Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет информационных технологий и управления

Кафедра информационных технологий автоматизированных систем

Отчет
по лабораторной работе №7
«Получение точечных оценок параметров распределения»

Вариант 7

Выполнили:
студенты гр. 820601
Пальчик А.М.
Шведов А.Р.

Проверил:
Ярмолик В. И.

Минск 2021

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

- изучение задачи получения интервальных оценок параметров распределений;
- приобретение навыков получения интервальных оценок параметров распределений в системе *Matlab*.

2. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

Доверительный интервал для математического ожидания a нормальной генеральной совокупности $N(a,\sigma^2)$ при известной дисперсии σ^2

$$\bar{x} - u_{\frac{1-\gamma}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + u_{\frac{1-\gamma}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где выборочное среднее $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $u_{\frac{1-\gamma}{2}}$ – это $100\frac{1-\gamma}{2}$-процентное отклонение нормального распределения $N(0,1)$.

Доверительный интервал для математического ожидания a нормальной генеральной совокупности $N(a,\sigma^2)$ при неизвестной дисперсии σ^2

$$\bar{x} - t_{\frac{1-\gamma}{2}}\frac{\bar{s}}{\sqrt{n-1}} < a < \bar{x} + t_{\frac{1-\gamma}{2}}\frac{\bar{s}}{\sqrt{n-1}},$$

где выборочная дисперсия $\bar{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$, $\bar{s} = \sqrt{\bar{s}^2}$; $t_{\frac{1-\gamma}{2}}$ – это $100\frac{1-\gamma}{2}$-процентное отклонение распределения $T_1(n-1)$ (распределение Стьюдента).

Доверительный интервал для дисперсии σ^2 нормальной генеральной совокупности $N(a,\sigma^2)$ при известном математическом ожидании a

$$\frac{n\bar{s}_0^2}{v_{\frac{1-\gamma}{2}}} < \sigma^2 < \frac{n\bar{s}_0^2}{v_{\frac{1+\gamma}{2}}},$$

где выборочная дисперсия при известном математическом ожидании $\bar{s}_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$, $v_{\frac{1-\gamma}{2}}$, $v_{\frac{1+\gamma}{2}}$ – это $100\frac{1-\gamma}{2}$- и $100\frac{1+\gamma}{2}$-процентные отклонения распределения $H_1(n)$ (распределение хи-вадрат).

Доверительный интервал для дисперсии σ^2 нормальной генеральной совокупности $N(a,\sigma^2)$ при неизвестном математическом ожидании a

$$\frac{n\bar{s}^2}{w_{\frac{1-\gamma}{2}}} < \sigma^2 < \frac{n\bar{s}^2}{w_{\frac{1+\gamma}{2}}}.$$

где $w_{\frac{1-\gamma}{2}}$, $w_{\frac{1+\gamma}{2}}$ – это $100\frac{1-\gamma}{2}$- и $100\frac{1+\gamma}{2}$-процентные отклонения распределения $H_1(n-1)$.

Для получения доверительных интервалов параметров нормального распределения, напишем следующую собственную функцию *getVar(x,a),* которая возвращает выборочное среднее значение x по массиву выборки из нормального распределения, выборочную дисперсию при известном и неизвестном математическом ожидании. Листинг функции представлен на рисунке 2.1:

```
function [ xmean, s2,s ] = getVar( x,a )
    xmean = mean(x);
    sum1 = 0;
    sum2 = 0;
    for i = 1 : length(x)
        sum1 = sum1 + (x(i) - a) ^ 2;
        sum2 = sum2 + (x(i) - xmean) ^ 2;
    end
    s = sum1 / length(x);
    s2 = sum2 / length(x);
end
```

Рисунок 2.1 – Листинг программы. Файл *getVar.m*

Далее создадим программу, формирующую необходимые данные для анализа. Смоделируем выборку объемом $n = 1000$ из нормального распределения $N(\alpha, \sigma^2)$ с математическим ожиданием $\alpha = 2$ и дисперсией $\sigma^2 = 9$ и получим доверительные интервалы для этих параметров. Так же воспользуемся стандартной функцией *Matlab normfit(x,alpha),* которая возвращает несмещенные с минимальной дисперсией точечные оценки *muhat*, *sigmahat* и 100(1-*alpha*)-процентные интервальные оценки *muci*, *sigmaci* параметров нормального распределения по выборке, размещенной в векторе x.

```
clear, clc;
x = [];
n = 1000;
m = 40;
a = 2;
sigma = 9;
p = m / n;
q = 1 - p;
for i = 1 : n
   x(i) = normrnd(a,sigma^(1/2));
end
[meanx, s2,s]=getVar(x,a);
y = [ 0.90 0.95 0.99];
for i = 1 : length(y)
    fprintf('\tПроверка при y=%.2f \n', y(i));

    dov = norminv(1 - (1 - y(i)) / 2,0,1) * ((sigma / n) ^ ( 1 / 2));
    result(1,1) = meanx - dov;
    result(1,2) = meanx + dov;

    dov = tinv(1 - (1 - y(i)) / 2,n) * ((s / (n - 1)) ^ (1 / 2))  ;
    result(2,1) = meanx - dov;
    result(2,2) = meanx + dov;

    result(3,1) = n * s / chi2inv(1 - ( 1 - y(i)) / 2,n);
    result(3,2) = n * s / chi2inv(1 - ( 1 + y(i)) / 2,n);

    result(4,1) = n * s2 / chi2inv(1 - (1 - y(i)) / 2,n - 1);
    result(4,2) = n * s2 / chi2inv(1 - (1 + y(i)) / 2,n - 1);

    [muhat,sigmahat,muci,sigmaci] = normfit(x,1 - y(i))
    result
end

```

Рисунок 2.2 – Листинг программы

Таблица 1 – Сравнение интервальных оценок

	Собственные вычисления		*Matlab*	
	$\gamma = 0{,}90$			
	$\theta_{\text{н}}$	$\theta_{\text{в}}$	$\theta_{\text{н}}$	$\theta_{\text{в}}$
$I(a, \sigma)$	1,9259	2,2380	–	–
$I(a, \bar{s})$	1,9265	2,2375	1,9265	2,2375
$I(\sigma^2, s_0^2)$	8,2949	9,6102	–	–
$I(\sigma^2, \bar{s}^2)$	8,2967	9,6130	8,2969	9,6131
	$\gamma = 0{,}95$			
	$\theta_{\text{н}}$	$\theta_{\text{в}}$	$\theta_{\text{н}}$	$\theta_{\text{в}}$
$I(a, \sigma)$	1,8961	2,2679	–	–
$I(a, \bar{s})$	1,8966	2,2674	1,8967	2,2673
$I(\sigma^2, s_0^2)$	8,1819	9,7504	–	–
$I(\sigma^2, \bar{s}^2)$	8,1835	9,7533	8,1836	9,8157
	$\gamma = 0{,}99$			
	$\theta_{\text{н}}$	$\theta_{\text{в}}$	$\theta_{\text{н}}$	$\theta_{\text{в}}$

$I(a,\sigma)$	1,8376	2,3264	–	–
$I(a,\bar{s})$	1,8382	2,3258	1,8383	2,3257
$I(\sigma^2,s_0^2)$	7,9668	10,0324	–	–
$I(\sigma^2,\bar{s}^2)$	7,9683	10,0354	7,9682	10,03555

Найдем интервальные оценки биномиального распределения. Границы доверительного интервала для вероятности *p = P(A)* события *A* определяются выражением

$$\frac{n}{n+u_{\frac{1-\gamma}{2}}^2}\left(\hat{p}+\frac{u_{\frac{1-\gamma}{2}}^2}{2n}\pm u_{\frac{1-\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}+\frac{u_{\frac{1-\gamma}{2}}^2}{4n^2}}\right)$$

Помимо собственных функций, воспользуемся стандартной функцией *Matlab binofit(m,n,alpha),* которая возвращает интервальную оценку *pci* параметра p биномиального распределения $Bi_1(n,p)$ по числу m успехов в n испытаниях Бернулли. Зададим количество испытаний $n = 200$, частота случайного события $p = \frac{m}{n} = \frac{40}{200} = 0{,}2$. Приведем код программы на рисунке 2.3:

```
clear, clc
n = 200;
m = 40;
p = m / n;
b = 0;
y = [ 0.90 0.95 0.99];
for i = 1:n
b = b + binornd(n,p);
end
p = b/n^2;
q = 1 - p;
for i = 1 : length(y)
u = norminv((1-y(i))/2,0,1);
result(1,1) = n/(n+u^2)*(p+u^2/(2*n)-u*(p*q/n+u^2/(4*n^2))^(1/2));
result(1,2) = n/(n+u^2)*(p+u^2/(2*n)+u*(p*q/n+u^2/(4*n^2))^(1/2));
result
l = result(1,2) - result(1,1)
[phat,pci] = binofit(m,n,1-y(i))
end
```

Рисунок 2.3 – Листинг программы

Полученные при выполнении программы и использовании стадартных функций *Matlab* доверительные интервалы для вероятности *p = P(A)* события *A* сведём в таблицу 2.

Таблица 2 – Доверительные интервалы для $p = P(A)$

Доверительная вероятность γ	Собственные вычисления		*Matlab*	
	$\theta_н$	$\theta_в$	$\theta_н$	$\theta_в$
0,90	0,1593	0,2524	0,1546	0,2522
0,95	0,1521	0,2629	0,1469	0,2622
0,99	0,1389	0,2840	0,1326	0,2822

3. ВЫВОД

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены методы получения интервальных оценок параметров распределений, а также приобретены навыки получения интервальных оценок параметров распределений в системе *Matlab*. Полученные собственным способом интервальные оценки практически совпадают с оценками, полученными средствами *Matlab*.