maΣprof∫.ru

Высшая математика – просто и доступно!

Ряды – рядом!

Экспресс-курс по числовым и степенным рядам

***Научитесь решать* наиболее распространённые задания по числовым и степенным рядам *в самые короткие сроки!* Материал предназначен для** *студентов-заочников и других читателей, нуждающихся в экспресс-подготовке с нулевого (в теме) уровня.*

Автор: Александр Емелин

Оглавление

1. Числовые ряды

Даже сам не ожидал, что вступление окажется столь коротким :)

1.1. Понятие числового ряда

В общем виде числовой ряд можно записать так: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Здесь:
$\sum$ – математический значок суммы;
a_n – ***общий член ряда*** (запомните этот простой термин);
n – переменная-«счётчик».

Запись $\sum_{n=1}^{\infty}$ **означает**, что проводится *суммирование* от 1 до «плюс бесконечности», то есть, сначала у нас $n=1$, затем $n=2$, потом $n=3$, и так далее – до бесконечности. Вместо n иногда используют букву k или m.

Суммирование не обязательно начинается с единицы, в ряде случаев оно может начинаться с нуля $\sum_{n=0}^{\infty}$, двойки $\sum_{n=2}^{\infty}$, либо с произвольного *натурального числа*.

В соответствии с переменной-«счётчиком» любой ряд можно расписать развёрнуто – в виде суммы его ***членов***:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots$ – и так далее, до бесконечности.

Слагаемые $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ – это **ЧИСЛА**. Если все они неотрицательны *(больше либо равны нуля)*, то такой ряд называют ***положительным числовым рядом***.

Пример 1

Записать первые три члена ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)$$

Это уже, кстати, «боевое» задание – на практике довольно часто требуется записать несколько членов ряда.

Сначала $n=1$, тогда: $2 \cdot 1 + 1 = 3$.
Затем $n=2$, тогда: $2 \cdot 2 + 1 = 5$.
Потом $n=3$, тогда: $2 \cdot 3 + 1 = 7$.

Процесс можно продолжить до бесконечности, но по условию требовалось написать только первые три члена, поэтому записываем результат:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) = 3 + 5 + 7 + \ldots$$

Пример 2

Записать первые три члена ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$$

Это пример для самостоятельного решения – **разогреваемся прямо сейчас!** Свериться с образцом можно в конце книги.

Не составляет особого труда расписать и «страшный» на вид ряд:

Пример 3

Записать первые три члена ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(4n-3)\cdot 5^n}$$

На самом деле задание выполняется устно: **мысленно подставляем в общий член ряда** сначала $n=1$, потом $n=2$ и $n=3$. В итоге:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(4n-3)\cdot 5^n}=\frac{\sqrt{2}}{1\cdot 5^1}+\frac{\sqrt{3}}{5\cdot 5^2}+\frac{\sqrt{4}}{9\cdot 5^3}+\ldots$$

Полученные члены ряда лучше не упрощать, то есть не выполнять действия:

$$\frac{\sqrt{2}}{1\cdot 5^1}=\frac{\sqrt{2}}{5},\quad \frac{\sqrt{3}}{5\cdot 5^2}=\frac{\sqrt{3}}{125},\quad \frac{\sqrt{4}}{9\cdot 5^3}=\frac{2}{1125}.$$

Почему? Запись $\frac{\sqrt{2}}{1\cdot 5^1}+\frac{\sqrt{3}}{5\cdot 5^2}+\frac{\sqrt{4}}{9\cdot 5^3}+\ldots$ гораздо проще и удобнее проверять преподавателю. Да и самим закономерность лучше виднА – не запутаетесь. Кстати, **результат целесообразно перепроверить**, т.е. заново и ЕЩЁ ВНИМАТЕЛЬНЕЕ подставить значения «эн». Времени займёт немного, а от ошибок убережет наверняка.

Иногда встречается обратное задание

Пример 4

Записать сумму в свёрнутом виде с общим членом ряда

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+\ldots$$

Здесь нет какого-то конкретного алгоритма решения, *закономерность нужно просто увидеть*. В данном случае:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+\ldots=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$$

Для проверки полученный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ полезно «расписать обратно» в развернутом виде – ну а зачем пропускать возможные ошибки там, где их можно 100% не пропустить?

А вот пример чуть сложнее для самостоятельного решения:

Пример 5

Записать сумму $\frac{2}{\sqrt[5]{7}}+\frac{4}{\sqrt[5]{14}}+\frac{8}{\sqrt[5]{21}}+...$ в свёрнутом виде с общим членом ряда и выполнить проверку, расписав первые три члена.

1.2. Сходимость и расходимость числовых рядов

Любой числовой ряд либо ***сходится***, либо ***расходится***. Что это значит?

1) **Ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **сходится**. Это значит, что бесконечная сумма равна некоторому *конечному числу* S: $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+...=S$. Пожалуйста: $\sum_{n=1}^{\infty} 0^n=0+0+0+...=0$ – этот ряд сходится и его сумма равна нулю. В качестве более содержательного и известного примера сходящегося ряда можно привести *бесконечно убывающую геометрическую прогрессию*, известную нам ещё со школы, например: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+...$. Сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии можно вычислить по формуле: $S=\frac{b_1}{1-q}$, где b_1 – первый член прогрессии, а $-1<q<1$ – *основание* прогрессии.

В данном случае: $b_1=1,\ q=\frac{1}{4}$. Таким образом:
$S=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+...=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$. Получено конечное число, значит, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ сходится, что и требовалось проверить.

***! Если вам не понятно**, как преобразована трёхэтажная дробь, **обязательно** загляните в Приложение **Школьные формулы**!*

2) **Ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **расходится**. Это значит, что бесконечная сумма равна бесконечности: $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+...=\infty$ либо её вообще *не существует*, как, например, у ряда:
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n=-1+1-1+1-1+...$ – вот, кстати, и пример с отрицательными членами.

Хороший образец расходящегося числового ряда встретился в Примере 1: $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)=3+5+7+...$. Здесь совершенно понятно, что каждый следующий член ряда – больше, чем предыдущий, поэтому $3+5+7+...=\infty$, следовательно, ряд расходится. Ещё более тривиальный пример: $\sum_{n=1}^{\infty}1^n=1+1+1+...$

И одна из главных задач темы – это исследование ряда на сходимость

Чем мы и будем заниматься. Точнее, уже начали, поскольку один из очевидных способов такого исследования – это **прямое вычисление суммы ряда**. Если в результате будет получено *конечное* число, то ряд **сходится**, если *бесконечность* либо суммы *не существует*, то ряд **расходится**.

1.3. Как найти сумму ряда?

Хороший вопрос. Дело за хорошим ответом :) Частный пример с геометрической прогрессией мы только что рассмотрели, и сейчас разовьём тему, познакомившись заодно с простейшими свойствами рядов:

Пример 6

Найти сумму ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\cdot 3^n+4^n}{6^n}\right)$$

Решение: представим наш ряд в виде суммы двух рядов, распишу подробно:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\cdot 3^n+4^n}{6^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\cdot 3^n}{6^n}+\frac{4^n}{6^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{4}{6}\right)^n\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Почему **в данном** случае так можно сделать? Выполненные действия основаны на двух очевидных свойствах:

1) Если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S_1$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=S_2$, то будут сходиться и ряды, составленные из их сумм / разностей: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=S_1+S_2$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=S_1-S_2$. При этом существенно то обстоятельство, что речь идёт о **сходящихся** рядах. В нашём примере мы **заранее знаем**, что обе геометрические прогрессии сойдутся, а значит, без всяких сомнений раскладываем исходный ряд в сумму двух рядов.

2) Второе свойство ещё прозрачнее. Константу k можно вынести за пределы ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}ka_n=k\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, и это **не повлияет** на его сходимость или расходимость. Зачем выносить? Чтобы «не мешалась под ногами». Но, иногда, кстати, наоборот – удобнее этого не делать.

На чистовик решение можно оформить так:
$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\cdot 3^n+4^n}{6^n}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=$$
$$=2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right)+\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^3}{3^3}+\ldots+\frac{2^n}{3^n}+\ldots=(*)$$

***Значок (*) обозначает**, что решение прервано для промежуточных объяснений*

Дважды используем формулу нахождения суммы *бесконечно убывающей геометрической прогрессии*: $S=\frac{b_1}{1-q}$, где b_1 – первый член прогрессии, q – её основание. У первого ряда $b_1=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$, у второго $b_1=\frac{2}{3}$, $q=\frac{2}{3}$, и решение быстро завершается:

$$(*)=2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}=2\cdot1+2=4$$

Ещё раз призываю заглянуть в *Приложение* ***Школьные формулы*** и хорошо разобраться с упрощением многоэтажных дробей – такой акробатики будет много!

Ответ: сумма ряда $S=4$

Аналогичный пример для самостоятельного решения:

Пример 7

Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8^n-3^{n+1}}{10^n}\right)$$

Каких-либо особых изысков в прогрессиях нет, но однажды мне попался необычный ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\ln^n 2.$, который может застать врасплох неискушенного человека. Это… тоже бесконечно убывающая геометрическая прогрессия! Действительно, $q=\ln 2\approx 0{,}69$, и сумма рассчитывается буквально за пару мгновений: $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{1}{1-\ln 2}\approx 3{,}26$.

Однако школу в сторону. **Строгое определение** сходимости и расходимости ряда в теории даётся через так называемые ***частичные суммы*** ряда. Частичные – значит неполные. Распишем частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$:

$S_1=a_1$
$S_2=a_1+a_2$
$S_3=a_1+a_2+a_3$
…
и особую роль играет частичная сумма «эн» членов ряда:
$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$

Если предел частичных сумм произвольного числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ равен *конечному* числу: $\lim_{n\to\infty}S_n=S$, то ряд ***сходятся***. Если же предел $\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$, либо его не существует, то ряд ***расходится***. Значение S (конечное или бесконечное) называют ***суммой ряда***.

Вернёмся к демонстрационному ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{4^n}+...$ и распишем его частичные суммы:

$S_1=1$

$S_2=1+\frac{1}{4}$

$S_3=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}$

...

$S_n=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{4^n}$

Предел частичных сумм $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{4^n}\right)$ – есть в точности бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с суммой $S=\frac{4}{3}$. Собственно, и сама формула $S=\frac{b_1}{1-q}$ – это прямое следствие вышеизложенных теоретических выкладок.

Таким образом, прорисовывается **общий алгоритм решения нашей задачи**: чтобы найти сумму ряда, нужно составить его «энную» частичную сумму S_n и вычислить предел $S=\lim_{n\to\infty}S_n$. Посмотрим, как это осуществляется на практике:

Пример 8

Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

Решение: на первом шаге нужно разложить *общий член ряда* в сумму дробей. Для этого используем ***метод неопределённых коэффициентов***. Представим общий член ряда в виде суммы дробей:

$\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{A}{2n+1}+\frac{B}{2n+3}$, где A и B – *пока ещё* неизвестные коэффициенты

Приведём правую часть к общему знаменателю:

$\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{A(2n+3)+B(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$, после чего избавляемся от знаменателей:

$1=2An+3A+2Bn+B$

«Развернём» уравнение в привычном порядке: $2An+3A+2Bn+B=1$ и отметим коэффициенты при соответствующих степенях:

$$\boxed{2A}n+3A+\boxed{2B}n+B=\boxed{0}\cdot n+1$$

откуда следует система: $\begin{cases}2A+2B=0\\3A+B=1\end{cases}$

Из 1-го уравнения выразим $B=-A$ и подставим во 2-е уравнение:

$3A-A=1$, следовательно: $2A=1 \quad\Rightarrow\quad A=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad B=-\frac{1}{2}$

Таким образом, общий член ряда раскладывается в следующую сумму:

$$a_n=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{A}{2n+1}+\frac{B}{2n+3}=\frac{\frac{1}{2}}{2n+1}+\frac{-\frac{1}{2}}{2n+3}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

Сразу же приведём трофей к общему знаменателю, выполнив тем самым проверку:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2n+3-(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}\right)=\frac{2n+3-2n-1}{2(2n+1)(2n+3)}=$$

$=\frac{2}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ – в результате получен исходный общий член, значит, разложение в сумму дробей проведено успешно.

Теперь составим частичную сумму $S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_{n-1}+a_n$. Вообще, это делается устно, но один раз я максимально подробно распишу, что откуда взялось:

$$a_1=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot1+1}-\frac{1}{2\cdot1+3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$

$$a_2=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot2+1}-\frac{1}{2\cdot2+3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$$

$$a_3=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot3+1}-\frac{1}{2\cdot3+3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)$$

Как записать a_n совершенно понятно, но вот чему равен предыдущий член a_{n-1}?

В общий член ряда $a_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$ **ВМЕСТО** n подставляем $n-1$:

$$a_{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2(n-1)+1}-\frac{1}{2(n-1)+3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n-2+1}-\frac{1}{2n-2+3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

Почти все слагаемые частичной суммы магически сокращаются:

$$S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_{n-1}+a_n=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+...+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\underbrace{-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{5}}}\underbrace{-\cancel{\frac{1}{7}}+\cancel{\frac{1}{7}}}\underbrace{-\cancel{\frac{1}{9}}+...+\cancel{\frac{1}{2n-1}}}\underbrace{-\cancel{\frac{1}{2n+1}}+\cancel{\frac{1}{2n+1}}}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

Если оформляете задачу от руки, то прямо так и делайте пометки карандашом!

Осталось вычислить элементарный предел и узнать сумму ряда:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\overset{\to 0}{\frac{1}{2n+3}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

Ответ: $S=\frac{1}{6}$, как вариант, можно записать так: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{6}$

Пример 9

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$ – вычислить сумму самостоятельно.

Примерный образец чистового оформления решения в конце книги.

Немного усложним задачу:

Пример 10

Найти сумму ряда
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$

Не нужно забывать о том, что ряд может и не сойтись. Но в таких заданиях он, как правило, сходится ☺, **решаем:**

По мотивам предыдущих примеров, попробуем разложить знаменатель на множители. Для этого решим квадратное уравнение *(Приложение* ***Школьные формулы****)*:

$9n^2+12n-5=0$

$D=144+180=324$

$\sqrt{D}=\sqrt{324}=18>0$, значит, уравнение имеет различные действительные корни:

$n_1=\frac{-12-18}{18}=-\frac{5}{3},\quad n_2=\frac{-12+18}{18}=\frac{1}{3}$

Раскладываем квадратный трёхчлен на множители:

$9n^2+12n-5=9\left(n+\frac{5}{3}\right)\left(n-\frac{1}{3}\right)=3\cdot3\cdot\left(n+\frac{5}{3}\right)\left(n-\frac{1}{3}\right)=(3n+5)(3n-1)=(3n-1)(3n+5)$

– множители удобно расположить в порядке возрастания.

Выполним промежуточную проверку, раскрыв скобки:

$(3n-1)(3n+5)=9n^2-3n+15n-5=9n^2+12n-5$, ОК, и теперь с лёгким сердцем записываем общий член ряда:

$a_n=\frac{6}{9n^2+12n-5}=\frac{6}{(3n-1)(3n+5)}$

Методом неопределённых коэффициентов разложим его в сумму дробей, при этом запись удобно сразу расположить «наоборот»:

$\frac{A}{3n-1}+\frac{B}{3n+5}=\frac{6}{(3n-1)(3n+5)}$

приведём левую часть к общему знаменателю:

$\frac{A(3n+5)+B(3n-1)}{(3n-1)(3n+5)}=\frac{6}{(3n-1)(3n+5)}$

ликвидируем нижние этажи:

$A(3n+5)+B(3n-1)=6$ – скобки можно не раскрывать, и приравняем коэффициенты при соответствующих степенях:

$\begin{cases}3A+3B=0\\5A-B=6\end{cases}$

Для разнообразия я разделю первое уравнение на 3 и выполню *почленное сложение* уравнений: $\begin{cases} A+B=0 \\ 5A-B=6 \end{cases} + \quad \Rightarrow \; 6A=6 \; \Rightarrow \; A=1 \; \Rightarrow \; B=-1$

Коэффициенты получились целые и это радует:

$$a_n = \frac{6}{9n^2+12n-5} = \frac{6}{(3n-1)(3n+5)} = \frac{A}{3n-1} + \frac{B}{3n+5} = \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+5}$$

Обязательно выполним ещё одну промежуточную проверку:

$$\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+5} = \frac{3n+5-(3n-1)}{(3n-1)(3n+5)} = \frac{3n+5-3n+1}{(3n-1)(3n+5)} = \frac{6}{(3n-1)(3n+5)}, \text{ OK.}$$

Составим энную частичную сумму и сократим всё, что можно сократить:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{8}}} + \underbrace{\frac{1}{5} - \cancel{\frac{1}{11}}} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{8}} - \cancel{\frac{1}{14}}} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{11}} - \cancel{\frac{1}{17}}} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{14}} - \cancel{\frac{1}{20}}} + \ldots$$

$$\ldots + \underbrace{\cancel{\frac{1}{3n-10}} - \cancel{\frac{1}{3n-4}}} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{3n-7}} - \cancel{\frac{1}{3n-1}}} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{3n-4}} - \frac{1}{3n+2}} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{3n-1}} - \frac{1}{3n+5}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+5}$$

Как видите, в этот раз противоположные числа оказались далековато друг от друга, и поэтому на практике лучше перестраховаться и записать побольше членов ряда – чтобы наверняка понять, какие слагаемые сократятся, а какие нет. По той же причине крайне желательно выполнять пометки карандашом.

Опыт показывает, что чаще всего студенты испытывают затруднения с «хвостом» суммы. В этой связи ещё раз повторим принцип, по которому записаны члены $a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}$. Отчего ж не повторить?

В общий член ряда $a_n = \dfrac{1}{3n-1} - \dfrac{1}{3n+5}$**:**

– ВМЕСТО «эн» подставляем $n-3$: $a_{n-3} = \dfrac{1}{3(n-3)-1} - \dfrac{1}{3(n-3)+5} = \dfrac{1}{3n-10} - \dfrac{1}{3n-4}$;

– ВМЕСТО «эн» подставляем $n-2$: $a_{n-2} = \dfrac{1}{3(n-2)-1} - \dfrac{1}{3(n-2)+5} = \dfrac{1}{3n-7} - \dfrac{1}{3n-1}$;

– ВМЕСТО «эн» подставляем $n-1$: $a_{n-1} = \dfrac{1}{3(n-1)-1} - \dfrac{1}{3(n-1)+5} = \dfrac{1}{3n-4} - \dfrac{1}{3n+2}$.

На завершающем этапе находим сумму ряда:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \overset{\to 0}{\frac{1}{3n+2}} - \overset{\to 0}{\frac{1}{3n+5}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$$

Ответ: $S = \dfrac{7}{10}$

Изящный ряд для самостоятельного решения:

Пример 11

Найти сумму ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}$$

Что делаем? **1)** раскладываем дробь в сумму, **2)** составляем частичную сумму S_n, **3)** вычисляем $S=\lim_{n\to\infty} S_n$. Решение и ответ в конце книги.

Существуют и более трудные задания, где общий член **раскладывается в сумму трёх дробей** *(см. последние примеры)*, но в «массовых» работах такие вещи не в ходу.

Однако подобный трюк удаётся проделать лишь с малой толикой числовых рядов, и во многих случаях рассмотренная задача требует привлечения серьёзного математического аппарата. Так, для вычисления суммы вроде бы простенького ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ используются функциональные **ряды Фурье**.

Поэтому на практике многие задачи ставятся в более простой формулировке – в них **требуется выяснить, СХОДИТСЯ ЛИ ряд (в принципе) или нет**.

Для этого используются специальные ***признаки***, которые доказаны теоретически. Существуют ***необходимый признак сходимости ряда***, ***признаки сравнения***, ***признак Даламбера***, ***признаки Коши***, некоторые другие признаки. **Когда какой признак применять?** Это зависит от общего члена a_n, и сейчас мы всё разложим по полочкам:

1.4. Необходимый признак сходимости ряда

Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Обратное в общем случае неверно, т.е., если $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд может как сходиться, так и расходиться. И поэтому этот признак используют для обоснования расходимости ряда:

если общий член ряда не стремится к нулю $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

В частности, возможна ситуация, когда предела не существует вообще, как, например, предела $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$. Вот сразу и доказали расходимость одного ряда!

Вернёмся к ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)$ из Примера 1, и вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(2n+1)=\infty\neq 0$$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)$ расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

Рассмотрим другие стандартные случаи, когда нужно применять этот признак:

Пример 12

Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7n+3}$ на сходимость

Типовая формулировка задачи. В числителе и знаменателе у нас находятся многочлены **одного порядка роста**, и это «прямое показание» к вычислению предела $\lim_{n\to\infty} a_n$, поскольку он заведомо равен конечному числу, отличному от нуля:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{7n+3} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

Для устранения неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ делим числитель и знаменатель на n:

$$(*) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{7n+3}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{7+\frac{3}{n}^{\to 0}} = \frac{1}{7} \neq 0$$

Исследуемый ряд **расходится**, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

Вместо слова «ответ» я привык выделять «вердикт» жирным шрифтом или подчеркивать его карандашом, если выполняю задание от руки.

Пример 13

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-3n+1}{n^2+4}$

Это пример для самостоятельного решения. Здесь числитель *более высокого порядка роста*, чем знаменатель, и поэтому можно сразу сказать, что $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Итак, **когда нам дан ЛЮБОЙ ряд**, **то в первую очередь проверяем** (мысленно или на черновике), **а стремится ли его общий член к нулю?** Если не стремится – оформляем решение по образцу рассмотренных примеров.

Какие типы очевидно расходящихся рядов мы рассмотрели? Сразу понятно, что расходятся ряды вроде $\sum_{n=1}^{\infty} n$ или $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n$. Также расходятся ряды, у которых порядок роста числителя *больше либо равен*, чем порядок роста знаменателя (Примеры 12-13).

Что делать, если $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$? Как я уже отметил выше, **если общий член ряда стремится к нулю, ТО ЭТО ЕЩЕ НЕ ЗНАЧИТ, что ряд сходится** – он может, как сходиться, так и расходиться! И поэтому необходимого признака оказывается *не достаточно* ☺. В таких случаях нужно использовать другие, *достаточные* признаки сходимости, и о них совсем скоро, после важного знакомства….

Знакомьтесь: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

Этот ряд называется ***гармоническим рядом***. Легко видеть, что $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, НО. В теории математического анализа доказано, что **гармонический ряд расходится**:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots = +\infty$$

Пожалуйста, запомните! Это «прима-балерина» числовых рядов. Вместе со своим балетом под названием ***обобщенный гармонический ряд***:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ *(«отсчёт» может начинаться с любого номера, например, с $n=2$).*

1) Данный ряд **расходится** при $\alpha \le 1$.

Например, расходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

2) Данный ряд **сходится** при $\alpha > 1$.

Например, сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. Еще раз подчеркиваю, что почти во всех практических заданиях нам совершенно не важно, чему равна сумма, например, ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, важен сам факт, что он сходится

Эта «пачка» «эталонных» рядов уже исследована в теории и активно используется на практике, то есть, при решении практических примеров можно смело ссылаться, например, на расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ или сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$.

1.5. Признак сравнения с неравенством

Этот признак можно разделить на две части. **Часть первая:**

Рассмотрим два положительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. **Если известно**, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – **сходится**, и, начиная с некоторого номера n, выполнено неравенство $a_n \le b_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **тоже сходится**.

Иными словами, **из сходимости ряда с бОльшими членами следует сходимость ряда с меньшими членами**. На практике неравенство $a_n \le b_n$ часто выполнено вообще для всех значений $n = 1, 2, 3, \ldots$. **И заостряю ваше внимание**, что здесь уже речь идёт исключительно о **положительных** числовых рядах *(с неотрицательными членами)*.

Пример 14

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+2}$

Во-первых, проверяем (мысленно либо на черновике) необходимый признак: $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+n+2}=0$, а значит, «отделаться малой кровью» не удалось.

Заглядываем в «пачку» обобщенного гармонического ряда и, ориентируясь на старшую степень многочлена n^2+n+2, находим похожий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который сходится. Для всех натуральных номеров $n=1, 2, 3, \ldots$ справедливо очевидное неравенство:

$$n^2+n+2>n^2$$

а бОльшим знаменателям соответствуют мЕньшие дроби:

$\frac{1}{n^2+n+2}<\frac{1}{n^2}$, значит, по признаку сравнения, исследуемый ряд **сходится** вместе с «эталонным» рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Если у вас есть какие-то сомнения, то неравенство всегда можно расписать подробно! Распишем последнее неравенство для нескольких номеров «эн»:

$$n=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}<1$$

$$n=2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{8}<\frac{1}{4}$$

$$n=3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{14}<\frac{1}{9}$$

...

и теперь-то уж совершенно понятно, что неравенство $\frac{1}{n^2+n+2}<\frac{1}{n^2}$ выполнено и для всех натуральных номеров «эн».

Проанализируем признак сравнения и прорешанный пример с неформальной точки зрения. Все-таки, почему ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+2}$ сходится? А вот почему. В теории доказано, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, значит, он имеет некоторую *конечную* сумму S:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots=S.$$

Если все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+2}$ **меньше** соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, то ясен пень, что его сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+2}$ **не может быть** *больше* числа S, и тем более, не может равняться бесконечности!

Аналогично легко доказать сходимость «похожих» рядов: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+n^2+5}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+2n^2+3n+7}$ и т.п.

Но, обратите внимание, что во всех случаях в знаменателях у нас находятся «плюсы». Если есть минусы, то признак с неравенством **может и не дать результата**. Например, рассмотрим ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$. Попробуйте аналогично сравнить его со сходящимся рядом $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – выпишите несколько неравенств для первых членов. Вы увидите, что неравенство $a_n \le b_n$ не выполняется *и признак не дает нам ответа*. Придется использовать другой признак, чтобы выяснить, сходится этот ряд или нет.

Для самостоятельного решения:

Пример 15

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{\sqrt{n^3}}$ – исследовать на сходимость

Указание: использовать ***ограниченность синуса***.

Теперь **вторая часть** признака:

Если известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **расходится**, и, начиная с некоторого номера n *(часто с* $n=1$*)*, выполнено неравенство $a_n \ge b_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **тоже расходится**.

Иными словами, **из расходимости ряда с меньшими членами следует расходимость ряда с бОльшими членами**. Неформальный смысл здесь тоже очень прост: сумма расходящегося ряда равна бесконечности $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$, и коль скоро, члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **ещё больше**, то его сумма и подавно бесконечна: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Пример 16

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

Так как $\sqrt{n}$ *более высокого порядка роста*, чем $\ln n$, то:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$, и необходимый признак сходимости нам опять не помогает.
Как оно, впрочем, бывает почти всегда ☺.

Для наглядности последующих объяснений запишу несколько значений натурального логарифма:

$\ln 2 \approx 0{,}69$, $\ln 3 \approx 1{,}10$, $\ln 4 \approx 1{,}39$, $\ln 5 \approx 1{,}61$, и так далее – при $n \to \infty$ логарифм медленно растёт до «плюс» бесконечности.

Анализируя «начинку» ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$, напрашивается его сравнение с расходящимся «эталонным» рядом $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Для $n = 2$ нужное нам неравенство не выполнено:

$$\frac{\ln 2}{\sqrt{2}} \not> \frac{1}{\sqrt{2}}$$

но вот для бОльших номеров всё в ажуре:

$$n = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln 3}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$n = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln 4}{\sqrt{4}} > \frac{1}{\sqrt{4}}$$

$$n = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln 5}{\sqrt{5}} > \frac{1}{\sqrt{5}}$$

...

и вообще: $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$ – для всех «эн», начиная с $n = 3$, значит, по признаку сравнения, исследуемый ряд **расходится** вместе с рядом $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Пример 17

$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$, когда слова излишни :)

Это пример для самостоятельного решения. Подумайте, с каким рядом удобно провести сравнение, порасписывайте неравенства для лучшего понимания.

Как я уже отмечал, рассмотренный признак сравнения помогает далеко не всегда – по той причине, что не всегда удаётся построить желаемое неравенство при сравнении «пациентов» с «эталонными» рядами. Например:

$\frac{1}{n^2 - n} \not< \frac{1}{n^2}$ – при сравнении ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$ со сходящимся рядом $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,

или:

$\frac{1}{n+1} \not> \frac{1}{n}$ – при сравнении ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ с расходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

И тогда на помощь приходит «старший медбрат»:

1.6. Предельный признак сравнения

Это более мощный признак и настоящая «рабочая лошадка» практики:

Рассмотрим два **положительных** числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если предел отношения общих членов этого ряда равен **конечному, отличному от нуля числу**: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$, **то оба ряда сходятся или расходятся одновременно**.

Сразу рассмотрим ряд, для которого не сработал предыдущий признак сравнения:

Пример 18

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$

Сравним данный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Используем предельный признак сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}\right)=1$$ – получено конечное число,

отличное от нуля, значит, исследуемый ряд **сходится** вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Почему для сравнения был выбран именно ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$? Если бы мы выбрали любой другой ряд из «обоймы» обобщенного гармонического ряда, то у нас не получилось бы в пределе *конечного, отличного от нуля* числа (можете поэкспериментировать).

Примечание: *при использовании предельного признака* ***не имеет значения****, в каком порядке составлять отношение общих членов, так, в рассмотренном примере отношение можно было составить и наоборот:* $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2-n}}{\frac{1}{n^2}}$ *– это не изменило бы сути дела.*

Аналогично доказывается расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ при его предельном сравнении с гармоническим рядом. Решение приводить не буду – уж слишком оно элементарно. Лучше что-нибудь поинтереснее…, так, самостоятельно:

Пример 19

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ – **обязательно решаем письменно!**

Большим достоинством предельного признака является то, что он применим не только для многих рядов предыдущего параграфа: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+n^2+5}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+2n^2+3n+7}$ и др., но и похожих рядов, где есть знаки «минус», например: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-n+2}$ – при этом нам не надо расписывать и с чем-то сравнивать сами члены ряда. **Просто берём соответствующие «эталонные» ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ и по трафаретной схеме составляем и решаем пределы!**

Более того, предельный признак работает и в более сложных случаях – когда многочлены есть на обоих этажах, при этом они могут находиться и под корнями.

Алгоритм решения почти такой же – нам нужно подобрать для сравнения подходящий ряд из «обоймы» обобщенного гармонического ряда.

Пример 20

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{\sqrt{2n^4-n+5}}$

Мы видим, что и в числителе и в знаменателе у нас многочлены, причем, в знаменателе многочлен находится под корнем. Как подобрать подходящий «эталон» $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^?}$ для сравнения?

1) Сначала нужно найти *старшую степень знаменателя*. Если бы не было корня, то, понятно, что старшая степень знаменателя равнялась бы четырем. Что делать, когда есть корень? Мысленно или на черновике отбрасываем все члены, кроме старшего: $\sqrt{2n^4}$. Если есть константа, её тоже отбрасываем: $\sqrt{n^4}$. Теперь извлекаем корень: $\sqrt{n^4}=n^2$. Таким образом, старшая степень знаменателя равна **двум**.

2) Выясняем старшую степень числителя. Очевидно, она равна **единице**.

3) Из старшей степени знаменателя вычитаем старшую степень числителя: **2 – 1 = 1**

Таким образом, наш ряд нужно сравнить с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, то есть, с расходящимся гармоническим рядом.

На чистовике эти рассуждения, как правило, не нужны, и очень скоро вы научитесь выполнять такой подбор устно.

Само оформление решения должно выглядеть примерно так, закомментирую ниже каждый шаг:

Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Используем предельный признак сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\overset{(1)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n-1}{\sqrt{2n^4-n+5}}}{\frac{1}{n}}\overset{(2)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{\sqrt{2n^4-n+5}}\overset{(3)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{\sqrt{2n^4-n+5}}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$\overset{(4)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2-n}{n^2}}{\frac{\sqrt{2n^4-n+5}}{n^2}}\overset{(5)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2-n}{n^2}}{\frac{\sqrt{2n^4-n+5}}{\sqrt{n^4}}}\overset{(6)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2-n}{n^2}}{\sqrt{\frac{2n^4-n+5}{n^4}}}\overset{(7)}{=}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}{\sqrt{2-\overset{\to 0}{\frac{1}{n^3}}+\overset{\to 0}{\frac{5}{n^4}}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$ – получено конечное, отличное от нуля число, значит,

исследуемый ряд **расходится** вместе с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

(1) Составляем отношение общих членов.
(2) Избавляемся от четырехэтажности.
(3) Раскрываем в числителе скобки.
(4) Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ устраняем стандартным способом деления числителя и знаменателя на «эн» в старшей степени.
(5) В самой нижней строке подготавливаем n^2 для внесения под корень: $n^2=\sqrt{n^4}$
(6) В знаменателе организуем общий корень.

Примечание: *на практике пункты 5, 6 можно пропустить, я их подробно разжевал для тех, кто не очень понимает, как обращаться с корнями.*

(7) Почленно делим числители на знаменатели и помечаем члены, которые стремятся к нулю.

Пример 21

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-1}{3n^4+2n^2+7}$ – исследовать ряд на сходимость.

Это пример для самостоятельного решения.

По мере накопления опыта, вы будете сразу видеть, сходятся такие ряды или нет. Например, рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^3-4n^2+n+5}$. Ага, 3 – 1 = 2, значит, ряд нужно сравнить со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, и сразу можно сказать, что наш «пациент» тоже сходится. Осталось аккуратно оформить стандартное рутинное решение.

1.7. Признак Даламбера

Работайте, работайте – а понимание придёт потом. Ж.Л. Даламбер

Запрягаем вторую «рабочую лошадку» числовых рядов. И, прежде всего, о предпосылках её эксплуатации. Если предельный признак срабатывает для многочленов и корней, то **признак Даламбера эффективен в тех случаях, когда:**

1) В общий член ряда входит какое-нибудь число в степени, например, 2^n, 3^n, 5^n и т.д. Причем, совершенно не важно, где эта штуковина располагается, в числителе или в знаменателе – важно, что она там присутствует.

2) В общий член ряда входит ***факториал***. Что такое факториал? Ничего особенного, факториал – это всего лишь свёрнутая запись произведения:

$0!=1$
$1!=1$
$2!=1\cdot 2$
$3!=1\cdot 2\cdot 3$
$4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$
$\ldots$
$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$
$(n+1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1)$
$\ldots$

Как и в пункте 1, факториал может располагаться вверху или внизу дроби.

3) Если в общем члене ряда есть «цепочка» множителей, например, $1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)$. Этот случай встречается редко, но при исследовании такого ряда часто допускают ошибку, и я обязательно разберу соответствующий пример!

Кроме того, в «начинке» ряда может встретиться одновременно и степень и факториал, или два факториала, или две степени – важно чтобы там находилось **хоть что-то** из рассмотренных пунктов. К перечисленным весёлостям могут прилагаться многочлены, но это не меняет дела – нужно использовать **признак Даламбера**:

Рассмотрим **положительный числовой ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует предел отношения последующего члена к предыдущему: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$, то:

1) При $D<1$ ряд **сходится**. В частности, ряд сходится, если $D=0$.
2) При $D>1$ ряд **расходится**. В частности, ряд расходится, если $D=\infty$.
3) При $D=1$ **признак не дает ответа**. Нужно использовать другой признак.

Чаще всего $D=1$ получается в том случае, когда признак Даламбера пытаются применить там, где нужно использовать предельный признак сравнения. Можете попробовать взять любой ряд предыдущего параграфа, самое простое $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, и убедиться в этом самостоятельно.

И, наконец, долгожданные задачи:

Пример 22

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{4^n}$

Мы видим, что в общем члене ряда у нас есть 4^n, а это верная предпосылка того, что нужно использовать признак Даламбера. Сначала полное решение затем комментарии:

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{(1)}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^2+(n+1)-1}{4^{n+1}}}{\dfrac{n^2+n-1}{4^n}} \overset{(2)}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{4^n \cdot ((n+1)^2+(n+1)-1)}{4^{n+1}\cdot(n^2+n-1)} \overset{(3)}{=}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{4^n \cdot (n^2+2n+1+n+1-1)}{4\cdot 4^n \cdot (n^2+n-1)} \overset{(4)}{=} \frac{1}{4} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+n-1} \right) = \frac{\infty}{\infty} \overset{(5)}{=}$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\dfrac{n^2+3n+1}{n^2}}{\dfrac{n^2+n-1}{n^2}} \right) \overset{(6)}{=} \frac{1}{4} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+\overset{\to 0}{\dfrac{3}{n}}+\overset{\to 0}{\dfrac{1}{n^2}}}{1+\underset{}{\overset{\to 0}{\dfrac{1}{n}}}-\overset{\to 0}{\dfrac{1}{n^2}}} \right) \overset{(7)}{=} \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4} < 1$$, значит, исследуемый ряд **сходится.**

(1) Составляем отношение следующего члена ряда к предыдущему: $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Из условия мы видим, что общий член ряда $a_n = \frac{n^2+n-1}{4^n}$. Для того, чтобы получить следующий член ряда нужно **ВМЕСТО** n **подставить** $n+1$**:** $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2+(n+1)-1}{4^{n+1}}$

(2) Избавляемся от четырехэтажности дроби.

(3) В числителе раскрываем скобки. В знаменателе выносим четверку из степени.

(4) Сокращаем на 4^n. Константу $\frac{1}{4}$ выносим за знак предела. В числителе в скобках приводим подобные слагаемые.

(5) Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ устраняется стандартным способом – делением числителя и знаменателя на «эн» в старшей степени.

(6) Почленно делим числители на знаменатели, и указываем слагаемые, которые стремятся к нулю.

(7) Упрощаем ответ и делаем пометку, что $\frac{1}{4} < 1$ с выводом о том, что, по признаку Даламбера исследуемый ряд сходится.

В рассмотренном примере в общем члене ряда у нас встретился многочлен 2-й степени. Что делать, если там многочлен 3-й, 4-й или более высокой степени? Дело в том, что если дан многочлен более высокой степени, то возникнут трудности с раскрытием скобок. В этом случае можно применять «турбо»-метод решения. Возьмём похожий ряд и исследуем его на сходимость

Пример 23

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 - n^2 + 3}{4^n \cdot (n+1)}$$

Сначала решение, потом комменты. Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{(1)}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^4 - (n+1)^2 + 3}{4^{n+1}\cdot(n+1+1)}}{\dfrac{n^4 - n^2 + 3}{4^n \cdot (n+1)}} \overset{(2)}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{4^n \cdot ((n+1)^4 - (n+1)^2 + 3)\cdot(n+1)}{4^{n+1}\cdot(n^4 - n^2 + 3)\cdot(n+2)} \overset{(3)}{=}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{4^n \cdot ((n+1)^4 - (n+1)^2 + 3)\cdot(n+1)}{4\cdot 4^n \cdot(n^4 - n^2 + 3)\cdot(n+2)} = \frac{1}{4} < 1$$

1 1

Одного порядка роста

Таким образом, исследуемый ряд **сходится**.

(1) Составляем отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(2) Избавляемся от четырехэтажности дроби.

(3) Рассмотрим трёхчлен $(n+1)^4 - (n+1)^2 + 3$ в числителе и трёхчлен $n^4 - n^2 + 3$ в знаменателе. Мы видим, что в числителе нужно раскрывать скобки и возводить в четвертую степень: $(n+1)^4$, чего делать совершенно не хочется. А для тех, кто не знаком с *биномом Ньютона*, эта задача окажется ещё более трудной. Проанализируем старшие степени: если мы вверху раскроем скобки $(n+1)^4 - (n+1)^2 + 3$, то получим старшую степень n^4. Внизу у нас такая же старшая степень: n^4. По аналогии с предыдущим примером, очевидно, что при почленном делении числителя и знаменателя на n^4 у нас в пределе получится единица. Или, как говорят математики, многочлены $(n+1)^4 - (n+1)^2 + 3$ и $n^4 - n^2 + 3$ – *одного порядка роста*. Таким образом, вполне можно обвести отношение $\frac{(n+1)^4 - (n+1)^2 + 3}{n^4 - n^2 + 3}$ простым карандашом и сразу указать, что эта штука стремится к единице. Аналогично расправляемся со второй парой многочленов: $n+1$ и $n+2$, они тоже *одного порядка роста*, и их отношение стремится к единице.

На самом деле сию «халтуру» можно было провернуть и в предыдущей задаче, но для многочлена 2-й степени такое решение смотрится всё-таки как-то несолидно. Лично я поступаю так: если есть многочлен (или многочлены) 1-й или 2-й степени, то использую «длинный» способ решения (Пример 22). Если попадается многочлен 3-й и более высоких степеней, то чаще применяю «турбо»-метод по образцу Примера 23.

Пример 24

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}$ – исследовать на сходимость.

Примерный образец чистового оформления задачи в конце книги. После чего разберём типовые примеры с факториалами:

Пример 25

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(n+5)\cdot 7^n}$

В общий член ряда входит и степень, и факториал. Ясно, как день, что здесь надо использовать признак Даламбера. Решаем:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\overset{(1)}{=}\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{(n+1+1)!}{(n+1+5)\cdot 7^{n+1}}}{\dfrac{(n+1)!}{(n+5)\cdot 7^n}}\overset{(2)}{=}\lim_{n\to+\infty}\frac{7^n\cdot(n+5)\cdot(n+2)!}{7^{n+1}\cdot(n+6)\cdot(n+1)!}\overset{(3)}{=}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{7^n\cdot(n+5)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{7\cdot 7^n\cdot(n+6)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)}\overset{(4)}{=}\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+5)\cdot(n+2)}{7\cdot(n+6)}\overset{(5)}{=}$$

$$=\frac{1}{7}\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+7n+10}{n+6}=\frac{\infty}{\infty}\overset{(6)}{=}\frac{1}{7}\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{n^2+7n+10}{n^2}}{\dfrac{n+6}{n^2}}=\frac{1}{7}\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\dfrac{7}{n}^{\to 0}+\dfrac{10}{n^2}^{\to 0}}{\dfrac{1}{n}^{\to 0}+\dfrac{6}{n^2}^{\to 0}}=$$

$=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{0}=\frac{1}{7}\cdot\infty=\infty>1$, значит, исследуемый ряд **расходится**.

(1) Составляем отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Повторяем еще раз. По условию, «энный» член ряда: $a_n=\frac{(n+1)!}{(n+5)\cdot 7^n}$. Для того чтобы получить следующий член, **ВМЕСТО** n **нужно подставить** $n+1$, таким образом: $a_{n+1}=\frac{(n+1+1)!}{(n+1+5)\cdot 7^{n+1}}$.

(2) Избавляемся от четырехэтажности дроби.

(3) Внизу «отщипываем» семерку от степени. Факториалы расписываем подробно.

(4) Сокращаем всё, что можно сократить.

(5) Константу $\frac{1}{7}$ выносим за знак предела. В числителе раскрываем скобки.

(6) Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ устраняем стандартным способом – делением числителя и знаменателя на «эн» в старшей степени.

Пример 26

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$

Полное решение и образец оформления в конце книги

И в заключение параграфа обещанный коварный ряд с «цепочкой» множителей:

Пример 27

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$

Сначала для понимания происходящего распишем ряд подробно:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}=\frac{2^1}{1}+\frac{2^2}{1\cdot 3}+\frac{2^3}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2^4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\ldots+\frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}+\ldots$$

Из разложения мы видим, что у каждого следующего члена ряда добавляется дополнительный множитель в знаменателе, поэтому, если «энный» член ряда $a_n=\frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$, то следующий член ряда:

$$a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2(n+1)-1)}=\frac{2^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}.$$

Вот здесь часто «автоматом» допускают ошибку, формально по алгоритму записывая:

$$a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot\cancel{(2(n+1)-1)}}$$

Правильное же решение таково:

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2(n+1)-1)}}{\frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2\cdot 2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)\cdot 2^n}=2\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=0<1$$

Таким образом, исследуемый ряд **сходится.**

1.8. Радикальный признак Коши

Когда эпиграфы излишни, достаточно одного взгляда Огюстена Луи Коши ☺
Радикал – это корень *(не обязательно квадратный)*. И сам признак:

Рассмотрим **положительный числовой ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = D$, то:

1) При $D<1$ ряд **сходится**. В частности, ряд сходится при $D=0$.
2) При $D>1$ ряд **расходится**. В частности, ряд расходится при $D=\infty$.
3) При $D=1$ **признак не дает ответа**. Нужно использовать другой признак.

Когда нужно использовать радикальный признак Коши? Радикальный признак Коши обычно используют в тех случаях, когда корень $\sqrt[n]{a_n}$ «хорошо» извлекается из общего члена. Как правило, это общий член вида $a_n = \alpha(n)^{\beta(n)}$. Есть ещё экзотические вариации, но ими голову забивать не будем.

Пример 28

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3n+2}$ – исследовать ряд на сходимость.

Мы видим, что дробь полностью находится под степенью и эта степень зависит от «эн», следовательно, нужно использовать радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \overset{(1)}{=} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3n+2}} \overset{(2)}{=} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{\frac{3n+2}{n}} \overset{(3)}{=} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3+\overset{\to 0}{\frac{2}{n}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{3} \overset{(4)}{=}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\frac{7n+1}{n}}{\frac{6n+5}{n}}\right)^{3} \overset{(5)}{=} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{7+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}{6+\overset{\to 0}{\frac{5}{n}}}\right)^{3} = \left(\frac{7}{6}\right)^{3} = \frac{343}{216} > 1,$$ значит, исследуемый ряд **расходится**.

(1) Оформляем общий член ряда под корень.

(2) Переписываем то же самое, используя свойство степеней: $\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$.

(3) В показателе почленно делим числитель на знаменатель, указывая, что $\overset{\to 0}{\frac{2}{n}}$

(4) В результате у нас получилась неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{3}$. Здесь можно пойти длинным путем: возвести $7n+1$ в куб, возвести $6n+5$ в куб, потом разделить числитель и знаменатель на n^3 (старшую степень многочленов). Но есть более эффективное решение: **этот приём можно выполнять прямо под степенью-константой**. Поэтому для устранения неопределенности делим числитель и знаменатель на n.

(5) Выполняем почленное деление и указываем слагаемые, которые стремятся к нулю.

Более простой пример для самостоятельного решения:

Пример 29

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$

И еще пара важных типовых примеров из практических работ:

Пример 30

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{(n+1)^2}$ – исследовать ряд на сходимость.

Используем радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}\overset{(1)}{=}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{(n+1)^2}}\overset{(2)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{\frac{n^2+2n+1}{n}}\overset{(3)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{n+2+\frac{1}{n}^{\to 0}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\overset{(4)}{=}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{5n-1}{n}}{\frac{6n+7}{n}}\right)^{n+2}\overset{(5)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5-\frac{1}{n}^{\to 0}}{6+\frac{7}{n}^{\to 0}}\right)^{n+2}\overset{(6)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{n+2}=0<1\text{, значит, ряд } \textbf{сходится}.$$

(1) Помещаем общий член ряда под корень.

(2) Переписываем то же самое, но уже без корня, при этом раскрываем скобки, используя формулу сокращенного умножения: $(n+1)^2=n^2+2n+1$.

(3) В показателе почленно делим числитель на знаменатель и указываем, что $\frac{1}{n}^{\to 0}$.

(4) Получена неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$, и здесь **тоже можно выполнять деление прямо под степенью**. **Но с одной оговоркой**. Если коэффициенты при старших степенях многочленов *одинаковы*, например: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+7}\right)^{n+2}$, то такой фокус не проходит, и надо использовать второй замечательный предел. Но у нас эти коэффициенты *разные* (5 и 6) и поэтому здесь можно (и нужно) разделить оба этажа на n *(кстати, при разных коэффициентах, наоборот – не «прокатывает» второй замечательный предел).*

(5) Собственно выполняем почленное деление и указываем, какие слагаемые у нас стремятся к нулю.

(6) Неопределенность устранена, и простейший предел $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{n+2}$ равняется нулю – по той причине, что основание степени удовлетворяет неравенству $-1<\frac{5}{6}<1$. Если у кого-то есть сомнения, позвозводите $\frac{5}{6}$ в большие степени на калькуляторе.

Пример 31

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+4}{2n-1}\right)^{n^2}$ – исследовать ряд на сходимость.

Это пример для самостоятельного решения.

Иногда для решения предлагается «провокационный» ряд наподобие $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+4}{2n-1}\right)^{2}$ или $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+4}{2n^2-1}\right)^{2}$. Здесь в показателе **нет «эн»**, только константа. Как решать? Возводим числитель и знаменатель в квадрат (получатся многочлены) и используем необходимый признак сходимости в 1-м случае и предельный признак во 2-м. Если же степень высокА, то, конечно, ничего не возводим – все нужные действия выполняем прямо внутри скобок.

Лихо запрягли! – едем дальше:

1.9. Интегральный признак Коши

Или просто интегральный признак. Сформулирую его в несколько упрощенной и вольной формулировке:

Рассмотрим **положительный числовой ряд** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Если существует несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}a_x dx$, то данный ряд сходится или расходится вместе с этим интегралом.

Этот признак тоже *достаточный*, то есть, не обязан нам помогать во «всех случаях жизни». **Основной предпосылкой использования интегрального признака Коши** является тот факт, что общий член ряда похож на удачно интегрируемую функцию. Классика жанра – это интеграл с логарифмом $\ln x$ и его производной $(\ln x)' = \frac{1}{x}$:

Пример 32

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

Как использовать интегральный признак? Сначала берем значок интеграла и переписываем со «счётчика» ряда верхний и нижний пределы: $\int_2^{+\infty}$. Затем под интегралом записываем «начинку» ряда с буковкой «икс»: $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}$. Чего-то не хватает…, ах, да, еще в числителе нужно прилепить значок дифференциала: $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$.

Теперь нужно разобраться с интегралом $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$, при этом возможны три исхода:

1) Если выяснится, что интеграл сходится, то будет сходиться и наш ряд.

2) Если выяснится, что интеграл расходится, то и ряд расходящийся.

3) Если решить интеграл невозможно либо затруднительно, то попытаем счастья с другим признаком. Но в нашем-то примере всё заведомо хорошо.

По сути, всё дело сводится к вычислению **несобственного интеграла**, и оформление примера должно выглядеть примерно так:

Используем интегральный признак:

$$\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=(*)$$

Подынтегральная функция непрерывна на $[2;+\infty)$

$$(*)=\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln|\ln x|\right)\Big|_{2}^{b}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\ln b^{\to+\infty}-\ln\ln 2\right)=+\infty$$

Таким образом, исследуемый ряд **расходится** вместе с соответствующим несобственным интегралом.

Следующий пример для самостоятельного решения:

Пример 33

Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$

Как вариант, логарифм может находиться под корнем, это меняет способа решения. Довольно часто исследование можно провести не единственным способом:

Пример 34

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{(2n+3)^7}}$ – исследовать ряд на сходимость.

Мысленно отбрасывая константы, легко прийти к выводу, что данный ряд можно сравнить со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{n^7}}$ с помощью предельного признака сравнения. Но как устоять перед столь соблазнительным интегралом?! :) Используем интегральный признак Коши:

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[6]{(2x+3)^7}}=(*)$$

Подынтегральная функция непрерывна на $[1;+\infty)$

$$(*)=\int_1^{+\infty}(2x+3)^{-\frac{7}{6}}dx=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}(2x+3)^{-\frac{7}{6}}d(2x+3)=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(-6(2x+3)^{-\frac{1}{6}}\right)\Big|_1^b=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[6]{(2x+3)}}\right)\Big|_1^b=-3\lim_{b\to+\infty}\left(\overset{\to 0}{\frac{1}{\sqrt[6]{(2b+3)}}}-\frac{1}{\sqrt[6]{5}}\right)=-3\left(0-\frac{1}{\sqrt[6]{5}}\right)=\frac{3}{\sqrt[6]{5}}$$

Получено конечное число, значит, исследуемый ряд **сходится** вместе с соответствующим несобственным интегралом.

Внимание! Полученное значение, в данном случае $\frac{3}{\sqrt[6]{5}}$**, не является** суммой ряда**!!!** (почему-то весьма распространённое заблуждение).

Пример 35

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(5n-1)^2}}$

Образец решения в конце книги.

Итак, систематизируем схему работы с положительными рядами:

1) Если «начинкой» ряда являются многочлены (опционально под корнями), то примериваем:

– необходимый признак сходимости (когда порядок роста числителя *больше либо равен* порядку роста знаменателя); сюда же относятся очевидно расходящиеся ряды (не только с многочленами);

– признак сравнения с неравенством (в подходящих случаях; иногда такие ряды дополнительно содержат логарифмы и некоторые другие, часто *ограниченные* функции);

– предельный признак сравнения (чаще всего).

2) Если общий член ряда содержит число в степени, которая зависит от «эн», и/или факториал и/или «цепное» произведение, то запрягаем признак Даламбера.

3) Если из общего члена ряда «хорошо» извлекается корень «энной» степени, то целесообразно использовать радикальный признак Коши.

4) Если общему члену удаётся сопоставить «хорошо решаемый» несобственный интеграл, то уместно использовать интегральный признак Коши.

Иногда признаки используются последовательно, так, при исследовании ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln n}$ сначала нужно обосновать расходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ *(см. Пример 32)* и затем использовать предельный признак сравнения (*признак с неравенством не годится)*.

Кроме того, существует и другие признаки сходимости, но они не нашли широкого применения на практике.

1.10. Знакочередующиеся ряды. Условная и абсолютная сходимость

И в самом деле? – почему члены ряда не могут быть отрицательными? Ещё как могут! Если члены числового ряда принимают как положительные, так и отрицательные значения, то такой ряд называют ***знакопеременным***.

Типичный пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$. Здесь, кстати, сразу можно сказать, что ряд расходится – для него не выполнен необходимый признак (предела $\lim_{n\to\infty} a_n$ попросту не существует).

В рамках данного курса мы рассмотрим *частный случай* знакопеременных рядов, а именно ***знакочередующиеся*** *ряды*. Уже из названия понятно, что после положительного члена такого ряда следует отрицательный член, затем снова положительный и так далее – до бесконечности.

Знакочередование чаще всего обеспечивает множитель $(-1)^n$, который на математическом жаргоне называют «мигалкой». Как вариант, эту функцию выполняют «родные братья» $(-1)^{n-1}$, $(-1)^{n+1}$, $(-1)^{n+2}$, ….. **Подводным камнем** являются «обманки»: $(-1)^{2n}$, $(-1)^{2n+1}$, $(-1)^{2n+3}$ и т.п. – такие множители **не обеспечивают смену знака**. Совершенно понятно, что при любом натуральном «эн»: $(-1)^{2n} = 1$, $(-1)^{2n+1} = -1$, $(-1)^{2n+3} = -1$. Ряды с обманками подсовывают не только особо одаренным студентам, они время от времени возникают «сами собой» в ходе решения степенных рядов, до которых мы ещё доберемся.

Простейшие примеры знакочередующихся рядов:

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, распишем для бОльшей наглядности, например, ряд:

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n = -1+2-3+4-5+6-7+\ldots$ – ну вот, знакочередование налицо.

И перед практическими заданиями я приведу **общую классификацию** «поведения» числовых рядов. **Любой** числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ может *(одно из трёх)*:

1) ***Расходиться***.

2) ***Сходиться условно***. Это означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, но ряд, составленный из *модулей* его членов $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ – расходится. Напоминаю, что модуль «уничтожает» возможные знаки «минус».

3) ***Сходиться абсолютно***. Это означает, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходятся, причём из сходимости последнего следует сходимость первого (**теорема есть такая**).

Примечание: *из вышесказанного автоматически следует, что* ***любой положительный сходящийся ряд*** *является абсолютно сходящимся.*

1.11. Признак Лейбница

Это *достаточный* признак сходимости знакочередующихся рядов:

Если общий член знакочередующегося ряда, *монотонно* убывая по модулю, стремится к нулю, то ряд сходится.

Таким образом, признак подразумевает выполнение следующих трёх условий:

1) Ряд знакочередуется.

2) Члены ряда убывают по абсолютной величине (по модулю): $\lim_{n\to+\infty}|a_n|=0$ *(пусть, начиная хоть с какого-то номера «эн»).*

3) Это убывание *монотонно*, т.е. **каждый следующий** член *по модулю* **не больше**, чем предыдущий: $|a_{n+1}|\le|a_n|$, а чаще **строго меньше**:

$$|a_1|>|a_2|>|a_3|>|a_4|>...>|a_n|>|a_{n+1}|>...$$

Если **все три** условия выполнены, то ряд сходится.

Пример 36

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$

В общий член ряда входит множитель $(-1)^n$, и это наталкивает на естественную мысль проверить выполнение условий признака Лейбница:

1) Знакочередование. Обычно в этом пункте решения ряд расписывают подробно $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n=-1+2-3+4-5+...$ и выносят вердикт «ряд является знакочередующимся».

2) Убывают ли члены ряда по модулю? Для ответа на этот вопрос нужно решить предел $\lim_{n\to+\infty}|a_n|$, который чаще всего является весьма простым.

Как разобраться, чему равен модуль общего члена $|a_n|$? Очень просто. Как известно, модуль уничтожает минусы, поэтому для того, чтобы составить $|a_n|$, нужно просто убрать с крыши проблесковый маячок. В данном случае общий член ряда $a_n=(-1)^n n$. Тупо убираем «мигалку»: $|a_n|=n$, и решаем нужный предел:

$\lim_{n\to+\infty}|a_n|=\lim_{n\to+\infty}(n)=+\infty\ne 0$ – члены ряда **не убывают** по модулю, и из этого факта автоматически следует **расходимость** ряда – по той причине, что предела $\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}(-1)^n n$ не существует *****, т.е. не выполнен необходимый признак сходимости.

***** *Согласно* ***строгому определению*** *предела числовой последовательности, и, кроме того, в данном случае это очевидно.*

Пример 37

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Используем признак Лейбница:

1) Данный ряд является знакочередующимся, и для пущей убедительности расписываем несколько членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$$

2) Убираем «мигалку» и вычисляем предел:

$\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ – члены ряда убывают по модулю.

3) Запишем модуль «энного»: $|a_n|=\frac{1}{n}$ и следующего члена: $|a_{n+1}|=\frac{1}{n+1}$. Для любого номера «эн» справедливо неравенство $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$, то есть каждый следующий член по модулю меньше предыдущего: $|a_{n+1}|<|a_n|$. Как вариант, можно расписать «цепочку»:

$$|a_1|>|a_2|>|a_3|>|a_4|>|a_5|>\ldots>|a_n|>|a_{n+1}|>\ldots$$

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\frac{1}{5}>\ldots>\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}>\ldots$$

Таким образом, убывание *монотонно*.

Все 3 пункта выполнены, значит, ряд сходится по признаку Лейбница.

Но это ещё не всё! Теперь нужно выяснить, ***условно*** он сходится или ***абсолютно***.

Для этого составим ряд из модулей – здесь, как и при вычислении предела, нужно убрать множитель, обеспечивающий знакочередование:

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – полученный ряд расходится (гармонический ряд) – тут даже исследования не потребовалось.

Вывод: так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, то исследуемый ряд **сходится условно**.

Очевидно, что третий «демонстрационный» ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ тоже сходится по признаку Лейбница, и более того, сходится и $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, следовательно, этот знакочередующийся ряд **сходится абсолютно**. Но то, конечно, была разминка:

Пример 38

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)(n^2+2)}$

Используем признак Лейбница:

1) По причине множителя $(-1)^n$ ряд знакочередуется:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)(n^2+2)}=\frac{1}{1\cdot 6}-\frac{1}{2\cdot 11}+\frac{1}{3\cdot 18}-\frac{1}{4\cdot 27}+...$$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(n-1)(n^2+2)}=0$ – члены ряда убывают по модулю.

3) Для любого номера n справедливо неравенство:
$(n+1-1)((n+1)^2+2)>(n-1)(n^2+2)$, а бОльшим знаменателям соответствуют меньшие дроби:
$\frac{1}{((n+1)-1)((n+1)^2+2)}<\frac{1}{(n-1)(n^2+2)}$, то есть, каждый следующий член ряда по модулю меньше, чем предыдущий: $|a_{n+1}|<|a_n|$, а значит, убывание монотонно.

Таким образом, ряд сходится по признаку Лейбница.

Исследуем соответствующий ряд из модулей *(убираем «мигалку»)*:

$$\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n^2+2)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3-n^2+2n-2}$$

Анализируя «начинку» полученного ряда, приходим к выводу, что здесь сподручнее использовать предельный признак сравнения. Сравним данный ряд с «эталонным» сходящимся рядом $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3-n^2+2n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n^2+2n-2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{2}{n^2}}^{\to 0}-\overbrace{\frac{2}{n^3}}^{\to 0}\right)=1$$ – конечное

число, отличное от нуля, значит, ряд $\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|$ сходится вместе с рядом $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3}$.

Вывод: исследуемый ряд сходится абсолютно.

Хитрецы могут решить задачу короче, а именно **сразу** установить сходимость $\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|$, и, сославшись на теорему, сделать вывод о сходимости ряда $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$. Но такая хитрость обычно карается рецензентом, который предписывает провести полное исследование, т.е. сначала рассмотреть знакочередующийся ряд и воспользоваться признаком Лейбница.

Следующие примеры для самостоятельного решения:

Пример 39

Исследовать сходимость числовых рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n+5}$

Не ленимся и обязательно прорешиваем все примеры! Сейчас у вас есть прекрасная возможность закрепить все разобранные ранее признаки. Причём сделать это здесь, сейчас и ~~отмучиться~~ в самые короткие сроки! Вот такой вот я гуманный учитель ☺

И мы продолжаем тренироваться, после чего будет ещё одна важная фишка:

Пример 40

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{3n+1}{4n+7} \right)^{2n}$

Решение: далее я не буду нумеровать пункты признака Лейбница – на практике это делать совсем не обязательно.

Поскольку в общем члене присутствует множитель $(-1)^{n-1}$, то ряд является знакочередующимся.

Внимание! К этому пункту ни в коем случае нельзя относиться формально, машинально записывая, что ряд знакочередуется. Помните об «обманках» $(-1)^{2n}$, $(-1)^{2n+1}$, $(-1)^{2n+3}$, и если они есть, то от них нужно избавиться, получив тем самым «обычный» ряд. Если нарисовался знак «минус», например, $(-1)^{2n+1} = -1$, то просто выносим его за значок ряда и пользуется стандартными признаками сходимости положительных рядов.

И только после этого проверяем, убывают ли члены по модулю:

$$\lim_{n \to +\infty} |a_n| = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3n+1}{4n+7} \right)^{2n} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\frac{3n+1}{n}}{\frac{4n+7}{n}} \right)^{2n} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3 + \overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}{4 + \overset{\to 0}{\frac{7}{n}}} \right)^{2n} = \left(\frac{3}{4} \right)^{+\infty} = 0 \ \text{ – да.}$$

Осталось показать монотонность убывания. Неравенство $|a_{n+1}| < |a_n|$ здесь обосновать трудно и поэтому мы проявим разумную хитрость, расписав несколько конкретных членов и всю цепочку:

$|a_1| > |a_2| > |a_3| > ... > |a_n| > |a_{n+1}| > ...$

$\left(\frac{4}{11} \right)^2 > \left(\frac{7}{15} \right)^4 > \left(\frac{10}{19} \right)^6 > ... > \left(\frac{3n+1}{4n+7} \right)^{2n} > \left(\frac{3n+4}{4n+11} \right)^{2(n+1)} > ...$ – не лишним будет взять в руки калькулятор, и убедиться в справедливости первых неравенств *(хотя, это, конечно, некорректная проверка)*.

Таким образом, ряд сходится по признаку Лейбница.

Теперь исследуем сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{4n+7}\right)^{2n}$$

Просто «вкусняшка» в плане радикального признака Коши:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{4n+7}\right)^{2n}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+1}{4n+7}\right)^{\frac{2n}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+1}{4n+7}\right)^{2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{2}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{3n+1}{n}}{\frac{4n+7}{n}}\right)^{2}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}{4+\overset{\to 0}{\frac{7}{n}}}\right)^{2}=\left(\frac{3}{4}\right)^{2}=\frac{9}{16}<1\text{, значит, ряд }\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\text{ сходится.}$$

Вывод: исследуемый ряд **сходится абсолютно**.

Пример 41

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

Это пример для самостоятельного решения. Вроде бы прост, да не очень ;)

В ряде случаев следует проявить аккуратность с обоснованием *монотонности* убывания. В частности, для ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots$ выполнено условие *нестрогой* монотонности $|a_{n+1}|\le|a_n|$, т.к. первые два члена равны по модулю, и поэтому при оформлении решения следует поставить знак *нестрого* неравенства:

$\frac{1}{(n+1)!}\le\frac{1}{n!}$ – для любого номера «эн».

Более того, члены некоторых рядов могут даже поначалу возрастать!

Пример 42

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 7^n\cdot n^4}{n!}$

Очевидно, что ряд знакочередуется, но вот предел:

$\lim_{n\to+\infty}|a_n|=\lim_{n\to+\infty}\frac{7^n\cdot n^4}{n!}=?!$ – чему он равен? Дело в том, что не существует стандартных приёмов для решения подобных пределов. **ЧТО на бесконечности растёт быстрее** – числитель или знаменатель? Если числитель $7^n\cdot n^4$ растёт быстрее факториала, то $\lim_{n\to+\infty}\frac{7^n\cdot n^4}{n!}=+\infty$. Если факториал растёт быстрее числителя, то он, наоборот – «утянет» предел на ноль: $\lim_{n\to+\infty}\frac{7^n\cdot n^4}{n!}=0$. А может быть этот предел равен какому-нибудь отличному от нуля числу?

Распишем несколько первых модулей:

$$|a_1| = \frac{7^1 \cdot 1^4}{1!} = 7$$

$$|a_2| = \frac{7^2 \cdot 2^4}{2!} = \frac{784}{2}$$

$$|a_3| = \frac{7^3 \cdot 3^4}{3!} = \frac{27783}{6}$$

…

Создается стойкое впечатление, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7^n \cdot n^4}{n!} = +\infty$, но где гарантия, что при очень больших «эн» факториал не «обгонит» числитель и не утащит предел на ноль?

Обратимся к теории математического анализа:

– Факториал растёт быстрее, чем показательная последовательность a^n $(a > 1)$, иными словами: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{10^n}{n!} = 0$ или $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{10^n} = +\infty$. Да хоть миллион в степени «эн», это не меняет дела. То есть, факториал *более высокого порядка роста*.

– Факториал растёт быстрее, чем степенная последовательность n^α $(\alpha > 0)$ или многочлен, иными словами: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{10}}{n!} = 0$ или $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^{10}} = +\infty$. Вместо n^{10} можно подставить какой-нибудь многочлен тысячной степени, это опять же не изменит ситуацию – рано или поздно факториал всё равно «перегонит» и такой страшный многочлен. То есть и здесь факториал *более высокого порядка роста*.

– Факториал растёт быстрее произведения показательной a^n $(a > 1)$ и степенной n^α $(\alpha > 0)$ последовательностей (наш случай). А также быстрее произведения и бОльшего количества таких множителей

– Показательная последовательность a^n $(a > 1)$ растёт быстрее, чем степенная последовательность n^α $(\alpha > 0)$, например: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{10}}{2^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n^{100}} = +\infty$.

А есть ли что-нибудь «круче» факториала? Есть! *Степенно-показательная* последовательность n^n растёт быстрее, чем $n!$. На практике встречается редко, но информация лишней не будет.

Таким образом, наше решение *(вы о нём ещё помните? :))* можно записать так:

$\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7^n \cdot n^4}{n!} = 0$ – члены ряда монотонно убывают по модулю (так как $n!$ более высокого порядка роста, чем $7^n \cdot n^4$). Значит, ряд сходится по признаку Лейбница.

Достаточно! О том, что члены начинают убывать **лишь с некоторого номера «эн»**, лучше благоразумно умолчать – по той причине, что найти этот номер не так-то просто, а лишние вопросы вам ни к чему ;) Ещё труднее показать монотонность убывания, поэтому просто констатируем этот факт. Здесь вас с высокой вероятностью «простят».

Исследуем ряд, составленный из модулей членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n \cdot n^4}{n!}$$

А тут уже работает старый добрый признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{7^{n+1}\cdot(n+1)^4}{(n+1)!}}{\dfrac{7^n\cdot n^4}{n!}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^4\cdot 7^{n+1}\cdot n!}{n^4\cdot 7^n\cdot(n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}\right)^4 \cdot \frac{7\cdot 7^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{7^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{7}{(n+1)} = 0 < 1$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится.

Вывод: исследуемый ряд сходится абсолютно.

Разобранный пример можно решить другим способом, а именно **сразу** исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n \cdot n^4}{n!}$$

Используем признак Даламбера:

…

только что печатал

…

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, и по соответствующей теореме, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 7^n\cdot n^4}{n!}$.

Вывод: исследуемый ряд сходится абсолютно.

Но напоминаю, что при втором способе решения есть риск, что преподаватель не оценит ~~хитро…~~ смекалку студента и забракует задание. А может и не забракует. Ввиду сложности применения признака Лейбница.

Сладкая парочка для закрепления материала:

Пример 43

Исследовать сходимость числовых рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{3^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$

Под буквой «а» ряд из той же оперы, но попроще *(перечитайте справку выше)*

2. Степенные ряды

Они подкрались незаметно :)

2.1. Понятие функционального и степенного ряда

Обычный числовой ряд, которыми мы только что занимались, состоит из чисел:
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ...$$

Все члены ряда $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,...$ – это **ЧИСЛА**.

Функциональный же ***ряд*** состоит из ФУНКЦИЙ:
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + u_4(x) + u_5(x) + ...$$

В ***общий член*** $u_n(x)$ такого ряда помимо многочленов, факториалов и других подарков **непременно** входит буковка «икс». Выглядит это, например, так: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{(n+1)\cdot 2^n}$.
Как и числовой ряд, любой функциональный ряд можно расписать в развернутом виде:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{(n+1)\cdot 2^n} = \frac{\sin x}{2\cdot 2^1} + \frac{\sin x}{3\cdot 2^2} + \frac{\sin x}{4\cdot 2^3} + \frac{\sin x}{5\cdot 2^4} + \frac{\sin x}{6\cdot 2^5} + ...$$

Как видите, все члены функционального ряда $u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x), u_5(x),...$ – это **функции**.

Наиболее популярная разновидность функционального ряда – это ***степенной ряд***.

Членами степенного ряда являются целые положительные степени (0, 1, 2, 3, …) переменной x либо двучлена $(x-\alpha)$ $(\alpha = const)$, умноженные на числовые коэффициенты c_n:
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + ...$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-\alpha)^n = c_0 + c_1(x-\alpha) + c_2(x-\alpha)^2 + c_3(x-\alpha)^3 + ...,$$ и, если константа $\alpha < 0$ – отрицательна, то обычно пишут: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x+\alpha)^n$.

Как вы правильно догадываетесь, c_n – это старая знакомая «начинка» числовых рядов, зависящая **только от «эн»**.

В практических заданиях многие степенные ряды «начинаются» с 1-го члена, и поэтому далее я буду часто использовать обозначения $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-\alpha)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x+\alpha)^n$.

Простейшие примеры:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+...$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x+2)^n}{n^2}=2(x+2)+\frac{2^2(x+2)^2}{2^2}+\frac{2^3(x+2)^3}{3^2}+\frac{2^4(x+2)^4}{4^2}+\frac{2^5(x+2)^5}{5^2}+...$$

В общем случае степенной ряд содержит и нулевой член c_0 *(число)*, причём, иногда его приходится записывать «белой вороной» за пределами суммы. Например:

$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+...$, ибо с $n=0$ нумерацию тут не начать.

Кроме того, степени могут «идти с пропусками»:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\frac{x^{10}}{5!}+...$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot(x-1)^{3n-2}}{3^n}=\frac{(x-1)}{3}+\frac{\sqrt{2}\cdot(x-1)^4}{3^2}+\frac{\sqrt{3}\cdot(x-1)^7}{3^3}+\frac{\sqrt{4}\cdot(x-1)^{10}}{3^4}+\frac{\sqrt{5}\cdot(x-1)^{13}}{3^5}+...$$

Это тоже степенные ряды *(при желании их можно переписать в стандартном виде – с отсутствующими степенями и нулевыми коэффициентами)*.

2.2. Сходимость степенного ряда. Интервал, радиус и область сходимости

Не нужно пугаться такого обилия терминов, они вытекают друг из друга и не представляют особых сложностей для понимания. Лучше выберем какой-нибудь простой подопытный ряд и сразу начнём разбираться.

Прошу любить и жаловать степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

Переменная x может принимать **любое действительное значение** от «минус бесконечности» до «плюс бесконечности». Подставим в общий член ряда несколько произвольных значений «икс»:

Если $x=1$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

Если $x=-1$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

Если $x=3$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$

Если $x=-\frac{1}{5}$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{5}\right)^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(-1)^n}{5^n}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\cdot 5^n}$

И так далее.

Очевидно, что, подставляя в $\frac{x^n}{n^2}$ то или иное значение «икс», мы получаем различные числовые ряды. Некоторые из них будут сходиться, а некоторые расходиться. И наша задача **найти множество значений «икс»**, при котором степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ будет сходиться. Такое множество и называется ***областью сходимости ряда***.

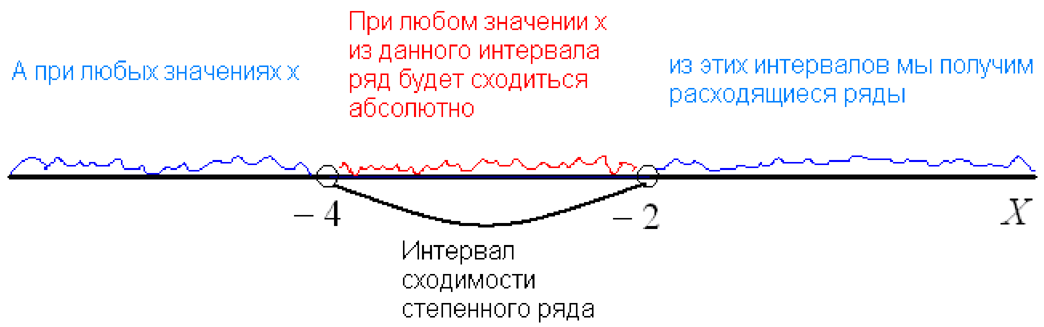
Для любого степенного ряда (временно отвлекаемся от конкретного примера) **возможен один из трёх случаев:**

1) Степенной ряд *сходится абсолютно* на некотором *конечном* интервале $(a; b)$. Иными словами, если мы выбираем любое значение «икс» из интервала $(a; b)$ и подставляем его в общий член степенного ряда, то у нас получается абсолютно сходящийся числовой ряд. Интервал $(a; b)$, как легко догадаться, называют ***интервалом сходимости*** степенного ряда.

Радиус сходимости, если совсем просто, это **половина длины** интервала сходимости:

$$R = \frac{b-a}{2}$$

Пусть, например, $(-4; -2)$ – это интервал сходимости некоего степенного ряда. Тогда геометрически ситуация выглядит так:



Радиус же сходимости этого степенного ряда равен:

$$R = \frac{-2-(-4)}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$$

Широко распространен тривиальный вариант, когда интервал сходимости симметричен относительно нуля:

Здесь интервал сходимости степенного ряда: $(-3; 3)$, радиус сходимости ряда:

$$R = \frac{3-(-3)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

А что будет происходить на концах интервала $(a; b)$? В точках $x = a$, $x = b$ степенной ряд (тот или иной) **может как сходиться, так и расходиться**, и для выяснения этого вопроса нужно проводить дополнительное исследование. После такого исследования речь идёт уже об ***области сходимости ряда***:

– Если установлено, что степенной ряд расходится на обоих концах интервала, то **область сходимости ряда** совпадает с интервалом сходимости: $(a; b)$

– Если установлено, что степенной ряд сходится на одном конце интервала *(хотя бы условно)* и расходится на другом, то **область сходимости ряда** представляет собой полуинтервал $[a; b)$ или $(a; b]$.

– Если установлено, что степенной ряд сходится на обоих концах интервала *(хотя бы условно)*, то **область сходимости ряда** представляет собой отрезок $[a; b]$

То есть, ***область сходимости*** ряда – это его интервал абсолютной сходимости + концы интервала, на которых ряд сходится абсолютно или условно.

С двумя другими случаями всё короче и проще:

2) Степенной ряд *сходится абсолютно* при **любом значении** x**.** То есть, какое бы значение «икс» мы не подставили в общий член степенного ряда – в любом случае у нас получится абсолютно сходящийся числовой ряд. ***Интервал сходимости*** и ***область сходимости*** в данном случае совпадают: $(-\infty; +\infty)$. Радиус сходимости, очевидно, $R = +\infty$. Рисунок приводить не буду, думаю, нет необходимости.

3) Степенной ряд *сходится абсолютно* **в единственной точке**, а именно:

в точке $x = 0$ для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$;

в точке $x = \alpha$ для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-\alpha)^n$

или *(вариация записи)* в точке $x = -\alpha$, если ряд записан в виде $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x+\alpha)^n$.

Отдельной взятая точка представляет собой интервал нулевой длины (нулевой интервал), и поэтому интервал и область сходимости этих рядов равны нулю. Радиус сходимости, естественно, тоже нулевой: $R = 0$.

Других вариантов нет. Область сходимости степенного ряда – это всегда либо единственная точка, либо любое «икс», либо интервал $(a; b)$, как вариант, полуинтервал или отрезок.

Следует отметить, что для произвольного функционального ряда, эта классификация в общем случае является неверной.

2.3. Исследование степенного ряда на сходимость

Один из наиболее распространённых методов исследования опирается на *признак Даламбера* для произвольных числовых рядов *(косвенно освещен в данной книге)*, и, не вдаваясь в теоретические выкладки, я приведу **технический алгоритм действий:**

Сначала находим интервал сходимости ряда. Чтобы это сделать, нужно вычислить предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=v(x)$ и посмотреть, что получилось:

1) если предел *конечен*, и *отличен от нуля*, то интервал сходимости отыскивается из неравенства $|v(x)|<1$. Далее исследуются концы найденного интервала;

2) если предел *равен нулю*, то ряд сходится при любом $x\in(-\infty;+\infty)$ и мы сразу делаем вывод, что область сходимости ряда: $-\infty<x<+\infty$;

3) если предел равен *бесконечности*, то алгоритм решения также заканчивает свою работу, и мы даём окончательный ответ, что ряд сходится в единственной точке.

На практике чаще встречается 1-й случай, и мы возвращаемся к нашему демонстрационному ряду:

Пример 44

Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$

Задание часто формулируют эквивалентно: «Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать его сходимость на концах найденного интервала».

Решение: с помощью признака Даламбера *(подразумевается признак для числовых рядов)* найдём интервал сходимости ряда. Техника вычисления этого предела нам уже бОльшей частью знакома:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|\overset{(1)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}}\right|\overset{(2)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^2\cdot x^{n+1}}{(n+1)^2\cdot x^n}\right|\overset{(3)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^2\cdot x\cdot x^n}{(n^2+2n+1)\cdot x^n}\right|\overset{(4)}{=}$$

$$=|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1}\overset{(5)}{=}\frac{\infty}{\infty}=|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2+2n+1}{n^2}}=|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}^{\to 0}+\frac{1}{n^2}^{\to 0}}=|x|\cdot 1=|x|$$

(1) Составляем отношение следующего члена ряда к предыдущему.

(2) Избавляемся от четырехэтажности дроби.

(3) В числителе по правилу действий со степенями «отщипываем» один «икс». В знаменателе возводим двучлен в квадрат.

(4) Сокращаем числитель и знаменатель на x^n и выносим оставшийся x за знак предела, причём, выносим его вместе со знаком модуля. Почему со знаком модуля? Дело в том, что выражение под знаком предела $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1}$ и так положительно, а вот «икс» может принимать отрицательные значения. Поэтому модуль относится именно к нему.

Кстати, почему $|x|$ вообще можно вынести за знак предела? Потому что «динамической» переменной в пределе у нас является «эн», и от этого нашему «иксу» ни жарко не холодно.

(5) Устраняем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ стандартным способом.

Теперь интерпретируем полученный результат. Так как в пределе получено конечное ненулевое значение, то интервал сходимости найдём из неравенства:

$|x|<1$

В левой части неравенства **строго** результат вычисления предела, а в правой части неравенства – **строго** единица.

Теперь раскрываем модуль по школьному правилу $|x|<a \Rightarrow -a<x<a$:

$-1<x<1$ – интервал сходимости (причём, абсолютной) исследуемого степенного ряда. Что это означает? Это означает, что если мы возьмём произвольное значение «икс» из этого интервала и подставим его в $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$, то у нас получится абсолютно сходящийся числовой ряд.

Во второй части задания нужно исследовать сходимость степенного ряда на концах найденного интервала:

1) При $x=-1$ получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

В предыдущей главе я поленился исследовать этот знакочередующийся ряд, но, видимо, судьба :) Добиваем признак Лейбница:

$\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$ – члены ряда убывают по модулю.

Для всех натуральных номеров справедливо неравенство $(n+1)^2>n^2$, а бОльшим знаменателям соответствуют меньшие дроби:

$\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n^2}$, таким образом, каждый следующий член по модулю меньше предыдущего: $|a_{n+1}|<|a_n|$, т.е. убывание монотонно.

Ряд сходится по признаку Лейбница.

Далее исследуем ряд, составленный из модулей:

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – сходится (см. обобщенный гармонический ряд).

В тяжелом случае, когда преподаватель потребует доказать сходимость «эталонного» ряда, удобно использовать интегральный признак Коши. Решение получается ну совсем простецкое:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b=-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b}^{\to 0}-1\right)=-(0-1)=1$$ – конечное число, значит, ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится вместе с соответствующим несобственным интегралом.

Точно так же, к слову, легко проверяется и любой другой «эталонный» ряд.

Вывод: полученный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ сходится абсолютно.

2) Теперь рассматриваем правый конец интервала сходимости – подставляем значение $x=1$ в наш степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – сходится (по доказанному).

***! Напоминаю**, что любой положительный сходящийся числовой ряд является абсолютно сходящимся. Может, не всем понятен этот момент, проведу формальное рассуждение:*

– для ряда $\sum a_n=\sum_{n=1}\frac{1}{n^2}$ составим соответствующий ряд из модулей:

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^2}\right|$. Так как все члены положительны, то модуль можно убрать: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – а этот ряд сходится. Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ является сходящимся, то есть, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится абсолютно.

Таким образом, степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ сходится, причём абсолютно, на обоих концах найденного интервала.

Ответ: область сходимости исследуемого степенного ряда: $-1\le x\le 1$.

Как вариант, можно записать так: ряд сходится, если $x\in[-1;1]$. Абсолютность сходимости обычно подразумевается по умолчанию.

Иногда в условии задачи требуют указать радиус сходимости. Очевидно, что в рассмотренном примере $R=1$.

Закрепляем алгоритм *(не пропускать!!!)*:

Пример 45

Записать первые три члена ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot\sqrt{n+1}}$ и найти его область сходимости

Решение: интервал сходимости ряда найдём с помощью признака Даламбера *(но не ПО признаку! – для функциональных рядов такого признака не существует)*:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{n+1}}{3^{n+1}\cdot\sqrt{n+1+1}}}{\dfrac{x^n}{3^n\cdot\sqrt{n+1}}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot 3^n\cdot\sqrt{n+1}}{3^{n+1}\cdot\sqrt{n+2}\cdot x^n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x\cdot x^n\cdot 3^n\cdot\sqrt{n+1}}{x^n\cdot 3\cdot 3^n\cdot\sqrt{n+2}}\right|=\frac{|x|}{3}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}}{\dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}}}\right)=\frac{|x|}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}^{\to 0}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}^{\to 0}}}=\frac{|x|}{3}$$

В результате опять получен не ноль и не бесконечность, а значит, ряд сходится, при $\frac{|x|}{3}<1$ *(составили стандартное неравенство $|v(x)|<1$)*.

Теперь **слева** нам нужно оставить **только** $|x|$, для этого умножаем обе части неравенства на 3:

$|x|<3$

И раскрываем модуль по школьному правилу $|x|<a\ \Rightarrow\ -a<x<a$:

$-3<x<3$ – интервал сходимости исследуемого степенного ряда.

Исследуем сходимость степенного ряда на концах найденного интервала.

1) При $x=-3\ \Rightarrow\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3^n\cdot\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{3^n\cdot\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

Обратите внимание, что после подстановки $x=-3$ в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot\sqrt{n+1}}$ у нас сократилась показательная последовательность 3^n. **Это верный признак того, что мы правильно нашли интервал сходимости**.

Полученный числовой ряд знакочередуется, его члены убывают по модулю: $\lim_{n\to+\infty}|a_n|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0$, причём, убывают монотонно: $\frac{1}{\sqrt{n+2}}<\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $\left(|a_{n+1}|<|a_n|\right)$ – для всех номеров $n=\{0,1,2,3,...\}$.

Следовательно, ряд сходится по признаку Лейбница.

Исследуем ряд, составленный из модулей:

$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ – очевидно, что этот ряд расходится вместе с «эталонным» рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, но оформление даже такого простого решения никто не отменял.

С точки зрения лаконичности наиболее выгоден признак с неравенством, но тут он не годится, т.к. нужное нам неравенство не выполнено:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \not> \frac{1}{\sqrt{n}}$$

И поэтому используем предельный признак:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}^{\to 0}}\right) = 1$$ – получено конечное число,

отличное от нуля, значит, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ расходится вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Здесь, кстати, легко срабатывает и интегральный признак.

Таким образом, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ сходится условно.

2) И «мыльная опера» первого пункта оказывается не напрасной, поскольку со вторым концом интервала результат получается «автоматом»:

При $x=3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{3^n\cdot\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ – расходится.

Ответ: область сходимости исследуемого степенного ряда: $-3 \le x < 3$; при $x=-3$ ряд сходится условно. И, да – первые три члена ряда: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot\sqrt{n+1}} = 1+\frac{x}{3\cdot\sqrt{2}}+\frac{x^2}{3^2\cdot\sqrt{3}}$ – их я люблю записывать сразу в ответ, чтобы дважды не «марать бумагу».

В рассмотренном примере областью сходимости степенного ряда является полуинтервал, причем во всех точках интервала $(-3;\,3)$ степенной ряд *сходится абсолютно* (что подразумевается по умолчанию), а в точке $x=-3$, как выяснилось – *условно*, и эту особенность желательно указать в ответе.

Пример 46

Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{7^n\cdot(n+1)}$ и исследовать его сходимость на концах найденного интервала. Записать первые три члена ряда.

Это пример для самостоятельного решения.

Теперь рассмотрим другие, более редкие случаи:

Пример 47

Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\cdot(x+4)^{2n+1}}{(n+1)!}$

Решение: не поленюсь снова закомментировать каждый шаг:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|\overset{(1)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)^3\cdot(x+4)^{2n+3}}{(n+1+1)!}}{\frac{n^3\cdot(x+4)^{2n+1}}{(n+1)!}}\right|\overset{(2)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^3\cdot(x+4)^{2n+3}\cdot(n+1)!}{n^3\cdot(x+4)^{2n+1}\cdot(n+2)!}\right|\overset{(3)}{=}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^3\cdot\frac{(x+4)^2(x+4)^{2n+1}\cdot1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n(n+1)}{(x+4)^{2n+1}\cdot1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n(n+1)(n+2)}\right|\overset{(4)}{=}$$

$$=(x+4)^2\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\overset{\to0}{\frac{1}{n}}\right)^3\cdot\frac{1}{(n+2)}\right)=(x+4)^2\lim_{n\to+\infty}\overset{\to0}{\frac{1}{n+2}}=(x+4)^2\cdot0=0$$

(1) Составляем отношение следующего члена ряда к предыдущему.

(2) Избавляемся от четырехэтажности дроби.

(3) Кубы $(n+1)^3, n^3$, по правилу действий со степенями, подводим под единую степень. В числителе проявляем смекалку: $(x+4)^{2n+3}=(x+4)^{2n+1+2}=(x+4)^2\cdot(x+4)^{2n+1}$, т.е. раскладываем на множители ТАК, чтобы на следующем шаге сократить дробь на $(x+4)^{2n+1}$. Факториалы расписываем подробно.

(4) Под кубом почленно делим числитель на знаменатель, указывая, что $\overset{\to0}{\frac{1}{n}}$. В дроби сокращаем всё, что можно сократить. Множитель $(x+4)^2$ выносим за знак предела, его можно вынести, поскольку в нём нет ничего, зависящего от «динамической» переменной «эн». Обратите внимание, что знак модуля не нарисован – по той причине, что $(x+4)^2$ и так принимает неотрицательные значения при любом «икс».

В пределе получен ноль, а значит, можно давать окончательный

ответ: ряд сходится при $x\in(-\infty;+\infty)$

А сначала-то казалось, что этот ряд со «страшной начинкой» будет трудно решить. Ноль или бесконечность в пределе – почти подарок, ведь решение заметно сокращается! И этим подарком грех не воспользоваться! – решаем самостоятельно:

Пример 48

Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!\cdot(x-2)^{n+1}}{10^n}$

Наверное, у некоторых возникло ощущение, что *«тут всё понятно»*, но это ощущение обманчиво, и поэтому со всей серьёзностью изучаем оставшиеся примеры параграфа – **впереди нас ждёт важная информация** и новые технические приёмы:

Пример 49

Найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах найденного интервала

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(x+2)^n}{(3n-1)\cdot 5^n}$$

Решение: в общий член степенного ряда входит множитель $(-1)^{n-1}$, обеспечивающий знакочередование. Алгоритм решения полностью сохраняется, но при составлении предела $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$ мы убираем (не пишем) этот множитель, поскольку модуль уничтожает все «минусы».

Найдём интервал сходимости:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(x+2)^{n+1}}{(3(n+1)-1)\cdot 5^{n+1}}}{\frac{(x+2)^n}{(3n-1)\cdot 5^n}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x+2)(x+2)^n\cdot 5^n(3n-1)}{(x+2)^n\cdot 5\cdot 5^n(3n+2)}\right|=$$

$$=\frac{|x+2|}{5}\lim_{n\to+\infty}\frac{3n-1}{3n+2}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{|x+2|}{5}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3n-1}{n}}{\frac{3n+2}{n}}=\frac{|x+2|}{5}\lim_{n\to+\infty}\frac{3-\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}{3+\underset{}{\overset{\to 0}{\frac{2}{n}}}}=\frac{|x+2|}{5}$$

И коль скоро, получено конечное значение, то составляем стандартное неравенство:

$$\frac{|x+2|}{5}<1$$

Слева нам нужно оставить **только модуль**, поэтому умножаем обе части неравенства на 5:

$$|x+2|<5$$

Теперь раскрываем модуль уже знакомым способом:

$$-5<x+2<5$$

В середине двойного неравенства нужно оставить только «икс», в этих целях из каждой части неравенства вычитаем 2:

$$-5-2<x+2-2<5-2$$

Таким образом:

$-7<x<3$ – интервал сходимости исследуемого степенного ряда.

Исследуем сходимость ряда на концах найденного интервала:

1) Подставляем значение $x=-7$ в наш степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(x+2)^n}{(3n-1)\cdot 5^n}$, распишу максимально подробно:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(-7+2)^n}{(3n-1)\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(-5)^n}{(3n-1)\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(-1)^n\cdot 5^n}{(3n-1)\cdot 5^n}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1+n}}{(3n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{(3n-1)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$$

Будьте предельно внимательны! Множитель $(-1)^{2n-1}$ не обеспечивает знакочередование, при любом натуральном «эн»: $(-1)^{2n-1}=-1$. Полученный минус выносим за пределы ряда и забываем про него, так как он (или любая другая константа) никак не влияют на сходимость или расходимость числового ряда.

И ещё раз заметьте, что после подстановки $x=-7$ в общий член степенного ряда у нас сократился показательный множитель 5^n. Если бы этого не произошло, то это бы значило, что мы либо неверно вычислили предел, либо неправильно раскрыли модуль.

Итак, требуется исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$. И сейчас я предлагаю оценить всё изящество «обычного» признака сравнения. Для любого натурального n справедливо неравенство $3n-1<3n$, а меньшим знаменателям соответствуют бОльшие дроби:

$\frac{1}{3n-1}>\frac{1}{3n}$, значит, по признаку сравнения, исследуемый ряд расходится вместе с гармоническим рядом $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Годятся здесь и предельный, и интегральный признаки, но таки они длиннее!

2) Исследуем правый конец интервала: $x=3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(3+2)^n}{(3n-1)\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$, и для полученного знакочередующегося ряда выполняем рутинную проверку:

$\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{3n-1}=0$ – члены ряда убывают по модулю, причём каждый следующий член по модулю: $|a_{n+1}|=\frac{1}{3(n+1)-1}=\frac{1}{3n+2}$ меньше предыдущего $|a_n|=\frac{1}{3n-1}$, т.е. убывание монотонно.

Таким образом, ряд сходится по признаку Лейбница, однако лишь условно, так как $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$ – расходится (по доказанному).

Ответ: $-7<x\le 3$ – область сходимости исследуемого степенного ряда, при $x=3$ ряд сходится условно.

Пример 50

Найти область сходимости ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot(x+3)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}$$

Это пример для самостоятельного решения. И не отвлекаясь, на «одном дыхании» разбираем ещё пару задач:

Пример 51

Найти область сходимости
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^{2n}}{9^n\cdot\sqrt{n^5+3}}$$

Решение: сначала найдем интервал сходимости ряда:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(n+1)(x-1)^{2(n+1)}}{9^{n+1}\cdot\sqrt{(n+1)^5+3}}}{\dfrac{n(x-1)^{2n}}{9^n\cdot\sqrt{n^5+3}}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)(x-1)^{2n+2}\cdot 9^n\cdot\sqrt{n^5+3}}{n(x-1)^{2n}\cdot 9^{n+1}\cdot\sqrt{(n+1)^5+3}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left|\left(1+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}\right)\cdot\frac{(x-1)^2\cdot(x-1)^{2n}\cdot 9^n\cdot\sqrt{n^5+3}}{(x-1)^{2n}\cdot 9\cdot 9^n\cdot\sqrt{(n+1)^5+3}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-1)^2\cdot\sqrt{n^5+3}}{9\cdot\sqrt{(n+1)^5+3}}\right|=\frac{(x-1)^2}{9}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{n^5+3}}{\sqrt{(n+1)^5+3}}\right)=\frac{\infty}{\infty}=\frac{(x-1)^2}{9}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\dfrac{\sqrt{n^5+3}}{\sqrt{n^5}}}{\dfrac{\sqrt{(n+1)^5+3}}{\sqrt{n^5}}}\right)=$$

$$=\frac{(x-1)^2}{9}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{\dfrac{n^5+3}{n^5}}}{\sqrt{\dfrac{(n+1)^5+3}{n^5}}}\right)=\frac{(x-1)^2}{9}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{1+\overset{\to 0}{\dfrac{3}{n^5}}}}{\sqrt{\left(1+\overset{\to 0}{\dfrac{1}{n}}\right)^5+\overset{\to 0}{\dfrac{3}{n^5}}}}\right)=\frac{(x-1)^2}{9}$$

Последний предел можно оформить и «турбо»-методом: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n^5+3}}{\sqrt{(n+1)^5+3}}\right)^{\to 1}=1$,

пояснив, что числитель и знаменатель *одного порядка роста*.

Итак, ряд сходится при $\dfrac{(x-1)^2}{9}<1$. Умножаем обе части неравенства на 9:

$(x-1)^2<9$

и извлекаем из обеих частей корень, вспоминая старое школьное $\sqrt{a^2}=|a|$:

$\sqrt{(x-1)^2}<\sqrt{9}$

$|x-1|<3$ – ну вот мы и вышли на знакомую тропинку.

Раскрываем модуль:
$-3<x-1<3$

и прибавляем ко всем частям единицу:
$-3+1<x-1+1<3+1$
$-2<x<4$ – интервал сходимости исследуемого степенного ряда.

Исследуем сходимость ряда на концах найденного интервала:

1) Если $x=-2$, то получается следующий числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-2-1)^{2n}}{9^n\cdot\sqrt{n^5+3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-3)^{2n}}{9^n\cdot\sqrt{n^5+3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(-1)^{2n}\cdot(3)^{2n}}{9^n\cdot\sqrt{n^5+3}}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(3^2)^n}{9^n\cdot\sqrt{n^5+3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 9^n}{9^n\cdot\sqrt{n^5+3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^5+3}}$$

Множитель $(-1)^{2n}$ бесследно пропал, поскольку при любом натуральном значении «эн» $(-1)^{2n}=1$. **И в третий раз обращаю внимание** на то, что в результате подстановки сократились 9^n, а значит, интервал сходимости найден правильно.

По «первой оглядке» для полученного числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^5+3}}$ следует применить предельный признак. Но какой ряд подобрать для сравнения? Об этой методике я уже рассказывал в начале книги, повторим:

Определяем старшую степень знаменателя, для этого мысленно или на черновике отбрасываем под корнем всё, кроме самого старшего слагаемого: $\sqrt{n^5}=n^{\frac{5}{2}}$. Таким образом, старшая степень знаменателя равна $\frac{5}{2}$. Старшая степень числителя, очевидно, 1. Из старшей степени знаменателя вычитаем старшую степень числителя:
$\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$.

Таким образом, наш ряд нужно сравнить с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$, который сходится. Используем предельный признак сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n^3}}}{\frac{n}{\sqrt{n^5+3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^5+3}}{n\cdot\sqrt{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^5+3}}{\sqrt{n^2\cdot n^3}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^5+3}{n^5}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\overset{\to 0}{\frac{3}{n^5}}}=1$$

Получено конечное, отличное от нуля число, значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^5+3}}$ сходится вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$.

…но захочется ли вам «городить» такое решение?

Для любого номера n справедливо неравенство $n^5+3>n^5$, а бОльшим знаменателям соответствуют меньшие дроби, следовательно:

$\frac{n}{\sqrt{n^5+3}}<\frac{n}{\sqrt{n^5}}=\frac{1}{\sqrt{n^3}}$, значит, по признаку сравнения, исследуемый ряд сходится вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$. **Всё!**

Точнее, почти всё:)

2) Осталось выяснить, что происходит на другом конце интервала.

При $x=4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(4-1)^{2n}}{9^n\cdot\sqrt{n^5+3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(3^2)^n}{9^n\cdot\sqrt{n^5+3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 9^n}{9^n\cdot\sqrt{n^5+3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^5+3}}$ – сходится, только что отмучились ☺

Ответ: область сходимости исследуемого степенного ряда: $-2\le x\le 4$

Чуть менее сложный пример для самостоятельного решения:

Пример 52

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^{2n}}{n+1}$ – наверное, вы поняли, что нужно сделать ☺ Но, кроме шуток, иногда текст и правда не пишут.

И в заключение параграфа остановлюсь на одном моменте. Во всех примерах мы опирались на признак Даламбера и составляли предел $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$. Всегда ли надо делать именно так? Нет, далеко не всегда. Нередко интервал сходимости рассчитывают с помощью предела $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_n(x)}{u_{n+1}(x)}\right|$, но чтобы вас не путать, я намеренно разобрал единственный вариант.

Кроме того, в некоторых случаях **невероятно выгодно** привлечь на помощь радикальный признак Коши и составить предел $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}$, при этом алгоритм решения остаётся точно такими же! Что это за случаи? Это те случаи, когда из общего члена степенного ряда «хорошо» извлекается корень «энной» степени как, например, для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{2^n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(x+3)^n}{2^n}\right|}=\frac{|x+3|}{2}$, а дальше всё как «по Даламберу».

Ну а теперь лучше немного отвлечься, чтобы со свежим «незамыленным» взглядом перейти к заключительной части курса.

2.4. Понятие суммы степенного ряда

Начнем подходить к теме с воспоминаний. Как мы помним, любой числовой ряд может или сходиться, или расходиться. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то это значит, что сумма его членов равна некоторому *конечному числу*: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... = S$

Далее мы рассматривали уже не числовые, а функциональные ряды, точнее говоря, их частную разновидность. Возьмём тот самый подопытный степенной ряд, который всем понравился: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. В ходе исследования было установлено, что этот ряд сходится при $-1 \le x \le 1$. **И возникает вопрос:** если числовые ряды сходятся к ЧИСЛАМ, то к чему же сходятся ряды функциональные?

Правильно подумали. Функциональные ряды сходятся к ФУНКЦИЯМ.

В частности, суммой степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ <u>в его области сходимости</u> $-1 \le x \le 1$ является вполне определённая функция $f(x)$:

$$x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \frac{x^5}{5^2} + ... = f(x)$$

<u>**Особо подчёркиваю**</u>, что данный факт справедлив **только в найденной области** $-1 \le x \le 1$, вне этого промежутка степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ будет расходиться, т.е. при любом $|x| > 1$ сумма соответствующего числового ряда будет бесконечна.

Чтобы всё стало окончательно понятно, рассмотрим примеры с картинками. Но прежде откройте или распечатайте *Приложение* ***Разложение функций в степенные ряды***. **Это рабочий справочный материал**, в который придётся часто заглядывать.

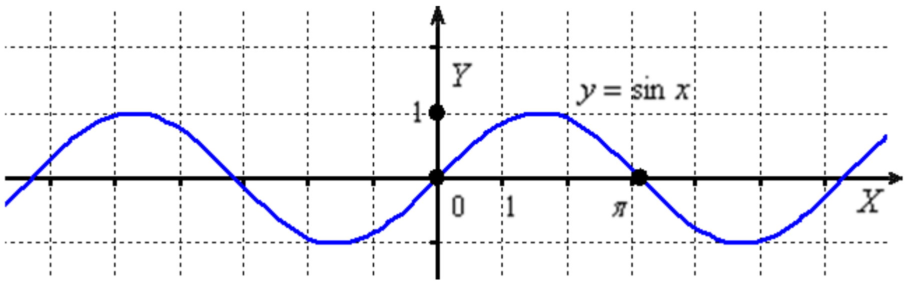
Я выпишу разложение синуса в степенной ряд для простейшего случая $\alpha = x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \cdot x^{2n-1} + ...$$

и область сходимости этого ряда: $-\infty < x < +\infty$

(по какому принципу получены сами элементарные табличные разложения, мы рассмотрим чуть позже).

Теперь вспоминаем школьный график синуса $y = \sin x$:



Вот такая симпатичная синусоида. Хмм…. Где-то я уже это видел….

Но красота только начинаются! Если начертить график бесконечного многочлена $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \cdot x^{2n-1} + ...$, то получится… та же самая синусоида!

Говорят, что **степенной ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ **сходится к функции** $y = \sin x$, причём сходится при любом «икс». Почему при любом? Если исследовать этот степенной ряд на сходимость (чем мы недавно занимались), то выяснится, что его область сходимости: $-\infty < x < +\infty$.

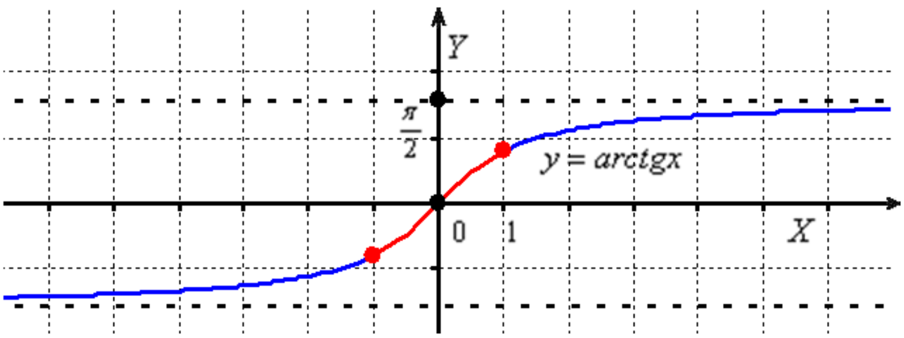
А что значит вообще «сходится»? По смыслу глагола – что-то куда-то идёт. Если мы возьмём первые три члена ряда $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ и начертим график многочлена пятой степени, то он лишь отдаленно будет напоминать синусоиду. А вот если составить многочлен из первых ста членов ряда: $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... - \frac{x^{199}}{199!}$ и начертить его график, то он будет с синусоидой практически совпадать (на достаточно длинном промежутке). Чем больше членов ряда – тем лучше приближение. И, как уже отмечалось, график бесконечного многочлена – есть в точности синусоида. Иными словами, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ сходится к функции $y = \sin x$ при любом значении «икс».

Рассмотрим более печальный пример, табличное разложение арктангенса:

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...$$

Область сходимости ряда: $-1 \le x \le 1$

Печаль заключается в том факте, что график бесконечного многочлена $y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...$ **существует и совпадает** с графиком арктангенса $y = arctgx$ только на отрезке $[-1;1]$ (т.е. в области сходимости ряда):



Вне отрезка $[-1;1]$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ расходится, и о графике речи не идёт вообще, т.к. при $|x| > 1$ каждое значение бесконечного многочлена бесконечно.

Исходя из вышесказанного, можно сформулировать **две взаимно обратные задачи**:
– найти сумму ряда (функцию) по известному разложению;
– разложить функцию в ряд (если это возможно) и найти область сходимости ряда.

На практике гораздо чаще предлагают второе задание (оно проще), и в рамках настоящего экспресс-курса я рассмотрю именно его.

2.5. Разложение функций в степенные ряды

Итак, приступим к увлекательному занятию – разложению различных функций в степенные ряды. Сначала пара формул, затем практические задания.

Если функция $f(x)$ в *некотором интервале* раскладывается в степенной ряд по степеням $(x-a)$, то это разложение единственно и задается формулой:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+...$$

Обозначения: *в тематических источниках вместо буквы «а» часто используют букву* x_0. *Надстрочный индекс* $^{(n)}$ *в последнем слагаемом обозначает* ***производную «энного» порядка***.

Данная формула получила английскую фамилию и называется разложением функции $f(x)$ в ***ряд Тейлора*** *(ударение на 1-й слог)* по степеням $(x-a)$.

На практике процентах так в 90, даже больше, приходится иметь дело с частным случаем ряда Тейлора, когда $a=0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...$$

Эта формула получила фамилию шотландскую и называется разложением функции $f(x)$ в ***ряд Маклорена*** *(ударение на 2-й слог)*. Разложение Маклорена также называют *разложением функции* $f(x)$ *в ряд Тейлора по степеням* x.

Вернемся к ***Таблице разложений*** *(см. Приложение)* и выведем разложение экспоненциальной функции для простейшего случая $\alpha=x$:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$$

Как оно получилось? По формуле Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...$$

Рассмотрим функцию $f(x)=e^x$ и сразу вычислим: $f(0)=e^0=1$

Теперь начинаем находить **производные в точке** $a=0$: первую производную, вторую производную, третью производную и т.д. Это просто, поскольку при дифференцировании экспонента превращается в саму себя:

$f'(x) = (e^x)' = e^x$
$f'(0) = e^0 = 1$

$f''(x) = (f'(x))' = (e^x)' = e^x$
$f''(0) = e^0 = 1$

$f'''(x) = (f''(x))' = (e^x)' = e^x$
$f'''(0) = e^0 = 1$
$\ldots$
и так далее, при этом совершенно понятно, что:
$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = \ldots = 1$

Подставляем единицы в формулу Маклорена и получаем наше табличное разложение! Аналогично можно вывести некоторые другие табличные разложения *(но далеко не все выводятся именно так)*.

2.6. Примеры разложения функций в ряд Маклорена

В данном параграфе мы рассмотрим типовую задачу на разложение функции в ряд Маклорена и нахождение области сходимости полученного ряда. Нет, мучиться с нахождением производных не придется, ибо есть таблица:

Пример 53

Разложить функцию $f(x) = \cos\frac{x}{2}$ в ряд Маклорена и указать область сходимости полученного ряда.

Решение: используем табличное разложение:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

В нашем случае $\alpha = \frac{x}{2}$, таким образом:

$$f(x) = \cos\frac{x}{2} = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(2n)!} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 4!} - \frac{x^6}{2^6 \cdot 6!} + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{2^{2n} \cdot (2n)!} + \ldots$$ – **искомое разложение**.

Как определить область сходимости полученного ряда? Здесь, конечно, не нужно проводить длинное исследование степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{2^{2n} \cdot (2n)!}$. Проще воспользоваться табличной информацией: поскольку разложение косинуса сходится при любом «альфа»: $-\infty < \alpha < +\infty$, и аргумент $\alpha = \frac{x}{2}$ определён при любом «икс», то **область сходимости** нашего ряда будет такой же: $-\infty < x < +\infty$.

Разминочные ряды для самостоятельного решения:

Пример 54

Разложить функции в ряд по степеням x.

а) $y = e^{-2x}$, б) $y = \sin(x^2)$

Заметьте, что формулировка этой задачи эквивалента предыдущей. Единственное, область сходимости здесь очевидна, и поэтому даже как-то неудобно предлагать её найти.

ОБЯЗАТЕЛЬНО прорешиваем эти задания – если вдруг у кого обнаружатся трудности, то лучше разобраться с ними прямо сейчас. **Особо аккуратно со знаками!** Помним, что чётная степень «съедает» знак минус, а из-под нечётной он «выскакивает».

Перейдём к более содержательным заданиям:

Пример 55

Разложить функцию $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{x}$ в ряд Маклорена и найти область сходимости полученного ряда.

Решение тоже незамысловато, **главное, быть внимательным**, чтобы что-нибудь не потерять. «Конструировать» ряд начинают, как правило, с «солидной» функции. …нормальная пошла терминология, пора за диссертацию садиться ☺ Используем табличное разложение:

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\cdot\alpha^{2n-1} + \ldots$$

В данном случае $\alpha = 2x$:

$$\sin 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\cdot(2x)^{2n-1} + \ldots$$

Раскрываем наверху скобки:

$$\sin 2x = 2x - \frac{2^3x^3}{3!} + \frac{2^5x^5}{5!} - \frac{2^7x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^{2n-1}\cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

Делим обе части на «икс»:

$$\frac{\sin 2x}{x} = \frac{2x - \frac{2^3x^3}{3!} + \frac{2^5x^5}{5!} - \frac{2^7x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^{2n-1}\cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!}\ldots}{x}$$

И после *почленного деления* в правой части получаем **искомое разложение функции в ряд Маклорена**:

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{x} = 2 - \frac{2^3x^2}{3!} + \frac{2^5x^4}{5!} - \frac{2^7x^6}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^{2n-1}\cdot x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \ldots$$

Найдём область сходимости полученного ряда. Поскольку разложение синуса сходится при любом «альфа»: $-\infty < \alpha < +\infty$ и значение $\alpha = 2x$ определено при любом «икс», то разложение $\sin 2x$ тоже сходится на всей числовой прямой: $-\infty < x < +\infty$.

Но дальше возникает «закавыка» с делением на «икс»: $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{x}$ – так как x не входит в область определения функции, то значение $x = 0$ вроде бы надо исключить из области сходимости.

Но на самом деле тут есть нюанс – ведь речь идёт об области сходимости РЯДА. Вот и давайте подставим «проблемное» значение $x = 0$ непосредственно в разложение:

$2 - \dfrac{2^3 \cdot 0^2}{3!} + \dfrac{2^5 \cdot 0^4}{5!} - \dfrac{2^7 \cdot 0^6}{7!} + ... = 2$ – получено конечное число, а значит, ряд сходится! Но сходится он здесь **не к функции** $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{x}$ *(как при всех других «икс»)*, а к конкретному числовому значению $f(x) = 2$.

Впрочем, нас об этом никто не спрашивал (кроме вас ☺), и на чистовик лучше записать единственную строчку: **область сходимости**: $-\infty < x < +\infty$

Следующий пример для самостоятельного решения:

Пример 56

Разложить функцию $y = x\cos 3x$ в ряд по степеням x и найти область сходимости полученного ряда.

Примерный образец чистового оформления задания в конце книги.

Рассмотрим типовые разложения логарифма:

Пример 57

Разложить функцию $f(x) = \ln(1 - x^2)$ в ряд по степеням x. Найти область сходимости полученного ряда.

Решение: находим в таблице похожее разложение:

$$\ln(1+\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{\alpha^n}{n} + ...$$

Но у нас разность, что делать? Трюк прост – перепишем функцию немного по-другому: $f(x) = \ln(1 - x^2) = \ln(1 + (-x^2))$

Таким образом, $\alpha = -x^2$ и всё путём:

$$\ln(1 - x^2) = -x^2 - \frac{(-x^2)^2}{2} + \frac{(-x^2)^3}{3} - ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{(-x^2)^n}{n} + ...$$

Главное, не запутаться в знаках:

$\ln(1 - x^2) = -x^2 - \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{x^6}{3} - ... - \dfrac{x^{2n}}{n} - ....$ – **искомое разложение**.

Теперь нужно определить область сходимости полученного ряда. Согласно таблице, ряд гарантированно сходится при $|\alpha|<1$. В данном случае $\alpha=-x^2$:

$$\left|-x^2\right|<1$$

Так как квадрат любого «икс »неотрицателен, а модуль уничтожает знак «минус», то при раскрытии модуля знак «минус» просто испаряется:

$$x^2<1$$

поскольку $\sqrt{x^2}=|x|$, то, извлекая квадратный корень из обеих частей:

$$\sqrt{x^2}<\sqrt{1}$$

$|x|<1 \quad \Rightarrow \quad -1<x<1$ – получаем интервал сходимости нашего ряда.

Осталось исследовать ряд на концах найденного интервала. Значения $x=1, x=-1$ не входят в область определения функции $f(x)=\ln(1-x^2)$, но вдруг здесь такая же метаморфоза, как с функцией $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{x}$, разложение которой сошлось и при $x=0$?

Вопрос решается прямой подстановкой «проблемных» значений непосредственно в найденное разложение $-x^2-\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{x^6}{3}-\ldots-\dfrac{x^{2n}}{n}-\ldots$. Если $x=1$, то получаем:

$-1^2-\dfrac{1^4}{2}-\dfrac{1^6}{3}-\ldots-\dfrac{1^{2n}}{n}-\ldots=-1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}-\ldots-\dfrac{1}{n}-\ldots=-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ – гармонический ряд, который расходится. И он же получается при $x=-1$.

Таким образом, **область сходимости** нашего ряда: $-1<x<1$

И ещё немного по теме:

Простейшее разложение $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\ldots$ сходится ещё в одной точке: $-1<x\le 1$. Здесь при $x=-1$ получается гармонический ряд, а вот при $x=1$ знакочередующийся сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, причём его сумма в точности равна $\ln 2$!

Таким образом, сумма многих числовых рядов отыскивается с помощью степенных рядов!

Интересно отметить, что разложение в ряд такого логарифма:

$\ln(1+x^2)=x^2-\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{x^6}{3}-\dfrac{x^8}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n}}{n}+\ldots$ – сходится уже на обоих концах интервала: $-1\le x\le 1$. При подстановках $x=1,\ x=-1$ получается тот же самый сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Парочка рядов для самостоятельного решения:

Пример 58

Разложить функцию в ряд по степеням x и указать область сходимости.

а) $y=\dfrac{1-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}$, б) $y=\dfrac{1}{1+3x^3}$

Не теряйте по невнимательности степени и знаки! Это чуть ли не главный залог успеха в подобных заданиях.

Не редкость, когда перед разложением функцию целесообразно преобразовать. Классический пример: $f(x)=\sin^2 x$. Перед тем как раскладывать её в ряд, нужно понизить степень с помощью известной тригонометрической формулы:
$f(x)=\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$. Решать я этот пример не буду, потому что чего тут решать?:)

$$\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}\left(1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\ldots\right)$$

Продолжаем наращивать квалификацию! Типовое биномиальное разложение:

Пример 59

Разложить функцию $y=\dfrac{6x}{2-3x}$ в степенной ряд и найти его область сходимости.

Решение: смотрим в таблицу и находим наиболее похожее разложение:
$\dfrac{1}{1-\alpha}=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\ldots+\alpha^n+\ldots$, после чего начинаем колдовать.

Поскольку вверху должна быть единица, то представляем нашу функцию в виде произведения: $y=6x\cdot\dfrac{1}{2-3x}$

Теперь в знаменателе нужно устроить $1-\alpha$, для этого выносим двойку за скобки и сокращаем на два:

$$y=6x\cdot\frac{1}{2\left(1-\frac{3}{2}x\right)}=3x\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{3}{2}x\right)}$$

Таким образом, $\alpha=\dfrac{3x}{2}$, и дробь раскатывается скатертью-самобранкой:

$$y=\frac{6x}{2-3x}=3x\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{3}{2}x\right)}=3x\cdot\left(1+\frac{3}{2}x+\frac{3^2x^2}{2^2}+\frac{3^3x^3}{2^3}+\ldots+\frac{3^nx^n}{2^n}+\ldots\right)=$$

$=3x+\dfrac{3^2x^2}{2}+\dfrac{3^3x^3}{2^2}+\dfrac{3^4x^4}{2^3}+\ldots+\dfrac{3^{n+1}x^{n+1}}{2^n}+\ldots$ – **искомое разложение**.

Найдём область сходимости. Здесь можно пойти длинным и надежным путем, т.е. провести стандартное исследование степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{2^n}$. А можно поступить проще. В таблице указано, что биномиальный ряд сходится при $-1<\alpha<1$.

В нашем случае $\alpha=\frac{3}{2}x$, поэтому:

$$-1<\frac{3}{2}x<1$$

Умножаем все части неравенства на $\frac{2}{3}$:

$-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$ – и интервал сходимости выкатился на блюдечко с голубой каёмочкой.

Что происходит с рядом $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{2^n}$ на концах интервала? Выполняем прямую подстановку:

Если $x=\frac{2}{3}$, то получаем: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}\cdot 2^{n+1}}{2^n\cdot 3^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot 2^n}{2^n}=2\sum_{n=0}^{\infty}1^n$ – данный ряд расходится, т.к. не выполнен необходимый признак сходимости.

При $x=-\frac{2}{3}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}}{2^n}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}$ – расходится по той же причине.

Таким образом, **область сходимости** полученного разложения: $-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$

Для самостоятельного решения:

Пример 60

Разложить по степеням x. Найти область сходимости ряда.

а) $\ln(10+x)$,

и «арки» у нас как-то досадно затерялись, пусть будут:

б) $arctg\sqrt{x}$;)

Да, задача, бывает сформулировано и так – безо всяких там терминов и $f(x)$.

…и что-то эти задачи у меня уже начали вызывать улыбку ☺ Поэтому обязательно прорешайте – сегодня хорошо должно быть всем!

Указание: *в пункте а) использовать свойство логарифма:* $\ln(ab)=\ln a+\ln b$.

2.7. Разложение функций в ряд Тейлора по степеням $(x-a)$, где $a \neq 0$

Это задание является более сложным и встречается значительно реже. Но я всё-таки решил включить его в курс, 2-3 примера не помешают.

Вытащим из чулана общую формулу Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+...$$

Напоминаю, что вместо буквы «а» на практике часто можно встретить букву x_0.

В чём сложность разложения функции по степеням $(x-a)$ при $a \neq 0$? Сложность состоит в том, что нам не удастся воспользоваться табличными разложениями, и придётся работать ручками, а именно самостоятельно находить и вычислять **производные**:

Пример 61

Разложить функцию $f(x)=x^3+4x^2-3x+2$ в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$

Решение: в данном случае $a=1$, и нам предстоит ручная работа по конструированию разложения:

$$f(a)=f(1)=1+4-3+2=4$$

$$f'(x)=(x^3+4x^2-3x+2)'=3x^2+8x-3$$
$$f'(a)=f'(1)=3+8-3=8$$

$$f''(x)=(3x^2+8x-3)'=6x+8$$
$$f''(a)=f''(1)=6+8=14$$

$$f'''(x)=(6x+8)'=6=const$$
$$f'''(a)=f'''(1)=6$$

$f^{(4)}(x)=(6)'=0$, и все производные, начиная с четвёртой, будут нулевыми.

Теперь подставляем весь найденный скарб в формулу Тейлора и упрощаем коэффициенты, не забывая, что такое факториал:

$$f(x)=x^3+4x^2-3x+2=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+...=$$

$$=4+\frac{8}{1!}(x-1)+\frac{14}{2!}(x-1)^2+\frac{6}{3!}(x-1)^3+0+0+0+...=$$

$=4+8(x-1)+7(x-1)^2+(x-1)^3$ – **искомое разложение.**

Для проверки раскроем скобки и приведём подобные слагаемые:

$$4+8(x-1)+7(x-1)^2+(x-1)^3=4+8x-8+7(x^2-2x+1)+(x^3-3x^2+3x-1)=$$

$=4+8x-8+7x^2-14x+7+x^3-3x^2+3x-1=x^3+4x^2-3x+2$ – в результате получен исходный многочлен, что и требовалось проверить.

Рассмотрим более содержательные примеры.

Пример 62

Разложить функцию $f(x)=\frac{1}{x+3}$ в ряд Тейлора по степеням $(x+1)$. Найти область сходимости полученного ряда.

Решение: используем разложение функции в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+...$$

В данном случае $x_0=-1$, и, засучив рукава, снова приступаем к работе:

$$f(x_0)=f(-1)=\frac{1}{-1+3}=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x+3}\right)'=-\frac{1}{(x+3)^2}$$

$$f'(x_0)=f'(-1)=-\frac{1}{2^2}$$

$$f''(x)=\left(-\frac{1}{(x+3)^2}\right)'=\frac{1\cdot 2}{(x+3)^3}$$

$$f''(x_0)=f''(-1)=\frac{1\cdot 2}{2^3}$$

После нескольких «подходов» становится ясно, что с такими раскладами производные можно находить до бесконечности. Поэтому хорошо бы уловить некоторую закономерность. Найдем ещё третью производную:

$$f'''(x)=\left(\frac{1\cdot 2}{(x+3)^3}\right)'=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x+3)^4}$$

$$f'''(x_0)=f'''(-1)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{2^4}$$

и проанализируем найденные трофеи:

$$f'(x)=-\frac{1}{(x+3)^2},\ f''(x)=\frac{1\cdot 2}{(x+3)^3},\ f'''(x)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x+3)^4}.$$

Закономерность прослеживается: знаки чередуются, в числителе «накручивается» факториал, а в знаменателе растёт степень.

Теперь, исходя из выявленной закономерности, нужно составить производную «энного» порядка. Записываем вышесказанное на языке формул:

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x+3)^{n+1}}$$

Как проверить, правильно ли составлена энная производная? Подставьте в неё значения $n=1$, $n=2$, $n=3$ и вас должны получиться в точности первая, вторая и третья производные. После того, как мы убедились в том, что энная производная составлена правильно, подставляем в неё наше значение:

$$f^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(-1)=\frac{(-1)^n\cdot n!}{2^{n+1}}$$

Теперь нужно МЕГАвнимательно подставить все труды в формулу Тейлора и провести упрощения:

$$f(x)=\frac{1}{x+3}=\frac{1}{2}+\frac{-\frac{1}{2^2}}{1!}(x+1)+\frac{\frac{1\cdot 2}{2^3}}{2!}(x+1)^2+\frac{-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{2^4}}{3!}(x+1)^3+\ldots+\frac{\frac{(-1)^n\cdot n!}{2^{n+1}}}{n!}(x+1)^n+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}(x+1)+\frac{1}{2^3}(x+1)^2-\frac{1}{2^4}(x+1)^3+\ldots+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x+1)^n+\ldots$$

Найдём область сходимости полученного степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(x+1)^n}{2^{n+1}}$. Это стандартная задача, которой я вас «нагрузил по полной», и поэтому пора бы их уже решать в уме! Из того соображения, что на концах интервала сходимости должны сократиться «двойки в степени эн» *(на чём я неоднократно заострял внимание)*, интервал сходимости и в самом деле легко «углядеть» устно:

$-3<x<1$

На левом конце интервала получаем числовой ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(-3+1)^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(-2)^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(-1)^n\cdot 2^n}{2\cdot 2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}1^n$$ – расходится.

На правом конце то же самое.

Таким образом, **область сходимости** найденного разложения: $-3<x<1$

И финальный пример для самостоятельного решения:

Пример 63

Разложить функцию $y=\ln(1+2x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x-3)$. Найти область сходимости полученного ряда.

….Как ваше настроение? Я так и знал, что на высоте! И это неспроста:

Теперь вы сможете справиться почти со всеми типовыми задачами темы!

Дополнительную информацию можно найти в **соответствующем разделе** портала mathprofi.ru *(ссылка на карту раздела)*. Из учебной литературы рекомендую:

К.А. Бохан (том 2) – попроще, *Г.М. Фихтенгольц (том 2)* – посложнее.

Желаю успехов!

Решения и ответы

Пример 2. Решение: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+...$

Примечание: *обратите внимание, что переменная-«счётчик» в данном примере «заряжается» со значения* $n=2$.

Пример 5. Решение: *в числителе находятся степени «двойки», а в знаменателе под корнем – числа, кратные семи:*

$$\frac{2}{\sqrt[5]{7}}+\frac{4}{\sqrt[5]{14}}+\frac{8}{\sqrt[5]{21}}+...=\frac{2}{\sqrt[5]{7\cdot 1}}+\frac{2^2}{\sqrt[5]{7\cdot 2}}+\frac{2^3}{\sqrt[5]{7\cdot 3}}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt[5]{7n}}$$

Пример 7. Решение:

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8^n-3^{n+1}}{10^n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8^n-3\cdot 3^n}{10^n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n-3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{10}\right)^n=$$

$$=1+\frac{4}{5}+\frac{4^2}{5^2}+\frac{4^3}{5^3}+...+\frac{4^n}{5^n}+...-3\cdot\left(1+\frac{3}{10}+\frac{3^2}{10^2}+\frac{3^3}{10^3}+...+\frac{3^n}{10^n}+...\right)=(*)$$

Используем формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $S=\frac{b_1}{1-q}$. *Для первого ряда* $b_1=1,\ q=\frac{4}{5}$, *для второго ряда* $b_1=1,\ q=\frac{3}{10}$:

$$(*)=\frac{1}{1-\frac{4}{5}}-3\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{10}}=\frac{1}{\frac{1}{5}}-3\cdot\frac{1}{\frac{7}{10}}=5-3\cdot\frac{10}{7}=5-\frac{30}{7}=\frac{5}{7}$$

Ответ: $S=\frac{5}{7}$

Пример 9. Решение: *Методом неопределенных коэффициентов разложим общий член ряда в сумму дробей:*

$$\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{A}{5n-4}+\frac{B}{5n+1}$$

приведём правую часть к общему знаменателю:

$$\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{A(5n+1)+B(5n-4)}{(5n-4)(5n+1)}$$

после чего получаем уравнение:

$$A(5n+1)+B(5n-4)=1$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях:

$$\begin{cases}5A+5B=0\\ A-4B=1\end{cases}$$

Из 1-го уравнения выразим $B=-A$ *– подставим во 2-е уравнение:*

$$A-4(-A)=1\ \Rightarrow\ 5A=1\ \Rightarrow A=\frac{1}{5}\ \Rightarrow\ B=-\frac{1}{5}$$

Таким образом:

$$a_n=\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{\frac{1}{5}}{5n-4}-\frac{\frac{1}{5}}{5n+1}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)$$

Составим частичную сумму n *членов ряда:*

$$S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_{n-1}+a_n=$$

$$=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{16}+...+\frac{1}{5n-9}-\frac{1}{5n-4}+\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)$$

Вычислим сумму ряда: $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\overset{\to 0}{\frac{1}{5n+1}}\right)=\frac{1}{5}$

Ответ: $S=\frac{1}{5}$

Пример 11. Решение: *по формуле* $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ *разложим знаменатель в произведение и методом неопределённых коэффициентов получим сумму дробей:*

$$a_n=\frac{2}{n^2-1}=\frac{2}{(n-1)(n+1)}$$

$$\frac{A}{n-1}+\frac{B}{n+1}=\frac{2}{(n-1)(n+1)}$$

$$A(n+1)+B(n-1)=2$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях и почленно сложим уравнения полученной системы:

$$\begin{cases}A+B=0\\A-B=2\end{cases}+\quad\Rightarrow\quad 2A=2\ \Rightarrow\ A=1,\ \ B=-A=-1$$

Таким образом:

$$a_n=\frac{2}{n^2-1}=\frac{2}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}$$

Составим «энную» частичную сумму и проведём сокращения:

$$S_n=a_2+a_3+a_4+a_5+...+a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+...+\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}=$$

$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Вычислим сумму ряда:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}-\overset{\to 0}{\frac{1}{n+1}}\right)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Ответ: $S=\frac{3}{2}$

Пример 13. Решение:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3n+1}{n^2+4}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Делим числитель и знаменатель на n^3 *:*

$$(*)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^3-3n+1}{n^3}}{\frac{n^2+4}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\overset{\to 0}{\frac{3}{n^2}}+\overset{\to 0}{\frac{1}{n^3}}}{\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}+\overset{\to 0}{\frac{4}{n^3}}}=\frac{1}{0}=\infty\neq 0$$

Исследуемый ряд ***расходится****, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда.*

Пример 15. Решение*: сравним данный ряд со сходящимся рядом* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$.

Так как синус ограничен: $-1\le\sin n\le 1$*, то* $0\le\sin^2 n\le 1$*. Таким образом, для всех натуральных номеров справедливо неравенство:*

$\frac{\sin^2 n}{\sqrt{n^3}}\le\frac{1}{\sqrt{n^3}}$*, значит, по признаку сравнения, исследуемый ряд* ***сходится*** *вместе с рядом* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$.

Пример 17. Решение*: сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом* $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$*. Для всех* $n\ge 3$ *справедливо неравенство:*

$\ln n<n$*, а мЕньшим знаменателям соответствуют бОльшие дроби:*

$\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$*, значит, по признаку сравнения исследуемый ряд* ***расходится*** *вместе с гармоническим рядом.*

Пример 19. Решение*: сравним данный ряд с расходящимся рядом* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Используем предельный признак сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{3n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{3+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}=\sqrt{3}$$

Получено конечное число, отличное от нуля, значит, исследуемый ряд ***расходится*** *вместе с рядом* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

***Пример 21. Решение**: эти 3 пункта выполняем мысленно или на черновике:*
1) Старшая степень знаменателя:4
2) Старшая степень числителя: 1
3) 4 – 1 = 3

Сравним предложенный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$.

Используем предельный признак сравнения:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{5n-1}{3n^4+2n^2+7}}{\frac{1}{n^3}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3(5n-1)}{3n^4+2n^2+7}=\lim_{n\to+\infty}\frac{5n^4-n^3}{3n^4+2n^2+7}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{5n^4-n^3}{n^4}}{\frac{3n^4+2n^2+7}{n^4}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5-\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}{3+\underset{}{\overset{\to 0}{\frac{2}{n^2}}}+\overset{\to 0}{\frac{7}{n^4}}}\right)=\frac{5}{3}$$ – *получено конечное число,*

*отличное от нуля, значит, исследуемый ряд **сходится** вместе с рядом* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$.

***Пример 24. Решение**: Используем признак Даламбера:*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2^{n+1+1}}{\sqrt{3(n+1)+5}}}{\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1+1}\cdot\sqrt{3n+5}}{2^{n+1}\cdot\sqrt{3(n+1)+5}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\cdot 2^{n+1}\cdot\sqrt{3n+5}}{2^{n+1}\cdot\sqrt{3n+8}}=2\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{3n+5}{3n+8}}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=2\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{\frac{3n+5}{n}}{\frac{3n+8}{n}}}=2\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{3+\overset{\to 0}{\frac{5}{n}}}{3+\overset{\to 0}{\frac{8}{n}}}}=2\cdot\sqrt{1}=2>1$$

*Таким образом, исследуемый ряд **расходится**.*

***Примечание:** здесь можно было использовать и «турбо»-метод решения: сразу обвести карандашом отношение* $\frac{\sqrt{3n+5}}{\sqrt{3n+8}}$ *и указать, что оно стремится к единице с пометкой «одного порядка роста».*

***Пример 26. Решение**: Используем признак Даламбера:*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{n!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{5^{n+1}\cdot n!}{5^n\cdot(n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{5\cdot 5^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{5^n 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)}=5\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=5\cdot 0=0<1$$

*Таким образом, исследуемый ряд **сходится**.*

Пример 29. Решение: *используем радикальный признак Коши.*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{3n+2}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{3n+2}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}^{\to 0}}{3+\frac{2}{n}^{\to 0}}=\frac{1}{3}<1,$$ *значит, исследуемый ряд* ***сходится***.

Пример 31. Решение: *используем радикальный признак Коши.*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n+4}{2n-1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5n+4}{2n-1}\right)^{\frac{n^2}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5n+4}{2n-1}\right)^n=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{5n+4}{n}}{\frac{2n-1}{n}}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5+\frac{4}{n}^{\to 0}}{2-\frac{1}{n}^{\to 0}}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n=+\infty>1,$$ *значит, ряд* ***расходится***.

Примечание: *здесь основание степени* $\frac{5}{2}>1$, *поэтому* $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n=+\infty$

Пример 33. Решение: *Используем интегральный признак Коши:*

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln^3(x+1)}=(*)$$

Подынтегральная функция непрерывна на $[1;+\infty)$

$$(*)=\int_1^{+\infty}\frac{d(\ln(x+1))}{\ln^3(x+1)}=-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln^2(x+1)}\right)\Bigg|_1^b=-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln^2(b+1)}^{\to 0}-\frac{1}{\ln^2 2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{\ln^2 2}\right)=\frac{1}{2\ln^2 2}$$ *– конечное число, значит, исследуемый ряд* ***сходится*** *вместе с соответствующим несобственным интегралом.*

Пример 35. Решение. Способ первый: *используем интегральный признак:*

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{(5x-1)^2}}=(*)$$

Подынтегральная функция непрерывна на $[1;+\infty)$

$$(*)=\int_1^{+\infty}(5x-1)^{-\frac{2}{3}}dx=\frac{1}{5}\int_1^{+\infty}(5x-1)^{-\frac{2}{3}}d(5x-1)=\frac{3}{5}\lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt[3]{5x-1}\right)\Big|_1^b=$$

$$=\frac{3}{5}\lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt[3]{5b-1}^{\to+\infty}-\sqrt[3]{4}\right)=\frac{3}{5}\left(+\infty-\sqrt[3]{4}\right)=+\infty$$

Таким образом, исследуемый ряд ***расходится*** *вместе с соответствующим несобственным интегралом*

Способ второй: *сравним данный ряд с расходящимся рядом* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. *Используем* *предельный признак сравнения*:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{(5n-1)^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{(5n-1)^2}}{\sqrt[3]{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{(5n-1)^2}{n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\left(\frac{5n-1}{n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\left(5-\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}\right)^2}=\sqrt[3]{5^2}$$ *– конечное число, отличное от нуля,*

значит, исследуемый ряд ***расходится*** *вместе с рядом* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$.

Пример 39.

а) Решение: *используем признак Лейбница:*

1) Данный ряд является знакочередующимся:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{4}}-\frac{4}{\sqrt{5}}+\ldots$$

2) $$\lim_{n\to+\infty}|a_n|=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n+1}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{\sqrt{n+1}}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2}}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n^2}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}+\overset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}}}=\frac{1}{0}=\infty\neq 0$$ *– члены ряда не убывают по модулю,*

следовательно, предела $\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\cdot(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$ *не существует, и ряд расходится, т.к. не выполнен* *необходимый признак сходимости*.

б) Решение: *используем признак Лейбница:*

1) Ряд является знакочередующимся:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n+5}=\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\frac{1}{14}-\frac{1}{17}+\ldots$$

2) $\lim_{n\to+\infty}|a_n|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3n+5}=0$ *– члены ряда убывают по модулю.*

3) Каждый следующий член ряда по модулю $|a_{n+1}|=\frac{1}{3(n+1)+5}=\frac{1}{3n+8}$ *меньше, чем предыдущий* $|a_n|=\frac{1}{3n+5}$: $\frac{1}{3n+8}<\frac{1}{3n+5}$, *значит, убывание монотонно.*

Таким образом, ряд сходится по признаку Лейбница.

Исследуем сходимость ряда, составленного из модулей:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+5}$$

Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. *Используем предельный признак сравнения:*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{3n+5}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+5}{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(3+\frac{5}{n}^{\to 0}\right)=3$$ *– конечное число, отличное от нуля,*

значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *расходится вместе с гармоническим рядом.*

Вывод: *исследуемый ряд* ***сходится условно****.*

Пример 41. Решение*: по причине множителя* $(-1)^n$ *ряд является знакочередующимся:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}=-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{9!}-\ldots,$$ *и мы используем признак Лейбница:*

$$\lim_{n\to+\infty}|a_n|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}=0$$ *– члены ряда убывают по модулю.*

Найдём модуль $(n+1)$*-го члена:* $|a_{n+1}|=\frac{1}{(2(n+1)+1)!}=\frac{1}{(2n+3)!}$. *Для любого номера* n *справедливо неравенство* $|a_{n+1}|<|a_n|$*:*

$$\frac{1}{(2n+3)!}<\frac{1}{(2n+1)!},$$ *т.е. члены убывают монотонно.*

Таким образом, ряд сходится по признаку Лейбница.

Исследуем ряд, составленный из модулей членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$$

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(2(n+1)+1)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+1)(2n+2)(2n+3)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}=0<1,$$ *значит, ряд*

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *сходится.*

Вывод: *исследуемый ряд* ***сходится абсолютно****.*

Примечание: *возможно, не всем понятно, как разложены факториалы. Это всегда можно установить опытным путём – возьмём и сравним какие-нибудь соседние члены ряда:*

$\frac{1}{5!}$ *и* $\frac{1}{7!}$*, следующий член ряда к предыдущему:* $\frac{\frac{1}{7!}}{\frac{1}{5!}}=\frac{5!}{7!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}$

$\frac{1}{7!}$ *и* $\frac{1}{9!}$*, следующий член ряда к предыдущему:* $\frac{\frac{1}{9!}}{\frac{1}{7!}}=\frac{7!}{9!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}$

…

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{\frac{1}{(2n+3)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2n\cdot(2n+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2n\cdot(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$$

Пример 43.

а) Решение*: используем признак Лейбница.*

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{3^n}=\frac{1}{3}-\frac{2^2}{3^2}+\frac{3^2}{3^3}-\frac{4^2}{3^4}+\ldots$ *– ряд является знакочередующимся.*

$\lim_{n\to+\infty}|a_n|=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{3^n}=0$ *– члены ряда монотонно убывают по модулю (так как* 3^n *более высокого порядка роста, чем* n^2*).*

Таким образом, ряд сходится.

Исследуем сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$$

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n\cdot(n^2+2n+1)}{3\cdot3^n\cdot n^2}=\frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\overset{\to0}{\frac{2}{n}}+\overset{\to0}{\frac{1}{n^2}}\right)=\frac{1}{3}<1$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *сходится.*

Вывод: *исследуемый ряд* ***сходится абсолютно****.*

б) ***Решение****: используем признак Лейбница*

Данный ряд является знакочередующимся:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}=\frac{1}{2\sqrt{\ln 2}}-\frac{1}{3\sqrt{\ln 3}}+\frac{1}{4\sqrt{\ln 4}}-\frac{1}{5\sqrt{\ln 5}}+\dots$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}=0$ *– члены ряда убывают по модулю.*

Найдём модуль $(n+1)$ *-го члена:* $|a_{n+1}|=\frac{1}{(n+1+1)\sqrt{\ln(n+1+1)}}=\frac{1}{(n+2)\sqrt{\ln(n+2)}}$.

Для любого номера n *справедливо неравенство* $(n+2)\sqrt{\ln(n+2)}>(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}$*, а бОльшим знаменателям соответствуют меньшие дроби:*

$$\frac{1}{(n+2)\sqrt{\ln(n+2)}}<\frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$$

Таким образом, каждый следующий член ряда меньше предыдущего: $|a_{n+1}|<|a_n|$*, т.е. члены убывают монотонно.*

Ряд сходится по признаку Лейбница.

Исследуем сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$$

Используем интегральный признак.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}=(*)$$

Подынтегральная функция непрерывна на $[1;+\infty)$.

$$(*)=\int_1^{+\infty}\frac{d(\ln(x+1))}{\sqrt{\ln(x+1)}}=2\lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt{\ln(x+1)}\right)\Big|_1^b=2\lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt{\ln(b+1)}^{\to+\infty}-\sqrt{\ln 2}\right)=+\infty$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *расходится вместе с соответствующим несобственным интегралом.*

Вывод: *исследуемый ряд* ***сходится условно***.

Пример 46. Решение: *с помощью признака Даламбера найдем интервал сходимости ряда:*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(n+1)^2x^{n+1}}{7^{n+1}\cdot(n+2)}}{\dfrac{n^2x^n}{7^n\cdot(n+1)}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x\cdot x^n\cdot 7^n\cdot(n^2+2n+1)(n+1)}{x^n\cdot 7\cdot 7^n\cdot n^2\cdot(n+2)}\right|=$$

$$=\frac{|x|}{7}\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\overset{\to 0}{\frac{2}{n}}+\overset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}\right)\cdot\frac{\dfrac{n+1}{n}}{\dfrac{n+2}{n}}\right)=\frac{|x|}{7}\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\overset{\to 0}{\dfrac{1}{n}}}{1+\underset{}{\overset{\to 0}{\dfrac{2}{n}}}}=\frac{|x|}{7}$$

Таким образом, ряд сходится при $\frac{|x|}{7}<1$. *Умножим обе части неравенства на 7:*

$|x|<7$ *и раскроем модуль:*

$-7<x<7$ *– интервал сходимости исследуемого степенного ряда.*

Исследуем сходимость ряда на концах найденного интервала:

1) При $x=-7$ *получаем числовой ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot(-7)^n}{7^n\cdot(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot(-1)^n\cdot 7^n}{7^n\cdot(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot(-1)^n}{(n+1)}$

Данный ряд знакочередуется.

$$\lim_{n\to+\infty}|a_n|=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{n^2}{n^2}}{\dfrac{n+1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\overset{\to 0}{\dfrac{1}{n}}+\overset{\to 0}{\dfrac{1}{n^2}}}=\frac{1}{0}=\infty\neq 0$$ *– члены ряда не убывают по модулю, значит, предела* $\lim_{n\to+\infty}a_n$ *не существует, и ряд расходится, т.к. не выполнен необходимый признак сходимости.*

2) При $x=7$ *получаем числовой ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 7^n}{7^n\cdot(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)}$ *– расходится по той же причине (с тем отличием, что здесь* $\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty\neq 0$*).*

Ответ: $-7<x<7$ *– область сходимости ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot x^n}{7^n\cdot(n+1)}=\frac{x}{7\cdot 2}+\frac{2^2\cdot x^2}{7^2\cdot 3}+\frac{3^2\cdot x^3}{7^3\cdot 4}+\ldots$$

Пример 48. Решение*: найдём интервал сходимости ряда:*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(2(n+1))!\cdot(x-2)^{n+1+1}}{10^{n+1}}}{\dfrac{(2n)!\cdot(x-2)^{n+1}}{10^n}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{10^n\cdot(x-2)^{n+2}\cdot(2n+2)!}{10^{n+1}\cdot(x-2)^{n+1}\cdot(2n)!}\right|=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{10^n\cdot(x-2)(x-2)^{n+1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}{10\cdot 10^n\cdot(x-2)^{n+1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-2)\cdot(2n+1)(2n+2)}{10}\right|=\frac{|x-2|}{10}\lim_{n\to+\infty}(4n^2+6n+2)^{\to+\infty}=\frac{|x-2|}{10}\cdot(+\infty)=+\infty$$

Ответ: *ряд сходится при* $x=2$

Пример 50. Решение: *найдем интервал сходимости ряда:*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}\cdot(x+3)^{n+1}}{\sqrt[3]{2(n+1)+1}}}{\dfrac{2^n\cdot(x+3)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}} = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x+3)(x+3)^n\cdot 2\cdot 2^n\cdot\sqrt[3]{2n+1}}{(x+3)^n\cdot 2^n\cdot\sqrt[3]{2n+3}}\right| =$$

$$= 2|x+3|\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{2n+1}{2n+3}} = \frac{\infty}{\infty} = 2|x+3|\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{\frac{2n+1}{n}}{\frac{2n+3}{n}}} = 2|x+3|\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{2+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}{2+\overset{\to 0}{\frac{3}{n}}}} = 2|x+3|$$

Таким образом, ряд сходится при $2|x+3|<1$

Слева нужно оставить только модуль, умножаем обе части неравенства на $\frac{1}{2}$*:*

$$|x+3|<\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}<x+3<\frac{1}{2}$$

В середине нужно оставить только x*, вычитаем из каждой части неравенства 3:*

$$-\frac{1}{2}-3<x+3-3<\frac{1}{2}-3$$

$-\frac{7}{2}<x<-\frac{5}{2}$ *– интервал сходимости исследуемого степенного ряда.*

Исследуем сходимость ряда на концах найденного интервала:

1) При $x=-\frac{7}{2}\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(-\frac{7}{2}+3\right)^n}{\sqrt[3]{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt[3]{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}$

Примечание: 2^n *сократились, значит, мы на верном пути.*

Полученный числовой ряд является знакочередующимся.

$\lim_{n\to+\infty}|a_n| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}} = 0$ *– члены ряда убывают по модулю, причём каждый следующий член по модулю меньше предыдущего:* $\frac{1}{\sqrt[3]{2n+3}} < \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}$ $\left(|a_{n+1}|<|a_n|\right)$*, т.е. убывание монотонно.*

Таким образом, ряд сходится по признаку Лейбница.

Исследуем ряд, составленный из модулей:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}$$

Здесь можно использовать предельный признак сравнения, но для разнообразия я пойду другим путём.

Используем интегральный признак Коши:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1}}=(*)$$

Подынтегральная функция непрерывна на $[1;+\infty)$.

$$(*)=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}(2x+1)^{-\frac{1}{3}}d(2x+1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)\Big|_1^b=\frac{3}{4}\lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt[3]{(2b+1)^2}_{\to+\infty}-\sqrt[3]{9}\right)=+\infty$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *расходится вместе с соответствующим несобственным интегралом, и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}$ *сходится лишь условно*

2) При $x=-\frac{5}{2}$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(-\frac{5}{2}+3\right)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}$ *– расходится.*

Ответ: *область сходимости исследуемого степенного ряда:* $-\frac{7}{2}\le x<-\frac{5}{2}$, *при* $x=-\frac{7}{2}$ *ряд сходится условно.*

Примечание: *область сходимости окончательно можно записать так:* $-3\frac{1}{2}\le x<-2\frac{1}{2}$, *или даже так:* $-3{,}5\le x<-2{,}5$. *Но не нужно :) ;)*

Пример 52. Решение: *с помощью признака Даламбера найдем интервал сходимости ряда:*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}\cdot x^{2(n+1)}}{n+2}}{\frac{2^n\cdot x^{2n}}{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^2\cdot x^{2n}\cdot 2\cdot 2^n\cdot(n+1)}{x^{2n}\cdot 2^n\cdot(n+2)}\right|=$$

$$=2x^2\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n}}=2x^2\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\overset{\to0}{\frac{1}{n}}}{1+\overset{\to0}{\frac{2}{n}}}=2x^2$$

Таким образом, ряд сходится при $2x^2<1$

$$x^2<\frac{1}{2}$$

$$|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ *– интервал сходимости исследуемого степенного ряда.*

Исследуем сходимость ряда на концах найденного интервала:

1) При $x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot(-1)^{2n}\cdot\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$

Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. *Используем предельный признак сравнения:*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}\right)=1$$ *– получено конечное число, отличное от нуля, значит, ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ *расходится вместе с гармоническим рядом.*

Примечание: *также здесь легко применить и интегральный признак:*

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x+1}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln(x+1)\right)\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\overset{\to+\infty}{\ln(b+1)}-\ln 2\right)=+\infty$$

2) При $x=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ *– расходится.*

Ответ: *область сходимости исследуемого степенного ряда:* $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$

Пример 54. Решение:

а) *Используем разложение* $e^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\ldots+\frac{\alpha^n}{n!}+\ldots$ *для* $\alpha=-2x$*:*

$$e^{-2x}=1+\frac{(-2x)}{1!}+\frac{(-2x)^2}{2!}+\frac{(-2x)^3}{3!}+\ldots+\frac{(-2x)^n}{n!}+\ldots=1-2x+\frac{2^2x^2}{2!}-\frac{2^3x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n2^nx^n}{n!}+\ldots$$

б) *Используем разложение* $\sin\alpha=\alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\frac{\alpha^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\cdot\alpha^{2n-1}+\ldots$.

В данном случае $\alpha=x^2$*:*

$$\sin x^2=x^2-\frac{(x^2)^3}{3!}+\frac{(x^2)^5}{5!}-\frac{(x^2)^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\cdot(x^2)^{2n-1}+\ldots=$$

$$=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{4n-2}}{(2n-1)!}+\ldots$$

Очевидно, что оба ряда сходятся на всей числовой прямой: $-\infty<x<+\infty$

***Пример 56. Решение**: используем разложение:*

$$\cos\alpha = 1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\frac{\alpha^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n\alpha^{2n}}{(2n)!}+\ldots.$$

Область сходимости ряда: $-\infty<\alpha<+\infty$

В данном случае $\alpha=3x$*:*

$$\cos 3x = 1-\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^4}{4!}-\frac{(3x)^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n(3x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

Раскрываем наверху скобки:

$$\cos 3x = 1-\frac{3^2x^2}{2!}+\frac{3^4x^4}{4!}-\frac{3^6x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n3^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

и умножаем обе части на «икс»:

$$x\cos 3x = x\cdot\left(1-\frac{3^2x^2}{2!}+\frac{3^4x^4}{4!}-\frac{3^6x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n3^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)$$

*В итоге **искомое разложение** функции в ряд:*

$$y = x\cos 3x = x-\frac{3^2x^3}{2!}+\frac{3^4x^5}{4!}-\frac{3^6x^7}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n3^{2n}x^{2n+1}}{(2n)!}+\ldots$$

Область сходимости ряда: $-\infty<\alpha<+\infty$

***Примечание:** домножение* $\cos 3x$ *на «икс» не играет никакой роли в плане сходимости.*

Пример 58.

***а) Решение**: используем разложение:*

$$e^{\alpha} = 1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\ldots+\frac{\alpha^n}{n!}+\ldots.$$

В данном случае $\alpha=-\frac{x^2}{2}$*:*

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1+\frac{-\frac{x^2}{2}}{1!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3}{3!}+\ldots+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!}+\ldots=$$

$$=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}-\frac{x^6}{2^3\cdot 3!}+\ldots+\frac{(-1)^nx^{2n}}{2^n\cdot n!}+\ldots$$

Конструируем функцию дальше:

$$1-e^{-\frac{x^2}{2}} = 1-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}-\frac{x^6}{2^3\cdot 3!}+\ldots+\frac{(-1)^nx^{2n}}{2^n\cdot n!}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}+\frac{x^6}{2^3\cdot 3!}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2^n\cdot n!}+\ldots$$

Окончательно:

$$f(x)=\frac{1-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}=\frac{\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}+\frac{x^6}{2^3\cdot 3!}-...+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2^n\cdot n!}+...}{x}=$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^2\cdot 2!}+\frac{x^5}{2^3\cdot 3!}-...+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2^n\cdot n!}+...$$ – ***искомое разложение***.

Полученный ряд ***сходится при*** $-\infty<x<+\infty$

Примечание: *в точке он сходится не исходной функции, а конкретному значению:*

$$\frac{0}{2}-\frac{0^3}{2^2\cdot 2!}+\frac{0^5}{2^3\cdot 3!}-...+\frac{(-1)^{n+1}\cdot 0^{2n-1}}{2^n\cdot n!}+...=0$$

б) Решение*: используем частный случай биномиального разложения:*

$$\frac{1}{1+\alpha}=1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4-\alpha^5+...+(-1)^n\alpha^n+...$$ *для* $\alpha=3x^3$*:*

$$f(x)=\frac{1}{1+3x^3}=1-3x^3+(3x^3)^2-(3x^3)^3+(3x^3)^4-(3x^3)^5+...+(-1)^n(3x^3)^n+...=$$

$$=1-3x^3+3^2x^6-3^3x^9+3^4x^{12}-3^5x^{15}+...+(-1)^n3^nx^{3n}+...$$

Полученный степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n3^nx^{3n}$ *можно исследовать по обычной схеме, но есть более короткий путь. Биномиальный ряд сходится при* $-1<\alpha<1$ *(см. таблицу), и поскольку* $\alpha=3x^3$*, то интервал сходимости найдём из неравенства:*

$$-1<3x^3<1.$$

Делим все части на 3 и извлекаем из всех частей кубический корень:

$$-\frac{1}{3}<x^3<\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}<x<\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$ *– интервал сходимости ряда.*

Исследуем сходимость ряда на концах найдённого интервала:

при $x=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ *получаем ряд* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n3^n\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{3n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n3^n\cdot\frac{(-1)^{3n}}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{4n}=\sum_{n=0}^{\infty}1^n$ *;*

при $x=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ *получаем ряд* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n3^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{3n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n3^n\cdot\frac{1}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$.

Оба ряда расходятся, т.к. не выполнен необходимый признак сходимости.

Таким образом, ***область сходимости*** *найденного разложения:*

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}<x<\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

Пример 60. а) Решение: *преобразуем функцию:*

$$\ln(10+x)=\ln\left(10\left(1+\frac{x}{10}\right)\right)=\ln 10+\ln\left(1+\frac{x}{10}\right)=(*)$$

Используем разложение:

$$\ln(1+\alpha)=\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{3}-\frac{\alpha^4}{4}+\frac{\alpha^5}{5}-...+(-1)^{n-1}\cdot\frac{\alpha^n}{n}+...$$

В данном случае $\alpha=\frac{x}{10}$*:*

$$(*)=\ln 10+\frac{x}{10}-\frac{\left(\frac{x}{10}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{x}{10}\right)^3}{3}-\frac{\left(\frac{x}{10}\right)^4}{4}+\frac{\left(\frac{x}{10}\right)^5}{5}-...+(-1)^{n-1}\cdot\frac{\left(\frac{x}{10}\right)^n}{n}+...$$

$=\ln 10+\frac{x}{10}-\frac{x^2}{2\cdot 10^2}+\frac{x^3}{3\cdot 10^3}-\frac{x^4}{4\cdot 10^4}+\frac{x^5}{5\cdot 10^5}-...+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n\cdot 10^n}+...$ – ***искомое разложение***:

Найдем область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^n}{n\cdot 10^n}$. *Согласно таблице, использованное разложение сходится при* $-1<\alpha<1$. *Так как* $\alpha=\frac{x}{10}$*, то:*

$$-1<\frac{x}{10}<1$$

$-10<x<10$ – *интервал сходимости исследуемого степенного ряда.*

Исследуем сходимость ряда на концах найденного интервала:

При $x=-10 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(-10)^n}{n\cdot 10^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(-1)^n\cdot 10^n}{n\cdot 10^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – *расходится.*

При $x=10 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 10^n}{n\cdot 10^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ – *сходится условно*.

Таким образом, ***область сходимости*** *полученного разложения:* $-10<x\le 10$

б) Решение: *Используем разложение:*

$$arctg\alpha=\alpha-\frac{\alpha^3}{3}+\frac{\alpha^5}{5}-\frac{\alpha^7}{7}+...+(-1)^n\cdot\frac{\alpha^{2n+1}}{2n+1}+...$$

В данном случае $\alpha=\sqrt{x}$*:*

$arctg\sqrt{x}=\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x^3}}{3}+\frac{\sqrt{x^5}}{5}-\frac{\sqrt{x^7}}{7}+...+(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{x^{2n+1}}}{2n+1}+...$ – *искомый ряд.*

Согласно таблице, разложение арктангенса сходится при $-1\le\alpha\le 1$*, но поскольку квадратный корень неотрицателен:* $\alpha=\sqrt{x}\ge 0$*, то* ***область сходимости*** *полученного ряда:* $0\le x\le 1$.

Пример 63. Решение: *используем формулу Тейлора:*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

В данном случае: $x_0 = 3$

$$f(x_0) = f(3) = \ln 7$$

$$f'(x) = (\ln(1 + 2x))' = \frac{2}{1 + 2x}$$

$$f'(x_0) = f'(3) = \frac{2}{7}$$

$$f''(x) = \left(\frac{2}{1 + 2x}\right)' = -\frac{2^2 \cdot 1}{(1 + 2x)^2}$$

$$f''(x_0) = f''(3) = -\frac{2^2}{7^2} = -\left(\frac{2}{7}\right)^2$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{2^2 \cdot 1}{(1 + 2x)^2}\right)' = \frac{2^3 \cdot 1 \cdot 2}{(1 + 2x)^3} = \frac{2^3 \cdot 2!}{(1 + 2x)^3}$$

$$f'''(x_0) = f'''(3) = \frac{2^3 \cdot 2!}{7^3}$$

…

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot (n-1)!}{(1 + 2x)^n}$$

$$f'''(x_0) = f'''(3) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot (n-1)!}{7^n}$$

…

Подставим вычисленные производные в формулу Тейлора:

$$y = \ln(1 + 2x) =$$

$$= \ln 7 + \frac{\frac{2}{7}}{1!}(x - 3) + \frac{-\frac{2^2}{7^2}}{2!}(x - 3)^2 + \frac{\frac{2^3 \cdot 2!}{7^3}}{3!}(x - 3)^3 + \ldots + \frac{\frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot (n-1)!}{7^n}}{n!}(x - 3)^n + \ldots =$$

$$= \ln 7 + \frac{2}{7}(x - 3) - \frac{2^2}{2 \cdot 7^2}(x - 3)^2 + \frac{2^3}{3 \cdot 7^3}(x - 3)^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n}{n \cdot 7^n}(x - 3)^n + \ldots$$

Интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot (x-3)^n}{n \cdot 7^n}$ *можно найти по обычной схеме, либо из соображений:* $|x - 3| = \frac{7}{2}$ *(чтобы общий член сократился на* 7^n *и* 2^n*). Раскрывая модуль, получаем корни:* $x - 3 = \pm\frac{7}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, x = \frac{13}{2}$*, и, опуская их подстановку в степенной ряд, я запишу готовую* ***область сходимости****:* $-\frac{1}{2} < x \le \frac{13}{2}$.