Mestrado Profissional - EESP - FGV

Lista 1 - fevereiro 2012

Cálculo Estocástico

Prof: Alexandre de Oliveira

1. (3.0 pontos) Uma ação é negociada hoje a \$40 no mercado. Considera-se que em três meses seu preço será \$35 ou \$45. A taxa livre de risco nominal, linearmente capitalizada a cada 3 meses, é 8%a.a.. Obtenha o valor de uma put europeia sobre esta ação com preço de exercício de \$40. Verifique que os argumentos de não-arbitragem e apreçamento neutro ao risco chegam no mesmo resultado.

2. (3.0 pontos) Considere que uma ação está sendo negociada hoje a \$30. Considere um modelo binomial para sete períodos a frente onde cada passo equivale um mês. Também considere $u = 1.1$ e $d = 1/u$, a taxa livre de risco de 10%a.a.

   a. Calcule a árvore binomial para a ação para sete meses à frente.

   b. Considere uma call europeia com strike de \$35 e vencimento em sete meses. Calcule seu preço hoje em uma árvore binomial. Mostre que seu preço pode ser obtido diretamente pelo seu valor esperado no vencimento descontado pela taxa livre de risco.

   c. Considere agora uma put com strike de \$35 e vencimento em sete meses. Obtenha os respectivos valores para os casos em que seja do tipo europeia e americana. Explique a diferença em seus valores.

3. (4.0 pontos) É comum a aplicação de Função Característica ou Função Geradora de Momentos (FGM) para uma variável X em processos aleatórios. Duas aplicações importantes são a derivação dos momentos de uma distribuição de probabilidades ou a caracterização de uma distribuição. Sua definição é dada por:

$$\varphi_X(t) = E[e^{tX}]$$

   a. Obtenha o primeiro e o segundo momentos de uma variável X que segue uma distribuição binomial $B(n, p)$.

   b. Obtenha o primeiro e o segundo momentos de uma variável X que segue uma distribuição de Poisson $P(\lambda)$.

   c. Considere agora uma variável aleatória W, dita Poisson composta, tal que:

$$W = \Sigma_{i=1}^{N} X_i,$$

   e, considerando o resultado obtido no item anterior, mostre que:

$$E[e^{tW}] = exp[\lambda t(\varphi_X(t) - 1)].$$

d. Com base no resultado do item c, mostre que:

$$E[W] = \lambda E[X],$$
$$Var[W] = \lambda E[X^2].$$