Задача 1. Вычислить неопределенные интегралы.

$$\int (4-16x)\sin 4x\,dx =$$

$$u = 4-16x \quad du = -16dx$$

$$dV = \sin 4x\,dx \quad V = -\frac{1}{4}\cos 4x$$

$$= -\frac{1}{4}(4-16x)\cos 4x - 4\int \cos 4x\,dx =$$

$$= (4x-1)\cos 4x - \sin 4x + C.$$

Задача 2. Вычислить определенные интегралы.

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$u = \ln^2 x \quad du = \frac{2\ln x}{x}dx$$

$$dV = \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad V = 2\sqrt{x}$$

$$= 2\sqrt{x}\ln^2 x\Big|_1^{e^2} - 4\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$u = \ln x \quad du = \frac{dx}{x}$$

$$dV = \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad V = 2\sqrt{x}$$

$$= 8e - 8\sqrt{x}\ln x\Big|_1^{e^2} + 8\int_1^{e^2}\frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= 8e - 16e + 16\sqrt{x}\Big|_1^{e^2} = -8e + 32e - 16 =$$

$$= 24e - 16$$

Задача 3. Найти неопределенные интегралы.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-1/x^2}} = -\int \frac{d(1/x)}{\sqrt{1-1/x^2}} =$$

$$= \left\{\frac{1}{x} = t\right\} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + C =$$

$$= -\arcsin\frac{1}{x} + C.$$

Задача 4. Вычислить определенные интегралы.

$$\int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \int_0^{\sin 1} \left((\arcsin x)^2 + 1\right) d(\arcsin x) =$$

$$= \left(\frac{1}{3}(\arcsin x)^3 + \arcsin x\right)\Big|_0^{\sin 1} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

Задача 5. Найти неопределенные интегралы.

$$\int \frac{3x^5 - 12x^3 - 7}{x^2+2x}\,dx =$$

$$\begin{array}{l|l}
3x^5+0x^4-12x^3+0x^2+0x-7 & x^2+2x \\
\hline
3x^5+6x^4 & 3x^3-6x^2 \\
\quad -6x^4-12x^3 & \\
\quad -6x^4-12x^3 & \\
\qquad 0 &
\end{array}$$

$$= \int \left(3x^3 - 6x^2 - \frac{7}{x(x+2)}\right)dx =$$

$$= \int \left(3x^3 - 6x^2 - \frac{7}{2}\frac{1}{x} + \frac{7}{2}\frac{1}{x+2}\right)dx =$$

$$= \frac{3}{4}x^4 - 2x^3 - \frac{7}{2}\ln|x| + \frac{7}{2}\ln|x+2| + C =$$

$$= \frac{3}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{7}{2}\ln\left|\frac{x+2}{x}\right| + C.$$

Задача 6. Найти неопределенные интегралы.

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 6}{(x+1)(x-2)^3}\,dx =$$

$$\frac{x^3-6x^2+14x-6}{(x+1)(x-2)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2} + \frac{B_3}{(x-2)^3}$$

$$x^3 - 6x^2 + 14x - 6 = Ax^3 - 6Ax^2 + 12Ax - 8A + B_1x^3 - 3B_1x^2 + 4B_1 + $$
$$+ B_2x^2 - B_2x - 2B_2 + B_3x + B_3$$

$$x^3 - 6x^2 + 14x - 6 = (A+B_1)x^3 + (-6A - 3B_1 + B_2)x^2 +$$
$$+ (12A - B_2 + B_3)x + (-8A + 4B_1 - 2B_2 + B_3)$$

$$\begin{cases} A + B_1 = 1 \\ -6A - 3B_1 + B_2 = -6 \\ 12A - B_2 + B_3 = 14 \\ -8A + 4B_1 - 2B_2 + B_3 = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 - B_1 \\ 3B_1 + B_2 = 0 \\ -12B_1 - B_2 + B_3 = 2 \\ 12B_1 - 2B_2 + B_3 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 - B_1 \\ B_2 = -3B_1 \\ -9B_1 + B_3 = 2 \\ 18B_1 + B_3 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B_1 = 0 \\ B_2 = 0 \\ B_3 = 2 \end{cases}$$

$$= \int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{dx}{(x-2)^3} = \ln|x+1| - \frac{1}{(x-2)^2} + C.$$

Задача 7. Найти неопределенные интегралы.

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + 10x}{(x+1)^2(x^2-x+1)}\,dx \overset{*}{=}$$

$$\frac{x^3+2x^2+10x}{(x+1)^2(x^2-x+1)} = \frac{A_1}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$x^3 + 2x^2 + 10x = A_1x^2 - A_1x + A_1 + A_2x^3 + A_2 + Bx^3 + 2Bx^2 + Bx +$$
$$+ Cx^2 + 2Cx + C$$

$$x^3 + 2x^2 + 10x = (A_2 + B)x^3 + (A_1 + 2B + C)x^2 +$$
$$+ (-A_1 + B + 2C)x + (A_1 + A_2 + C).$$

$$\begin{cases} A_2 + B = 1 \\ A_1 + 2B + C = 2 \\ -A_1 + B + 2C = 10 \\ A_1 + A_2 + C = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A_2 = 1 - B \\ A_1 + 2B + C = 2 \\ -A_1 + B + 2C = 10 \\ A_1 - B + C = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} A_2 = 1 - B \\ C = 3 \\ A_1 + 2B = -1 \\ A_1 - B = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 = -3 \\ A_2 = 0 \\ B = 1 \\ C = 3 \end{cases}$$

$$\overset{*}{=} -3\int \frac{dx}{(x+1)^2} + \int \frac{x+3}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= -3\int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} =$$

$$= -3\int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2 + 3/4} =$$

$$= \frac{3}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + \frac{7}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Задача 8. Вычислить определенные интегралы.

$$\int_0^{2\,\mathrm{arctg}(1/2)} \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)^2}\,dx =$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{1 + \frac{2t}{1+t^2}}{\left(1 - \frac{2t}{1+t^2}\right)^2}\,\frac{2dt}{1+t^2} = 2\int_0^{1/2} \frac{(1+2t)\,dt}{(1+t^2-2t)^2} =$$

$$= 2\int_0^{1/2} \frac{(2t+1)\,dt}{(t-1)^4} = 4\int_0^{1/2} \frac{t\,dt}{(t-1)^4} + 2\int_0^{1/2} \frac{dt}{(t-1)^4} =$$

$$u = t \quad du = dt$$

$$dv = \frac{dt}{(t-1)^4} \quad v = -\frac{1}{3(t-1)^3}$$

$$= -\frac{4t}{3(t-1)^3}\Big|_0^{1/2} + \frac{1}{3}\int_0^{1/2} \frac{dt}{(t-1)^3} - \frac{2}{3(t-1)^3}\Big|_0^{1/2} =$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{1}{6(t-1)^2}\Big|_0^{1/2} + \frac{16}{3} = \frac{32}{3} - \frac{2}{3} = \frac{30}{3} = 10.$$

Задача 9. Вычислить определенные интегралы.

$$\int_{\pi/4}^{\arccos(1/\sqrt{26})} \frac{36dx}{(6-tgx)\sin 2x} =$$

Замена: $tgx = t \Rightarrow \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$$= \int_1^5 \frac{36}{(6-t)\frac{2t}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} = 18\int_1^5 \frac{dt}{t(6-t)} =$$

$$= 3\int_1^5 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{6-t}\right)dt = 3(\ln t - \ln(6-t))\Big|_1^5 =$$

$$= 3(\ln 5 - \ln 1 - \ln 1 + \ln 5) = 6\ln 5.$$

Задача 10. Вычислить определенные интегралы.

$$\int_{-\pi/2}^{0} 2^8 \sin^8 x\, dx = 2^4\int_{-\pi/2}^{0} (1-\cos 2x)^4 dx =$$

$$= 2^4\int_{-\pi/2}^{0} (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)^2 dx =$$

$$= 2^4\int_{-\pi/2}^{0} (1+6\cos^2 2x - 4\cos 2x - 4\cos^3 2x + \cos^4 2x)dx =$$

$$= 2^4\int_{-\pi/2}^{0} dx + 2^4\cdot 3\int_{-\pi/2}^{0}(1+\cos 4x)dx - 2^6\int_{-\pi/2}^{0}(1+\cos^2 2x)\cos 2x\,dx +$$

$$+ 2^2\int_{-\pi/2}^{0}(1+\cos 4x)^2 dx = 8\pi + 24\pi - 2^5\int_{-\pi/2}^{0}(2-\sin^2 2x)d(\sin 2x) + 0$$

$$+ 4\int_{-\pi/2}^{0}(1+2\cos 4x+\cos^2 4x)dx =$$

$$= 32\pi + 4\int_{-\pi/2}^{0}dx + 8\int_{-\pi/2}^{0}\cos 4x\,dx + 2\int_{-\pi/2}^{0}(1+\cos 8x)dx =$$

$$= 32\pi + 2\pi + \pi = 35\pi$$

Задача 11. Вычислить определенные интегралы.

$$\int_{1/8}^{1} \frac{15\sqrt{x+3}}{(x+3)^2\sqrt{x}}dx = 15\int_{1/8}^{1} \sqrt{\frac{x+3}{x}}\frac{dx}{(x+3)^2} =$$

Замена: $\sqrt{\frac{x+3}{x}} = t \Rightarrow x = \frac{3}{t^2-1}$, $dx = -\frac{6t\,dt}{(t^2-1)^2}$

$$= -15\int_5^2 t\,\frac{(t^2-1)^2}{(3t^2)^2}\,\frac{6t\,dt}{(t^2-1)^2} = 10\int_2^5\frac{dt}{t^2} =$$

$$= -\frac{10}{t}\Big|_2^5 = -10\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right) = 3.$$

Задача 12. Вычислить определенные интегралы.

$$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \{x=2\sin t,\ dx=2\cos t\,dt\} =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\sqrt{4-4\sin^2 t}\;2\cos t\,dt = 4\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt = 2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Задача 13. Найти неопределенные интегралы.

$$\int\frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[4]{x^3})^4}}{x^2\sqrt[20]{x^7}}dx = \int x^{-47/20}(1+x^{3/4})^{4/5}dx =$$

Замена: $x^{-3/4}+1 = t^5 \Rightarrow x = (t^5-1)^{-4/3}$

$dx = -\frac{20}{3}t^4(t^5-1)^{-7/3}dt$

$$= -\frac{20}{3}\int (t^5-1)^{47/15}\, t^4 (t^5-1)^{-4/5}\, t^4 (t^5-1)^{-7/3} dt =$$

$$= -\frac{20}{3}\int t^8 dt = -\frac{20}{27}t^9 + C =$$

$$= -\frac{20}{27}(x^{-3/4}+1)^{9/5} + C = -\frac{20}{27}\frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[4]{x^3})^9}}{x\sqrt[20]{x^7}} + C$$

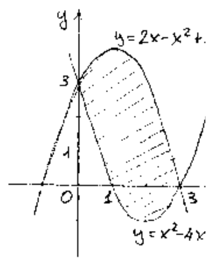
Задача 14. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

$y = 2x-x^2+3$, $y=x^2-4x+3$ $\Rightarrow$ $y=-(x-1)^2+4$, $y=(x-2)^2-1$

$$S = \int_0^3(2x-x^2+3-x^2+4x-3)dx =$$

$$= \int_0^3(-2x^2+6x)dx =$$

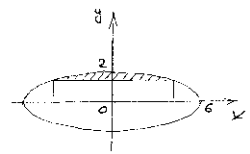
$$= \left(-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right)\Big|_0^3 = -18+27 = 9.$$



Задача 15. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

$$\begin{cases}x=6\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}$$

$y=\sqrt{3}\ (y\ge\sqrt{3})$



$$S = \int_\alpha^\beta y(t)\cdot x'(t)dt$$

$$S = -12\int_{2\pi/3}^{\pi/3}\sin t\sin t\,dt - 2\sqrt{3}\cdot 3 =$$

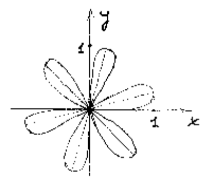
$$= -6\int_{2\pi/3}^{\pi/3}(1-\cos 2t)dt - 6\sqrt{3} =$$

$$= -6\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{2\pi/3}^{\pi/3} - 6\sqrt{3} =$$

$$= -6\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) - 6\sqrt{3} = 2\pi - 3\sqrt{3}$$

Задача 16. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями в полярных координатах.

$r=\sin 6\varphi$



$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$$

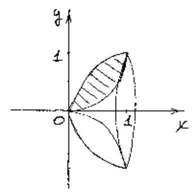
$$S = 6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}\sin^2 6\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/6}(1-\cos 12\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\varphi - \frac{1}{12}\sin 12\varphi\right)\Big|_0^{\pi/6} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$$

Задача 21. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. Ось вращения Ox.

$y=\sin\frac{\pi x}{2}$, $y=x^2$



$$V=\pi\int_a^b y^2dx$$

$$V=\pi\int_0^1\left(\sin^2\frac{\pi x}{2} - x^4\right)dx =$$

$$=\pi\int_0^1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\pi x - x^4\right)dx =$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2\pi}\sin\pi x - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right) = \frac{3\pi}{10}$$

Задача 17. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

$$y = -\arccos\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, \quad 0 \le x \le \frac{1}{4}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} = \frac{2-2x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$$

$$L = \int_0^{1/4} \sqrt{1 + \frac{1-x}{x}}\,dx = \int_0^{1/4} \sqrt{\frac{x+1-x}{x}}\,dx =$$

$$= \int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\,\Big|_0^{1/4} = 2\left(\frac{1}{2} - 0\right) = 1.$$

Задача 18. Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.

$$\begin{cases} x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt$$

$$x'_t = 2t\sin t + (t^2-2)\cos t + 2\cos t - 2t\sin t = t^2\cos t$$

$$y'_t = -2t\cos t - (2-t^2)\sin t + 2\sin t + 2t\cos t = t^2\sin t$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{t^4\cos^2 t + t^4\sin^2 t}\,dt = \int_0^{\pi/2} t^2\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}t^3\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24}.$$

Задача 19. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в полярных координатах.

$$\rho = 1 - \sin\varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le -\frac{\pi}{6}$$

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi; \quad \rho' = -\cos\varphi$$

$$L = \int_{-\pi/2}^{-\pi/6} \sqrt{(1-\sin\varphi)^2 + \cos^2\varphi}\,d\varphi =$$

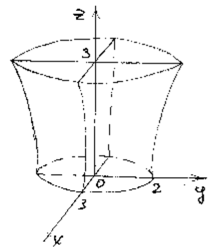
$$= \int_{-\pi/2}^{-\pi/6} \sqrt{1 - 2\sin\varphi + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi}\,d\varphi = \int_{-\pi/2}^{-\pi/6} \sqrt{2 - 2\sin\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2\int_{-\pi/2}^{-\pi/6} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)d\varphi = 4\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\Big|_{-\pi/2}^{-\pi/6} =$$

$$= 4\left(\frac{1}{2} - 0\right) = 2.$$

Задача 20. Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 3$$



$$V = \int_a^b S(z)\,dz$$

$S(z)$ – площадь поперечного сечения.

Площадь эллипса ($S = \pi a b$).

$$S = 6\pi(1 + z^2)$$

$$V = 6\pi\int_0^3 (1 + z^2)\,dz = 6\pi\left(z + \frac{1}{3}z^3\right)\Big|_0^3 = 42\pi.$$

Цилиндр наполнен газом пол атмосферным давлением (103,3 кПа). Считая газ идеальным, определить работу (в джоулях) при изотермическом сжатии газа поршнем, переместившемся внутрь цилиндра на h м (рис. 3).

У к а з а н и е. Уравнение состояния газа $pV = \text{const}$, где p - давление, V - объем.

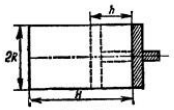


Рис. 3

$$H = 0{,}4, \quad h = 0{,}2\text{ м}, \quad R = 0{,}1\text{ м}.$$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV$$

$$V = \pi R^2 \cdot H \qquad V_1 = \pi \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}004\pi$$

$$V_2 = \pi \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}002\pi$$

$$A = \int_{0{,}004\pi}^{0{,}002\pi} 103{,}3 \cdot 10^3\,dV = 103{,}3 \cdot 10^3\,V\Big|_{0{,}004\pi}^{0{,}002\pi} =$$

$$= 103{,}3 \cdot 10^3\,(0{,}002\pi - 0{,}004\pi) =$$

$$= 103{,}3 \cdot 10^3 \cdot (-0{,}002\pi) = -206{,}6 \text{ (Дж)}$$