第一章 数值分析与科学计算引论

p:准确值；$\hat{p}$:近似值

绝对误差 $E_p = |p-\hat{p}|$

相对误差 $E_r = |\frac{p-\hat{p}}{p}|$

误差限$|\hat{p}-p| <= \epsilon$

相对误差限$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{|\hat{p}|}$

绝对误差限 $\hat{\epsilon} = 1/2 \times 10^{m-n+1}$ （近似数具有n位有效数字）

四则运算误差限

$\epsilon(\hat{p_1}+\hat{p_2}) <= \epsilon(\hat{p_1}) + \epsilon(\hat{p_2})$

$\epsilon(\hat{p_1}\hat{p_2}) \approx |\hat{p_1}|\epsilon(\hat{p_2}) + |\hat{p_2}|\epsilon(\hat{p_1})$

$\epsilon(\frac{\hat{p_1}}{\hat{p_2}}) \approx \frac{|\hat{p_1}|\epsilon(\hat{p_2})+|\hat{p_2}|\epsilon(\hat{p_1})}{|\hat{p_2}|^2}$

函数误差限

$\epsilon(f(\hat{p})) \approx |f\prime(\hat{p})|\epsilon(\hat{p})$

有效数字与相对误差限关系：

近似数$\hat{p} = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \ldots + a_i \times 10^{-(i-1)})$，设$\hat{p}$有n位有效数字，则其相对误差限：

$|\frac{p-\hat{p}}{p}| <= \epsilon_r <= \frac{10^{1-n}}{2a_1}$

Horner's Method（秦九韶算法） $P_n(x) := \sum_{i=0}^n a_i x^i, b_n := a_n, b_k = a_k + cb_{k+1} \Rightarrow b_0 = P(c)$

分段三次埃尔米特插值： $I_h(x) = (\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}})^2(1+2\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k})f_k + (\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k})^2(1+2\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}})f_{k+1} + (\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}})^2(x-x_k)f_k' + (\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k})^2(x-x_{k+1})f_{k+1}'$

$\max_{a\le x\le b}|f(x)-I_h(x)| \le \frac{h^4}{384}\max_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)|, h = \max_{0\le k\le n-1}(x_{k+1}-x_k)$

十一、切比雪夫多项式递推关系

$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$
$(n=1,2,\cdots)$
$T_0(x) = 1, T_1(x) = x$

十二、切比雪夫多项式性质

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0, & n \neq m; \\ \frac{\pi}{2}, & n = m \neq 0; \\ \pi, & n = m = 0; \end{cases}$$

第2章：

多项式插值问题： $P(x_i) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = y_i$

拉格朗日插值： $L_n(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x)\cdot y_k$

基函数$l_k(x) = \prod_{j=0,j\neq k}^n \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$

$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x-x_i)$

$L_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \prod_{j=0,j\neq k}^n (x-x_j)$

$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\cdot\omega_{n+1}'}\cdot y_k = \omega_{n+1}(x)\cdot\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x-x_k}$

插值余项： $R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot\omega_{n+1}(x)$

截断误差限： $|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$

插值余项： $R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot\omega_{n+1}(x)$

截断误差限： $|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$

一阶均差： $f[x_0,x_k] \approx \frac{f[x_k]-f[x_0]}{x_k-x_0}$

二阶均差： $f[x_0,x_1,x_k] \approx \frac{f[x_0,x_k]-f[x_0,x_1]}{x_k-x_1}$

k 阶均差： $f[x_0,x_1,\ldots,x_k] \approx \frac{f[x_0,x_1,\ldots,x_{k-2},x_k]-f[x_0,x_1,\ldots,x_{k-2},x_{k-1}]}{x_k-x_{k-1}}$

$f[x_0,\ldots,x_k] = \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_k)}$

$f[x_0,x_1,\ldots,x_k] = \frac{f[x_0,\ldots,x_k]-f[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$

$f[x_0,\ldots,x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \xi \in [a,b]$

牛顿插值多项式： $P_n(x) \approx f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \cdots + f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) = P_{n-1}(x) + f[x_0,x_1,\cdots,x_n]\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)$

牛顿均差插值余项： $R_n(x) \approx f(x) - P_n(x) = f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$

牛顿基： $N_k(x) \approx (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}), a_k = f[x_0,\ldots,x_k], k \ge 1;$

$N_0(x) = 0, a_0 = f(x_0) \Rightarrow P_n(x) = a_0 N_0(x) + a_1 N_1(x) + \cdots + a_n N_n(x)$

差分形式的牛顿插值： $\Delta^m f_k = h^m f^{(m)}(\xi), \xi \in (x_k, x_{k+m})$

令$x = x_0 + th$**,牛顿前插公式：** $P_n(x_0+th) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$

牛顿前插公式的余项： $R_n(x_0+th) = \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)$

n 阶重节点的均差： $f[x_0,x_0,\cdots,x_0] = \lim_{x_i\to x_0} f[x_0,x_1,\cdots,x_n] = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$

当$x_1,\cdots,x_n \to x_0, P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

$P_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(x_0), 0 \le k \le n$

余项： $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \xi \in (a,b)$

埃尔米特插值：

插值条件： $H(x_i) = y_i; H'(x_i) = m_i \approx f'(x_i)$

一般形式： $H(x) = \sum_i y_i\alpha_i(x) + \sum_i m_i\beta_i(x)$

基函数性质： $\alpha_i(x_k) = \delta_{ik}, \alpha_i'(x_k) = 0; \beta_i(x_k) = 0, \beta_i'(x_k) = \delta_{ik}$

插值余项估计： $R(x) \approx f(x) - H(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}(\prod_{i=0}^n (x-x_i))^2$

分段线性插值： $I_h(x)$**在每个小区间**$[x_k, x_{k+1}]$**可表示为**

$I_h(x) = \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}f_k + \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}f_{k+1}, x_k \le x \le x_{k+1}, k = 0,1,\cdots,n-1$

其插值余项：对所有 k，我们有$M_2 = \max_{a\le x\le b}|f''(x)|$

$\max_{x_k\le x\le x_{k+1}}|f(x) - I_h(x)| \le \frac{M_2}{x}\max_{x_k\le x\le x_{k+1}}|(x-x_k)(x-x_{k+1})| \le \frac{M_2}{8}h^2$

第三章

一、设S是实数域上的线性空间，$x\epsilon S$, 如果存在唯一实数 $\|\cdot\|$ 满足条件
(1) $\| x \| \ge 0$, 当且仅当$x = 0$时， $\| x \| = 0$; (正定性)
(2) $\| \alpha x \| = |\alpha| \| x \|$ $\alpha\epsilon R$; (齐次性)
(3) $\| x + y \| \le \| x \| + \| y \|, x, y\epsilon S$ (三角不等式)
则称 $\|\cdot\|$ 为线性空间S上的范数，S与 $\|\cdot\|$ 一起称为赋范线性空间X

二、内积：(u,v)称为u与v的内积，定义了内积的线性空间X称为内积空间
$(1)(u,u) \ge 0$, 且$(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$
$(2)(u,v) = (v,u);$
$(3)(\alpha u, v) = \alpha(u,v);$
$(4)(u+v,w) = (u,w) + (v,w), w\epsilon\lambda$

三、柯西 − 施瓦茨不等式

$|(u,v)|^2 \le (u,u)(v,v)$

八、最佳平方逼近函数

$$\| f(x) - S^*(x) \|_2^2 = \min_{S(x)\epsilon\varphi} \| f(x) - S(x) \|_2^2$$

九、施密特正交化方法

(1)

$\beta_1 = \alpha_1$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

....

(2)单位化

取$\varepsilon_1 = \frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}, \varepsilon_2 = \frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}, \cdots, \varepsilon_r = \frac{\alpha_r}{|\alpha_r|}$,

十四、

最佳平方逼近$(f,g) = \int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx$

最小二乘法$(f,g) = \sum_{i=0}^m \omega(x_i)f(x_i)g(x_i)$

十、切比雪夫多项式

当权函数$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 区间为$[-1,1]$时，由序列
$\{1, x, \cdots, x^n\}$正交得到$T_n(x) = cos(n\ arc\ cosx)\ |x| \le 1$
若令$x = cos\theta$, 则$T_n(x) = cosn\theta, 0 \le \theta \le \pi$

十三、法方程

$$\begin{bmatrix} (\phi_0,\phi_0) & (\phi_0,\phi_1) & \cdots & (\phi_0,\phi_n) \\ (\phi_1,\phi_0) & (\phi_1,\phi_1) & \cdots & (\phi_1,\phi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\phi_n,\phi_0) & (\phi_n,\phi_1) & \cdots & (\phi_n,\phi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\phi_0) \\ (f,\phi_1) \\ \vdots \\ (f,\phi_n) \end{bmatrix}$$

十五、最小二乘拟合

$$(\varphi_j,\varphi_k) = \sum_{i=0}^m \omega(x_i)\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i) = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ A_k > 0, & j = k \end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^n (\varphi_k,\varphi_j)a_j = (f,\varphi_k), 0 \le k \le n;$$

$Ga = d;$

$$a_k^* = \frac{(f,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)} = \frac{\sum_{i=0}^m \omega(x_i)f(x_i)\varphi_k(x_i)}{\sum_{i=0}^m \omega(x_i)\varphi_k^2(x_i)}$$

$$s^*(x) = \sum_k a_k^*\varphi_k$$

用递推公式表示$P(x)$

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = (x-\alpha_1)P_0(x), \\ P_{k+1}(x) = (x-\alpha_{k+1})P_k(x) - \beta_k P_{k-1}(x) \end{cases}$$

根据$P_k(x)$的正交性得到

$$\alpha_{k+1} = \frac{\sum_{i=0}^m \omega(x_i)x_i P_k^2(x_i)}{\sum_{i=0}^m \omega(x_i)P_k^2(x_i)} = \frac{(xP_k(x),P_k(x))}{(P_k(x),P_k(x))} = \frac{(xP_k,P_k)}{(P_k,P_k)}$$

$$\beta_k = \frac{\sum_{i=0}^m \omega(x_i)P_k^2(x_i)}{\sum_{i=0}^m \omega(x_i)P_{k-1}^2(x_i)} = \frac{(P_k,P_k)}{(P_{k-1},P_{k_1})}$$

第四章:

对区间为[a,b]进行数值积分:

左矩形公式: $I(f) \approx (b-a)f(a)$
右矩形公式: $I(f) \approx (b-a)f(b)$
中矩形公式: $I(f) \approx (b-a)f[(a+b)/2]$

梯形公式余项:

$$R[f] = \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)dx = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)\ ,\eta \in (a,b)$$

辛普森(Simpson)公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx S = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)]$$

辛普森公式余项：$R[f] = -\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta)\ ,\eta \in (a,b)$

牛顿-柯斯特公式:

$$I_n = (b-a)\sum_{k=0}^n C_k^{(n)}f(x_k), \quad C_k^{(n)} = \frac{h}{b-a}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^n \frac{t-j}{k-j}dt = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^n (t-j)dt.$$

复合梯形公式:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})] + R_n[f]$$

$$R_n[f] = I - T_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{h^3}{12}f''(\eta_k)\right], \quad \eta_k \in (x_k, x_{k+1})$$
$$= -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta), \quad \eta \in (a,b)$$

复合辛普森公式:

$$S_n = \frac{h}{6}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k) + 4f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})]$$
$$= \frac{h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k) + f(b)\right]$$

余项为 $R_n[f] = I - S_n = -\frac{h}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4\sum_{k=0}^{n-1}f^{(4)}(\eta_k), \quad \eta_k \in (x_k, x_{k+1})$
$= -\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in (a,b)$

变步长的梯形法:

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}}).$$

复化辛普森公式

$$S_n = \frac{4T_{2n} - T_n}{4-1}$$

复化柯特斯公式 $C_n = \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n = \frac{4^2 S_{2n} - S_n}{4^2 - 1}$

龙贝格求积公式 $R_n = \frac{64}{63}C_{2n} - \frac{1}{63}C_n = \frac{4^3 C_{2n} - C_n}{4^3 - 1}$

(1) 向前差商公式

$$f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(2) 向后差商公式

$$f'(x)\approx\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

(3) 中心差商公式（中点方法）

$$f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

$$forward: f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}-\frac{h}{2}f''(\xi_1)\quad O(h)$$

$$backward: f'(x_i)=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{h}+\frac{h}{2}f''(\xi_2)\quad O(h)$$

$$central: f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2h}-\frac{h^2}{6}f'''(\xi_3)\quad O(h^2)$$

函数插值误差余项为 $f(x)-P_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$

第五章

一、高斯消元法

消元过程

$$m_{ik}=\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}(i=k+1,\dots,n)$$

$$\begin{cases}a_{ij}^{(k+1)}&=a_{ij}^{(k)}-m_{ik}a_{kj}^{(k)}\quad(i=k+1,\dots,n;j=k+1,\dots,n)\\ b_i^{(k+1)}&=b_i^{(k)}-m_{ik}b_k^{(k)}\quad(i=k+1,\dots,n)\end{cases}$$

回代过程：
$$\begin{cases}x_n&=\dfrac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}\\ x_k&=\dfrac{b_k^{(k)}-\sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{(k)}x_j}{a_{kk}^{(k)}}\end{cases}$$

forward substitution

$$\begin{cases}y_1=b_1\\ y_i=b_i-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}\cdot y_k\end{cases}\quad(i=2,3,\dots,n)$$

back substitution

$$\begin{cases}x_n=\dfrac{y_n}{u_{nn}}\\ x_i=\dfrac{y_i-\sum_{k=i+1}^n u_{ik}\cdot x_k}{u_{ii}}\end{cases}\quad(i=n-1,n-2,\dots,1)$$

$$\begin{cases}x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\Delta x_i(k=0,1,2,\dots;i=1,2,\dots,n),\\ \Delta x_i=\dfrac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{(j=1)}^{i-1}a_{ij}x_i^{(k+1)}-\sum_{(j=i)}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)\end{cases}$$

二、LU 分解

$$U=A^{(n)}=L_{n-1}\cdots L_2L_1A$$

$$L=L_1^{-1}L_2^{-1}\cdots L_{n-1}^{-1}=\begin{bmatrix}1&&&&\\ m_{21}&1&&&\\ m_{31}&m_{32}&1&&\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\\ m_{n1}&m_{n2}&m_{n3}&\cdots&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}Ly&=b\\ Ux&=y\end{cases}$$

三、范数

向量范数

$$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^n|x_i|$$

$$\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac12}$$

矩阵范数

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n|a_{ij}|$$

$$\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n|a_{ij}|$$

$$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^{\mathrm T}A)}$$

$$\|A\|_F=\sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}$$

谱半径

$$\rho(A)=\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$$

或改写为

$$\begin{cases}x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\Delta x_i(k=0,1,2,\dots;i=1,2,\dots,n),\\ \Delta x_i=\dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{(j=1)}^{i-1}a_{ij}x_i^{(k+1)}-\sum_{(j=i)}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)\end{cases}.$$

$$x^{(k+1)}=Gx^{(k)}+f,$$

$$G=(D-L)^{-1}U,F=(D-L)^{-1}b.$$

3.超松弛 迭代法(SOR)

$$\begin{cases}x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\dfrac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{(j=1)}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{(j=i)}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)\\ x^{(k)}=\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)^T(k=0,1,2,\dots;i=1,2,\dots,n)\end{cases}$$

ω为松弛因子

当ω = 1 时，SOR 方法为高斯-塞德尔迭代法

矩阵形式：

$$x^{(k+1)}=(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]x^{(k)}+\omega(D-\omega L)^{-1}b$$

第七章

埃金特Δ^2加速方法

$$\hat{x}_k=x_k-\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k}$$

斯特芬森迭代法

$$\begin{cases}y_k=\varphi(x_k)\\ z_k=\varphi(y_k)\\ x_{k+1}=x_k-\dfrac{(y_k-x_k)^2}{z_k-2y_k+x_k}\end{cases},k=0,1,2,\cdots$$

牛顿迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

简化牛顿法和牛顿下山法

(1)构造迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-Cf(x_k)\quad C\ne0,k=0,1,2,\cdots.$$

迭代函数$\varphi(x)=x-Cf(x)$. 若$|\varphi'(x)|=|1-Cf'(x)|<1$, 即$0<Cf'(x)<2$ 时在根x^*附近成立, 迭代法局部收敛。当取$C=\dfrac{1}{f'(x_0)}$时，迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$$ 称为简化牛顿法。

(2)将牛顿法与下山法结合起来使用。牛顿法的计算结果 $\bar{x}_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 与前一步的近似值x 的适当加权平均作为新的改进值

$$x_{k+1}=\lambda\bar{x}_{k+1}+(1-\lambda)x_k,\qquad x_{k+1}=x_k-\lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},k=0,1,2,\cdots,$$

加入下山因子的迭代公式称为牛顿下山法。

选择下山因子时从$\lambda=1$开始, 逐次将λ折半直到满足 $|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$.

带参数 m 的牛顿法

$$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

x*为 f(x)=0 的 m 重根，平方收敛迭代的方法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2-f(x_k)f''(x_k)},$$

弦截法：

单点弦截法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_0)}(x_k-x_0),$$

两点弦截法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1}),$$

第6章 解线性方程组的迭代法

1.基本概念（迭代法及其收敛性）

$x=B_0x+f$

$x^{(k+1)}=B_0x^{(k)}+f$

2.雅可比迭代、高斯-塞德尔迭代

雅可比迭代：

$$\sum_{j=0}^n a_{ij}x_j=b_i\ (i=1,2,\dots,n)$$

Ax = b，A 为非奇异阵且$a_{ij}\ne0(i=1,2,\dots,n)$. 将$A$分裂为$A=D-L-U$.

$$x_i=\frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i-\sum_{(j=1)(j\ne i)}^n a_{ij}x_j\Big)(i=1,2,\dots,n)$$

简记为：$x=B_0x+f$

其中$B_0=I-D^{-1}A=D^{-1}(L+U),f=D^{-1}b$

雅可比迭代公式：

$$\begin{cases}x^{(0)}=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)}\right)^T\\ x_i^{(k+1)}=\dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{(i=1)}^n a_{ij}x_j^{(k)}\right)\end{cases}$$

高斯-塞德尔迭代：

$$x^{(0)}=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)}\right)^T(初始向量)$$

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{(j=1)}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{(j=i+1)}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)(k=0,1,2,\dots;i=1,2,\dots,n)$$

或改写为

第九章

利普希兹条件$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le|y_1-y_2|,L>0$

前向欧拉法：$\dfrac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=f(x_n,y_n)$，即$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$

后向欧拉法：$\dfrac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=f(x_{n+1},y_{n+1})$，即$y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$

梯形方法：$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$

改进欧拉法：
$$\begin{cases}y_p=y_n+hf(x_n,y_n)\\ y_c=y_n+hf(x_{n+1},y_p)\\ y_{n+1}=(y_p+y_c)/2\end{cases}$$

通式显式龙格-库塔法：
$$\begin{cases}\phi(x_n,y_n,h)=\sum_{i=1}^r c_iK_i\\ K_1=f(x_n,y_n)\\ K_i=f(x_n+\lambda_ih,y_n+h\sum_{j=1}^{i-1}\mu_{ij}K_j),i=2,\dots,r\end{cases}$$

二阶显式龙格-库塔法：
$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+h(c_1K_1+c_2K_2)\\ K_1=f(x_n,y_n)\\ K_2=f(x_n+\lambda_2h,y_n+\mu_{21}hK_1)\end{cases}$$

中点公式：
$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+hK_2\\ K_1=f(x_n,y_n)\\ K_2=f(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_1)\end{cases}$$

三阶经典龙格-库塔法
$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(K_1+4K_2+K_3)\\ K_1=f(x_n,y_n)\\ K_2=f(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_1)\\ K_3=f(x_n+h,y_n-hK_1+2hK_2)\end{cases}$$

四阶经典龙格-库塔法
$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)\\ K_1=f(x_n,y_n)\\ K_2=f(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_1)\\ K_3=f(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_2)\\ K_4=f(x_n+h,y_n+hK_3)\end{cases}$$