数据结构与算法（Python版）

图的应用：最小生成树

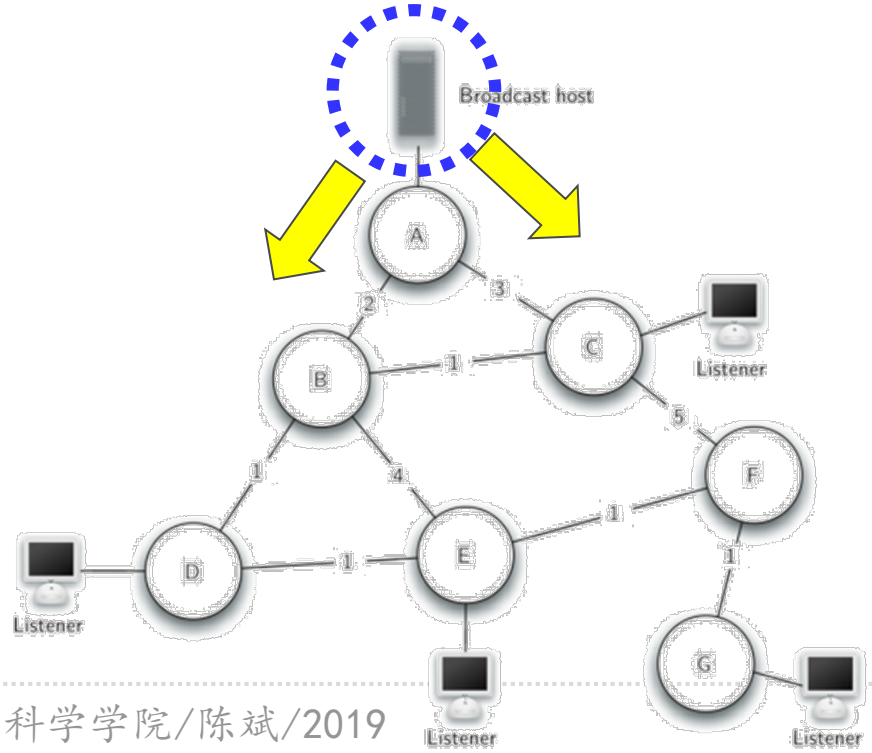
陈斌 北京大学 gischen@pku.edu.cn

最小生成树

- 本算法涉及到在互联网中网游设计者和网络收音机所面临的问题：**信息广播问题**

  网游需要让所有玩家获知其他玩家所在的位置

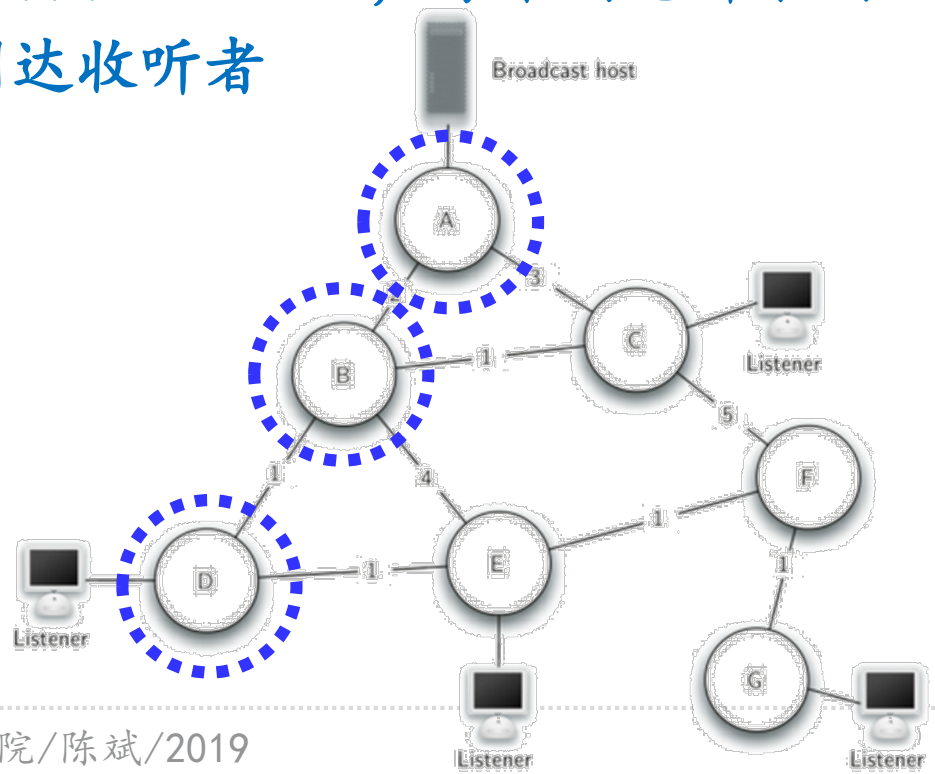
  收音机则需要让所有听众获取直播的音频数据



信息广播问题：单播解法

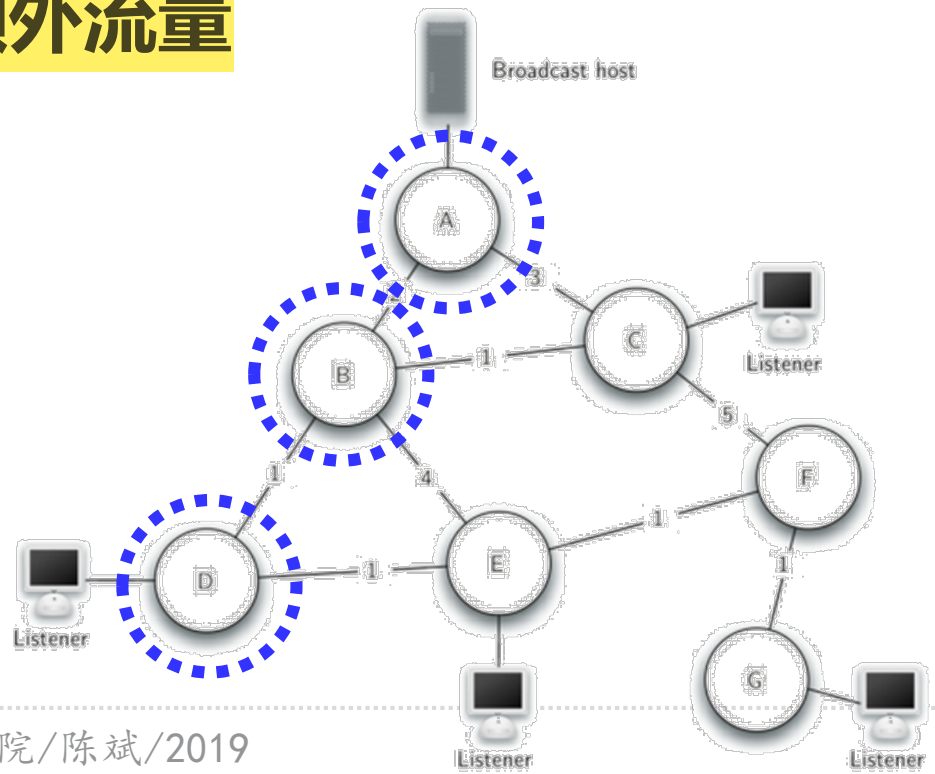
- 信息广播问题最简单的解法是由广播源维护一个收听者的列表，将每条消息向每个收听者发送一次

  如图，每条消息会被发送4次，每个消息都采用最短路径算法到达收听者



信息广播问题：单播解法

- 路由器A会处理4次相同消息，C仅会处理1次；而B/D位于其它3个收听者的最短路径上，则各会处理转发3次相同消息
- 会产生许多额外流量



信息广播问题：洪水解法

- 信息广播问题的暴力解法，是将每条消息在路由器间散布出去
- 所有的路由器都将收到的消息转发到自己相邻的路由器和收听者
- 显然，如果没有任何限制，这个方法将造成网络洪水灾难
- 很多路由器和收听者会不断重复收到相同的消息，永不停止！

信息广播问题：洪水解法

- 所以，洪水解法一般会给每条消息附加一个生命值（TTL:Time To Live），初始设置为从消息源到最远的收听者的距离；
- 每个路由器收到一条消息，如果其TTL值大于0，则将TTL减少1，再转发出去

  如果TTL等于0了，则就直接抛弃这个消息。
- TTL的设置防止了灾难发生，但这种洪水解法显然比前述的单播方法所产生的流量还要大。

信息广播问题：最小生成树

- 信息广播问题的最优解法，依赖于路由器关系图上选取具有最小权重的生成树（minimum weight spanning tree）

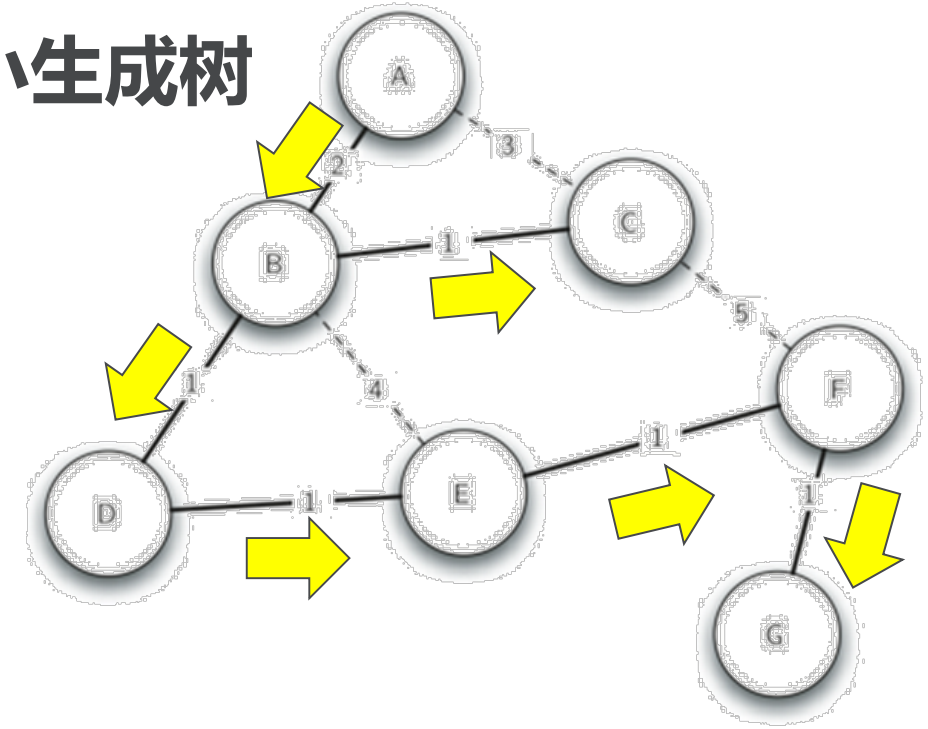
  生成树：拥有图中所有的顶点和最少数量的边，以保持连通的子图。

- 图G(V,E)的最小生成树T，定义为

  包含所有顶点V，以及E的无圈子集，并且边权重之和最小

信息广播问题：最小生成树

- 图为一个最小生成树



- 这样信息广播**就只需要从A开始，沿着树的路径层次向下传播**

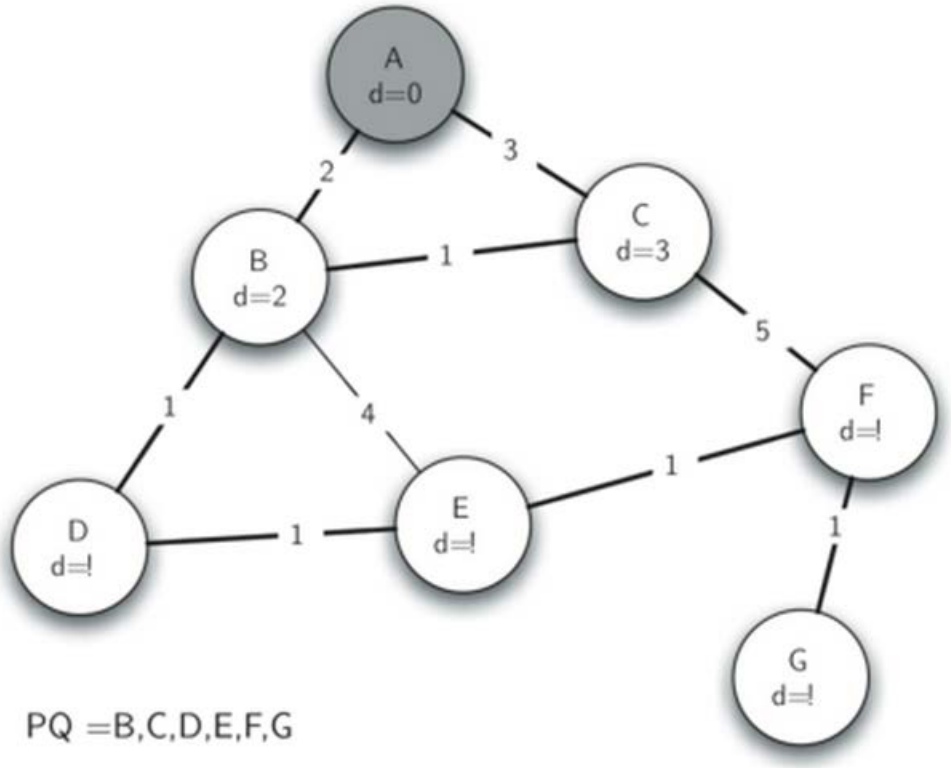
就可以达到每个路由器只需要处理1次消息，同时总费用最小。

最小生成树：Prim算法

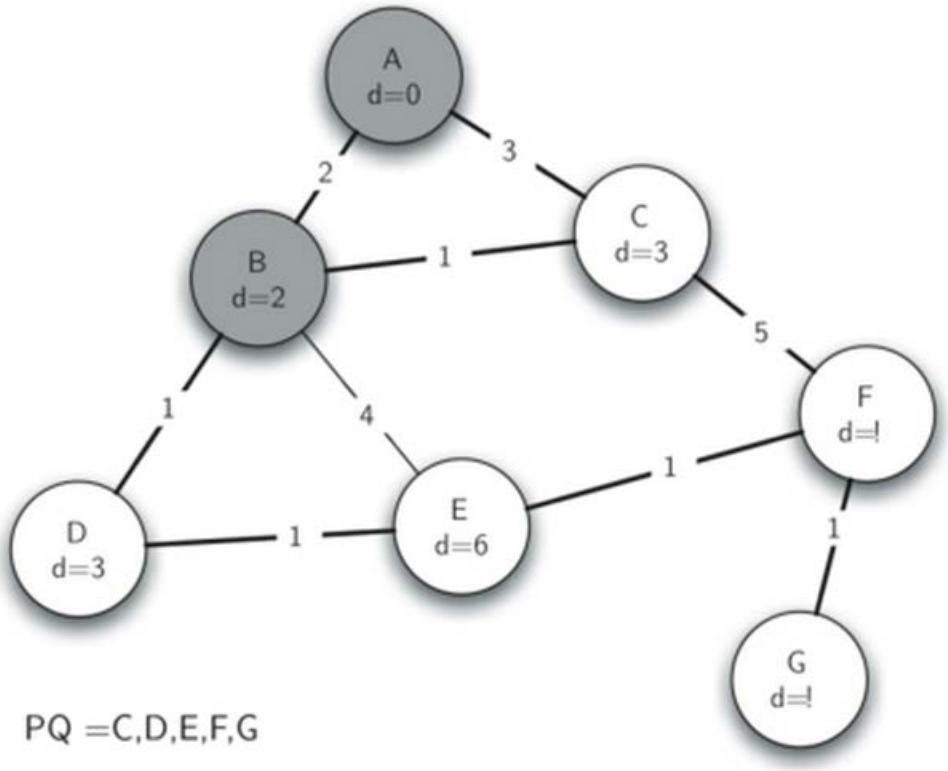
- 解决最小生成树问题的Prim算法，属于“贪心算法”，即每步都沿着最小权重的边向前搜索。
- 构造最小生成树的思路很简单，如果T还不是生成树，则反复做：

  找到一条最小权重的可以安全添加的边，将边添加到树T
- “可以安全添加”的边，定义为一端顶点在树中，另一端不在树中的边，以便保持树的无圈特性

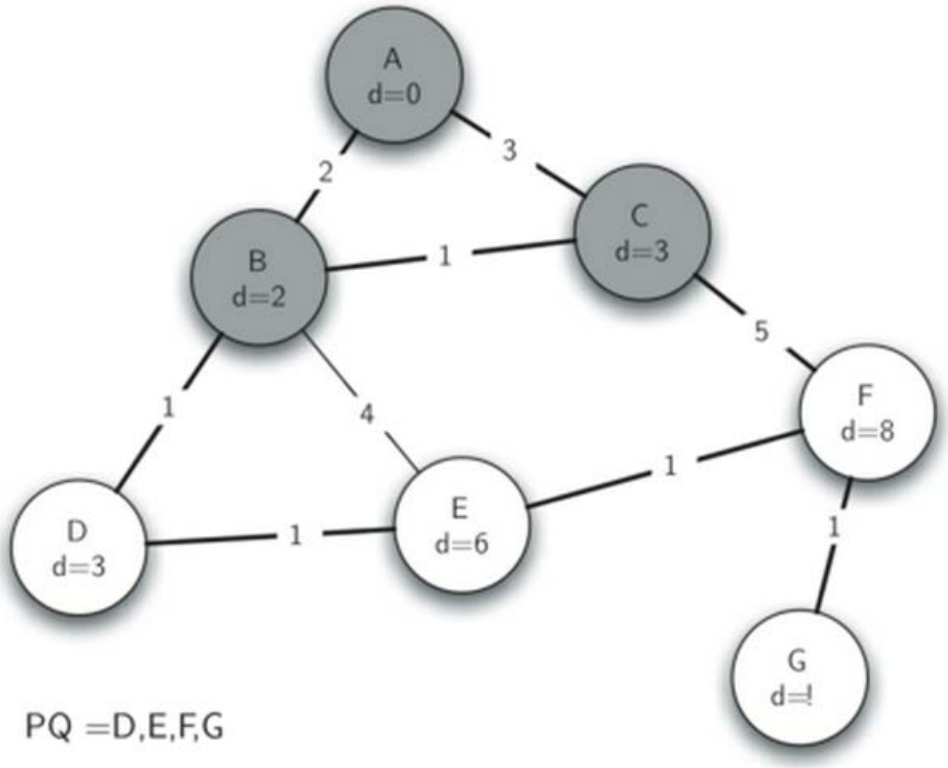
最小生成树：Prim算法示例



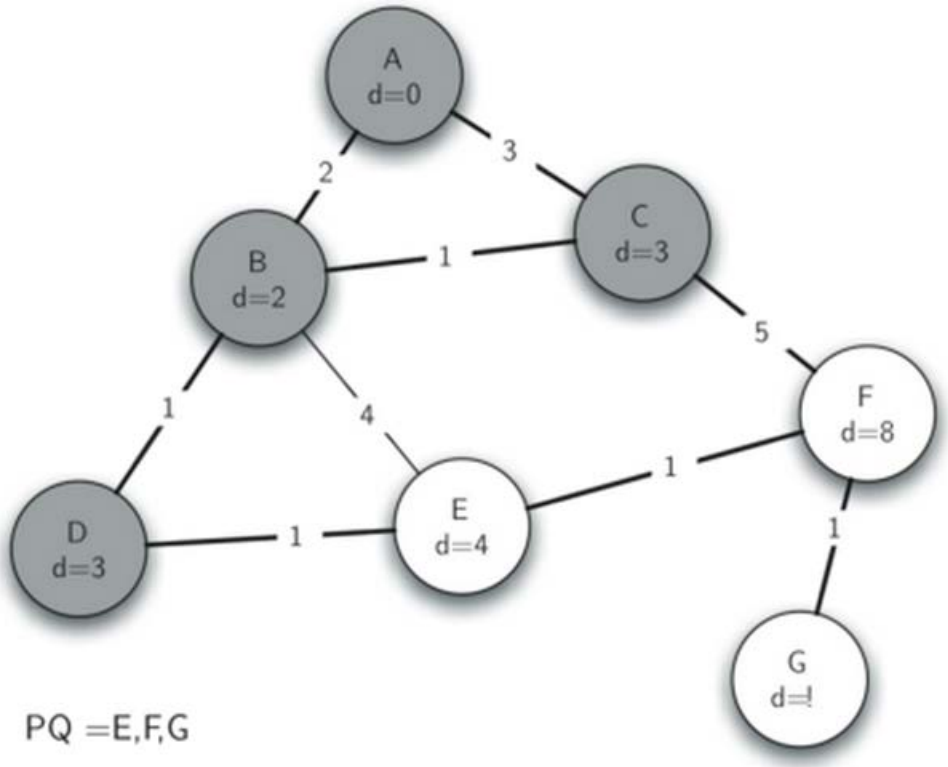
最小生成树：Prim算法示例



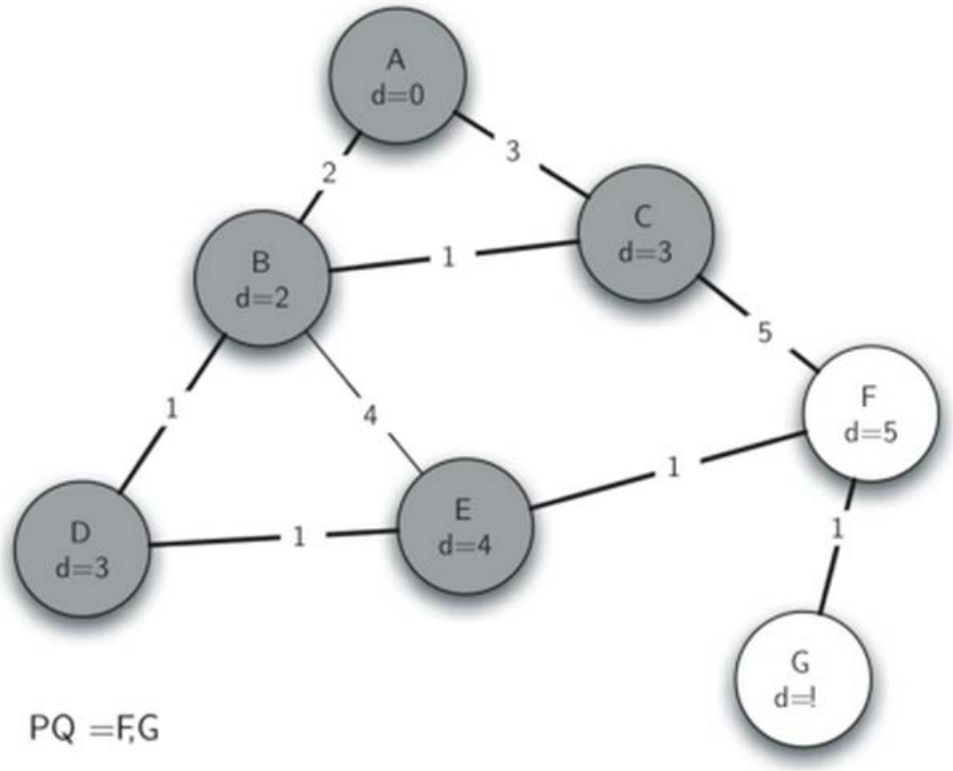
最小生成树：Prim算法示例



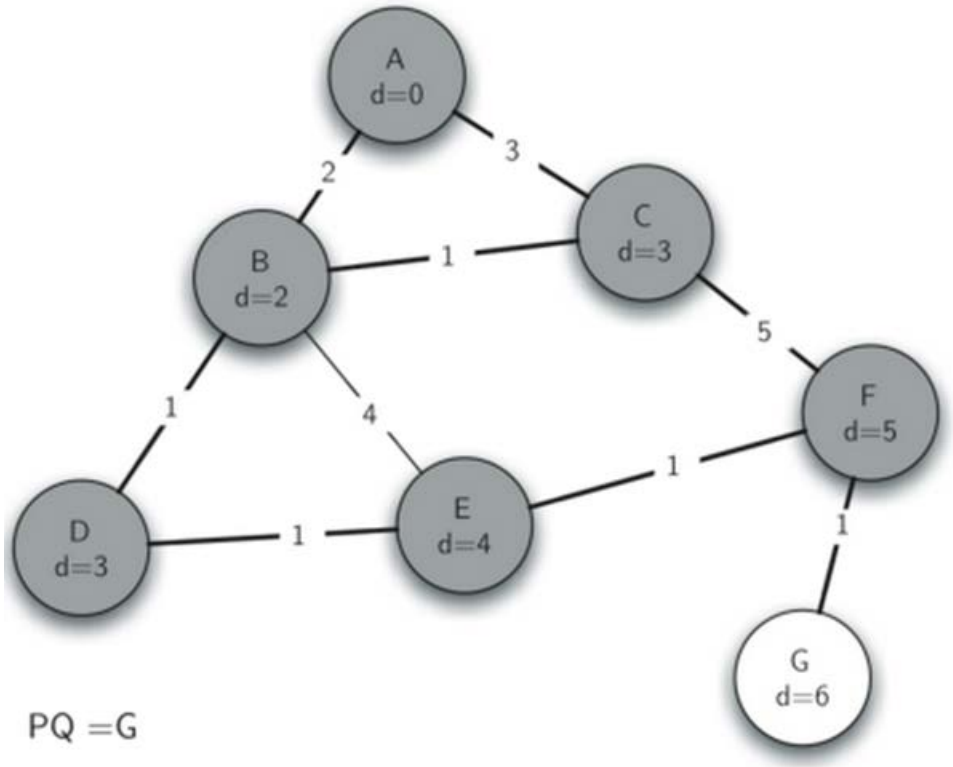
最小生成树：Prim算法示例



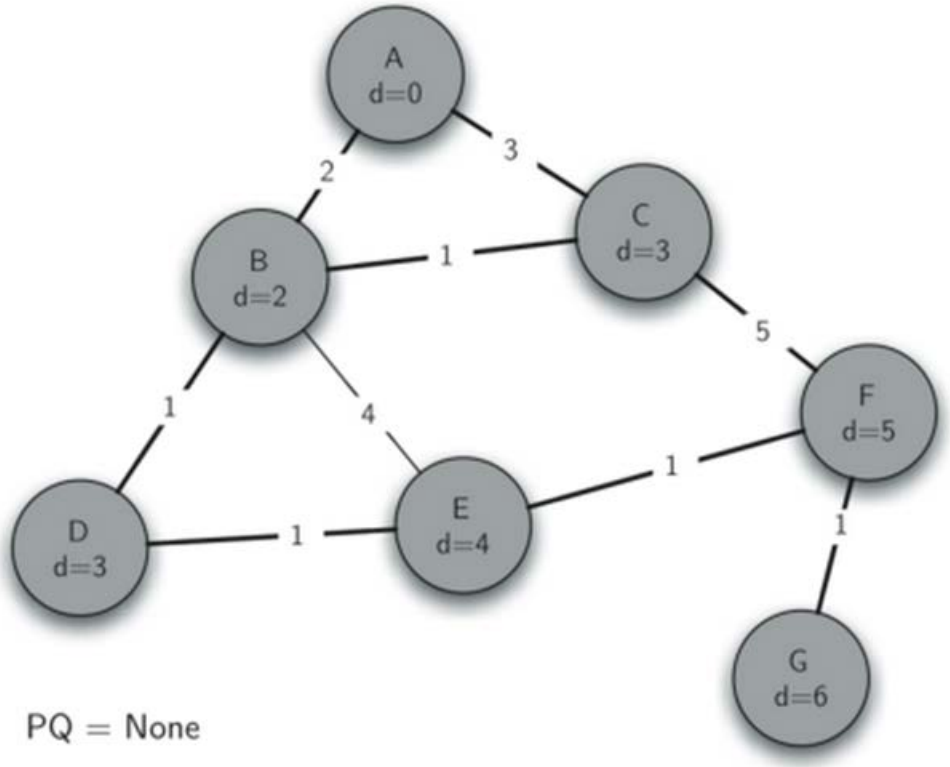
最小生成树：Prim算法示例



最小生成树：Prim算法示例



最小生成树：Prim算法示例



prim算法：最小生成树


```
from pythonds.graphs import PriorityQueue, Graph, Vertex
import sys


def prim(G, start):
    pq = PriorityQueue()
    for v in G:
        v.setDistance(sys.maxsize)
        v.setPred(None)
    start.setDistance(0)
    pq.buildHeap([(v.getDistance(), v) for v in G])
    while not pq.isEmpty():
        currentVert = pq.delMin()
        for nextVert in currentVert.getConnections():
            newCost = currentVert.getWeight(nextVert)
            if nextVert in pq and newCost < nextVert.getDistance():
                nextVert.setPred(currentVert)
                nextVert.setDistance(newCost)
                pq.decreaseKey(nextVert, newCost)
```