

Mestrado Profissional - EESP - FGV

Lista de Exercícios 02

Cálculo Estocástico

Prof: Alexandre de Oliveira

1. (4.0 pontos) Lançando uma moeda repetidas vezes, considere que a probabilidade de cara (H) seja p e de coroa (T) seja q . Seja $X_j = 1$ se o j -ésimo lançamento resulta em H e $X_j = -1$ em T. Considere o processo estocástico M_0, M_1, M_2, \dots com $M_0 = 0$ denominado de passeio aleatório não-normalizado, ou seja,

$$M_n = \sum_{j=1}^n X_j, n \geq 1.$$

- Determine a medida de probabilidade para que este processo estocástico seja Martingal.
- Para um $\sigma > 0$ e $n \geq 0$, mostre que o processo estocástico para a variável aleatória $S_n = e^{\sigma M_n}$ é Submartingal.
- Considere uma função convexa $\varphi(\sigma)$ tal que:

$$\frac{S_n}{\varphi(\sigma)^n} = \mathbb{E}_n \left[\frac{S_{n+1}}{\varphi(\sigma)^{n+1}} \right]$$

Determine $\varphi(\sigma)$ de forma a termos um processo Martingal.

- Mostre que, para um $n \geq 0$ qualquer:

$$S_n = e^{\sigma M_n} \left(\frac{2}{e^\sigma + e^{-\sigma}} \right)^n$$

determina um processo estocástico S_0, S_1, S_2, \dots Martingal.

2. (2.0 pontos) Considere que a taxa de juros r segue um processo estocástico, com velocidade de reversão à média a , definido pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$dr = a(r_0 - r)dt + r\sigma dz$$

onde a , r_0 e σ são constantes positivas e dz é um processo de Wiener.

Considere que um título que paga \$1 no vencimento T tenha seu preço definido por:

$$B(t) = e^{-r(T-t)}$$

Obtenha o processo estocástico seguido por este título.

3. (4.0 pontos) Considere o modelo de Black-Scholes para uma call e uma put europeias, sobre uma ação sem dividendos com preço S_t em t , dados por:

$$C_t = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$$P_t = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}$$

onde $N(x)$ representa a distribuição normal acumulada padronizada.

- Obtenha $N'(x)$.
- Mostre que $S N'(d_1) = K e^{-r(T-t)} N'(d_2)$.
- Obtenha $\frac{\partial d_1}{\partial S_t}$ e $\frac{\partial d_2}{\partial S_t}$.
- A partir deste item, considerando sempre a call, mostre que seu Delta é

$$\Delta = \frac{\partial C_t}{\partial S_t} = N(d_1).$$

- Mostre que seu Gama é

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C_t}{\partial^2 S_t} = \frac{N'(d_1)}{S_t \sigma \sqrt{T-t}}.$$

- Mostre que seu Theta é

$$\Theta = \frac{\partial C_t}{\partial t} = -r K e^{-r(T-t)} N(d_2) - S_t N'(d_1) \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}$$

- Mostre que seu Vega é

$$\Upsilon = \frac{\partial C_t}{\partial \sigma} = S_t N'(d_1) \sqrt{T-t}$$

- Mostre que a probabilidade da call ser exercida, no mundo neutro ao risco, é $N(d_2)$.