误差理论与数据处理

一、误差、精度、有效数字基本概念

（一）误差

1. 误差的基本概念

> 测量的定义：为确定被测对象的量值而进行的实验，是将被测量与一个作为测量单位的标准进行比较，获得比值的过程。

$$被测量L\quad 标准量E \ \rightarrow \ q=\frac{L}{E}\ 理想状态q=1$$

标准量：标准量**按精度分类**，精度最高的标准量称为基准。是约定真值。

q反映被测量的数字：反应被测量的数字包含**数值**、**单位量纲**和**误差**三个部分。

2. 误差的定义及表示法

误差=测得值-真值

真值：观测一个量时，该量本身所具有的真实大小。

- 理论真值：eg.三角形内角之和恒为180°
- 约定真值：eg.国际千克基准1kg

NOTE: **误差是针对真值而言的，真值一般指约定真值。**

- 误差的表示法
  - 表示形式：绝对误差、相对误差
  - 性质特点：①**系统误差**：准确性

    ②**随机误差**：精确性

    ③**粗大误差**

（1）绝对误差

$$绝对误差=测得值-真值$$

$$\Delta L=L-L_0$$

$$\Delta L:绝对误差\quad L:测得值\quad L_0:被测量的真值，常用约定真值代替$$

①绝对误差是一个具有确定的大小、符号及单位的量。

②单位给出了被测量的量纲，其单位与测得值相同。

（2）修正值

定义：为了消除固定的系统误差,用代数法而加到测量结果上的值。

$$真值\approx 测得值+修正值$$

$$修正值\approx 真值-修正值\approx -误差$$

①与误差大小近似相等，但方向相反。

②修正值本身还有误差。

> **Example**:用某电压表测量电压，电压表的示值为<u>**226V**</u>（测得值），查该表的检定证书，得知该电压表在<u>**220V**</u>（真值） 附近的误差为<u>**5V**</u>（绝对误差），被测电压的修正值为<u>**-5V**</u>（修正值），则修正后的测量结果为**226+(-5V)=221V**（测得值+修正值）。

（3）相对误差

定义：绝对误差与被测量真值之比 。

$$r=\frac{\Delta L}{L_0}\quad r\text{为相对误差，}\Delta L\text{为绝对误差，}L_0\text{为真值}$$

①相对误差有大小和符号。

②无量纲，一般用百分数来表示。

③用相对误差可以比较不同量值、不同单位、不同物理量等的精确度。

（4）引用误差

$$\text{定义}\quad r_F=\frac{\Delta x}{x_m}$$

r_F：引用误差 Δx：仪器某一刻度点的示值误差 x_m：该标称范围（或量程）上限

（5）最大引用误差

$$\text{定义}\quad r_m=\frac{\Delta x_m}{x_m}$$

r_m：最大引用误差 Δx_m：仪器某标称范围（或量程）内的最大绝对误差 x_m：该标称范围（或量程）上限

NOTE:对于某一个仪器仪表而言，最大引用误差具有唯一性，其与实测值大小无关。用于表示仪器仪表的精度等级，简单方便。

（6）电工仪表、压力表的准确度等级

当一个仪表的等级s选定后，用此表测量某一被测量时

$$\text{最大绝对误差为}\ (\text{公式}1)\ \Delta x_m=\pm x_m\times s\%$$

$$\text{最大相对误差为}\ (\text{公式}2)\ r_x=\frac{\Delta x_m}{x}=\pm\frac{x_m}{x}\times s\%$$

①公式1意义：绝对误差的最大值与该仪表的标称范围（或量程）上限x_m成正比。

②公式2意义：选定仪表后，被测量的值越接近于标称范围（或量程）上限，测量的相对误差越小，测量越准确 。

> **Example.1**：检定一只2.5级、量程为100V的电压表，发现在50V处误差最大，其值为2V，而其他刻度处的误差均小于2V，问这只电压表是否合格?
>
> $$\text{解：由公式2，该电压表的引用误差为}$$
> $$r_m=\frac{\Delta U_m}{U_m}=\frac{2}{100}=2\%$$
> $$\text{由于}\quad 2\%<2.5\%,\text{所以该电压表合格}$$
>
> **Example.2**： 某1.0级微安电流表，满度值（标称范围上限）为100，求测量值分别为100，80和20时的绝对误差和相对误差。

> 解：$s=1.0, x_m=100\mu A, x_1=100\mu A, x_2=80\mu A, x_3=20\mu A$
>
> 最大绝对误差为 $\Delta x_m=\pm x_m s\%=\pm 100\times 1.0\%=\pm 1\mu A$
>
> $$\text{相对误差为 } r_{x1}=\frac{\Delta x_m}{x_1}\times 100\%=\pm 1\%$$
>
> $$r_{x2}=\frac{\Delta x_m}{x_2}\times 100\%=\pm 1.25\%$$
>
> $$r_x3=\frac{\Delta x_m}{x_3}\times 100\%=\pm 5\%$$
>
> 可见，在同一标称范围内，测量值越小，其相对误差越大。

3. **误差的来源**
    - 测量装置误差
    - 测量环境误差
    - 测量方法误差
    - 测量人员误差

（1）测量装置误差：

①零部件配合的不稳定性、零部件的变形、零件表面油膜不均匀、摩擦等。②仪器机构设计原理上的缺点，仪器零件制造和安装不正确，仪器附件制造偏差。

（2）测量环境误差：指各种环境因素与要求条件不一致而造成的误差。

（3）指使用的测量方法不完善，或采用近似的计算公式等原因所引起的误差，又称为理论误差。

（4）测量人员误差：测量人员的工作责任心、技术熟练程度、生理感官与心理因素、测量习惯等的不同而引起的误差。

4. **误差分类**
    - 系统误差
    - 随机误差
    - 粗大误差

（1）系统误差：

a. 定义：在重复性条件下，对同一被测量进行无限多次测量所得结果的平均值与被测量的真值之差。

b. 特征：在相同条件下，多次测量同一量值时，该误差的**绝对值和符号保持不变**，或者在条件改变时，按某一确定规律变化的误差。

> **Example**：①用天平计量物体质量时，砝码的质量偏差
>
> ②用千分表读数时，表盘安装偏心引起的示值误差
>
> ③刻线尺的温度变化引起的示值误差

c. 分类：①按对误差掌握程度，系统误差可分为

已定系统误差（误差绝对值和符号已经明确的系统误差）

未定系统误差（误差绝对值和符号未能确定的系统误差，但通常估计出误差范围）

②按误差出现规律，系统误差可分为

不变系统误差（误差绝对值和符号固定不变的系统误差）

变化系统误差（误差绝对值和符号变化的系统误差。按其变化规律，可分为线性系统误差、周期性系统误差和复杂规律系统误差）

（2）随机误差

a. 定义：测得值与在重复性条件下对同一被测量进行无限多次测量结果的平均值之差。又称为偶然误差。

b. 特征：在相同测量条件下，多次测量同一量值时，绝对值和符号以不可预定方式变化的误差。

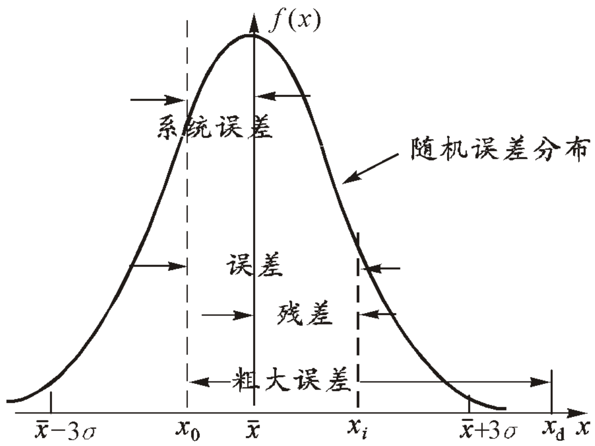
c. 实验条件的偶然性微小变化，如温度波动、噪声干扰、电磁场微变、电源电压的随机起伏、地面振动等。

d. 性质： 随机误差的大小、方向均随机不定，不可预见，不可修正。（虽然一次测量的随机误差没有规律，不可预定，也不能用实验的方法加以消除。但是，经过大量的重复测量可以发现，它是遵循某种统计规律的。因此，可以用概率统计的方法处理含有随机误差的数据，对随机误差的总体大小及分布做出估计，并采取适当措施减小随机误差对测量结果的影响。）

（3）粗大误差

a. 定义：指明显超出统计规律预期值的误差。又称为疏忽误差、过失误差或简称粗差。

b. 产生原因：①测量方法不当或错误，测量操作疏忽和失误（如未按规程操作、读错读数或单位、记录或计算错误等）②测量条件的突然变化（如电源电压突然增高或降低、雷电干扰、机械冲击和振动等）。

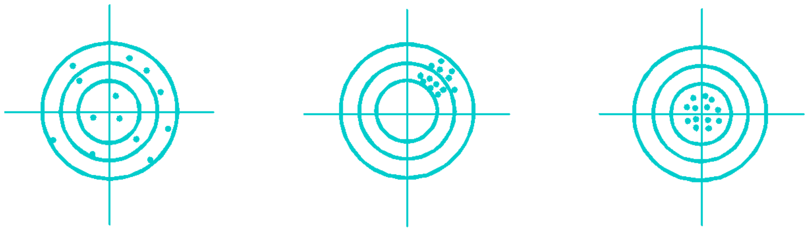


（二）精度

- **准确度：**只考虑**系统误差**的大小时，准确度称为准确度。
- **精密度：**只考虑**随机误差**的大小时，准确度称为精密度。
- **精确度：**表示测量结果与被测量真值之间的一致程度。就误差分析而言，精确度是测量结果中系统误差和随机误差的综合，误差大，则精确度低，误差小，则精确度高。

NOTE: 精确度（精度）在数值上一般多用相对误差来表示，但不用百分数。如某一测量结果的相对误差为0.001%，则其精度为10-5。

（1）准确度、精密度和精确度三者之间的关系



(a) 弹着点全部在靶上，但分散。相当于系统误差小而随机误差大，即精密度低，准确度高。

(b) 弹着点集中，但偏向一方，命中率不高。相当于系统误差大而随机误差小，即精密度高，准确度低。

(c) 弹着点集中靶心。相当于系统误差与随机误差均小，即精密度、准确度都高，从而精确度亦高。

（2）常用名词术语

a. 重复性：指在相同条件下在短时间内对同一个量进行多次测量所得测量结果之间的一致程度，一般用测量结果的分散性来定量表示。

b. 复现性：指在变化条件下，对同一个量进行多次测量所得测量结果之间的一致程度，一般用测量结果的分散性来定量表示。复现性也称为再现性。

c. 稳定性：指测量仪器保持其计量特性随时间恒定的能力。它可以用几种方式来定量表示，如用计量特性变化某个规定的量所经过的时间；或用计量特性经规定的时间所发生的变化等。

d. 示值误差：指测量仪器的示值与对应输入量的真值之差。由于真值不能确定，故在实际应用中常采用约定真值。

e. 偏移：指测量仪器示值的系统误差。通常用适当次数重复测量的示值误差的平均来估计。

f. 最大允许误差：指对于给定的测量仪器，规范、规程等所允许的误差极限值。有时也称为允许误差限。

e. 不确定度：与测量结果相关联的、用于合理表征被测量值分散性大小的参数。它是定量评定测量结果的一个重要质量指标。

（三）有效数字

（1）有效数字：含有误差的任何数，如果其绝对误差界是最末尾数的半个单位，那么从这个近似数左方起的第一个非零的数字，称为第一位有效数字。从第一位有效数字起到最末一位数字止的所有数字，不管是零或非零的数字，都叫有效数字。

NOTE: **实际测量的数字除最后一位是可疑的外，其余的数字都是确定的。**

> **Example**:
>
> ①对于小数，**第一个非零有效数字前面的零不是有效数字**。如： 0.0023有效数字为最后2位。
>
> ②**数据末尾的一个或数个零应为有效数字**。如1450 有效数字应为4位，0.460有效数字为3位。
>
> ③数字末尾的零的含义有时并不清楚，此时往往采用**10的方次表示**。如 12000m表示为1.2×10^4，有效数字w为2位，若写成1.20×10^4 ,有效数字为3位。

测量结果保留原则：①最末一位数字是不可靠的，而倒数第二位数字是可靠的。

②在进行重要的测量时，测量结果和测量误差可比上述原则再多取一位数字作为参考。

（2）数字舍入规则：**四舍六入五留双**

① 若舍去部分的数值，大于保留部分末位的半个单位，则末位数加1。
② 若舍去部分的数值，小于保留部分末位的半个单位，则末位数减1。
③ 若舍去部分的数值，等于保留部分末位的半个单位，则末位凑成偶数，即当末位为偶数时则末位不变，当末位是奇数时则末位加1。

> **Example.1**：
>
> (1) 将3.14159分别取3、4位有效数字?
>
> 答：根据规则一、规则二，舍入后的有效数字分别为3.14和3.142。
>
> (2) 2.55（保留二位有效数字）为 2.6
>
> (3) 2.64（保留二位有效数字）为 2.6
>
> (4) 2643.0+987.7+4.187+0.2354
>
> ≈2643.0+987.7+4.19+0.24（加减法按照小数点保留，但是计算过程中比基准精确度多取一位）
> =3635.13
> ≈3635.1 **（加减法按照小数点保留）**
>
> (5) 15.13×4.12 =62.3356 ≈ 62.3 **（乘法按照有效数字保留）**

二、误差的基本性质与处理

（一）随机误差

- 随机误差产生的原因
- 正态分布
- 算数平均值
- 测量的标准差
- 测量的极限误差
- 不等精度测量
- 随机误差的其它分布

1. 随机误差产生的原因

   随机误差的特征：对同一测量值进行多次等精度的重复测量时，得到一系列不同的测量值（常称为测量列），每个测量值都含有误差，这些误差的出现没有确定的规律，即前一个数据出现后，不能预测下一个数据的误差大小和方向。但就误差整体而言，却明显具有某种统计规律。这种误差就称为随机误差。

   （等精度的重复测量，是指测量仪器、测量环境、测量方法过程、测量人员等各种能准确知道的影响量均相同的条件下进行的重复测量。在数学上就表现为样本方差相同。）

   随机误差的构成：

   a. 被测量的不完整定义；(测量条件缺失，定义量化单位不明确，光泽度、人脸特征量)
   b. 被测量定义复现的不理想；（基准也有不确定度）
   c. 取样——被测样品不能代表定义的被测量；（以偏概全）
   d. 没有充分了解环境条件对测量过程的影响，或环境条件测量不完善；（环境偶然性）
   e. 模拟仪器读数时有人为不确定偏差；
   f. 仪器分辨率或鉴别阈值（人机综合分辨率）；
   g. 赋予计量标准或标准物质的值；（量值传递过程误差）
   h. 在相同条件下被测量重复观测值的随机变化；(被测量不稳定)

2. 正态分布（多数随机误差符合正态分布）

设被测量值的真值为L_0，一系列测得值为l_i，则测量列的随机误差δ_i可表示为：

$$\delta_i = l_i - L_0, i = 0, 1, 2 \ldots\ldots, n \qquad (2-1)$$

正态分布概率密度$f(\delta)$与分布函数$F(\delta)$：

$$f(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\delta^2}{2\sigma^2}} \qquad (2-2)$$

$$F(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\delta^2}{2\sigma^2}} d\delta \qquad (2-3)$$

它的数学期望为：$E = \int_{-\infty}^{\infty} \delta f(\delta) d\delta = 0 \qquad (2-4)$

它的方差为：$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^2 f(\delta) d\delta = 0 \qquad (2-5)$

其平均误差为：$\theta = \int_{-\infty}^{\infty} |\delta| f(\delta) d\delta \approx \frac{4}{5}\sigma \qquad (2-6)$

其或然误差$(\int_{-\rho}^{\rho} f(\delta) d\delta = \frac{1}{2})$为：$\rho = 0.6745\sigma \approx \frac{2}{3}\sigma \qquad (2-7)$

NOTE: ①误差的对称性： f(+δ)= f(−δ)

②误差的单峰性：绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的次数多

③误差的有界性：虽然函数f(δ)的存在区间是[-∞,+∞]，但实际上，随机误差δ只是出现在一个有限的区间内， 即[-kσ,+kσ]

④误差的抵偿性：随着测量次数的增加，随机误差的算术平均值趋向于零

抵偿性：$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i}{n} = 0$

3. 算数平均值

（1）算数平均值的意义：**当测量次数无限增加时，算术平均值必然趋近于真值L_0**（证明略）

$$\overline{x} = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i \qquad (2-8)$$

（如果能够对某一量进行无限多次测量，就可得到不受随机误差影响的测量值，或其影响很小，可以忽略。若测量次数有限，由参数估计可知，算术平均值是该测量总体期望的一个最佳的估计量 ，即满足无偏性、有效性、一致性，并满足最小二乘法原理；在正态分布条件下满足最大似然原理。）

（2）残余误差： 一般情况下，被测量的真值为未知，不可能按式（2-1）求得随机误差，这时可用算术平均值代替被测量的真值进行计算。此时的差值称为残余误差，简称残差：

$$v_i = l_i - \overline{x} \qquad (2-9)$$

此时可用更简便算法来求算术平均值 。任选一个接近所有测得值的数l_0作为参考值，计算每个测得值l_i与l_0的差值：

$$\Delta i_i = l_i - l_0, i = 1, 2, 3 \ldots, n$$

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(l_0 + \Delta l_i)}{n} = l_0 + \Delta\overline{x_0} \qquad (2-10)$$

（3）算术平均值的计算校核

$$当求得的\overline{x}为未经凑整的准确数时，则有：\sum_{i=1}^{n}v_i=0 \quad (2-11)$$

残余误差代数和为零这一性质，可用来校核算术平均值及其残余误差计算的正确性。但需注意这是未经凑整的情况。

NOTE:

校核算术平均值及其残差规则①：

$$当\sum_{i=1}^{n}l_i=n\overline{x},求得的\overline{x}为非凑整的准确数时,\sum_{i=1}^{n}v_i=0$$
$$当\sum_{i=1}^{n}l_i>n\overline{x},求得的\overline{x}为非凑整的准确数时,\sum_{i=1}^{n}v_i为正，其大小为求\overline{x}时的余数$$
$$当\sum_{i=1}^{n}l_i<n\overline{x},求得的\overline{x}为非凑整的准确数时,\sum_{i=1}^{n}v_i为负，其大小为求\overline{x}时的亏数$$

校核算术平均值及其残差规则②：

$$当n为偶数时，|\sum_{i=1}^{n}v_i|\le\frac{n}{2}A;$$
$$当n为偶数时，|\sum_{i=1}^{n}v_i|\le(\frac{n}{2}-0.5)A;$$
$$式中的A为实际求得的算术平均值\overline{x}末位数的一个单位。$$

> **Example**：有一个实验的数据结果为,n=10,算数平均值为1897.64，v_i=0,0.05,-0.04,0.05,-0.07,-0.02,0,0.01,0,0.01,对其计算结果进行校验。
>
> $$解：因为n为偶数，所以\frac{n}{2}=5,A=0.01$$
> $$|\sum_{i=1}^{n}v_i|=0.01<\frac{n}{2}A=0.05,计算结果正确$$

4. 测量的标准差

（1）基本概念

A. 均方根误差（标准偏差,简称标准差）σ

① σ的大小只说明，在一定条件下等精度测量列随机误差的概率分布情况。

②在该条件下，任一单次测得值的随机误差δ，一般都不等于σ，但却认为这一系列测量列中所有测得值都属于同样一个标准差σ的概率分布。

③ 在不同条件下，对同一被测量进行两个系列的等精度测量，其标准差也不相同。

B. 或然误差ρ

测量列的或然误差ρ，它将整个测量列的n个随机误差分为个数相等的两半。其中一半（n/2个）随机误差的数值落在-ρ ~ +ρ范围内，而另一半随机误差的数值落在-ρ ~ +ρ范围以外， 另一方面的意义是：等精度测量列的测量值随机误差落在区间[-ρ,+ρ]之内的概率为50%。

$$\rho=0.6745\sigma\approx\frac{2}{3}\sigma$$

C. 算术平均误差θ

测量列算术平均误差θ的定义是：该测量列全部随机误差绝对值的算术平均值（可见式2-6）

（2）等精度测量列单次测量标准差的计算

A. Bessel公式(推导略)

$$\sigma=\pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{n-1}}$$

B. 别捷尔斯法

$$\sigma=1.253\frac{\sum_{i=1}^{n}|v_i|}{\sqrt{n(n-1)}}$$

C. 极差法

$$\text{若等精度多次测量测得值}x_1,x_2,\cdots,x_n,\text{服从正态分布，}$$
$$\text{在其中选取最大值}x_{max}\text{与最小值}x_{min}\text{，则两者之差称为极差：}$$
$$\omega_n=x_{max}-x_{min}$$
$$\text{根据极差的分布函数，可求出极差的数学期望为：}E(\omega_n)=d_n\sigma$$
$$\text{故可得}\sigma\text{的无偏估计值，若仍以}\sigma\text{表示，则有}\sigma=\frac{\omega_n}{d_n},d_n\text{可查表}$$

D. 最大误差法

$$\sigma=\frac{1}{K_n'}|v_i|_{max}$$
$$K_n'\text{可查表，在}n<10\text{的情况下有一定精度}$$

> **Example**：某激光管发出的激光波长经检定为λ=0.63299130μm,由于某些原因未对此检定波长作误差分析，但后来又用更精确的方法测得激光波长 λ=0.63299144μm，试求原检定波长的标准差。
>
> $$\text{解：因后测得的波长是用更精确的方法，故可认为其测得值为实际波长(或约定真值)，}$$
> $$\text{则原检定波长的随机误差}\delta\text{为：}\delta=0.63299130\mu m-0.63299144\mu m=-14\times10^{-8}\mu m$$
> $$\text{又查表得}\frac{1}{K_1}=1.25,\text{故标准差为：}\sigma=\frac{|\delta|}{K_1}=1.25\times14\times10^{-8}\mu m=1.75\times10^{-7}\mu m$$

NOTE: 四种计算方法的优缺点

①贝塞尔公式的计算精度较高，但计算麻烦，需要乘方和开方等，其计算速度难于满足快速自动化测量的需要；
②别捷尔斯公式最早用于前苏联列宁格勒附近的普尔科夫天文台，它的计算速度较快，但计算精度较低，**计算误差为贝塞尔公式的1.07倍**；
③用极差法计算σ，非常迅速方便，**可用来作为校对公式**，当n<10时可用来计算σ，此时计算精度高于贝塞尔公式；
④用最大误差法计算σ更为简捷，容易掌握，当n<10时可用最大误差法，计算精度大多高于贝塞尔公式，尤其是**对于破坏性实验(n=1)只能应用最大误差法。**

（3）多次测量的算术平均值的标准差

$$\text{测量列算术平均值的标准差}\sigma_{\overline{x}}$$

$$\sigma_{\overline{x}}=\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

即在n次测量的等精度测量列中，算术平均值的标准差为单次测量标准差的1/√n，当n愈大，算术平均值越接近被测量的真值，测量精度也愈高。

评定算术平均值的精度标准，也可用或然误差R或平均误差T，相应公式为：

$$R = 0.6745\sigma_{\bar{x}} \approx \frac{2}{3}\sigma_{\bar{x}} = \frac{2}{3}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\rho}{\sqrt{n}}$$

$$T = 0.7979\sigma_{\bar{x}} \approx \frac{4}{5}\sigma_{\bar{x}} = \frac{4}{5}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\theta}{\sqrt{n}}$$

若用残余误差表示上述公式，则有：

$$R = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n(n-1)}}$$

$$T = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n(n-1)}}$$

5. 测量的极限误差

（1）单次测量的极限误差

当研究误差落在区间（-δ,+δ）之间的概率时，则得：

$$p = \int_{-\delta}^{+\delta} f(\delta)d\delta = \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} d\delta$$

将上式进行变量置换，设

$$t = \frac{\delta}{\sigma}, dt = \frac{d\delta}{\sigma}$$

经变换，上式成为：

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2\Phi(t)$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

这样我们就可以求出积分值p，为了应用方便，其积分值一般列成表格形式，称为概率函数积分值表。当t给定时，Φ(t)值可由该表查出。现已查出t=1,2,3,4等几个特殊值的积分值，并求出随机误差不超出相应区间的概率p=2 Φ(t)和超出相应区间的概率p’=1-2 Φ(t)。

通常把绝对值大于3σ的误差称为单次测量的极限误差，即

$$\delta_{lim} x = \pm 3\sigma$$

当$t = 3$时，对应的概率$p = 99.73\%$。

（2）算术平均值的极限误差

测量列的算术平均值与被测量的真值之差称为算术平均值误差$\delta_{\overline{x}}$，即$\delta_{\overline{x}} = \overline{x} - L_0$。当多个测量列的算术平均值误差为正态分布时，根据概率论知识，同样可得测量列算术平均值的极限表达式为：

$$\delta_{lim}\overline{x} = \pm t\sigma_{\overline{x}}$$

式中的t为置信系数，$\sigma_{\overline{x}}$为算术平均值的标准差。通常取t=3，则

$$\delta_{lim}\overline{x} = \pm 3\sigma_{\overline{x}}$$

实际测量中有时也可取其它t值来表示算术平均值的极限误差。但当测量列的测量次数较少时，应按“学生氏”分布("student" distribution)或称t分布来计算测量列算术平均值的极限误差，即：

$$\delta_{lim}\overline{x} = \pm t_a\sigma_{\overline{x}}$$

式中的t_α为置信系数，它由给定的置信概率$p = 1 - \alpha$和自由度$\nu = 1 - n$来确定，具体数值见附录3；α为超出极限误差的概率（称显著度或显著水平），通常取 =0.01或0.02,0.05；n为测量次数；$\sigma_{\overline{x}}$为n次测量的算术平均值标准差。

> **Example**：对某量进行6次测量，测得数据如下：802.40，802.50，802.38，802.48，802.42，802.46。求算术平均值及其极限误差。
>
> $$\text{解：算术平均值}\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} l_i}{6} = 802.44$$
>
> $$\text{标准差：}\sigma = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} v_i^2}{6-1}} = 0.047$$
>
> $$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.047}{\sqrt{6}} = 0.019$$
>
> 因测量次数较少，应按t分布计算算术平均值的极限误差。
>
> 已知$\nu = n - 1 = 5$，取$\alpha = 0.01$，则由附录表3查得$t_\alpha = 4.03$，则有：
>
> $$\delta_{lim}\overline{x} = \pm t\sigma_{\overline{x}} = \pm 4.03 \times 0.019 = \pm 0.076$$
>
> 若按正态分布计算，取$\alpha = 0.01$，相应的置信概率：$p = 1 - \alpha = 0.99$
>
> 由附录表1查得t=2.60，则算术平均值的极限误差为：
>
> $$\delta_{lim}\overline{x} = \pm t\sigma_{\overline{x}} = \pm 2.60 \times 0.019 = \pm 0.049$$
>
> **NOTE**: 由此可见，当测量次数较少时，按两种分布计算的结果有明显的差别,应使用t分布。

6. 不等精度测量

（1）权的概念

在等精度测量中，各个测量值认为同样可靠，并取所有测得值的算术平均值作为最后的测量结果。

在不等精度测量中，各个测量结果的可靠程度不一样，应让可靠程度大的测量结果在最后测量结果中占有的比重大些，可靠程度小的占比重小些。

各测量结果的可靠程度可用一数值来表示，这数值即称为该测量结果的“权”，记为p，可以理解为当它与另一些测量结果比较时，对该测量结果所给予信赖程度。

(2) 权的确定方法

最简单的方法可按测量的次数来确定权，即测量条件和测量者水平皆相同，则重复测量次数愈多，其可靠程度也愈大，因此完全可由测量的次数来确定权的大小，即$p_i=n_i$。

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n_i}} \rightarrow n_1\sigma_{\bar{x}_1}^2=n_2\sigma_{\bar{x}_2}^2=\ldots=n_m\sigma_{\bar{x}_m}^2=\sigma^2 \rightarrow p_i=n_i$$

$$\rightarrow p_1:p_@:\ldots:p_m=\frac{1}{\sigma_{\bar{x}_1}^2}:\frac{1}{\sigma_{\bar{x}_2}^2}:\ldots:\frac{1}{\sigma_{\bar{x}_m}^2}$$

即：每组测量结果的权与其相应的标准偏差平方（$\sigma_{\bar{x}_i}$）成反比，

若已知$\sigma_{\bar{x}_i}$各组算术平均值的标准差），则可得到相应权p_i的大小。

(3) 加权算术平均值

若对同一被测量进行m组不等精度测量，得到m个测量结果为：$\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_m$，设相应的测量次数为$n_1,n_2,\cdots,n_m$，即：

$$\bar{x}_1=\frac{\sum_{i=1}^{n_1} l_1^i}{n_1},\bar{x}_2=\frac{\sum_{i=1}^{n_2} l_2^i}{n_2},\cdots,\bar{x}_m=\frac{\sum_{i=1}^{n_m} l_m^i}{n_m}$$

根据等精度测量算术平均值原理，全部测量的算术平均值$\bar{x}$应为：

$$\bar{x}=\left(\sum_{i=1}^{n_1} l_1^i+\sum_{i=1}^{n_2} l_2^i+\cdots+\sum_{i=1}^{n_m} l_m^i\right)/\sum_{i=1}^{m} n_i$$

将式(2-43)代入上式得：

$$\bar{x}=\frac{n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2\cdots+n_m\bar{x}_m}{n_1+n_2+\cdots+n_m}=\frac{p_1\bar{x}_1+p_2\bar{x}_2\cdots+p_m\bar{x}_m}{p_1+p_2+\cdots+p_m}$$

或简写为：

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{m} p_i\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{m} p_i}$$

当各组的权相等，即$p_1=p_2=\cdots=p_m=p$时，加权算术平均值可简化为：

$$\bar{x}=\frac{p\sum_{i=1}^{m}\bar{x}_i}{mp}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\bar{x}_i}{m}$$

有时候为简化计算，加权算术平均值可表示为：

$$\overline{x}=x_0+\frac{\sum_{i=1}^{m}p_i(\overline{x}_i-x_0)}{\sum_{i=1}^{m}p_i}$$

式中的x_0 为接近$\overline{x}_i$的任选参考值。

（4）单位权的概念

由于测得值的方差σ^2 的权数为1,有特殊用途，故称等于1的权为单位权，而σ^2为具有单位权的测得值方差，σ为具有单位权的测得值标准差。

（5）加权算术平均值的标准差

对同一个被测量进行m组不等精度测量，得到m个测量结果为：$\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots\overline{x_m}$

若已知单位权测得值的标准差σ，故$\sigma_{\overline{x_i}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n_i}},i=1,2,\ldots,m$

全部（$m\times n$个）测得值的算术平均值$\overline{x}$的标准差为：$\sigma_{\overline{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}n_i}}$

比较上面两式可得：$\sigma_{\overline{x}}=\sigma_{\overline{x_i}}\sqrt{\frac{n_i}{\sum_{i=1}^{m}n_i}}$

因为$p_i=n_i\rightarrow\sum_{i=1}^{m}p_i=\sum_{i=1}^{m}n_i\rightarrow\sigma_{\overline{x}}=\sigma_{\overline{x_i}}\sqrt{\frac{p_i}{\sum_{i=1}^{m}p_i}}=\frac{\sigma}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}p_i}}$

当各组测量结果的标准差为未知时，则不能直接用上式，需用各测量结果的残余误差来计算

由$Bessel$公式可得：$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}\text{残差}^2}{m-1}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}p_iv_{\overline{x_i}}^2}{m-1}}\rightarrow\sigma_{\overline{x}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}p_1v_{\overline{x_i}}^2}{(m-1)\sum_{i=1}^{m}p_i}}$

> **Example:**求例2-11的加权算术平均值的标准差。
>
> 解：由加权算术平均值$\overline{x}=999.9420mm$，可得各组测量结果的残余误差为：
>
> $$v_{\overline{x_1}}=0.5\mu m,v_{\overline{x_2}}=-0.4\mu m,v_{\overline{x_3}}=-0.1\mu m$$
>
> $$\text{又}m=3,p_1=3,p_2=2,p_3=5\rightarrow$$
>
> $$\sigma_{\overline{x}}=\sqrt{\frac{3\times0.5^2+2\times(-0.4)+5\times(-0.1)^2}{(3-1)\times(3+2+5)}}\mu m=0.24\mu m\approx0.0002mm$$

7. 随机误差的其他分布

（1）均匀分布

在测量实践中，均匀分布是经常遇到的一种分布，其主要特点是，误差有一确定的范围，在此范围内，误差出现的概率各处相等，故又称矩形分布或等概率分布。

$$f(\delta)=\begin{cases}\frac{1}{2a}\\0\end{cases},\quad F(\delta)=\begin{cases}0 & \delta\leq-a\\\frac{\delta+a}{2a} & -a<\delta\leq a\\1 & \delta>a\end{cases}$$

$$\text{其数学期望：}E=\int_{-a}^{a}\frac{\delta}{2a}d\delta=0,\text{方差：}\sigma^2=\frac{a^2}{3},\text{标准差：}\sigma=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

（2）反正弦分布

反正弦分布实际上是一种随机误差的函数分布规律，其特点是该随机误差与某一角度成正弦关系。

$$f(\delta)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{a^2-\delta^2}} & |\delta|\le a\\ 0 \quad |\delta|>a\end{cases},\quad F(\delta)=\begin{cases}0 \quad \delta\le a\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arcsin\frac{\delta}{a} & -a<\delta\le a\\ 1 \quad \delta>a\end{cases}$$

$$\text{其方差为：}\sigma^2=\frac{a^2}{2}，\ \sigma=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

（3）三角形分布

当两个误差限相同且服从均匀分布的随机误差求和时，其和的分布规律服从三角形分布，又称辛普逊（Simpson）分布。实际测量中，若整个测量过程必须进行两次才能完成，而每次测量的随机误差服从相同的均匀分布，则总的测量误差为三角形分布误差。

$$f(\delta)=\begin{cases}\frac{a+\delta}{a^2} & -a\le\delta\le 0\\ \frac{a-\delta}{a^2} & 0\le\delta\le a\\ 0 \quad |\delta|>a\end{cases},\quad F(\delta)=\begin{cases}0 \quad \delta<-a\\ \frac{(a+\delta)^2}{2a^2} & -a<\delta<\le 0\\ 1-\frac{(a-\delta)^2}{2a^2} & 0<\delta\le a\\ 1 \quad \delta>a\end{cases}$$

$$\text{其数学期望：}E=0,\ \text{方差：}\sigma^2=\frac{a^2}{6},\ \text{标准差：}\sigma=\frac{a}{\sqrt{6}}$$

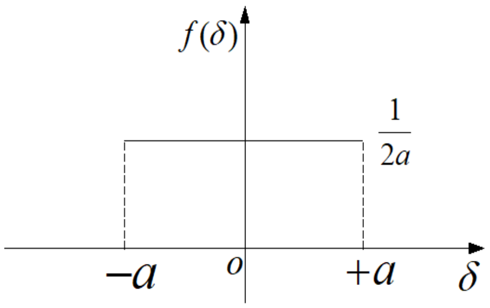


图 2-5

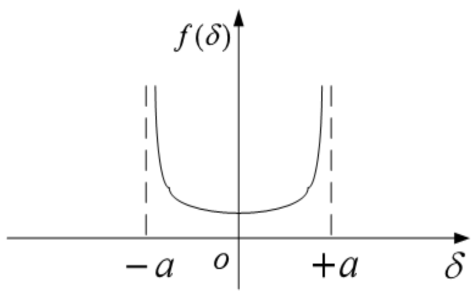


图 2-6

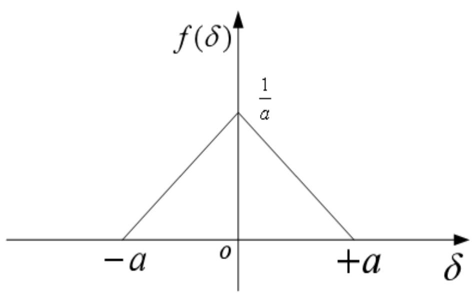


图 2-7

均匀分布　　　　反正弦分布　　　　三角分布

（4）χ^2分布（卡埃平方分布，简称卡方分布）

令$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_\nu$为$\nu$个独立随机变量，每个随机变量都服从标准化的正态分布。定义一个新的随机变量：

$$\chi^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots\xi_\nu^2$$

随机变量χ^2称为自由度为ν的卡埃平方变量。

$$f(\delta)=\begin{cases}\frac{2^{-v/2}}{\Gamma(\frac{v}{2})}(\chi^2)^{\frac{v}{2}-1}e^{-\frac{\chi^2}{2}} & \text{当}\chi^2>0\\ 0 & \text{当}\chi^2<0\end{cases},\text{其中}\Gamma(\chi)=\int_0^\infty t^{\chi-1}e^{-t}dt$$

其数学期望为：$E=\int_0^\infty \chi^2\frac{2^{-v/2}}{\Gamma(\frac{v}{2})}(\chi^2)^{\frac{v}{2}-1}e^{-\frac{\chi^2}{2}}d\chi^2=v$，方差：$\sigma^2=2v$，　标准差：$\sigma=\sqrt{2v}$

（5）t分布

令ξ和η是独立的随机变量，ξ具有自由度为ν的χ^2分布函数，η具有标准化正态分布函数，则定义新的随机变量为：

$$t=\frac{\eta}{\sqrt{\xi/v}}$$

随机变量t称自由度为v的学生氏t变量。

$$f(t)=\frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{v\pi}\Gamma(\frac{v}{2})}(1+\frac{t^2}{v})^{-\frac{v+1}{2}},\ E=0,\ \sigma^2=\frac{v}{v-2},\ \sigma=\sqrt{\frac{v}{v-2}}$$

（6）F分布

若ξ_1具有自由度为ν_1的卡埃平方分布函数，ξ_2具有自由度为ν_2的卡埃平方分布函数，定义新的随机变量为：

$$F=\frac{\xi_1/v_1}{\xi_2/v_2}=\frac{\xi_1 v_2}{\xi_2 v_1}$$

随机变量F称为自由度为ν_1、ν_2的F变量。

$$f(F)\text{略},\ E=\frac{v_2}{v_2-2},\ \sigma^2=\frac{2v_2(v_1+v_2-2)}{v_2(v_2-2)^2(v_2-4)}(v_2>4),\ \sigma^2=\sqrt{\frac{2v_2(v_1+v_2-2)}{v_2(v_2-2)^2(v_2-4)}}$$

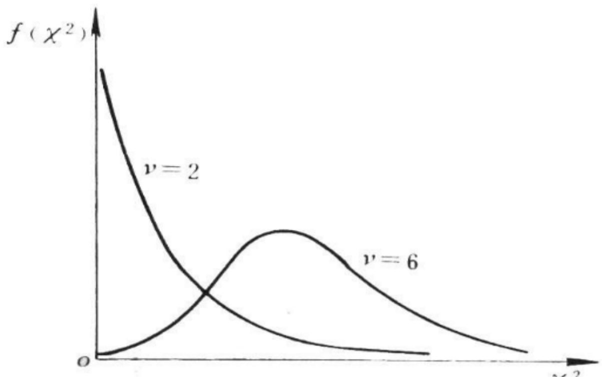


图 2—8

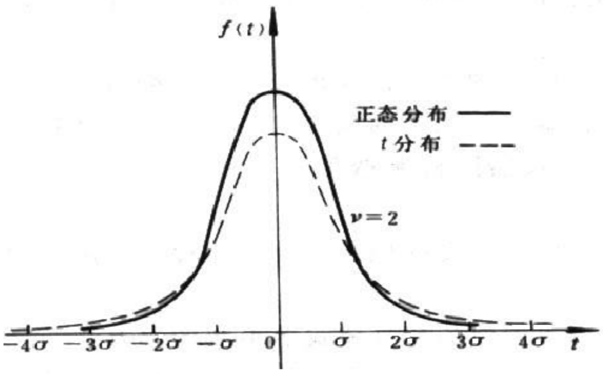


图 2—9

t 分布　　　　　　　　　　　F 分布

（二）系统误差

1. 系统误差产生的原因
    - 测量装置方面的因素（例如：计量校准后发现的偏差、仪器设计原理缺陷、仪器制造和安装的不正确等。）
    - 环境方面的因素（例如：测量时的实际温度对标准温度的偏差、测量过程中的温度、湿度按一定规律变化的误差等。）
    - 测量方法的因素（例如：采用近似的测量方法或计算公式引起的误差等。）
    - 测量人员的因素（例如：测量人员固有的测量习性引起的误差等。）

2. 系统误差的特征

系统误差的特征是在同一条件下，多次测量同一测量值时，误差的绝对值和符号保持不变，或者在条件改变时，误差按一定的规律变化。由系统误差的特征可知，在多次重复测量同一值时，系统误差不具有抵偿性，它是固定的或服从一定函数规律的误差，从广义上讲，系统误差即是服从某一确定规律变化的误差。

（1）根据系统误差在测量过程中所具有的不同变化特性，将系统误差分为两大类：

- 恒定系统误差：是指在整个测量过程中，误差的大小和符号始终是不变的。

> **Example:**千分尺或测长仪读数装置的调零误差，量块或其它标准件尺寸的偏差等，均为恒定系统误差。它对每一测量值的影响均为一个常量，属于最常见的一类系统误差。

- 可变系统误差:变化系统误差指在整个测量过程中，误差的大小和方向随测试的某一个或某几个因素按确定的函数规律而变化，其种类较多，又可分为以下几种：
    - 线性变化的系统误差
    - 周期变化的系统误差
    - 复杂规律变化的系统误差

A. 线性变化的系统误差: 在整个测量过程中，随某因素而线性递增或递减的系统误差。

> **Example:**
>
> ①刻度值为1mm的标准刻尺，存在刻线误差ΔL ，每一刻度间距实际为(1+ΔL)mm ,若用它测量某个一长度，得到读数为K，则被测长度的实际值为L=K(1+ΔL)mm 。由于测量值为K_mm ，故产生的系统误差为：K-L=-K ·ΔL 它是随测量值K的大小而线性变化的。
>
> ②用电位差计测电动势，由于工作蓄电池随时间放电，将对测量结果产生线性变换的系统误差。

```
B． 周期变化的系统误差：在整个测量过程中，随某因素作周期变化的系统误差。
```

> **Example:**仪表指针的回转中心与刻度盘中心有一个偏离值 e ，则指针在任一转角φ处引起的读数误差为ΔL=e·sinφ。此误差变化规律符合正弦曲线规律，当指针在0°和180°时误差为零，而在90°和 270° 时误差绝对值达最大。

C. 复杂规律变化的系统误差：在整个测量过程中，随某因素变化，误差按确定的更为复杂的规律变化，称其为复杂规律变化的系统误差。

> **Example:**微安表的指针偏转角与偏转力距间不严格保持线性关系，而表盘仍采用均匀刻度所产生的误差就属于复杂规律变化的系统误差。

（2）系统误差对测量结果的影响

A. 定值系统误差的影响

设有一组常量测量数据$x_1, x_2, \cdots, x_n$中分别存在定值系统误差ε_0随机误差$\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$，真值记为$x_0$。则这组测量数据的算术平均值为：

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = x0 + \varepsilon_0 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i \approx x_0 + \varepsilon_0$$
$$\rightarrow v_i = x_i - \overline{x} = (x_0 + \varepsilon_0 + \delta_i) - (x_0 + \varepsilon_0) = \delta_i$$

NOTE: 由上式可看出，ε_0不影响残差计算，因而也不影响标准误差σ的计算，即ε_0并不引起随机误差分布密度曲线的形状及其分布范围的变化，只引起分布密度曲线的位置变化（ ε_0 平移值）。

B. 变化系统误差的影响

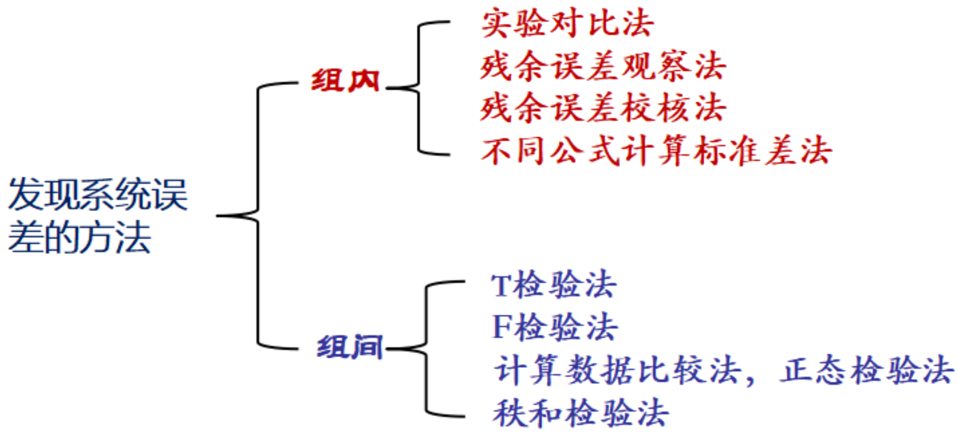
同样，计算一组测量数据的算术平均值：

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=x_0+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\approx x_0+\overline{\varepsilon}$$

$$v_i=x_i-\overline{x}\approx\delta_i+(\varepsilon_i-\overline{\varepsilon})$$

NOTE: 由上式可看出，因$\varepsilon_i-\overline{\varepsilon}\neq0$且其数值不易确定，故变值系统误差εi直接影响残差$v_i$ 的数值，因此也必然要影响标准误差σ的计算，且其影响难于确定，即变值系统误差不仅使随机误差的分布密度曲线的形状和分布范围发生变化，也使曲线的位置产生平移。

3. 系统误差的发现



（1）测量列组内的系统误差发现方法

A. 实验对比法：适用于发现不变的系统误差

B. 残差误差观察法：适于发现有规律变换的系统误差

当求得的$\overline{x}$为未经凑整的准确数时，则有：$\sum_{i=1}^{n}v_i=0$

C. 残余误差校核法

①用于发现线性系统误差：$\Delta\approx\sum_{i=1}^{K}(\Delta l_i-\Delta\overline{x})-\sum_{j=K+1}^{n}(\Delta l_i-\Delta\overline{x})$

$\rightarrow$ 若Δ显著不为0，则有理由认为测量列存在线性系统误差。这种校核法又称\\马列科夫准则//。

②用于发现周期性系统误差：$u=|\sum_{i=1}^{n-1}v_iv_{i+1}|=|v_1v_2+v_2v_3+\cdots+v_n-1v_n|$

若$u>\sqrt{n-1}\sigma\rightarrow$ 则认为该测量列中含有周期性系统误差。
这种方法又叫阿卑－赫梅特（$Abbe-Helmert$）准则。

D. 不同公式计算标准差比较法

对等精度测量，可用不同分式计算标准差，通过比较差异发现系统误差。

按贝塞尔公式： $\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}}$

按别捷尔斯公式： $\sigma_2 = 1.253 \frac{\sum |v_i|}{\sqrt{n(n-1)}}$

令 $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1 + u$

若 $|u| \geq \frac{2}{\sqrt{n-1}}$

则怀疑测量列中存在系统误差。

（2）测量列组间的系统误差发现方法

A. 计算数据比较法

若对同一量独立测量得m组结果，并知它们的算术平均值和标准差为：

$$\bar{x}_1, \sigma_1; \bar{x}_2, \sigma_2; \cdots \bar{x}_n, \sigma_n$$

而任意两组结果之差为：$\Delta = \bar{x}_i - \bar{x}_j$，

共标准差为：$\sigma = \sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}$

则任意两组结果$\bar{x}_i$与$\bar{x}_j$间不存在系统误差的标志是：

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| < 2\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}$$

B. 秩和检验法

对某量进行两组测量，这两组间是否存在系统误差，可用秩和检验法根据两组分布是否相同来判断。

若独立测得两组的数据为：

x_i　　$i=1,2,\ldots,n_x$

y_i　　$i=1,2,\ldots,n_y$

将它们混和以后，按大小顺序重新排列，取测量次数较少的那一组，数出它的测得值在混合后的次序（即秩），再将该组所有测得值的次序相加，即得秩和T。（　　若两组数据中有相同的数值，则该数据的秩按所排列的两个次序的平均值计算。）

结果：① 两组的测量次数n_1, $n_2 \leq 10$：

可根据测量次数较少的组的次数n_1 和测量次数较多的组的次数 n_2，由秩和检验表2-10查得T_-和T_+（显著度0.05）。

若$T_- < T < T_+$ 则无根据怀疑两组间存在系统误差

n_1	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3
n_2	4	5	6	7	8	9	10	3	4	5	6
T_-	3	3	4	4	4	4	5	6	7	7	8
T_+	11	13	14	16	18	20	21	15	17	20	22
n_1	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4
n_2	7	8	9	10	4	5	6	7	8	9	10
T_-	9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
T_+	24	27	29	31	24	27	30	33	36	39	42
n_1	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6
n_2	5	6	7	8	9	10	6	7	8	9	10
T_-	19	20	22	23	25	26	28	30	32	33	35
T_+	36	40	43	47	50	54	20	54	58	63	67
n_1	7	7	7	7	8	8	8	9	9	10	
n_2	7	8	9	10	8	9	10	9	10	10	
T_-	39	41	43	46	52	54	57	66	69	83	
T_+	66	71	76	80	84	90	95	105	111	127	

② 两组的测量次数n_1, n_2>10：

当$n_1, n_2 > 10$ ，秩和T近似服从正态分布$N(a, \sigma)$：

$$N\left(\frac{n_1(n_1+n_2+1)}{2}, \sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1+n_2+1)}{12}}\right)$$

a为数学期望，σ为标准差，则：

$$t = \frac{T-a}{\sigma}$$

选取概率$2\Phi(t)$，由正态分布分表（附录表）查得t_α。

若：$|t| \le t_\alpha$

则无根据怀疑两组间存在系统误差。

C. t检验法

条件：当两组测量数据**服从正态分布**，或**偏离正态不大但样本数不是太少**（最好不少于20）时，可用t检验法判断两组间是否存在系统误差。

设独立测得两组数据为：$x_1, x_2, \cdots, x_{n1}$；$y_1, y_2, \cdots, y_{n1}$

令变量 $t = (\bar{x} - \bar{y})\sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1+n_2-2)}{(n_1+n_2)(n_1 S_x{}^2 + n_2 S_y{}^2)}}$

由数理统计知，变量t是服从自由度ν为(n_1+n_2-2)的t分布变量。其中

$$\bar{x} = \frac{1}{n_1}\sum x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n_2}\sum y_i$$

注意：此处不是正态分布的方差

$$S_x{}^2 = \frac{1}{n_1}\sum(x_i - \bar{x})^2, \quad S_y{}^2 = \frac{1}{n_2}\sum(y_i - \bar{y})^2$$

取显著性水平α，由t分布表（附录表）查出$P(|t| > t_\alpha) = \alpha$ 中的 t_α 。若$|t| < t_\alpha$ ，则无根据怀疑两组间有系统误差。

4. 系统误差的减小和消除

- 代替法:在测量装置上对被测量测量后不改变测量条件，立即**用一个标准量代替被测量**，放到测量装置上载进行测量，从而求出被测量或被测量和标准量的差值。
- 抵消法：这种方法**要求进行两次测量**，以便使两次读数时出现的系统误差大小相等，符号相反，取两次测得值的平均值，作为测量结果，即可消除系统误差。
- 交换法：这种方法是根据误差产生原因，**将某些条件交换**，以消除系统误差。
- 对称法：对称法是消除线性系统误差的有效方法，**将测量对称安排，取各对称点两次读数的算术平均值作为测得值**，即可消除线性系统误差。
- 半周期法：对周期性误差，可以**相隔半个周期进行两次测量**，取两次读数平均值，即可有效地消除周期性系统误差。

（三）粗大误差

1. 粗大误差产生的原因

   - 测量人员的主观原因：测量者工作责任感不强、工作过于疲劳、缺乏经验操作不当，或在测量时不小心、不耐心、不仔细等，造成错误的读数或记录。

- 客观外界条件的原因：测量条件意外地改变（如机械冲击、外界振动、电磁干扰等）。

2. 防止与消除粗大误差的方法

   如何避免粗大误差：

   - 加强测量人员的工作责任心
   - 保证测量条件的稳定

   如何消除粗大误差：

   - 采用数据校核的方法
   - 两种以上不同的测量方法

3. 判别粗大误差的准则

（1）3σ准则

实际测量中，用贝塞尔公式算得σ，以$\overline{x}$ 代替真值。对某个可疑数据x_d计算残差，若其残差满足：

$$|v_d| = |x_d - \overline{x}| > 3\sigma$$

则可认为该数据含有粗大误差，应予以剔除。

> **Example:**对某量进行15次等精度测量，测得值如下表2-11所列，设这些测得值已消除了系统误差，试判别该测量列中是否含有粗大误差的测得值。
>
> | 序号 | l | v | v^2 | v' | v'^2 |
> | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
> | 1 | 20.42 | +0.016 | 0.000256 | +0.009 | 0.000081 |
> | 2 | 20.43 | +0.026 | 0.000676 | +0.019 | 0.000361 |
> | 3 | 20.40 | −0.004 | 0.000016 | −0.011 | 0.000121 |
> | 4 | 20.43 | +0.026 | 0.000676 | +0.019 | 0.000361 |
> | 5 | 20.42 | +0.016 | 0.000256 | +0.009 | 0.000081 |
> | 6 | 20.43 | +0.026 | 0.000676 | +0.019 | 0.000361 |
> | 7 | 20.39 | −0.014 | 0.000196 | −0.021 | 0.000441 |
> | 8 | 20.30 | −0.104 | 0.010816 | —— | —— |
> | 9 | 20.40 | −0.004 | 0.000016 | −0.011 | 0.000121 |
> | 10 | 20.43 | +0.026 | 0.000676 | +0.019 | 0.000361 |
> | 11 | 20.42 | +0.016 | 0.000256 | +0.009 | 0.000081 |
> | 12 | 20.41 | +0.006 | 0.000036 | −0.001 | 0.000001 |
> | 13 | 20.39 | −0.014 | 0.000196 | −0.021 | 0.000441 |
> | 14 | 20.39 | −0.014 | 0.000196 | −0.021 | 0.000441 |
> | 15 | 20.40 | −0.004 | 0.000016 | −0.011 | 0.000121 |
> | | $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{15} l_i}{n} = 20.404$ | $\sum_{i=1}^{15} v_i = 0$ | $\sum_{i=1}^{15} v_i^2 = 0.01496$ | | $\sum_{i=1}^{15} v_i'^2 = 0.003374$ |
>
> 解：由表2-11可得 $\bar{x} = 20.404$
>
> $$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {v_i}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0.01496}{14}} = 0.033$$
>
> $$3\sigma = 3 \times 0.033 = 0.09$$
>
> 根据3σ准则，第八测得值的残余误差为：$|v_d| = 0.104 > 0.099$，即它含有粗大误差,故将此测得值剔除。再根据剩下的14个测得值重新计算，得：$\bar{x}' = 20.411$
>
> $$\sigma' = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i'^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0.003374}{13}} = 0.016$$
>
> 由表2-11知，剩下的14个测得值的残余误差均满足$|v_i'| < 3\sigma'$，故可以认为这些测得值不再含有粗大误差。

NOTE: 计算的时候要注意剔除完粗大误差后需要再计算一次标准差来检测剩余的数据中是否还有粗大误差。

（2）罗曼诺夫斯基准则（t检验准则）

首先剔除一个可疑的测得值，然后按t分布检验被剔除的值是否是含有粗大误差。设对某量作多次等精度测量，得$x_1, x_2, \cdots$，x_n，若认为测量值x_j为可疑数据，将其剔除后计算平均值为(计算时不包括x_j)：

$$\overline{x} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1, i \neq j}^{n} x_i$$

并求得测量列的标准差(不包括$v_j = x_j - \overline{x}$)：$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-2}}$

根据测量次数n和选取的显著度α，即可由表查得t分布的检验系数$K(n, \alpha)$。

若$|x_j - \overline{x}| > K\alpha$, 则认为测量值$x_j$含有粗大误差，剔除$x_j$是正确的，否则认为$x_j$不含有粗大误差，应予保留。

（3）格拉布斯准则

设对某量作多次等精度独立测量，得$x_1, x_2, \cdots x_n$, 当x_i服从正态分布时，计算得

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum x,\ v_i = x_i - \overline{x},\ \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}}$$

为了检验x_i中是否含有粗大误差，将x_i按大小顺序排列成顺序统计量$x_{(i)}$，而

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_n$$

格拉布斯导出了$g_{(n)} = \dfrac{x_{(n)} - \overline{x}}{\sigma}$及$g_{(1)} = \dfrac{\overline{x} - x_{(1)}}{\sigma}$的分布，

取定显著度α（一般为0.05或0.01），可得如表所列的临界值$g_0(n, \alpha)$。

而$P(\dfrac{x_{(n)} - \overline{x}}{\sigma}) \geq g_0(n, \alpha) = \alpha$, 以及$P(\dfrac{\overline{x} - x_{(1)}}{\sigma}) \geq g_0(n, \alpha) = \alpha$

若认为$x_{(1)}$可疑，则有$g_{(1)} = \dfrac{\overline{x} - x_{(1)}}{\sigma}$

若认为$x_{(n)}$可疑，则有$g_{(n)} = \dfrac{x_{(n)} - \overline{x}}{\sigma}$

当$g_{(i)} \geq g_0(n, \alpha)$, 即判别该测得值含有粗大误差，应予剔除。

（4）狄克松准则

设正态测量总体的一个样本$x_1, x_2, \cdots, x_n$，将x_i按大小顺序排列成顺序统计量$x_{(i)}$，即 $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$

构造检验高端异常值$x_{(n)}$和低端异常值$x_{(1)}$的统计量分别为r_{ij}和r'_{ij}，分以下几种情形：

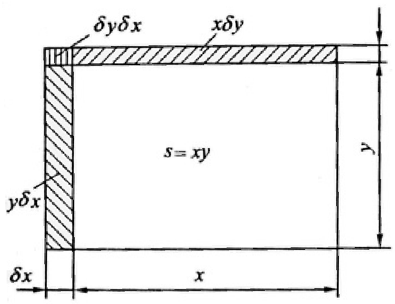
$$\begin{cases} r_{10} = \dfrac{x_{(n)} - x_{(n-1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}} \text{与} r'_{10} = \dfrac{x_{(1)} - x_{(2)}}{x_{(1)} - x_{(n)}} & n \leq 7 \\ r_{11} = \dfrac{x_{(n)} - x_{(n-1)}}{x_{(n)} - x_{(2)}} \text{与} r'_{11} = \dfrac{x_{(1)} - x_{(2)}}{x_{(1)} - x_{(n-1)}} & n: 8\sim10 \\ r_{21} = \dfrac{x_{(n)} - x_{(n-2)}}{x_{(n)} - x_{(2)}} \text{与} r'_{21} = \dfrac{x_{(1)} - x_{(3)}}{x_{(1)} - x_{(n-1)}} & n: 11\sim13 \\ r_{22} = \dfrac{x_{(n)} - x_{(n-2)}}{x_{(n)} - x_{(3)}} \text{与} r'_{22} = \dfrac{x_{(3)} - x_{(1)}}{x_{(n-2)} - x_{(1)}} & n \geq 14 \end{cases}$$

以上的$r_{10}, r'_{10}, \cdots, r_{22}, r'_{22}$ 简记为r_{ij}和r'_{ij}。狄克松导出了它们的概率密度函数，选定显著性水平α，查表得临界值 $r_0(n, a)$ 。当测量的统计值r_{ij} 或r'_{ij}大于临界值时，则认为$x_{(n)}$或$x_{(1)}$ 含有粗大误差。

三、误差的合成与分配

（一）函数误差

定义： 间接测量是 通过直接测量与被测的量有一定函数关系的其他量，按照已知的函数关系式计算出被测的量。间接测得的被测量误差也应是直接测得量及其误差的函数，故称这种间接测量的误差为函数误差

> **Example:**测量矩形的面积S，需要通过直接测量边长x 和y，按照面积公式计算出面积大小。
>
> 
>
>
> 函数误差为：$\delta_s = x\delta_y + y\delta_x + \delta_y\delta_x$

1. 函数系统误差计算

（1）函数系统误差△y的计算公式：

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n$$

这里的x_n指与被测量有函数关系的各个直接测量值

- $\partial f/\partial x_i (i=1,2,\cdots,n)$为各个输入量在该测量点$x_1,x_2,\cdots,x_n$处的误差传播系数
- Δx_i和Δy的量纲或单位相同，则$\partial f/\partial x_i$起到误差放大或缩小的作用
- Δx_i和Δy的量纲或单位不相同，则 $\partial f/\partial x_i$ 起到误差单位换算的作用

（2）几种简单函数的系统误差

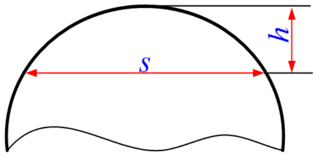
- 线性函数

$$\text{线性函数：} y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n$$
$$\text{系统误差公式：} \Delta y = a_1\Delta x_1 + a_2\Delta x_2 + \ldots a_n\Delta x_n$$
$$\text{当} a_i = 1 \quad \Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n$$

- 三角函数形式

$$sin\varphi = f(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad \Delta\varphi = \frac{1}{cos\varphi}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i$$

$$cos\varphi = f(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad \Delta\varphi = \frac{1}{-sin\varphi}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i$$

> **Example:**用弓高弦长法间接测量大工件直径。如图所示，车间工人用一把卡尺量得弓高 h = 50mm ， 弦长 s = 500mm。已知，弓高的系统误差 △h = -0.1mm ,弦长的系统误差 △s = 1mm 。试问车间工人测量该工件直径的系统误差，并求修正后的测量结果。
>
> 
>

> 解：建立间接测量大工件直径的函数模型：$D=\frac{s^2}{4h}+h$
>
> 不考虑测量值的系统误差，可求出直径测量值：$D_0=\frac{500^2}{4\times 50}+50=1300mm$
>
> 车间工人测量弓高h、弦长s的系统误差：$\Delta h=-0.1mm, \Delta s=1mm$
>
> 误差传递系数为：$\frac{\partial f}{\partial h}=-24, \frac{\partial f}{\partial s}=5$
>
> 直径的系统误差：$\Delta D=\frac{\partial f}{\partial h}\Delta h+\frac{\partial f}{\partial s}\Delta s=7.4mm$
>
> 故修正后的测量结果：$D=D_0-\Delta D=1300-7.4=1292.6mm$

2. 函数随机误差计算

$$\sigma_y^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\sigma_{x_1}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\sigma_{x_2}^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\sigma_{x_n}^2+2\sum_{1\le i<j}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\cdot\frac{\sum_{m=1}^{N}\delta_{xim}\delta_{xjm}}{N}$$

$$\sigma_y^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\sigma_{x_1}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\sigma_{x_2}^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\sigma_{x_n}^2+2\sum_{1\le i<j}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\cdot K_{ij}$$

或：$$\sigma_y^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\sigma_{x_1}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\sigma_{x_2}^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\sigma_{x_n}^2+2\sum_{1\le i<j}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\rho_{ij}\sigma_{xi}\sigma_{xj}$$

- σ_{xi} 第i个直接测得量x_i的标准差
- K_{ij} 第i个测量值和第j个测量值之间的协方差
- ρ_{ij} 第i个测量值和第j个测量值之间的相关系数$\rho_{ij}=\frac{K_{ij}}{\sigma_{xi}\sigma_{xj}}$
- $\frac{\partial f}{\partial x_i}$第i个直接测得量$x_i$对间接量$y$在该测量点处的误差传播系数

若各测量值的随机误差是相互独立的，相关项为零，则：

$$\sigma_y{}^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\sigma_{x_1}{}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\sigma_{x_2}{}^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\sigma_{x_n}{}^2$$

或：$$\sigma_y=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\sigma_{x_1}{}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\sigma_{x_2}{}^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\sigma_{x_n}{}^2}$$

令 $\frac{\partial f}{\partial x_i}=a_i$

则 $$\sigma_y=\sqrt{a_1{}^2\sigma_{x_1}{}^2+a_2{}^2\sigma_{x_2}{}^2+\cdots+a_n{}^2\sigma_{x_n}{}^2}$$

如果 $\frac{\partial f}{\partial x_i}=a_i=1$

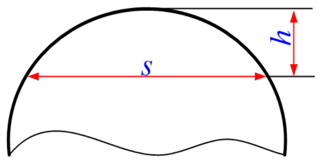
则 $$\sigma_y=\sqrt{\sigma_{x_1}{}^2+\sigma_{x_2}{}^2+\cdots+\sigma_{x_n}{}^2}$$

当各个测量值的随机误差都为正态分布时，标准差用极限误差代替，可得函数的极限误差公式:

$$\delta_{limy}=\pm\sqrt{a_1{}^2\delta_{lim_{x_1}}^2+a_2{}^2\delta_{lim_{x_2}}^2+\cdots+a_n{}^2\delta_{lim_{x_n}}^2}$$

δ_{limxi}为第i个直接测得量的极限误差。

Example:用弓高弦长法间接测量大工件直径。如图所示，车间工人用一把卡尺量得弓高 h = 50mm， 弦长 s = 500mm。已知，弓高的随机误差δ_{limh}=±0.05mm, 弦长的随机误差δ_{lims}=±0.1mm。试求测量该工件直径的标准差，并求修正后的测量结果。



$$
\begin{aligned}
&\text{解：建立间接测量大工件直径的函数模型：} D=\frac{s^2}{4h}+h \\
&\delta_{limD}=\pm\sqrt{(\frac{\partial D}{\partial s})^2\delta_{lims}^2+(\frac{\partial D}{\partial h})^2\delta_{limh}^2}=\pm\sqrt{(\frac{s}{2h})^2\delta_{lims}^2+(\frac{s}{4h^2}-1)^2\delta_{limh}^2} \\
&\quad=\pm\sqrt{(\frac{500}{2\times 50})^2\times 0.1^2+(\frac{500}{4\times 500^2}-1)^2\times 0.05^2} \\
&\quad=\pm 1.3mm \\
&\text{修正后的测量结果为：} D=1292.6mm\pm 1.3mm
\end{aligned}
$$

3. 误差间的相关关系和相关系数

（1）相关系数对函数误差的影响

$$
\text{函数随机误差公式：}\sigma_y^2=(\frac{\partial f}{\partial x_1})^2\sigma_{x_1}^2+(\frac{\partial f}{\partial x_2})^2\sigma_{x_2}^2+(\frac{\partial f}{\partial x_n})^2\sigma_{x_n}^2+2\sum_{1\le i<j}^{n}(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\rho_{ij}\sigma_{x_i}\sigma_{x_j})
$$

ρ_{ij}映了各随机误差分量相互间的线性关联对函数总误差的影响。

$$
\begin{aligned}
&\text{当相关系数}\rho_{ij}=0\text{时，}\sigma_y=\sqrt{a_1^2\sigma_{x_1}^2+a_2^2\sigma_{x_2}^2+a_n^2\sigma_{x_n}^2} \\
&\text{当相关系数}\rho_{ij}=+1\text{时，}\sigma_y=|a_1\sigma_{x_1}+a_2\sigma_{x_2}+a_n\sigma_{x_n}|
\end{aligned}
$$

NOTE: 函数标准差与各随机误差分量标准差之间具有线性的传播关系 。

（2）相关系数：两误差间有线性相关关系时，其相关性的强弱用相关系数反映。

$$
\begin{aligned}
&\text{若两误差}\xi\text{和}\eta\text{间的线性相关系数为}\rho\text{, 则有：} \\
&\qquad\rho=\frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi\sigma_\eta} \\
&\text{其中：} \\
&\qquad K_{\xi\eta}\to\text{误差}\xi\text{与}\eta\text{之间的协方差} \\
&\qquad \sigma_\xi,\sigma_\eta\to\text{分别为误差}\xi\text{和}\eta\text{的标准差} \\
&\text{相关系数的取值范围为：}-1\le\rho\le+1
\end{aligned}
$$

NOTE: 相关系数的绝对值越大，两误差的相关性越强。

（3）相关系数的确定

A 直接判断法

① 可判断ρ_{ij}=0的情形

- 当一个分量依次增大时，另一个分量**呈正负随机变化。**
- x_i与x_j属于完全不相干的两类体系分量，如人员操作引起的误差分量与环境湿度引起的误差分量 。
- x_i与x_j虽相互有影响，但其影响甚微，视为可忽略不计的弱相关 。

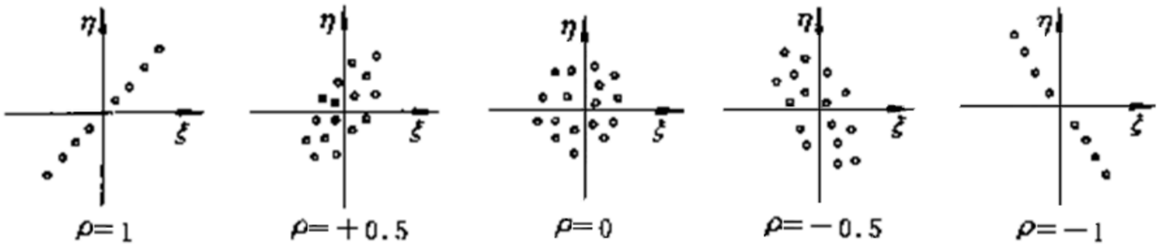
  ② 可判断ρ_{ij}=+1或ρ_{ij}=−1的情形

- 断定x_i与x_j两分量间近似呈现正的线性关系或负的线性关系 。

- 当一个分量依次增大时，引起**另一个分量依次增大或减小。**
- x_i与x_j属于同一体系的分量，比如同一工件上的两段尺寸。

  B 试样观察法和简略计算法

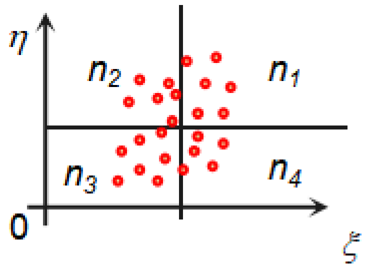
  ① 观察法：用多组测量的误差对应值（ξ_i，η_i）作图，看它与哪一图形相近，从而确定相关系数的近似值。



② 简单计算法

$$\rho \approx -\cos\left[\frac{n_1+n_3}{\sum n}\pi\right]$$

其中，$\sum n = n_1+n_2+n_3+n_4$



③ 直接计算法

根据(x_i, x_j)的多组测量的对应值(x_{ik}, x_{jk})，按如下统计公式计算相关系数

$$\rho(x_i, x_j) = \frac{\sum_k (x_{ik} - \overline{x_i})(x_{jk} - \overline{x_j})}{\sqrt{\sum_k (x_{ik} - \overline{x_i})^2 \sum_k (x_{jk} - \overline{x_j})^2}}$$

$\overline{x_i}, \overline{x_j}$分别为$x_{ik}, x_{jk}$的算数平均值

④ 理论计算法：有些误差间相关系数，可以根据概率论算出。

（二）随机误差的合成

误差合成：任何测量结果都包含有一定的测量误差，这是测量过程中各个环节一系列误差因素作用的结果。误差合成就是在正确地分析和综合这些误差因素的基础上，正确地表述这些误差的综合影响。

随机误差的合成形式：

- 标准差合成
- 极限误差合成

1. 标准差的合成

   合成标准差表达式：

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{q} (a_i \sigma_i)^2 + 2 \sum_{1 \le i < q}^{q} \rho_{ij} a_i a_j \sigma_i \sigma_j}$$

   ① σ_i为q 个单项随机误差，标准差$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_q$

   ②误差传播系数$a_1,a_2,\cdots,a_q$

   - 由间接测量的显函数模型求得$a_i=\partial f/\partial x_i$

- 根据实际经验得出
- 知道影响测量结果的误差因素（a_i σ_i）的乘积，而不知道 a_i 和 σ_i

2. 极限误差的合成

单项极限误差：$\delta_i = t_i\sigma_i \quad i = 1, 2, \ldots, q$

①σ_i单项随机误差的标准差

②t_i单项极限误差的置信系数

合成极限误差：$\delta = t\sigma$

①σ合成标准差

②t合成极限误差的置信系数

合成极限误差计算公式：

$$\delta = \pm t\sqrt{\sum_{i=1}^{q}(\frac{a_i\delta_i}{t_i})^2 + \sum_{1\leq i<j}^{q}\rho_{ij}a_ia_j\frac{\delta_j}{t_j}\frac{\delta_i}{t_i}}$$

当各个单项随机误差均服从正态分布时，各单项误差的数目q较多、各项误差大小相近和独立时，此时合成的总误差接近于正态分布。

此时当取相同的置信概率时，有：$t_1 = t_2 = \cdots = t_q = t$

合成极限误差：$\delta = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{q}(a_i\delta_i)^2 + \sum_{1\leq i<j}^{q}\rho_{ij}a_ia_j\delta_j\delta_i}$

若$\rho_{ij} = 0$和$a_i = 1$时：$\delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{q}\delta_i^2}$

（三）系统误差的合成

- 已定系统误差
- 未定系统误差

系统误差的合成方式：

- 按照标准差合成
- 按照极限误差合成

1. 已定系统误差的合成

   定义：误差大小和方向均已确切掌握了的系统误差

   表示符号：△

   合成方法：按照代数和法进行合成

$$\Delta = \sum_{i=1}^{r}a_i\Delta_i$$

   - $\triangle_i$ 为第i个系统误差，a_i为其传递系数
   - 系统误差可以在测量过程中消除，也可在合成后在测量结果中消除

2. 未定系统误差的合成

   定义：误差大小和方向未能确切掌握，或者不须花费过多精力去掌握，而只能或者只需估计出其不致超过某一范围±e的系统误差。

   特征：

   ①二重性：在测量条件不变时为一恒定值，多次重复测量时其值固定不变，因而单项系统误差在重复测量中不具有低偿性。

②随机性：当测量条件改变时，未定系统误差的取值在某极限范围内具有随机性，且服从一定的概论分布，具有随机误差的特性。

表示符号：标准差：u　极限误差：e

（1）标准差合成

若测量过程中有s个单项未定系统误差，它们的标准差分别为$u_1,u_2,\cdots,u_s$，其相应的误差传递系数为$a_1,a_2,\cdots,a_s$，则合成后未定系统误差的总标准差u为:

$$u=\sqrt{\sum_{i=1}^{s}(a_iu_i)^2+2\sum_{1\le i<j}^{s}\rho_{ij}a_ia_ju_iu_j}$$

（2）极限误差的合成

因为各个单项未定系统误差的极限误差为:

$$e_i=\pm t_iu_i\quad i=1,2,\ldots,s$$

若总的未定系统误差极限误差表示为:

$$e_i=\pm tu$$

则由各单项未定系统误差标准差得到的合成未定系统误差极限误差为:

$$u=\pm t\sqrt{\sum_{i=1}^{s}(a_iu_i)^2+2\sum_{1\le i<j}^{s}\rho_{ij}a_ia_ju_iu_j}$$

或者，由各单项未定系统误差极限误差得到的合成未定系统误差极限误差为:

$$u=\pm t\sqrt{\sum_{i=1}^{s}(\frac{a_ie_i}{t_i})^2+2\sum_{1\le i<j}^{s}\rho_{ij}a_ia_j\frac{e_i}{t_i}\frac{e_j}{t_j}}$$

当各个单项未定系统误差均服从正态分布，且相互间独立无关，即$\rho_{ij}=0$，则上式可简化为:

$$e=\pm\sqrt{\sum_{i=1}^{s}(a_ie_i)^2}$$

（四）系统误差与随机误差的合成

误差的合成形式:

- 按极限误差误差形式合成
- 按标准差形式合成

1. 按照极限误差的形式合成

测量过程中，假定有 r 个单项已定系统误差，s 个单项未定系统误差，q 个单项随机误差。它们的误差值或极限误差分别为:

$$\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_r$$
$$e_1\ ,e_2\ ,\cdots,\ e_s$$
$$\delta_1\ ,\delta_2\ ,\cdots,\ \delta_q$$

若各个误差的传递系数取 1，则测量结果总的极限误差为:

$$\Delta_{总} = \sum_{i=1}^{r} \Delta_i \pm \sqrt{\sum_{i=1}^{s} (\frac{e_i}{t_i})^2 + \sum_{i=1}^{q} (\frac{\delta_i}{t_i})^2 + R}$$

式中，R为各个误差之间的协方差之和

当各个误差均服从正态分布，且各个误差间互不相关时，测量结果总的极限误差可简化为：

$$\Delta_{总} = \sum_{i=1}^{r} \Delta_i \pm \sqrt{\sum_{i=1}^{s} {e_i}^2 + \sum_{i=1}^{q} {\delta_i}^2}$$

一般情况下，**已定系统误差经修正后**，测量结果总的极限误差就是总的未定系统误差与总的随机误差的均方根值，即：

$$\Delta_{总} = \sqrt{\sum_{i=1}^{s} {e_i}^2 + \sum_{i=1}^{q} {\delta_i}^2}$$

NOTE:n次重复测量情况

当每项误差都进行n次重复测量时，由于**随机误差间具有低偿性、系统误差（包括未定系统误差）不存在低偿性**，总误差合成公式中的随机误差项应除以重复测量次数n 。

$$\Delta_{总} = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{s} {e_i}^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{q} {\delta_i}^2}$$

2. 按标准差合成（只需要考虑**未定系统误差**与**随机误差**的合成）

①单次测量情况

测量过程中，假定有 s 个单项未定系统误差，q 个单项随机误差，它们的标准差分别为：

$$u_1, u_2, \cdots, u_s$$
$$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_q$$

若各个误差的传递系数取 1，则测量结果总的极限误差为：

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{s} u_i^2 + \sum_{i=1}^{q} \sigma_i^2 + R}$$

式中，R为各个误差之间的协方差之和。

当各个误差均服从正态分布，且各个误差间互不相关时，测量结果总标准差为：

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{s} u_i^2 + \sum_{i=1}^{q} \sigma_i^2}$$

② n 次重复测量情况

当每项误差都进行n次重复测量时，由于随机误差间具有低偿性、系统误差（包括未定系统误差）不存在低偿性，总误差合成公式中的随机误差项应除以重复测量次数n 。

$$\sigma = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{s} u_i^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{q} \sigma_i^2}$$

> **Example：**用TC328B型天平，配用三等标准砝码称一不锈钢球质量，一次称量得钢球质量M=14.0040g，求测量结果的标准差。

> 解：根据$TC328B$型天平的称重方法，其测量结果的主要误差如下：
> (1)随机误差：天平示值变动性所引起的误差为随机误差。用多次重复称量同一球的质量，
> 得天平标准差为$\sigma_1=0.05mg$
> (2)未定系统误差：标准砝码误差和天平示值误差，在给定条件下为确定值，但又不知道具体误差数值，
> 而只知道误差范围（或标准差），故这两项误差均属未定系统误差。
> ①砝码误差：天平称量时所用的标准砝码有三个，即$10g$的一个，$20g$的两个，
> 标准差分别为：$u_{11}=0.4mg,u_{12}=0.2mg$故三个砝码组合使用时，质量的标准差为：
> $$u_1=\sqrt{u_{11}^2+2u_{12}^2}=\sqrt{0.4^2+2\times0.2^2}mg\approx0.5mg$$
> 天平示值误差：该项标准差为：$u_2\approx0.03mg$
> 估计总误差时，三项误差互不相关，且各个误差传播系数均为1，
> 因此误差合成后可得到测量结果的总标准差为：
> $$\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+u_1^2+u_2^2}=\sqrt{0.05^2+0.5^2+0.03^2}\approx0.5mg$$
> 最后测量结果应表示为（ 1 倍标准差）：
> $$M=14.0040\pm0.0005g$$

NOTE: 在实际测量中进行误差合成需考虑的问题：

① 误差性质的确定；

② 误差所遵循分布规律的确定；

③ 各分项误差间相关程度的确定；

④ 分项误差的划分及项数的确定。

(五) 误差分配

- 按等作用原则分配误差
- 按可能性调整误差
- 验算调整后的总误差

1. 按等作用原则分配误差

   等作用原则：各分项误差对函数误差的影响相等，即

$$\sigma_{y_1}=\sigma_{y_2}=\ldots=\sigma_{y_n}=\frac{\sigma_y}{\sqrt{n}}$$

   由此可得：

$$\sigma_i=\frac{\sigma_y}{\sqrt{n}}\frac{1}{\partial f/\partial x_i}=\frac{\sigma_y}{\sqrt{n}}\frac{1}{a_i}$$

   或用极限误差表示：

$$\delta_i=\frac{\delta}{\sqrt{n}}\frac{1}{\partial f/\partial x_i}=\frac{\delta}{\sqrt{n}}\frac{1}{a_i}$$

   - δ：函数的总极限误差
   - δ_i：各单项误差的极限误差

   按等作用原则分配误差的不合理性：

   ① 没有考虑难易程度。对各分项误差平均分配的结果，会造成对部分测量误差的需求实现颇感容易，而对另一些测量误差的要求难以达到。这样，势必需要用昂贵的高准确度等级的仪器，或者以增加测量次数及测量成本为代价。

② 没有考虑传递系数的影响。当各个部分误差一定时，则相应测量值的误差与其传播系数成反比。所以各个部分误差相等，相应测量值的误差并不相等，有时可能相差较大。

在等作用原则分配误差的基础上，根据具体情况进行适当调整。**对难以实现测量的误差项适当扩大，对容易实现的误差项尽可能缩小，其余误差项不予调整。**

2. 验算调整后的总误差

误差按等影响原理确定后，应按照误差合成公式计算实际总误差，若超出给定的允许误差范围，应选择可能缩小的误差项再进行缩小。若实际总误差较小，可适当扩大难以实现的误差项的误差，合成后与要求的总误差进行比较，直到满足要求为止。

> **Example:**
>
> 【例3-7】测量一圆柱体的体积时，可间接测量圆柱直径D及高度h,根据函数式
>
> $$V=\frac{\pi D^2}{4}h$$
>
> 求得体积V，若要求测量体积的相对误差为1%，已知直径和高度的公称值分别为$D_0=20mm$，$h_0=50mm$,试确定直径D及高度h的准确度。
>
> 【解】计算体积V_0
>
> $$V_0=\frac{\pi D_0^2}{4}h_0=\frac{3.1416\times 20^2}{4}\times 50=15708mm^3$$
>
> 体积的绝对误差：
>
> $$\delta_V=V_0\times 1\%=15708mm^3\times 1\%=157.08mm^3$$
>
> 一、按等影响分配原则分配误差
>
> 得到测量直径D与高度h的极限误差：
>
> $$\delta_D=\frac{\delta_V}{\sqrt{n}}\frac{1}{\partial V/\partial D}=\frac{\delta_V}{\sqrt{n}}\frac{2}{\pi Dh}=0.071mm$$
>
> $$\delta_h=\frac{\delta_V}{\sqrt{n}}\frac{1}{\partial V/\partial h}=\frac{\delta_V}{\sqrt{n}}\frac{4}{\pi D^2}=0.351mm$$
>
> 查资料，可用分度值为0.1mm的游标卡尺测高h=50mm，在50mm测量范围内的极限误差为0.150mm, 用分度值为0.02mm的游标卡尺测直径D =20mm,在20mm范围内的极限误差为0.04mm。
>
> 用这两种量具测量的体积极限误差为
>
> $$\delta_V=\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2\delta_D{}^2+\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2\delta_h{}^2}=78.54mm$$
>
> 因为$|\delta_V|=78.54mm^3<157.08mm^3$

二、调整后的测量极限误差

显然采用的量具准确度偏高，选得不合理，应作适当调整。若改用分度值为0.05mm的游标卡尺来测量直径和高度，在50mm测量范围内的极限误差为0.08mm。此时测量直径的极限误差虽超出按等作用原则分配所得的允许误差，但可从测量高度允许的多余部分得到补偿。

调整后的实际测量极限误差为：

$$\delta_V = \sqrt{\left(\frac{\pi Dh}{2}\right)^2 \delta_D{}^2 + \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2 \delta_h{}^2} = 128.15mm$$

因为$|\delta_V| = 128.15mm^3 < 157.08mm^3$

因此调整后用一把游标卡尺测量直径和高度即能保证测量准确度。

（六）微小误差取舍准则

微小误差： 测量过程包含有多种误差时，当某个误差对测量结果总误差的影响，可以忽略不计的误差称为微小误差。

① 测量误差的有效数字取一位时

某项部分误差舍去后，满足：

$$D_k \leq (0.4 \sim 0.3)\sigma_y \quad or \quad D_k \leq \frac{1}{3}\sigma_y$$

则对测量结果的误差计算没有影响。

② 测量误差的有效数字取二位时

某项部分误差舍去后，满足：

$$D_k \leq (0.14 \sim 0.1)\sigma_y \quad or \quad D_k \leq \frac{1}{10}\sigma_y$$

对于**随机误差和未定系统误差**，微小误差舍区准则是被舍去的误差**必须小于或等于测量结果的十分之一到三分之一**。对于**已定系统误差，按百分之一到十分之一原则取舍。**

应用惯例：

计算总误差或进行误差分配时，若发现有微小误差，可不考虑该项误差对总误差的影响。
选择高一级精度的标准器具时，其误差一般应为被检器具允许误差的1/10～3/10。
一般，随机误差按1/3，未定系统误差按1/10 。

（七）最佳测量方案的确定

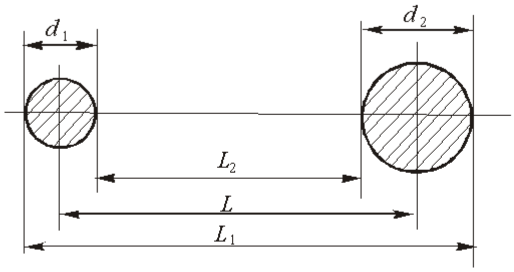
1. 考虑因素： 因为已定系统误差可以通过误差修正的方法来消除，所以设计最佳测量方案时，**只需考虑随机误差和未定系统误差的影响。**
2. 研究对象和目标：

   研究间接测量中使函数误差为最小的最佳测量方案。函数的标准差为：

$$\sigma_y = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x_1})^2\sigma_{x_1}^2 + (\frac{\partial f}{\partial x_2})^2\sigma_{x_2}^2 + \ldots + (\frac{\partial f}{\partial x_n})^2\sigma_{x_n}^2}$$

① 间接测量中如果可由不同的函数公式来表示，则应选取包含直接测量值最小的函数公式。

② 不同的数学公式所包含的直接测量值数目相同，则应选取误差较小的直接测量值的函数公式。

> **Example**：用分度值为0.05mm游标卡尺测量两轴的中心距L，试选择最佳测量方案。已知测量的标准差分别为:σ_{d1}=0.5μm σ_{d2}=0.7μm σ_{L1}=0.8μm σ_{L2}=1.0μm
>
> 
>
>
> 解：测量中心距L有下列三种方法：
>
> 方法一：测量两轴直径d_1、d_2和外尺寸L_1，其函数式及误差为：
>
> $$L = L_1 - \frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2} \quad \sigma_L = \sqrt{0.8^2 + (\frac{1}{2})^2 0.5^2 + (\frac{1}{2})^2 0.7^2} = 0.91\mu m$$
>
> 方法二：测量两轴直径d_1、d_2和外尺寸L_2，其函数式及误差为：
>
> $$L = L_2 + \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} \quad \sigma_L = \sqrt{1.0^2 + (\frac{1}{2})^2 0.5^2 + (\frac{1}{2})^2 0.7^2} = 1.09\mu m$$
>
> 方法三：测量内尺寸$L2$和外尺寸$L2$，其函数式及误差为：
>
> $$L = \frac{L_1}{2} + \frac{L_2}{2} \quad \sigma_L = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 0.8^2 + (\frac{(}{1})(2))^2 1.0^2} = 0.64\mu m$$
>
> 由计算结果可知，方法三误差最小，方法二误差最大，这是因为方法三的函数式最简单，而方法二包含的直接量较多。

四、测量不确定度

（一）测量不确定度的基本概念

1. 概述

① 测量不确定度的必要性：误差概念和误差分析在用于评定测量结果时，有时显得既不完备，也难于操作。 需要寻求一种更为完备合理、可操作性强的评定测量结果的方法。 ➜ 测量不确定度

② 不确定度的由来（见书）

③不确定度的应用领域

A. 一些产品生产过程中的质量检测、质量保证与控制，以及商品流通领域中的商品检验等有关质量监督、质量控制和建立质量保证体系的质量认证活动；

B. 建立、保存、比较溯源于国家标准的各级标准、仪器和测量系统的校准、检定、封缄和标记等计量确认活动；

C. 基础科学和应用科学领域中的研究、开发和试验，以及实验室认可活动；

D. 科学研究与工程领域内的测量，以及与贸易结算、医疗卫生、安全防护、环境与资源监测等有关的其他测量活动；

E. 用于对可以用单值和非单值表征被测量的测量结果的评定，以及对测量和测量器具的设计和合格评定。

2. 测量不确定度的定义

① 测量不确定度的定义：测量结果变化的不肯定，是表征被测量的真值在某个量值范围的一个估计，是测量结果含有的一个参数，用以表示被测量值的分散性。

$$\text{测量结果} = \text{被测量的估计值} + \text{不确定度}$$
$$Y = y \pm U$$

② 不确定度的意义：测量不确定度是对测量结果质量的的定量表征，测量结果附有不确定度才是完整并有意义。测量不确定度的大小在一定程度上表明了测量结果的可用性。

观测值的概念：在不确定度的定义中的“被测量之值”理解为“测得值”。测得值”有时也称为“观测值”。是指从一次观测中由测量仪器或量具的显示装置中所得到的单一值。一般地说，它并不是测量结果。

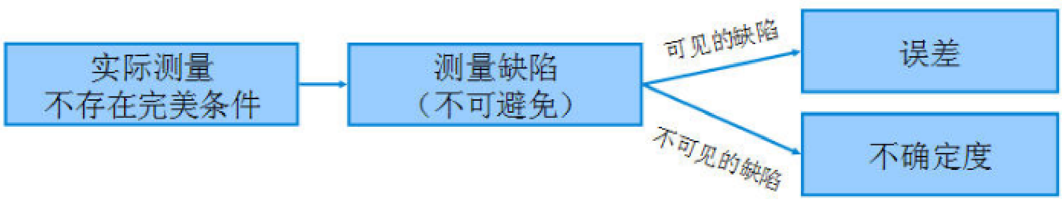
测量结果的定义：由测量所得到的赋予被测量的值。测量结果仅仅是被测量的最佳估计值，并非真值。（完整表述测量结果时，必须附带其测量不确定度。）

3. 测量不确定度与误差

① 测量误差：“测量结果减去被测量的真值”，**误差应该是一个确定的值**，是客观存在的测量结果与真值之间差。但由于真值往往不知道，故**误差无法准确得到。**

② 误差在使用上存在的问题

- 概念上的问题：根据误差的定义，要得到误差就必须知道真值。但真值由无法得到，因此，**严格意义上的误差也是无法得到的。**
- 评定方法的问题：在误差评定时，为随机误差和系统误差两类，两种误差界限不够清晰。



③ 误差与不确定度的区别

序号	内容	测量误差	测量不确定度
1	定义	表明测量结果偏离真值的程度，是一个确定的值	表明被测量之值的分散性，是一个区间。用标准偏差、标准偏差的倍数，或说明了置信水准的区间的半宽度来表示。
2	分类	按照出现在测量结果中的规律，分为随机误差和系统误差，他们都是无限多次测量的理想概念	按照是否用统计方法评定，分为A类评定和B类评定，他们都以标准不确定度表示； 评定测量不确定度时，不必区分其性质
3	可操作性	测量误差的值不可知，当采用约定真值代替真值时得到的是测量误差的估计值。 可操作性差	测量不确定度可以由人们根据实验、资料、经验等信息进行评定。 可以定量地操作

序号	内容	测量误差	测量不确定度
4	合成方法	按照误差分类选取不同的合成方法	各分量相互独立时，用方和根法合成，否则应考虑相关项。
5	符号	非正即负(或0)，不能用±表示。	无符号，恒取正值。
6	结果修正	已知系统误差估计值时，可以进行修正。	不能用测量不确定度修正测量结果。
7	结果说明	误差是客观存在的，不因人的认识程度不同而不同，误差属于给定的测量结果，相同的测量结果具有相同的误差，而与得到该结果的测量仪器和测量方法无关。	测量不确定度与人们对被测量、影响量以及测量过程的认识有关。合理地赋予被测量的一个值。
8	相互关系	测量误差仅与测量结果和真值有关，与测量方法无关，测量误差是测量得到的。	测量不确定度仅与测量方法有关，而与具体测量值的大小无关； 测量不确定度是分析得到的，有时还要辅以实验。

二者的联系：

- 测量结果的精度评定数
- 所有的不确定度分量都用标准差表征，由随机误差或系统误差引起
- 误差是不确定度的基础

二者的区别：

- 误差以真值或约定真值为中心，不确定度以被测量的估计值为中心
- 误差一般难以定值，不确定度可以定量评定
- 误差有三类，界限模糊，难以严格区分；测量不确定度分两类，简单明了

（二） 标准不确定度的评定

- 标准不确定度的A类评定
- 标准不确定度的B类评定
- 自由度及其确定

1. 标准不确定度的A类评定：**用标准差表征的不确定度，用u表示**

$$u = \sigma$$
$$\text{被测量}X\text{的估计值}=\text{单次测量值}x\text{：}u = \sigma$$
$$\text{被测量}X\text{的估计值}=\text{算术平均值}x\text{：}u = \sigma/\sqrt{n}$$

2. 标准不确定度的B类评定：**基于其他估计概率分布或分布假设来评定标准差并得到不确定度**

① B类评定的依据：

- 以前的测量数据、经验和资料；
- 有关仪器和装置的一般知识、制造说明书和检定证书或其他报告所提供的数据；
- 由手册提供的参考数据等。

② 常见情况的B类评定

A. 当估计值受**多个独立因素**的影响，且**影响大小相近**时，可假设为**正态分布**

$$U_x = \frac{a}{k_p}$$

B. 当估计值取自相关资料，所给出的测量不确定度U_X为标准差的k倍时

$$u_x = \frac{a}{k}$$

C. 若x服从**均匀分布**，即若在区间（x−a, x+a ）内的概率为1，且在各处出现的机会相等，则

$$u_x = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

D. 当x受到两个独立且皆满足均匀分布的因素影响时，则x服从区间为（ x−a, x+a ）内的**三角分布**

$$u_x = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

E. 当x服从区间（ x−a, x+a ）内的**反正弦分布**时，则其标准不确定度为

$$u_x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

3. 自由度及其确定

① 自由度概念：将不确定度计算表达式中总和所包含的总项数减去各项之间存在的约束条件数所得的差值，用 v 表示

意义：反映不确定度评定的质量，自由度越大，标准差越可信赖，不确定度评定质量越好。

② 自由度的确定

A. A类评定的自由度:

$$Bessel\text{公式：}\nu = n - 1$$

B. B类评定的自由度:（见P86表）

$$v = \frac{1}{2(\frac{\sigma_u}{u})^2}$$

（三）测量不确定度的合成

- 合成标准不确定度
- 展伸不确定度
- 不确定度的报告

1. 合成标准不确定度

① U_c的确定步骤

第一步 **明确**影响测量结果的多个**不确定度分量**;
第二步 **确定**各分量与测量结果的传递关系和它们之间的**相关系数**;
第三步 给出各分量标准不确定度;
第四步 按**方和根法合成。**

② U_c的合成

例如，间接测量中，设各直接测得量x_i的标准不确定度为U_{xi}，它对被测量的传递系数为$\frac{\partial f}{\partial x_i}$

若：$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_N)$，则由$x_i$引起的被测量$y$的不确定度分量为

$$u_i = |\frac{\partial f}{\partial x_i}| u_{x_i}$$

而测量结果y的标准不确定度U_c可用下式表征

$$u_c = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(\frac{\partial f}{\partial x_i})^2 (u_{xi})^2 + 2\sum_{1 \le i \le j}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\rho_{ij} u_{x_i} u_{x_j}}$$

其中，ρ_{ij}为任意两个直接测量值x_i, x_j不确定度的相关系数。
结果表示：$Y = y \pm u_c$

2. 展伸不确定度

① 展伸不确定度的提出：**标准不确定度，合成标准不确定度的置信概率仅为68%！**

正态分布情况下某些k值的置信水平

P(%)	50	68.27	90	95	99
Kp	0.67	1	1.645	1.96	2.576

② 展伸不确定度的评定

$$U = ku_c$$

$$\text{其中，包含因子}k\text{由}t\text{分布的表格给出，即}k = t_p(\nu)$$

NOTE: 式中，v是合成不确定度u_c的自由度。

当各不确定度分量相互独立时，按下式合成自由度：

$$v = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4}{v_i}}$$

当自由度无法按上式计算时，取 k=2~3

测量结果：Y = y ± U

3. 不确定度报告

① 报告的基本内容：当测量不确定度用标准不确定度时，应给出合成标准不确定度u_c及其自由度v；测量不确定度用展伸不确定度表示时，除了给出展伸不确定度U外，还应该说明它计算时所依据的合成不确定度u_c、自由度v、置信概率p和包含因子k值。

② 测量结果的表示

用U_c表示:

a. $y = 100.02147g, u_c = 0.35mg, v = 9$

b. $Y = 100.02147(35)g, v = 9$

c. $Y = 100.02147(0.00035)g, v = 9$

d. $Y = (100.02147 \pm 0.00035)g, v = 9$

用展伸不确定度U表示:与d的表示形式相同，为避免混淆，应给出相应说明，例如给出包含因子k值或者置信概率p值。

$$Y = (100.02147 \pm 0.00079)g,\ u_c = 0.35mg,\ k = 2.26$$

相对不确定度的表示形式

$$y = 100.02147g,\ u_c = 0.00035$$

③ 注意事项

A. 有效数字一般不超过两位

B. 不确定度数值与被测量的估计值末位对齐

C. 误差末位之后数按"三分之一准则"取舍修约

（四）测量不确定度应用实例

- 测量不确定度计算步骤
- 体积测量不确定度计算
- 电压测量不确定度计算

- 粘度测量不确定度计算
- 量块校准不确定度计算

1. 测量不确定度计算步骤

   A. 列出主要分量

   B. 计算各分量的传递系数

   C. 评定标准不确定度分量，给出自由度

   D. 分析各相关系数

   E. 求U_c和自由度，若有必要，给出展伸不确定度U

   F. 给出不确定度报告

2. 体积测量不确定度计算

> **Example：** 测某一圆柱体的体积?
> 由分度值为0.01mm的测微仪重复测量直径D和高度h各6次，数据如下：
>
> | D_i/mm | 10.075 | 10.085 | 10.095 | 10.060 | 10.085 | 10.080 |
> |---|---|---|---|---|---|---|
> | h_i/mm | 10.105 | 10.115 | 10.115 | 10.110 | 10.110 | 10.115 |
>
> 解：（1）计算D，h的平均值，求 V 的估计值
>
> $$V=\frac{\pi\overline{D}^2}{4}\overline{h}=806.8mm^3$$
>
> （2）不确定度的评定
>
> ①D的测量重复性引起的标准不确定度分量
>
> $$\text{因为} u_D=\sigma_D=0.0048mm,\frac{\partial V}{\partial D}=\frac{\pi D}{h},\text{则}$$
> $$u_1=|\frac{\partial V}{\partial D}|u_D=0.77mm^3,v_1=6-1=5$$
>
> ② h的测量重复性引起的标准不确定度分量
>
> $$\text{因为} u_h=\sigma_h=0.0026mm,\frac{\partial V}{\partial h}=\frac{\pi D^2}{4},\text{则}$$
> $$u_2=|\frac{\partial V}{\partial h}|u_h=0.21mm^3,v_2=6-1=5$$
>
> ③ 测微仪的示值误差引起的标准不确定度分量
>
> （仪器说明书：测微仪的示值误差范围 ±0.01mm）
>
> $$\text{取均匀分布，} u_{\text{仪}}=\frac{0.01}{\sqrt{3}}=0.0058mm,\text{则}$$
> $$u_3=\sqrt{(|\frac{\partial V}{\partial D}|u_{\text{仪}})^2+(|\frac{\partial V}{\partial h}|u_{\text{仪}})^2}=1.04mm^3$$
>
> 设相对标准差σ_{u3}/u_3=35%,对应自由度为
>
> $$v_3=\frac{1}{2\times(0.35)^2}=4$$
>
> （3）不确定度合成

因$\rho_{ij}=0$，则体积测量的合成标准不确定度

$$u_c=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}=1.3mm$$

其自由度为

$$v=\frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^{3}\frac{u_i^4}{v_i}}=7.86,\text{取}v=8$$

（4）展伸不确定度

取置信概率P = 0.95，查 t 分布表得包含因子k=$t_{0.95}$(8)=2.31。于是，体积测量的展伸不确定度为

$$U=ku_c=3.0mm^3,v=8$$

3. 电压测量不确定度计算

Example： 测直流电压源的输出电压：标准条件，标准数字电压表，10次，测得值（V）：10.000107,10.000103,10.000097,10000111, 10.000091,10.000108,
10.000121,10.000101,
10.000110, 10.000094

解：（1）计算电压估计量

$$\overline{V}=10.000104$$

（2）不确定度评定

① 标准电压表示值稳定度引起的标准不确定度分量

$$\text{已知}24h\text{内该测点的示值稳定度不超过}\pm15\mu V,\text{取均匀分布，则}$$
$$u_1=\frac{15}{\sqrt{3}}=8.7\mu V,v_1=\infty$$

u_1只有一个值，其标准差σ_u为零，则相对标准差为零，由公式得到∞ 。

② 标准电压表示值误差引起的标准不确定度分量

$$\text{检定证书：示值误差按3倍标准差计算为，}3.5\times10^{-6}\times U(\text{示值}),\text{则}$$
$$u_2=\frac{3.5\times10^{-6}\times10}{3}=11.7\mu V,v_2=\infty$$

③ 电压测量重复性引起的标准不确定度分量

$$\text{由贝塞尔公式计算得}\sigma=9\mu V,\sigma_{\overline{V}}=2.8\mu V$$
$$u_3=\sigma_{\overline{V}}=2.8\mu V,v_3=10-1=9$$

（3）不确定度合成

$$u_c=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}=14.85\approx15\mu V$$

$$v=\frac{u_c^2}{\sum_{i=1}^{3}\frac{u_i^4}{v_i}}=7412$$

（4）展伸不确定度

取P = 0.95，v=7412，查t分布表得包含因子k=1.96，电压测量的展伸不确定度为

$$U=ku_c=29.4\mu V\approx30\mu V$$

（5）不确定度报告

> 电压测量的展伸不确定度U=ku_c=30μV，是由合成标准不确定度u_c=15μV，及包含因子k=1.96 确定。

4. 粘度测量不确定度计算

> **Example：** 测某液体粘度，先用标准粘度油和高精度计时秒表标定粘度计常数c，然后将被测液体通过该粘度计，由η=ct计算液体粘度。
>
> 解：（1）不确定度评定
>
> ① 温度变化引起的标准不确定度分量
>
> 液体粘度随温度增高而减小，控温(20±0.01)℃，在此温度条件下，粘度测量的相对误差为0.025%（对应于3σ）
>
> $$u_1 = \frac{0.025\%}{3} = 0.008\%$$
>
> ② 粘度计体积变化引起的标准不确定度分量
>
> 已知：由此引起的粘度测量的相对误差为0.1%（对应于3σ）
>
> $$u_2 = \frac{0.1\%}{3} = 0.033\%$$
>
> ③ 时间测量引起的标准不确定度分量
>
> $$u_3 = \frac{0.2\%}{3} = 0.067\%$$
>
> ④ 粘度计倾斜引起的标准不确定度分量
>
> $$u_4 = \frac{0.02\%}{3} = 0.007\%$$
>
> ⑤ 空气浮力引起的标准不确定度分量
>
> $$u_5 = \frac{0.03\%}{3} = 0.010$$
>
> （2）不确定度合成
>
> $$u_c = \sqrt{\sum_{i=1}^{5} u_i^2} = 0.076\%$$
>
> （3）展伸不确定度
>
> 因各个不确定度分量和合成标准不确定度的误差范围皆为3σ，故取k=3，则展伸不确定度为
>
> $$U = ku_c = 3 \times 0.076\% = 0.23\%$$
>
> （4）不确定度报告
>
> 粘度测量的展伸不确定度U=ku_c=0.23%，是由合成标准不确定度u_c=0.076%，及包含因子k=3 确定。

5. 量块校准不确定度计算

> **Example：**

例4：量块校准的不确定度计算

1、测量方法：在比较仪上对被校准量块进行5次测量，考虑温度的影响，经推导得测量的数学模型为

$$l = f(l_s, \Delta l, \delta_\alpha, \delta_t) = l_s + \Delta l - l_s(\Delta t\delta_\alpha + \alpha_s\delta_t)$$

2、被校准量块20℃时得长度为：$\bar{l} = 50.000838mm$

3、不确定度评定

（1）标准量块的校准不确定度引起得不确定度分量

由标准量块的校准证书测量19次，得

$$l_s = 50.000623mm, u(l_s) = 25nm$$

$$u_1 = \left|\frac{\partial f}{\partial l_s}\right| u(l_s) = u(l_s) = 25nm, \nu_1 = 19 - 1 = 18$$

（2）长度差测量不确定度$u(\Delta l)$引起得不确定度分量

分析：

$$u(\Delta l)\begin{cases} u(\Delta l_1)\text{测量重复性引起} \\ u(\Delta l_2)\text{比较仪示值误差引起} \end{cases}$$

A、已知：比较仪的25次观测值得$\sigma = 13\text{nm}$

$$u(\Delta l_1) = \frac{13}{\sqrt{5}} = 5.8nm, \nu(\Delta l_1) = 25 - 1 = 24$$

B、检定证书：比较仪的示值误差为$\pm 23nm$(按3σ计算)

$$u(\Delta l_2) = \frac{23}{3} \approx 7.7nm, \nu(\Delta l_2) = \frac{1}{2\times(25\%)^2} = 8$$

$$u(\Delta l) = \sqrt{u(\Delta l_1)^2 + u(\Delta l_2)^2} = 9.7nm$$

则由$u(\Delta l)$引起得不确定度分量为

$$u_2 = \left|\frac{\partial f}{\partial \Delta l}\right| u(\Delta l) = u(\Delta l) = 9.7nm$$

$$\nu_2 = \nu(\Delta l) = \frac{u(\Delta l)^4}{\frac{u(\Delta l_1)^4}{\nu(\Delta l_1)} + \frac{u(\Delta l_2)^4}{\nu(\Delta l_2)}} = 18$$

（3）热膨胀系数之差的不确定度引起的不确定度分量已知:δ_α的变化界限为$\pm 1 \times 10^{-6}/℃$,均匀分布，相对标准差为10%

$$u(\delta_\alpha) = \frac{1\times 10^{-6}}{\sqrt{6}} = 0.58\times 10^{-6}/℃$$

$$u_4 = \left|\frac{\partial f}{\partial \delta_\alpha}\right| u(\delta_\alpha) = |l_s\Delta t| u(\delta_\alpha) = 50\times 0.1\times 0.58\times 10^{-6} = 2.9nm$$

$$\nu_3 = \nu(\delta_\alpha) = \frac{1}{2\times(10\%)^2} = 50$$

（4）温度差的不确定度引起的不确定度分量

已知：实际温差等概率落于± 0.05℃，相对标准差为50%

$$u(\delta_t) = \frac{0.05}{\sqrt{3}} = 0.029℃$$

$$u_4 = \left|\frac{\partial f}{\partial \delta_t}\right| u(\delta_t) = |l_s \alpha_s| u(\delta_t) = 50 \times 11.5 \times 10^{-6} \times 0.029 = 16.6nm$$

$$\nu_4 = \nu(\delta_t) = \frac{1}{2 \times (0.50)^2} = 2$$

五、线性测量的参数最小二乘法处理