Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет информационных технологий и управления

Кафедра информационных технологий автоматизированных систем

Лабораторная работа №2
«Многомерные распределения теории вероятностей
и математической статистики»
по дисциплине «Статистические методы обработки данных»

Вариант 7

Выполнили:
ст. гр. 820601
Шведов А.Р
Пальчик А.М.

Проверил:
Ярмолик В.И.

Минск 2021

1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Изучение многомерных распределений теории вероятностей и математической статистики;

Исследование многомерных распределений теории вероятностей и математической статистики с помощью средств *Matlab*.

2 ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

2.1 Исследование графиков плотности вероятности двухмерных распределений

Вывести на экран монитора график поверхности и линии равных уровней плотности вероятности заданного двухмерного распределения (при m=2) и исследовать его зависимость от параметров распределений.

В данной работе рассмотрим равномерное распределение в гиперпрямоугольнике $U_m((a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_m, b_m))$, плотность распределения которого задается формулой:

$$f_{\overline{\xi}}(\overline{x}) = \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{m} \dfrac{1}{(b_i - a_i)}, & a_i \le \forall x_i \le b_i,\ a_i < b_i, \\ 0, & (\exists x_i)\ x_i > b_i,\ x_i < a_i. \end{cases}$$

Здесь a, b – границы интервала распределения.

Сформируем массив значений f функции с помощью двух вложенных циклов *for*. Таким образом для каждой пары значений *(x;y)* можно вычислить значение плотности распределения по заданной формуле. Зададим параметры распределения $a_1=1$, $b_1=3$ – для первого измерения, $a_2=1$, $b_2=4$ – для второго измерения. Код программы *Matlab* покажем на рисунке 2.1:

```
clc;
clear;
a1=1;
b1=3;
a2=1;
b2=4;
[x1,x2]=meshgrid(0:0.25:10,0:0.25:10);
n=length(x1);
m=length(x2);
for i=1:n
    for j=1:m
   if ( ( (x1(i,j)>a1) && (x1(i,j)<b1) && (a1<b1) ) && ( (x2(i,j)>a2) && (x2(i,j)<b2) && (a2<b2) ) )
       f(i,j)=1/((b1-a1)*(b2-a2));
   else
    f(i,j)=0;
    end
    end
end
figure
mesh(x1,x2,f);
figure
contour(x1,x2,f,1,'b');
```

Рисунок 2.1 – Код программы

Результат выполнения программы представлен на рисунках 2.2-2.3:

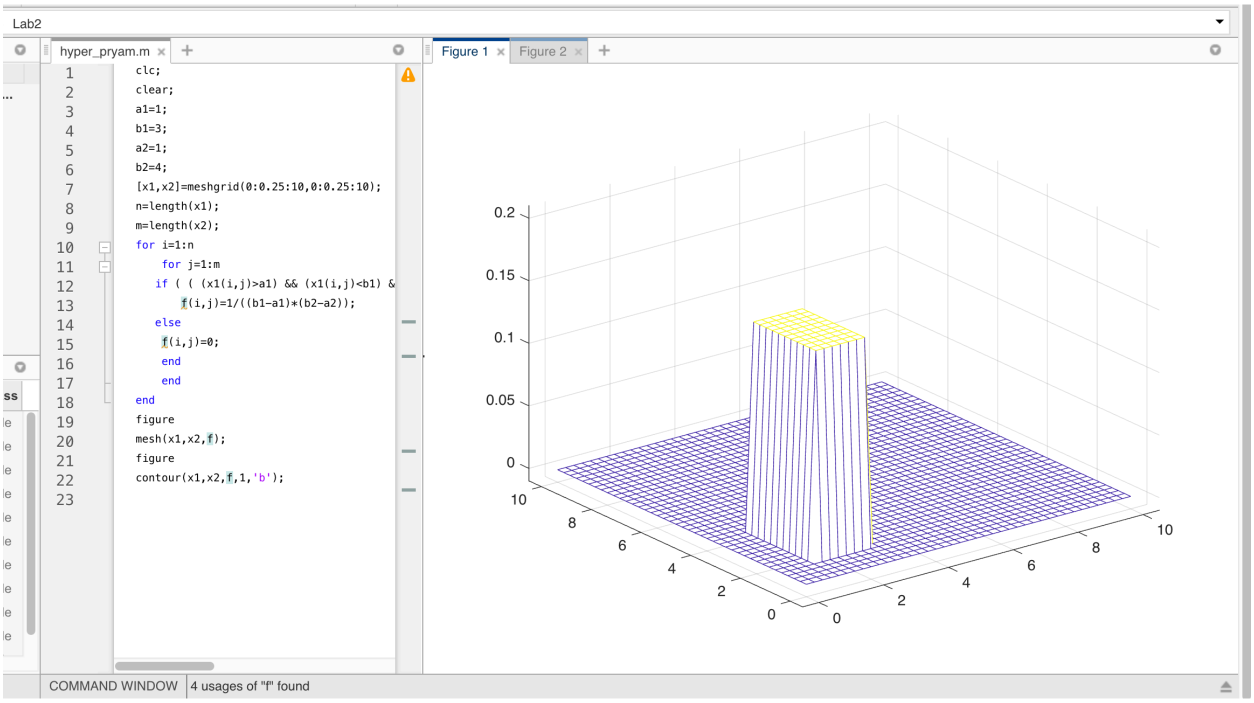

Рисунок 2.2 – График поверхности равномерного распределения в гиперпрямоугольнике

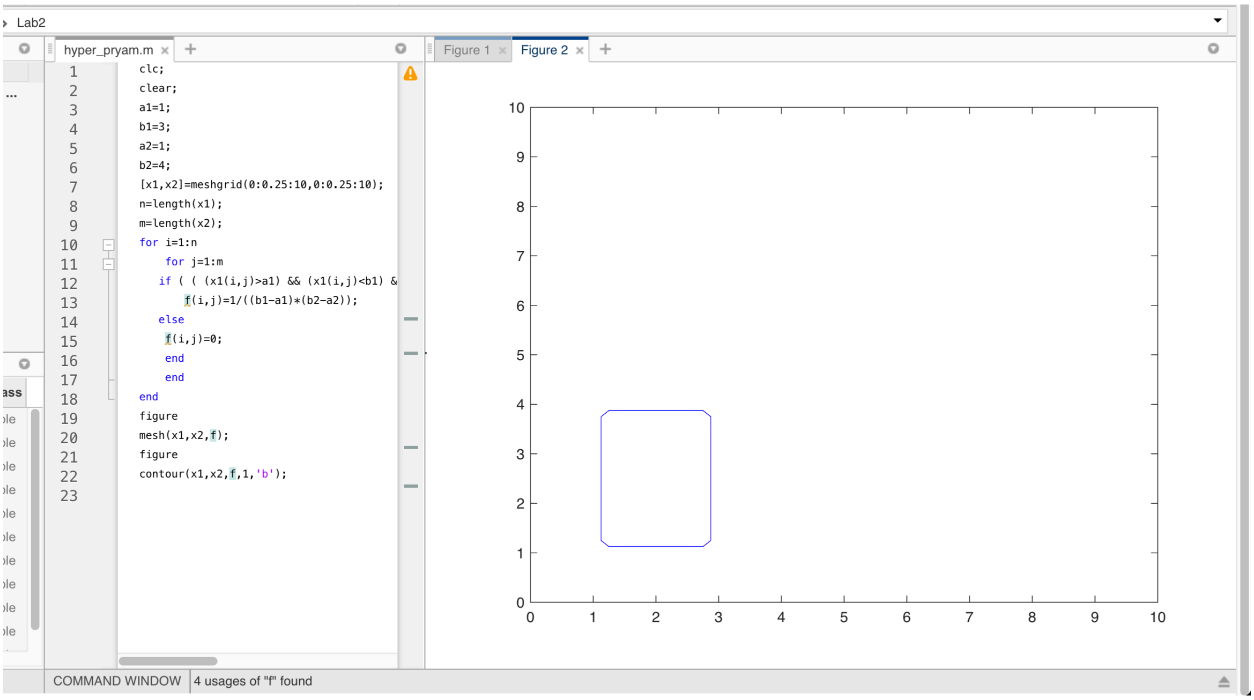

Рисунок 2.3 – Линии равных уровней плотностей вероятностей

Исследуем зависимость значений функции от параметров распределений. Изменим параметры для первого измерения (*a_1=2*, *b_1=3*), оставив параметры второго распределения неизменными и равными *a_2=1*, *b_2=4*. Результат выполнения программы с измененными параметрами представлен на рисунках 2.4 и 2.5:

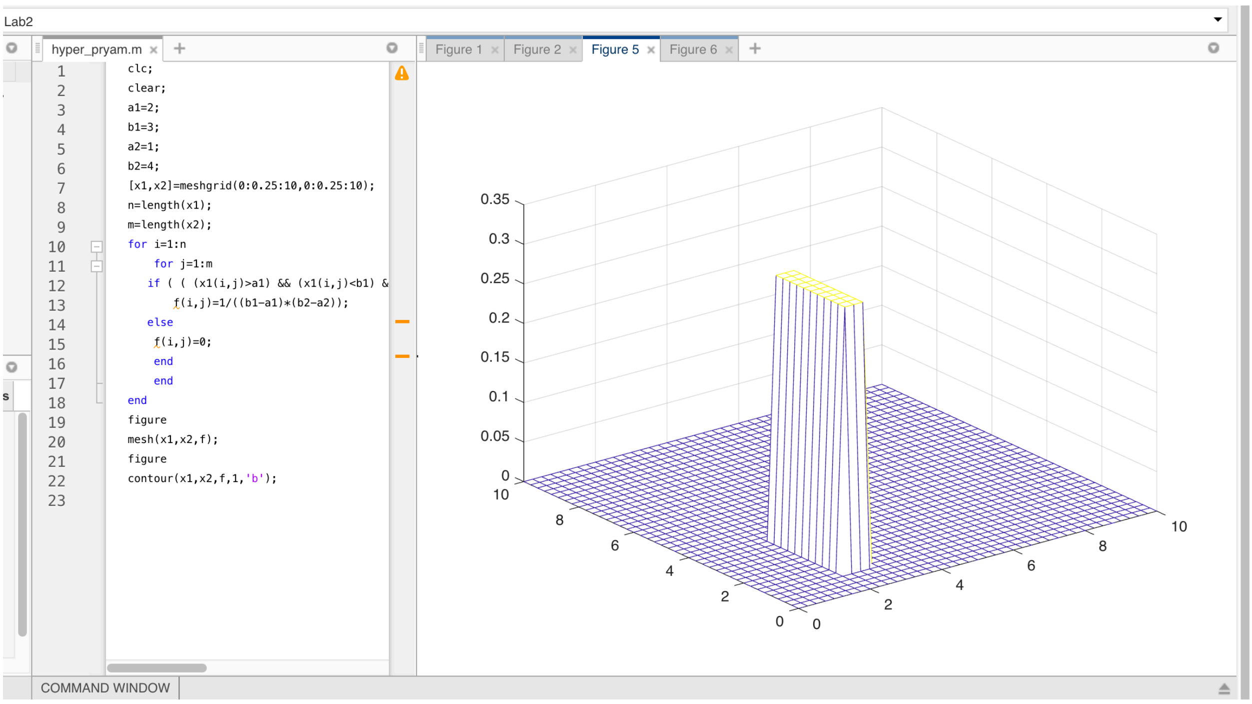

Рисунок 2.4 – График поверхности равномерного распределения в гиперпрямоугольнике

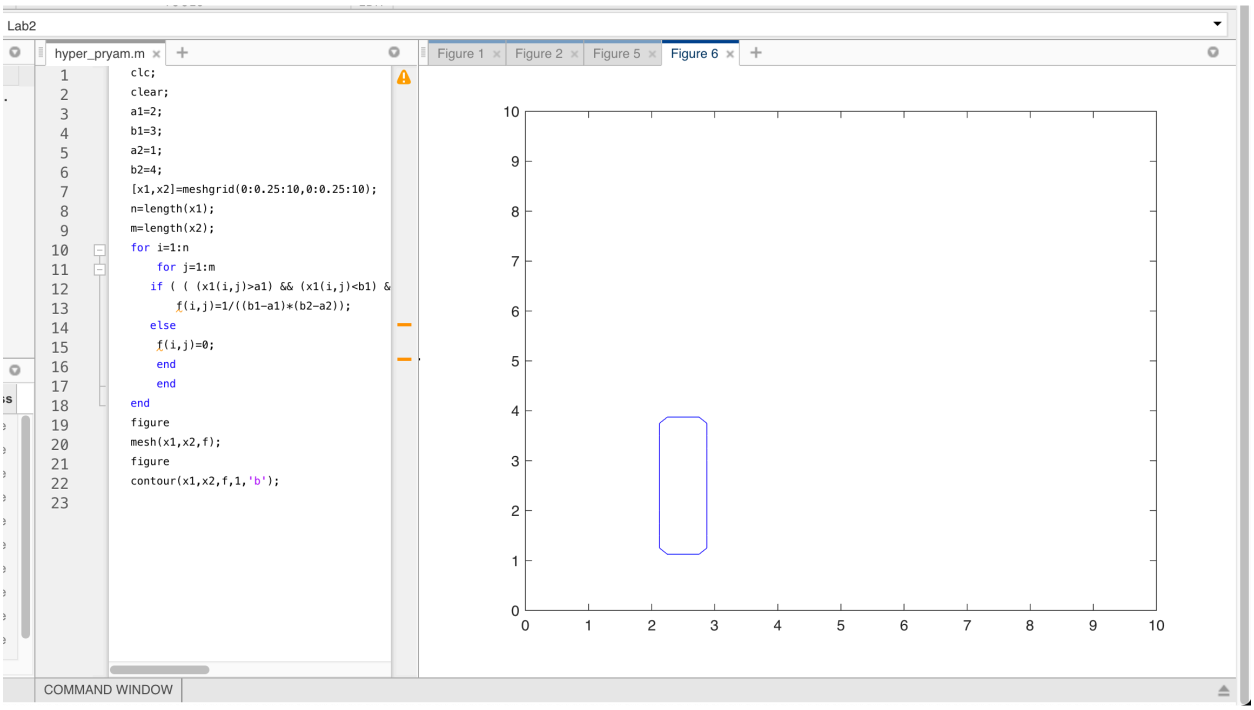

Рисунок 2.5 – Линии равных уровней плотностей вероятностей

Видно, что с уменьшением длины интервала (*a1;b1*) значение плотности распределения *f* увеличивается.

Теперь исследуем зависимость значения функции от параметров второго измерения. Примем $a_2=2$, $b_2=7$, оставив значения параметров первого измерения равными $a_1=1$, $b_1=3$.

Результат выполнения программы с измененными параметрами представлен на рисунках 2.6 и 2.7:

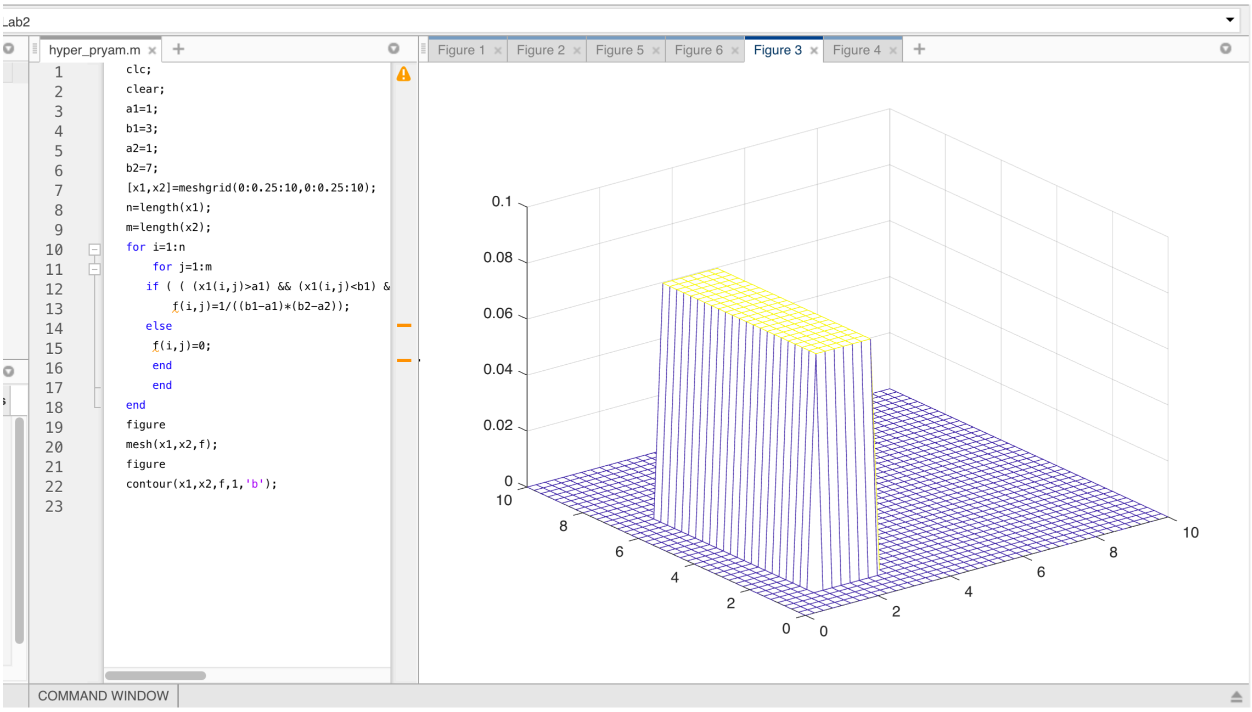

Рисунок 2.6 – График поверхности равномерного распределения в гиперпрямоугольнике

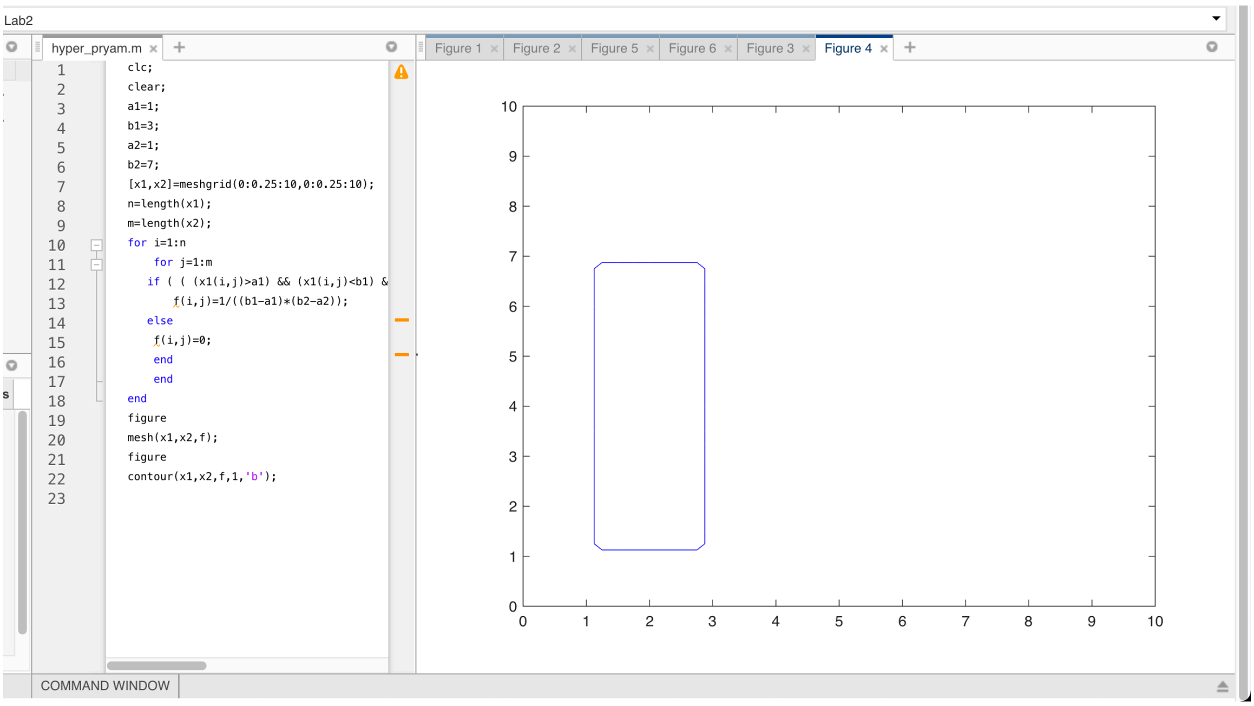

Рисунок 2.7 – Линии равных уровней плотностей вероятностей

Видим, что с увеличением длины интервала $(a_2;b_2)$ значение плотности распределения z уменьшается.

2.2 Исследование эллипса рассеяния и функций регрессии для нормального распределения

Для нормального распределения в одно графическое окно вывести эллипс рассеяния и две функции регрессии. Исследовать зависимость формы и площади эллипса рассеяния от коэффициента корреляции при заданных дисперсиях компонент случайного вектора. Исследовать взаимное расположение функций регрессии и осей эллипса рассеяния (совпадают ли функции регрессии с осями эллипса?).

В данной работе рассмотрим двухмерное нормальное распределение, плотность вероятности которого задается формулой:

$$f_{\bar{\xi}}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r_{1,2}^2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\varphi(x_1,x_2)\right), \text{ где}$$

$$\varphi(x_1,x_2)=\left(\frac{1}{(1-r_{1,2}^2)}\left(\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}-2r_{1,2}\frac{(x_1-a_1)}{\sigma_1}\frac{(x_2-a_2)}{\sigma_2}+\frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right)$$

Где r – коэффициент корреляции (-1;1), выражающий линейную зависимость м/у 2 ф-ми, φ – относительная дисперсия. *x1*, *x2* – ф-ции регрессии. Код программы *Matlab* и результат выполнения покажем на рисунках 2.8 и 2.9, 2.10:

```
clc;
clear;
a1=3;
a2=1;
[x1,x2]=meshgrid(-10:0.5:10,-10:0.5:10);
R=[9 2;3 4];
r12=R(1,2)/sqrt(R(1,1)*R(2,2));
sig1=sqrt(R(1,1));
sig2=sqrt(R(2,2));
n=length(x1);
for i=1:n
    for j=1:n
f(i,j)=((1/(1-r12^2))*((x1(i,j)-a1)^2/sig1^2-2*r12*(x1(i,j)-a1)*(x2(i,j)-
a2)/(sig1*sig2)+(x2(i,j)-a2)^2/sig2^2));
f1(i,j)=1/(2*pi*sig1*sig2*sqrt(1-r12^2))*exp(-1/2*f(i,j));
    end
end
mesh(x1,x2,f1)
grid on
```

Рисунок 2.8 – Код программы

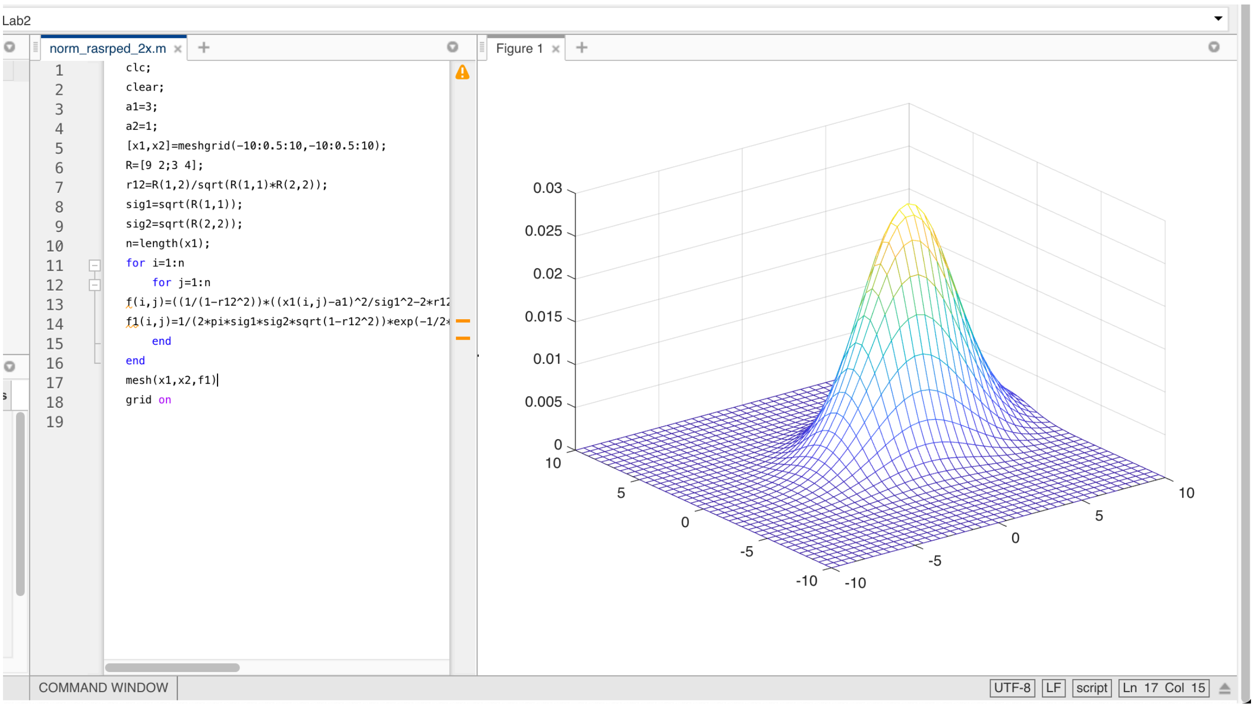

Рисунок 2.9 – Плотность вероятности двухмерного нормального распределения

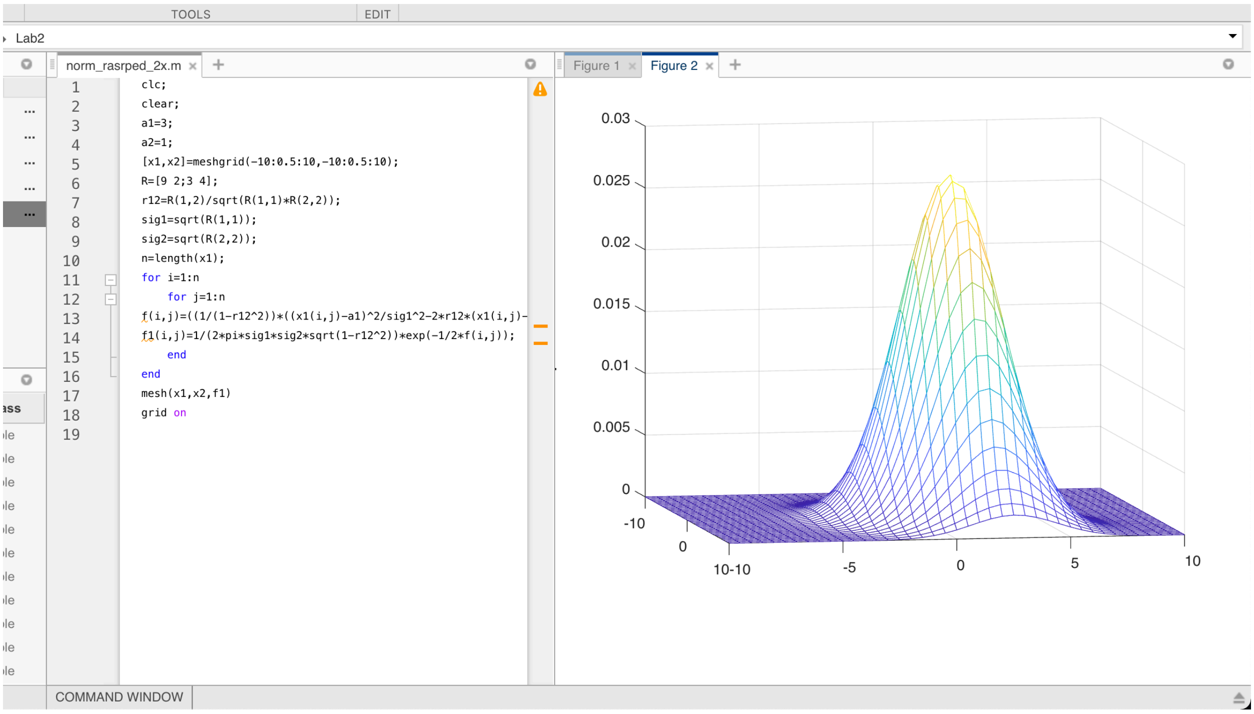

Рисунок 2.10 – Плотность вероятности двухмерного нормального распределения

Исследуем зависимость формы и площади эллипса рассеяния от коэффициента корреляции при заданных дисперсиях компонент случайного вектора.

Для двухмерного нормального распределения функция регрессии ξ_2 на ξ_1 определяется выражением

$$x_2 = a_2 + r_{1,2}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - a_1),$$

а функция регрессии ξ_1 на ξ_2 – выражением

$$x_1 = a_1 + r_{1,2}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - a_2).$$

```
clc;
clear;
x1=-22:0.5:22;
x2=-22:0.5:22;
a1=1;
a2=2;
R=[9 1;3 4];
%R=[9 3;3 4];
%R=[9 0;3 4];
r12=R(1,2)/sqrt(R(1,1)*R(2,2));
sig1=sqrt(R(1,1));
sig2=sqrt(R(2,2));
s=4*pi*sqrt(sig1^2*sig2^2-r12^2*sig1^2*sig2^2);
n=length(x1);
for i=1:n
    for j=1:n
f(i,j)=((1/(1-r12^2))*((x1(i)-a1)^2/sig1^2-2*r12*(x1(i)-a1)*(x2(j)-a2)/(sig1*sig2)+(x2(j)-a2)^2/sig2^2));
    end
end
contour(x1,x2,f,1)
grid on
hold on
r2=a2+(r12*sig2/sig1)*(x1-a1);
r1=a1+(r12*sig1/sig2)*(x2-a2);
plot(x2,r1,r2,x1)
hold off
```

Рисунок 2.11 – Код программы

Различные коэффициенты корреляции при неизменных дисперсиях получим изменением значения $R_{1,2}$ в матрице R. Первое построение выполним для матрицы $R = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (рисунок 2.11), затем выполним построение для $R_{1,2}=3$ (рисунок 2.12) и $R_{1,2}=0$ (рисунок 2.13).

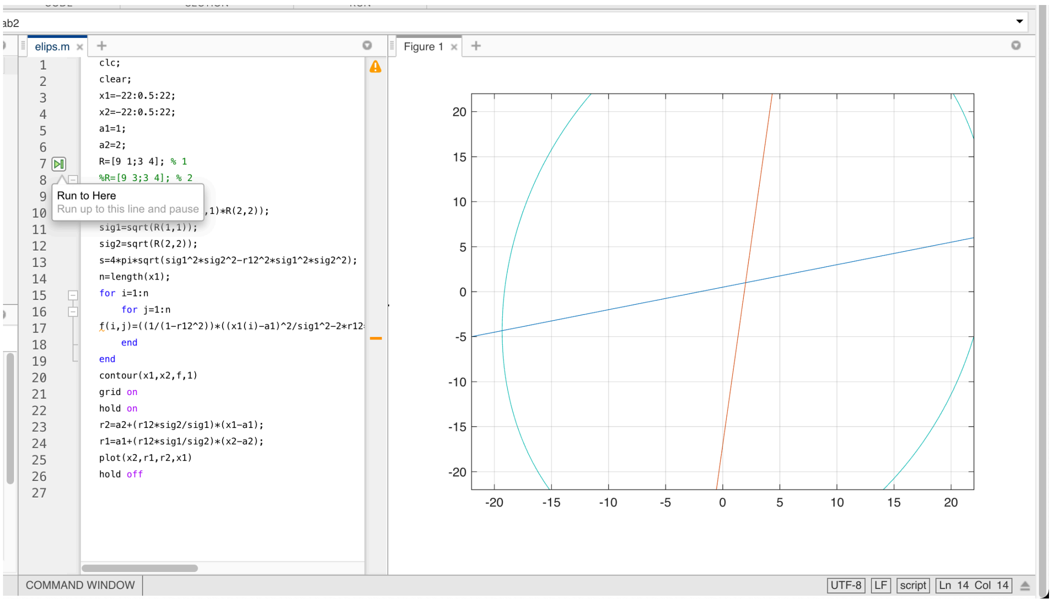

Рисунок 2.12 – Эллипс рассеяния и функции регрессии

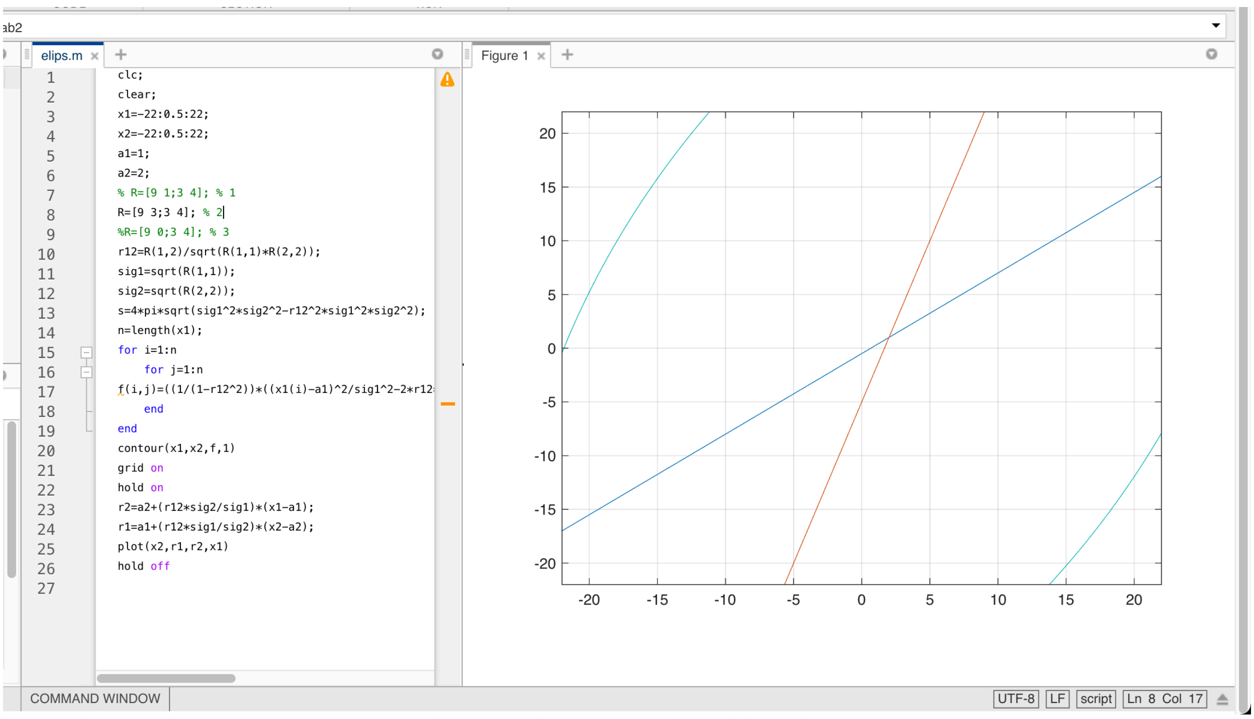

Рисунок 2.13 – Эллипс рассеяния и функции регрессии

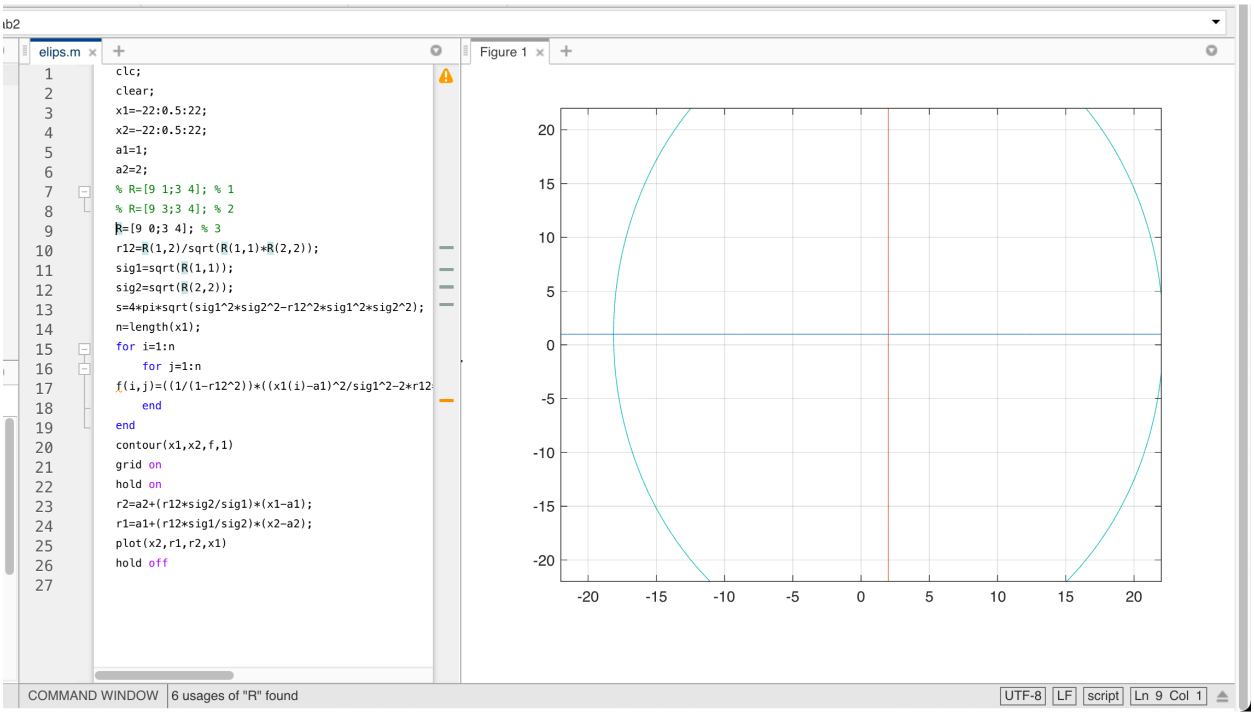

Рисунок 2.14 – Эллипс рассеяния и функции регрессии

3 ВЫВОД

Для равномерного распределения в гиперпрямоугольнике построили графики поверхностей и линии равных уровней плотностей вероятности, исследовали их зависимость от параметров распределений. Для нормального распределения построили линии равных уровней плотностей вероятностей и линии регрессии.