Переходные процессы в электрических цепях с сосредоточенными параметрами и методы их расчета

Лекция 10.

Цель лекции №10:

Ознакомившись с лекцией №10 по теории электрических цепей студент должен знать:

1. Какие режимы называются переходными и когда они возникают;
2. Почему переходной процесс не может протекать мгновенно и требует некоторого интервала времени;
3. Формулировать законы коммутации;
4. Из каких двух составляющих состоит любая переходная величина;
5. Объяснять суть свободной и установившейся (принужденной) составляющей переходных токов и напряжений.
6. Какие токи и напряжения в момент коммутации относятся к независимым и зависимым начальным условиям;
7. Схемы замещения участков с индуктивностью и емкостью при нулевых и ненулевых начальных условиях;
8. Алгоритм расчета переходных процессов классическим методом;
9. Определение постоянной времени переходного процесса;
10. Анализ переходного процесса в цепи R – L при подключении к источнику постоянного напряжения и коротком замыкании в цепи.

10.1 ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

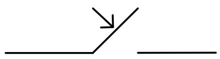
Переходными процессами называют явления, имеющие место в электрических цепях при изменении их режима работы: включении и выключении пассивных и активных элементов, внезапном изменении параметров, коротком замыкании отдельных участков и т.д. Эти процессы обусловлены изменением энергетического состояния цепи при переходе от одного установившегося режима к другому.

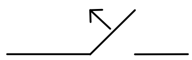
Энергия, запасенная в магнитном поле катушки $W_{\mathrm{L}} = \dfrac{Li^2}{2}$, и энергия электрического поля емкости $W_{\mathrm{C}} = \dfrac{CU^2}{2}$ не могут изменяться скачком. Следовательно, для завершения переходного процесса требуется некоторый промежуток времени, в течении которого токи и напряжения могут достигать больших величин.

В одних устройствах (системах автоматики, в импульсной технике) переходные процессы являются нормальным режимом работы; в других устройствах (в длинных ЛЭП) – переходные процессы являются аварийным режимом работы. Без учета переходных процессов нельзя правильно спроектировать и эксплуатировать радиотехническую и электротехническую аппаратуру.

10.2 КОММУТАЦИЯ И ЕЁ ЗАКОНЫ

Коммутацией называют включение или отключение цепи от источника энергии, а так же изменение ее параметров. На схеме коммутация обозначается в виде ключа со стрелкой:

а)  − Замыкание ключа.

б)  − Размыкание ключа.

Момент коммутации обычно принимают за начало отсчета $t = 0, t(0)$.
Момент времени непосредственно перед коммутацией обозначается $t(0_-)$, непосредственно после коммутации $t(0_+)$.

Существуют два закона коммутации:

10.2.1 Первый закон коммутации:

- Ток и магнитный поток в индуктивности непосредственно после коммутации равны току и магнитному потоку в той же индуктивности непосредственно перед коммутацией.

Другими словами:
ток и магнитный поток через индуктивность в момент коммутации не могут измениться скачкообразно:

$i_L(0_+) = i_L(0_-)$.

10.2.2 Второй закон коммутации:

- Напряжение и заряд на емкости непосредственно после коммутации равны напряжению и заряду на этой же емкости непосредственно перед коммутацией.

Другими словами:
напряжения и заряд на емкости в момент коммутации не могут изменяться скачкообразно.

$$U_C(0_+) = U_C(0_-)$$

Следует отметить, что *скачкообразно могут изменяться*:

1) Токи в сопротивлениях и емкостях;
2) Напряжения на сопротивлениях и индуктивностях.

Отсюда следует, что в электрических цепях, состоящих только из активных сопротивлений, переход из одного установившегося состояния к другому совершается мгновенно.

Законы коммутации используются для нахождения начальных условий, которые необходимы для определения постоянных интегрирования при расчете переходных процессов в электрических цепях.

10.3 НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Значения токов и напряжений на элементах электрической цепи в момент $t(0_+)$ (непосредственно после коммутации) называются_*начальными условиями*.

Различают *независимые* и *зависимые начальные условия*. К *независимым* относится: ток, протекающий через индуктивность, и напряжение на емкости: $i_L(0_+)$ и $u_C(0_+)$ Эти условия определяются законами коммутации.

Значения всех остальных токов и напряжений и их производных относятся к *зависимым начальным условиям*.

В зависимости от энергетического состояния цепи различают два вида задач:

1) Электрическая цепь непосредственно перед коммутацией не обладала энергией, т. е. $i_L(0\_) = 0$ и $U_C(0\_) = 0$. В этом случае расчет цепи является *задачей с нулевыми начальными условиями:*

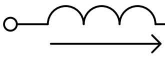
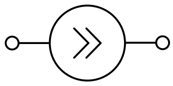
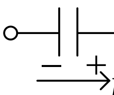
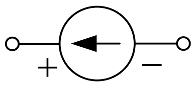
$$i_L(0_+) = 0; U_C(0_+) = 0\,.$$

2) Электрическая цепь перед коммутацией обладала запасом энергии. Определение токов и напряжений в переходном режиме представляет *задачу с ненулевыми начальными условиями:*

$$i_L(0_+) \neq 0; U_C(0_+) \neq 0.$$

Таблица 10.1 показывает, как надо представлять индуктивность и емкость в эквивалентной схеме для момента коммутации (t = 0+) в зависимости от вида начальных условий:

Таблица 10.1

Элемент	Ненулевые н. у.	Нулевые н. у.
 $i_L(0_-)$	$i_L(0_+)$ 	$i_L(0_+) = 0$
C  $U_C(0_-)$	$U_C(0_+)$ 	$U_C(0_+) = 0$

При нулевых начальных условиях $i_L(0_+) = 0$ и $U_C(0_+) = 0$ индуктивность в момент коммутации равносильна разрыву цепи, а емкость – короткому замыканию.

При ненулевых начальных условиях $i_L(0_+) \neq 0$ и $U_C(0_+) \neq 0$ индуктивность в момент времени $t = 0$ равносильна источнику тока $i_L(0_+)$, а емкость − источнику напряжения с ЭДС равной $U_C(0_+)$.

10.4 КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассчитать переходный процесс – это значит найти закон изменения токов и напряжений на отдельных элементах или ветвях цепи при изменении времени от момента коммутации $(t = 0)$ до установления нового стационарного режима ($t = \infty$).

Расчет переходных процессов классическим методом сводится к решению системы линейных дифференциальных уравнений и производиться в следующем порядке:

1. Задаются положительным направлением тока в каждой ветви схемы, образовавшейся после коммутации, и составляют уравнения по законам Кирхгофа для мгновенных значений.

2. Полученную систему уравнений сводят к одному уравнению с одним неизвестным током или напряжением на каком-либо элементе цепи. (решение будет проще, если этим неизвестным окажется ток через индуктивность или напряжение на емкости). В общем случае получается неоднородное линейное дифференциальное уравнение *n*-ого порядка с постоянными коэффициентами.

3. Дифференциальное уравнение решается известными из математики способами. Пользуясь начальными условиями определяют постоянные интегрирования и в итоге получают токи и напряжения переходного процесса функции времени.

Система интегро-дифференциальных уравнений цепи всегда составляется для цепи в состоянии *после коммутации*, то есть после замыкания или размыкания ключа.

При составлении этой системы уравнений, связывающих мгновенные значения входных и выходных электрических величин между собой, используются следующие соотношения:

$$U_R(t) = i(t) \cdot r; \qquad i(t) = \frac{U_R(t)}{R};$$

$$U_L = L\frac{di(t)}{dt}; \; i(t) = \frac{1}{L}\int U_L(t)dt; \tag{10.1}$$

$$i_C(t) = C\frac{dU_C(t)}{dt}; \; U_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt. \tag{10.2}$$

Где $U_R(t)$, $U_L(t)$, $U_C(t)$ – напряжения на активном сопротивлении, индуктивности и емкости соответственно.

10.5 РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

10.5.1 Свободная и принужденная составляющие

Решение полученного дифференциального уравнения представляют в виде суммы двух решений: принужденного и свободного тока или напряжения:

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}} \text{ или } u = u_{\text{пр}} + u_{\text{св}} \tag{10.3}$$

С математической точки зрения $i_{\text{пр}}$ – частное решение неоднородного уравнения; с физической точки зрения $i_{\text{пр}}$ – ток рассматриваемой ветви в установившемся режиме, если в цепи действуют источники постоянного тока и напряжения или источники синусоидального тока и напряжения. Принужденный ток определяется законом изменения действующих в цепи источников и параметрами цепи. Он может быть найден любым методом расчета цепи в установившемся режиме (закон Ома, закон Кирхгофа, метод контурных токов и т.д.).

Свободный ток ($i_{\text{св}}$) с точки зрения математики – решение соответствующего однородного дифференциального уравнения. С физической точки зрения $i_{\text{св}}$ – ток в цепи, предоставленной самой себе при определенных начальных условиях. Свободный ток не зависит от закона изменения действующих в цепи источников и определяется начальными условиями цепи, т.е. зависит только от запасов энергии в магнитном поле индуктивности и электрическом поле емкости.

Общий вид свободного тока зависит от порядка дифференциального уравнения и от характера корней (вещественные или комплексные) характеристические уравнения.

Для схемы первого порядка свободный ток имеет вид:

$$i_{\text{св}} = Ae^{pt} \tag{10.4}$$

Для схемы второго порядка:

а) в случае вещественных и разных корней $i_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t}$;

б) в случае вещественных и равных корней $i_{\text{св}} = B_1 + B_2 \cdot te^{pt}$;

в) в случае комплексно-сопряженных корней $i_{\text{св}} = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \psi_{\text{св}})$,

где A_1, A_2, B_1, B_2, A, $\psi_{\text{св}}$ – постоянные интегрирования.

10.5.2 Алгоритм решения переходных процессов классическим методом:

1. Определение независимых начальных условий $i_L(0_+)$ и $U_C(0_+)$. Независимые начальные условия рассчитывают в цепи в докоммутационном режиме.
2. Определение зависимых начальных условий. Зависимые начальные условия определяются следующим образом. Составляются уравнения по законам Кирхгофа для момента времени $t = 0_+$ в цепи, являющейся эквивалентом исходной цепи для момента времени $t = 0$. В эти уравнения

подставляют независимые начальные условия $i_L(0_+)$ и $U_C(0_+)$. Решив полученную систему уравнений, можно определить зависимые начальные условия.

3. Записывают характеристическое уравнение цепи. Данное уравнение можно получить, минуя составления соответствующих интегро-дифференциальных уравнений. Для этого достаточно составить уравнение входного сопротивления цепи относительно какой-либо ее ветви. Назовем его входным характеристическим сопротивлением. При записи данного сопротивления вместо реактивных сопротивлений $X_L = \omega L$ и $X_L = \dfrac{1}{\omega C}$ используем их операторную форму $X_L(p) = pL$ и $X_C(p) = \dfrac{1}{pC}$. Затем входное характеристическое сопротивление приравниваем к нулю: $Z(p) = 0$.

Приравнивание характеристического входного сопротивления к нулю приводит сразу к характеристическому уравнению цепи. При составлении входного характеристического сопротивления цепи источники и тока, и напряжения не учитываются: ветви с источниками тока размыкают, участки с источниками ЭДС закорачивают.

Физический смысл приравнивания к нулю характеристического сопротивления следующей: мы ищем параметры собственной функции тока цепи, который может протекать при отсутствии источников напряжения или тока, т.е. ищем параметры собственного тока цепи, протекание которого в данной цепи не встречает сопротивления.

4. Определяем принужденные составляющие токов и напряжений. Для этого рассматриваем схему в установившемся режиме, полагая, что с момента коммутации прошло бесконечно большое время $t = \infty$.

5. Если на входе цепи действует источник постоянного тока или напряжения, то напомним, что сопротивление индуктивности $X_L = \omega L = 0$, сопротивление емкости $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \infty$.

Если на входе действует источник синусоидального тока или напряжения, то расчет принужденных составляющих производим методом комплексных амплитуд.

6. Записываем исходную переходную величину в виде суммы двух составляющих: $i(t) = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}$, $U(t) = U_{\text{пр}} + U_{\text{св}}$.

7. Подставляя начальные условия, определяем постоянные интегрирования.

8. После того, как найдены постоянные интегрирования, записываем окончательное решение и строим графики для иллюстрации полученного результата.

10.6 АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. ПОСТОЯННАЯ ВРЕМЕНИ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА.

10.6.1 Переходной процесс в цепи RL при подключении к источнику постоянного напряжения.

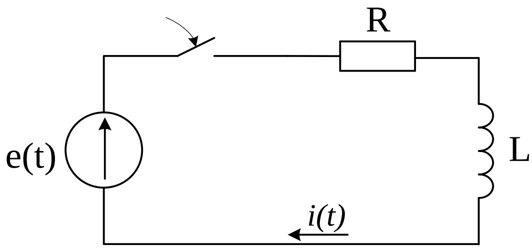


Рисунок *10.1* Подключение цепи R –L к источнику постоянного напряжения.

Для анализа переходного процесса при замыкании цепи рис 10.1 применим второй закон Кирхгофа, составленный для мгновенных значений напряжений.

$$u_r(t)+u_L(t)=e(t) \tag{10.5}$$

Используя выражение 10.1, получим:

$$ir+L\frac{di}{dt}=e(t) \tag{10.6}$$

Характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (10.6) имеет вид:

$$pL+r=0.$$

Корень характеристического уравнения $p=-\dfrac{r}{L}$ (10.7)

Свободные составляющие переходного тока цепи и напряжения на индуктивности рис.10.1 запишутся соответственно: $i_L(t)=Ae^{pt}$ и $u_L(t)=Be^{pt}$.
Полные переходные ток и напряжение согласно формуле 10.4 имеют вид

$$i(t) = i_{уст} + Ae^{pt};$$
$$u_L(t) = u_{Lуст} + Be^{pt}. \quad (10.8)$$

где A и B – постоянные интегрирования, для определения которых необходимо знать начальные условия . $i_L(0)$ и $u_L(0)$.

До коммутации (когда ключ открыт) ток через индуктивность равен нуль, следовательно, согласно первому закону коммутации, $i_L(0\_) = i_L(0_+) = 0$. Следовательно, когда ключ замыкается в момент коммутации, ток также равен нулю, и участок с индуктивностью в этот момент времени эквивалентен разрыву цепи. Рисунок 107.2 наглядно демонстрирует цепь для момента времени t=0:

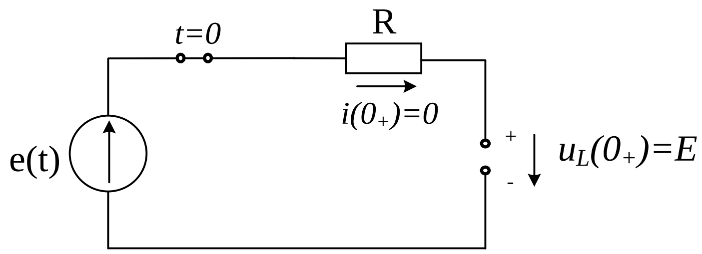


Рисунок. *10.2* Индуктивность эквивалентна разрыву цепи в момент коммутации.

Т.к. ток равен нулю, напряжение на резисторе также равно нулю, и напряжение источника оказывается приложенным к участку с разрывом, т.е. к индуктивности. Следовательно, $u_L(0) = E$.

Теперь определим принужденные составляющие переходных тока и напряжения на индуктивности. Рисунок 10.3 иллюстрирует схему в установившемся режиме. Т.к. при постоянном напряжении $X_L=0$, то участок с индуктивностью эквивалентен короткому замыканию:

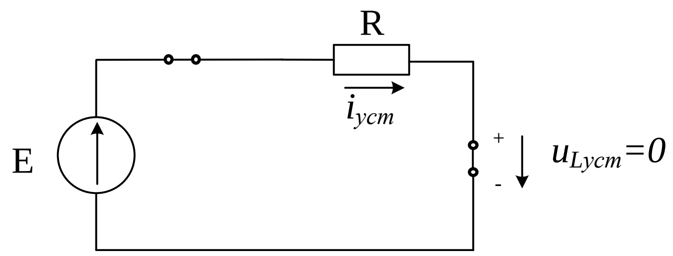


Рисунок *10.3* Цепь RL в установившемся режиме.

Согласно закону Ома $i_{уст}=\frac{E}{R}$. Т.к. индуктивность эквивалентна короткозамкнутому участку, напряжение на ней равно 0: $u_{Lуст}$=0.

Подставим принужденные составляющие тока и напряжения в выражения 10.8:

$$i_L(t) = \frac{E}{r} + Ae^{pt}$$

$$u_L(t) = 0 + Be^{pt}$$

Используем начальные условия для определения постоянных интегрирования.

$$0 = \frac{E}{r} + A$$

$$E = 0 + B$$

Получаем: *A*= - *E/R* и *B*=*E*

Следовательно, полные переходные ток и напряжение при подключении цепи к источнику постоянного напряжения определяются при помощи выражений:

$$i(t) = \frac{E}{r} - \frac{E}{r} e^{-\frac{r}{\tau}};$$

$$u_L(t) = Ee^{-\frac{r}{\tau}}.$$

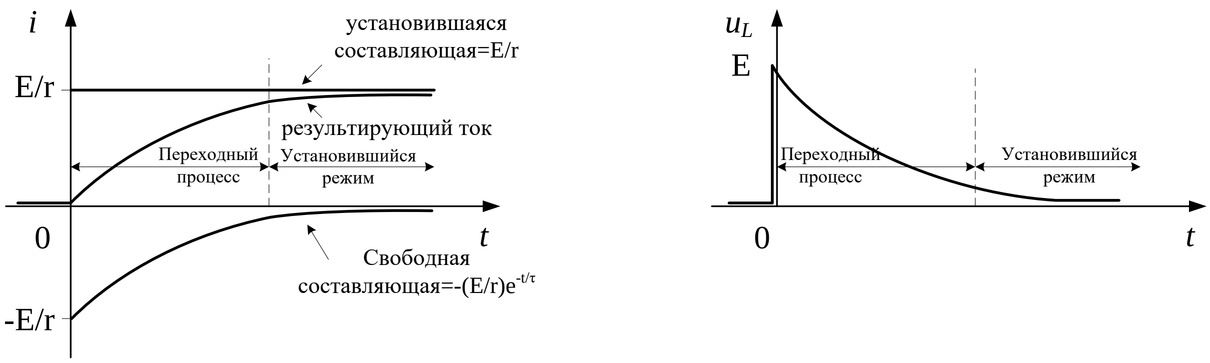


Рисунок *10.4* Ток и напряжение в цепи R – L при подключении к источнику постоянного напряжения.

10.6.2 Постоянная времени переходного процесса

Время, за которое свободная составляющая уменьшается в е раз, называется *постоянной времени переходного процесса.* Постоянная времени переходного процесса обозначается греческой буквой τ. При t= τ свободный ток составляет $\frac{I_{\text{св}}(0)}{e} = 0{,}37 I_{\text{св}}(0)$.

Графически постоянную времени переходного процесса определяют как величину подкасательной к графику свободной составляющей.

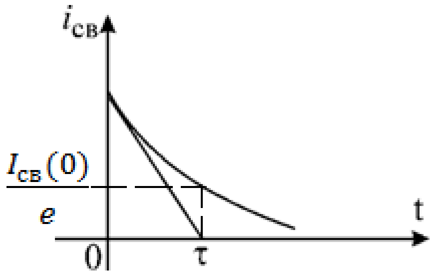


Рисунок *10.5* Графическое определение постоянной времени переходного процесса.

Время переходного процесса обычно принимают $t_{n/np} = (3 \div 4)\tau$.

За это время свободная составляющая уменьшается до 5% от своего первоначального значения.

Постоянная времени служит мерой спада переходного процесса и позволяет сравнивать различные цепи в отношении скорости установления токов и напряжений в цепи.

В цепях первого порядка $\tau = \left|\frac{1}{p}\right|$. (10.9)

В цепи R – L $\tau = \frac{L}{R}$(сек).

10.6.3 Короткое замыкание в цепи R – L

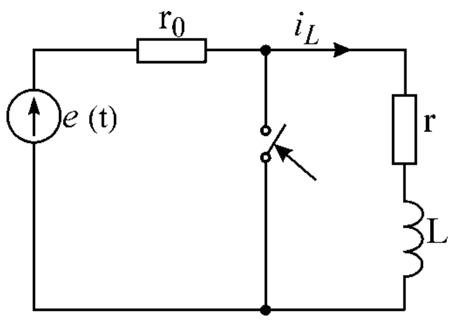


Рисунок *10.6* Короткое замыкание в цепи R – L.

Положим, что цепь R – L, присоединенная к источнику постоянного напряжения, замыкается при $t = 0$ накоротко. В образовавшемся при этом контуре R – L благодаря наличию магнитного поля индуктивной катушки ток исчезает не мгновенно: ЭДС самоиндукции, обусловленная убыванием магнитного потока, стремится поддержать ток в контуре за счет энергии исчезающего магнитного поля. По мере того как энергия магнитного поля постепенно рассеивается, превращаясь в сопротивлении в тепло, ток в контуре приближается к нулю.

Ток в контуре в момент коммутации, равный току до коммутации, определяется по закону Ома:

$$i_L(0) = \frac{E}{R}.$$

Установившаяся составляющая тока равна нулю : $i_{\text{уст}} = 0$, т.к. цепь отсоединяется от источника питания.

Характеристическое уравнение и его корень в случае короткого замыкания определяются также , как и в случае, рассмотренном в §10.6.1.

Общее решение имеет вид:

$$i(t) = i_{уст} + Ae^{pt} = 0 + Ae^{pt} \tag{10.10}$$

Уравнение 10.10 для момента коммутации t=0 имеет вид:

$$i(0) = \frac{E}{R} = A$$

Откуда однозначно определяем постоянную интегрирования *A*.

Таким образом, переходной ток при коротком замыкании в цепи R – L определяется по выражению:

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{pt}$$

Где $p = -\frac{r}{L}$

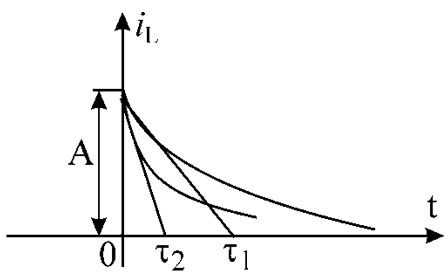


Рисунок *10.7* График изменения тока при коротком замыкании в цепи R – L (Чем меньше τ , тем быстрее закончится переходной процесс.)