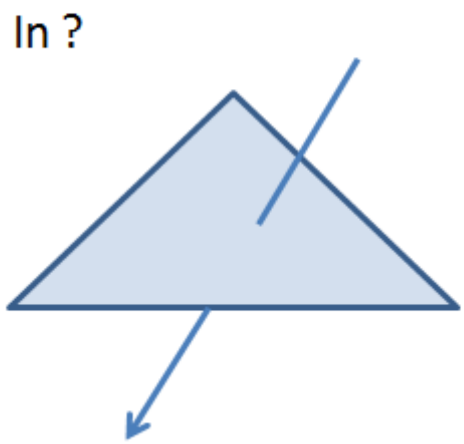
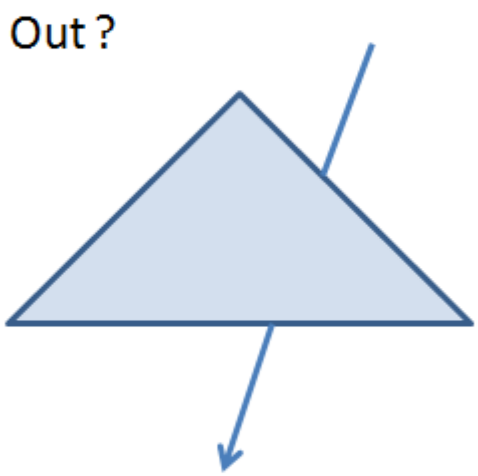
射线和三角形的相交检测（ray triangle intersection test）

本文以Fast, Minimum Storage Ray Triangle Intersection为参考，在此感谢原作者，大家也可以直接阅读原版。

射线和三角形的相交检测是游戏程序设计中一个常见的问题，最典型的应用就是拾取(Picking)，本文介绍一个最常见的方法，这个方法也是DirectX中采用的方法，该方法速度快，而且存储空间少。先讲述理论，然后给出对应的代码实现。





一个直观的方法

我想大多数人在看到这个问题时，可能都会想到一个简单而直观的方法：首先判断射线是否与三角形所在的平面相交，如果相交，再判断交点是否在三角形内。

判断射线是否与平面相交

判断点是否在三角形内

但是，上面的方法效率并不很高，因为需要一个额外的计算，那就是计算出三角形所在的平面，而下面要介绍的方法则可以省去这个计算。

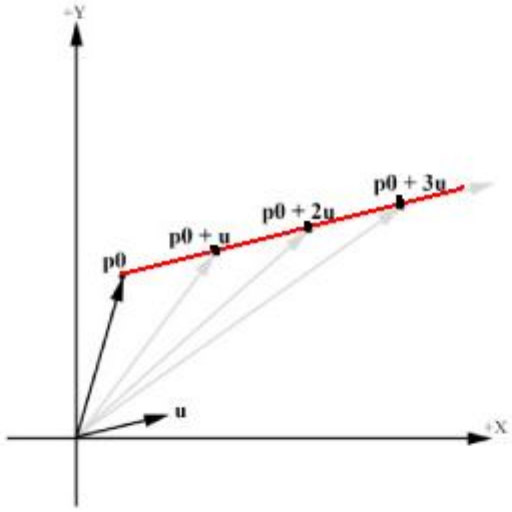
本文的方法

接下来会涉及到一些数学知识，不过没关系，我会详细解释每一个步骤，不至于太晦涩，只要您不觉得烦就行了，好了开始！

射线的参数方程如下，其中O是射线的起点，D是射线的方向。

$$O + Dt$$

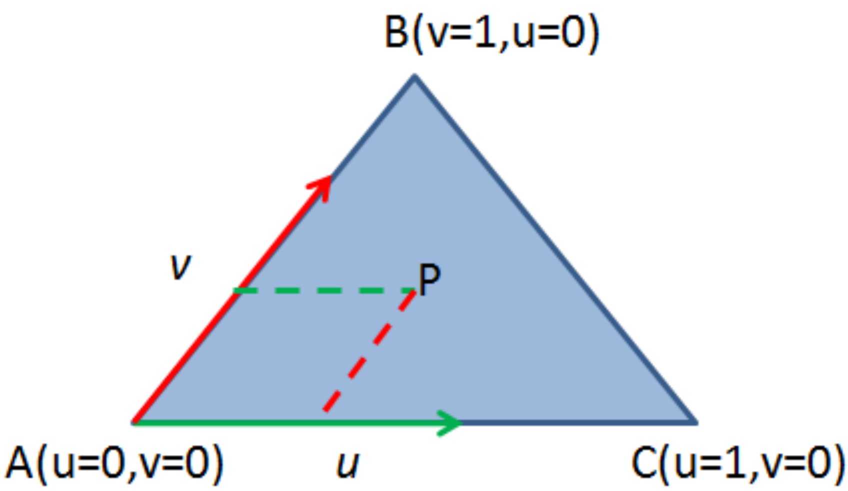
我们可以这样理解射线，一个点从起点O开始，沿着方向D移动任意长度，得到终点R，根据t值的不同，得到的R值也不同，所有这些不同的R值便构成了整条射线，比如下面的射线，起点是P0，方向是u，p0 + tu也就构成了整条射线。



三角形的参数方程如下，其中V0，V1和V2是三角形的三个点，u, v是V1和V2的权重，1-u-v是V0的权重，并且满足u>=0, v >= 0, u+v<=1。

$$(1-u-v)V_0 + uV_1 + vV_2$$

确切的说，上面的方程是三角形及其内部所有点的方程，因为三角形内任意一点都可以理解为从顶点V0开始，沿着边V0V1移动一段距离，然后再沿着边V0V2移动一段距离，然后求他们的和向量。至于移动多大距离，就是由参数u和v控制的。



于是，求射线与三角形的交点也就变成了解下面这个方程-其中t, u, v是未知数，其他都是已知的

$$O + Dt = (1-u-v)V_0 + uV_1 + vV_2$$

移项并整理，将t,u,v提取出来作为未知数，得到下面的线性方程组

$$\begin{bmatrix} -D & V_1 - V_0 & V_2 - V_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix} = O - V_0$$

现在开始解这个方程组，这里要用到两个知识点，一是克莱姆法则，二是向量的混合积。

令E1 = V1 - V0，E2 = V2 - V0，T = O - V0上式可以改写成

$$\begin{bmatrix} -D & E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix} = T$$

根据克莱姆法则，可得到t,u,v的解分别是

$$t = \frac{1}{\begin{vmatrix} -D & E_1 & E_2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} T & E_1 & E_2 \end{vmatrix}$$

$$u = \frac{1}{\begin{vmatrix} -D & E_1 & E_2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} -D & T & E_2 \end{vmatrix}$$

$$v = \frac{1}{\begin{vmatrix} -D & E_1 & E_2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} -D & E_1 & T \end{vmatrix}$$

将这三个解联合起来写就是

$$\begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -D & E_1 & E_2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} T & E1 & E2 \\ -D & T & E2 \\ -D & E1 & T \end{vmatrix}$$

根据混合积公式

$$\begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix} = a \times b \bullet c = -a \times c \bullet b$$

上式可以改写成

$$\begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{\left[D \times E_2 \bullet E_1 \right]} \begin{bmatrix} T \times E_1 \bullet E_2 \\ D \times E_2 \bullet T \\ T \times E_1 \bullet D \end{bmatrix}$$

令

$$P = D \times E_2$$

$$Q = T \times E_1$$

得到最终的公式，这便是下面代码中用到的最终公式了，之所以提炼出P和Q是为了避免重复计算

$$\begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{\left| P \bullet E_1 \right|} \begin{vmatrix} Q \bullet E_2 \\ P \bullet T \\ Q \bullet D \end{vmatrix}$$

理论部分阐述完毕，开始上代码，这份代码来自DirectX SDK中的Demo，名字叫做Picking(拾取)，该函数位于文件Pick.cpp的最末尾。这个函数有一个特点，就是判断语句特别多，因为对于一个频繁被调用的函数来说，效率是最重要的，这么多判断就是为了在某个条件不满足时，及时返回，避免后续不必要的计算。

```
// Determine whether a ray intersect with a triangle
// Parameters
// orig: origin of the ray
// dir: direction of the ray
// v0, v1, v2: vertices of triangle
// t(out): weight of the intersection for the ray
```

```
// u(out), v(out): barycentric coordinate of intersection

bool IntersectTriangle(const Vector3& orig, const Vector3& dir,
    Vector3& v0, Vector3& v1, Vector3& v2,
    float* t, float* u, float* v)
{
    // E1
    Vector3 E1 = v1 - v0;

    // E2
    Vector3 E2 = v2 - v0;

    // P
    Vector3 P = dir.Cross(E2);

    // determinant
    float det = E1.Dot(P);

    // keep det > 0, modify T accordingly
    Vector3 T;
    if( det >0 )
    {
        T = orig - v0;
    }
    else
    {
        T = v0 - orig;
        det = -det;
    }

    // If determinant is near zero, ray lies in plane of triangle
```

```
    if( det < 0.0001f )
        return false;

    // Calculate u and make sure u <= 1
    *u = T.Dot(P);
    if( *u < 0.0f || *u > det )
        return false;

    // Q
    Vector3 Q = T.Cross(E1);

    // Calculate v and make sure u + v <= 1
    *v = dir.Dot(Q);
    if( *v < 0.0f || *u + *v > det )
        return false;

    // Calculate t, scale parameters, ray intersects triangle
    *t = E2.Dot(Q);

    float fInvDet = 1.0f / det;
    *t *= fInvDet;
    *u *= fInvDet;
    *v *= fInvDet;

    return true;
}
```

参数说明

输入参数：前两个参数orig和dir是射线的起点和方向，中间三个参数v0，v1和v2是三角形的三个顶点。

输出参数：t是交点对应的射线方程中的t值，u，v则是交点的纹理坐标值

代码说明

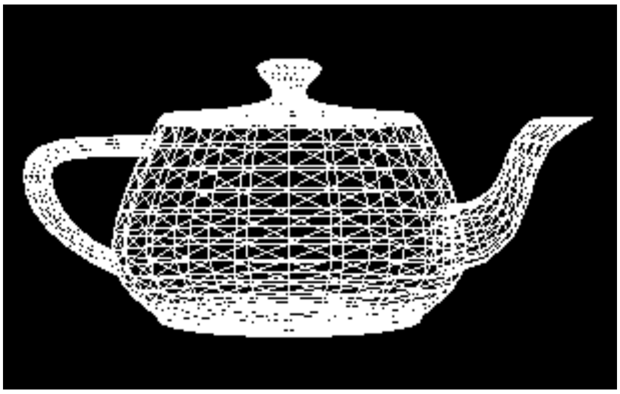
变量的命名方式：为了方便阅读，代码中的变量命名与上面公式中的变量保持一致，如E1，E2，T等。
变量det表示矩阵的行列式值
27-35行用来确保det>0，如果det<0则令det = -det，并对T做相应的调整，这样做是为了方便后续计算，否则的话需要分别处理det>0和det<0两种情况。
第38行，注意浮点数和0的比较，一般不用 == 0的方式，而是给定一个Epsilon值，并与这个值比较。
第43行，这里实际上u还没有计算完毕，此时的值是Dot(P,T)，如果Dot(P,T) > det, 那么u > 1，无交点。
第51行，要确保u + v <= 1，也即 [Dot(P,T) + Dot(Q, D)] / det 必须不能大于1，否则无交点。
第57-60行，走到这里时，表明前面的条件都已经满足，开始计算t, u, v的最终值。

交点坐标

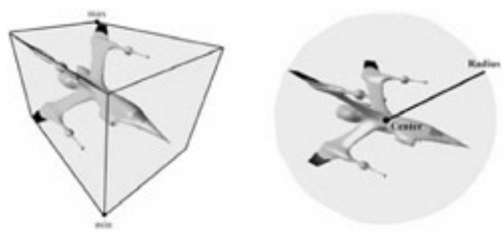
根据上面代码求出的t,u,v的值，交点的最终坐标可以用下面两种方法计算
O + Dt
(1 - u - v)V0 + uV1 + vV2

在本文开头已经说了，射线和三角形的相交检测最典型的应用就是拾取，比如在一个三维场景中用鼠标选择某个物体。那么拾取是如何实现的呢？我们知道在物体的三维模型表示中，三角形是最小的几何图元，最小意味着不可再分，也就是说任何模型，无论它多么复杂，都可以由若干个三角形组合而成。拾取过程实际是判断拾取射线是否与模型相交，而这又可以转化为-只要射线与模型中的任何一个三角形相

交即可。下面是模型的线框表示法，可见如果想要判断某条射线是否与这个茶壶相交，只要判断该射线是否与茶壶模型中某个三角形相交即可。



需要注意的是，虽然射线和三角形的相交检测可以用来实现拾取，但是大多数程序并不采用这个方法，原因是这个方法效率很低，我们可以设想，一个大型的3D在线游戏，它的模型数量以及复杂程度都是很高的，如果用这种方法来判断，需要对模型中每个三角形都做一次判断，效率极其低下，一种可行的方案是，用包围球或者包围盒来代替，计算出能容纳模型的最小球体或者矩形体，只要判断出射线与包围球或者包围盒相交，我们就认为射线与模型相交，这样效率会显著提高，只是精确度上会有一定误差，但是足以满足多数程序的需要。



Happy Coding

== The End ==