数据结构与算法（Python版）

找零兑换问题的递归解法

陈斌 北京大学 gischen@pku.edu.cn

找零兑换问题：递归解法

- 我们来找一种**肯定**能找到最优解的方法

  贪心策略是否有效依赖于具体的硬币体系

- 首先是确定**基本结束条件**，兑换硬币这个问题最简单直接的情况就是，**需要兑换的找零，其面值正好等于某种硬币**

  如找零25分，答案就是1个硬币！

找零兑换问题：递归解法

- 其次是减小问题的规模，我们要对每种硬币尝试1次，例如美元硬币体系：

  找零减去1分(penny)后，求兑换硬币最少数量（递归调用自身）；

  找零减去5分(nikel)后，求兑换硬币最少数量

  找零减去10分(dime)后，求兑换硬币最少数量

  找零减去25分(quarter)后，求兑换硬币最少数量

  上述4项中选择最小的一个。

$$numCoins = min \begin{cases} 1 + numCoins(originalamount - 1) \\ 1 + numCoins(originalamount - 5) \\ 1 + numCoins(originalamount - 10) \\ 1 + numCoins(originalamount - 25) \end{cases}$$

找零兑换问题：递归解法代码


```
def recMC(coinValueList,change):
    minCoins = change
    if change in coinValueList:
      return 1
    else:
       for i in [c for c in coinValueList if c <= change]:
          numCoins = 1 + recMC(coinValueList,change-i)
          if numCoins < minCoins:
             minCoins = numCoins
    return minCoins

print(recMC([1,5,10,25],63))
```

最小规模，直接返回

调用自身

减小规模：
每次减去一种硬币面值
挑选最小数量

找零兑换问题：递归解法分析

- 递归解法虽然能解决问题，但其最大的问题是：**极！其！低！效！**

  对63分的兑换硬币问题，需要进行67,716,925次递归调用！

  在我这台笔记本电脑上花费了40秒时间得到解：

  6个硬币

```
import time

print(time.clock())
print(recMC([1, 5, 10, 25], 63))
print(time.clock())
```

```
/Library/Frameworks/Python.framework
0.050163
6
40.899408
```

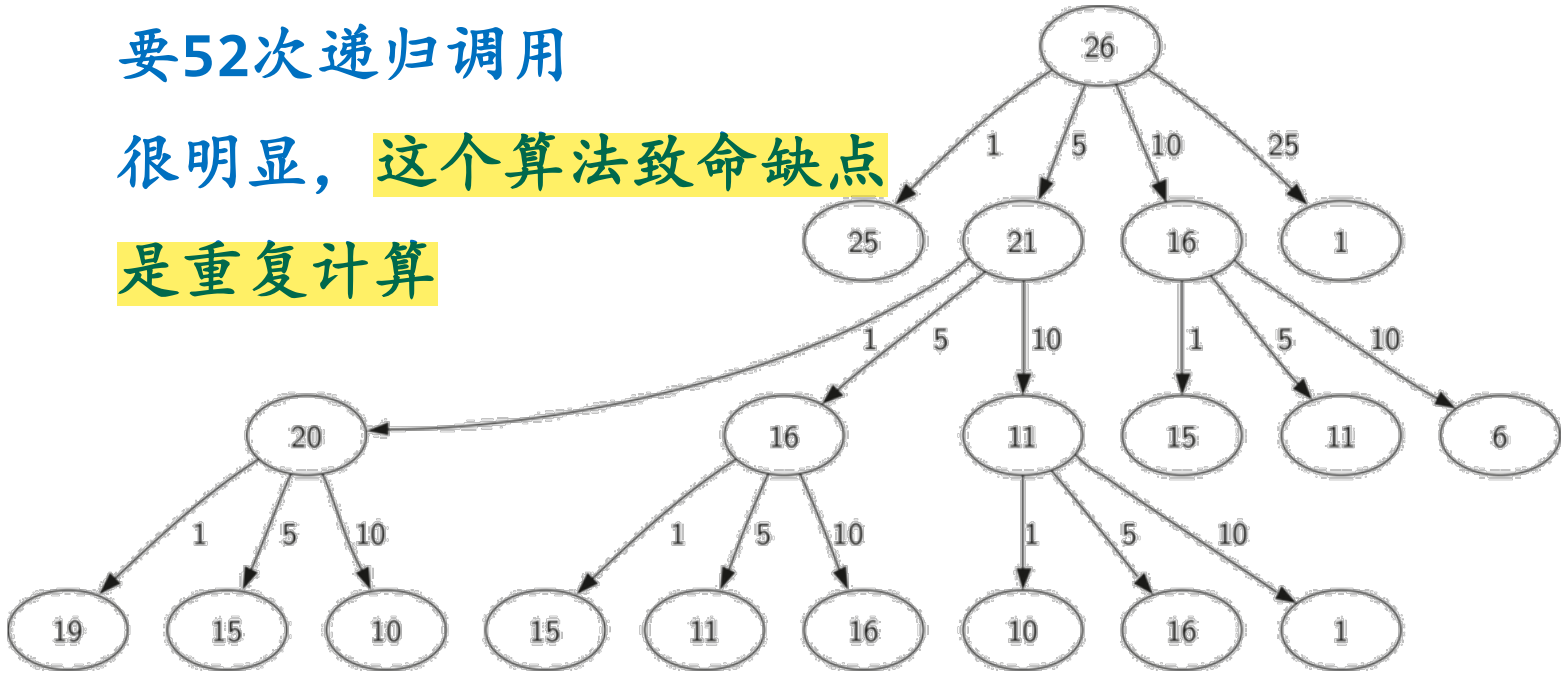
找零兑换问题：递归解法分析

- 以26分兑换硬币为例，看看递归调用过程（377次递归的**一小部分**）

我们发现一个重大秘密，就是重复计算太多！

例如找零15分的，出现了3次！而它最终解决还要52次递归调用

很明显，这个算法致命缺点是重复计算



找零兑换问题：递归解法改进

- 对这个递归解法进行改进的关键就在于消除重复计算

  我们可以用一个表将计算过的中间结果保存起来，在计算之前查表看看是否已经计算过

- 这个算法的中间结果就是部分找零的最优解，在递归调用过程中已经得到的最优解被记录下来

  在递归调用之前，先查找表中是否已有部分找零的最优解

  如果有，直接返回最优解而不进行递归调用

  如果没有，才进行递归调用

找零兑换问题：递归解法改进代码


```
1  def recDC(coinValueList, change, knownResults):
2      minCoins = change
3      if change in coinValueList:  # 递归基本结束条件
4          knownResults[change] = 1  # 记录最优解
5          return 1
6      elif knownResults[change] > 0:
7          return knownResults[change]  # 查表成功，直接用最优解
8      else:
9          for i in [c for c in coinValueList if c <= change]:
10             numCoins = 1 + recDC(coinValueList, \
11                                  change - i, knownResults)
12             if numCoins < minCoins:
13                 minCoins = numCoins
14                 # 找到最优解，记录到表中
15                 knownResults[change] = minCoins
16     return minCoins
17
18 print(recDC([1, 5, 10, 25], 63, [0]*64))
```

找零兑换问题：递归解法改进

- 改进后的解法，极大减少了递归调用次数

  对63分兑换硬币问题，仅仅需要221次递归调用

  是改进前的三十万分之一，瞬间返回！

```
17  import time
18
19  memo = [0] * 64
20  print(time.clock())
21  print(recDC([1, 5, 10, 25], 63, memo))
22  print(time.clock())
23
24  print(memo)
```

```
/Library/Frameworks/Python.framew
0.046622
6
0.046793
[0, 1, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 1,
```