数据结构与算法（Python版）

AVL树的定义和性能

陈斌 北京大学 gischen@pku.edu.cn

平衡二叉查找树：AVL树的定义

- 我们来看看能够在key插入时一直保持平衡的二叉查找树：AVL树

  AVL是发明者的名字缩写：G.M. Adelson-Velskii and E.M. Landis

- 利用AVL树实现ADT Map，基本上与BST的实现相同
- 不同之处仅在于二叉树的生成与维护过程

平衡二叉查找树：AVL树的定义

- AVL树的实现中，需要对每个节点跟踪“**平衡因子**balance factor”参数
- 平衡因子是根据节点的左右子树的高度来定义的，确切地说，是**左右子树高度差**：

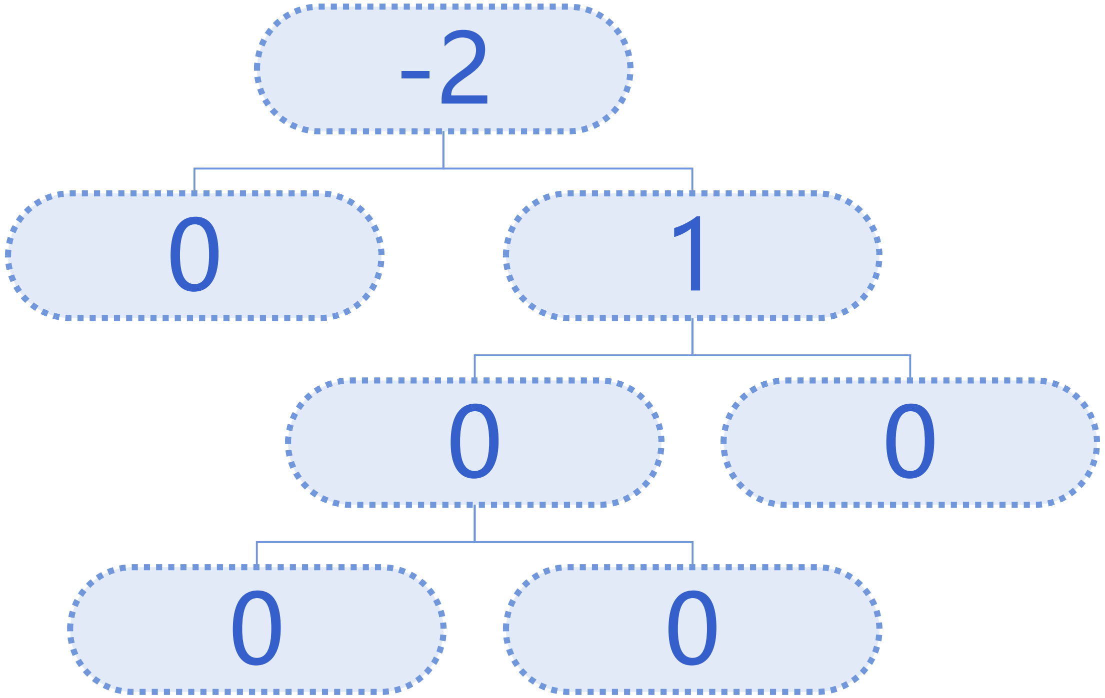
  balanceFactor = height(leftSubTree) - height(rightSubTree)

  如果平衡因子大于0，称为“**左重**left-heavy”，小于零称为“**右重**right-heavy”

  平衡因子等于0，则称作平衡。

平衡二叉查找树：平衡因子

- 如果一个二叉查找树中每个节点的平衡因子都在-1，0，1之间，则把这个二叉搜索树称为**平衡树**

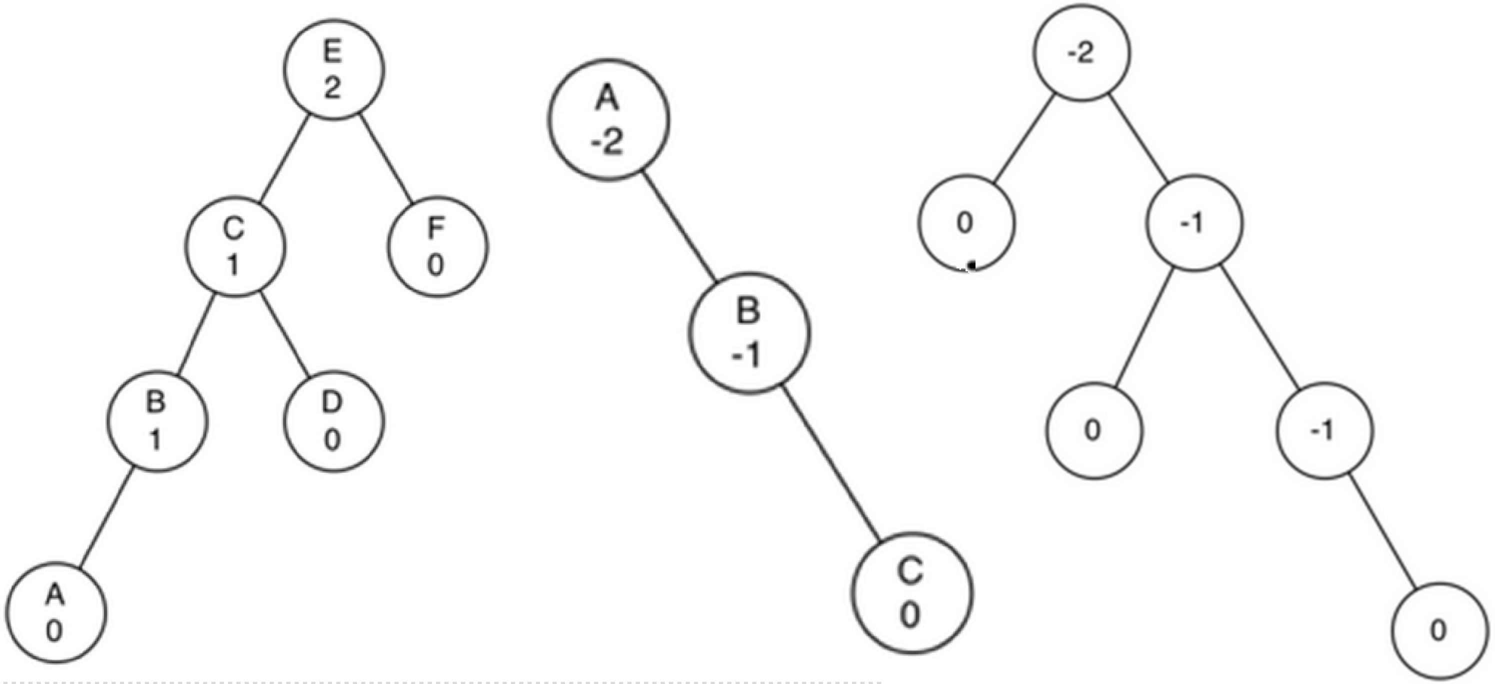


平衡二叉查找树：AVL树的定义

- **在平衡树操作过程中，有节点的平衡因子超出此范围，则需要一个重新平衡的过程**

要保持BST的性质！

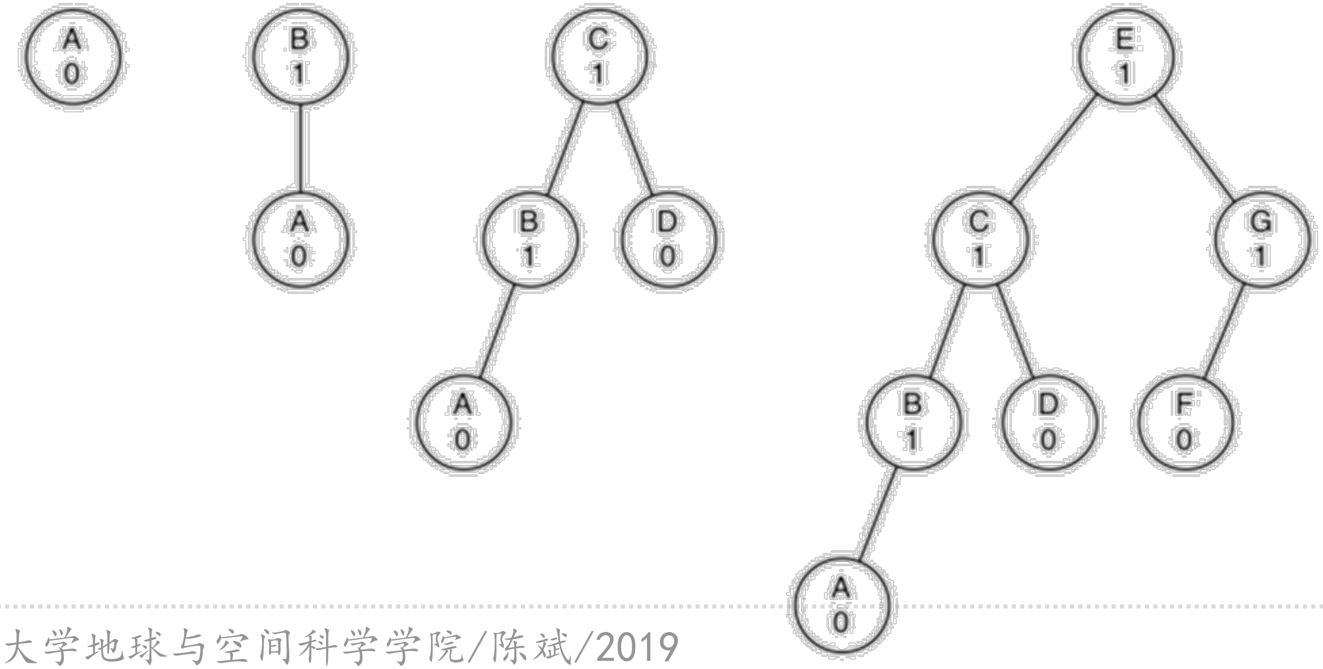
思考：如果重新平衡，应该变成什么样？



先来看看AVL树的性能

❖ **我们来分析AVL树最差情形下的性能：即平衡因子为1或者-1**

下图列出平衡因子为1的"左重"AVL树，树的高度从1开始，来看看问题规模（总节点数N）和比对次数（树的高度h）之间的关系如何？



AVL树性能分析

- **观察上图h=1～4时，总节点数N的变化**

  h= 1，N= 1

  h= 2，N= 2= 1+ 1

  h= 3，N= 4= 1+ 1+ 2

  h= 4，N= 7= 1+ 2+ 4

$$N_h = 1 + N_{h-1} + N_{h-2}$$

- **观察这个通式，很接近斐波那契数列！**

AVL树性能分析

- **定义斐波那契数列F_i**

利用F_i重写N_h

$$F_0 = 0 \qquad N_h = 1 + N_{h-1} + N_{h-2}$$
$$F_1 = 1$$
$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2} \text{ for all } i \geq 2 \qquad N_h = F_{h+2} - 1, h \geq 1$$

- **斐波那契数列的性质：F_i/F_{i-1}趋向于黄金分割Φ**

可以写出F_i的通式

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad F_i = \Phi^i/\sqrt{5}$$

AVL树性能分析

- 将F_i通式代入到N_h中，得到N_h的通式

$$N_h = \frac{\Phi^{h+2}}{\sqrt{5}} - 1$$

- 上述通式只有N和h了，我们解出h

$$\log N_h + 1 = (H + 2)\log \Phi - \frac{1}{2}\log 5$$

$$h = \frac{\log N_h + 1 - 2\log \Phi + \frac{1}{2}\log 5}{\log \Phi}$$

$$h = 1.44 \log N_h$$

- 最多搜索次数h和规模N的关系，可以说AVL树的搜索时间复杂度为O(log n)