数据结构与算法（Python版）

递归的应用：汉诺塔

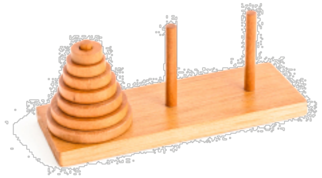
陈斌 北京大学 gischen@pku.edu.cn

复杂递归问题：汉诺塔

- 汉诺塔问题是法国数学家Edouard Lucas于1883年，根据传说提出来的。
- 传说在一个印度教寺庙里，有3根柱子，其中一根套着64个由小到大的黄金盘片，僧侣们的任务就是要把这一叠黄金盘从一根柱子搬到另一根，但有两个规则：

  一次只能搬1个盘子

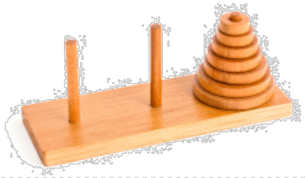
  大盘子不能叠在小盘子上



- 神的旨意说一旦这些盘子完成迁移

  寺庙将会坍塌，世界将会毁灭……

  神的旨意是千真万确的！



汉诺塔问题：3盘片演示

汉诺塔问题：4盘片演示

汉诺塔问题

- 虽然这些黄金盘片跟世界末日有着神秘的联系，但我们却不必太担心，据计算，要搬完这64个盘片：

  需要的移动次数为$2^{64}-1$ = 18,446,744,073,709,551,615次

  如果每秒钟搬动一次，则需要584,942,417,355（五千亿）年！

- 我们还是从递归三定律来分析河内塔问题

  基本结束条件（最小规模问题），如何减小规模，调用自身

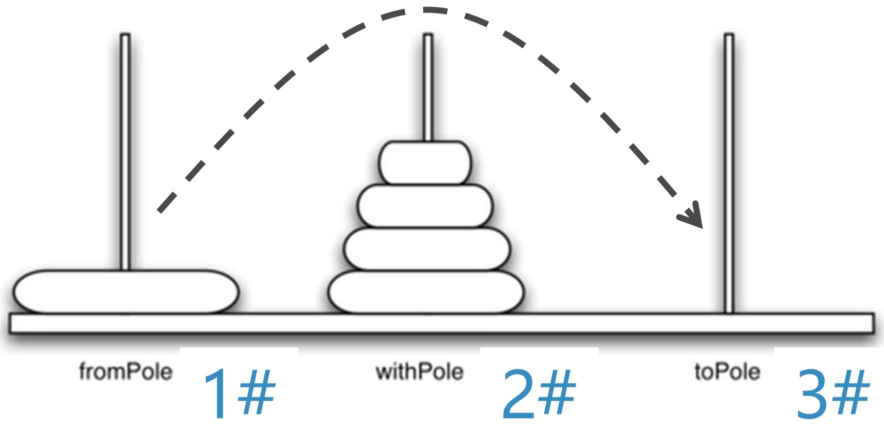
汉诺塔问题：分解为递归形式

- ❖ **假设我们有5个盘子，穿在1#柱，需要挪到3#柱**

  如果能有办法把最上面的一摞4个盘子统统挪到2#柱，那问题就好解决了：

  把剩下的最大号盘子直接从1#柱挪到3#柱

  再用同样的办法把2#柱上的那一摞4个盘子挪到3#柱，就完成了整个移动



汉诺塔问题：分析

- 接下来问题就是解决4个盘子如何能从1#挪到2#?

  此时问题规模已经减小！

  同样是想办法把上面的一摞3个盘子挪到3#柱，把剩下最大号盘子从1#挪到2#柱，再用同样的办法把一摞3个盘子从3#挪到2#柱

- 一摞3个盘子的挪动也照此：

  分为上面一摞2个，和下面最大号盘子

- 那么2个盘子怎么移动?
- 不行，就再分解为1个盘子的移动

汉诺塔问题：递归思路

- 将盘片塔从**开始柱**，经由**中间柱**，移动到**目标柱**：

  首先将上层N-1个盘片的盘片塔，从开始柱，经由目标柱，移动到中间柱；

  然后将第N个（最大的）盘片，从开始柱，移动到目标柱；

  最后将放置在中间柱的N-1个盘片的盘片塔，经由开始柱，移动到目标柱。

- 基本结束条件，也就是最小规模问题是：

  1个盘片的移动问题

汉诺塔问题：递归思路

- 上面的思路用Python写出来，几乎跟语言描述一样：

```python
def moveTower(height, fromPole, withPole, toPole):
    if height >= 1:
        moveTower(height - 1, fromPole, toPole, withPole)
        moveDisk(height, fromPole, toPole)
        moveTower(height - 1, withPole, fromPole, toPole)
```

汉诺塔问题：代码

```python
def moveTower(height, fromPole, withPole, toPole):
    if height >= 1:
        moveTower(height - 1, fromPole, toPole, withPole)
        moveDisk(height, fromPole, toPole)
        moveTower(height - 1, withPole, fromPole, toPole)

def moveDisk(disk, fromPole, toPole):
    print(f"Moving disk[{disk}] from {fromPole} to {toPole}")

moveTower(3, "#1", "#2", "#3")
```

```
>>> %Run hanoi.py

  Moving disk[1] from #1 to #3
  Moving disk[2] from #1 to #2
  Moving disk[1] from #3 to #2
  Moving disk[3] from #1 to #3
  Moving disk[1] from #2 to #1
  Moving disk[2] from #2 to #3
  Moving disk[1] from #1 to #3
```