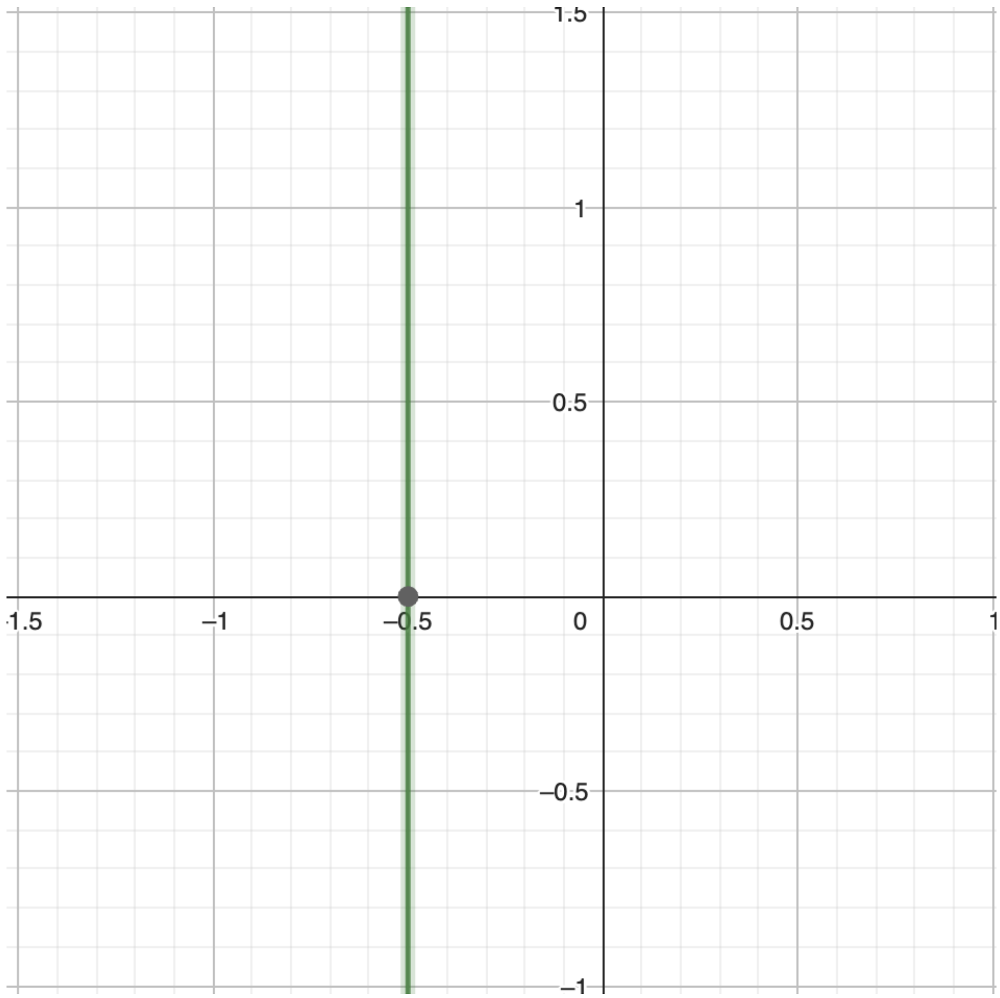
HW2-9933213

سوال ۱

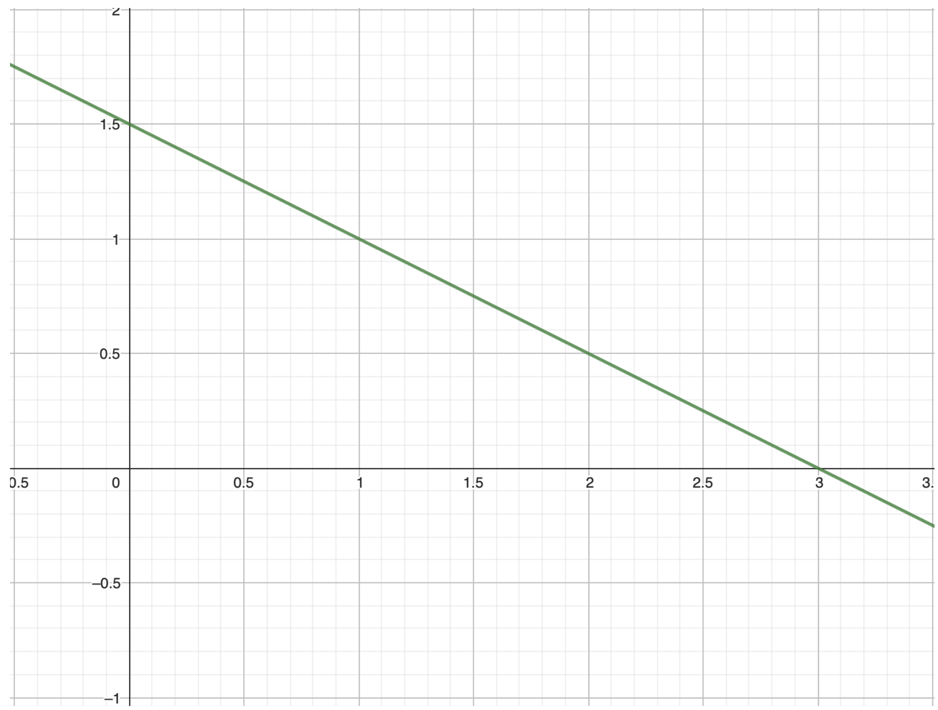
الف)

$$2x_1 - 1 = 0$$



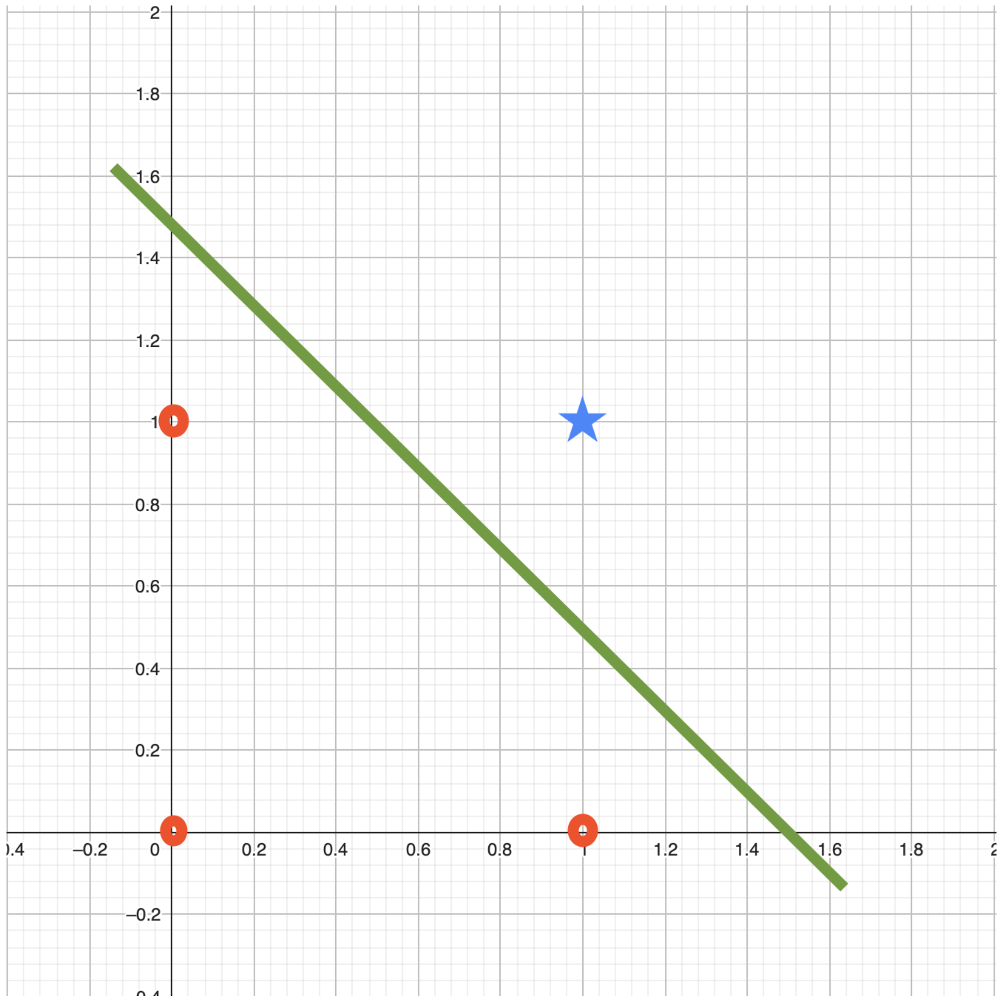
ب)

$$2x_2 + x_1 - 3 = 0$$



ج)

با فرض باینری بودن مقادیر فضای حالت به صورت زیر است:



که خطی مثل خط سبز رنگ مشخص شده میتواند این دو کلاس را از هم جدا کند.
یکی از حالات این است که خط از نقاط
(0, 3/2) , (3/2, 0)
بگذرد.
که پس از محاسبه معادله خط خواهیم داشت:

$$2x_2 + 2x_1 - 3 = 0$$

$$\implies \theta_2 = 2, \theta_1 = 2, \theta_0 = -3$$

سوال ۲

$$
\begin{aligned}
sigmoid(x+c)_i &= \frac{e^{x_i+c}}{\sum_j e^{x_i+c}} \\
&= \frac{e^{x_i}e^c}{\sum_j e^{x_i}e^c} \\
&= \frac{e^{x_i}e^c}{e^c\sum_j e^{x_i}} \\
&= \frac{e^{x_i}}{\sum_j e^{x_i}} = sigmoid(x)_i
\end{aligned}
$$

سوال ۳

$$\hat{Y} = \arg\max_Y [p(Y)\prod_j p(X_j|Y)]$$

Y = M:

$$p(Y=M)\times p(Color=Green|Y=M)p(Legs=2|Y=M)p(Height=Tall|Y=M)p(Smelly=No|Y=M) \\ = 4/8\times 2/4\times 1/4\times 1/4\times 1/4 = 1/2^{10}$$

Y = H:

$$p(Y=H)\times p(Color=Green|Y=H)p(Legs=2|Y=H)p(Height=Tall|Y=H)p(Smelly=No|Y=H) \\ = 4/8\times 1/4\times 4/4\times 2/4\times 3/4 = 3/2^{6}$$

$$\hat{Y} = \arg\max_Y [p(Y)\prod_j p(X_j|Y)] = H$$

بدلیل اینکه هیچ کدام از احتمالات در ضرب صفر نشده از روش اسموزینگ استفاده نشده.

سوال ۴

الف)

$$x_1 = \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$$

$$\frac{dL}{dW} = W - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i x_i = 0$$

$$W = -\alpha_1\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} - \alpha_2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$$

$$\frac{dL}{db} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i = -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$\implies \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$$

Finding alpha:

	x1	x2	x3
x1.T	1 + 16 = 17	2 + 12 = 14	4 + 20 = 24
x2.T	-	4 + 9 = 13	8 + 15 = 23
x3.T	-	-	16 + 25 = 41

$$\arg\max_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j y_i y_j x_i^T x_j + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$

$$= \frac{-1}{2}\left[17\alpha_1^2 + 28\alpha_1\alpha_2 - 48\alpha_1\alpha_3 + 13\alpha_2^2 - 46\alpha_2\alpha_3 + 41\alpha_3^2\right] + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$(\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2)$$

$$= \frac{-1}{2}\left[17\alpha_1^2 + 28\alpha_1\alpha_2 - 48\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2) + 13\alpha_2^2 - 46\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2) + 41(\alpha_1+\alpha_2)^2\right] + \alpha_1 + \alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$= \frac{-1}{2}\left[10\alpha_1^2 + 16\alpha_1\alpha_2 + 8\alpha_2^2\right] + 2(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\implies \arg\max_{\alpha_1,\alpha_2} \frac{-1}{2}\left[10\alpha_1^2 + 16\alpha_1\alpha_2 + 8\alpha_2^2\right] + 2(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\frac{dJ}{d\alpha_1} = -10\alpha_1 - 8\alpha_2 + 2 = 0$$

$$\frac{dJ}{d\alpha_2} = -8\alpha_2 - 8\alpha_1 + 2 = 0$$

$$\implies \alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{1}{4}, \alpha_3 = \frac{1}{4}$$

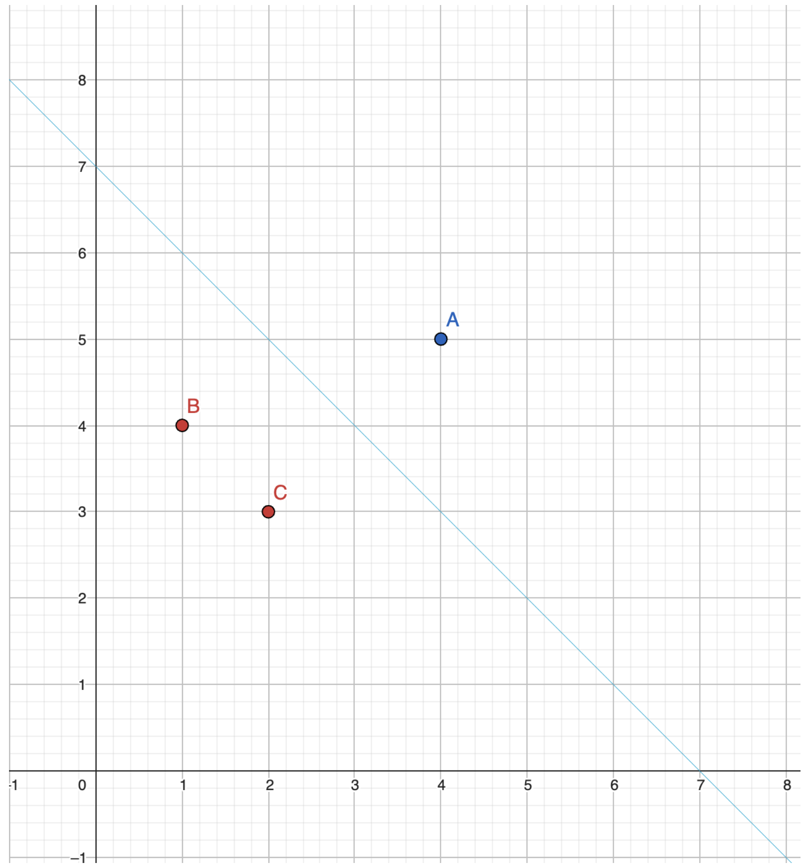
$$W = -\alpha_1\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} - \alpha_2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.5\\ \\0.5\end{bmatrix}$$

$$m = \frac{2}{||W||} = \frac{2}{0.7071067812} = 2.8284271247$$

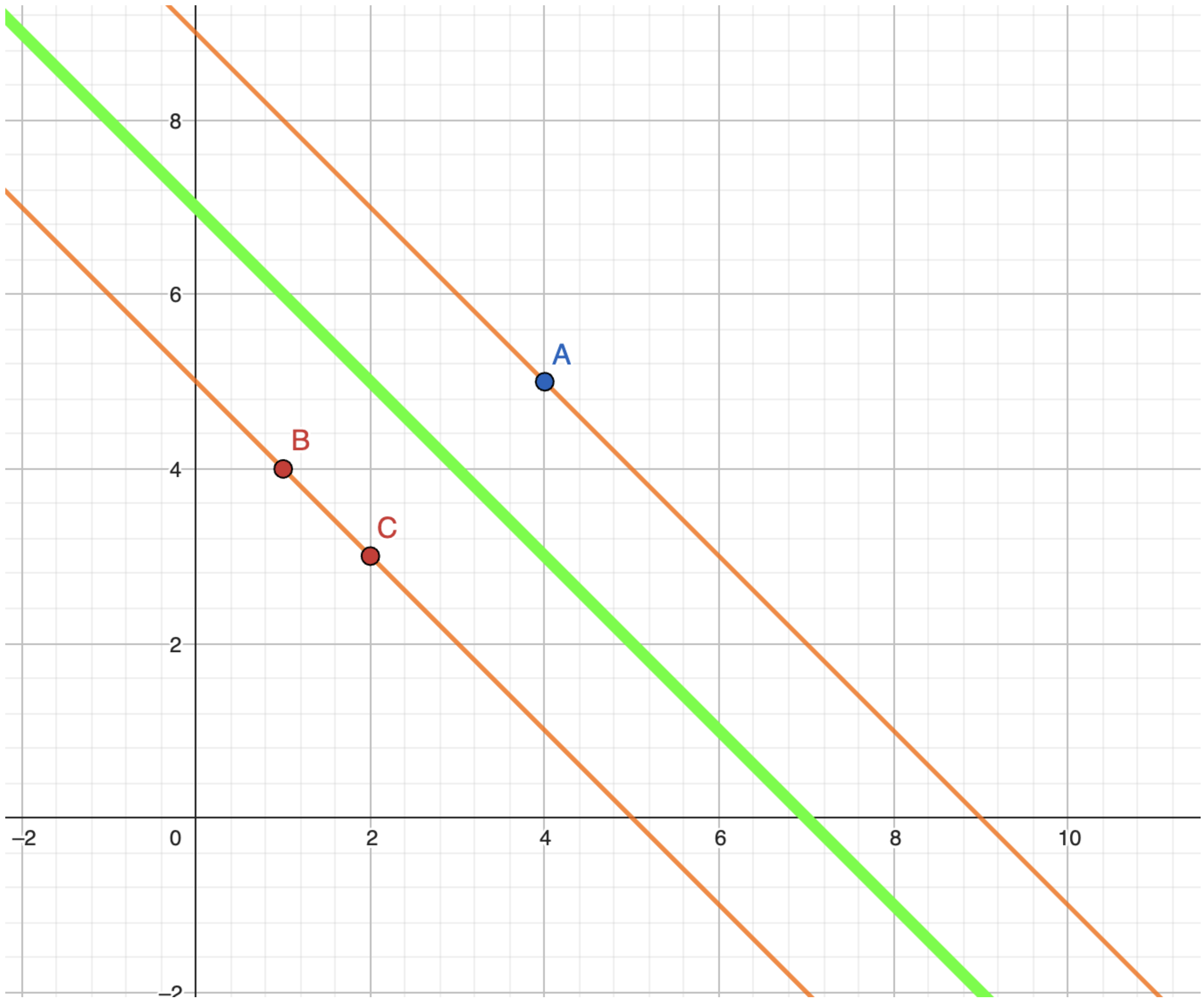
$$y_2(x_2^T w + b) = 1$$

$$b = \frac{1}{y_2} - x_2^T w = -1 - (2.5) = -3.5$$

$$\implies 0.5x_1 + 0.5x_2 - 3.5 = 0$$



ب)



در این شکل بردار های پشتیبان با نارنجی و خط تصمیم با سبز کشیده شده

نقاط بردار پشتیبان نقاطی اند که مقدار آلفا آنها صفر نباشد که در این صورت نقاط
c , a
یا همان
x2 , x3
نقاط بردار پشتیبان اند.