Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет: информационных технологий и управления

Кафедра: информационных технологий автоматизированных систем

Дисциплина: Системный анализ и исследование операций

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
к курсовому проекту
на тему

РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

БГУИР КП 1-53 01 02 01 005 ПЗ

Студент А. Р. Шведов
Руководитель Е. В. Протченко

Минск 2020

РЕФЕРАТ

РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ: курсовой проект / А. Р. Шведов. – Минск : БГУИР, 2020, – п.з. – 34 с.

Основной задачей данного курсового проекта является решения задачи планирования работы предприятия, обеспечивающей ему максимальную прибыль.

Пояснительная записка к курсовому проекту состоит из введения и 7 разделов, включающих, постановку задачи оптимизации, построение базовой аналитической модели, обоснование вычислительной процедуры, решение задачи оптимизации на основе симплекс-метода, анализ модели на чувствительность, построение модифицированной модели и анализ результатов модификации, примеры постановок и решений оптимизационных управленческих задач.

В ходе работы была описана математическая модель задачи, найдено решение задачи с помощью симплекс-метода, онлайн-калькулятора и табличного процессора *Excel*, был так же произведен анализ модели на чувствительность и представлен возможный вариант модификации модели с целью увеличения прибыли.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Системный анализ – совокупность методов и средств, используемых при исследовании и конструировании сложных и сверхсложных объектов, прежде всего методов выработки, принятия и обоснования решений при проектировании, создании и управлении социальными, экономическими, человеко-машинными и техническими системами. сложная проблема управления должна быть рассмотрена как нечто целое, как система во взаимодействии всех ее компонентов.

Для принятия решения об управлении этой системой необходимо определить ее цель, цели ее отдельных подсистем и множество альтернатив достижения этих целей, которые сопоставляются по определенным критериям эффективности, и в результате выбирается наиболее приемлемый для данной ситуации способ управления. Центральной процедурой в системном анализе является построение обобщенной математической модели, отображающей все факторы и взаимосвязи реальной ситуации, которые могут проявиться в процессе осуществления решения.

Системный анализ опирается на ряд прикладных математических дисциплин и методов, широко используемых в современной деятельности управления. Например, метод линейного программирования.

Линейное программирование – математическая дисциплина, посвящённая теории и методам решения экстремальных задач на множествах n -мерного векторного пространства, задаваемых системами линейных уравнений и неравенств. Линейное программирование (ЛП) является частным случаем выпуклого программирования, которое в свою очередь является частным и наиболее простым и лучше всего изученным случаем математического программирования.

Линейное программирование представляет собой метод для выбора из ряда альтернативных решений наиболее благоприятного (с минимальными расходами, максимальной прибылью, наименьшими затратами времени и усилий).

Исследование операций – применение математических, количественных методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности. Решение есть какой-либо выбор из ряда возможностей, имеющихся у организатора. Решения могут быть удачными и неудачными, разумными и неразумными. Оптимальными называются решения, по тем или другим признакам предпочтительные перед другими

Цель исследования операций — предварительное количественное обоснование оптимальных решений.

Методы исследования операций эффективны в отношении хорошо структурированных проблем. Хорошо структурируемые (или хорошо формализуемые) проблемы (задачи) допускают количественную формулировку, их наиболее существенные зависимости выражаются объективными моделями и представляются в символьной форме, где символы принимают числовые значения.

Основные этапы операционного исследования: постановка задачи, формализация задачи, нахождение метода решения, проверка и корректировка модели, реализация найденного решения на практике.

К основным видам практических задач исследования операций и оптимизации решения можно отнести задачи прогнозирования, планирования, диагностики, проектирования и управления.

В данном курсовом проекте рассматривается задача составления оптимального плана производства радиаторов с целью получения максимальной прибыли. При этом необходимо провести анализ полученного решения, выявить особенности производства, а также модифицировать его таким образом, чтобы увеличить прибыль при успешном соблюдении ограничений на количество рабочего времени, а также на количество стальных листов.

Для применения количественных методов исследования требуется математическая модель. В каждом конкретном случае модель выбирается исходя из вида операции, ее целевой направленности, с учетом задачи исследования. Необходимо так же в каждом конкретном случае соразмерять точность и подробность модели с необходимой точностью решения и с информацией, которой располагаем. При построении математических моделей может использоваться математический аппарат самой различной сложности. Наиболее известными и эффективными являются методы линейного программирования, когда целевая функция и ограничения будут линейными.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Предприятие производит отопительные радиаторы четырех моделей (*A*, *B*, *C*, *D*). Имеется возможность использовать для производства радиаторов не более 500 человеко-часов рабочего времени и не более 2500 м^2 стальных листов. Затраты рабочего времени и стальных листов на выпуск одного радиатора, а также цены радиаторов приведены в таблице. (см. таблица 1.1).

Таблица 1.1 – Затраты рабочего времени, материалов, а также цены радиаторов

Модель радиатора	*A*	*B*	*C*	*D*
Рабочее время, человеко-часы	0,5	1,5	2	1,5
Стальной лист, м^2	4	2	6	8
Цена, ден. ед.	140	150	255	230

Стоимость одного часа рабочего времени – 20 ден.ед, одного квадратного метра стального листа – 5 ден.ед. Прочие расходы на выпуск одного радиатора любой модели составляют 60 ден.ед.

Для выполнения контрактов предприятие должно выпустить не менее 200 радиаторов модели *A*.

Составить план производства радиаторов, обеспечивающий максимальную прибыль предприятия.

2 ПОСТРОЕНИЕ БАЗОВОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В данной задаче требуется определить, сколько радиаторов каждого из четырёх видов необходимо выпускать, чтобы получать максимальную прибыль.

Для построения математической модели задачи введем переменные. Обозначим через X_1 число радиаторов модели *A*, через X_2– модели *B*, через X_3– модели *C*, а X_4 будет обозначать число радиаторов модели *D*.

В условиях данной задачи имеется возможность использовать не более 500 человеко-часов рабочего времени. Известно, что на производство одного радиатора модели *A* необходимо 0,5 человеко-часов. Для моделей *B*, *C*, *D* эти значения равны 1,5, 2 и 1,5 соответственно. Составим первое ограничение:

$$0{,}5X_1 + 1{,}5X_2 + 2X_3 + 1{,}5X_4 \leq 500$$

Аналогично составим второе ограничение на использование стальных листов, зная, что максимально возможное использование составляет 2500м^2, а расходы составляют 4м^2 для модели *A*; для моделей *B*, *C*, *D* они соответственно равны 2, 6 и 8 м^2. Получим:

$$4X_1 + 2X_2 + 6X_3 + 8X_4 \leq 2500$$

Имеется также условие выполнения контракта предприятием, которое устанавливает минимальный выпуск радиаторов модели *A*, равный 200 единицам:

$$X_1 \geq 200$$

Кроме того, переменные X_1, X_2, X_3, X_4 по своему физическому смыслу не могут принимать отрицательных значений, так как они обозначают количество радиаторов. Поэтому необходимо указать ограничение неотрицательности:

$$X_i \geq 0, \;\; i = 1, \dots, 4$$

В данной задаче требуется определить план производства предприятия, обеспечивающий максимальную прибыль. Цена одного радиатора модели *A* равна 140 ден.ед., модели *B* – 150 ден.ед., модели *C* – 255 ден.ед., *D* – 230 ден.ед. Таким образом выручка составит $140X_1 + 150X_2 + 255X_3 + 230X_4$ ден.ед. Однако для подсчета прибыли стоит учесть все затраты предприятия. Из условия известно, что 1 час рабочего времени стоит 20 ден.ед., 1м^2 стального листа стоит 5 ден.ед., прочие расходы на выпуск одного радиатора любой модели составляют 60 ден.ед. Таким образом, затраты будем определять по формуле: $20(0{,}5X_1 + 1{,}5X_2 + 2X_3 + 1{,}5X_4) + 5(4X_1 + 2X_2 + 6X_3 + 8X_4) + 60(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$ ден.ед.

Для подсчета общей прибыли предприятия и составления целевой функции вычтем из выручки величину затрат и получим:

$$\text{E} = 50X_1 + 50X_2 + 125X_3 + 100X_4 \rightarrow max.$$

Приведем полную математическую модель рассматриваемой задачи:

$$0{,}5X_1 + 1{,}5X_2 + 2X_3 + 1{,}5X_4 \leq 500$$

$$4X_1 + 2X_2 + 6X_3 + 8X_4 \leq 2500 \qquad (2.1)$$

$$X_1 \geq 200$$

$$X_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4$$

$$\text{E} = 50X_1 + 50X_2 + 125X_3 + 100X_4 \rightarrow max. \qquad (2.2)$$

В данной задаче все переменные по своему физическому смыслу могут принимать только целые значения, поэтому на них накладывается ограничение целочисленности.

3 ОБОСНОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЫ

Все ограничения и целевая функция в данной задаче линейны, поэтому для ее решения можно использовать симплекс-метод. Опишем принцип работы простого симплекс-метода.

Симплекс-метод позволяет решать задачи линейного программирования любой размерности, т.е. с любым количеством переменных. Решение задач линейного программирования на основе симплекс-метода состоит в целенаправленном переборе угловых точек ОДР в направлении улучшения значения целевой функции.

Можно доказать, что экстремум (минимум или максимум) целевой функции всегда достигается при значениях переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$, соответствующих одной из угловых точек ОДР. Другими словами, оптимальное решение всегда находится в угловой точке ОДР.

Принцип работы симплекс-метода состоит в следующем. Находится какое-либо допустимое решение, соответствующее одной из угловых точек ОДР. Проверяются смежные с ней угловые точки ОДР. Если ни в одной из смежных угловых точек значение целевой функции не улучшается, то решение задачи завершается; текущая угловая точка ОДР соответствует оптимальному решению задачи. Если имеются смежные угловые точки ОДР, для которых значение целевой функции улучшается, то выполняется переход в ту из них, для которой достигается наиболее быстрое улучшение значения целевой функции. Для новой угловой точки ОДР процесс повторяется, т.е. проверяются смежные угловые точки. Перебор угловых точек происходит до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение, т.е. пока не будет достигнута угловая точка ОДР, для которой ни в одной из смежных точек значение целевой функции не улучшается.

Поиск решения на основе симплекс-метода реализуется путем вычислений на симплекс-таблицах. Основные этапы реализации симплекс-метода следующие:

1 Задача линейного программирования приводится к стандартной форме.

2 Определяется начальное допустимое решение (начальная угловая точка ОДР).

3 Строится исходная симплекс-таблица. Выполняются преобразования симплекс-таблиц, соответствующие перебору угловых точек ОДР, до получения оптимального решения.

Реализация симплекс-метода существенно различается в зависимости от вида математической модели задачи.

4 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Приведем математическую модель задачи к стандартной форме. Для этого в ограничение «больше или равно» потребуется ввести избыточную переменную, а в ограничения «меньше или равно» – остаточные:

$$0{,}5X_1 + 1{,}5X_2 + 2X_3 + 1{,}5X_4 + \mathrm{X}_5 = 500$$

$$4X_1 + 2X_2 + 6X_3 + 8X_4 + \mathrm{X}_6 = 2500 \tag{4.1}$$

$$X_1 - X_7 = 200$$

$$X_i \geq 0, \;\; i = 1, \dots, 4$$

$$E = 50X_1 + 50X_2 + 125X_3 + 100X_4 \rightarrow max. \tag{4.2}$$

В ограничении $X_1 - X_7 = 200$ отсутствует базисная переменная (т.е. переменная, входящая только в данное ограничение с коэффициентом, равным единице). Поэтому требуется ввести искусственную переменную:

$$X_1 - X_7 + X_8 = 200$$

Таким образом, в каждом ограничении имеется базисная переменная (X_5, X_6, X_8). Остальные переменные – небазисные.

Составляется искусственная целевая функция – сумма искусственных переменных (в данном случае имеется только одна искусственная переменная):

$$W = X_8 \rightarrow min.$$

Искусственная целевая функция выражается через небазисные переменные. Для этого выразим искусственную переменную X_8 через небазисные переменные:

$$X_8 = 200 - X_1 + X_7$$

и подставим в исходную целевую функцию.

$$W = 200 - X_1 + X_7 \rightarrow min.$$

Для приведения всей задачи к стандартной форме требуется перейти к искусственной целевой функции, подлежащей максимизации. Для этого она умножается на -1:

$$-W = -200 + X_1 - X_7 \rightarrow max.$$

Приведем полную математическую модель задачи к стандартной форме и с искусственным базисом:

$$0{,}5X_1 + 1{,}5X_2 + 2X_3 + 1{,}5X_4 + X_5 = 500$$

$$4X_1 + 2X_2 + 6X_3 + 8X_4 + X_6 = 2500$$

$$X_1 - X_7 + X_8 = 200$$

$$X_i \geq 0,\ \ i = 1, \dots, 4$$

$$E = 50X_1 + 50X_2 + 125X_3 + 100X_4 \rightarrow max.$$

$$-W = -200 + X_1 - X_7 \rightarrow max.$$

Составим первую симплекс-таблицу (таблица 4.1).

Таблица 4.1– Исходная симплекс-таблица (первый этап)

Базис	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	Решение
E	-50	-50	-125	-100	0	0	0	0	0
$-W$	-1	0	0	0	0	0	1	0	-200
X_8	1	0	0	0	0	0	-1	1	200
X_5	0,5	1,5	2	1,5	1	0	0	0	500
X_6	4	2	6	8	0	1	0	0	2500

Приведенное в таблице 4.1 начальное решение ($X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = X_7 = 0$, $X_8 = 200$, $X_5 = 500$, $X_6 = 2500$) является недопустимым: оно не соответствует начальной системе ограничений(4.1), так как не выполняется условие $X_1 \geq 200$.

Для поиска начального допустимого решения реализуется первый этап двухэтапного метода: минимизация искусственной целевой функции на основе процедур симплекс-метода.

Выбирается переменная для включения в базис: это переменная X_1 , так как ей соответствует максимальный по модулю отрицательный коэффициент в строке искусственной целевой функции.

Для определения переменной, исключаемой из базиса, найдем симплексные отношения: 200/1=200; 500/0,5=1000; 2500/4=625. Минимальное симплексное отношение соответствует переменной X_8, значит эта переменная исключается из базиса.

В результате преобразований по правилам симплекс-метода будет получена следующая симплекс-таблица (таблица 4.2).

Таблица 4.2– Симплекс-таблица после первой итерации

Базис	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	Решение

E	0	-50	-125	-100	0	0	-50	0	10000
$-W$	0	0	0	0	0	0	0	1	0
X_1	1	0	0	0	0	0	-1	0	200
X_5	0	1,5	2	1,5	1	0	0,5	0	400
X_6	0	2	6	8	0	1	4	0	1700

Как видно из новой таблицы 4.2, искусственная целевая функция равна нулю, и в базисе нет искусственных переменных. Получено допустимое решение: $X_1 = 200$, $X_5 = 400$, $X_6 = 1700$, $X_2 = X_3 = X_4 = X_7 = X_8 = 0$. В том, что оно допустимое, легко убедиться, подставив значения переменных в систему ограничений (2.1).

Таким образом, первый этап двухэтапного метода завершен. Искусственная целевая функция и искусственные переменные исключаются из симплекс-таблицы (таблица 4.3).

Таблица 4.3– Исходная симплекс-таблица (для второго этапа)

Базис	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	Решение
E	0	-50	-125	-100	0	0	-50	10000
X_1	1	0	0	0	0	0	-1	200
X_5	0	1,5	2	1,5	1	0	0,5	400
X_6	0	2	6	8	0	1	4	1700

Полученное решение является допустимым, но не оптимальным: признак неоптимальности решения – наличие отрицательных коэффициентов в строке целевой функции E. Поэтому реализуется второй этап двухэтапного метода – максимизация целевой функции E.

В базис включается переменная X_3, так как ей соответствует максимальный по модулю отрицательный коэффициент в строке целевой функции. Для определения переменной, исключаемой из базиса, вычисляем симплексные отношения: 400/2=200; 1700/6=283,33. Минимальное из них соответствует переменной X_5 ; значит эта переменная исключается из базиса. После преобразований по правилам симплекс-метода будет получена новая симплекс-таблица (таблица 4.4).

Таблица 4.4 – Симплекс-таблица после первой итерации на втором этапе.

Базис	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	Решение
E	0	43,75	0	-6,25	62,5	0	-18,75	35000
X_1	1	0	0	0	0	0	-1	200

X_3	0	0,75	1	0,75	0,5	0	0,25	200
X_6	0	-2,5	0	3,5	-3	1	2,5	500

Решение, полученное в таблице 4.4, все еще не является оптимальным, так как в строке целевой функции имеются отрицательные коэффициенты. Поэтому продолжаем вычисления по правилам симплекс-метода. В базис включаем переменную X_7 . Составим симплексные отношения: 200/0,25=800; 500/2,5=200. Минимальное симплексное отношение соответствует переменной X_6 , значит эта переменная исключается из базиса. По результатам преобразований будет получена новая симплекс-таблица (таблица 4.5).

Таблица 4.5 – Итоговая симплекс-таблица.

Базис	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	Решение
E	0	25	0	20	40	7,5	0	38750
X_1	1	-1	0	1,4	-1,2	0,4	0	400
X_3	0	1	1	0,4	0,8	-0,1	0	150
X_7	0	-1	0	1,4	-1,2	0,4	1	200

Получено оптимальное решение (признак его оптимальности – отсутствие отрицательных элементов в строке целевой функции). Основные переменные задачи приняли следующие значения: $X_1 = 400, X_2 = 0, X_3 = 150, X_4 = 0$. Это означает, что необходимо выпускать 400 радиаторов модели *A* и 150 модели С. Радиаторы моделей *B* и *D* выпускать не следует. Значения остаточных переменных: $X_5 = 0, X_6 = 0$ означают, что будут использованы все 500 человеко-часов рабочего времени и все 2500м^2 рабочих листов соответственно. Значение целевой функции $E = 38750$ показывает, что прибыль при таких объемах производства составит 38750 ден.ед.

Избыточная переменная $X_7 = 200$ означает, что выпуск радиаторов модели *A* превысит минимально необходимый на 200 (требуется выпустить не менее 200, а оптимальный объем производства – 400).

Рабочий лист с результатами решения задачи с использованием табличного процессора Excel приведен в приложении А.

5 АНАЛИЗ БАЗОВОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСЬ

Анализ решения на чувствительность – это анализ влияния изменений в постановке задачи на оптимальное решение. Анализ моделей на чувствительность – это процесс, реализуемый после получения оптимального решения. В рамках такого анализа выявляется чувствительность оптимального решения к определенным изменениям исходной модели. В задаче изготовления деталей может представлять интерес вопрос о том, как повлияет на оптимальное решение увеличение и уменьшение запаса ресурсов. Также потребуется анализ влияния производительности деталей технологических процессов.

5.1 Статус и ценность ресурсов

В рассматриваемой задаче ресурсами являются стальные листы, используемые для изготовления радиаторов, а также человеко-часы рабочего времени.

Как видно из таблицы 4.5 остаточные переменные равны 0. Это значит, что при составленном плане имеющиеся ресурсы будут израсходованы полностью, т.е. они являются дефицитными. Увеличение запасов стальных листов и количества человека-часов позволит увеличить прибыль; снижение запасов приведет к снижению прибыли.

Ценности ресурсов представляют собой коэффициенты E-строки при остаточных переменных, соответствующих остаткам ресурсов, в симплекс-таблице с оптимальным решением (таблица 4.5). Ценность 1 человека-часа рабочего времени равна 40 ден.ед., ценность 1 м^2 стальных листов – 7,5 ден.ед. Это означает, что увеличение запасов стальных листов на 1м^2 приводит к увеличению прибыли на 7,5 ден.ед. Увеличение затрат рабочего времени на 1 человеко-час приведет к увеличению прибыли на 40 ден.ед.

5.2 Анализ на чувствительность к изменению ограничения на использование рабочей силы

Проанализируем, как влияют на оптимальный план производства изменения возможностей использования человеко-часов рабочего времени.

Пусть максимально возможное использование рабочего времени изменилось на d человеко-часов, т.е. составляют не 500, а 500+d. Для определения нового оптимального решения воспользуемся коэффициентами окончательной симплекс-таблицы (таблица 4.5) из столбца остаточной переменной X_5. Новое оптимальное решение определяется следующим образом:

$$X_1 = 400 - 1{,}2d$$
$$X_3 = 150 + 0{,}8d$$
$$X_7 = 200 - 1{,}2d \qquad (5.1)$$
$$E = 38750 + 40d.$$

Пусть, например, максимально позволенное число человеко-часов не 500, а 550, т.е. *d* =50. Найдем новое оптимальное решение:

$$X_1 = 400 - 1{,}2 \cdot 50 = 340$$
$$X_3 = 150 + 0{,}8 \cdot 50 = 240$$
$$X_7 = 200 - 1{,}2 \cdot 50 = 140$$
$$E = 38750 + 40 \cdot 50 = 40750.$$

Таким образом, в новых условиях предприятию следует выпускать 340 радиаторов модели *A* и 240 радиаторов модели *C*. Выпуск радиаторов модели *A* превысит минимально необходимую величину на 140 штук. Будет получена прибыль в размере 40750 ден.ед.

Пусть максимально позволенное число человеко-часов составит не 500, а 450, т.е. *d* = -50. Найдем новое оптимальное решение:

$$X_1 = 400 - 1{,}2 \cdot (-50) = 460$$
$$X_3 = 150 + 0{,}8 \cdot (-50) = 110$$
$$X_7 = 200 - 1{,}2 \cdot (-50) = 260$$
$$E = 38750 + 40 \cdot (-50) = 36750.$$

Таким образом, в случае сокращения рабочего времени до 450 человеко-часов предприятию следует выпускать 460 радиаторов модели *A* и 110 радиаторов модели *C*. Выпуск радиаторов модели *A* превысит минимально необходимую величину на 260 штук. Прибыль составит 36750 ден.ед. Как и следовало ожидать, сокращение рабочего времени привело к уменьшению прибыли.

Проанализируем случай, когда максимальное число человеко-часов составит не 500, а 700 человеко-часов рабочего времени. Попытаемся найти новое оптимальное решение, подставив величину *d* = 200 в систему уравнений (5.1). Получим: $X_1 = 160, X_3 = 310$, $X_7 = -40$. Таким образом, одна из переменных приняла отрицательное значение, что недопустимо по физическому смыслу. Это значит, что для поиска оптимального решения в новых условиях требуется решить задачу заново, изменив ограничение на количество рабочего времени следующим образом: $0{,}5X_1 + 1{,}5X_2 + 2X_3 + 1{,}5X_4 \leq 700$.

Определим диапазон изменений максимально возможного числа человеко-часов, при котором состав переменных в оптимальном базисе остается прежним. Этот диапазон находится из условия неотрицательности всех переменных:

$$X_1 = 400 - 1{,}2d \geq 0$$

$$X_3 = 150 + 0{,}8d \geq 0$$

$$X_7 = 200 - 1{,}2d \geq 0.$$

Решив эту систему неравенств, получим $-187{,}5 \leq d \leq 166{,}7$. Это означает, что базис оптимального решения будет состоять из переменных X_1, X_3, X_7, если максимально число человеко-часов будет в диапазоне от 500-187,5 до 500+166,7 (т.е. от 312,5 до 666,7). Для любой величины человеко-часов, входящих в этот диапазон, новое оптимальное решение можно найти из уравнений (5.1).

5.3 Анализ на чувствительность к изменению минимально необходимого числа выпускаемых радиаторов одной модели

Проанализируем, как влияют на оптимальный план производства изменения размера заказа на радиаторы модели A.

Пусть минимально необходимое количество выпускаемых радиаторов модели А изменилось на d штук, т.е. составляет не 200, а 200+d штук. Для определения нового оптимального решения используются коэффициенты окончательной симплекс-таблицы (таблица 4.5) из столбца избыточной переменной X_7. Так как ограничение, для которого выполняется анализ на чувствительность, имеет вид “больше или равно”, коэффициенты из столбца избыточной переменной используются с обратными знаками. Новое оптимальное решение определяется следующим образом:

$$X_1 = 400 + 0d$$

$$X_3 = 150 + 0d$$

$$X_7 = 200 - d \tag{5.2}$$

$$E = 38750 + 0d.$$

Пусть, например, заводу требуется выпустить не менее 300 штук радиаторов модели A. Подставив в систему уравнений (5.2) величину d=100, получим новое оптимальное решение задачи:

$$X_1 = 400 + 0 \cdot 100 = 400$$

$$X_3 = 150 + 0 \cdot 100 = 150$$

$$X_7 = 200 - 100 = 100$$

$$E = 38750 + 0 \cdot 100 = 38750.$$

Таким образом, оптимальное решение задачи не изменилось. Изменилась только избыточная переменная X_7, обозначающая выпуск радиаторов модели *A* сверх необходимого количества. Такой результат легко объяснить: выпуск радиаторов модели *A* в количестве 400 штук достаточен для выполнения увеличившегося заказа, составляющего теперь 300 штук.

Определим диапазон изменений заказа на радиаторы модели A, при которых состав переменных в базисе остается прежним. Для этого используем условие неотрицательности всех переменных:

$$X_1 = 400 + 0d \geq 0$$

$$X_3 = 150 + 0d \geq 0$$

$$X_7 = 200 - d \geq 0.$$

Решив эту систему неравенств, получим: $-\infty \leq d \leq 200$. Это означает, что базис оптимального решения будет состоять из переменных X_1, X_3, X_7, если минимально необходимый объем выпуска радиаторов модели *A* будет составлять не более 400 штук. Для любой величины заказа, входящей в этот диапазон оптимальное решение можно найти из уравнений (5.2). Если заказ на радиаторы модели *A* превысит 400 штук, то для составления оптимального плана производства потребуется решать задачу заново.

5.4 Анализ на чувствительность к изменению прибыли от продаж одного из видов радиаторов

Проанализируем, как влияют на оптимальный план производства изменения величины прибыли от продажи радиаторов модели A.

Пусть прибыль от продажи от продажи одного радиатора модели *A* изменилась на *d* ден.ед., т.е. составляет не 50, а 50+*d* ден.ед. Для анализа влияния этих изменений на оптимальное решение используются коэффициенты окончательной симплекс-таблицы (таблица 4.5) из строки переменной X_1, так как для этой переменной изменился коэффициент целевой функции. Новые значения коэффициентов *E*-строки при небазисных переменных (т.е. для переменных $X_2,\ X_4,\ X_5, X_6$) для окончательной симплекс-таблицы, а также новое оптимальное значение целевой функции определяются следующим образом:

$$F_2 = 25 - d$$
$$F_4 = 20 + 1{,}4d$$
$$F_5 = 40 - 1{,}2d \qquad (5.3)$$
$$F_6 = 7{,}5 + 0{,}4d$$
$$E = 38750 + 400d$$

Пусть, например, прибыль от продажи одного радиатора модели *A* снизилась на 10 ден.ед., т.е. составляет не 50 ден.ед., а 40 ден.ед. (*d*=-10). Найдем значения коэффициентов *E*-строки при небазисных переменных для окончательной симплекс-таблицы и новое оптимальное значение целевой функции:

$$F_2 = 25 - (-10) = 35$$
$$F_4 = 20 + 1{,}4 \cdot (-10) = 6$$
$$F_5 = 40 - 1{,}2 \cdot (-10) = 52$$
$$F_6 = 7{,}5 + 0{,}4 \cdot (-10) = 7{,}1$$
$$E = 38750 + 400 \cdot (-10) = 34750.$$

Видно, что коэффициенты *E*-строки остались неотрицательными. Это значит, что оптимальное решение не изменяется. Таким образом, в новых условиях (при снижении прибыли от продажи одного радиатора модели *A* на 10 ден.ед.) предприятию по-прежнему следует выпускать 400 штук радиаторов модели *A* и 150 модели *C*. Максимальная прибыль для новых условий составит 34750 ден.ед.

Предположим, что прибыль от продажи одного радиатора модели *A* составляет не 50 ден.ед., а 20 ден.ед.(т.е. *d*=-30). Подставив величину *d*=-30 в систему уравнений (5.3), получим $F_2 = 55,\ F_4 = -22, F_5 = 76, F_6 = -4{,}5$. Таким образом, два коэффициента из *E*-строки приняли отрицательные значения. Это означает, что прежнее решение в новых условиях не является оптимальным. Для определения нового оптимального решения требуется решить задачу заново с системой ограничений (2.1) и целевой функцией $\mathrm{E} = 20X_1 + 50X_2 + 125X_3 + 100X_4 \rightarrow max$.

Определим диапазон изменений прибыли от продаж радиаторов модели А, при которых остается оптимальным решение, найденной для исходной задачи ($X_1 = 400, X_2 = 0,\ X_3 = 150,\quad X_4 = 0,\ X_5 = 0,\ X_6 = 0,\ X_7 = 200$). Условием оптимальности решения является неотрицательность всех коэффициентов E-строки:

$$F_2 = 25 - d \geq 0$$

$$F_4 = 20 + 1{,}4d \geq 0$$

$$F_5 = 40 - 1{,}2d \geq 0$$

$$F_6 = 7{,}5 + 0{,}4d \geq 0.$$

Решив эту систему неравенств, получим: $-14{,}3 \leq d \leq 25$. Это означает, что решение, найденное для исходной задачи, оптимально, если прибыль от одного радиатора модели A будет составлять от 35,7 до 75 ден.ед. Если эта прибыль составит меньше 35,7 или превысит 75 ден.ед., то для получения решения потребуется решить задачу заново, используя симплекс-метод, изменив коэффициент при X_1 . Новое оптимальное решение будет отличаться от прежнего не только значениями, но и составом переменных в базисе.

6 ПОСТРОЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДИФИКАЦИИ

Проанализировав результаты решения задачи оптимизации, можно выделить следующие недостатки в работе предприятия по производству радиаторов:

1) не производятся радиаторы моделей *B* и *D*;
2) количество производимых радиаторов модели *A* превышает необходимое на 200 штук.

В зависимости от конкретных условий работы предприятия эти недостатки могут устраняться по-разному.

Обеспечение выпуска продукции за счет повышения ее прибыльности

Предположим, что предприятие имеет возможность повысить прибыль от продажи радиаторов модели *D*. Пусть прибыль от радиаторов модели *D* будет увеличена до 120 ден.ед. Внесем изменения в математическую модель нашей задачи. Новая математическая модель, будет выглядеть следующим образом:

$$0{,}5X_1 + 1{,}5X_2 + 2X_3 + 1{,}5X_4 \leq 500$$

$$4X_1 + 2X_2 + 6X_3 + 8X_4 \leq 2500$$

$$X_1 \geq 200$$

$$X_i \geq 0, \; i = 1, \dots, 4$$

$$E = 50X_1 + 50X_2 + 125X_3 + 120X_4 \rightarrow max.$$

Решив задачу заново, получим следующее решение: $X_1 = 200$, $X_2 = 0$, $X_3 = 93$, $X_4 = 143$. Результаты решения в табличном процессоре Excel приведены в Приложении Б. Можно заметить, что оптимальное решение изменилось.

В новом решении появилась переменная X_4, равная 143. Это значит, что добились выпуска радиаторов модели *D*. Кроме того, производство радиаторов модели *A* сократилось до минимально необходимого количества в числе 200 штук. Таким образом, обеспечено производство радиаторов модели *D*, а также уменьшен выпуск радиаторов модели *A* при увеличении прибыльности радиаторов модели *D*.

Обеспечение выпуска продукции за счет снижения общей прибыльности

Предположим предприятию необходимо выпускать радиаторы модели *D*, однако сделать их производство более прибыльным невозможно. В этом случае прозводство этих радиаторов ведет к снижению общей прибыли. Пусть руководство предприятия считает допустимым снижение прибыли на 10%. Это составляет 3875 ден.ед.(так как максимально возможная прибыль равна 38750 ден.ед.). Значит общая прибыль должна составить не менее 38750 – 3875 = 34875 ден.ед. Для упрощения округлим эту величину до 35тыс. ден.ед. Таким образом поставлена следующая задача: обеспечить выпуск радиаторов всех моделей, получив при этом максимальную прибыль не менее 35 тыс. ден.ед. Математическая модель этой задачи имеет следующий вид:

$$50X_1 + 50X_2 + 125X_3 + 100X_4 \geq 35000.$$

$$0{,}5X_1 + 1{,}5X_2 + 2X_3 + 1{,}5X_4 \leq 500$$

$$4X_1 + 2X_2 + 6X_3 + 8X_4 \leq 2500$$

$$X_1 \geq 200$$

$$X_i \geq 0, \ \ i = 1, \dots, 4$$

$$E = X_4 \to max.$$

Решив эту задачу, получим следующее решение: $X_1 = 200$, $X_2 = 23$, $X_3 = 64$, $X_4 = 159$. Результаты решения в табличном процессоре Excel приведены в Приложении Б. Таким образом требуется выпускать 200 радиаторов модели *A*, 23 радиатора модели *B*, 64 радиатора модели *C*, 159 радиаторов модели *D*. Общая прибыль при таком производстве составит 35000 ден.ед. Таким образом обеспечено производство всех моделей радиаторов и максимальное производство радиаторов модели *D*

7 ПРИМЕРЫ ПОСТАНОВОК И РЕШЕНИЙ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

7.1 Пример 1

Заводу необходимо начать производство подкормки для сельскохозяйственных растений по заказу агрофирмы. Для её выпуска предполагается использовать три вида различных удобрений. Данные приведены в следующей таблице (см. таблица 7.1):

Таблица 7.1 – Количество часов, отведенное для печати

Микроэлементы	T1	T2	T3
Азотные добавки, %	15	5	25
Фосфаты, %	5	10	20

Подкормка должна содержать не менее 40 кг азотных добавок и не менее 15 кг фосфатов. Стоимость приобретения удобрения T1 - 110 ден.ед., T2 – 90 ден.ед., T3 – 75 ден.ед.

Составить оптимальный план производства подкормки, т.е. использования сырьевых удобрений, с минимальными затратами.

Составим ограничения на содержание удобрений:

$$15X_1 + 5X_2 + 25X_3 \geq 40$$

$$5X_1 + 10X_2 + 20X_3 \geq 15$$

Ограничение, указывающее, что сумма долей удобрений в подкормке должна быть равна 1:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

По физическому смыслу все переменные в этой задаче должны быть неотрицательные:

$$X_i \geq 0, i = 1 \ldots 3.$$

Целевая функция (стоимость подкормки) будет иметь вид:

$$\mathrm{E} = 110X_1 + 90X_2 + 75X_3 \rightarrow min.$$

Приведём математическую модель:

$$15X_1 + 5X_2 + 25X_3 \geq 40$$

$$5X_1 + 10X_2 + 20X_3 \geq 15$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

$X_i \geq 0, i = 1 \dots 3.$

$E = 110X_1 + 90X_2 + 75X_3 \rightarrow min.$

Решив задачу симплекс-методом (подробное решение приведено в “Приложении В”), получим: $X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1, E = 75$. Это значит, что подкормка должна состоять полностью из удобрения Т3, удобрения Т1 и Т2 использовать нецелесообразно. Стоимость одного килограмма подкормки будет 75 ден. ед. Очевидно, что в подкормке будет содержаться 25 % азотных добавок и 20 % фосфатов.

7.2 Пример 2

Руководство нового развивающегося завода собирается приобрести роботизированные станки трёх видов для производства автомобильных запасных частей сложной конструкции. На приобретение данного оборудования администрация предприятия планирует затратить не более 300 тыс. ден.ед. Цех завода, в котором предполагается организовать производство, составляет по площади 45 кв.м. Некоторые другие характеристики станков приведены в таблице:

Таблица 7.2– Характеристики станков каждого вида

Станки	С1	С2	С3
Стоимость, тыс ден.ед.	6	3	2
Рабочая площадь, кв.м	9	4	3
Производительность, дет./смена	8	4	3

Составить оптимальный план организации производства на заводе (приобретения оборудования), чтобы добиться его максимальной производительности. При этом количество станков стоимостью 6 тыс. ден.ед. должно быть не менее 3.

Введём переменные:

X_1 – количество станков стоимостью 6 тыс. ден.ед.,

X_2 – количество станков стоимостью 3 тыс. ден.ед.,

X_3 – количество станков стоимостью 2 тыс. ден.ед.

Составим ограничение на стоимость станков:

$6X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 300$

Общая стоимость оборудования не должна превышать 300 тыс. ден.ед.

Данное оборудование должно быть размещено на территории не более 45 кв. м:

$$9X_1 + 4X_2 + 3X_3 \leq 45$$

Количество станков стоимостью 6 тыс. ден.ед. должно быть не менее 3:

$$X_2 \geq 3$$

По физическому смыслу все переменные в этой задаче должны быть неотрицательные:

$$X_i \geq 0, i = 1 \dots 3.$$

Целевая функция (производительность всего цеха) будет иметь вид:

$$\mathrm{E} = 8X_1 + 4X_2 + 3X_3 \to max.$$

Приведём математическую модель в целом:

$$6X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 300$$

$$9X_1 + 4X_2 + 3X_3 \leq 45$$

$$X_2 \geq 3$$

$$X_i \geq 0, i = 1 \dots 3.$$

$$\mathrm{E} = 8X_1 + 4X_2 + 3X_3 \to max.$$

Решив задачу симплекс-методом (подробное решение приведено в “Приложении В”), получим: $X_1 = 0$, $X_2 = 3, X_3 = 11, E = 45$. Это значит, что необходимо приобрести 3 станка за 3 тыс. ден.ед., 11 станков за 2 тыс. ден.ед., закупать станки за 6 тыс. ден.ед. нецелесообразно. Производительность всего участка составит 45 деталей за смену.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе решения задачи был составлен оптимальный план производства радиаторов четырех различных моделей с целью получения максимальной прибыли. А именно: предприятию следует выпускать 400 радиаторов модели *A* и 150 радиаторов модели *C*. При этом полученная прибыль составит 38750 ден.ед.

Также анализ результатов решения показывает, что ресурсы, затрачиваемые в производстве, будут полностью израсходованы. Стоит отметить, что при анализе могут быть выделены некоторые недостатки оптимального плана производства. Один из них заключался в том, что радиаторы моделей *B* и *D* не будут выпускаться. Второй недостаток составленного плана в том, что количество выпущенных радиаторов модели *A* будет превышать минимально необходимое в 2 раза.

Анализ данных результатов показал, что существует потенциальная возможность повлиять положительным образом на значение целевой функции, к примеру, изменив значения тех или иных ограничений в постановке задачи. Особое внимание следует уделить ограничениям, для которых переменные в результате решения оказались равны нулю.

В ходе решения задачи были также выявлены несколько потенциально возможных модификаций. Было обнаружено, что если повысить прибыльность радиаторов модели *D*, то можно будет обеспечить их выпуск. Кроме того, в случае если руководство предприятия допустит возможность снижения прибыли до 35000 ден.ед., то можно будет обеспечить выпуск радиаторов всех возможных моделей.

Следовательно, можно сделать вывод, что вполне целесообразно проводить подобные модификации в постановке задачи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Смородинский, С.С. Оптимизация решений на основе методов и моделей математического программирования: Учебное пособие по курсу «Системный анализ и исследование операций» / С.С. Смородинский, Н.В. Батин – Мн.: БГУИР, 2003.–136с.

[2] Смородинский, С.С. Системный анализ и исследование операций: Сборник заданий и методические указания по курсовому проектированию / С.С. Смородинский, Н.В. Батин – Мн.: БГУИР, 2003.–71с.

[3] Смородинский, С.С. Методы анализа и принятия решений в слабоструктурированных задачах: Учебное пособие по курсу «Методы и системы принятия решений» / С.С. Смородинский, Н.В. Батин – Мн.: БГУИР, 2003.-114с.

[4] Вентцель, Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – 2-е изд., стер. / Е. С. Вентцель – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 208 с.

[5] Таха, Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. — М.: Издательский дом “Вильямс”, 2005. — 912 с.: ил. — Парал. тит. анг

Приложение А
(обязательное)
Решение задачи оптимизации с использованием табличного процессора *MS Excel*

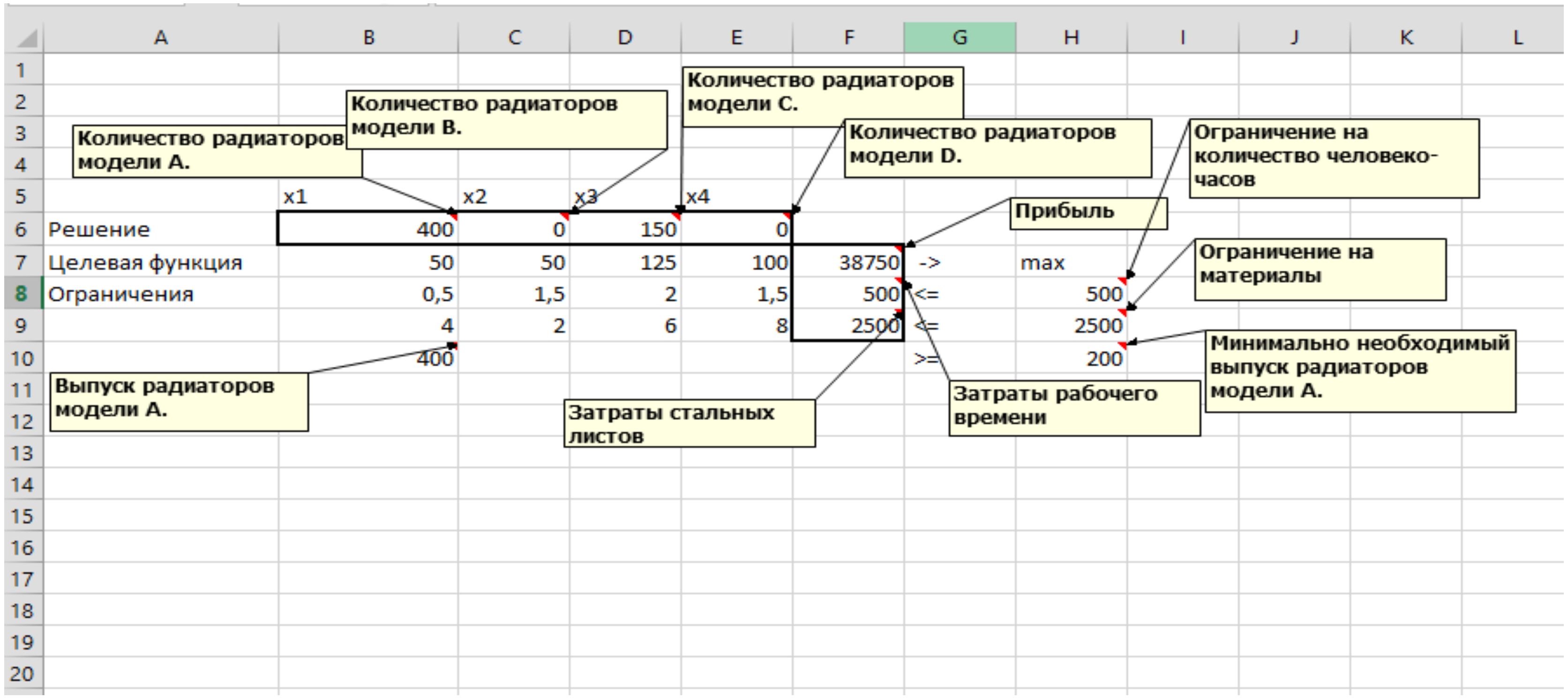


Рисунок А.1 – Решение задачи оптимизации с использованием табличного процессора *MS Excel*

Приложение Б
(обязательное)
Решение модифицированной аналитической модели с использованием табличного процессора *MS Excel*

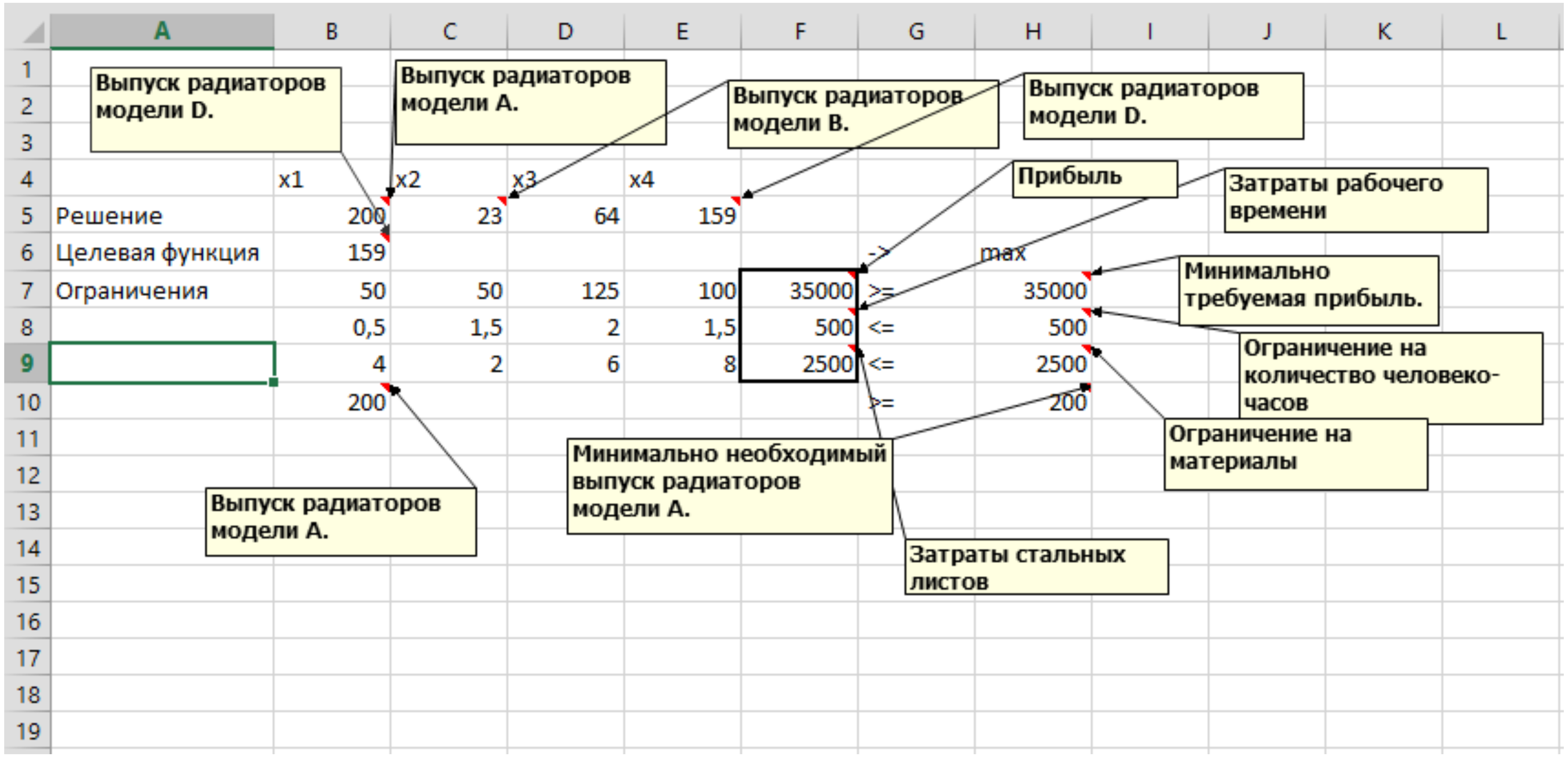


Рисунок Б.1 – Решение модифицированной аналитической модели с использованием табличного процессора *MS Excel*

Приложение В
(обязательное)
Протокол решения задач планирования производства с использованием табличного процессора *MS Excel*

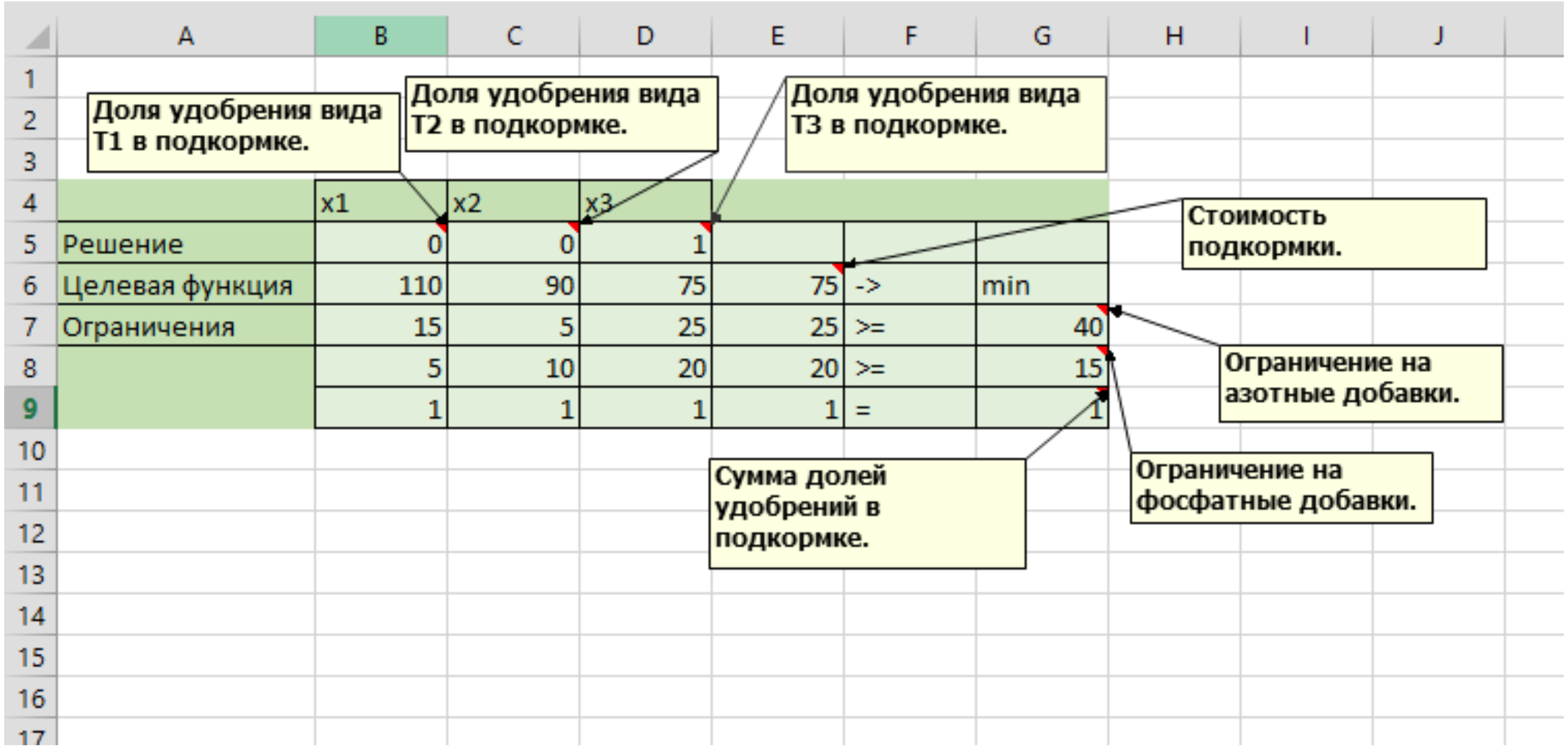
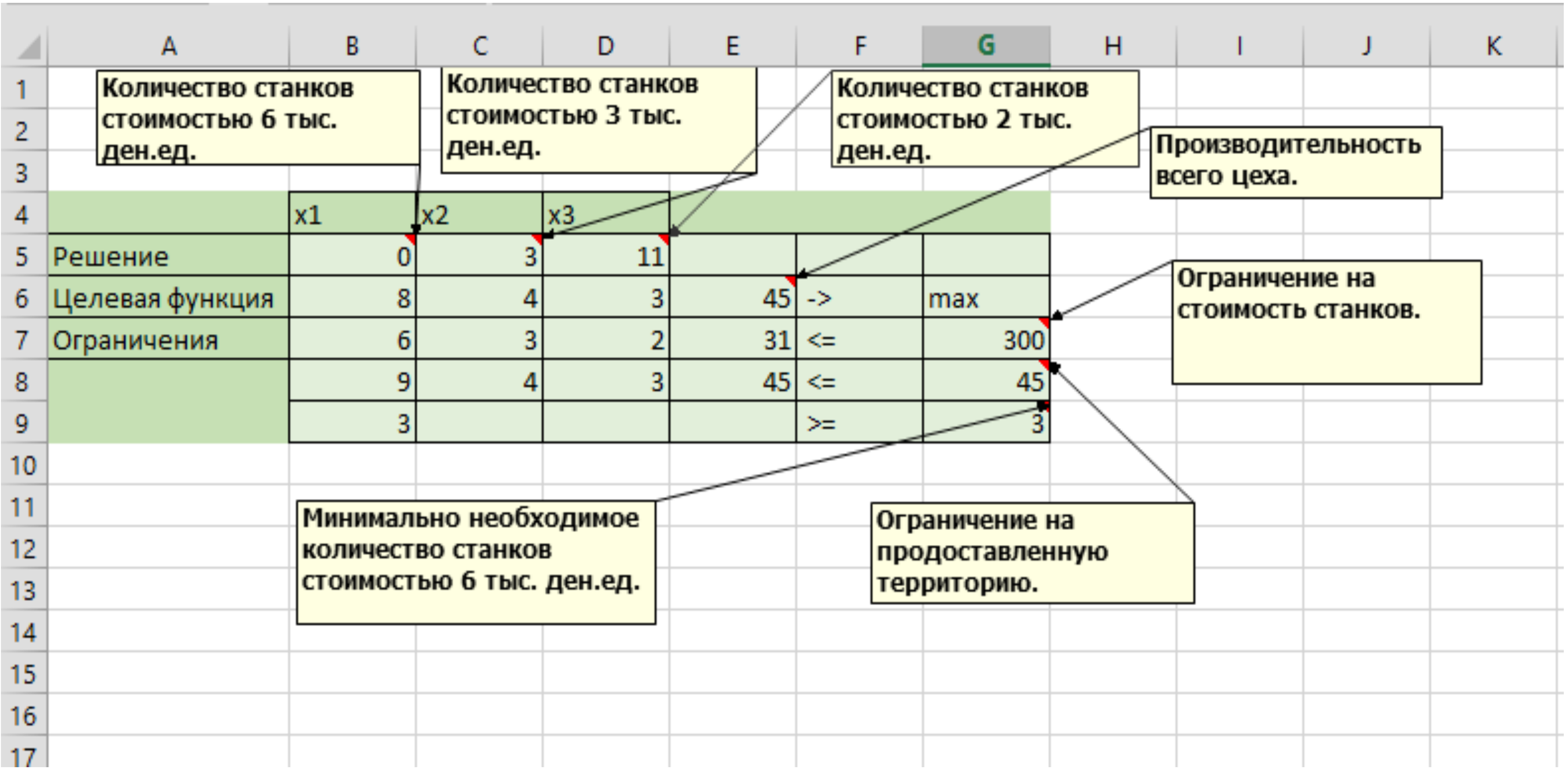


Рисунок В.1 – Решение Примера 1



	A	B	C	D	E	F	G
4		x1	x2	x3			
5	Решение	0	3	11			
6	Целевая функция	8	4	3	45	->	max
7	Ограничения	6	3	2	31	<=	300
8		9	4	3	45	<=	45
9		3				>=	3

Рисунок В.2 – Решение Примера 2

ВЕДОМОСТЬ КУРСОВОГО ПРОЕКТА

	Наименование	Дополнительные сведения
	Текстовые документы	
БГУИР КП 1-53 01 02 01 005 ПЗ	Пояснительная записка	34с.

<table>
<tr><td colspan="5"></td><td colspan="3">БГУИР КП 1-53 01 02 01 005 Д1</td></tr>
<tr><td>Изм.</td><td>Л</td><td>№ докум.</td><td>Подп.</td><td>Дата</td><td rowspan="7">Разработка оптимального плана производства радиаторов
Ведомость курсового проекта</td><td>Лит</td><td>Лист</td><td>Листов</td></tr>
<tr><td colspan="2">Разраб.</td><td>Шведов</td><td></td><td></td><td></td><td>34</td><td>34</td></tr>
<tr><td colspan="2">Провер.</td><td>Протченко</td><td></td><td></td><td colspan="3" rowspan="5">Кафедра ИТАС
гр. 820601</td></tr>
<tr><td colspan="2">Т.контр.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Н.контр.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Утв.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Реценз.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>