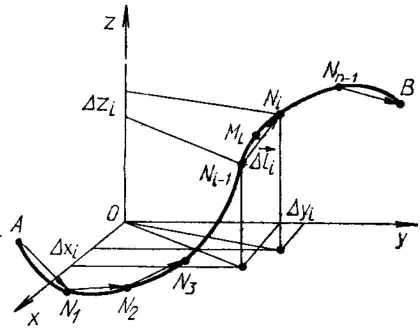


Рис. 14.6

Криволинейные интегралы второго рода (по координатам). Пусть в пространстве $\mathbf{R}^3$ задан вектор $\mathbf{a} = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$, координаты которого — непрерывные функции в точках ориентированной кривой L_{AB}. Кривую L_{AB} разобьем в направлении от A к B на n элементарных дуг l_i и построим векторы $\overrightarrow{\Delta l_i} = \Delta x_i\mathbf{i} + \Delta y_i\mathbf{j} + \Delta z_i\mathbf{k}$, где Δx_i, Δy_i, Δz_i — проекции векторов $\overrightarrow{\Delta l_i}$ на оси координат. Начала этих векторов совпадают с началами элементарных дуг l_i, а концы — с их концами (рис. 14.6). На каждой элементарной части l_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и составим интегральную сумму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i, z_i)\,\Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i)\,\Delta y_i + R(x_i, y_i, z_i)\,\Delta z_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}(x_i, y_i, z_i) \cdot \overrightarrow{\Delta l_i}. \tag{14.9}$$

Предел суммы (14.9), найденный при условии, что все $|\overrightarrow{\Delta l_i}| \to 0$, называется *криволинейным интегралом второго рода* или *криволинейным интегралом по координатам* от вектор-функции $\mathbf{a}(x, y, z)$ по кривой L_{AB} и обозначается

$$\int_{L_{AB}} \mathbf{a}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} = \int_{L_{AB}} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz =$$

$$= \lim_{\overrightarrow{\Delta l_i} \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}(x_i, y_i, z_i) \cdot \overrightarrow{\Delta l_i}. \tag{14.10}$$

Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны в точках гладкой кривой L_{AB}, то предел суммы (14.8) существует, т. е. существует криволинейный интеграл второго рода (14.10).

Криволинейные интегралы второго рода обладают основными свойствами определенных интегралов (линейность, аддитивность). Непосредственно из определения криволинейного интеграла второго рода следует, например, что он зависит от направления интегрирования вдоль кривой, т. е. меняет знак при изменении ориентации кривой:

$$\int_{L_{AB}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{L_{AB}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}.$$

Если кривая интегрирования L замкнута, криволинейные интегралы второго рода обозначаются $\oint\limits_L \mathbf{a}\cdot d\mathbf{l}$. В этом случае через кривую L проводится ориентированная поверхность и за положительное направление обхода по L принимается такое направление, при котором область поверхности, ограниченная кривой L, находится слева, если двигаться вдоль L по выбранной стороне указанной поверхности (т. е. обход контура L совершается против хода часовой стрелки).

Если плоскую область D, ограниченную кривой L, разбить на части, не имеющие общих внутренних точек и ограниченные замкнутыми кривыми L_1 и L_2, то

$$\oint\limits_L \mathbf{a}\cdot d\mathbf{l} = \oint\limits_{L_1} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{l} + \oint\limits_{L_2} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{l},$$

где направления обхода по контурам L, L_1 и L_2 — всюду либо положительные, либо отрицательные.

Если гладкая кривая L_{AB} задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $A(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ и $B(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$ — соответственно начальная и конечная точки этой кривой, то верна следующая формула для вычисления криволинейного интеграла второго рода:

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz =$$
$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t), z(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\,y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))\,z'(t))\,dt. \quad (14.11)$$

Если кривая L_{AB} лежит в плоскости Oxy, $\mathbf{a} = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$, то $R(x, y, z) \equiv 0$, $z(t) \equiv 0$ и формула (14.11) упрощается:

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t))\,dt. \quad (14.12)$$

Если кривая L_{AB} лежит в плоскости Oxy и задана уравнением $y = f(x)$, производная $f'(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, $\mathbf{a} = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$, то

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{a}^{b} (P(x, f(x)) + Q(x, f(x))\,f'(x))\,dx. \quad (14.13)$$

Пример 5. Вычислить

$$I = \int\limits_{L_{AB}} y\,dx + (x + z)\,dy + (x - y)\,dz,$$

где L_{AB} — отрезок прямой, соединяющий точки $A(1, -1, 1)$ и $B(2, 3, 4)$.

▶ Запишем параметрические уравнения прямой AB: $x=1+t$, $y=-1+4t$, $z=1+3t$. На отрезке $|AB|$ параметр $0 \leqslant t \leqslant 1$ Поэтому, согласно формуле (14.11),

$$I=\int_0^1((-1+4t)+(2+4t)\cdot 4+(2-3t)\cdot 3)\,dt=$$

$$=\int_0^1(13+11t)\,dt=18{,}5. \blacktriangleleft$$

Пример 6. Вычислить $I=\oint_L y\,dx-x^2dy+(x+y)\,dz$, если L — кривая пересечения цилиндра $x^2+y^2=4$ с плоскостью $x+y-z=0$, «пробегаемая» в положительном направлении относительно выбранной верхней стороны данной плоскости.

▶ Найдем параметрические уравнения кривой L. Так как проекция кривой L на плоскость Oxy есть окружность $x^2+y^2=4$, $z=0$, то можно записать, что $x=2\cos t$, $y=2\sin t$. Тогда из уравнения плоскости находим, что $z=2(\cos t+\sin t)$. Таким образом,

$$\left.\begin{array}{l} x=2\cos t \\ y=2\sin t \\ z=2(\cos t+\sin t),\ t\in[0;\ 2\pi], \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} dx=-2\sin t\,dt \\ dy=2\cos t\,dt \\ dz=2(-\sin t+\cos t)\,dt \end{array}\right.$$

Отсюда по формуле (14.11) имеем:

$$I=\int_0^{2\pi}(-4\sin^2 t-8\cos^3 t+4(\cos^2 t-\sin^2 t))\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}(-2+2\cos 2t-8\cos t+8\sin^2 t\cos t+4\cos 2t)\,dt=-4\pi. \blacktriangleleft$$

Пример 7. Вычислить $I=\int_{L_{AB}} xy\,dx+(x^2+y)\,dy$, если линия L_{AB} — дуга параболы $y=x^2$, расположенная между точками $A(0,\ 0)$ и $B(2,\ 4)$.

▶ Так как в данном случае $f(x)=x^2$, $f'(x)=2x$, $x\in[0;\ 2]$, то, согласно формуле (14.13), получаем

$$I=\int_0^2(xx^2+(x^2+x^2)\cdot 2x)\,dx=\int_0^2 5x^3dx=\frac{5}{4}x^4\Big|_0^2=20. \blacktriangleleft$$

АЗ-14.1

1. Вычислить $\int_L \frac{dl}{x-y}$, если L — отрезок прямой $y=\frac{1}{2}x-2$, заключенный между точками $A(0,\ -2)$ и $B(4,\ 0)$. (*Ответ:* $\sqrt{5}\ln 2$.)

2. Вычислить $\oint xy\,dl$, если L — контур прямоугольника

с вершинами в точках $A(0,\ 0)$, $B(4,\ 0)$, $C(4,\ 2)$, $D(0,\ 2)$. (*Ответ:* 24.)

3. Вычислить $\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl$, если L — первая арка циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(a>0)$. (*Ответ:* $4\pi a\sqrt{a}$.)

4. Вычислить $\int\limits_L xyz\,dl$, если L — отрезок прямой между точками $A(1,\ 0,\ 1)$ и $B(2,\ 2,\ 3)$. (*Ответ:* 12.)

5. Вычислить площадь боковой поверхности цилиндра $x^2+y^2=Rx$, заключенной внутри сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$. (*Ответ:* $4R^2$.)

6. Вычислить $\int\limits_{L_{AB}} (x^2-2xy)\,dx+(2xy+y^2)dy$, где L_{AB} — дуга параболы $y=x^2$ от точки $A(1,\ 1)$ до точки $B(2,\ 4)$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ 40\frac{19}{30}.\right)$

7. Вычислить $\int\limits_{L_{AB}} x\,dx+y\,dy+(x+y-1)\,dz$, где L_{AB} — отрезок прямой, соединяющей точки $A(1,\ 1,\ 1)$ и $B(2,\ 3,\ 4)$. (*Ответ:* 13.)

8. Вычислить $\int\limits_L yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz$, где L — дуга винтовой линии $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=at/(2\pi)$ от точки пересечения линии с плоскостью $z=0$ до точки ее пересечения с плоскостью $z=a$. (*Ответ:* 0.)

9. Вычислить $\int\limits_{L_{AB}} xy\,dx+(y-x)\,dy$, если линия L_{AB}, соединяющая точки $A(0,\ 0)$ и $B(1,\ 1)$, задана уравнением: а) $y=x$; б) $y=x^2$; в) $y^2=x$; г) $y=x^3$. (*Ответ:* а) $1/3$; б) $1/12$; в) $17/30$; г) $-1/20$.)

10. Найти координаты центра масс первой полуарки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t\in[0;\ \pi]$. (*Ответ:* $4a/3$, $4a/3$.)

Самостоятельная работа

1. Вычислить:

а) $\int\limits_L x\,dl$, если L — отрезок прямой, соединяющей точки $A(0,\ 0)$ и $B(1,\ 2)$;

б) $\int\limits_{L_{AB}} (x+y)\,dx+(x-y)\,dy$, если L_{AB} — дуга параболы

$y=x^2$, лежащая между точками $A(-1,\ 1)$ и $B(1,\ 1)$. (*Ответ:* а) $\sqrt{5}/2$; б) 2.)

2. Вычислить:

а) $\int\limits_L x^2y\,dl$, если L — часть окружности $x^2+y^2=9$, лежащая в первом квадранте;

б) $\int\limits_{L_{AB}} (x-y)\,dx+(x+y)\,dy$, если L_{AB} — отрезок прямой, соединяющий точки $A(2,\ 3)$ и $B(3,\ 5)$.
(*Ответ:* а) 27; б) 23/2.)

3. Вычислить:

а) $\int\limits_L \frac{dl}{x+y}$, если L — отрезок прямой $y=x+2$, соединяющий точки $A(2,\ 4)$, $B(1,\ 3)$;

б) $\int\limits_{L_{AB}} (y+x^2)dx+(2x-y)dy$, если L_{AB} — дуга параболы $y=2x-x^2$, расположенная между точками $A(1,\ 1)$ и $B(3,\ -3)$. (*Ответ:* а) $(\sqrt{2}/2)\ln 2$; б) 12.)

14.2. ПРИЛОЖЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

С помощью криволинейных интегралов первого рода можно вычислять длину дуги кривой, массу материальной дуги, ее центр масс, площади цилиндрических поверхностей и другие величины.

Пример 1. Вычислить массу m дуги кривой L, заданной уравнениями $x=t^2/2$, $y=t$, $z=t^3/3$, $0\leqslant t\leqslant 2$, если плотность в каждой ее точке $\delta=1+4x^2+y^2$.

▶ Согласно формуле (14.6), искомая масса m выражается интегралом

$$m=\int\limits_L \sqrt{1+4x^2+y^2}\,dl=\int\limits_0^2 \sqrt{1+t^4+t^2}\sqrt{t^2+1+t^4}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^2 (1+t^2+t^4)\,dt=116/15.\ ◀$$

Пример 2. Вычислить координаты центра масс однородной дуги окружности $x^2+y^2=R^2$, расположенной в первом квадранте, и моменты инерции I_0, I_x, I_y.

▶ Так как прямая $y=x$ является осью симметрии дуги окружности, то $x_C=y_C$. Для нахождения x_C используем первую из формул (14.7):

$$x_C=\int\limits_L x\delta\,dl\Big/\int\limits_L \delta\,dl=\int\limits_L x\,dl\Big/\int\limits_L dl,$$

поскольку $\delta = \text{const}$. Интеграл

$$\int\limits_L dl = \frac{1}{2}\pi R$$

определяет длину четверти рассматриваемой окружности. Вычислим $\int\limits_L x dl$, где $x = R\cos t$; $y = R\sin t$; $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$;

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = Rdt.$$

Следовательно,

$$\int\limits_L x dl = \int\limits_0^{\pi/2} R\cos tRdt = R^2 \sin t\Big|_0^{\pi/2} = R^2.$$

Окончательно имеем:

$$x_C = y_C = \frac{R^2}{\pi R/2} = \frac{2R}{\pi}.$$

При вычислении I_O, I_x, I_y воспользуемся формулами (14.8) и (14.3) для случая плоской дуги ($z \equiv 0$) и учтем, что $I_x = I_y$:

$$I_0 = \int\limits_L (x^2 + y^2)\,\delta dl = \delta \int\limits_0^{\pi/2} R^2 R dt = R^3\delta\pi/2,$$

$$I_x = \int\limits_L y^2 \delta dl = \delta \int\limits_0^{\pi/2} R^2 \sin^2 tRdt = \frac{R^3\delta}{2} \int\limits_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t)\, dt = \pi R^3 \delta/4. \blacktriangleleft$$

Криволинейный интеграл второго рода (14.9) в случае, когда $\mathbf{a} = \mathbf{F}$ — сила, под действием которой перемещается тело, определяет работу силы $\mathbf{F}$ на пути L_{AB}. В этом заключается *физический смысл криволинейного интеграла второго рода.*

Пример 3. Вычислить работу A силы $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ вдоль отрезка прямой BC, если $B(1, 1, 1)$ и $C(2, 3, 4)$.

▶ Запишем параметрические уравнения прямой BC: $x = 1 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = 1 + 3t$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда работа A силы $\mathbf{F}$ на пути BC вычисляется по формуле

$$A = \int\limits_{L_{BC}} yzdx + xzdy + xydz =$$

$$= \int\limits_0^1 (1 + 2t)(1 + 3t)\, dt + (1 + t)(1 + 3t)\, 2dt + (1 + t)(1 + 2t)\, 3dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (18t^2 + 22t + 6)\, dt = 23. \blacktriangleleft$$

Теорема (Грина). *Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны и меют непрерывные частные производные в замкнутой односвязной* *области D, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной кусочно-гладкой кривой L, то*

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy, \qquad (14.14)$$

где интегрирование по контуру L выполняется в положительном направлении.

Формула (14.14) называется *формулой Грина.*

Если в некоторой областн D выполнены условия теоремы Грина, то равносильны следующие утверждения.

1 $\oint_L Pdx + Qdy = 0$, *если L — любой замкнутый контур L, расположенный в области D.*

2. *Интеграл* $\int_{L_{AB}} Pdx + Qdy$ *не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки A и B, где $L_{AB} \in D$.*

3. $Pdx + Qdy = du(x, y)$, *где* $du(x, y)$ — *полный дифференциал функции $u(x, y)$.*

4. *Во всех точках области D справедливо равенство*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \qquad (14.15)$$

Из формулы Грина следует, что площадь S области D можно также вычислить с помощью криволинейного интеграла второго рода:

$$S_D = \frac{1}{2}\oint_L - ydx + xdy,$$

где интегрирование по контуру L производится в положительном направлении.

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлей кривой $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ (рис. 14.7).

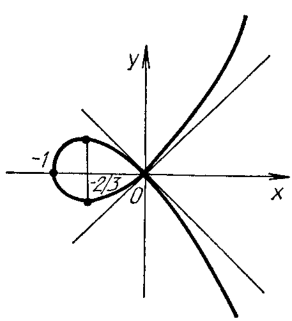


Рис. 14.7

▶ Из уравнения кривой получим, что $y = \pm x\sqrt{x+1}$, т. е. кривая симметрична относительно оси Ox и пересекает ее в точках $x=0$ и $x=-1$; обе функции $y=\pm x\sqrt{x+1}$ определены при $x \geqslant -1$, а $y \to \pm\infty$ при $x \to \infty$. Перейдем к параметрическим уравнениям данной кривой, положив $y = xt$. Подставив $y = xt$ в уравнение $x^3 + x^2 - y^2 = 0$, получим $x^3 + x^2 = x^2t^2$, $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$, где для петли $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

Следовательно, искомая площадь

$$S = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[-(t^3 - t)\,2t + (t^2 - 1)(3t^2 - 1)]\,dt =$$

$$= \int_{0}^{1}(t^4 - 2t^2 + 1)\,dt = \frac{8}{15}. \blacktriangleleft$$

Пример 5. Вычислить

$$I = \oint_L y(1 - x^2)dx + (1 + y^2)\,xdy,$$

где контур L — окружность $x^2 + y^2 = 4$, «пробегаемая» в положительном направлении обхода.

▶ Для вычисления интеграла воспользуемся формулой Грина (14.14):

$$I = \iint_D (1 + y^2 - 1 + x^2)\,dxdy = \iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy,$$

где D — круг, определяемый неравенством $x^2 + y^2 \leqslant 4$. Имеем

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \left|\begin{matrix} x = \rho\cos\varphi, & dxdy = \rho d\rho d\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, & 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \ 0 \leqslant \rho \leqslant 2 \end{matrix}\right| =$$

$$= \iint_{D'} \rho^3 d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho = 8\pi. \blacktriangleleft$$

С помощью теории криволинейных интегралов второго рода можно решить следующую задачу. Известно дифференциальное выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, которое является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$. Требуется найти эту функцию.

Решение данной задачи определяется формулой

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy + C \qquad (14.16)$$

или

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + C, \qquad (14.17)$$

где точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$ принадлежат области D, в которой $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и их частные производные являются непрерывными функциями; C — произвольная постоянная.

Пример 6. Показать, что дифференциальное выражение

$$\frac{x}{y}\,dy+\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}+\ln y\right)dx$$

будет полным дифференциалом некоторой функции $u(x,\ y)$, и найти эту функцию.

▶ Так как

$$P(x,\ y)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}+\ln y,\quad Q(x,\ y)=\frac{x}{y},$$

то $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{1}{y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{1}{y}$. Значит, во всех точках плоскости Oxy, исключая точки, лежащие на осях координат, данное дифференциальное выражение в силу равенства (14.14) будет полным дифференциалом некоторой функции $u(x,\ y)$. Теперь воспользуемся общей формулой (14.16) или (14.17), где можно взять $M_0(1,\ 1)$.

По формуле (14.16) имеем

$$u(x,\ y)=\int_1^x\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}\right)dx+\int_1^y\frac{x}{y}\,dy+C=$$

$$=(\operatorname{arctg}x-\ln|x|)\Big|_1^x+x\ln|y|\,\Big|_1^y+C=$$

$$=\operatorname{arctg}x-\ln|x|+x\ln|y|+C,$$

где C — произвольная постоянная. ◀

АЗ-14.2

1. Вычислить массу дуги кривой $y=\ln x$ плотностью $\delta=x^2$, если концы дуги определяются следующими значениями x: $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{8}$. (*Ответ:* 19/3.)

2. Вычислить площадь поверхности, которую вырезает из круглого цилиндра радиусом R такой же цилиндр, если оси этих цилиндров пересекаются под прямым углом. (*Ответ:* $8R^2$.)

3. С помощью криволинейного интеграла второго рода вычислить площадь фигуры, ограниченной:

а) линией $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ (*астроида*);

б) первой аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью Ox.

(*Ответ:* а) $3\pi a^2/8$; б) $3\pi a^2$.)

4. Найти функции $u(x,\ y)$ по их полным дифференциалам:

а) $du=4(x^2-y^2)(xdx-ydy)$;

б) $du=(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy$;

в) $du=(3y-x)\,dx+(y-3x)\,dy/(x+y)^3$.

5. Вычислить работу силы $\mathbf{F}=(x^2+y^2+1)\mathbf{i}+2xy\mathbf{j}$ вдоль дуги параболы $y=x^3$, заключенной между точками $A(0,\ 0)$ и $B(1,\ 1)$.
(*Ответ*: 196/105.)

6. Применив формулу Грина, вычислить

$$\oint_L y^2dx+(x+y)^2dy,$$

где L — контур треугольника ABC с вершинами в точках $A(3,\ 0)$, $B(3,\ 3)$ и $C(0,\ 3)$. (*Ответ*: 18.)

7. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $(4x^3y^3-y^2)dx+(3x^4y^2-2xy)dy=0$. (*Ответ*: $x^4y^3-xy^2=C$.)

Самостоятельная работа

1. 1. С помощью криволинейного интеграла второго рода вычислить площадь области D, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$. (*Ответ*: 1/3.)

2. Найти функцию $u(x,\ y)$, если

$$du(x,\ y)=(2xy+x^3-5)dx+(x^2-y^3+5)dy.$$

2. 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осями координат и дугой эллипса $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, расположенной в первом квадранте. (*Ответ*: $\pi ab/4$.)

2. Найти функцию $u(x,\ y)$, если

$$du(x,\ y)=(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy+y^2)dy.$$

3. 1. Вычислить работу силы $\mathbf{F}(x,\ y)=2xy\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}$, совершаемую на пути, соединяющем точки $A(0,\ 0)$ и $B(2,\ 1)$. (*Ответ*: 4.)

2. Найти функцию $u(x,\ y)$, если

$$du=\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx+\left(\frac{e^y}{1+x^2}+1\right)dy.$$

14.3. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 14

ИДЗ-14.1

Вычислить данные криволинейные интегралы.

1

1.1. $\int\limits_{L_{AB}}(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, где L_{AB} — дуга параболы $y=x^2$ от точки $A(-1, 1)$ до точки $B(1, 1)$. (*Ответ*: -6.)

1.2. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{x^2dy - y^2dx}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{y^5}}$, где L_{AB} — дуга астроиды $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ от точки $A(2, 0)$ до точки $B(0, 2)$. (*Ответ*: $3\sqrt[3]{2}\pi/8$.)

1.3. $\int\limits_{L_{OA}} (x^2+y^2)\,dx + 2xydy$, где L_{OA} — дуга кубической параболы $y=x^3$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$. (*Ответ*: $4/3$.)

1.4. $\oint\limits_{L} (x+2y)\,dx + (x-y)\,dy$, где L — окружность $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ при положительном направлении обхода. (*Ответ*: -4π.)

1.5. $\oint\limits_{L} (x^2y - x)\,dx + (y^2x-2y)\,dy$, где L — дуга эллипса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ при положительном направлении обхода. (*Ответ*: $-7{,}5\pi$.)

1.6. $\oint\limits_{L_{AB}} (xy-1)\,dx + x^2ydy$, где L_{AB} — дуга эллипса $x=\cos t$, $y = 2\sin t$ от точки $A(1, 0)$ до точки $B(0, 2)$. (*Ответ*: $5/6$.)

1.7. $\int\limits_{L_{OBA}} 2xydx - x^2dy$, где L_{OBA} — ломаная OBA; $O(0, 0)$; $B(2, 0)$; $A(2, 1)$. (*Ответ*: -4.)

1.8. $\int\limits_{L_{AB}} (x^2-y^2)\,dx + xydy$, где L_{AB} — отрезок прямой AB; $A(1, 1)$; $B(3, 4)$. $\left(\textit{Ответ}: 11\frac{5}{6}.\right)$

1.9. $\int\limits_{L_{AB}} \cos y dx - \sin x dy$, где L_{AB} — отрезок прямой AB, $A(2\pi, -2\pi)$; $B(-2\pi, 2\pi)$. (*Ответ*: 0.)

1.10. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{ydx + xdy}{x^2+y^2}$, где L_{AB} — отрезок прямой AB; $A(1, 2)$; $B(3, 6)$. $\left(\textit{Ответ}: \frac{4}{5}\ln 3.\right)$

1.11. $\int\limits_{L_{AB}} xydx + (y-x)dy$, где L_{AB} — дуга кубической параболы $y=x^3$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(1, 1)$. (*Ответ*: $1/4$.)

1.12. $\int\limits_{L_{ABC}} (x^2+y^2)\,dx+(x+y^2)\,dy$, где L_{ABC} — ломаная ABC; $A(1,\ 2)$; $B(3,\ 2)$; $C(3,\ 5)$. $\left(\textit{Ответ}: 64\frac{2}{3}.\right)$

1.13. $\int\limits_{L_{OB}} xy^2dx+yz^2dy-x^2zdz$, где L_{OB} — отрезок прямой OB; $O(0,\ 0,\ 0)$; $B(-2,\ 4,\ 5)$. (*Ответ*: 91.)

1.14. $\int\limits_{L_{OA}} ydx+xdy$, где L_{OA} — дуга окружности $x=R\cos t$, $y=R\sin t$; $O(R,\ 0)$; $A(0,\ R)$. (*Ответ*: 0.)

1.15. $\int\limits_{L_{OA}} xydx+(y-x)\,dy$, где L_{OA} — дуга параболы $y^2=x$ от точки $O(0,\ 0)$ до точки $A(1,\ 1)$. (*Ответ*: 17/30.)

1.16. $\int\limits_{L_{AB}} xdx+ydy+(x-y+1)\,dz$, где L_{AB} — отрезок прямой AB; $A(1,\ 1,\ 1)$; $B(2,\ 3,\ 4)$. (*Ответ*: 7.)

1.17. $\int\limits_{L_{AB}} (xy-1)\,dx+x^2ydy$, где L_{AB} — дуга параболы $y^2=4-4x$ от точки $A(1,\ 0)$ до точки $B(0,\ 2)$. (*Ответ*: 17/15).

1.18. $\int\limits_{L_{OB}} xydx+(y-x)\,dy$, где L_{OB} — дуга параболы $y=x^2$ от точки $O(0,\ 0)$ до точки $B(1,\ 1)$. (*Ответ*: 1/12.)

1.19. $\int\limits_{L_{OB}} (xy-y^2)\,dx+xdy$, где L_{OB} — дуга параболы $y=x^2$ от точки $O(0,\ 0)$ до точки $B(1,\ 1)$. (*Ответ*: 43/60.)

1.20. $\int\limits_{L_{AB}} xdy-ydx$, где L_{AB} — дуга астроиды $x=2\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$ от точки $A(2,\ 0)$ до точки $B(0,\ 2)$. (*Ответ*: $3\pi/4$.)

1.21. $\int\limits_{L_{AB}} (xy-x)\,dx+\frac{1}{2}x^2dy$, где L_{AB} — дуга параболы $y^2=4x$ от точки $A(0,\ 0)$ до точки $B(1,\ 2)$. (*Ответ*:0,5.)

1.22. $\int\limits_{L_{AB}} (xy-1)\,dx+x^2ydy$, где L_{AB} — отрезок прямой AB; $A(1,\ 0)$; $B(0,\ 2)$. (*Ответ*: 1.)

1.23. $\int\limits_{L_{AB}} 2xydx+y^2dy+z^2dz$, где L_{AB} — дуга одного витка винтовой линии $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=2t$; $A(1,\ 0,\ 0)$; $B(1,\ 0,\ 4\pi)$. (*Ответ*: $64\pi^3/3$.)

1.24. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{y}{x}\,dx + x\,dy$, где L_{AB} — дуга линии $y = \ln x$ от точки $A(1,\ 0)$ до точки $B(e,\ 1)$. (*Ответ:* $e - 1/2$.)

1.25. $\oint\limits_{L} y\,dx - x\,dy$, где L — дуга эллипса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, «пробегаемая» в положительном направлении обхода. (*Ответ:* -12π.)

1.26. $\int\limits_{L_{OA}} 2xy\,dx - x^2dy$, где L_{OA} — дуга параболы $y = x^2/4$ от точки $O(0,\ 0)$ до точки $A(2,\ 1)$. (*Ответ:* 0.)

1.27. $\int\limits_{L_{AB}} (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$, где L_{AB} — ломаная линия $y = |x|$ от точки $A(-1,\ 1)$ до точки $B(2,\ 2)$. (*Ответ:* 6.)

1.28. $\int\limits_{L_{OA}} 2xy\,dx - x^2dy + z\,dz$, где L_{OA} — отрезок прямой, соединяющий точки $O(0,\ 0,\ 0)$ и $A(2,\ 1,\ -1)$. (*Ответ:* 11/6.)

1.29. $\oint\limits_{L} x\,dy - y\,dx$, где L — контур треугольника с вершинами $A(-1,\ 0)$, $B(1,\ 0)$, $C(0,\ 1)$ при положительном направлении обхода. (*Ответ:* 2.)

1.30. $\int\limits_{L_{ACB}} (x^2 + y)\,dx + (x + y^2)\,dy$, где L_{ACB} — ломаная ACB; $A(2,\ 0)$; $C(5,\ 0)$; $B(5,\ 3)$. (*Ответ:* 63.)

2

2.1. $\int\limits_{L} \sqrt{2 - z^2}\,(2z - \sqrt{x^2 + y^2})\,dl$, где L — дуга кривой $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. (*Ответ:* $4\pi^2(1 + \pi^2)$.)

2.2. $\oint\limits_{L} (x^2 + y^2)\,dl$, где L — окружность $x^2 + y^2 = 4$. (*Ответ:* 16π.)

2.3. $\int\limits_{L_{OB}} \frac{dl}{\sqrt{8 - x^2 - y^2}}$, где L_{OB} — отрезок прямой, соединяющий точки $O(0,\ 0)$ и $B(2,\ 2)$. (*Ответ:* $\pi/2$.)

2.4. $\int\limits_{L_{AB}} (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y})\,dl$, где L_{AB} — отрезок прямой AB; $A(-1,\ 0)$; $B(0,\ 1)$. (*Ответ*: $-5\sqrt{2}$.)

2.5. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{5}\,(x-y)}$, где L_{AB} — отрезок прямой, заключенный между точками $A(0,\ 4)$ и $B(4,\ 0)$. (*Ответ*: 0.)

2.6. $\int\limits_{L} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dl$, где L — дуга кардиоиды $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. (*Ответ*: 16/3.)

2.7. $\int\limits_{L_{AB}} y\,dl$, L_{AB} — дуга астроиды $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, заключенная между точками $A(1,\ 0)$ и $B(0,\ 1)$. (*Ответ*: 0,6.)

2.8. $\int\limits_{L_{OB}} y\,dl$, где L_{OB} — дуга параболы $y^2 = \frac{2}{3}x$ между точками $O(0,\ 0)$ и $B(\sqrt{35}/6,\ \sqrt{35}/3)$. (*Ответ*: $7\frac{26}{27}$.)

2.9. $\int\limits_{L} (x^2 + y^2 + z^2)\,dl$, где L — дуга кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \sqrt{3}t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. (*Ответ*: $4\pi(1 + 4\pi^2)$.)

2.10. $\int\limits_{L} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dl$, где L — дуга кардиоиды $\rho = (1 + \cos\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. (*Ответ*: $(\pi + 2)\sqrt{2} - 8$.)

2.11. $\int\limits_{L} \sqrt{2y}\,dl$, где L — первая арка циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$. (*Ответ*: $8\pi\sqrt{2}$.)

2.12. $\int\limits_{L_{OA}} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где L_{OA} — отрезок прямой, соединяющий точки $O(0,\ 0)$ и $A(1,\ 2)$. (*Ответ*: $\ln((\sqrt{5} + 3)/2)$.)

2.13. $\int\limits_{L} \frac{(y^2 - x^2)\,xy}{(x^2+y^2)^2}\,dl$, где L — дуга кривой $\rho = 9\sin 2\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$. (*Ответ*: $-9/8$.)

2.14. $\int\limits_{L_{OABC}} xy\,dl$, где L_{OABC} — контур прямоугольника с вершинами $O(0,\ 0)$, $A(4,\ 0)$, $B(4,\ 2)$, $C(0,\ 2)$. (*Ответ*: 24.)

2.15. $\int\limits_{L_{ABO}} (x+y)\,dl$, где L_{ABO} — контур треугольника с вершинами $A(1,\ 0)$, $B(0,\ 1)$, $O(0,\ 0)$. (*Ответ:* $-\sqrt{2}$.)

2.16. $\int\limits_{L} \frac{z^2 dl}{x^2+y^2}$, где L — первый виток винтовой линии $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=2t$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{16}{3}\sqrt{2}\pi^3.\right)$

2.17. $\int\limits_{L_{OAB}} (x+y)\,dl$, где L_{OAB} — контур треугольника с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(-1,\ 0)$, $B(0,\ 1)$. (*Ответ:* 0.)

2.18. $\int\limits_{L} (x+y)\,dl$, где L — дуга лемнискаты Бернулли $\rho^2=\cos 2\varphi$, $-\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$. (*Ответ:* $\sqrt{2}$.)

2.19. $\oint\limits_{L} \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где L — окружность $x^2+y^2=2y$. (*Ответ:* 8.)

2.20. $\int\limits_{L_{OABC}} xy\,dl$, где L_{OABC} — контур прямоугольника с вершинами $O(0,\ 0)$, $A(5,\ 0)$, $B(5,\ 3)$, $C(0,\ 3)$. (*Ответ:* -15.)

2.21. $\oint\limits_{L} (x^2+y^2)\,dl$, где L — окружность $x^2+y^2=4x$. (*Ответ:* 32π.)

2.22. $\int\limits_{L_{AB}} (4\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{y})\,dl$, где L_{AB} — дуга астроиды $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ между точками $A(1,\ 0)$ и $B(0,\ 1)$. (*Ответ:* 1.)

2.23. $\int\limits_{L} xy\,dl$, где L — контур квадрата со сторонами $x=\pm 1$, $y=\pm 1$. (*Ответ:* 0.)

2.24. $\int\limits_{L} y^2 dl$, где L — первая арка циклоиды $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$. $\left(\textit{Ответ: } 17\frac{1}{15}.\right)$

2.25. $\int\limits_{L_{ABCD}} xy\,dl$, где L_{ABCD} — контур прямоугольника с вершинами $A(2,\ 0)$, $B(4,\ 0)$, $C(4,\ 3)$, $D(2,\ 3)$. (*Ответ:* 45.)

2.26. $\int\limits_{L} y\,dl$, где L — дуга параболы $y^2=2x$, отсеченная параболой $x^2=2y$. (*Ответ:* $(5\sqrt{5}-1)/3$.)

2.27. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{x-y}$, где L_{AB} — отрезок прямой, заключенный между точками $A(4, 0)$ и $B(6, 1)$. (*Ответ:* $\sqrt{5}\ln(5/4)$.)

2.28. $\int\limits_{L} (x^2+y^2)^2\, dl$, где L — первая четверть окружности $\rho = 2$. (*Ответ:* 16π.)

2.29. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где L_{AB} — отрезок прямой, соединяющий точки $A(1, 1, 1)$ и $B(2, 2, 2)$. (*Ответ:* $\ln 2$.)

2.30. $\oint\limits_{L} (x-y)\, dl$, где L — окружность $x^2+y^2=2x$. (*Ответ:* 2π.)

3

3.1. $\oint\limits_{L} \sqrt{2y^2+z^2}\, dl$, где L — окружность $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $x=y$. (*Ответ:* $2\pi a^2$.)

3.2. $\int\limits_{L} xyz\,dl$, где L — четверть окружности $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=R^2/4$, лежащая в первом октанте. (*Ответ:* $R^4\sqrt{3}/32$.)

3.3. $\int\limits_{L} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\, dl$, где L — часть дуги спирали Архимеда $\rho = 2\varphi$, заключенная внутри круга радиусом R с центром в полюсе. (*Ответ:* $((R^2+4)^{3/2}-8)/12$.)

3.4. $\int\limits_{L} (x^2+y^2+z^2)dl$, где L — дуга кривой $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. (*Ответ:* $2\pi\sqrt{a^2+b^2}(3a^2+4\pi^2b^2)/3$.)

3.5. $\int\limits_{L} (2z-\sqrt{x^2+y^2})\, dl$, где L — первый виток конической винтовой линии $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$. (*Ответ:* $2\sqrt{2}((1+2\pi^2)^{3/2}-1)/3$.)

3.6. $\int\limits_{L} (x+z)\, dl$, где L — дуга кривой $x = t$, $y = (3/\sqrt{2})t^2$, $z = t^3$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. (*Ответ:* $(56\sqrt{7}-1)/54$.)

3.7. $\int\limits_L x\sqrt{x^2-y^2}\,dl$, где L — кривая $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-$ $-y^2)$, $x\geqslant 0$. (*Ответ:* $2a^3\sqrt{2}/3$.)

3.8. $\int\limits_L (x+y)\,dl$, где L — первый виток лемнискаты $\rho^2=$ $=a^2\cos 2\varphi$. (*Ответ:* $a^2\sqrt{2}$.)

3.9. $\int\limits_L xy\,dl$, где L — первая четверть эллипса x^2/a^2+ $+y^2/b^2=1$. (*Ответ:* $ab(a^2+ab+b^2)/(3(a+b))$.)

3.10. $\int\limits_L (x+y)\,dl$, где L — четверть окружности x^2+ $+y^2+z^2=R^2$, $y=x$, лежащая в первом октанте. (*Ответ:* $R^2\sqrt{2}$.)

3.11. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{x-z}$, где L_{AB} — отрезок прямой $z=x/-2$, $y=0$, соединяющий точки $A(0, 0, -2)$ и $B(4, 0, 0)$. (*Ответ:* $\sqrt{5}\ln 2$.)

3.12. $\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl$, где L — первая арка циклоиды $x=$ $=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$. (*Ответ:* $4\pi a\sqrt{a}$.)

3.13. $\oint\limits_L (x-y)\,dl$, где L — окружность $x^2+y^2=ax$. (*Ответ:* $\pi a^2/2$.)

3.14. $\int\limits_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, где L — первый виток винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$.

(*Ответ:* $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\frac{2\pi b}{a}$.)

3.15. $\int\limits_L \frac{z^2\,dl}{x^2+y^2}$, где L — первый виток винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=at$. (*Ответ:* $8a\pi^3\sqrt{2}/3$.)

3.16. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где L — развертка окружности $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. (*Ответ:* $a^2((1+4\pi^2)^{3/2}-1)/3$.)

3.17. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где L_{AB} — отрезок прямой, соединяющий точки $A(0, -2)$ и $B(4, 0)$. (*Ответ:* $\ln((3\sqrt{5}-7)/2)$.)

3.18. $\int\limits_{L} \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, где L — первый виток винтовой линии $x = 5\cos t$, $y = 5\sin t$, $z = t$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{\sqrt{26}}{5} \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{5}.\right)$

3.19. $\int\limits_{L_{OABC}} yz\,dl$, где L_{OABC} — контур прямоугольника с вершинами в точках $O(0, 0, 0)$, $A(0, 4, 0)$, $B(0, 4, 2)$, $C(0, 0, 2)$. (*Ответ:* 24.)

3.20. $\int\limits_{L} x^2 dl$, где L — дуга верхней половины окружности $x^2+y^2=a^2$. (*Ответ:* $\pi a^3/2$.)

3.21. $\int\limits_{L} (x^2+y^2+z^2)dl$, где L — первый виток винтовой линии $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$, $z = 3t$. (*Ответ:* $10\pi(48 + 36\pi^2)/3$.)

3.22. $\int\limits_{L} y\,dl$, где L — дуга параболы $y^2 = 6x$, отсеченная параболой $x^2 = 6y$. (*Ответ:* $3(5\sqrt{5}-1)$.)

3.23. $\int\limits_{L_{AB}} x\,dl$, где L_{AB} — дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(2, 4)$ до точки $B(1, 1)$. (*Ответ:* $(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})/12$.)

3.24. $\int\limits_{L} (x+y)dl$, где L — первый виток лемнискаты $\rho^2 = 7\cos 2\varphi$. (*Ответ:* $7\sqrt{2}$.)

3.25. $\oint\limits_{L} (z^2+y^2)dl$, где L — окружность $z^2+y^2=4$. (*Ответ:* 256π.)

3.26. $\int\limits_{L} y^2 dl$, где L — первая арка циклоиды $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1-\cos t)$. $\left(\textit{Ответ: } 458\frac{4}{5}.\right)$

3.27. $\int\limits_{L} \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где L — развертка окружности $x = 6(\cos t + t\sin t)$, $y = 6(\sin t - t\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. (*Ответ:* $12((1+4\pi^2)^{3/2}-1)$.)

3.28. $\int\limits_L \frac{z^2 dl}{x^2+y^2}$, где L — первый виток винтовой линии $x = 9\cos t$, $y = 9\sin t$, $z = 9t$. (*Ответ:* $24\pi^3\sqrt{2}$.)

3.29. $\oint\limits_L (x^2+y^2)^2 dl$, где L — окружность $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$. (*Ответ:* 486π.)

3.30. $\int\limits_L y dl$, где L — дуга параболы $y^2 = 12x$, отсеченная параболой $x^2 = 12y$. (*Ответ:* $12(5\sqrt{5}-1)$.)

4.

4.1. $\int\limits_{L_{OA}} (xy - y^2)dx + xdy$, где L_{OA} — дуга параболы $y = 2x^2$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 2)$. (*Ответ:* 31/30.)

4.2. $\int\limits_{L_{OBA}} 2yzdy - y^2dz$, где L_{OBA} — ломаная OBA; $O(0, 0, 0)$; $B(0, 2, 0)$; $A(0, 2, 1)$. (*Ответ:* -4.)

4.3. $\int\limits_L \frac{x}{y}dx + \frac{1}{y-a}dy$, где L — дуга циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $\pi/6 \leqslant t \leqslant \pi/3$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{a\pi^2}{24} + \frac{a}{2}(1-\sqrt{3}) - \frac{1}{2}\ln 3.\right)$

4.4. $\int\limits_L yzdx + z\sqrt{R^2-y^2}dy + xydz$, где L — дуга кривой $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = at/(2\pi)$, «пробегаемая» от точки пересечения ее с плоскостью $z = 0$ до точки пересечения ее с плоскостью $z = a$. (*Ответ:* 0.)

4.5. $\int\limits_{L_{OA}} 2xzdy - y^2dz$, где L_{OA} — дуга параболы $z = x^2/4$ от точки $O(0, 0, 0)$ до точки $A(2, 0, 1)$. (*Ответ:* 0.)

4.6. $\int\limits_{L_{AB}} (x - 1/y)dy$, где L_{AB} — дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(1, 1)$ до точки $B(2, 4)$. (*Ответ:* $14/3 - \ln 4$.)

4.7. $\int\limits_{L_{AB}} \cos zdx - \sin xdz$, где L_{AB} — отрезок прямой, соединяющий точки $A(2, 0, -2)$ и $B(-2, 0, 2)$. (*Ответ:* $-2\sin 2$.)

4.8. $\int\limits_L ydx - xdy$, где L — четверть дуги окружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, лежащая в первом квадранте и «пробегаемая» против хода часовой стрелки. (*Ответ:* 0.)

4.9. $\int\limits_{L_{OA}} (xy - x)dx + \frac{x^2}{y}dy$, где L_{OA} — дуга параболы $y = 2\sqrt{x}$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 2)$. (*Ответ:* 1/2.)

4.10. $\oint\limits_L ydx - xdy$, где L — дуга эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, «пробегаемая» против хода часовой стрелки. (*Ответ:* $-2\pi ab$.)

4.11. $\oint\limits_L xdy$, где L — контур треугольника, образованного прямыми $y = x$, $x = 2$, $y = 0$ при положительном направлении обхода контура. (*Ответ:* 2.)

4.12. $\int\limits_L xdy$, где L — дуга синусоиды $y = \sin x$ от точки $(\pi, 0)$ до точки $(0, 0)$. (*Ответ:* 2.)

4.13. $\int\limits_L y^2dx + x^2dy$, где L — верхняя половина эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, «пробегаемая» по ходу часовой стрелки. (*Ответ:* $4ab^2/3$.)

4.14. $\int\limits_{L_{OB}} (xy - y^2)dx + xdy$, где L_{OB} — дуга параболы $y = 2\sqrt{x}$ от точки $O(0, 0)$ до точки $B(1, 2)$. (*Ответ:* $-8/15$.)

4.15. $\int\limits_L xdx + xydy$, где L — дуга верхней половины окружности $x^2 + y^2 = 2x$ при положительном направлении обхода контура. (*Ответ:* $-4/3$.)

4.16. $\int\limits_L (x - y)dx + dy$, где L — дуга верхней половины окружности $x^2 + y^2 = R^2$, «пробегаемая» в положительном направлении обхода контура. (*Ответ:* $\pi R^2/2$.)

4.17. $\oint\limits_L (x^2 - y)dx$, где L — контур прямоугольника, образованного прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$ при положительном направлении обхода контура. (*Ответ:* 2.)

4.18. $\int\limits_{L_{OB}} 4x\sin^2 ydx + y\cos 2xdy$, где L_{OB} — отрезок прямой, соединяющий точки $O(0, 0)$ и $B(3, 6)$. (*Ответ:* 18.)

4.19. $\int\limits_L ydx - xdy$, где L — дуга эллипса $x = 6\cos t$, $y = 4\sin t$ при положительном направлении обхода контура. (*Ответ:* -48π.)

4.20. $\int\limits_{L_{OA}} 2xydx - x^2dy$, где L_{OA} — дуга параболы $x = 2y^2$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(2, 1)$. (*Ответ:* 2, 4.)

4.21. $\int\limits_{L_{AB}} xye^xdx + (x-1)e^xdy$, где L_{AB} — любая линия, соединяющая точки $A(0, 2)$ и $B(1, 2)$. (*Ответ:* 2.)

4.22. $\oint\limits_{L} (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy$, где L — контур треугольника с вершинами $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$ при положительном направлении обхода контура. (*Ответ:* $-1/3$.)

4.23. $\int\limits_{L_{ABO}} (xy - x)dx + \frac{x^2}{2}dy$, где L_{ABO} — ломаная ABO ($O(0, 0)$; $A(1, 2)$; $B(1/2, 3)$) при положительном направлении обхода контура. (*Ответ:* $-1/2$.)

4.24. $\int\limits_{L_{OA}} (xy - y^2)dx + xdy$, где L_{OA} — отрезок прямой от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 2)$. (*Ответ:* $1/3$.)

4.25. $\int\limits_{L_{OA}} xdy - ydx$, где L_{OA} — дуга кубической параболы $y = x^3$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(2, 8)$. (*Ответ:* 8.)

4.26. $\int\limits_{L_{AB}} 2y\sin 2xdx - \cos 2xdy$, где L_{AB} — любая линия от точки $A(\pi/4, 2)$ до точки $B(\pi/6, 1)$. (*Ответ:* $-1/2$.)

4.27. $\int\limits_{L_{OB}} (xy - x)dx + \frac{x^2}{2}dy$, где L_{OB} — дуга параболы $y = 4x^2$ от точки $O(0, 0)$ до точки $B(1, 4)$. (*Ответ:* $3/2$.)

4.28. $\int\limits_{L_{AB}} (x+y)dx + (x-y)dy$, где L_{AB} — дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(-1, 1)$ до точки $B(1, 1)$ (*Ответ:* 2.)

4.29. $\int\limits_{L_{AB}} xdy$, где L_{AB} — дуга правой полуокружности $x^2 + y^2 = a^2$ от точки $A(0, -a)$ до точки $B(0, a)$. (*Ответ:* $\pi a^2/2$.)

4.30. $\int\limits_{L} y^2dx + x^2dy$, где L — дуга верхней половины эллипса $x = 5\cos t$, $y = 2\sin t$, «пробегаемая» по ходу часовой стрелки. (*Ответ:* $80/3$.)

Решение типового варианта

Вычислить данные криволинейные интегралы.

1. $\oint\limits_L (x^2+y^2)^n dl$, где L — окружность $x^2+y^2=a^2$

▶ Запишем уравнение окружности $x^2+y^2=a^2$ в параметрическом виде: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Тогда

$$x'_t=-a\sin t,\ y'_t=a\cos t,\ dl=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt,$$
$$dl=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}\,dt=a\,dt.$$

Следовательно,

$$\int\limits_L (x^2+y^2)^n dl=a^{2n+1}\int\limits_0^{2\pi} dt=2\pi a^{2n+1}. \blacktriangleleft$$

2. $\int\limits_{L_{OB}} x\,dl$, где L_{OB} — отрезок прямой от точки $O(0,\ 0)$ до точки $B(1,\ 2)$.

▶ Находим уравнение прямой OB по двум точкам: $y=2x$. Далее имеем:

$$dl=\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx,\ dl=\sqrt{5}\,dx,$$

$$\int\limits_{L_{OB}} x\,dl=\sqrt{5}\int\limits_0^1 x\,dx=\sqrt{5}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{\sqrt{5}}{2}. \blacktriangleleft$$

3. $I=\oint\limits_L 2x(y-1)dx+x^2dy$, где L — контур фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$ и прямой $y=9$ при положительном направлении обхода.

▶ В соответствии со свойствами криволинейных интегралов второго рода имеем

$$I=\int\limits_{L_1} 2x(y-1)dx+x^2dy+\int\limits_{L_2} 2x(y-1)dx+x^2dy,$$

где L_1 — дуга параболы $y=x^2$; L_2 — отрезок прямой $y=9$. Так как парабола и прямая пересекаются в точках $(-3,\ 9)$ и $(3,\ 9)$, то

$$I=\int\limits_{-3}^{3}(4x^3-2x)dx+16\int\limits_3^{-3} x\,dx=0. \blacktriangleleft$$

4. $I = \int\limits_L (\sqrt[3]{x} + y)\,dx - (\sqrt[3]{y} + x)\,dy$, где L — верхняя дуга астроиды $x = 8\cos^3 t$, $y = 8\sin^3 t$ от точки (8, 0) до точки (—8, 0).

▶ Находим:

$$dx = 24\cos^2 t(-\sin t)dt,\ dy = 24\sin^2 t\cos t dt,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

Тогда

$$I = \int\limits_0^\pi (2\cos t + 8\sin^3 t)(-24\sin t\cos^2 t)dt -$$
$$- (2\sin t + 8\cos^3 t)\cdot 24\sin^2 t\cos t dt =$$
$$= \int\limits_0^\pi (-48\sin t\cos^3 t - 192\sin^4 t\cos^2 t - 48\sin^3 t\cos t -$$
$$- 192\sin^2 t\cos^4 t)dt = \int\limits_0^\pi (-48\sin t\cos t -$$
$$- 192\sin^2 t\cos^2 t)dt = \int\limits_0^\pi (-24\sin 2t - 48\sin^2 2t)dt =$$
$$= 12\cos 2t\Big|_0^\pi - 24\int\limits_0^\pi (1 - \cos 4t)dt =$$
$$= -24\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^\pi = -24\pi. \blacktriangleleft$$

ИДЗ-14.2

1. Показать, что данное выражение является полным дифференциалом функции $u(x, y)$. Найти функцию $u(x, y)$.

1.1. $(2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy$. (*Ответ:* $x^2 + x + 2y - 3xy^2 + C$.)

1.2. $\left(\frac{2xy^2}{1 + x^2y^2} - 3\right)dx + \left(\frac{2x^2y}{1 + x^2y^2} - 5\right)dy$.
(*Ответ:* $\ln(1 + x^2y^2) - 3x - 5y + C$.)

1.3. $-\left(\frac{1}{2}\cos 2y + y\sin 2x\right)dx + (x\sin 2y + \cos^2 x + 1)dy$. (*Ответ:* $y\cos^2 x - \frac{x}{2}\cos 2y + y + C$.)

1.4. $(y^2e^{xy^2} + 3)\,dx + (2xye^{xy^2} - 1)dy$. (*Ответ:* $3x + e^{xy^2} - y + C$.)

1.5. $\left(\frac{1}{x+y}+\cos x\cos y-3x^2\right)dx+\left(\frac{1}{x+y}-\sin x\sin y+\right.$ $\left.+4y\right)dy$. (*Ответ:* $\ln(x+y)+\sin x\cos y-x^3+2y^2+C$.)

1.6. $(y/x+\ln y+2x)\,dx+(\ln x+x/y+1)dy$. (*Ответ* $x^2+y\ln x+x\ln y+y+C$.)

1.7. $(e^{x+y}-\cos x)\,dx+(e^{x+y}+\sin y)\,dy$. (*Ответ:* $e^{x+y}-$ $-\cos y-\sin x+C$.)

1.8. $(y/\sqrt{1-x^2y^2}+2x)\,dx+(x/\sqrt{1-x^2y^2}+6y)\,dy$. (*Ответ:* $\arcsin xy+x^2+3y^2+C$.)

1.9. $(e^{xy}+xye^{xy}+2)\,dx+(x^2e^{xy}+1)\,dy$. (*Ответ:* $xe^{xy}+$ $+2x+y+C$.)

1.10. $(ye^{xy}+y^2)\,dx+(xe^{xy}+2xy)\,dy$. (*Ответ:* $e^{xy}+$ $+xy^2+C$.)

1.11. $(y\cos(xy)+2x-3y)\,dx+(x\cos(xy)-3x+4y)dy$. (*Ответ:* $\sin(xy)+x^2-3xy+2y^2+C$.)

1.12. $(y\sin(x+y)+xy\cos(x+y)-9x^2)dx+(x\sin(x+$ $+y)+xy\cos(x+y)+2y)\,dy$. (*Ответ:* $xy\sin(x+y)-$ $-3x^3+y^2+C$.)

1.13. $(5y+\cos x+6xy^2)\,dx+(5x+6x^2y)\,dy$. (*Ответ:* $\sin x+5xy+3x^2y^2+C$.)

1.14. $(y^2e^{xy}-3)\,dx+e^{xy}(1+xy)\,dy$. (*Ответ:* $ye^{xy}-$ $-3x+C$.)

1.15. $(1+\cos(xy))ydx+(1+\cos(xy))\,xdy$. (*Ответ:* $xy+$ $+\sin(xy)+C$.)

1.16. $(y-\sin x)\,dx+(x-2y\cos y^2)\,dy$. (*Ответ:* $\cos x+$ $+xy-\sin y^2+C$.)

1.17. $\left(\sin 2x-\frac{1}{x^2y}\right)dx-\frac{1}{xy^2}\,dy$. $\left(\right.$*Ответ:* $\frac{1}{xy}-$ $\left.-\frac{1}{2}\cos 2x+C.\right)$

1.18. $\frac{x+y}{xy}\,dx+\frac{y-x}{y^2}\,dy$. (*Ответ:* $\ln(xy)+x/y+C$.)

1.19. $(20x^3-21x^2y+2y)dx+(3+2x-7x^3)\,dy$. (*Ответ:* $5x^4-7x^3y+2xy+3y+C$.)

1.20. $(ye^{xy}-2\sin x)\,dx+(xe^{xy}+\cos y)\,dy$. (*Ответ:* $e^{xy}+2\cos x+\sin y+C$.)

1.21. $y(e^{xy}+5)\,dx+x(e^{xy}+5)\,dy$. (*Ответ:* $e^{xy}+$ $+5xy+C$.)

1.22. $\left(x-\frac{y}{x^2-y^2)}\right)dx+\left(\frac{x}{x^2-y^2}-y\right)dy.$ $\left(\right.$*Ответ:* $\frac{x^2}{2}+$ $\left.+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{y^2}{2}+C.\right)$

1.23. $\frac{x\ln y+y}{x}dx+\frac{y\ln x+x}{y}dy$. (*Ответ:* $y\ln x+$ $+x\ln y+C$.)

1.24. $e^{x-y}(1+x+y)dx+e^{x-y}(1-x-y)dy$. (*Ответ:* $e^{x-y}(x+y)+C$.)

1.25. $(3x^2-2xy+y)dx+(x-x^2-3y^2-4y)dy$. (*Ответ:* $x^3-x^2y-y^3+xy-2y^2+C$.)

1.26. $(2x\,e^{x^2-y^2}-\sin x)dx+(\sin y-2ye^{x^2-y^2})dy$. (*Ответ:* $e^{x^2-y^2}+\cos x-\cos y+C$.)

1.27. $(y/\sqrt{1-x^2y^2}+x^2)dx+(x/\sqrt{1-x^2y^2}+y)dy$. (*Ответ:* $x^3/3+\arcsin(xy)+y^2/2+C$.)

1.28. $\frac{1-y}{x^2y}dx+\frac{1-2x}{xy^2}dy$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{2x-1}{xy}+\frac{1}{x}+C.\right)$

1.29. $\left(\frac{1}{y-1}-\frac{y}{(x-1)^2}-2\right)dx+\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x}{(y-1)^2}+\right.$ $\left.+2y\right)dy$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{y}{x-1}+\frac{x}{y-1}-2x+y^2+C.\right)$

1.30. $(3x^2-2xy+y^2)dx+(2xy-x^2-3y^2)dy$. (*Ответ:* $x^3-x^2y+xy^2+y^3+C$.)

2. Решить следующие задачи.

2.1. Вычислить длину дуги цепной линии $y=(e^x+$ $+e^{-x})/2$, $x\in[0;\ 1]$. (*Ответ:* $(e^2-1)/(2e)$.)

2.2. Вычислить моменты инерции относительно осей координат отрезка однородной прямой $2x+y=1$, лежащего между этими осями. (*Ответ:* $I_x=\sqrt{5}/6$, $I_y=\sqrt{5}/24$.)

2.3. Найти координаты центра масс четверти однородной окружности $x^2+y^2=a^2$, лежащей в первом квадранте. (*Ответ:* $(2a/\pi,\ 2a/\pi)$.)

2.4. Вычислить массу дуги кривой $y=\ln x$, заключенной между точками с абсциссами $x=\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{8}$, если плотность дуги в каждой точке равна квадрату абсциссы этой точки. (*Ответ:* 19/3.)

2.5. Вычислить момент инерции относительно оси Oy дуги полукубической параболы $y^2=x^3$, заключенной между точками с абсциссами $x=0$ и $x=4/3$. (*Ответ:* $I_y=$ $=107\cdot2^{10}/(105\cdot3^6)\approx1{,}13$.)

2.6. Вычислить момент инерции относительно начала координат контура квадрата со сторонами $x=\pm a$, $y=$ $=\pm a$. Плотность квадрата считать постоянной. (*Ответ:* $I_0=32/3$.)

2.7. Вычислить длину дуги кривой $x = 2 - t^4/4$, $y = t^6/6$, ограниченной точками пересечения ее с осями координат. (*Ответ:* 13/3.)

2.8. Вычислить координаты центра масс однородной полуокружности $x^2 + y^2 = 4$, симметричной относительно оси Ox. (*Ответ:* $(4/\pi, 0)$.)

2.9. Вычислить координаты центра масс однородной дуги одной арки циклоиды $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$. (*Ответ:* $(\pi, 4/3)$.)

2.10. Вычислить момент инерции относительно начала координат отрезка прямой, заключенного между точками $A(2, 0)$ и $B(0, 1)$, если линейная плотность в каждой его точке равна 1. (*Ответ:* $I_0 = 5\sqrt{5}/3$.)

2.11. Вычислить координаты центра масс однородного контура сферического треугольника $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. (*Ответ:* $(4/3\pi, 4/3\pi, 4/3\pi)$.)

2.12. Вычислить статические моменты относительно координатных осей дуги астроиды $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, расположенной в первом квадранте. (*Ответ:* $M_x = 2, 4$, $M_y = 2, 4$.)

2.13. Вычислить массу отрезка прямой $y = 2 - x$, заключенного между координатными осями, если линейная плотность в каждой его точке пропорциональна квадрату абсциссы в этой точке, а в точке (2, 0) равна 4. (*Ответ:* $8\sqrt{2}/3$.)

2.14. Найти статический момент относительно оси Oy однородной дуги первого витка лемнискаты Бериулли $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$. (*Ответ:* $M_y = a^2\sqrt{2}$.)

2.15. Найти работу силы $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$ при перемещеиии точечной массы m по дуге эллипса $x^2/16 + y^2/9 = 1$. (*Ответ:* $12\pi m$.)

2.16. Вычислить момент иерции относительно оси Oz однородной дуги первого витка винтовой линии $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = t$. (*Ответ:* $I_z = 8\sqrt{5}\pi$.)

2.17. Вычислить массу дуги кривой $\rho = 3\sin\varphi$, $\varphi \in [0; \pi/4]$, если плотность в каждой ее точке пропорциональна расстоянию до полюса и при $\varphi = \pi/4$ равна 3. (*Ответ:* $9(2 - \sqrt{2})/2$.)

2.18. Вычислить координаты центра масс однородной дуги первого витка винтовой линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$. (*Ответ:* $(0, 0, 2\pi)$.)

2.19. Вычислить моменты инерции относительно координатных осей дуги четверти окружности $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, лежащей в первом квадранте. (*Ответ:* $I_x = 2\pi$, $I_y = 2\pi$.)

2.20. Вычислить координаты центра масс дуги первого витка винтовой линии $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = t$, если линейная плотность в каждой ее точке пропорциональна аппликате точки и в точке $t = \pi$ равна 1. (*Ответ:* $(0, -2/\pi, 4\pi/3)$.)

2.21. Вычислить массу дуги четверти эллипса $x^2/4 + y^2 = 1$, лежащей в первом квадранте, если линейная плотность в каждой ее точке равна произведению координат этой точки. (*Ответ:* 14/9.)

2.22. Вычислить работу силы $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$ при перемещении материальной точки по прямой $y = x$ от точки (0, 0) до точки (1, 1). (*Ответ:* 4/3.)

2.23. Вычислить статический момент относительно оси Ox однородной дуги цепной линии $y = (e^x + e^{-x})/2$, $x \in [0; 1/2]$. (*Ответ:* $(e - 1/e + 2)/8$.)

2.24. Вычислить работу силы $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ при перемещении материальной точки вдоль контура квадрата, образованного прямыми $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. (*Ответ:* 8.)

2.25. Вычислить статический момент относительно оси Ox однородной дуги кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$. (*Ответ:* $32a^2/5$.)

2.26. Вычислить длину дуги одной арки циклоиды $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$. (*Ответ:* 24.)

2.27. Вычислить работу силы $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ при перемещении материальной точки вдоль окружности $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ по ходу часовой стрелки. (*Ответ:* 8π.)

2.28. Вычислить работу силы $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$ при перемещении материальной точки из начала координат в точку (1, 1) по параболе $y = x^2$. (*Ответ:* 17/12.)

2.29. Вычислить работу силы $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$ при перемещении материальной точки из начала координат в точку (1, −3) по параболе $y = -3x^2$. (*Ответ:* 10,5.)

2.30. Вычислить моменты инерции относительно осей координат однородного отрезка прямой $y = 2x$, заключенного между точками (1, 2) и (2, 4). (*Ответ:* $I_x = 28\sqrt{5}/3$, $I_y = 7\sqrt{5}/3$.)

1. Показать, что выражение

$$\left(\frac{y}{1+x^2y^2}-1\right)dx+\left(\frac{x}{1+x^2y^2}-10\right)dy$$

является полным дифференциалом функции $u(x, y)$. Найти функцию $u(x, y)$.

▶ Проверим, выполняется ли условие полного дифференциала $\left(\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ для функции $u(x, y)$. Имеем:

$$P(x, y)=\frac{y}{1+x^2y^2}-1,\quad Q(x, y)=\frac{x}{1+x^2y^2}-10,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{1+x^2y^2}-1\right)=\frac{1+x^2y^2-y\cdot 2x^2y}{(1+x^2y^2)^2}=\frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+x^2y^2}-10\right)=\frac{1+x^2y^2-x\cdot 2xy^2}{(1+x^2y^2)^2}=\frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}.$$

Данное выражение является полным дифференциалом функции $u(x, y)$. Положив $x_0=0$, $y_0=0$, по формуле (14.16) найдем $u(x, y)$:

$$u(x, y)=\int_0^x(-1)\,dx+\int_0^y\left(\frac{x}{1+x^2y^2}-10\right)dy+C=$$

$$=-x\big|_0^x+(\operatorname{arctg} xy-10y)\big|_0^y+C=-x+\operatorname{arctg} xy-$$
$$-10y+C.$$

ультат вычислений верен, если

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}=P(x, y),\quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}=Q(x, y).$$

Сделаем проверку:

$$\frac{\partial}{\partial x}(-x+\operatorname{arctg} xy-10y+C)=-1+\frac{y}{1+x^2y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(-x+\operatorname{arctg} xy-10y+C)=\frac{x}{1+x^2y^2}-10.$$

Итак, $u(x, y)=\operatorname{arctg} xy-x-10y+C$. ◀

2. Вычислить моменты инерции относительно осей координат однородного отрезка прямой $4x+2y=3$, лежащего между точками $(0, 3/2)$ и $(2, -5/2)$.

▶ Используя общие формулы для вычисления моментов инерции, последовательно находим:

$$I_x = \int_L y^2 dl,$$

где L: $4x+2y=3$, $y=-2x+\frac{3}{2}$, $dl=\sqrt{5}dx$,

$$I_x = \sqrt{5}\int_0^2\left(-2x+\frac{3}{2}\right)^2 dx = -\frac{\sqrt{5}}{2}\frac{\left(-2x+\frac{3}{2}\right)^3}{3}\Bigg|_0^2 =$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{6}\left(\frac{125}{8}+\frac{27}{8}\right) = \frac{49\sqrt{5}}{24},$$

$$I_y = \int_l x^2 dl,\ I_y = \sqrt{5}\int_0^2 x^2 dx = \sqrt{5}\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{8\sqrt{5}}{3}. \blacktriangleleft$$

14.4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 14

1. Найти длину дуги конической винтовой линии $x=ae^t\cos t$, $y=ae^t\sin t$, $z=ae^t$ от точки $O(0,\ 0,\ 0)$ до точки $A(a,\ 0,\ a)$. (*Ответ:* $a\sqrt{3}$.)

2. Найти массу участка цепной линии $y=a\operatorname{ch}(x/a)$ между точками с абсциссами $x_1=0$ и $x_2=a$, если плотность линии в каждой ее точке обратно пропорциональна ординате точки, причем плотность в точке $(0,\ a)$ равна γ. (*Ответ:* γa.)

3. Определить массу эллипса $x^2/9+y^2/4=1$, если линейная плотность в каждой его точке равна $|y|$. (*Ответ:* $4+\frac{18\sqrt{5}}{5}\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}$.)

4. Найти координаты центра масс первого полувитка винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, считая плотность в каждой ее точке постоянной. (*Ответ:* $(0,\ 2a/\pi,\ b\pi/2)$.)

5. Вычислить моменты инерции относительно координатных осей и начала координат четверти однородной окружности $y=2\cos t$, $z=2\sin t$, лежащей в первом квадранте плоскости Oyz. (*Ответ:* $I_x=I_y=2\pi$, $I_0=4\pi$.)

6. Найти момент инерции относительно оси Ox первого витка винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ht/(2\pi)$. (*Ответ:* $(a^2/2 + h^2/3)\sqrt{4\pi^2a^2 + h^2}$.)

7. Проверить выполиимость формулы Грина для интеграла

$$\oint_L (x + y)\,dx - 2x\,dy,$$

если L — контур треугольника со сторонами $x = 0$, $y = 0$, $x + y = a$.

8. Применив формулу Грина, вычислить интеграл

$$\oint_{L_{ABC}} y^2dx + (x + y)^2dy$$

по контуру треугольника ABC с вершинами $A(2, 0)$, $B(2, 2)$ и $C(0, 2)$. (*Ответ:* 16/3.)

9. Доказать, что

$$\int_L (yx^3 + e^y)\,dx + (xy^3 + xe^y - 2y)\,dy = 0,$$

если L — замкнутая линия, симметричная относительно начала координат.

10. Доказать, что численное значение интеграла

$$\int_L (2xy - y)\,dx + x^2dy,$$

где L — замкнутый контур, равно площади области, ограниченной этим контуром.

11. Доказать, что интеграл

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

где L — любой замкнутый коитур, «пробегаемый» в положительиом направлении и охватывающий начало координат, равен 2π.

12. Найти функцию по данному полному дифференциалу

$$du = e^{y/z}dx + \left(\frac{x+1}{z}e^{y/z} + ze^{y/z}\right)dy + \left(ye^{yz} + e^{-z} - \frac{(x+1)y}{z^2}e^{y/z}\right)dz.$$

(*Ответ:* $a^{y/z}(x + 1) + e^{yz} - e^{-z}$.)

15. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

15.1. ВЕКТОРНАЯ ФУНКЦИЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ И ГРАДИЕНТ

Отображение, которое каждому числу $t \in T \in \mathbf{R}$ ставит в соответствие по некоторому правилу единственный вектор $\mathbf{r}$, называется *векторной функцией* или *вектор-функцией скалярного аргумента* t. Ее принято обозначать $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Множество T называется *областью определения функции* $\mathbf{r}(t)$. В качестве T обычно берут некоторый отрезок $[a;\ b]$ или интервал $(a;\ b)$ числовой оси. Число t также называют *параметром*.

Как и любой постоянный вектор, вектор-функцию скалярного аргумента $\mathbf{r}(t)$ при любом фиксированном значении t можно однозначно разложить по базису $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}. \tag{15.1}$$

Очевидно, что координаты x, y, z вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ в этом базисе являются функциями: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, область определения которых совпадает с T. Поэтому имеют место три скалярных равенства:

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t). \tag{15.2}$$

Если вектор $\mathbf{r}$ откладывать из одной точки O при различных значениях $t \in T$, то его конец $M(t)$ опишет в пространстве, вообще говоря, линию, которая называется *годографом вектор-функции* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Точка O называется *полюсом* годографа. Равенство (15.1) называют в этом случае *векторно-параметрическим уравнением годографа*, а равенства (15.2) — его *параметрическими уравнениями* (рис. 15.1).

Приведем несколько примеров.

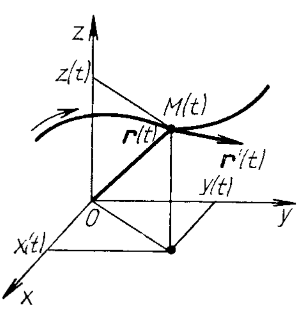


Рис. 15.1

1. Годографом, задаваемым векторно-параметрическим уравнением вида $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{s}t$, где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, $\mathbf{s}$ — некоторый заданный вектор, является прямая в пространстве, проходящая через точку M_0, с направляющим вектором $\mathbf{s}$ (см. уравнение (3.6) и рис. 3.1 в первой части настоящего пособия).

2. Годограф, задаваемый параметрическими уравнениями $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ $(t \in (-\infty;\ \infty))$, a, b — постоянные), является винтовой линией, расположенной на круговом цилиндре радиусом a с осью Oz (см. также § 4.3 в первой части пособия).

В случае, когда t — время, а $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ имеют размерность длины, равенства (15.1) и (15.2) называются соответственно *век-*

торно-параметрическим и *параметрическими уравнениями движения точки*, а соответствующий им годограф — *траекторией* ее движения.

Если

$$\lim_{t\to t_0} x(t)=x_0,\quad \lim_{t\to t_0} y(t)=y_0,\quad \lim_{t\to t_0} z(t)=z_0,$$

то вектор $\mathbf{r}_0=x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}+z_0\mathbf{k}$ называется *пределом вектор-функции* $\mathbf{r}(t)$ *в точке* $t=t_0$. В этом случае пишут: $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0$.

Если $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(t_0)$, то векторная функция $\mathbf{r}(t)$ называется *непрерывной в точке* $t=t_0$.

Если $\Delta t\neq 0$ — произвольное приращение параметра, то $\Delta\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)$ называется *приращением вектор-функции* $\mathbf{r}(t)$.

Если существует предел

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t},$$

то он называется *производной вектор-функции* $\mathbf{r}(t)$ *в точке* t и обозначается $\mathbf{r}'(t)$, или $\dot{\mathbf{r}}(t)$, или $d\mathbf{r}(t)/dt$.

Вектор $\mathbf{r}'(t)$ всегда направлен по касательной к годографу функции $\mathbf{r}(t)$ в сторону возрастания параметра t. *С механической точки зрения* $\mathbf{r}'(t)$ *есть вектор мгновенной скорости движения материальной точки по траектории, являющейся годографом функции* $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, *в момент времени* t *в точке* $M(t)$ (см. рис. 15.1).

Если существуют производные $x'(t)$, $y'(t)$ и $z'(t)$, то существует $\mathbf{r}'(t)$ и

$$\mathbf{r}'(t)=x'(t)\mathbf{i}+y'(t)\mathbf{j}+z'(t)\mathbf{k}. \tag{15.3}$$

Так как вектор $\mathbf{r}'(t_0)$ направлен по касательной к кривой в точке $M_0(t_0)$, определяемой уравнениями (15.2), то *уравнения касательной* к этой кривой в точке M_0 запишутся следующим образом:

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)} \tag{15.4}$$

Плоскость, перпендикулярная к касательной и проходящая через точку касания $M_0(t_0)$, называется *нормальной плоскостью* к кривой в этой точке, а ее уравнение имеет вид

$$x'(t_0)(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))+z'(t_0)(z-z(t_0))=0. \tag{15.5}$$

Для векторных функций скалярного аргумента справедливы следующие правила дифференцирования:

1) $(\mathbf{r}_1(t)+\mathbf{r}_2(t))'=\mathbf{r}_1'(t)+\mathbf{r}_2'(t)$;
2) $(C\mathbf{r}(t))'=C\mathbf{r}'(t)$, $C=\text{const}$;
3) $(\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t))'=\mathbf{r}_1'(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)+\mathbf{r}_1(t)\cdot r_2'(t)$;
4) $(\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t))'=\mathbf{r}_1'(t)\times\mathbf{r}_2(t)+\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2'(t)$.

Пример 1. Найти производную вектор-функции $\mathbf{r}(t)=(\cos t-1)\mathbf{i}+\sin^2 t\mathbf{j}+\operatorname{tg} t\mathbf{k}$ в точке $t_0=\pi/4$.

▶ Из формулы (15.3) следует, что

$$\mathbf{r}'(t)=-\sin t\mathbf{i}+2\sin t\cos t\mathbf{j}+\frac{1}{\cos^2 t}\mathbf{k}.$$

Поэтому $\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. ◀

Пример 2. Составить канонические уравнения касательной и уравнение нормальной плоскости к кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = t^3 + t - 1$, $y = 2t^2 + 3t + 2$, $z = t^2 + 1$, в точке M_0, определяемой значением параметра $t_0 = 1$.

▶ Находим вектор $\mathbf{r}'(t_0) = (x'(1),\ y'(1),\ z'(1)) = (4,\ 7,\ 2)$. Параметру $t_0 = 1$ на кривой соответствует точка $M_0(x(1),\ y(1),\ z(1))$, т. е. $M_0(1;\ 7,\ 2)$. Согласно формулам (15.4), (15.5), уравнения касательной имеют вид

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-7}{7} = \frac{z-2}{2},$$

а уравнение нормальной плоскости

$$4(x-1) + 7(y-7) + 2(z-2) = 0. ◀$$

Переходя к понятию производной функции по направлению, отметим, что направление в пространстве можно задавать единичным вектором $\mathbf{s}^0 = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$, где α, β, γ — углы, образованные вектором $\mathbf{s}^0$ и осями Ox, Oy, Oz соответственно.

Если дана функция $u = f(x, y, z)$, определенная в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, радиус-вектор которой $\mathbf{r}_0 = (x_0,\ y_0,\ z_0)$, то

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{r}_0 + \mathbf{s}^0 t) - f(\mathbf{r}_0)}{t},$$

если он существует, называется *производной функции* $u = f(x,\ y,\ z)$ *в точке* $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ *по направлению вектора* $\mathbf{s}^0$ и обозначается $\frac{\partial u(M_0)}{\partial s}$, т. е. по определению

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial s} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{r}_0 + \mathbf{s}^0 t) - f(\mathbf{r}_0)}{t}.$$

Справедлива следующая формула:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial s} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (15.6)$$

В случае функции двух переменных $z = f(x,\ y)$ формула (15.6) упрощается:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial s} = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\cos\beta, \qquad (15.7)$$

где $\mathbf{s}^0 = (\cos\alpha,\ \cos\beta)$; $\beta = \pi/2 - \alpha$.

Частные производные функции $u = f(x,\ y,\ z)$ являются производными этой функции по направлениям координатных осей. *С физической точки зрения $\partial u/\partial s$ можно трактовать как скорость изменения функции u в данной точке в заданном направлении.*

Производной вдоль кривой L называют производную по направлению ориентированной касательной к кривой L, вычисленную в точке касания.

Всякой дифференцируемой функции $u = f(x,\ y,\ z)$ соответствует вектор с координатами $\partial u(M)/\partial x$, $\partial u(M)/\partial y$, $\partial u(M)/\partial z$, который называется *градиентом функции u в точке M* и обозначается $\mathbf{grad}\, u$. Таким образом, по определению

$$\mathbf{grad}\, u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}. \qquad (15.8)$$

Если $\mathbf{s}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, то из формул (15.6) и (15.8) имеем

$$\frac{\partial u(M)}{\partial s} = \mathbf{grad}\, u \cdot \mathbf{s}^0 = \text{пр}_{\mathbf{s}^0}\, \mathbf{grad}\, u(M).$$

Из этой связи между производной по направлению и градиентом функции $u = f(x, y, z)$ (или $z = f(x, y)$) следует, что:

1) градиент функции u (или z) направлен в сторону максимального возрастания ее значений, т. е. $\partial u/\partial s$ (или $\partial z/\partial s$) имеет наибольшее значение в направлении градиента (рис. 15.2);

2) если единичный вектор $\mathbf{s}^0$ перпендикулярен к $\mathbf{grad}\, u$ (или $\mathbf{grad}\, z$), то $\partial u/\partial s = 0$ (или $\partial z/\partial s = 0$) (см. рис. 15.2);

3) вектор $\mathbf{grad}\, u(M)$ (или $\mathbf{grad}\, z(M)$) имеет направление нормали в точке M поверхности (или линии) уровня функции u (или z) (рис. 15.3, *а, б*).

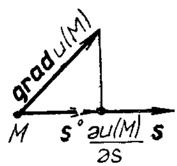


Рис. 15.2

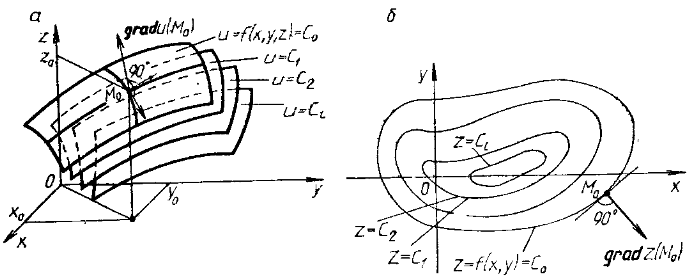


Рис. 15.3

Градиент любой дифференцируемой функции обладает следующими свойствами:

1) $\mathbf{grad}\,(u_1 + u_2) = \mathbf{grad}\, u_1 + \mathbf{grad}\, u_2$;
2) $\mathbf{grad}\, Cu = C\, \mathbf{grad}\, u$, $C = \text{const}$;
3) $\mathbf{grad}\,(u_1 u_2) = u_2\, \mathbf{grad}\, u_1 + u_1\, \mathbf{grad}\, u_2$.

Пример 3. Найти производную функции $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке $M_1(-2, 3, 6)$ по направлению к точке $M_2(-1, 1, 4)$.

▶ Частные производные функции u в точке M_1:

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial x} = \left.\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right|_{M_1} = -\frac{2}{7},$$

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial y}=\left.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_1}=\frac{3}{7},$$

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial z}=\left.\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_1}=\frac{6}{7}.$$

Единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором $\overrightarrow{M_1M_2}$, равен

$$\mathbf{s}^0=\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right).$$

Тогда по формуле (15.6) получаем

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial s}=-\frac{2}{7}\,\frac{1}{3}+\frac{3}{7}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{6}{7}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{20}{21}. \blacktriangleleft$$

Пример 4. Вычислить производную функции $z=\operatorname{arctg}(xy)$ в точке $M_0(1,\ 1)$, принадлежащей параболе $y=x^2$, по направлению этой кривой (в направлении возрастания абсциссы).

▶ За направление $\mathbf{s}^0$ параболы $y=x^2$ в точке $M_0(1,\ 1)$ берем направление касательной к параболе в этой точке, задаваемое углом α, который касательная составляет с осью Ox. Тогда имеем:

$$y'(x)=2x,\ \operatorname{tg}\alpha=y'(1)=2,$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Находим частные производные функции z в точке M_0:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}=\left.\frac{y}{1+x^2y^2}\right|_{M_0}=\frac{1}{2},\quad \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}=\left.\frac{x}{1+x^2y^2}\right|_{M_0}=\frac{1}{2}.$$

Подставив полученные значения в формулу (15.7), имеем

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial s}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{3}{2\sqrt{5}}. \blacktriangleleft$$

АЗ-15.1

1. Найти значение производной вектор-функции $\mathbf{r}=4(t^2+t)\mathbf{i}+\operatorname{arctg} t\mathbf{j}+\ln(1+t^2)\mathbf{k}$ при $t=1$. (*Ответ:* $\mathbf{r}'(1)=12\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{j}+\mathbf{k}$.)

2. Дано векторно-параметрическое уравнение движения точки M: $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=(2t^2+3)\mathbf{i}-3t^2\mathbf{j}+(4t^2-5)\mathbf{k}$. Вычислить скорость $|\mathbf{v}|$ и ускорение $|\mathbf{w}|$ движения точки в момент времени $t=0{,}5$. (*Ответ:* $|\mathbf{v}|=\sqrt{29}$, $|\mathbf{w}|=2\sqrt{29}$.)

3. Дано уравнение движения материальной точки: $\mathbf{r} = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$. Определить траекторию движения, вычислить скорость $|\mathbf{v}|$ и ускорение $|\mathbf{w}|$ движения этой точки в любой момент времени t. (*Ответ:* $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 3t$ (винтовая линия); $|\mathbf{v}| = \sqrt{13}$, $|\mathbf{w}| = 2$.)

4. Записать канонические уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ в точке $t = 3$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x-1}{1} = \frac{y-9}{6} = \frac{z-27}{27},\ x + 6y + 27z = 786.\right)$

5. Записать канонические уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой, заданной уравнениями $z = x^2 + y^2$, $y = x$ в точке $M_0(1,\ 1,\ 2)$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{4},\ x + y + 4z = 10.\right)$

6. Доказать, что вектор $\mathbf{r}$ перпендикулярен к вектору $\mathbf{r}'$, если $|\mathbf{r}| = \text{const}$.

7. Вычислить производную функции $u = \ln(3 - x^2) + xy^2z$ в точке $M_1(1, 3, 2)$ по направлению к точке $M_2(0, 5, 0)$. (*Ответ:* $-11/3$.)

8. Вычислить производную функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $M_0(3, 4)$ по направлению: а) вектора $\mathbf{a} = (1, 1)$; б) радиуса-вектора точки M_0; в) вектора $\mathbf{s} = (4, 3)$. (*Ответ:* а) $7\sqrt{2}/2$; б) 1; в) 0.)

9. Вычислить производную функции $z = \operatorname{arctg}(y/x)$ в точке $M_0(2, -2)$ окружности $x^2 + y^2 = 4x$ вдоль дуги этой окружности. (*Ответ:* $\pm 1/4$.)

10. Вычислить производную функции $u = \ln(xy + xz + yz)$ в точке $M_0(0, 1, 1)$ по направлению окружности $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$. (*Ответ:* ± 2.)

11. Вычислить координаты единичного вектора, направленного по нормали к поверхности $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5$ в точке $M_0(1,\ 1,\ 2)$. $\left(\textit{Ответ: } \pm\left(\frac{2}{3\sqrt{14}},\ \frac{1}{3\sqrt{14}},\ \frac{11}{3\sqrt{14}}\right).\right)$

12. Найти $\mathbf{grad}\, u$ в точке $M_0(1,\ 1,\ 1)$, если $u = x^2yz - xy^2z + xyz^2$. (*Ответ:* $\mathbf{grad}\, u = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.)

13. Найти угол φ между градиентами функций $u = \frac{3}{2}x^2 + 3y^2 - 2z^2$ и $v = x^2yz$ в точке $M_0(2,\ 1/3,\ \sqrt{3}/2)$. (*Ответ:* $\varphi = \pi/2$.)

14. Найти наибольшую крутизну подъема φ поверхности $z=2x^2/y^3$ в точке $M_0(2,\ 1,\ 8)$. (*Ответ:* $\operatorname{tg}\varphi = 8\sqrt{10}$, $\varphi \approx 87°40'$.)

Самостоятельная работа

1. 1. Вычислить производную функции $u = x + \ln(y^2 + z^2)$ в точке $M_0(2,\ 1,\ 1)$ в направлении вектора $\mathbf{s} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. (*Ответ:* $-\sqrt{6}/3$.)

2. Вычислить координаты единичного вектора, перпендикулярного к поверхности $xy + xz + yz = 3$ в точке $M_0(1,\ 1,\ 1)$. (*Ответ:* $\pm(1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3})$.)

2. 1. Вычислить производную функции $z = \operatorname{arctg}(x^2 y)$ в точке $M_0(1,\ 4)$ параболы $y = x^2$ в направлении этой кривой. (*Ответ:* $\pm 2\sqrt{5}/17$.)

2. Найти наибольшую крутизну φ подъема поверхности $z = 5x^2 - 2xy + y^2$ в точке $M_0(1,\ 1,\ 4)$. (*Ответ:* $\operatorname{tg}\varphi = 8$, $\varphi \approx 83°$.)

3. 1. Записать канонические уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к линии, заданной векторно-параметрическим уравнением $\mathbf{r} = \cos^2 t\mathbf{i} + \sin^2 t\mathbf{j} + \operatorname{tg} t\mathbf{k}$ в точке $t = \pi/4$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x - 0{,}5}{-1} = \frac{y - 0{,}5}{1} = \frac{z - 1}{2},\ x - y - 2z + 2 = 0.\right)$

2. Найти наибольшую крутизну φ подъема поверхности $z = x^3 y + xy^2$ в точке $M_0(1,\ 3,\ 12)$. (*Ответ:* $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{373}$, $\varphi \approx 87°$.)

15.2 Скалярные и векторные поля

Если в каждой точке $M(x,\ y,\ z)$ пространства $\mathbf{R}^3$ (или его части V) определена скалярная величина $u = f(x,\ y,\ z)$, то говорят, что в $\mathbf{R}^3$ (или V) задано *скалярное поле* $u = u(M)$. Это значит, что всякая числовая функция $u(M) = f(x,\ y,\ z)$, заданная в некоторой области V пространства $\mathbf{R}^3$, определяет в этой области скалярное поле. Функция двух переменных $z = f(x,\ y)$ задает в некоторой области D плоскости Oxy скалярное поле, называемое *плоским*.

Графически скалярное поле можно изображать с помощью *поверхностей уровня* $f(x,\ y,\ z) = C$ или *линий уровня* $f(x,\ y) = C$ (см. рис. 15.3).

Для всякой функции $u = f(x,\ y,\ z)$, дифференцируемой в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, число $\partial u(M_0)/\partial s$ определяет скорость изменения скалярного поля в направлении $\mathbf{s}^0 = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ (см. формулу (15.6)).

Если в каждой точке $M(x, y, z)$ пространства $\mathbf{R}^3$ (или его части V) определен вектор $\mathbf{a}=(P, Q, R)$, где $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$ — скалярные функции, то говорят, что в этом пространстве (или в V) задано *векторное поле* $\mathbf{a}=\mathbf{a}(M)$. Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны, то поле вектора $\mathbf{a}$ называется *непрерывным*.

Примерами векторных полей являются поле скоростей текущей жидкости, поле скоростей точек твердого тела, вращающегося с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг данной оси, поле электрической или магнитной напряженности и др.

Линия, в каждой точке M которой вектор $\mathbf{a}(M)$ векторного поля $\mathbf{a}=\mathbf{a}(M)$ направлен по касательной к линии, называется *векторной (силовой) линией* этого поля.

Примерами векторных линий могут служить линии тока жидкости, силовые линии магнитного поля, траектории точек вращающегося пространства.

Область пространства, целиком состоящая из векторных линий, называется *векторной трубкой*. В каждой точке M поверхности векторной трубки вектор $\mathbf{a}$ лежит в касательной плоскости в точке M к этой трубке.

Векторное (или скалярное) поле, координаты которого не зависят от времени, называется *установившимся* или *стационарным*.

Если $\mathbf{r}(t)$ — радиус-вектор векторной линии векторного поля $\mathbf{a}=\mathbf{a}(M)$, то уравнения векторных линий определяются из системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}. \tag{15.9}$$

Пример 1. Найти векторную линию векторного поля $\mathbf{a}(M)=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+b\mathbf{k}$, проходящую через точку $M_0(1, 0, 0)$.

▶ На основании формулы (15.9) получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{b}.$$

Решаем ее:

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}, \quad xdx+ydy=0, \quad x^2+y^2=C_1^2$$

или, в параметрическом виде, $x=C_1\cos t$, $y=C_1\sin t$;

$$\frac{dy}{x}=\frac{dz}{b}, \quad \frac{dz}{b}=\frac{C_1\cos t dt}{C_1\cos t}, \quad dz=bdt, \quad z=bt+C_2.$$

Так как векторная линия должна проходить через точку $M_0(1, 0, 0)$, то легко находим, что постоянные интегрирования $C_1=1$, $C_2=0$. Уравнения векторной линии векторного поля $\mathbf{a}=\mathbf{a}(M)$ имеют вид $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=bt$ (винтовая линия). ◀

Векторное поле, порожденное градиентом скалярного поля $u(M)=f(x, y, z)$ (или $z(M)=f(x, y)$), называется *полем градиента*. Согласно свойству 3 градиента, векторные линии $\mathbf{grad}\,u(M)$ (или $\mathbf{grad}\,z(M)$) — это кривые, вдоль которых функция $u=f(x, y, z)$ (или $z=f(x, y)$) максимально возрастает (убывает) Эти линии всегда ортогональны к поверхностям (или линиям) уровня скалярного поля $u(M)$ (или $z(M)$).

Дифференциальные уравнения для определения векторных линий $\mathbf{grad}\ u(M)$ имеют вид

$$\frac{dx}{u'_x} = \frac{dy}{u'_y} = \frac{dz}{u'_z}. \tag{15.10}$$

Пример 2. Найти векторные линии поля $\mathbf{grad}\ u$, если $u = (x^2 + y^2 + z^2)/2$.

▶ Согласно определению (15.8), $\mathbf{grad}\ u = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, а из формул (15.10) следует, что векторные линии этого поля удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Находим решения этой системы:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \ \ln|y| = \ln|x| + \ln C_1, \ y = C_1 x,$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}, \ \ln|z| = \ln|x| + \ln C_2, \ z = C_2 x.$$

Полученные решения $y = C_1 x$, $z = C_2 x$ можно представить в виде $\frac{x}{1} = \frac{y}{C_1} = \frac{z}{C_2}$, т. е. векторные линии заданного поля $\mathbf{grad}\ u(M)$ представляют собой совокупность прямых, проходящих через начало координат и ортогональных множеству поверхностей уровня $x^2 + y^2 + z^2 = 2C$ (сферы) данной функции. ◀

АЗ-15.2

1. Записать уравнения и построить поверхности уровня скалярных полей, определяемых следующими функциями:

а) $u = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$; б) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$;

в) $u = z/(x^2 + y^2)$.

2. Построить линии уровня плоского скалярного поля $z = xy$.

3. Найти градиент скалярного поля $u = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r}$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки $M(x, y, z)$. Записать уравнение поверхностей уровня этого поля и выяснить их расположение относительно вектора $\mathbf{c}$.

4. Найти производную скалярного поля $u = x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + z^2}$ в точке $M(-3, 0, 4)$ в направлении нормали к поверхности $2x^2 + 12x + 5y^2 + z^2 - 3z - 58 = 0$, образующей острый угол с осью Oz. (*Ответ:* $-4/5$.)

5. Найти векторные линии векторного поля $\mathbf{a}(M) = \omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$, где $\omega \in \mathbf{R}$, $\omega \neq 0$. (*Ответ:* $x^2 - y^2 = C_1$, $z = C_2$.)

6. Найти векторные линии векторного поля, если:

а) $\mathbf{a}(M) = 5x\mathbf{i} + 10y\mathbf{j}$; б) $\mathbf{a}(M) = 4z\mathbf{j} - 9y\mathbf{k}$.

(*Ответ:* а) $x^2 = C_1 y$, $z = C_2$; б) $9y^2 + 4z^2 = C_1^2$, $x = C_2$.)

7. Найти векторные линии поля $\mathbf{grad}\, u$, если $u = x^2 - 2y + z^2$. (*Ответ:* $x = C_1 e^{-y}$, $z = C_2 e^{-y}$.)

Самостоятельная работа

1. 1. Найти векторные линии векторного поля $\mathbf{a}(M) = (x + y)\mathbf{i} - x\mathbf{j} - x\mathbf{k}$. (*Ответ:* $x^2 + y^2 + z^2 = C_2^2$, $y - z = C_1$.)

2. Вычислить координаты единичного вектора, перпендикулярного к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(-1, 1, 2)$ и образующего с осью Oy острый угол. (*Ответ:* $(-2/3, 2/3, -1/3)$.)

2. 1. Найти векторные линии поля $\mathbf{grad}\, u$, если $u = x + y^2$. $\left(\textit{Ответ: } x = \frac{1}{2}\ln y + C_1,\ z = C_2.\right)$

2. Вычислить координаты единичного вектора $\mathbf{n}^\circ$, перпендикулярного к поверхностям уровня скалярного поля $u = 2x - 3y + 6z - 5$ и образующего с осью Oz тупой угол. (*Ответ:* $\mathbf{n}^\circ = (-2/3, 3/7, -6/7)$.)

3. 1. Найти векторные линии векторного поля $\mathbf{a}(M) = 2x\mathbf{i} + 8z\mathbf{k}$. (*Ответ:* $z = C_1 x^4$, $y = C_2$.)

2. Записать единичный вектор $\mathbf{n}^\circ$, ортогональный к поверхностям уровня скалярного поля $u = x^2 + y^2 + z^2 + 4$. (*Ответ:* $\mathbf{n}^\circ = \left(x/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ y/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$.)

15.3. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пусть $f(x, y, z)$ — непрерывная функция в точках некоторой гладкой поверхности $S \in \mathbf{R}^3$. С помощью кусочно-гладких линий разобьем поверхность S на n элементарных площадок S_i, площади которых обозначим через ΔS_i $(i = \overline{1, n})$, а диаметры — через $\varnothing S_i$. На каждой площадке S_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, вычислим $f(x_i, y_i, z_i)$ и составим интегральную сумму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i.$$

Тогда существует предел этой интегральной суммы, который называется *поверхностным интегралом первого рода* от функции $f(x, y, z)$ по поверхности S и обозначается

$$\iint\limits_S f(x, y, z)dS = \lim_{\varnothing S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i. \qquad (15.11)$$

Поверхностные интегралы первого рода обладают свойствами линейности, аддитивности, для них справедлива теорема о среднем, их величина не зависит от выбора стороны поверхности.

Очевидно, что интеграл $\iint\limits_S dS$ равен площади поверхности, а $\iint\limits_S \delta(x, y, z)dS$, где $\delta(x, y, z)$ — поверхностная плотность поверхности S, — массе поверхности S.

Если проекция D поверхности S на плоскость Oxy *однозначна*, т. е. всякая прямая, параллельная оси Oz, пересекает поверхность S лишь в одной точке, то поверхность можно задать уравнением $z = F(x, y)$ и справедливо равенство, с помощью которого вычисление поверхностного интеграла первого рода сводится к вычислению двойного интеграла:

$$\iint\limits_S f(x, y, z)dS = \iint\limits_D f(x, y), F(x, y))\sqrt{1 + (F'_x)^2 + (F'_y)^2}\,dxdy. \quad (15.12)$$

Пример 1. Вычислить $\iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2}\,dS$, где S — часть конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, расположенная между плоскостями $z = 0$ и $z = 2$.

▶ Из уравнения данной поверхности находим, что для рассматриваемой ее части $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и проекцией ее на плоскость Oxy является круг $x^2 + y^2 \leqslant 4$. Так как

$$F'_x = x/\sqrt{x^2 + y^2}, \quad F'_y = y/\sqrt{x^2 + y^2},$$

то из формулы (15.12) получим

$$\iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2}\,dS = \iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}}\,dxdy =$$

$$= \sqrt{2}\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy = \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array} \right| = \sqrt{2}\iint\limits_D \rho^2 d\rho d\varphi =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^2 d\rho = \sqrt{2}\cdot 2\pi \cdot \frac{8}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi. \ ◀$$

Сторона гладкой поверхности S, из каждой точки которой восставлен вектор нормали $\mathbf{n}$, называется *положительной*, а другая ее сторона (если она существует) — *отрицательной*. Если, в частности, поверхность S является замкнутой и ограничивает некоторую область пространства V, то положительной или *внешней стороной поверхности* называется та ее сторона, нормальные векторы которой направлены от области V, а отрицательной или *внутренней* — сторона, нормальные векторы которой направлены в область V. Поверхность, у которой существуют положительная (внешняя) и отрицательная (внутренняя) стороны, называется *двухсторонней*. Двухсторонние поверхности характеризуются следующим свойством: если основание вектора нормали $\mathbf{n}$

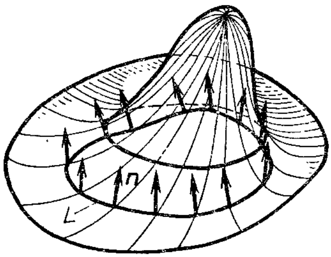


Рис. 15.4

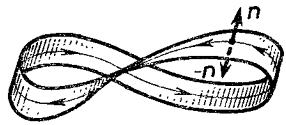


Рис. 15.5

непрерывно перемещать по любому замкнутому контуру L, лежащую на такой поверхности, то при возвращении в исходную точку направление $\mathbf{n}$ совпадет с исходным (рис. 15.4). Двухсторонними поверхностями являются плоскости, все поверхности второго порядка, тор и многие другие.

Для односторонних поверхностей указанное перемещение нормали $\mathbf{n}$ при возвращении в исходную точку приводит к «антинормали», т. е. к вектору $-\mathbf{n}$. Классическим примером односторонней поверхности является лист Мёбиуса (рис. 15.5).

Поверхность S с выбранной стороной называется *ориентированной*.

Если поверхность S задана уравнением $z = f(x, y)$, то нормальный вектор $\mathbf{n}$, образующий с осью Oz острый угол γ, определяется следующим образом: $\mathbf{n} = (-f'_x, -f'_y, 1)$, а координаты единичного вектора нормали $\mathbf{n}^\circ$ равны его направляющим косинусам, т. е.

$$\mathbf{n}^\circ = \left(-\frac{f'_x}{|\mathbf{n}|}, -\frac{f'_y}{|\mathbf{n}|}, \frac{1}{|\mathbf{n}|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

$$|\mathbf{n}| = \sqrt{1 + f'^2_x + y'^2_y}.$$

Если поверхность S задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, $f'_z \neq 0$, то

$$\mathbf{n}^\circ = \pm \operatorname{grad} F / |\operatorname{grad} F|,$$

где знак «+» берется в случае, когда угол γ — острый, а знак «—» в случае, когда γ — тупой.

Пусть в области $V \in \mathbf{R}^3$ определена векторная функция $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, где $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ — функции, непрерывные в области V. Далее, пусть S — некоторая гладкая поверхность, лежащая в области V, с выбранной положительной стороной, т. е. выбранным направлением вектора $\mathbf{n}^\circ$. Разобьем поверхность S принадлежащими ей кусочно-гладкими линиями на элементарные площадки S_i, площади которых ΔS_i $(i = \overline{1, n})$, и выберем в каждой из них произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Тогда существует предел

$$\lim_{\varnothing \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}(x_i, y_i, z_i) \cdot \mathbf{n}^\circ(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i, \qquad (15.13)$$

который называется *поверхностным интегралом второго рода* от функции $\mathbf{a}$ по поверхности S и обозначается $\iint\limits_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^\circ dS$. Таким образом, по определению

$$\iint\limits_S a \cdot \mathbf{n}^\circ dS = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS. \qquad (15.14)$$

Поверхностные интегралы второго рода обладают свойствами линейности и аддитивности. При изменении стороны поверхности на противоположную, т. е. при замене $\mathbf{n}^\circ$ на $-\mathbf{n}^\circ$, интеграл (15.14) изменяет знак.

Так как $\cos\alpha dS = dydz$, $\cos\beta dS = dzdx$, $\cos\gamma dS = dxdy$, то интеграл (15.14) можно записать и в виде

$$\iint\limits_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^\circ dS = \iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy. \qquad (15.15)$$

Справедлива следующая формула, сводящая вычисление интеграла (15.14) к вычислению двойного интеграла:

$$\iint\limits_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^\circ dS = \iint\limits_{D_z} \mathbf{a}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z)dxdy, \qquad (15.16)$$

где область D_z является проекцией поверхности S на плоскость Oxy; $\mathbf{n} = \pm\,\mathbf{grad}(z - f_3(x, y))$; поверхность S задается функцией $z = f_3(x, y)$. В двойном интеграле переменную z следует заменить на $f_3(x, y)$. Приведем еще две формулы, которые можно применять для вычисления поверхностного интеграла второго рода:

$$\iint\limits_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^\circ dS = \iint\limits_{D_x} \mathbf{a}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z)dydz =$$

$$= \iint\limits_{D_y} \mathbf{a}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z)dzdx, \qquad (15.17)$$

где области D_x и D_y — соответственно проекции поверхности S на плоскости Ozy и Oxz; поверхность S задается функциями $x = f_1(y, z)$ и $y = f_2(x, z)$. В двойном интеграле по области D_x следует в подынтегральном выражении заменить x функцией $f_1(y, z)$ и принять $\mathbf{n} = \pm\,\mathbf{grad}(x - f_1(y, z))$, а в двойном интеграле по D_y — заменить y функцией $f_2(x, z)$ и взять $\mathbf{n} = \pm\,\mathbf{grad}(y - f_2(x, z))$. Отметим, что в выражениях для $\mathbf{n}$ знак «+» или «−» ставится в зависимости от выбранной ориентации (стороны) поверхности S.

Интегралы в правых частях формул (15.14) и (15.15) рассматривают как сумму трех интегралов, для вычисления каждого из которых можно применить одну из формул (15.16) или (15.17).

Пример 2. Вычислить

$$I = \iint\limits_S zdydz - 4ydzdx + 8x^2dxdy,$$

где S — часть поверхности $z = x^2 + y^2 + 1$, отсеченной плоскостью $z = 2$, если нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности S составляет с осью Oz тупой угол γ.

▶ С помощью градиента находим вектор нормали к выбранной стороне данной поверхности: $\mathbf{n}=(2x,\ 2y,\ -1)$, так как $\cos\gamma<0$.

По условию $\mathbf{a}=(z,\ -4y,\ 8x^2)$, поэтому, согласно формулам (15.15), (15.16), имеем (рис. 15.6):

$$I=\iint\limits_{D_z}\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,dxdy=\iint\limits_{D_z}(2xz-8y^2-8x^2)\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_{D_z}(2x(x^2+y^2+1)-8(x^2+y^2))\,dxdy=$$

$$=\left|\begin{matrix}x=\rho\cos\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, \\ y=\rho\sin\varphi,\ 0\leqslant\rho\leqslant 1,\end{matrix}\quad dxdy=\rho d\rho d\varphi\right|=$$

$$=\iint\limits_{D_z}(2\rho\cos\varphi(\rho^2+1)-8\rho^2)\rho d\rho d\varphi=$$

$$=\int_0^1\rho d\rho\int_0^{2\pi}(2\rho\cos\varphi(\rho^2+1)-8\rho^2)d\varphi=-\int_0^1 16\pi\rho^3 d\rho=-4\pi.\ ◀$$

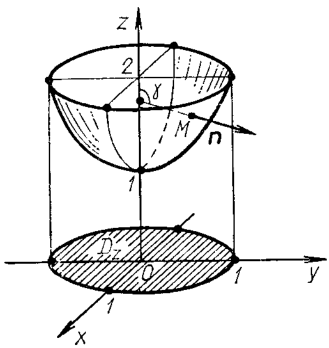


Рис. 15.6

Пример 3. Вычислить

$$I=\iint\limits_S x\,dydz+dxdz+xz^2dxdy,$$

где S — внешняя сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной в первом октанте.

▶ Если обозначить проекции поверхности S на координатные плоскости Oyz, Oxz и Oxy через D_x, D_y и D_z соответственно, а данный интеграл I рассматривать как сумму трех интегралов:

$$I_1=\iint\limits_S x\,dydz,\quad I_2=\iint\limits_S dxdz,\quad I_3=\iint\limits_S xz^2dxdy,$$

для первого из которых $P=x$, $Q=R=0$, для второго $Q=1$, $P=R=0$ и для третьего $P=Q=0$, $R=xz^2$, то, применив к каждому из них формулу (15.16) или (15.17), получим

$$I_1=\iint\limits_{D_x}\sqrt{1-y^2-z^2}\,dydz,\quad I_2=\iint\limits_{D_y}dxdz,\quad I_3=\iint\limits_{D_z}x(1-x^2-y^2)dxdy.$$

Области D_x, D_y и D_z являются четвертями кругов единичного радиуса, расположенными в соответствующих координатных плоскостях, поэтому интеграл $I_2 = S_{D_y} = \pi/4$ (площадь четверти круга). Для вычисления интегралов I_1 и I_3 перейдем к полярным координатам, положив $y = \rho\cos\varphi$, $z = \rho\sin\varphi$, $dydz = \rho d\rho d\varphi$ для I_1, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $dxdy = \rho d\rho d\varphi$ для I_3. В обоих случаях $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. Тогда

$$I_1 = \iint_{D_x} \sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho d\varphi = -\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 (1-\rho^2)^{1/2}\cdot\frac{1}{2}\,d(1-\rho^2) =$$

$$= -\frac{\pi}{4}\,\frac{3}{2}(1-\rho^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6},$$

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho\cos\varphi\,(1-\rho^2)\,\rho d\rho = \sin\varphi\Big|_0^{\pi/2}\cdot\left(\frac{\rho^3}{3}-\frac{\rho^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{15}.$$

Следовательно,

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \frac{2}{15} = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{15}. \blacktriangleleft$$

Если S — замкнутая гладкая поверхность, ограничивающая область V, и $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ — функции, непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка в замкнутой области V, то справедлива *формула Остроградского — Гаусса*

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$$
$$= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz \tag{15.18}$$

или в другом виде

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS =$$
$$= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz, \tag{15.19}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

Формула Остроградского — Гаусса позволяет упростить вычисление многих поверхностных интегралов.

Пример 4. Вычислить

$$I = \iint_S (x+y)dydz + (y+z)dxdz + (z+x)dxdy,$$

если S — внешняя сторона поверхности тела, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + 2y + 3z = 6$.

▶ Из формулы (15.18) следует, что

$$I = \iiint\limits_V (1 + 1 + 1)dxdydz = 3\iiint\limits_V dxdydz = 18,$$

так как последний тройной интеграл равен объему тетраэдра (рис. 15.7). ◀

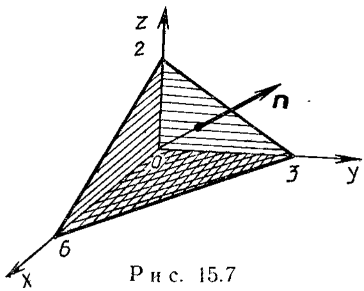


Рис. 15.7

АЗ-15.3

1. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2}\,dS$, если S — часть поверхности конуса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = \frac{z^2}{9}$, расположенная между плоскостями $z = 0$ и $z = 3$. (*Ответ:* $160\pi/3$.)

2. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_S xyzds$, где S — часть плоскости $x + y + z = 1$, лежащая в первом октанте. (*Ответ:* $\sqrt{3}/120$.)

3. Вычислить массу полусферы $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\delta = x^2y^2$. (*Ответ:* $128\pi/15$.)

4. Вычислить массу полусферы $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\delta = x^2 + y^2$. (*Ответ:* $4\pi a^4/3$.)

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy,$$

если S — верхняя часть поверхности $x + 2y + z - 6 = 0$, расположенная в первом октанте. (*Ответ:* 54.)

6. Вычислить

$$\iint\limits_S (x + y)dydz + (y - x)dxdz + (z - 2)dxdy,$$

если S — часть поверхности конуса $x^2+y^2-z^2=0$, отсекаемая плоскостями $z=0$ и $z=1$, нормаль к которой образует тупой угол с осью Oz. (*Ответ:* $8\pi/3$.)

7. Вычислить

$$\iint\limits_S xdydz + z^3dxdy,$$

если S — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=1$. (*Ответ:* $32\pi/15$.)

8. Вычислить

$$\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy,$$

если S — внешняя сторона цилиндра $x^2+y^2=R^2$ с основаниями $z=0$ и $z=H$. (*Ответ:* $3\pi R^2H$.)

9. Доказать, что объем тела, ограниченного поверхностью S,

$$v=\frac{1}{3}\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy,$$

где S — внешняя сторона поверхности S.

10. Вычислить

$$\iint\limits_S yzdxdy + xzdydz + xydxdz,$$

если S — внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и состоящей из цилиндра $x^2+y^2=R^2$ и плоскостей $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=H$. $\left(\textit{Ответ: } R^2H^2\left(\frac{2R}{3}+\frac{\pi H}{8}\right).\right)$

11. Вычислить

$$\iint\limits_S yzdxdy + xzdydz + xydxdz,$$

если S — внешняя сторона пирамиды, гранями которой являются плоскости $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$. (*Ответ:* $1/8$.)

Самостоятельная работа

1. Вычислить $\iint\limits_S (y+2z)dxdy$, если S — верхняя часть плоскости $6x+3y+2z=6$, расположенная в первом октанте. (*Ответ:* $8/3$.)

2. Вычислить $\iint\limits_S xyzdS$, если S — часть поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$, отсекаемая плоскостью $z = 1$. (*Ответ:* 0.)

3. Вычислить

$$\iint\limits_S zdydz + (3y - x)dxdz - zdxdy,$$

если S — внешняя часть поверхности тела, ограниченного поверхностями $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = x^2 + y^2 + 2$. (*Ответ:* 5π.)

15.4. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНОСТЬ. ДИВЕРГЕНЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Потоком векторного поля $\mathbf{a}(M)$, $M(x, y, z) \in S$ *через поверхность* S *в сторону единичного вектора нормали* $\mathbf{n}^\circ = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ *поверхности* S называется поверхностный интеграл второго рода (15.14).

Если вектор $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ определяет векторное поле скоростей текущей несжимаемой жидкости, то интеграл (15.14) равен объему Π жидкости, протекающей через поверхность S в направлении нормали $\mathbf{n}^\circ$ за единицу времени (в этом заключается *физический смысл интеграла (15.14)*), т. е.

$$\Pi = \iint\limits_S \mathbf{a}(M) \cdot \mathbf{n}^\circ dS. \tag{15.20}$$

Из формулы (15.20) ясно, что Π — скаляр, и если угол $\psi = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{n}^\circ}) < \pi/2$, то $\Pi > 0$, если же $\psi > \pi/2$, то $\Pi < 0$, если $\psi = \pi/2$, то $\Pi = 0$.

При изменении ориентации поверхности знак Π меняется на противоположный (вследствие свойств поверхностных интегралов второго рода).

Пусть S — замкнутая кусочно-гладкая поверхность, единичный вектор внешней нормали к которой $\mathbf{n}^\circ$. Тогда поток Π вектора $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ через поверхность S можно вычислить с помощью формулы Остроградского — Гаусса (15.18):

$$\Pi = \iint\limits_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^\circ dS = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz. \tag{15.21}$$

Пусть $\mathbf{a}(M)$ — поле скоростей несжимаемой жидкости. Если $\Pi > 0$, то из формулы (15.21) следует, что из области V вытекает больше жидкости, чем втекает. Это означает, что внутри области V имеются *источники*, т. е. точки, из которых жидкость вытекает. Если $\Pi < 0$, то из области V вытекает меньше жидкости, чем втекает в нее. В этом случае говорят, что внутри области V имеются *стоки*, т. е. точки, в которые жидкость втекает. При $\Pi = 0$ в область V втекает столько же жидкости, сколько вытекает.

Пусть в области V задано векторное поле $\mathbf{a}(M) = (P, Q, R)$, где функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ имеют частные производные в точке $M(x, y, z) \in V$ по x, y, z соответственно. Тогда *дивенгенцией* или *расходимостью векторного поля* $\mathbf{a}(M)$ в точке M, обозначаемой $\operatorname{div} \mathbf{a}(M)$, называется величина, равная сумме указанных частных производных, вычисленных в точке M, т. е. по определению

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \Bigg|_M . \tag{15.22}$$

С физической точки зрения $\operatorname{div} \mathbf{a}(M)$ характеризует плотность источников или стоков векторного поля $\mathbf{a}(M)$ в точке M. Если $\operatorname{div} \mathbf{a}(M) > 0$, то точка M является источником, если $\operatorname{div} \mathbf{a}(M) < 0$ — стоком. В случае, когда $\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = 0$, в точке M нет ни источников, ни стоков.

Перечислим основные свойства дивенгенции векторного поля:

1) $\operatorname{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{div} \mathbf{b}$;

2) $\operatorname{div} \mathbf{c} = 0$, если $\mathbf{c}$ — постоянный вектор;

3) $\operatorname{div}(f\mathbf{a}) = f \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}\, f$, где $f = f(x, y, z)$ — скалярная функция.

Из формул (15.21) и (15.22) следует, что

$$\Pi = \iint\limits_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^\circ dS = \iiint\limits_V \operatorname{div} \mathbf{a}(M) dx dy dz, \tag{15.23}$$

т. е. *поток Π векторного поля* $\mathbf{a}(M)$ *через замкнутую поверхность S во внешнюю ее сторону численно равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по области V, ограниченной поверхностью S.*

Пример 1. Вычислить дивергенцию векторного поля $\mathbf{a}(M) = (x^2 + y)\mathbf{i} + (y^2 + z)\mathbf{j} + (z^2 + x)\mathbf{k}$ в точке $M_0(1, -2, 3)$.

▶ Согласно формуле (15.22),

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2x + 2y + 2z.$$

В точке M_0 имеем $\operatorname{div} \mathbf{a}(M_0) = 4 > 0$, т. е. точка M_0 является источником поля. ◀

Пример 2. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через верхнюю часть плоскости $x + 2y + 3z - 6 = 0$, расположенной в первом октанте.

▶ Из уравнения плоскости находим $z = 2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y$. Нормальным вектором к этой плоскости, составляющим острый угол с осью Oz, является $\mathbf{n} = (1/3, 2/3, 1)$. Тогда из формул (15.20) и (15.16) следует, что

$$\Pi = \iint\limits_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^\circ dS = \iint\limits_{D_z} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, dx dy =$$

$$= \iint\limits_{D_z} \frac{1}{3}(x - 4y + 3z) dx dy = \frac{1}{3} \iint\limits_{D_z} (6 - 6y) dx dy =$$

$$= 2 \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{6-2y} (1 - y) dx = 2 \int\limits_0^3 (1 - y)(6 - 2y) dy =$$

$$= 2 \int\limits_0^0 (2y^2 - 8y + 6) dy = 36. \ ◀$$

Пример 3. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a}(M) = xz^2\mathbf{i} + yx^2\mathbf{j} + zy^2\mathbf{k}$ через поверхность шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ во внешнюю его сторону.

▶ Так как данная поверхность — замкнутая, то поток Π векторного поля $\mathbf{a}(M)$ через поверхность шара во внешнюю сторону находим по формуле (15.23):

$$\Pi = \iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^\circ \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a}(M) \, dxdydz =$$
$$= \iiint_V (z^2 + x^2 + y^2) dxdydz.$$

Для вычисления полученного тройного интеграла перейдем к сферическим координатам по формулам:

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \; y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \; z = \rho\cos\theta;$$
$$dxdydz = \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta, \; 0 \leqslant \rho \leqslant a, \; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \; 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Тогда

$$\Pi = \iiint_V \rho^4 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta = \int_0^a \rho^4 d\rho \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi a^5}{5} \quad ◀$$

Пример 4. Найти поток Π электростатического поля точечного заряда q, помещенного в центр сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

▶ Известно, что поле точечного заряда задается вектором напряженности $\mathbf{E} = q\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Находим направляющие косинусы вектора нормали к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$:

$$\mathbf{n}^0 = \mathbf{n}/|\mathbf{n}|, \; \mathbf{n} = (2x, \; 2y, \; 2z),$$
$$|\mathbf{n}| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 2R, \; \mathbf{n}^0 = (x/R, \; y/R, \; z/R),$$

т. е. $\cos\alpha = x/R$, $\cos\beta = y/R$, $\cos\gamma = z/R$. Поэтому на сфере

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}^0 = (q/|\mathbf{r}|^3)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}^0) = \frac{q}{R^3}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{x}{R}\mathbf{i} + \frac{y}{R}\mathbf{j} + \frac{z}{R}\mathbf{k}\right) =$$
$$= \frac{q}{R^3} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R} = \frac{q}{R^3}\frac{R^2}{R} = \frac{q}{R^2} = \text{const}.$$

Следовательно,

$$\Pi = \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}^0 dS = \iint_S \frac{q}{R^2} dS = \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi q. \quad ◀$$

Пример 5. Найти поток векторного поля $\mathbf{a}(M) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через поверхность прямого цилиндра S радиусом R и высотой H, ось которого совпадает с осью Oz, а нижнее основание находится в плоскости Oxy. Нормаль направлена во внешнюю сторону цилиндра.

▶ Как видно из рис. 15.8, для боковой поверхности цилиндра S_1 справедливо равенство $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1^0 = \text{пр}_{\mathbf{n}_1^0} \mathbf{a} = R$. На верхнем основании цилиндра S_2 имеем $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_2^0 = \text{пр}_{\mathbf{n}_2^0} \mathbf{a} = H$, а на нижнем его основании S_3 — $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_3^0 = 0$. Поэтому

$$\Pi = \iint\limits_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}^0 dS = \iint\limits_{S_1} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_1^0 dS + \iint\limits_{S_2} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_2^0 dS + \iint\limits_{S_3} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_3^0 dS =$$

$$= \iint\limits_{S_1} R dS + \iint\limits_{S_2} H dS + \iint\limits_{S_3} 0 dS = R\cdot 2\pi RH + H\pi R^2 = 3\pi R^2 H.$$

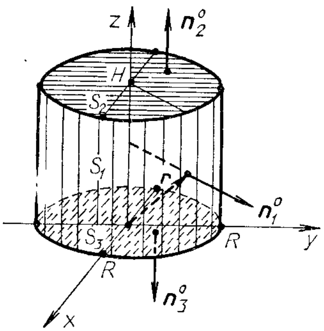


Рис. 15.8

Вычисления можно значительно сократить, воспользовавшись формулой Остроградского — Гаусса (15.18). Так как объем цилиндра

$$v = \iiint\limits_V dxdydz = \pi R^2 H,$$

имеем

$$\Pi = \iiint\limits_V (1+1+1)dxdydz = 3\pi R^2 H. \blacktriangleleft$$

АЗ-15.4

1. Вычислить дивергенцию векторного поля $\mathbf{a}(M) = (xy + z^2)\mathbf{i} + (yz + x^2)\mathbf{j} + (zx + y^2)\mathbf{k}$ в точке $M(1, 3, -5)$. (*Ответ:* -1.)

2. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a}(M) = (x - 3z)\mathbf{i} + (x + 2y + z)\mathbf{j} + (4x + y)\mathbf{k}$ через верхнюю часть плоскости $x + y + z = 2$, лежащую в первом октанте. (*Ответ:* 26/3.)

3. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a}(M) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ через часть поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$, лежащую в первом октанте, в направлении внешней нормали. (*Ответ:* 24π.)

4. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a}(M) = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ через поверхность цилиндрического тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ и $z = 2$, в направлении внешней нормали. (*Ответ:* -4π.)

5. Доказать, что поток Π радиуса-вектора $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через внешнюю сторону поверхности, ограничивающей тело V объемом v, равен $3v$.

6. Вычислить дивергенцию вектора напряженности магнитного поля $\mathbf{H} = (2I/r)(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$, создаваемого то-

ком I, проходящим по бесконечно длинному проводу. (*Ответ:* $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$.)

7. Найти поток Π векторного поля $\mathbf{a}(M) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ через поверхность шара $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в направлении внешней нормали. (*Ответ:* $12\pi R^5/5$.)

8. Вычислить поток Π векторного поля $\mathbf{a}(M) = 8x\mathbf{i} + 11y\mathbf{j} + 17z\mathbf{k}$ через часть плоскости $x + 2y + 3z = 1$, расположенной в первом октанте. Нормаль составляет острый угол с осью Oz. (*Ответ:* 1.)

9. Найти поток Π вектора $\mathbf{a} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ через замкнутую поверхность S, ограниченную поверхностями $1 - z = x^2 + y^2$, $z = 0$, в направлении внешней нормали. (*Ответ:* $-\pi$.)

10. Найти поток Π вектора $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j}$ через часть поверхности $z^2 = 4 - x - y$, лежащую в первом октанте, и части координатных плоскостей, отсекаемых этой поверхностью, в направлении внешней нормали. $\left(\textit{Ответ: } 19\frac{53}{105}.\right)$

Самостоятельная работа

1. 1. Найти дивергенцию поля $\mathbf{grad}\, u$, если $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

2. Вычислить поток Π векторного поля $\mathbf{a}(M) = x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ через верхнюю часть плоскости $x + y + z = 1$, расположенную в первом октанте. (*Ответ:* 1.)

2. 1. Найти дивергенцию векторного поля $\mathbf{a}(M) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ в точке $M(1, -1, 3)$.

2. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a}(M) = 3x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ через поверхности $9 - z = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, ограничивающие некоторое тело, в направлении внешней нормали. (*Ответ:* $81\pi/8$.)

3. 1. Найти $\operatorname{div}\left(\mathbf{grad}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$.

2. Найти поток векторного поля $\mathbf{a}(M) = 2x\mathbf{i} + z\mathbf{k}$ в направлении внешней нормали к поверхности тела, ограниченного поверхностями $z = 3x^2 + 2y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$. (*Ответ:* 20.)

15.5. ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. РОТОР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Пусть Γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая в пространстве $\mathbf{R}^3$ и S — гладкая поверхность, краем которой служит кривая Γ За *положительное направление обхода* кривой Γ принимается такое направление, при котором область, ограниченная этой кривой, будет оставаться слева на положительной стороне поверхности S, т. е. на стороне, из точек которой восставлен единичный вектор нормали $\mathbf{n}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ поверхности S. Пусть, далее, в окрестности поверхности S задан вектор $\mathbf{a} = (P, Q, R)$, координаты которого P, Q, R

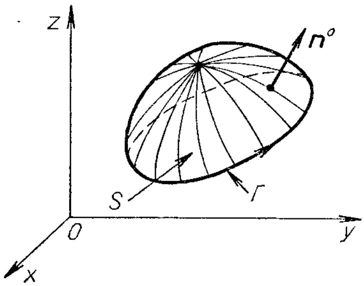


Рис. 15.9

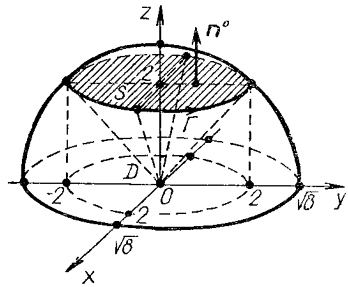


Рис. 15.10

являются непрерывными функциями от x, y, z вместе со своими первыми частными производными. Тогда имеет место *формула Стокса*, связывающая криволинейный и поверхностный интегралы (рис. 15.9):

$$\oint_\Gamma P dx + Q dy + R dz =$$

$$= \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right) dS, \qquad (15.24)$$

где направление обхода по замкнутой кривой Γ выбирается положительным.

Формула Грина (14.14) является частным случаем формулы Стокса, когда кривая Γ и поверхность S лежат в плоскости Oxy.

Отметим, что формула Стокса (15.24) справедлива для любой поверхности S, если ее можно разбить на части, уравнения которых имеют вид $z = f(x, y)$.

Пример 1. Вычислить

$$I = \oint_\Gamma (z^2 - x^2)\, dx + (x^2 - y^2)\, dy + (y^2 - z^2)\, dz$$

по контуру $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, $x^2 + y^2 = z^2$, $z > 0$, «пробегаемому» по ходу часовой стрелки с точки зрения наблюдателя, находящегося в начале координат O.

▶ Контур интегрирования Γ — окружность $x^2 + y^2 = 4$, лежащая в плоскости $z = 2$, полученная в результате пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ с конусом $x^2 + y^2 = z^2$ (рис. 15.10). В качестве поверхности S возьмем круг с краем Γ: $x^2+y^2\leqslant 4$, $z=2$. Далее, $P=z^2-x^2$, $Q=x^2-y^2$, $R=y^2-z^2$,

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=2y,\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=2z,\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2x.$$

Тогда в соответствии с формулой Стокса и условием задачи возьмем $\mathbf{n}^0=(0,\ 0,\ 1)$ (этим обеспечивается положительное направление движения по Γ (см. рис. 15.10)). Имеем

$$I=\iint\limits_D 2xdxdy=\left|\begin{matrix} x=\rho\cos\varphi,\ dxdy=\rho d\rho d\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\rho\leqslant 2\end{matrix}\right|=$$

$$=2\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\int_0^2\rho^2 d\rho=0. \blacktriangleleft$$

Если задано векторное поле $\mathbf{a}(M)=(P,\ Q,\ R)$ и некоторая замкнутая кусочно-гладкая кривая Γ в пространстве $\mathbf{R}^3$, то криволинейный интеграл

$$C=\oint\limits_\Gamma \mathbf{a}\cdot\vec{\tau}^0 dl=\oint\limits_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz \qquad (15.25)$$

называется *циркуляцией векторного поля* $\mathbf{a}(M)$ вдоль контура Γ. Здесь $\vec{\tau}^0$ — единичный вектор, направленный по касательной к кривой Γ и указывающий направление обхода по контуру.

Если $\mathbf{a}$ — вектор силы, то циркуляция (15.25) равна работе этой силы вдоль замкнутой кривой Γ.

Пример 2. Вычислить циркуляцию векторного поля $\mathbf{a}(M)=x\mathbf{i}-2z^2\mathbf{j}+y\mathbf{k}$ вдоль линии Γ пересечения цилиндра $x^2/16+y^2/9=1$ с плоскостью $z=x+2y+2$ в положительном направлении обхода относительно нормального вектора плоскости $\mathbf{n}=(-1,\ -2,\ 1)$.

▶ Параметрические уравнения цилиндра $x^2/16+y^2/9=1$ имеют вид $x=4\cos t$, $y=3\sin t$. Тогда параметрическими уравнениями кривой Γ (эллипса в плоскости сечения) будут $x=4\cos t$, $y=3\sin t$, $z=4\cos t+6\sin t+2$. Поэтому циркуляция векторного поля вдоль эллипса в положительном направлении обхода вычисляется по формуле

$$C=\oint\limits_\Gamma xdx-2z^2dy+ydz=\int_0^{2\pi}(4\cos t(-4\sin tdt)-$$

$$-2(4\cos t+6\sin t+2)^2\,3\cos tdt+3\sin t(-4\sin t+6\cos t)dt)=$$

$$=\int_0^{2\pi}(-16\cos t\sin t-96\cos^3 t-216\sin^2 t\cos t-24\cos t-$$

$$-288\cos^2 t\sin t-96\cos^2 t-144\cos t\sin t-12\sin^2 t+$$

$$+18\cos t\sin t)\,dt=-\int_0^{2\pi}(96\cos^2 t+12\sin^2 t)\,dt=$$

$$=-\int_0^{2\pi}48(1+\cos 2t)\,dt-6\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)=-48\cdot 2\pi-6\cdot 2\pi=$$

$$=-108\pi. \blacktriangleleft$$

Ротором или *вихрем векторного поля* $\mathbf{a}(M)=(P,\ Q,\ R)$ называется вектор

$$\mathbf{rot\ a}(M)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \quad (15.26)$$

Используя понятия ротора и циркуляции, формулу Стокса (15.24) можно записать в векторной форме:

$$C=\oint_\Gamma \mathbf{a}\cdot\vec{\tau}^0 dl=\iint_S \mathbf{rot\ a}\cdot\mathbf{n}^0 dS, \quad (15.27)$$

т. е. *циркуляция векторного поля* $\mathbf{a}(M)$ *вдоль замкнутого контура* Γ *равна потоку ротора этого поля через любую гладкую поверхность* S, *краем которой является* Γ. Направление обхода по Γ и сторона поверхности S одновременно или положительные, или отрицательные.

Число
$$C(M)=\text{пр}_{\mathbf{n}^0}\,\mathbf{rot\ a}(M)$$
называется *плотностью циркуляции* векторного поля $\mathbf{a}(M)$ в точке M в направлении вектора $\mathbf{n}^0$. Плотность достигает максимума в направлении $\mathbf{rot\ a}(M)$ и равна $\max C(M)=|\mathbf{rot\ a}(M)|$.

Отметим некоторые свойства ротора векторного поля:

1) $\mathbf{rot}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{rot\ a}+\mathbf{rot\ b}$;

2) $\mathbf{rot\ c}=\mathbf{0}$, если $\mathbf{c}$ — постоянный вектор;

3) $\mathbf{rot}(\varphi\mathbf{a})=\varphi\,\mathbf{rot\ a}+\mathbf{grad}\,\varphi\cdot\mathbf{a}$, где $\varphi(x,\ y,\ z)$ — скалярная функция.

Если $\mathbf{rot\ a}\neq\mathbf{0}$, то это свидетельствует о вращении векторного поля $\mathbf{a}(M)$.

Пример 3. Найти ротор вектора линейной скорости $\mathbf{v}=\vec{\omega}\cdot\mathbf{r}$ ($\mathbf{r}=(x,\ y,\ z)$, $\vec{\omega}=(\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z)$) любой точки $M(x,\ y,\ z)$ пространства.

▶ Имеем

$$\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x & y & z\end{vmatrix}=(z\omega_y-y\omega_z)\,\mathbf{i}+(x\omega_z-z\omega_x)\,\mathbf{j}+(y\omega_x-x\omega_y)\,\mathbf{k}.$$

По определению ротора находим

$$\mathbf{rot\ v}=(2\omega_x,\ 2\omega_x,\ 2\omega_z)=2\vec{\omega}. \ ◀$$

Пример 4. Вычислить циркуляцию векторного поля $\mathbf{a}(M)=y\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}-z\mathbf{k}$ по окружности Γ: $x^2+y^2=4$, $z=3$ в положительном направлении обхода относительно единичного вектора $\mathbf{k}$ двумя способами: 1) исходя из определения циркуляции (15.25); 2) с помощью поверхностного интеграла, использовав формулу Стокса (15.27).

▶ 1. Так как при возрастании параметра t от 0 до 2π движение по окружности происходит против хода часовой стрелки относительно единичного вектора $\mathbf{k}=(0,\ 0,\ 1)$, то параметрические уравнения ориентированной кривой Γ имеют вид $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=3$ ($t\in[0;\ 2\pi]$). Тогда

$$C=\oint_\Gamma y\,dx+x^2dy-z\,dz=$$

$$=\int_0^{2\pi} 2\sin t\,(-2\sin t\,dt)+4\cos^2 t\cdot 2\cos t\,dt-3\cdot 0=$$

$$= 8 \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt - 4 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = 8 \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t)\, d(\sin t) -$$

$$-2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t)\, dt = -4\pi.$$

2. В качестве поверхности S, краем которой является кривая Г, возьмем круг $x^2 + y^2 \leqslant 4$, $z = 3$ (рис. 15.11). Тогда $\mathbf{n}^\circ = \mathbf{k}$. Далее, $\mathbf{rot\, a} = (2x - 1)\mathbf{k}$ и

$$C = \iint_S \mathbf{rot\, a} \cdot \mathbf{n}^0 dS = \iint_D (2x - 1)\, dxdy =$$

$$= \iint_D (2\rho \cos \varphi - 1)\, \rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (2\rho \cos \varphi - 1)\, \rho d\rho =$$

$$= -2\pi \cdot \frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^2 = -4\pi. \blacktriangleleft$$

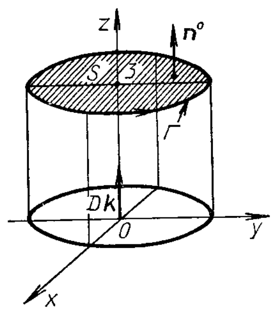


Рис. 15.11

АЗ-15.5

1. Найти ротор векторного поля $\mathbf{a}(M) = xyz\mathbf{i} + (x + y + z)\mathbf{j} + (x^2 + y^2 + z^2)\mathbf{k}$ в точке $M(1, -1, 2)$. (*Ответ:* $\mathbf{rot\, a}(M) = -3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.)

2. С помощью формулы Стокса преобразовать интеграл

$$\oint_\Gamma (y^2 + z^2)\, dx + (x^2 + z^2)\, dy + (x^2 + y^2)\, dz,$$

где Г — замкнутый контур, в интеграл по поверхности, «натянутой» на этот контур.

3. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{a}(M) = y\mathbf{i} - 2z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ вдоль эллипса, образованного сечением однополостного гиперболоида $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ плоскостью $y = x$. Результат проверить с помощью формулы Стокса. (*Ответ:* $\pm 3\pi R^2$.)

4. Вычислить циркуляцию векторного поля $\mathbf{a}(M) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ вдоль контура Г: $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ в положительном направлении обхода относительно орта $\mathbf{n}^\circ = \mathbf{k}$ непосредственно и с помощью формулы Стокса. (*Ответ:* 4π.)

5. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{a}(M) = z^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ по сечению сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ плоскостью $x + y + z = R$ в положительном направлении обхода относительно вектора $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$. (*Ответ:* $3\pi R^4/2$).

6. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{a}(M)=y^2\mathbf{i}+xy\mathbf{j}+(x^2+y^2)\mathbf{k}$ по контуру, вырезаемому в первом октанте из параболоида $x^2+y^2=Rz$ плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=R$ в положительном направлении обхода относительно внешней нормали поверхности параболоида. (*Ответ:* $R^3/3$.)

7. Вычислить циркуляцию векторного поля $\mathbf{a}(M)=zy^2\mathbf{i}+xz^2\mathbf{j}+yx^2\mathbf{k}$ по контуру пересечения параболоида $x=y^2+z^2$ с плоскостью $x=9$ в положительном направлении обхода относительно орта $\mathbf{n}^0=\mathbf{i}$. (*Ответ:* 729π.)

8. Вычислить циркуляцию векторного поля $\mathbf{a}(M)=-y\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ по линии Γ пересечения конуса $x^2+y^2-z^2=0$ с плоскостью $z=1$ в положительном направлении обхода относительно орта $\mathbf{n}^0=\mathbf{k}$. (*Ответ:* π.)

Самостоятельная работа

1. Вычислить циркуляцию векторного поля $\mathbf{a}(M)=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ вдоль линии Γ пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=4$ с конусом $\sqrt{x^2+y^2}=z$ в положительном направлении обхода относительно орта $\mathbf{n}^0=\mathbf{k}$.

2. Вычислить циркуляцию векторного поля $\mathbf{a}(M)=yz\mathbf{i}+2xz\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$ по линии Γ пересечения полусферы $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ с цилиндром $x^2+y^2=16$ в положительном направлении обхода относительно орта $\mathbf{n}^0=\mathbf{k}$.

3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\mathbf{a}(M)=(x-y)\mathbf{i}+x\mathbf{j}-z\mathbf{k}$ вдоль линии Γ пересечения цилиндра $x^2+y^2=1$ с плоскостью $z=2$, если $\mathbf{n}^0=\mathbf{k}$.

15.6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА. КЛАССИФИКАЦИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Дифференциальные операции. Введенные выше основные понятия векторного анализа: градиент, дивергенция, ротор — удобно описывать с помощью дифференциального оператора, который обозначается символом ∇ (читается «набла»):

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

и называется *оператором Гамильтона.*

Выразим основные дифференциальные операции с помощью оператора ∇:

$$\nabla u(M)=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}=\mathbf{grad}\,u(M),$$

$$\nabla \cdot \mathbf{a}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\operatorname{div}\mathbf{a}(M),$$

$$\nabla \times \mathbf{a}(M)=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\operatorname{\mathbf{rot}}\mathbf{a}(M).$$

Операции нахождения градиента, дивергенции, ротора называются *дифференциальными операциями первого порядка.*

Перечислим основные свойства *дифференциальных операций второго порядка:*

$$\operatorname{div}\operatorname{\mathbf{grad}} u(M)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Delta u(M),$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\nabla\cdot\nabla=\nabla^2$ называется *оператором Лапласа;*

$$\operatorname{\mathbf{rot}}\operatorname{\mathbf{grad}} u(M)=(\nabla\cdot\nabla)\,u(M)=\mathbf{0},$$
$$\operatorname{div}\operatorname{\mathbf{rot}}\mathbf{a}(M)=\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{a}(M))=0,$$
$$\operatorname{\mathbf{grad}}\operatorname{div}\mathbf{a}(M)=\nabla\,(\nabla\cdot\mathbf{a}(M)),$$
$$\operatorname{\mathbf{rot}}\operatorname{\mathbf{rot}}\mathbf{a}(M)=\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a}(M))=\operatorname{\mathbf{grad}}\operatorname{div}\mathbf{a}(M)-\Delta\mathbf{a}(M).$$

Соленоидальное векторное поле. Векторное поле $\mathbf{a}(M)$ называется *соленоидальным* или *трубчатым* в области пространства V, если в каждой точке этой области

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(M)=0.$$

Так как $\operatorname{div}\operatorname{\mathbf{rot}}\mathbf{a}(M)=0$, то поле ротора любого векторного поля $\mathbf{a}(M)$ является соленоидальным.

Поток соленоидального векторного поля $\mathbf{a}(M)$ в направлении его векторных линий через каждое сечение векторной трубки, согласно формуле Остроградского — Гаусса, один и тот же. Трубчатое поле не имеет источников и стоков.

Для каждого соленоидального поля $\mathbf{a}(M)$ существует векторное поле $\mathbf{b}(M)$, такое, что $\mathbf{a}(M)=\operatorname{\mathbf{rot}}\mathbf{b}(M)$. Вектор $\mathbf{b}(M)$ называется *вектором-потенциалом* данного поля $\mathbf{a}(M)$.

Потенциальное векторное поле. Векторное поле $\mathbf{a}(M)=(P,\ Q,\ R)$ называется *потенциальным* или *безвихревым* в односвязной области пространства V, если в каждой точке этой области

$$\operatorname{\mathbf{rot}}\mathbf{a}(M)=\mathbf{0}.$$

Согласно определению ротора, необходимыми и достаточными условиями потенциальности поля $\mathbf{a}(M)=(P,\ Q,\ R)$ являются равенства:

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}. \qquad (15.28)$$

Так как $\operatorname{\mathbf{rot}}\operatorname{\mathbf{grad}} u(M)=\mathbf{0}$, то поле градиента любого скалярного поля $u=u(x,\ y,\ z)$ — потенциальное. Для того чтобы поле $\mathbf{a}(M)$ было потенциальным в области V, необходимо и достаточно, чтобы существовала дважды непрерывно диференцируемая скалярная фунция $u=u(x,\ y,\ z)$, такая, что $\mathbf{a}=\operatorname{\mathbf{grad}} u(M)$, которая называется *потенциальной функцией (потенциалом)* поля $\mathbf{a}(M)$.

Так как при выполнении условий (15.28) криволинейный интеграл второго рода не зависит от линии, соединяющей точки M_0 и M_1, то для потенциального поля $\mathbf{a}(M) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ справедлива формула для нахождения потенциальной функции:

$$u(x,\ y,\ z) = \int\limits_{M_0M} Pdx + Qdy + Rdz + C, \tag{15.29}$$

где $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ — некоторая фиксированная точка области V, $M(x,\ y,\ z)$ — любая точка области V; C — произвольная постоянная.

Из формулы (15.29) следует формула для вычисления криволинейного интеграла второго рода, не зависящего от пути интегрирования:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = u(B) - u(A), \tag{15.30}$$

где $u(A)$ и $u(B)$ — значения потенциала u в начальной A и конечной B точках пути.

Гармоническое векторное поле. Векторное поле $\mathbf{a}(M)$, удовлетворяющее двум условиям: $\operatorname{div}\mathbf{a}(M) = 0$ и $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M) = \mathbf{0}$, называется *гармоническим*. Потенциал u гармонического поля является решением уравнения Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{15.31}$$

Функция $u = u(x,\ y,\ z)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа (15.31), называется *гармонической*.

Пример 1. Показать, что поле $\mathbf{a}(M) = (2xy + z)\,\mathbf{i} + (x^2 - 2y)\,\mathbf{j} + xk$ является потенциальным, но не соленоидальным. Найти потенциал u данного поля.

► Имеем: $P = 2xy + z$, $Q = x^2 - 2y$, $R = x$. Тогда

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}(M) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z & x^2 - 2y & x \end{vmatrix} = (0 - 0)\,\mathbf{i} + (1 - 1)\,\mathbf{j} + (2x - 2x)\,\mathbf{k} = \mathbf{0},$$

т. е. поле $\mathbf{a}(M)$ — потенциальное.

Далее имеем

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2y - 2 + 0 \neq 0,$$

поэтому поле $\mathbf{a}(M)$ не является соленоидальным.

Согласно формуле (15.29),

$$u(x,\ y,\ z) = \int\limits_{M_0M} (2xy + z)\,dx + (x^2 - 2y)\,dy + xdz + C$$

Так как функции $P(x,\ y,\ z)$, $Q(x,\ y,\ z)$, $R(x,\ y,\ z)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные во всех точках пространства $\mathbf{R}^3$, то в качестве точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ можно взять начало координат $O(0,\ 0,\ 0)$, а в качестве $M(x,\ y,\ z)$ — произвольную точку пространства. Как отмечалось ранее, криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования, поэтому его можно вычислить по ломаной $OABM$ (рис. 15.12):

$$u(X, Y, Z) = \int\limits_{OM} + C = \int\limits_{OA} + \int\limits_{AB} + \int\limits_{BM} + C =$$

$$= \left| \begin{array}{l} OA\colon\ y = 0,\ z = 0,\ dy = 0,\ dz = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant X, \\ AB\colon\ x = X,\ z = 0,\ dx = 0,\ dz = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant Y, \\ BM\colon\ x = X,\ y = Y,\ dx = 0,\ dy = 0,\ 0 \leqslant z \leqslant Z \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^X 0 \cdot dx + \int\limits_0^Y (X^2 - 2y)\,dy + \int\limits_0^Z X dz = X^2 Y - Y^2 + XZ.$$

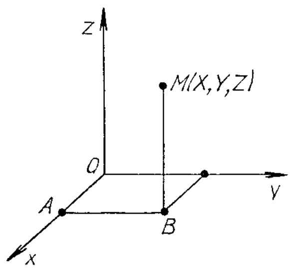


Рис. 15.12

Заменив в последнем равенстве X, Y, Z на x, y, z, запишем выражение для потенциала поля:

$$u(x, y, z) = x^2 y - y^2 + xz + C. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Проверить, является ли потенциальным поле $\mathbf{a} = (yz - xy)\,\mathbf{i} + (xz - x^2/2 + yz^2)\,\mathbf{j} + (xy + y^2 z)\,\mathbf{k}$, найти его потенциал и вычислить соответствующий криволинейный интеграл второго рода по линии, соединяющей точки $A(1, 1, 1)$ и $B(2, -2, 3)$.

▶ Учитывая, что $P = yz - xy$, $Q = xz - x^2/2 + yz^2$, $R = xy + y^2 z$, находим

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{a}(M) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz - xy & xz - x^2/2 + yz^2 & xy + y^2 z \end{vmatrix} =$$

$$= (x + 2yz - x - 2yz)\,\mathbf{i} + (y - y)\,\mathbf{j} + (z - x - z + x)\,\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Следовательно, поле $\mathbf{a}$ — потенциальное и существует потенциал (см. формулу (15.29) и пример 1)

$$u(X, Y, Z) = \int\limits_{M_0 M} P dx + Q dy + R dz + C =$$

$$= \int\limits_0^X 0 \cdot dx + \int\limits_0^Y \left(-\frac{x^2}{2}\right) dy + \int\limits_0^Z (xy + y^2 z)\,dz + C =$$

$$= -X^2 Y/2 + XYZ + Y^2 Z^2/2 + C.$$

Заменив X, Y, Z на x, y, z, окончательно получим

$$u = xyz - x^2y/2 + y^2z^2/2 + C.$$

Так как в потенциальном поле криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки A и B, то, согласно формуле (15.30), имеем

$$\int\limits_{AB} (yz - xy)\,dx + (xz - x^2/2 + yz^2)\,dy + (xy + y^2z)\,dz =$$

$$= u(B) - u(A) = 9. \blacktriangleleft$$

Пример 3. Доказать, что функция $u = 1/r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, является гармонической и векторное поле $\mathbf{a}(M) = \mathbf{grad}\, u(M)$ — гармоническое.

▶ Прежде всего следует проверить, справедливо ли для данной функции уравнение Лапласа (15.31). Вычисляем $\partial^2u/\partial x^2$, $\partial^2u/\partial y^2$, $\partial^2u/\partial z^2$ и Δu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5};$$

$$\Delta u = -\frac{3}{r^3} + 3\cdot\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0.$$

Следовательно, уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ удовлетворяется и данная функция $u = 1/r$ — гармоническая.

Далее находим

$$\mathbf{a}(M) = \mathbf{grad}\, u(M) = -r^3(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

Как известно, $\mathbf{rot}\,\mathbf{a}(M) = \mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\, u(M) = \mathbf{0}$ для любой функции u, т. е. одно из условий в определении гармонического поля $\mathbf{a}(M)$ выполнено. Другое условие $\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = 0$ также выполняется, поскольку

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{div} \mathbf{grad}\, u(M) = \Delta u(M) = 0. \blacktriangleleft$$

АЗ-15.6

1. Доказать с помощью формулы Стокса, что

$$\oint\limits_{\Gamma} yzdx + xzdy + xydz = 0,$$

где Γ — любой замкнутый контур. Результат проверить путем вычисления интеграла по контуру треугольника ABC с вершинами $A(0, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, 1, 1)$.

2. Найти $\mathbf{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$, если $\mathbf{a}(M) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$.

3. Среда вращается как твердое тело вокруг оси Oz с

угловой скоростью $\vec{\omega} = \omega \mathbf{k}$. Найти ротор поля линейных скоростей $\mathbf{v} = \vec{\omega} \times \mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор движущейся точки $M(x, y, z)$. (*Ответ:* $2\omega\mathbf{k}$.)

4. Найти циркуляцию поля скоростей $\mathbf{v}$, описанного в предыдущем задании, по окружности $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$ в положительном направлении обхода относительно орта $\mathbf{k}$. (*Ответ:* $2\pi R^2$.)

5. Доказать, что $\operatorname{div} \mathbf{rot}\, \mathbf{a}(M) = 0$ для любого поля $\mathbf{a}(M)$.

6. Установить потенциальность поля $\mathbf{a}(M)$ и найти его потенциал u, если:

а) $\mathbf{a}(M) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - 2yz)\,\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$;

б) $\mathbf{a}(M) = (3x^2y - y^3)\,\mathbf{i} + (x^3 - 3xy^2)\,\mathbf{j}$;

в) $\mathbf{a}(M) = (y + 2)\,\mathbf{i} + (x + z)\,\mathbf{j} + (y + x)\,\mathbf{k}$.

(*Ответ:* а) $u = x^2y - y^2z + C$; б) $u = x^3y - xy^3 + C$; в) $u = xy + yz + xz + C$.)

7. Проверить, является ли гармонической функция $u = \ln r$, если $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

8. Установить потенциальность поля $\mathbf{a}(M)$ и найти его потенциал u:

а) $$\mathbf{a}(M) = e^{y/z}\mathbf{i} + \left(\frac{e^{y/z}(x+1)}{z} + ze^{yz}\right)\mathbf{j} + \left(-\frac{e^{y/z}(x+1)y}{z^2} + ye^{yz} + e^{-z}\right)\mathbf{k};$$

б) $\mathbf{a}(M) = yz\cos(xy)\,\mathbf{i} + xz\cos(xy)\,\mathbf{j} + \sin(xy)\,\mathbf{k}$.
(*Ответ:* а) $u = e^{y/z}(x + 1) + e^{yz} - e^{-z} + C$; б) $u = z\sin(xy) + C$.)

9. Доказать, что векторное поле $\mathbf{a}(M) = -\dfrac{\gamma m}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}$, где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, которое описывает гравитационное поле, создаваемое точечной массой m, помещенной в начало координат (γ — ньютоновская постоянная тяготения), является гармоническим (потенциальным и безвихревым), найти его потенциал u и убедиться, что потенциал u удовлетворяет уравнению Лапласа. (*Ответ:* $u = \gamma m/|\mathbf{r}|$.)

10. Доказать, что $\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\, u(M) = \mathbf{0}$.

11. Найти потенциал u поля $\mathbf{a}(M) = (yz + 1)\,\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ и вычислить

$$\int\limits_{(1,1,1)}^{(2,3,2)} (yz + 1)\,dx + xzdy + xydz.$$

(*Ответ:* $u = x + xyz + C$; 12.)

Самостоятельная работа

Проверить потенциальность векторного поля $\mathbf{a}(M)$, найти его потенциал и вычислить значение соответствующего криволинейного интеграла второго рода по дуге линии, соединяющей точки A и B (A — начало дуги, B — ее конец).

1. $\mathbf{a}(M)=2xyz\mathbf{i}+x^2z\mathbf{j}+x^2y\mathbf{k}$, $A(1, -1, 2)$, $B(-2, 4, 2)$. (*Ответ:* 34.)

2. $\mathbf{a}(M)=(x^2-2yz)\mathbf{i}+(y^2-2xz)\mathbf{j}+(z^2-2xy)\mathbf{k}$, $A(1, -1, 1)$, $B(-2, 2, 3)$. (*Ответ:* 92/3.)

3. $\mathbf{a}(M)=(2xy+z^2)\mathbf{i}+(2xy+x^2)\mathbf{j}+(2xz+y^2)\mathbf{k}$, $A(0, 1, -2)$, $B(2, 3, 1)$. (*Ответ:* 25.)

15.7. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 15

ИДЗ-15.1

1. Дана функция $u(M)=u(x, y, z)$ и точки M_1, M_2. Вычислить: 1) производную этой функции в точке M_1 по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\mathbf{grad}\, u(M_1)$.

1.1. $u(M)=x^2y+y^2z+z^2x$, $M_1(1, -1, 2)$, $M_2(3, 4, -1)$.

1.2. $u(M)=5xy^3z^2$, $M_1(2, 1, -1)$, $M_2(4, -3, 0)$.

1.3. $u(M)=\ln(x^2+y^2+z^2)$, $M_1(-1, 2, 1)$, $M_2(3, 1, -1)$.

1.4. $u(M)=ze^{x^2+y^2+z^2}$, $M_1(0, 0, 0)$, $M_2(3, -4, 2)$.

1.5. $u(M)=\ln(xy+yz+xz)$, $M_1(-2; 3, -1)$, $M_2(2, 1, -3)$.

1.6. $u(M)=\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}$, $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(3, 2, 1)$.

1.7. $u(M)=x^2y+xz^2-2$, $M_1(1, 1, -1)$, $M_2(2, -1, 3)$.

1.8. $u(M)=xe^y+ye^x-z^2$, $M_1(3, 0, 2)$, $M_2(4, 1, 3)$.

1.9. $u(M)=3xy^2+z^2-xyz$, $M_1(1, 1, 2)$, $M_2(3, -1, 4)$.

1.10. $u(M)=5x^2yz-xy^2z+yz^2$, $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(9, -3, 9)$.

1.11. $u(M)=x/(x^2+y^2+z^2)$, $M_1(1, 2, 2)$, $M_2(-3, 2, -1)$.

1.12. $u(M)=y^2z-2xyz+z^2$, $M_1(3, 1, -1)$, $M_2(-2, 1, 4)$.

1.13. $u(M)=x^2+y^2+z^2-2xyz$, $M_1(1, -1, 2)$, $M_2(5, -1, 4)$.

1.14. $u(M) = \ln(1 + x + y^2 + z^2)$, $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(3, -5, 1)$.

1.15. $u(M) = x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 5$, $M_1(1, 2, 1)$, $M_2(-3, -2, 6)$.

1.16. $u(M) = \ln(x^3 + y^3 + z + 1)$, $M_1(1, 3, 0)$, $M_2(-4, 1, 3)$.

1.17. $u(M) = x - 2y + e^z$, $M_1(-4, -5, 0)$, $M_2(2, 3, 4)$.

1.18. $u(M) = x^y - 3xyz$, $M_1(2, 2, -4)$, $M_2(1, 0, -3)$.

1.19. $u(M) = 3x^2yz^3$, $M_1(-2, -3, 1)$, $M_2(5, -2, 0)$.

1.20. $u(M) = e^{xy + z^2}$, $M_1(-5, 0, 2)$, $M_2(2, 4, -3)$.

1.21. $u(M) = x^{yz}$, $M_1(3, 1, 4)$, $M_2(1, -1, -1)$.

1.22. $u(M) = (x^2 + y^2 + z^2)^3$, $M_1(1, 2, -1)$, $M_2(0, -1, 3)$.

1.23. $u(M) = (x - y)^z$, $M_1(1, 5, 0)$, $M_2(3, 7, -2)$.

1.24. $u(M) = x^2y + y^2z - 3z$, $M_1(0, -2, -1)$, $M_2(12, -5, 0)$.

1.25. $u(M) = 10/(x^2 + y^2 + z^2 + 1)$, $M_1(-1, 2, -2)$, $M_2(2, 0, 1)$.

1.26. $u(M) = \ln(1 + x^2 - y^2 + z^2)$, $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(5, -4, 8)$.

1.27. $u(M) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} - \dfrac{z}{x}$, $M_1(-1, 1, 1)$, $M_2(2, 3, 4)$.

1.28. $u(M) = x^3 + xy^2 - 6xyz$, $M_1(1, 3, -5)$, $M_2(4, 2, -2)$.

1.29. $u(M) = \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{z} - \dfrac{x}{z}$, $M_1(2, 2, 2)$, $M_2(-3, 4, 1)$.

1.30. $u(M) = e^{x - yz}$, $M_1(1, 0, 3)$, $M_2(2, -4, 5)$.

2. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S — часть плоскости (p), отсеченная координатными плоскостями.

2.1. $\iint\limits_S (2x + 3y + 2z)\,dS$, (p): $x + 3y + z = 3$. (*Ответ:* $15\sqrt{11}/2$.)

2.2. $\iint\limits_S (2 + y - 7x + 9z)\,dS$, (p): $2x - y - 2z = -2$. (*Ответ:* 12.)

2.3. $\iint\limits_S (6x + y + 4z)\,dS$, (p): $3x + 3y + z = 3$. (*Ответ:* $19\sqrt{19}/6$.)

2.4. $\iint\limits_S (x+2y+3z)\,dS$, $\quad (p)\colon\ x+y+z=2$. (*Ответ:* $8\sqrt{3}$.)

2.5. $\iint\limits_S (3x-2y+6z)\,dS$, $\quad (p)\colon\ 2x+y+2z=2$. (*Ответ:* $5/2$.)

2.6. $\iint\limits_S (2x+5y-z)\,dS$, $\quad (p)\colon\ x+2y+z=2$. (*Ответ:* $7\sqrt{6}/3$.)

2.7. $\iint\limits_S (5x-8y-z)\,dS$, $\quad (p)\colon\ 2x-3y+z=6$. (*Ответ:* $25\sqrt{14}$.)

2.8. $\iint\limits_S (3y-x-z)\,dS$, $\quad (p)\colon\ x-y+z=2$. (*Ответ:* $-20\sqrt{3}/3$.)

2.9. $\iint\limits_S (3y-2x-2z)\,dS$, $\quad (p)\colon\ 2x-y-2z=-2$. (*Ответ:* 3.)

2.10. $\iint\limits_S (2x-3y+z)\,dS$, $\quad (p)\colon\ x+2y+z=2$. (*Ответ:* $\sqrt{6}$.)

2.11. $\iint\limits_S (5x+y-z)\,dS$, $(p)\colon\ x+2y+2z=2$. (*Ответ:* 5.)

2.12. $\iint\limits_S (3x+2y+2z)\,dS$, $\quad (p)\colon\ 3x+2y+2z=6$. (*Ответ:* $9\sqrt{17}$.)

2.13. $\iint\limits_S (2x+3y-z)\,dS$, $\quad (p)\colon\ 2x+y+z=2$. (*Ответ:* $2\sqrt{6}$.)

2.14. $\iint\limits_S (9x+2y+z)\,dS$, $\quad (p)\colon\ 2x+y+z=4$. (*Ответ:* $40\sqrt{6}$.)

2.15. $\iint\limits_S (5x + 8y + 8z)\, dS$, (p): $x + 4y + 2z = 8$. (*Ответ:* $96\sqrt{21}$.)

2.16. $\iint\limits_S (4y - x + 4z)\, dS$, (p): $x - 2y + 2z = 2$. (*Ответ:* -1.)

2.17. $\iint\limits_S (7x + y + 2z)\, dS$, (p): $3x - 2y + 2z = 6$. (*Ответ:* $17\sqrt{17}/2$.)

2.18. $\iint\limits_S (2x + 3y + z)\, dS$, (p): $2x + 3y + z = 6$. (*Ответ:* $18\sqrt{14}$.)

2.19. $\iint\limits_S (4x - y + z)\, dS$, (p): $x - y + z = 2$. (*Ответ:* $8\sqrt{3}$.)

2.20. $\iint\limits_S (6x - y + 8z)\, dS$, (p): $x + y + 2z = 2$. (*Ответ:* $6\sqrt{6}$.)

2.21. $\iint\limits_S (4x - 4y - z)\, dS$, (p): $x + 2y + 2z = 4$. (*Ответ:* 44.)

2.22. $\iint\limits_S (2x + 5y + z)\, dS$, (p): $x + y + 2z = 2$. (*Ответ:* $5\sqrt{6}$.)

2.23. $\iint\limits_S (4x - y + 4z)\, dS$, (p): $2x + 2y + z = 4$. (*Ответ:* 44.)

2.24. $\iint\limits_S (5x + 2y + 2z)\, dS$, (p): $x + 2y + z = 2$. (*Ответ:* $16\sqrt{3}/6$.)

2.25. $\iint\limits_S (2x + 5y + 10z)\, dS$, (p): $2x + y + 3z = 6$. (*Ответ:* $56\sqrt{14}$.)

2.26. $\iint\limits_S (2x + 15y + z)\, dS$, (p): $x + 2y + 2z = 2$. (*Ответ:* 10.)

2.27. $\iint\limits_S (3x + 10y - z)\,dS$, (p): $x + 3y + 2z = 6$. (*Ответ:* $35\sqrt{14}$.)

2.28. $\iint\limits_S (2x + 3y + z)\,dS$, (p): $2x + 2y + z = 2$. (*Ответ:* $7/6$.)

2.29. $\iint\limits_S (5x - y + 5z)\,dS$, (p): $3x + 2y + z = 6$. (*Ответ:* $37\sqrt{14}$.)

2.30. $\iint\limits_S (x + 3y + 2z)\,dS$, (p): $2x + y + 2z = 2$. (*Ответ:* $9/2$.)

3. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

3.1. $\iint\limits_S (y^2 + z^2)\,dydz$, где S — часть поверхности параболоида $x = 9 - y^2 - z^2$ (нормальный вектор $\mathbf{n}$ которой образует острый угол с ортом $\mathbf{i}$), отсеченная плоскостью $x = 0$. (*Ответ:* $81\pi/2$.)

3.2. $\iint\limits_S z^2 dxdy$, где S — внешняя сторона поверхности эллипсоида $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$. (*Ответ:* 0.)

3.3. $\iint\limits_S zdxdy + ydxdz + xdydz$, где S — внешняя сторона поверхности куба, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$. (*Ответ:* 3.)

3.4. $\iint\limits_S (z + 1)\,dxdy$, где S — внешняя сторона поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. (*Ответ:* $256\pi/3$.)

3.5. $\iint\limits_S yzdydz + xzdxdz + xydxdy$, где S — верхняя сторона плоскости $x + y + z = 4$, отсеченной координатными плоскостями. (*Ответ:* 32.)

3.6. $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, лежащая в первом октанте. (*Ответ:* 96π.)

3.7. $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (*Ответ:* 4π.)

3.8. $\iint\limits_S xzdxdy + xydydz + yzdxdz$, где S — верхняя часть плоскости $x+y+z=1$, отсеченной координатными плоскостями. (*Ответ:* $1/8$.)

3.9. $\iint\limits_S yzdxdy + xzdydz + xydxdz$, где S — наружная поверхность цилиндра $x^2+y^2=1$, отсеченная плоскостями $z=0$, $z=5$. (*Ответ:* 25π.)

3.10. $\iint\limits_S y^2zdxdy + xzdydz + x^2ydxdz$, где S — часть поверхности параболоида $z=x^2+y^2$ (нормальный вектор $\mathbf{n}$ которой образует тупой угол с ортом $\mathbf{k}$), вырезаемая цилиндром $x^2+y^2=1$. (*Ответ:* $\pi/8$.)

3.11. $\iint\limits_S (x^2+y^2)zdxdy$, где S — внешняя сторона нижней половины сферы $x^2+y^2+z^2=9$. (*Ответ:* $324\pi/5$.)

3.12. $\iint\limits_S x^2dydz + z^2dxdy$, где S — часть поверхности конуса $z^2=x^2+y^2$ (нормальный вектор $\mathbf{n}$ которой образует тупой угол с ортом $\mathbf{k}$), лежащая между плоскостями $z=0$, $z=1$. (*Ответ:* $-\pi/2$.)

3.13. $\iint\limits_S (2y^2-z)dxdy$, где S — часть поверхности параболоида $z=x^2+y^2$ (нормальный вектор $\mathbf{n}$ которой образует тупой угол с ортом $\mathbf{k}$), отсекаемая плоскостью $z=2$. (*Ответ:* 0.)

3.14. $\iint\limits_S \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$, где S — часть поверхности гиперболоида $x^2+y^2=z^2+1$ (нормальный вектор $\mathbf{n}$ которой образует тупой угол с ортом $\mathbf{k}$), отсекаемая плоскостями $z=0$, $z=\sqrt{3}$. (*Ответ:* $-2\sqrt{3}\pi$.)

3.15. $\iint\limits_S xydydz + yzdxdz + xzdxdy$, где S — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=1$, лежащая в первом октанте. (*Ответ:* $3\pi/16$.)

3.16. $\iint\limits_S x^2dydz + zdxdy$, где S — часть поверхности параболоида $z=x^2+y^2$ (нормальный вектор $\mathbf{n}$ которой образует тупой угол с ортом $\mathbf{k}$), отсекаемая плоскостью $z=4$. (*Ответ:* 8π.)

3.17. $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz - zdxdy$, где S — часть поверхности конуса $z^2=x^2+y^2$ (нормальный вектор $\mathbf{n}$ которой образует острый угол с ортом $\mathbf{k}$), отсекаемая плоскостями $z=0$ и $z=3$. (*Ответ:* -18π.)

3.18. $\iint\limits_S x^2dydz - z^2dxdz + zdxdy$, где S — часть поверхности параболоида $z=3-x^2-y^2$ (нормальный вектор $\mathbf{n}$ которой образует острый угол с ортом $\mathbf{k}$), отсекаемая плоскостью $z=0$. (*Ответ:* $9\pi/2$.)

3.19. $\iint\limits_S yzdydz - x^2dxdz - y^2dxdy$, где S — часть поверхности конуса $x^2+z^2=y^2$ (нормальный вектор $\mathbf{n}$ которой образует тупой угол с ортом $\mathbf{j}$), отсекаемая плоскостями $y=0$, $y=1$. (*Ответ:* $\pi/4$.)

3.20. $\iint\limits_S x^2dydz + 2y^2dxdz - zdxdy$, где S — часть поверхности параболоида $z=x^2+y^2$ (нормальный вектор $\mathbf{n}$ которой образует острый угол с ортом $\mathbf{k}$), отсекаемая плоскостью $z=1$. (*Ответ:* $-\pi/2$.)

3.21. $\iint\limits_S 2xdydz + (1-z)dxdy$, где S — внутренняя сторона цилиндра $x^2+y^2=4$, отсекаемая плоскостями $z=0$ и $z=1$. (*Ответ:* -8π.)

3.22. $\iint\limits_S 2xdydz - ydxdz + zdxdy$, где S — внешняя сторона замкнутой поверхности, образованной параболоидом $3z=x^2+y^2$ и полусферой $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$. (*Ответ:* $19\pi/3$.)

3.23. $\iint\limits_S 4xdydz + 2ydxdz - zdxdy$, где S — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=4$. (Ответ: $160\pi/3$.)

3.24. $\iint\limits_S (x+z)dydz + (z+y)dxdy$, где S — внешняя сторона цилиндра $x^2+y^2=1$, отсекаемая плоскостями $z=0$ и $z=2$. (*Ответ:* 2π.)

3.25. $\iint\limits_S 3xdydz - ydxdz - zdxdy$, где S — часть поверхности параболоида $9-z=x^2+y^2$ (нормальный вектор $\mathbf{n}$ которой образует острый угол с ортом $\mathbf{k}$), отсекаемая плоскостью $z=0$. (*Ответ:* $243\pi/2$.)

3.26. $\iint\limits_S (y-x)dydz + (z-y)dxdz + (x-z)dxdy$, где S — внутренняя сторона замкнутой поверхности, образованной конусом $x^2 = y^2 + z^2$ и плоскостью $x = 1$. (*Ответ:* π.)

3.27. $\iint\limits_S 3x^2 dydz - y^2 dxdz - zdxdy$, где S — часть поверхности параболоида $1 - z = x^2 + y^2$ (нормальный вектор **n** которой образует острый угол с ортом **k**). (*Ответ:* $-\pi/2$.)

3.28. $\iint\limits_S (1 + 2x^2) dydz + y^2 dxdz + zdxdy$, где S — часть поверхности конуса $x^2 + y^2 = z^2$ (нормальный вектор **n** которой образует тупой угол с ортом **k**), отсекаемая плоскостями $z = 0$ и $z = 4$. (*Ответ:* $128\pi/3$.)

3.29. $\iint\limits_S x^2 dydz + z^2 dxdz + ydxdy$, где S — часть поверхности параболоида $x^2 + y^2 = 4 - z$ (нормальный вектор **n** которой образует острый угол с ортом **k**), отсекаемая плоскостью $z = 0$. (*Ответ:* 0.)

3.30. $\iint\limits_S (y^2 + z^2) dydz - y^2 dxdz + 2yz^2 dxdy$, где S — часть поверхности конуса $x^2 + z^2 = y^2$ (нормальный вектор **n** которой образует тупой угол с ортом **j**), отсекаемая плоскостями $y = 0$ и $y = 1$. (*Ответ:* $\pi/2$.)

4. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью (p) и координатными плоскостями, двумя способами: а) использовав определение потока; б) с помощью формулы Остроградского — Гаусса.

4.1. $\mathbf{a}(M) = 3x\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (x - z)\mathbf{k}$, (p): $x + 3y + z = 3$. (*Ответ:* 9/2.)

4.2. $\mathbf{a}(M) = (3x - 1)\mathbf{i} + (y - x + z)\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$, (p): $2x - y - 2z = 2$. (*Ответ:* 8/3.)

4.3. $\mathbf{a}(M) = x\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (y + z)\mathbf{k}$, (p): $3x + 3y + z = 3$. (*Ответ:* 1.)

4.4. $\mathbf{a}(M) = (x + z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x + 2y + z)\mathbf{k}$, (p): $x + y + z = 2$. (*Ответ:* 8/3.)

4.5. $\mathbf{a}(M) = (y + 2z)\mathbf{i} + (x + 2z)\mathbf{j} + (x - 2y)\mathbf{k}$, (p): $2x + y + 2z = 2$. (*Ответ:* 0.)

4.6. $\mathbf{a}(M) = (x + z)\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + (x + y - z)\mathbf{k}$, (p): $x + 2y + z = 2$. (*Ответ:* 4/3.)

4.7. $\mathbf{a}(M) = (3x - y)\mathbf{i} + (2y + z)\mathbf{j} + (2z - x)\mathbf{k}$, (p): $2x - 3y + z = 6$. (*Ответ:* 42.)

4.8. $\mathbf{a}(M) = (2y + z)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$, (p): $x - y + z = 2$. (*Ответ:* -4.)

4.9. $\mathbf{a}(M)=(x+y)\mathbf{i}+3y\mathbf{j}+(y-z)\mathbf{k}$, (p): $2x-y-2z=-2$. (*Ответ:* -1.)

4.10. $\mathbf{a}(M)=(x+y-z)\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+(x+2z)\mathbf{k}$, (p): $x+2y+z=2$. (*Ответ:* $2/3$.)

4.11. $\mathbf{a}(M)=(y-z)\mathbf{i}+(2x+y)\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, (p): $2x+y+z=2$. (*Ответ:* $4/3$.)

4.12. $\mathbf{a}(M)=x\mathbf{i}+(y-2z)\mathbf{j}+(2x-y+2z)\mathbf{k}$, (p): $x+2y+2z=2$. (*Ответ:* $4/3$.)

4.13. $\mathbf{a}(M)=(x+2z)\mathbf{i}+(y-3z)\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, (p): $3x+2y+2z=6$. (*Ответ:* 9.)

4.14. $\mathbf{a}(M)=4x\mathbf{i}+(x-y-z)\mathbf{j}+(3y+2z)\mathbf{k}$, (p): $2x+y+z=4$. (*Ответ:* $80/3$.)

4.15. $\mathbf{a}(M)=(2z-x)\mathbf{i}+(x+2y)\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$, (p): $x+4y+2z=8$. (*Ответ:* $128/3$.)

4.16. $\mathbf{a}(M)=4z\mathbf{i}+(x-y-z)\mathbf{j}+(3y+z)\mathbf{k}$, (p): $x-2y+2z=2$. (*Ответ:* 0.)

4.17. $\mathbf{a}(M)=(x+y)\mathbf{i}+(y+z)\mathbf{j}+2(z+x)\mathbf{k}$, (p): $3x-2y+2z=6$. (*Ответ:* 12.)

4.18. $\mathbf{a}(M)=(x+y+z)\mathbf{i}+2z\mathbf{j}+(y-7z)\mathbf{k}$, (p): $2x+3y+z=6$. (*Ответ:* -36.)

4.19. $\mathbf{a}(M)=(2x-z)\mathbf{i}+(y-x)\mathbf{j}+(x+2z)\mathbf{k}$, (p): $x-y+z=2$. (*Ответ:* $20/3$.)

4.20. $\mathbf{a}(M)=(2y-z)\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}+x\mathbf{k}$, (p): $x+2y+2z=4$. (*Ответ:* $8/3$.)

4.21. $\mathbf{a}(M)=(2z-x)\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}+(3x+z)\mathbf{k}$, (p): $x+y+2z=2$. (*Ответ:* $-2/3$.)

4.22. $\mathbf{a}(M)=(x+z)\mathbf{i}+(x+3y)\mathbf{j}+y\mathbf{k}$, (p): $x+y+2z=2$. (*Ответ:* $8/3$.)

4.23. $\mathbf{a}(M)=(x+z)\mathbf{i}+z\mathbf{j}+(2x-y)\mathbf{k}$, (p): $2x+2y+z=4$. (*Ответ:* $8/3$.)

4.24. $\mathbf{a}(M)=(3x+y)\mathbf{i}+(x+z)\mathbf{j}+y\mathbf{k}$, (p): $x+2y+z=2$. (*Ответ:* 2.)

4.25. $\mathbf{a}(M)=(y+z)\mathbf{i}+(2x-z)\mathbf{j}+(y+3z)\mathbf{k}$, (p): $2x+y+3z=6$. (*Ответ:* 18.)

4.26. $\mathbf{a}(M)=(y+z)\mathbf{i}+(x+6y)\mathbf{j}+y\mathbf{k}$, (p): $x+2y+2z=2$. (*Ответ:* 2.)

4.27. $\mathbf{a}(M)=(2y-z)\mathbf{i}+(x+2y)\mathbf{j}+y\mathbf{k}$, (p): $x+3y+2z=6$. (*Ответ:* 12.)

4.28. $\mathbf{a}(M)=(y+z)\mathbf{i}+x\mathbf{j}+(y-2z)\mathbf{k}$, (p): $2x+2y+z=2$. (*Ответ:* $-2/3$.)

4.29. $\mathbf{a}(M)=(x+z)\mathbf{i}+z\mathbf{j}+(2x-y)\mathbf{k}$, (p): $3x+2y+z=6$. (*Ответ:* 6.)

4.30. $\mathbf{a}(M)=z\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}+y\mathbf{k}$, (p): $2x+y+2z=2$. (*Ответ:* $1/3$.)

1. Дана функция $u(M)=\sqrt{x}/z-\sqrt{y}/x+2xyz$ и точки $M_1(1,\ 1,\ -1)$, $M_2(-2,\ -1,\ 1)$. Вычислить: 1) производную этой функции в точке M_1 по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\mathbf{grad}\, u(M_1)$.

▶ 1. Вычислим производную функции $u(M)=u(x,\ y,\ z)$ в точке M_1 по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}=(-3,\ -2,\ 2)$:

$$\frac{du(M_1)}{\partial\overrightarrow{M_1M_2}}=\left.\frac{\partial u(M)}{\partial x}\right|_{M_1}\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial u(M)}{\partial y}\right|_{M_1}\cdot\cos\beta+$$

$$+\left.\frac{\partial u(M)}{\partial z}\right|_{M_1}\cdot\cos\gamma,$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x}=\frac{1}{2z\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{y}}{x^2}+2yz,\quad \left.\frac{\partial u(M)}{\partial x}\right|_{M_1}=-\frac{3}{2},$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial y}=-\frac{1}{2x\sqrt{y}}+2xz,\quad \left.\frac{\partial u(M)}{\partial y}\right|_{M_1}=-\frac{5}{2},$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial z}=-\frac{\sqrt{x}}{z^2}+2xy,\quad \left.\frac{\partial u(M)}{\partial z}\right|_{M_1}=1,$$

$$\cos\alpha=-\frac{3}{\sqrt{17}},\quad \cos\beta=\frac{-2}{\sqrt{17}},\quad \cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{17}},$$

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial\overrightarrow{M_1M_2}}=-\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{\sqrt{17}}\right)-\frac{5}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{17}}\right)+1\cdot\frac{2}{\sqrt{17}}=\frac{23}{2\sqrt{17}}.$$

2. Согласно определению,

$$\mathbf{grad}\, u(M_1)=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1}\mathbf{i}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1}\mathbf{j}+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1}\mathbf{k}=$$

$$=-\frac{3}{2}\mathbf{i}-\frac{5}{2}\mathbf{j}+\mathbf{k}.\ ◀$$

2. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_S(3x-y+z)\,dS$ по поверхности S, где S — часть плоскости (p): $x+z-2y=2$, отсеченная координатными плоскостями.

▶ Из уравнения плоскости находим:

$$z=2-x+2y,\quad z'_x=-1,\quad z'_y=2,$$

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy = \sqrt{6}dxdy.$$

Сводим вычисление поверхностного интеграла к вычислению двойного интеграла по области D, где D — треугольник AOB, являющийся проекцией поверхности S на плоскость Oxy (рис. 15.13). Тогда

$$\iint_S (3x - y + z)\,dS = \iint_D (3x - y + 2 - x + 2y)\sqrt{6}\,dxdy =$$

$$= \iint_D (2x + y + 2)\sqrt{6}dxdy = \sqrt{6}\int_{-1}^{0} dy \int_{0}^{2+2y} (2x + y + 2)dx =$$

$$= \sqrt{6}\int_{-1}^{0} dy(x^2 + (y+2)x)\Big|_0^{2+2y} = \sqrt{6}\int_{-1}^{0} (4 + 8y + 4y^2 +$$

$$+ 2y + 2y^2 + 4 + 4y)\,dy = \sqrt{6}\int_{-1}^{0} (6y^2 + 14y + 8)\,dy =$$

$$= \sqrt{6}(2y^3 + 7y^2 + 8y)\Big|_{-1}^{0} = 3\sqrt{6}. \blacktriangleleft$$

3. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_S (x^2 + z^2)\,dxdz + x^2dydz - 2z^2dxdy,$$

где S — часть поверхности параболоида $4 - y = x^2 + z^2$ (нормальный вектор $\mathbf{n}$ которой образует острый угол с ортом $\mathbf{j}$), отсекаемая плоскостью $y = 0$.

$\blacktriangleright$ Представим данный поверхностный интеграл по координатам в виде суммы трех интегралов и, используя уравнение параболоида, преобразуем каждый из них в двойной интеграл по области D_γ ($\gamma = 1, 2, 3$) (рис. 15.14):

$$I = \iint_S (x^2 + z^2)\,dxdz + x^2dydz - 2z^2dxdy = I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \iint_S (x^2 + z^2)\,dxdz;\quad I_2 = \iint_S x^2dydz;\quad I_3 = \iint_S (-2z^2)\,dxdy.$$

Вычислим последовательно интегралы I_1, I_2, I_3:

$$I_1 = \iint_{D_1} (x^2 + z^2)\,dxdz = |x = \rho\cos\varphi,\ z = \rho\sin\varphi,$$

$$dxdz = \rho d\rho d\varphi| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho = \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^2 = 8\pi,$$

где область D_1 — круг $x^2+z^2=4$, $y=0$, являющийся проекцией поверхности параболоида на плоскость Oxz. Перед интегралом I_1 ставится знак «+», так как нормаль **n** к поверхности образует острый угол β с осью Oy.

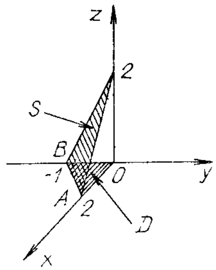


Рис. 15.13

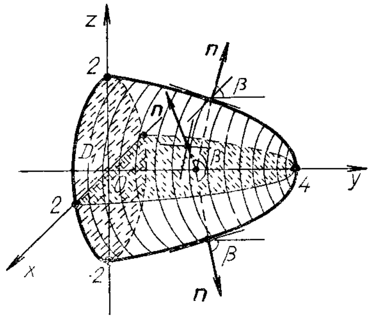


Рис. 15.14

Далее,

$$I_2=\iint\limits_S x^2dydz=\iint\limits_{D_2}(\sqrt{4-y-z^2})^2dydz-$$

$$-\iint\limits_{D_2}(-\sqrt{4-y-z^2})^2dydz=\iint\limits_{D_2}(4-y-z^2)\,dydz-$$

$$-\iint\limits_{D_2}(4-y-z^2)\,dydz=0.$$

Координатная плоскость Oyz разбивает поверхность параболоида на две части $x=\sqrt{4-y-z^2}$ и $x=$ $=-\sqrt{4-y-z^2}$, проекция каждой из которых на плоскость Oyz есть область D_2. Поэтому интеграл I_2 можно представить в виде суммы двух интегралов, перед первым из которых надо взять знак «+», так как нормаль **n** к этой части поверхности параболоида образует острый угол с осью Ox, а перед вторым интегралом — знак «—», поскольку нормаль **n** образует с осью Ox тупой угол.

Аналогично

$$I_3=\iint\limits_S -2z^2dxdy=-2\iint\limits_{D_3}(\sqrt{4-y-x^2})^2dxdy+$$

$$+2\iint\limits_{D_3}(-\sqrt{4-y-x^2})^2dxdy=0.$$

Итак,

$$\iint\limits_S (x^2 + z^2)\,dxdz + x^2dydz - 2z^2dxdy = 8\pi. \blacktriangleleft$$

4. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a}(M) = (x + z)\,\mathbf{i} + (2y - x)\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью (p): $x - 2y + 2z = 4$ и координатными плоскостями, двумя способами: 1) использовав определение потока; 2) с помощью формулы Остроградского — Гаусса.

► 1. Вычисляем поток векторного поля с помощью поверхностного интеграла

$$\Pi = \iint\limits_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}^0 dS,$$

где S — внешняя сторона поверхности пирамиды $ABCO$ (рис. 15.15).

Вначале вычислим поток через каждую из четырех граней пирамиды. Грань AOC лежит в плоскости $y = 0$,

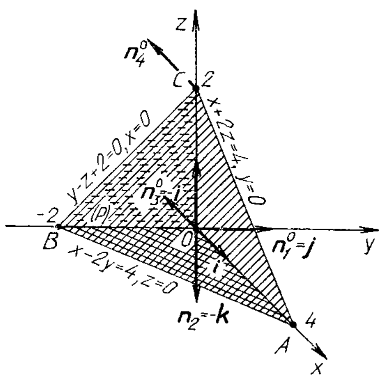


Рис. 15.15

нормаль к этой грани $\mathbf{n}^0 = \mathbf{j}$, $dS = dxdz$. Тогда поток векторного поля $\mathbf{a}(M)$ через грань AOC

$$\Pi_1 = -\iint\limits_{\triangle AOC} x\,dS = -\iint\limits_{\triangle AOC} x\,dxdz = -\int\limits_0^4 x\,dx \int\limits_0^{2-x/2} dz =$$

$$= -\int\limits_0^4 x\left(2 - \frac{x}{2}\right)dx = -\left(x^2 - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^4 = -\frac{16}{3}.$$

Грань AOB лежит в плоскости $z=0$, нормаль к этой грани $\mathbf{n}_2^0=-\mathbf{k}$, $dS=dxdy$,

$$\Pi_2=\iint\limits_{\triangle AOB} 0\cdot dxdy=0.$$

Грань BOC лежит в плоскости $x=0$, нормаль к данной грани $\mathbf{n}_3^0=-\mathbf{i}$, $dS=dydz$,

$$\Pi_3=-\iint\limits_{\triangle BOC} zdydz=-\int\limits_0^2 zdz\int\limits_{z-2}^{0} dy=$$

$$=-\int\limits_0^2 z(-z+2)\,dz=-\left(-\frac{z^3}{3}+z^2\right)\Bigg|_0^2=-\frac{4}{3}.$$

И, наконец, грань ABC лежит в плоскости $x-2y+2z-$ $-4=0$, нормаль к этой грани

$$\mathbf{n}_4^0=\frac{\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{3},$$

$$dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy,\ z=-\frac{1}{2}x+y+2,$$

$$z_x'=-\frac{1}{2},\ z_y'=1.$$

Поэтому

$$dS=\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}\,dxdy=\frac{3}{2}\,dxdy,$$

$$\Pi_4=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\iint\limits_{\triangle ABC}((x+z)-2(2y-x)+2z)\,dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{\triangle ABC}(x+z-4y+2x+2z)\,dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{\triangle ABC}(3x-4y+3z)\,dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{\triangle AOB}\Big(3x-4y-$$

$$-\frac{3}{2}x+3y+6\Big)\,dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{\triangle AOB}\left(\frac{3}{2}x-y+6\right)dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0}dy\int\limits_0^{2y+4}\left(\frac{3}{2}x-y+6\right)dx=$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{0} dy \left(\frac{3}{4} x^2 + (6 - y) x \right) \Big|_0^{2y+4} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{0} \left(\frac{3}{4} (2y + 4)^2 + (6 - y)(2y + 4) \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{0} 3(y^2 + 4y + 4) + 12y + 24 - 2y^2 - 4y \Big) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{0} (y^2 + 20y + 36) dy = \frac{1}{2} \left(\frac{y^3}{3} + 10y^2 + 36y \right) \Big|_{-2}^{0} =$$

$$= \frac{52}{3}.$$

Далее находим поток через полную поверхность пирамиды $ABCO$:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 = \frac{32}{3}.$$

2. Вычислить поток через поверхность пирамиды $ABCO$ по формуле Остроградского — Гаусса:

$$\Pi = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz.$$

Находим

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial (x + z)}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial (2y - x)}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial z} = 1.$$

Так как интеграл $\iiint\limits_V dxdydz$ равен объему прямоугольной пирамиды $ABCO$, то

$$\Pi = \iiint_V (1 + 2 + 1) dxdydz = 4 \iiint_V dxdydz = \frac{32}{3}. \blacktriangleleft$$

ИДЗ-15.2

1. Вычислить циркуляцию векторного поля $\mathbf{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости (p): $Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\mathbf{n}=(A, B, C)$ этой плоскости двумя способами: 1) использовав определение циркуляции; 2) с помощью формулы Стокса (15.27).

1.1. $\mathbf{a}(M)=z\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}+y\mathbf{k}$, (p): $2x+y+2z=2$. (*Ответ*: 5/2.)

1.2. $\mathbf{a}(M)=(x+z)\mathbf{i}+z\mathbf{j}+(2x-y)\mathbf{k}$, (p): $3x+2y+z=6$ (*Ответ*: -24.)

1.3. $\mathbf{a}(M)=(y+z)\mathbf{i}+x\mathbf{j}+(y-2z)\mathbf{k}$, (p): $2x+2y+z=2$. (*Ответ*: 2.)

1.4. $\mathbf{a}(M)=(2y-z)\mathbf{i}+(x+2y)\mathbf{j}+y\mathbf{k}$, (p): $x+3y+2z=6$. (*Ответ*: -12.)

1.5. $\mathbf{a}(M)=(y+z)\mathbf{i}+(x+6y)\mathbf{j}+y\mathbf{k}$, (p): $x+2y+2z=2$. (*Ответ*: 3/2.)

1.6. $\mathbf{a}(M)=(y+z)\mathbf{i}+(2x-z)\mathbf{j}+(y+3z)\mathbf{k}$, (p): $2x+y+3z=6$. (*Ответ*: 24.)

1.7. $\mathbf{a}(M)=(3x+y)\mathbf{i}+(x+z)\mathbf{j}+y\mathbf{k}$, (p): $x+2y+z=2$. (*Ответ*: 0.)

1.8. $\mathbf{a}(M)=(x+z)\mathbf{i}+z\mathbf{j}+(2x-y)\mathbf{k}$, (p): $2x+2y+z=4$. (*Ответ*: -12.)

1.9. $\mathbf{a}(M)=(x+z)\mathbf{i}+(x+3y)\mathbf{j}+y\mathbf{k}$, (p): $x+y+2z=2$. (*Ответ*: 4.)

1.10. $\mathbf{a}(M)=(2y-z)\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}+x\mathbf{k}$, (p): $x+2y+2z=4$. (*Ответ*: -12.)

1.11. $\mathbf{a}(M)=(2z-x)\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}+(3x+z)\mathbf{k}$, (p): $x+y+2z=2$. (*Ответ*: 1.)

1.12. $\mathbf{a}(M)=(2x-z)\mathbf{i}+(y-x)\mathbf{j}+(x+2z)\mathbf{k}$, (p): $x-y+z=2$. (*Ответ*: 2.)

1.13. $\mathbf{a}(M)=(x+y+z)\mathbf{i}+2z\mathbf{j}+(y-7z)\mathbf{k}$, (p): $2x+3y+z=6$. (*Ответ*: 0.)

1.14. $\mathbf{a}(M)=(x+y)\mathbf{i}+(y+z)\mathbf{j}+2(x+z)\mathbf{k}$, (p): $3x-2y+2z=6$. (*Ответ*: $-3/2$.)

1.15. $\mathbf{a}(M)=4z\mathbf{i}+(x-y-z)\mathbf{j}+(3y+z)\mathbf{k}$, (p): $x-2y+2z=2$. (*Ответ*: -1.)

1.16. $\mathbf{a}(M)=(2z-x)\mathbf{i}+(x+2y)\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$, (p): $x+4y+2z=8$. (*Ответ*: 40.)

1.17. $\mathbf{a}(M)=4x\mathbf{i}+(x-y-z)\mathbf{j}+(3y+2z)\mathbf{k}$, (p): $2x+y+z=4$. (*Ответ*: 36.)

1.18. $\mathbf{a}(M)=(x+2z)\mathbf{i}+(y-3z)\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, (p): $3x+2y+2z=6$. (*Ответ*: 39/2.)

1.19. $\mathbf{a}(M)=x\mathbf{i}+(y-2z)\mathbf{j}+(2x-y+2z)\mathbf{k}$, (p): $x+2y+2z=2$. (*Ответ*: $-3/2$.)

1.20. $\mathbf{a}(M)=(y-z)\mathbf{i}+(2x+y)\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, (p): $2x+y+z=2$. (*Ответ*: 0.)

1.21. $\mathbf{a}(M) = (x+y-z)\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + (x+2z)\mathbf{k}$, (p): $x + 2y + z = 2$. (*Ответ*: -5.)

1.22. $\mathbf{a}(M) = (x+y)\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + (y-z)\mathbf{k}$, (p): $2x - y - 2z = -2$. (*Ответ*: -2.)

1.23. $\mathbf{a}(M) = (2y+z)\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$, (p): $x - y + z = 2$. (*Ответ*: -4.)

1.24. $\mathbf{a}(M) = (3x-y)\mathbf{i} + (2y+z)\mathbf{j} + (2z-x)\mathbf{k}$, (p): $2x - 3y + z = 6$. (*Ответ*: 12.)

1.25. $\mathbf{a}(M) = (x+z)\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + (x+y-z)\mathbf{k}$, (p): $x + 2y + z = 2$. (*Ответ*: 1.)

1.26. $\mathbf{a}(M) = (y+2z)\mathbf{i} + (x+2z)\mathbf{j} + (x-2y)\mathbf{k}$, (p): $2x + y + 2z = 2$. (*Ответ*: $-7/2$.)

1.27. $\mathbf{a}(M) = (x+z)\mathbf{i} + (z-x)\mathbf{j} + (x+2y+z)\mathbf{k}$, (p): $x + y + z = 2$. (*Ответ*: 0.)

1.28. $\mathbf{a}(M) = x\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (y+z)\mathbf{k}$, (p): $3x + 3y + z = 3$. (*Ответ*: $3/2$.)

1.29. $\mathbf{a}(M) = (3x-1)\mathbf{i} + (y-x+z)\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$, (p): $2x - y - 2z = -2$. (*Ответ*: 0.)

1.30. $\mathbf{a}(M) = 3x\mathbf{i} + (y+z)\mathbf{j} + (x-z)\mathbf{k}$, (p): $x + 3y + z = 3$. (*Ответ*: -6.)

2. Найти величину и направление наибольшего изменения функции $u(M) = u(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

2.1. $u(M) = xyz$, $M_0(0, 1, -2)$. (*Ответ*: 2.)
2.2. $u(M) = x^2yz$, $M_0(2, 0, 2)$. (*Ответ*: 12.)
2.3. $u(M) = xy^2z$, $M_0(1, -2, 0)$. (*Ответ*: 4.)
2.4. $u(M) = xyz^2$, $M_0(3, 0, 1)$. (*Ответ*: 3.)
2.5. $u(M) = x^2y^2z$, $M_0(-1, 0, 3)$. (*Ответ*: 0.)
2.6. $u(M) = x^2yz^2$, $M_0(2, 1, -1)$. (*Ответ*: $4\sqrt{6}$.)
2.7. $u(M) = xy^2z^2$, $M_0(-2, 1, 1)$. (*Ответ*: $\sqrt{33}$.)
2.8. $u(M) = y^2z - x^2$, $M_0(0, 1, 1)$. (*Ответ*: $\sqrt{5}$.)
2.9. $u(M) = x^2y + y^2z$, $M_0(0, -2, 1)$. (*Ответ*: $4\sqrt{2}$.)
2.10. $u(M) = x(y+z)$, $M_0(0, 1, 2)$. (*Ответ*: 3.)
2.11. $u(M) = xy - xz$, $M_0(-1, 2, 1)$. (*Ответ*: $\sqrt{3}$.)
2.12. $u(M) = x^2yz$, $M_0(1, -1, 1)$. (*Ответ*: $\sqrt{6}$.)
2.13. $u(M) = xyz$, $M_0(2, 1, 0)$. (*Ответ*: 2.)
2.14. $u(M) = xyz^2$, $M_0(4, 0, 1)$. (*Ответ*: 4.)
2.15. $u(M) = 2x^2yz$, $M_0(-3, 0, 2)$. (*Ответ*: 36.)
2.16. $u(M) = x^2yz$, $M_0(1, 0, 4)$. (*Ответ*: 4.)

2.17. $u(M)=(x+y)z^2$, $M_0(0, -1, 4)$. (*Ответ:* 24.)

2.18. $u(M)=(x+z)y^2$, $M_0(2, 2, 2)$. (*Ответ:* $12\sqrt{2}$.)

2.19. $u(M)=x^2(y^2+z)$, $M_0(4, 1, -3)$. (*Ответ:* $16\sqrt{6}$.)

2.20. $u(M)=(x^2+z)y^2$, $M_0(-4, 1, 0)$. (*Ответ:* $\sqrt{33}$.)

2.21. $u(M)=x^2(y+z^2)$, $M_0(3, 0, 1)$. (*Ответ:* 21.)

2.22. $u(M)=(x^2-y)z^2$, $M_0(1, 3, 0)$. (*Ответ:* 0.)

2.23. $u(M)=x(y^2+z^2)$, $M_0(1, -2, 1)$. (*Ответ:* $\sqrt{15}$.)

2.24. $u(M)=x^2+3y^2-z^2$, $M_0(0, 0, 1)$. (*Ответ:* 2.)

2.25. $u(M)=x^2z-y^2$, $M_0(1, 1, -2)$. (*Ответ:* $\sqrt{21}$.)

2.26. $u(M)=xz^2+y$, $M_0(2, 2, 1)$. (*Ответ:* $3\sqrt{2}$.)

2.27. $u(M)=x^2y-z$, $M_0(-2, 2, 1)$. (*Ответ:* 9.)

2.28. $u(M)=xy^2-z$, $M_0(-1, 2, 1)$. (*Ответ:* $\sqrt{33}$.)

2.29. $u(M)=y(x+z)$, $M_0(0, 2, -2)$. (*Ответ:* $2\sqrt{3}$.)

2.30. $u(M)=z(x+y)$, $M_0(1, -1, 0)$. (*Ответ:* 2.)

3. Найти наибольшую плотность циркуляции векторного поля $\mathbf{a}(M)=(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

3.1. $\mathbf{a}(M)=x^2\mathbf{i}-xy^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$, $M_0(0, 1, -2)$. (*Ответ:* 1.)

3.2. $\mathbf{a}(M)=xy\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+xz\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$, $M_0(2, 0, 3)$. (*Ответ:* $\sqrt{13}$.)

3.3. $\mathbf{a}(M)=xy^2\mathbf{i}+yz^2\mathbf{j}-x^2\mathbf{k}$, $M_0(1, -2, 0.)$ (*Ответ:* $2\sqrt{5}$.)

3.4. $\mathbf{a}(M)=xz\mathbf{i}+z\mathbf{j}+yz\mathbf{k}$, $M_0(3, 0, 1)$. (*Ответ:* 3.)

3.5. $\mathbf{a}(M)=xy\mathbf{i}+xyz\mathbf{j}-x\mathbf{k}$, $M_0(-1, 0, 3.)$ (*Ответ:* $\sqrt{2}$.)

3.6. $\mathbf{a}(M)=yz\mathbf{i}-z^2\mathbf{j}+xyz\mathbf{k}$, $M_0(2, 1, -1)$. (*Ответ:* $\sqrt{21}$.)

3.7. $\mathbf{a}(M)=y^2\mathbf{i}-xy\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$, $M_0(-2, 1, 1)$. (*Ответ:* 1.)

3.8. $\mathbf{a}(M)=xz\mathbf{i}-xyz\mathbf{j}+x^2z\mathbf{k}$, $M_0(0, 1, 1)$. (*Ответ:* 1.)

3.9. $\mathbf{a}(M)=xy\mathbf{i}-y^2z\mathbf{j}-xz\mathbf{k}$, $M_0(0, -2, 1)$. (*Ответ:* $\sqrt{17}$.)

3.10. $\mathbf{a}(M)=xz\mathbf{i}-y\mathbf{j}-zy\mathbf{k}$, $M_0(0, 1, 2)$. (*Ответ:* 2.)

3.11. $\mathbf{a}(M)=y^2\mathbf{i}-xy^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$, $M_0(-1, 2, 1)$. (*Ответ:* 8.)

3.12. $\mathbf{a}(M)=xy\mathbf{i}-xy^2\mathbf{j}-xy^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$, $M_0(1, -1, 1)$. (*Ответ:* 2.)

3.13. $\mathbf{a}(M)=(x+y)\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$, $M_0(2, 1, 0)$. (*Ответ:* $\sqrt{2}$.)

3.14. $\mathbf{a}(M) = xy\mathbf{i} - (y + z)\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$, $M_0(4, 0, 1)$. (*Ответ:* $3\sqrt{2}$.)

3.15. $\mathbf{a}(M) = x\mathbf{i} - zy\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$, $M_0(-3, 0, 2)$. (*Ответ:* 12.)

3.16. $\mathbf{a}(M) = (x + y^2)\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$, $M_0(1, 0, 4)$. (*Ответ:* 2.)

3.17. $\mathbf{a}(M) = xz\mathbf{i} - y\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$, $M_0(0, -1, 4)$. (*Ответ:* 4.)

3.18. $\mathbf{a}(M) = xy\mathbf{i} - x\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$, $M_0(2, 2, 2)$. (*Ответ:* $\sqrt{13}$.)

3.19. $\mathbf{a}(M) = (x + y)\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - x\mathbf{k}$, $M_0(4, 1, -3)$. (*Ответ:* $\sqrt{33}$.)

3.20. $\mathbf{a}(M) = (x - y)\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - y\mathbf{k}$, $M_0(-4, 1, 0)$. (*Ответ:* $\sqrt{5}$.)

3.21. $\mathbf{a}(M) = (y - z)\mathbf{i} - z^2\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$, $M_0(3, 0, 1)$. (*Ответ:* $3\sqrt{3}$.)

3.22. $\mathbf{a}(M) = yz\mathbf{i} - z^2\mathbf{j} + (x + y)z\mathbf{k}$, $M_0(1, 3, 0)$. (*Ответ:* 3.)

3.23. $\mathbf{a}(M) = z^2\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, $M_0(1, -2, 1)$. (*Ответ:* $\sqrt{6}$.)

3.24. $\mathbf{a}(M) = xy\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}$, $M_0(0, 0, 1)$. (*Ответ:* $\sqrt{6}$.)

3.25. $\mathbf{a}(M) = xz\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$, $M_0(1, 1, -2)$. (*Ответ:* $\sqrt{26}$.)

3.26. $\mathbf{a}(M) = (x - z)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + y^2z\mathbf{k}$, $M_0(2, 2, 1)$. (*Ответ:* $\sqrt{21}$.)

3.27. $\mathbf{a}(M) = (x - z)\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, $M_0(-2, 2, 1)$. (*Ответ:* $\sqrt{24}$.)

3.28. $\mathbf{a}(M) = (y - z)\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$, $M_0(-1, 2, 1)$. (*Ответ:* $\sqrt{2}$.)

3.29. $\mathbf{a}(M) = (x - y)\mathbf{i} - x\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$, $M_0(0, 2, -2)$. (*Ответ:* 2.)

3.30. $\mathbf{a}(M) = (x - z)\mathbf{i} - y\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$, $M_0(1, -1, 0)$. (*Ответ:* 0.)

4

Выяснить, является ли векторное поле $\mathbf{a}(M) = (x, y, z)$ соленоидальным.

4.1. $\mathbf{a}(M) = (\alpha - \beta)x\mathbf{i} + (\gamma - \alpha)f\mathbf{j} + (\beta - \gamma)z\mathbf{k}$.

4.2. $\mathbf{a}(M) = x^2y\mathbf{i} - 2xy^2\mathbf{j} + 2xyz\mathbf{k}$.

4.3. $\mathbf{a}(M)=(yz-2x)\mathbf{i}+(xz+2y)\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$.
4.4. $\mathbf{a}(M)=(x^2-z^2)\mathbf{i}-3xy\mathbf{j}+(y^2+z^2)\mathbf{k}$.
4.5. $\mathbf{a}(M)=2xyz\mathbf{i}-y(yz+1)\mathbf{j}+z\mathbf{k}$.
4.6. $\mathbf{a}(M)=2x-3y\mathbf{i}+2xy\mathbf{j}-z^2\mathbf{k}$.
4.7. $\mathbf{a}(M)=(x^2-y^2)\mathbf{i}+(y^2-z^2)\mathbf{j}+(z^2-x^2)\mathbf{k}$.
4.8. $\mathbf{a}(M)=yz\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$.
4.9. $\mathbf{a}(M)=(y+z)\mathbf{i}+(x+z)\mathbf{j}+(x+y)\mathbf{k}$.
4.10. $\mathbf{a}(M)=3x^2y\mathbf{i}-2xy^2\mathbf{j}-2xyz\mathbf{k}$.
4.11. $\mathbf{a}(M)=(x+y)\mathbf{i}-2(y+z)\mathbf{j}+(z-x)\mathbf{k}$.

Выяснить, является ли векторное поле $\mathbf{a}(M)=(x, y, z)$ потенциальным.

4.12. $\mathbf{a}(M)=(yz-2x)\mathbf{i}+(xz+zy)\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$.
4.13. $\mathbf{a}(M)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$.
4.14. $\mathbf{a}(M)=6xy\mathbf{i}+(3x^2-2y)\mathbf{j}+z\mathbf{k}$.
4.15. $\mathbf{a}(M)=(2x-yz)\mathbf{i}+(2x-xy)\mathbf{j}+yz\mathbf{k}$.
4.16. $\mathbf{a}(M)=(y-z)\mathbf{i}+3xyz\mathbf{j}+(z-x)\mathbf{k}$.
4.17. $\mathbf{a}(M)=(y-z)\mathbf{i}+(x+z)\mathbf{j}+(x^2-y^2)\mathbf{k}$.
4.18. $\mathbf{a}(M)=(x+y)\mathbf{i}-2xz\mathbf{j}-3(y+z)\mathbf{k}$.
4.19. $\mathbf{a}(M)=z^2\mathbf{i}+(xz+y)\mathbf{j}+x^2y\mathbf{k}$.
4.20. $\mathbf{a}(M)=xy(3x-4y)\mathbf{i}+x^2(x-4y)\mathbf{j}+3z^2\mathbf{k}$.
4.21. $\mathbf{a}(M)=6x^2\mathbf{i}+3\cos(3x+2z)\mathbf{j}+\cos(3y+2z)\mathbf{k}$.
4.22. $\mathbf{a}(M)=(x+y)\mathbf{i}+(z-y)\mathbf{j}+2(x+z)\mathbf{k}$.
4.23. $\mathbf{a}(M)=3(x-z)\mathbf{i}+(x^2-y^2)\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$.
4.24. $\mathbf{a}(M)=(2x-yz)\mathbf{i}+(xz-2y)\mathbf{j}+2xyz\mathbf{k}$.
4.25. $\mathbf{a}(M)=3x^2\mathbf{i}+4(x-y)\mathbf{j}+(x-z)\mathbf{k}$.

Выяснить, является ли векторное поле $\mathbf{a}(M)=(x, y, z)$ гармоническим.

4.26. $\mathbf{a}(M)=x^2z\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-xz^2\mathbf{k}$.
4.27. $\mathbf{a}(M)=(x+y)\mathbf{i}+(y+z)\mathbf{j}+(x+z)\mathbf{k}$.
4.28. $\mathbf{a}(M)=\frac{x}{y}\mathbf{i}+\frac{y}{z}\mathbf{j}+\frac{z}{x}\mathbf{k}$.
4.29. $\mathbf{a}(M)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$.
4.30. $\mathbf{a}(M)=(y-z)\mathbf{i}+(z-x)\mathbf{j}+(x-y)\mathbf{k}$.

Решение типового варианта

1. Вычислить циркуляцию векторного поля $\mathbf{a}(M)=(x-2z)\mathbf{i}+(x+3y+z)\mathbf{j}+(5x+y)\mathbf{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости (p): $x+y+z=1$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\mathbf{n}=(1, 1, 1)$ этой плоскости двумя

способами: 1) использовав определение циркуляции; 2) с помощью формулы Стокса (15.27).

▶ В результате пересечения плоскости (p) с координатными плоскостями получим треугольник ABC

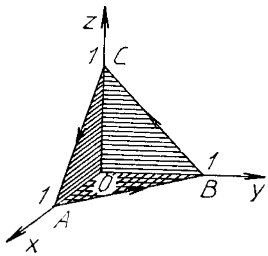


Рис. 15.16

(рис. 15.16) и укажем на нем положительное направление обхода контура $ABCA$ в соответствии с условием задачи.

1. Вычислим циркуляцию C данного поля по формуле (15.25), в которой обозначим $\mathbf{dl} = \vec{\tau}^0 dl$:

$$C = \oint_{ABCA} \mathbf{a} \cdot \mathbf{dl} = \int_{AB} \mathbf{a} \cdot \mathbf{dl} + \int_{BC} \mathbf{a} \cdot \mathbf{dl} + \int_{CA} \mathbf{a} \cdot \mathbf{dl}.$$

На отрезке AB имеем: $z = 0$, $x + y = 1$, $y = 1 - x$, $dy = -dx$,

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + (x + 3y)\mathbf{j} + (5x + y)\mathbf{k}, \ \mathbf{dl} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j},$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{dl} = xdx + (x + 3y)\,dy,$$

$$\int_{AB} \mathbf{a} \cdot \mathbf{dl} = \int_{AB} xdx + (x + 3y)dy = \int_1^0 (x - x - 3(1 - x))dx =$$
$$= \int_1^0 (3x - 3)\,dx = \left(\frac{3x^2}{2} - 3x\right)\Big|_1^0 = \frac{3}{2}.$$

На отрезке BC верны соотношения: $x = 0$, $y + z = 1$, $z = 1 - y$, $dz = -dy$,

$$\mathbf{a} = -2z\mathbf{i} + (3y + z)\mathbf{j} + y\mathbf{k}, \ \mathbf{dl} = dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k},$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{dl} = (3y + z)dy + ydz,$$
$$\int_{BC} \mathbf{a} \cdot \mathbf{dl} = \int_{BC} (3y + z)dy + ydz =$$

$$= \int_1^0 (3y + 1 - y - y)dy = \int_1^0 (y + 1)dy = \frac{(y + 1)^2}{2}\Big|_1^0 = -\frac{3}{2}.$$

На отрезке CA имеем: $y=0$, $x+z=1$, $dz=-dx$,

$$\mathbf{a}\cdot d\mathbf{l}=(x-2z)dx+5xdz,$$

$$\int\limits_{CA}\mathbf{a}\cdot d\mathbf{l}=\int\limits_{CA}(x-2z)dx+5xdz=$$

$$=\int\limits_0^2(x-2+2x-5x)dx=\int\limits_0^1(-2x-z)dx=$$

$$=(x^2-2x)|_0^1=-3.$$

Следовательно,

$$C=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}-3=-3.$$

2. Вычислим циркуляцию данного поля с помощью формулы Стокса (15.27). Для этого определим

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{a}(M)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x-2z & x+3y+z & 5x+y\end{vmatrix}=-7\mathbf{j}+\mathbf{k}.$$

В качестве поверхности S в формуле Стокса возьмем боковую поверхность пирамиды $OABC$:

$$S=S_{OCA}+S_{OAB}+S_{OBC}.$$

По формуле Стокса имеем

$$C=\iint\limits_S \mathbf{rot}\,a\cdot\mathbf{n}^\circ dS=\iint\limits_S \mathbf{rot}\,\mathbf{a}\cdot d\mathbf{S},$$

где

$$d\mathbf{S}=dydz\mathbf{i}+dxdz\mathbf{j}+dxdy\mathbf{k},\ (\mathbf{rot}\,\mathbf{a}\cdot d\mathbf{S})=$$
$$=-7dxdz+dxdy.$$

Следовательно,

$$C=\iint\limits_S -7dxdz+dxdy=-7\iint\limits_{S_{OAC}}dxdz+\iint\limits_{S_{OAB}}dxdy=-3. \blacktriangleleft$$

2. Найти величину и направление наибольшего изменения функции $u(M)=5x^2yz-7xy^2z+5xyz^2$ в точке $M_0(1,\ 1,\ 1)$.

▶ Находим частные производные функции $u(M)$ в любой точке $M(x,\ y,\ z)$ и в точке M_0:

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x}=10xyz-7y^2z+5yz^2,\ \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}=10-7+5=8,$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial y}=5x^2z-14xyz+5xz^2,\quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}=5-14+5=-4,$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial z}=5x^2y-7xy^2+10xyz,\quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}=5-7+10=8.$$

Тогда в точке $M_0(1,\ 1,\ 1)$ имеем $\mathbf{grad}\,u(M_0)=8\mathbf{i}-4\mathbf{j}+8\mathbf{k}$. Наибольшая скорость изменения поля в точке M_0 достигается в направлении $\mathbf{grad}\,u(M_0)$ и численно равна $|\mathbf{grad}\,u(M_0)|$:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial\, \mathbf{grad}\,u}=\max\frac{\partial u(M_0)}{\partial \mathbf{s}}=|\mathbf{grad}\,u(M_0)|=$$

$$=\sqrt{8^2+(-4)^2+8^2}=12. \ ◀$$

3. Найти наибольшую плотность циркуляции векторного поля $\mathbf{a}(M)=xy^2z^2\mathbf{i}+x^2yz^2\mathbf{j}+xyz\mathbf{k}$ в точке $M_0(2,\ -1,\ 1)$.

▶ Наибольшая плотность циркуляции векторного поля $\mathbf{a}(M)$ в данной точке M_0 достигается в направлении ротора и численно равна $|\mathbf{rot}\,\mathbf{a}(M_0)|$. Находим:

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{a}(M)=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^2 & x^2yz^2 & xyz \end{vmatrix}=$$

$$=\mathbf{i}(xz-2x^2yz)-\mathbf{j}(yz-2xy^2z),$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{a}(M_0)=10\mathbf{i}+5\mathbf{j},\quad |\mathbf{rot}\,\mathbf{a}(M_0)|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5}. \ ◀$$

4. Выяснить, является ли векторное поле $\mathbf{a}(M)=(y+z)\mathbf{i}+xy\mathbf{j}-xz\mathbf{k}$ соленоидальным.

▶ Векторное поле $\mathbf{a}(M)$ — соленоидальное, если в каждой его точке $\mathbf{div}\,\mathbf{a}(M)=0$. Находим

$$\mathbf{div}\,\mathbf{a}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}(z+y)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(xy)+\frac{\partial}{\partial z}(-xz)=0+x-x=0. \ ◀$$

15.8. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 15

1. Найти площадь части поверхности шара $x^2+y^2+z^2=a^2$, расположенной вне цилиндров $x^2+y^2=\pm ax$. (*Ответ:* $8a^2$.)

2. Вычислить массу поверхности куба $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, если поверхностная плотность в точке $M(x, y, z)$ равна xyz. (*Ответ:* 3/4.)

3. Вычислить координаты центра масс конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, если ее плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию от этой точки до оси конуса. (*Ответ:* (0, 0, 3/4).)

4. В каких точках пространства градиент скалярного поля $u(M) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$: а) перпендикулярен к оси Oz; б) равен нулю? (*Ответ:* а) $z^2 = xy$; б) $x = y = z$.)

5. Вычислить наибольшую скорость возрастания скалярного поля $u(M) = x^2y + y^2z + z^2x$ в точке $M_0(2, 1, 2)$. (*Ответ:* $\sqrt{209}$.)

6. Показать, что в точке $A(4, -12)$ производная функции $z = x^3 + 3x^2 + 6xy + y^2$ по любому направлению равна нулю.

7. Уравнения движения материальной точки: $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ С какой скоростью увеличивается расстояние от этой точки до начала координат? $\left(\text{Ответ: } \dfrac{1 + 2t^2 + 3t^4}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}.\right)$

8. Два парохода, вышедшие одновременно из пункта A, движутся один на север, другой — на северо-восток. Скорость движения пароходов 20 км/ч и 40 км/ч. С какой скоростью увеличивается расстояние между ними? (*Ответ:* $20\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$ км/ч.)

9. Записать уравнения силовых линий векторного поля $\mathbf{a}(M) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$. (*Ответ:* $y = C_1x$, $z = C_2x^2$.)

10. Векторное поле определяется силой, модуль которой обратно пропорционален расстоянию от точки ее приложения до плоскости Oxy. Сила направлена к началу координат. Найти дивергенцию этого поля. (*Ответ:* $-k/\left(z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$, где k — коэффициент пропорциональности.)

11. Твердое тело вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Вектор линейной скорости $\mathbf{v}$ имеет проекции на оси координат: $v_x = -\omega y$, $v_y = \omega x$, $v_z = 0$. Найти: а) ротор вектора $\mathbf{v}$; б) циркуляцию вектора $\mathbf{v}$ по окружности $x^2 + y^2 = a^2$ в положительном направлении обхода относительно орта $\mathbf{k}$. (*Ответ:* а) $(0, 0, 2\omega)$; б) $2\pi a^2\omega$.)

ПРИЛОЖЕНИЕ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА «КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ» (2 ЧАСА)

1. Изменить порядок интегрирования.

1.1. $\int_0^2 dx \int_{4-2x^2}^{4-x^2} b(x, y)dy.$

1.2. $\int_0^3 dx \int_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} b(x, y)dy.$

1.3. $\int_0^4 dy \int_{3\sqrt{y}/2}^{\sqrt{25-y^2}} b(x, y)dx.$

1.4. $\int_0^1 dy \int_{2y+1}^{4-y^2} b(x, y)dx.$

1.5. $\int_0^4 dy \int_{y/4+1}^{7-y} b(x, y)dx.$

1.6. $\int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} b(x, y)dy.$

1.7. $\int_0^2 dx \int_{x^2/4}^{2\sqrt{x}} b(x, y)dy.$

1.8. $\int_{-2}^4 dy \int_{y^2/2}^{y+4} b(x, y)dx.$

1.9. $\int_{-2}^1 dy \int_{y^2}^4 b(x, y)dx.$

1.10. $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{y^2+2} b(x, y)dx.$

1.11. $\int_0^2 dx \int_{2x}^{x^2/2+2} b(x, y)dy.$

1.12. $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{2-x} b(x, y)dy.$

1.13. $\int_0^{\pi/4} dy \int_y^{\pi/2-y} b(x, y)dx.$

1.14. $\int_0^2 dx \int_{3x^2}^{12x} b(x, y)dy.$

1.15. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} b(x, y)dx.$

1.16. $\int_0^1 dx \int_{-1}^{x^2+1} b(x, y)dy.$

1.17. $\int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} b(x, y)dy.$

1.18. $\int_0^1 dx \int_{-x^2}^{x^2} b(x, y)dy.$

1.19. $\int_0^1 dy \int_{2y^2}^{3-y} b(x, y)dx.$

1.20. $\int_{-1}^0 dy \int_{-1-y}^{1+y} b(x, y)dx.$

1.21. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-g^2}}^{1-y} b(x, y)dx.$

1.22. $\int_0^1 dx \int_{2x^2}^{3-x} b(x, y)dy.$

1.23. $\int_0^1 dy \int_{1-y}^{2-2y} b(x, y)dx.$

1.24. $\int_0^4 dy \int_{y/2+1}^{3y/2+4} b(x, y)dx.$

1.25. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{1+x}}^{1+x} b(x, y)dy.$

1.26. $\int\limits_{0}^{4/5} dy \int\limits_{1+y}^{3-3y/2} b(x, y)dx.$

1.27. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{y} b(x, y)dx.$

1.28. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-x}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} b(x, y)dy.$

1.29. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2-y}^{2y+1} b(x, y)dx.$

1.30. $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x}} b(x, y)dy.$

2. Вычислить тройной интеграл по области V, ограниченной заданными поверхностями.

2.1. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz;$ $\quad V$: $y=0,\ z=0,\ z=2,\ x^2+y^2=2x.$

2.2. $\iiint\limits_V (x^2+z^2)dxdydz,$ $\quad V$: $y=2,\ x^2+z^2=2y.$

2.3. $\iiint\limits_V zdxdydz;$ $\quad V$: $z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=2.$

2.4. $\iiint\limits_V ydxdydz;$ $\quad V$: $y=4(x^2+z^2),\ y=4.$

2.5. $\iiint\limits_V ydxdydz;$ $\quad V$: $y^2=x^2+z^2,\ y=2.$

2.6. $\iiint\limits_V (4-x-y)dxdydz,$ $\quad V$: $x^2+y^2=4,\ z=0,\ z=1.$

2.7. $\iiint\limits_V dxdydz,$ $\quad V$: $z=\sqrt{4-x^2-y^2},\ x^2+y^2=3z.$

2.8. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,$ $\quad V$: $x^2+y^2+z^2 \geqslant a^2,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 4a^2.$

2.9. $\iiint\limits_V xdxdydz,$ $\quad V$: $z=1-\sqrt{x^2+y^2},\ z \geqslant 0.$

2.10. $\iiint\limits_V ydxdydz,$ $\quad V$: $z=1-(x^2+y^2),\ z \geqslant 0.$

2.11. $\iiint\limits_V dxdydz,$ $\quad V$: $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ z=\sqrt{x^2+y^2}.$

2.12. $\iiint\limits_V 5dxdydz,$ $\quad V$: $z=2-(x^2+y^2),\ z=x^2+y^2.$

2.13. $\iiint\limits_V (x^2+1)dxdydz,$ $\quad V$: $x^2+y^2=1,\ z=x^2+y^2,\ z \geqslant 0.$

2.14. $\iiint\limits_V (z^2+1)dxdydz,$ $\quad V$: $z^2=x^2+y^2,\ z \geqslant 0,\ z \leqslant 1.$

2.15. $\iiint\limits_V \frac{e^{\sqrt{y^2+z^2}}}{y^2+z^2}dxdydz,$ $\quad V$: $y^2+z^2=1,\ x^2=y^2+z^2,\ x \geqslant 0.$

2.16. $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z)dxdydz,$ $\quad V$: $x^2+y^2=9,\ z \geqslant 0,\ z \leqslant 3.$

2.17. $\iiint\limits_V \frac{ze^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}dxdydz$, V: $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geqslant 0$.

2.18. $\iiint\limits_V y^2 dxdydz$, V: $x^2+y^2=1$, $z^2=x^2+y^2$, $z \geqslant 0$.

2.19. $\iiint\limits_V \frac{z^2 dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, V: $x^2+y^2+z^2 \geqslant 1$, $x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$, $z \geqslant 0$.

2.20. $\iiint\limits_V dxdydz$, V: $x^2+y^2=4$, $z=5-(x^2+y^2)$, $z \geqslant 0$.

2.21. $\iiint\limits_V \frac{zdxdydz}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, V: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $z \geqslant 0$.

2.22. $\iiint\limits_V (x-2)dxdydz$, V: $x=6(y^2+z^2)$, $y^2+z^2=3$, $x=0$.

2.23. $\iiint\limits_V (y+1)dxdydz$, V: $y=3\sqrt{x^2+z^2}$, $x^2+z^2=36$, $y=0$.

2.24. $\iiint\limits_V zdxdydz$, V: $z=5(x^2+y^2)$, $x^2+y^2=2$, $z=0$.

2.25. $\iiint\limits_V (x+3)dxdydz$, V: $2x=y^2+z^2$, $y^2+z^2=4$, $x=0$.

2.26. $\iiint\limits_V (x^2+z^2)dxdydz$, V: $y^2=x^2+z^2$, $y=4$.

2.27. $\iiint\limits_V (y^2+z^2)dxdydz$, V: $x=y^2+z^2$, $x=9$.

2.28. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, V: $2z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=4$, $z=0$.

2.29. $\iiint\limits_V (x+4)dxdydz$, V: $2x=y^2+z^2$, $y^2+z^2=4$, $x=0$.

2.30. $\iiint\limits_V (y-3)dxdydz$, V: $4y=\sqrt{x^2+z^2}$, $x^2+z^2=16$, $y=0$.

3. Проверить, является ли данное выражение полным дифференциалом функции $u=u(x, y)$. Найти функцию $u=u(x, y)$.

3.1. $(\sin^2 y - y\sin 2x + 1/2)dx + (x\sin 2y + \cos^2 x + 1)dy$.

3.2. $(y/x + \ln y + 2x)dx + (\ln x + x/y + 1)dy$.

3.3. $(x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$.

3.4. $(y/\sqrt{1-x^2y^2} + x^2)dx + (x/\sqrt{1-x^2y^2} + y)dy$.

3.5. $\left(\frac{x}{x^2+y^2} + 2x\right)dx + \left(\frac{y}{x^2+y^2} - 2y\right)dy$.

3.6. $\left(\frac{y}{1+x^2y^2} - 1\right)dx + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} - 10\right)dy$.

3.7. $(y^2e^{xy^2} + 3)dx + (2xye^{xy^2} - 1)dy$.

3.8. $(\sin x + \cos x\cos y/\sin^2 x)dx + (\sin y/\sin x - \cos y)dy$.

3.9. $\dfrac{1-y}{x^2 y}\,dx + \dfrac{1-2x}{xy^2}\,dy.$

3.10. $\left(\dfrac{y^2}{(x+y)^2} - \dfrac{1}{x}\right)dx + \left(\dfrac{x^2}{(x+y)^2} + \dfrac{1}{y}\right)dy.$

3.11. $(3x^2y - y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy.$

3.12. $\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{y}{x^2}\right)dx + \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{y^2}\right)dy.$

3.13. $\left(\dfrac{y}{x^2+y^2} - 1\right)dx - \dfrac{x}{x^2+y^2}\,dy.$

3.14. $(3x^2 - 2xy + y^2)dx + (2xy - x^2 - 3y^2)dy.$

3.15. $(\sin 2x - 2\sin x \sin y - 12x^2y)dx + (\sin 2y + 2\cos x \cos y - 4x^3)dy.$

3.16. $(12x^2y + 1/y^2)dx + (4x^3 - 2x/y^3)dy.$

3.17. $(2xy - 1/x^2)dx + (x^2 - 2/y^3)dy.$

3.18. $\left(e^{x} - \dfrac{2}{x^3y}\right)dx + \left(\sin 3y - \dfrac{1}{x^2y^2}\right)dy.$

3.19. $(2/x^2 + \cos^2 y)dx + (y - x\sin 2y)dy.$

3.20. $(\cos x - 2xy)dx + (-3\sin y - x^2)dy.$

3.21. $(2xy - 14e^y \sin x \cos x)dx + (x^2 + 7e^y \cos^2 x)dy.$

3.22. $(1/\cos^2 x + y^3)dx + 3xy^2dy.$

3.23. $(1/x + \sin y)dx + x\cos y\,dy.$

3.24. $(1/x^2 + 1/y)dx = ((1-x)/y^2)dy.$

3.25. $(x + y\sin^2 y)dx + (1 + x\sin^2 y + xy\sin 2y)dy.$

3.26. $(e^{x-y} + y\cos xy - 6x)dx + (x\cos xy - e^{x-y})dy.$

3.27. $\left(\dfrac{2x}{3+x^2+y^2} - 12x^2y^2 + 3\right)dx + \left(\dfrac{2y}{3+x^2+y^2} - 8x^3y + 4\right)dy.$

3.28. $(\cos y + y\cos x - 6xy^2)dx + (\sin x - x\sin y - 6x^2y)dy.$

3.29. $(ye^{xy} - 2x\sin(x^2 - y^2))dx + (xe^{xy} + 2y\sin(x^2 - y^2))dy.$

3.30. $(x/\sqrt{1+x^2+y^2} + 6x^2y^3 - 3)dx + (y/\sqrt{1+x^2+y^2} +$
$+ 6x^3y^2 + 8y)dy.$

4. Вычислить криволинейный интеграл вдоль заданной дуги L.

4.1. $\int\limits_L x\,dy - y\,dx$, L: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

4.2. $\int\limits_{L_{AB}} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, L_{AB}: $y = |x|$ от точки $A(-1,\ 1)$ до точки $B(2,\ 2)$.

4.3. $\int\limits_{L_{AB}} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, L_{AB}: $y = x^2$ от точки $A(-1,\ 1)$ до точки $B(1,\ 1)$.

4.4. $\int\limits_{L_{AB}} \sin y\,dx - \sin x\,dy$, L_{AB}: отрезок прямой, заключенной между точками $A(0,\ \pi)$ и $B(\pi,\ 0)$.

4.5. $\int\limits_{L_{AB}} x\,dy - y\,dx$, L_{AB}: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ от точки $A(2\pi a,\ 0)$ до точки $B(0,\ 0)$.

4.6. $\int\limits_{L_{ABC}} xdy + ydx$, L_{ABC} — контур треугольника с вершинами $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$.

4.7. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{y}{x} dx + xdy$, L_{AB}: $y = \ln x$ от точки $A(1, 0)$ до точки $B(e, 1)$.

4.8. $\int\limits_{L_{OA}} xe^{x^1}dy + ydx$, L_{OA}: $y = x^2$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$.

4.9. $\int\limits_{L_{AB}} (x^2 + y)dx + (x + y^2)\,dy$, L_{AB} — отрезок прямой, заключенный между точками $A(1, 2)$ и $B(3, 5)$.

4.10. $\int\limits_{L_{AB}} (xy - 1)dx + x^2ydy$, L_{AB} — отрезок прямой, заключенный между точками $A(1, 0)$ и $B(0, 2)$.

4.11. $\int\limits_{L_{AB}} \cos ydx - \sin xdy$, L_{AB} — отрезок прямой, заключенный между точками $A(2, -2)$ и $B(-2, 2)$.

4.12. $\int\limits_{L_{OAB}} xdy + ydx$, L_{OAB} — контур треугольника с вершинами $O(0, 0)$, $A(3, 0)$, $B(0, 2)$.

4.13. $\int\limits_{L_{OAB}} (x + y)dl$, L_{OAB} — контур треугольника с вершинами $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(0, 2)$.

4.14. $\int\limits_{L}(x + y)dl$, L — первый лепесток лемнискаты Бернулли $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

4.15. $\oint\limits_{L} \sqrt{x^2 + y^2}\, dl$, L — окружность $x^2 + y^2 = ax$.

4.16. $\int\limits_{L} y^2dl$, L — первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

4.17. $\int\limits_{L_{OB}} xydx + (y - x)dy$, L_{OB}: $y = x^2$ от точки $O(0, 0)$ до точки $B(1, 1)$.

4.18. $\int\limits_{L_{OA}} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, L_{OA} — отрезок прямой, соединяющий точки $O(0, 0)$ и $A(1, 2)$.

4.19. $\int\limits_{L_{AB}} 2xdy + ydx$, L_{AB}: $x = y^2$ от точки $A(1, 1)$ до точки $B(4, 2)$.

4.20. $\int\limits_{L} \frac{dl}{x^2 + y^2 + z^2}$, L — первый виток винтовой линии $x = 4\cos t$, $y = 4 \sin t$, $z = 3t$.

4.21. $\oint\limits_{L} ye^x dl$, L — окружность $x^2 + y^2 = 3$.

4.22. $\oint (2x+y^2)dl$, L — окружность $x^2+y^2=1$.

4.23. $\oint\limits_L (x^2+y^2)\,dl$, L — окружность $x=2\cos t$, $y=2\sin t$.

4.24. $\int\limits_L \dfrac{x^2dl}{\sqrt{x^2+16y^2}}$, L — эллипс $x=4\cos t$, $y=\sin t$.

4.25. $\int\limits_{L_{OAB}} (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$, L_{OAB} — контур треугольника с вершинами $O(0,\ 0)$, $A(1,\ 0)$, $B(0,\ 1)$.

4.26. $\int\limits_L (\arcsin y - x^2)dl$, L — дуга окружности $x=\cos t$, $y=\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant \pi/4)$.

4.27. $\int\limits_{L_{AB}} x^2y dx + ye^{x+2}dy$, L_{AB} — отрезок прямой, заключенный между точками $A(1,\ 1)$ и $B(2,\ 3)$.

4.28. $\int\limits_{L_{AB}} ydx+\dfrac{x}{y}dy$, L_{AB} — дуга кривой $y=e^{-x}$ от точки $A(0,\ 1)$ до точки $B(1,\ 2)$.

4.29. $\int\limits_{L_{OA}} 2xydx+x^2dy$, L_{OA}: $y=x^3$ от точки $O(0,\ 0)$ до точки $A(1,\ 1)$.

4.30. $\int\limits_{L_{AB}} (xy+x^2)dl$, L_{AB} — отрезок прямой, заключенный между точками $A(1,\ 1)$ и $B(3,\ 3)$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Учебники и учебные пособия

1. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.— М.: Наука, 1981.— 448 с.

2. *Жевняк Р. М., Карпук А. А.* Высшая математика: В 5 ч.— Мн.: Выш. шк., 1984 - 1988.— Ч. 3.— 1985. - 208 с.; Ч. 4.— 1987.— 240 с.

3. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа: В 2 ч.— М.: Наука, 1971 1973.— Ч. 2.— 1973.— 448 с.

4. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа: В 2 т.— М.: Высш. шк., 1981.— Т. 2.— 576 с.

5. *Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 2 т.— М.: Наука, 1967—1970. Т. 2.— 1970. - 671 с.

6. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2 т.— М.: Наука, 1985.— Т. 2.— 576 с.

Сборники задач и упражнений

7. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа.— М.: Наука. 1985.— 416 с.

8. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. — М.: Высш. шк., 1986.— Ч. 2.— 464 с.

9. *Кузнецов Л. А.* Сборник заданий по высшей математике: Типовые расчеты.— М.: Высш. шк., 1983.— 176 с.

10. *Лихолетов И. И., Мацкевич И. П.* Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике.— Мн.: Выш. шк., 1976.— 456 с.

11. Сборник задач по курсу высшей математики / Г. И. Кручкович, Н. И. Гутарина, П. Е. Дюбюк и др.; Под ред. Г. И. Кручковича.— М.: Высш. шк., 1973.— 576 с.

12. Сборник задач по математике для втузов: В 2 ч. / В. А. Болгов, Б. П. Демидович, В. А. Ефименко и др.; Под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича.— М.: Наука, 1981.— Ч. 2.— 368 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Рябушко Антон Петрович, **Бархатов** Виктор Владимирович, **Державец** Вера Владимировна, **Юруть** Иван Ефимович

СБОРНИК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В трех частях

Часть 3

Заведующий редакцией Л. Д. Духвалов. Редактор М. С. Молчанова. Младший редактор В. М. Кушилевич. Художник переплета и художественный редактор Ю. С. Сергачев. Технический редактор Г М. Романчук. Корректор Т. К. Хваль

ИБ № 2893

Сдано в набор 18.04.90. Подписано в печать 11.04.91. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 15,12. Усл. кр.-отт. 15,12. Уч.-изд. л. 17,59. Тираж 15 700 экз. Заказ 357. Цена 2 р. 40 к.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета БССР по печати. 220048, Минск, проспект Машерова, 11

Минский ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат МППО им. Я. Коласа 220005. Минск, ул. Красная, 23.