ریاضی عمومی (۱)

تهیه و تدوین:

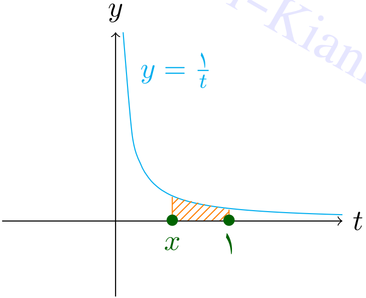
دکتر بهروز خسروی- دکتر داریوش کیانی- دکتر سارا سعیدی مدنی- دکتر امیر ساکی

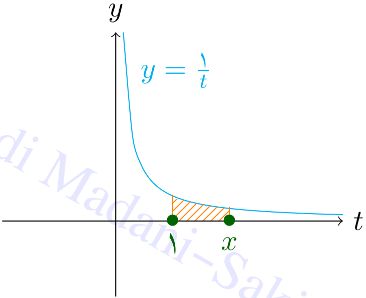
دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشگاه امیرکبیر

توابع نمایی و لگاریتمی

لگاریتم طبیعی





فرض کنید $F(x) = \int_{۱}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ که $x > ۰$. در این صورت، تابع $F(x)$ را با نماد $\ln(x)$ یا گاهی برای راحتی $\ln x$ نمایش می‌دهیم و به آن لگاریتم طبیعی x می‌گوییم.

چون $y = \frac{۱}{t}$ به‌ازای $t > ۰$، پیوسته است، بنابر قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، گزاره‌ی زیر را داریم:

گزاره

تابع $\ln x$، به‌ازای هر $x > ۰$، مشتق‌پذیر است، و داریم:

$$\frac{\mathrm{d} \ln x}{\mathrm{d}x} = \frac{۱}{x}.$$

تذکر

طبق قاعده‌ی مشتق‌گیری برای ترکیب توابع، اگر $g(x)$ تابعی مشتق‌پذیر و مثبت بر بازه‌ی باز I باشد، آن‌گاه داریم:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)},\ \forall\, x \in I.$$

مثال

به‌ازای هر $x \neq 0$، $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln|x|)$ را بیابید.

پاسخ:

$$\frac{\mathrm{d}\ln|x|}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} \frac{1}{x} & , x > 0 \\ \frac{\mathrm{d}\ln(-x)}{\mathrm{d}x} = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} & , x < 0 \end{cases}.$$

پس به‌ازای هر $x \neq 0$، داریم $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$.

حال، به برخی دیگر از خواص مقدماتی تابع $\ln x$ اشاره می‌کنیم:

(۱) تابع $\ln x$ به‌ازای هر $x > ۰$، پیوسته است.

(۲) $\ln(۱) = ۰$.

(۳) چون $x > ۰$، پس $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{۱}{x} > ۰$، و در نتیجه تابع $\ln x$ اکیداً صعودی است.

(۴) با توجه به اکیداً صعودی بودن $\ln x$، به‌ازای هر $x > ۱$، داریم $\ln(x) > ۰$، و به‌ازای هر $۰ < x < ۱$، داریم $\ln(x) < ۰$.

(۵) چون $\frac{\mathrm{d}^۲}{\mathrm{d}x^۲}(\ln x) = \frac{-۱}{x^۲} < ۰$، پس جهت تقعر تابع $\ln x$ همواره به سمت پایین است.

گزاره

به‌ازای هر $x, y > ۰$، داریم:

$$(۱) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y,$$

$$(۲) \quad \ln\left(\frac{۱}{x}\right) = -\ln x,$$

$$(۳) \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

برای نمونه، قسمت (۱) از گزاره‌ی قبل را ثابت می‌کنیم.
فرض کنید $y > 0$ دلخواه است. به‌ازای هر $x > 0$، تعریف می‌کنیم:

$$F(x) = \ln(xy) - \ln(x).$$

در نتیجه، داریم $F'(x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = 0$. پس $F(x)$ تابعی ثابت است. فرض کنید به‌ازای هر $x > 0$ داریم $F(x) = c$. در این صورت، می‌توان نوشت:

$$F(1) = \ln(y) - \underbrace{\ln(1)}_{0} = c$$

$$\Rightarrow \ln(y) = c \Rightarrow F(x) = \ln(y)$$

$$\xRightarrow{\text{از تعریف } F(x)} \ln(xy) - \ln(x) = \ln(y)$$

$$\Rightarrow \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

تذکر

(۱) ابتدا توجه کنید که اگر m عددی طبیعی باشد، آن‌گاه $\ln(۲^m) = m\ln ۲$؛ زیرا می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\ln(۲^m) = \ln(۲\times ۲^{m-۱}) &= \ln(۲) + \ln(۲^{m-۱})\\ &= ۲\ln(۲) + \ln(۲^{m-۲}) = \cdots = m\ln(۲).\end{aligned}$$

حال، از آنجا که به‌ازای هر $۲ \geq x$، عدد طبیعی n موجود است که $۲^n \leq x < ۲^{n+۱}$ و $\ln$ تابعی اکیداً صعودی است، داریم:

$$\ln(۲^n) \leq \ln(x) < \ln(۲^{n+۱}) \xRightarrow{\text{از خواص } \ln} n\ln(۲) \leq \ln(x) < (n+۱)\ln(۲).$$

هرچه x بزرگ‌تر باشد، n نیز بزرگ‌تر می‌شود. پس، اگر x به سمت بی‌نهایت میل کند، آن‌گاه n نیز به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. حال، از اینکه $\ln(۲)$ عددی مثبت است، نتیجه می‌گیریم که:

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln(۲) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.}$$

(۲) با توجه به این‌که داریم:

$$t \to +\infty \Longleftrightarrow \frac{۱}{t} \to ۰^+,$$

از خواص $\ln$ نتیجه می‌گیریم که:

$$\lim_{x\to ۰^+} \ln x \xlongequal{x=\frac{۱}{t}} \lim_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{۱}{t}\right) = \lim_{t\to+\infty} (-\ln t) = -\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to ۰^+} \ln x = -\infty.}$$

(۳) با توجه به پیوسته بودن تابع $\ln x$ و قسمت‌های (۱) و (۲)، می‌توان دید که برد این تابع، کل $\mathbb{R}$ است.

گزاره

به‌ازای هر $x > ۰$ داریم:

$$\ln(x) \leq x - ۱.$$

برهان: تابع کمکی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = \ln(x) - x + ۱, \qquad x > ۰.$$

در این صورت، داریم:

$$g'(x) = \frac{۱}{x} - ۱.$$

دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

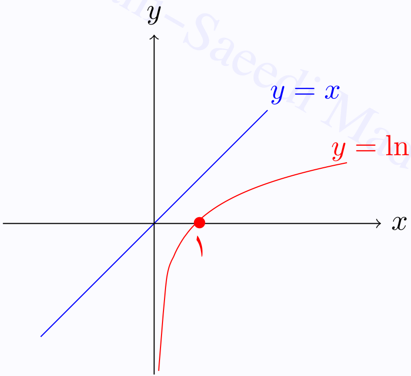
حالت اول: اگر $۰ < x < ۱$، آن‌گاه $\frac{۱}{x} > ۱$، و در نتیجه داریم $g'(x) > ۰$. پس تابع g اکیداً صعودی است، و در این حالت داریم $g(x) < g(۱) = ۰$.

حالت دوم: اگر $x > ۱$، آن‌گاه $\frac{۱}{x} < ۱$، و در نتیجه داریم $g'(x) < ۰$. پس g اکیداً نزولی است، و در این حالت داریم $g(x) < g(۱) = ۰$.

پس به‌ازای هر $x > ۰$، داریم $g(x) \leq g(۱) = ۰$، و در نتیجه $\ln x \leq x - ۱$. توجه کنید که $x = ۱$ تنها نقطه‌ای است که $g(x) = ۰$.

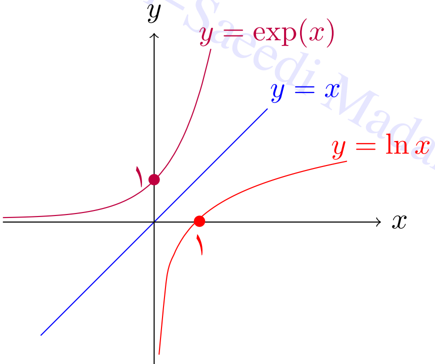
نمودار $\ln x$

نمودار تابع $y = \ln(x)$ به‌صورت زیر است:



تابع نمایی

با توجه به بحث‌های قبلی، تابع $\ln(x) : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ اکیداً صعودی است، و بنابراین یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است. وارون این تابع را با $\exp(x)$ نمایش می‌دهیم، و داریم $\exp(x) : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$. پس نمودارهای $\ln(x)$ و $\exp(x)$ نسبت به خط $y = x$ قرینه هستند.



همچنین، از روابط بین یک تابع و وارون آن، ویژگی‌های مقدماتی زیر را داریم:

$$(۱)\quad \ln(\exp(x)) = x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(۲)\quad \exp(\ln x) = x, \qquad \forall x > ۰$$

$$(۳)\quad \exp(۰) = ۱,$$

$$(۴)\quad \exp(x) > ۰, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$(۵)\quad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = ۰,$$

$$(۶)\quad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty.$$

گزاره

به‌ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$، داریم:

$$(۱)\quad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y),$$

$$(۲)\quad \exp(-x) = \frac{۱}{\exp(x)},$$

$$(۳)\quad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$

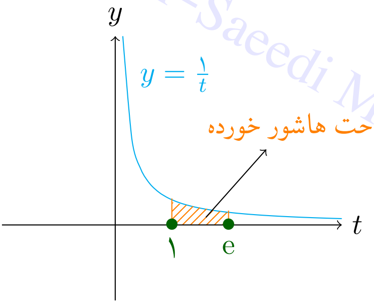
قسمت (۱) از گزاره‌ی قبل را به‌عنوان نمونه ثابت می‌کنیم:

$$\exp(x+y) = \exp\Big(\underbrace{\ln(\exp(x))}_{x} + \underbrace{\ln(\exp(y))}_{y}\Big)$$

$$\xlongequal{\text{از خواص } \ln} \exp\Big(\ln(\exp(x)\exp(y))\Big) = \exp(x)\exp(y).$$

عدد نپر

بنابر قضیه‌ی مقدار میانی و با توجه به یک‌به‌یک بودن تابع $\ln$، نقطه‌ای یکتا مانند $x_{\circ}$ در $\mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری که $\ln(x_{\circ}) = ۱$. این نقطه‌ی $x_{\circ}$ را از این پس با نماد e نمایش می‌دهیم و آن‌را عدد نپر می‌نامیم. می‌دانیم این عدد اصم است و تقریباً برابر است با ۲٫۷۱۸.



طبق این نمادگذاری، داریم:

$$\begin{cases} \ln(\mathrm{e}) = ۱, \\ \exp(۱) = \mathrm{e}\,. \end{cases}$$

حال با توجه به خواص exp می‌توان نوشت:

$$\exp(۲) = \exp(۱+۱) = \exp(۱)\exp(۱) = \mathrm{e}^{۲}\,.$$

سپس بنابر خواص exp و با تکرار این فرآیند یا استقرا ریاضی می‌بینیم که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\exp(n) = \mathrm{e}^{n}\,.$$

همچنین به‌ازای هر $m, n \in \mathbb{N}$، با توجه به خواص exp می‌توان نوشت:

$$\exp(n) = \exp\left(m\frac{n}{m}\right) = \exp\underbrace{\left(\frac{n}{m} + \cdots + \frac{n}{m}\right)}_{m \text{ مرتبه}} = \left(\exp\left(\frac{n}{m}\right)\right)^{m}.$$

اما بنابر بحث فوق می‌دانیم که

$$\exp(n) = \mathrm{e}^n \,.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\left(\exp\left(\frac{n}{m}\right)\right)^m = \mathrm{e}^n \Rightarrow \exp\left(\frac{n}{m}\right) = \mathrm{e}^{\frac{n}{m}} \,.$$

لذا بنابر گزاره‌ی خواص $\exp$، قسمت (۲)، به‌ازای هر عدد گویای c داریم $\exp(c) = \mathrm{e}^c$.
حال چنانچه r عددی گنگ باشد، آن‌گاه دنباله‌ای از اعداد گویا مانند $\{r_n\}$ را در نظر می‌گیریم که $r_n \longrightarrow r$. در این صورت، از پیوستگی $\exp$ نتیجه می‌شود که

$$\exp(r) = \lim_{n\to+\infty} \exp(r_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{r_n}$$

و از این پس $\exp(r)$ در بحث فوق را e به توان r می‌نامیم، و آن‌را با e^r نمایش می‌دهیم. پس به‌ازای هر $r \in \mathbb{R}$ داریم $\exp(r) = \mathrm{e}^r$، و لذا از این پس به جای $\exp(x)$ از e^x استفاده خواهیم کرد.

بنابراین

$$\begin{cases} \ln(\mathrm{e}^x) = x, & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \mathrm{e}^{\ln x} = x, & \forall x > 0. \end{cases}$$

حال با کمک بحث فوق می‌توان تابع نمایی را در حالت کلی به‌صورت زیر تعریف کرد:

تعریف

اگر $a > 0$، آن‌گاه به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$، تعریف می‌کنیم:

$$a^x = \mathrm{e}^{x \ln(a)},$$

و آن‌را **تابع نمایی** می‌نامیم.

گزاره

(۱) اگر $x > 0$، آن‌گاه به‌ازای هر $r \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\ln(x^r) = r\ln(x).$$

(۲) به‌ازای هر r و x در $\mathbb{R}$، داریم:

$$\exp(rx) = (\exp(x))^r,$$

یا به عبارتی:

$$e^{rx} = (e^x)^r.$$

مشتق تابع $y = \mathrm{e}^x$

$$y = \mathrm{e}^x \iff \ln y = x$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق‌گیری از طرفین}} \frac{\mathrm{d}\ln y}{\mathrm{d}x} = ۱ \Rightarrow \frac{y'}{y} = ۱ \Rightarrow y' = y \Rightarrow y' = \mathrm{e}^x.$$

در نتیجه، اگر $g(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه داریم:

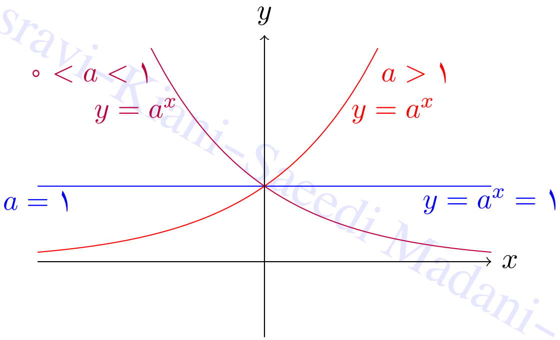
$$\left(\mathrm{e}^{g(x)}\right)' = g'(x)\,\mathrm{e}^{g(x)}\,.$$

مشتق تابع a^x با $a > ۰$

$$\frac{\mathrm{d}(a^x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x\ln a})}{\mathrm{d}x} = (\ln a)\,\mathrm{e}^{x\ln a} = (\ln a)a^x.$$

به‌ازای $y = a^x$، یکی از ۳ وضعیت زیر رخ می‌دهد:

- $۰ < a < ۱ \Rightarrow \ln a < ۰ \Rightarrow y' < ۰ \Rightarrow$ تابع اکیداً نزولی
- $a = ۱ \Rightarrow \ln a = ۰ \Rightarrow y' = ۰ \Rightarrow$ تابع ثابت
- $a > ۱ \Rightarrow \ln a > ۰ \Rightarrow y' > ۰ \Rightarrow$ تابع اکیداً صعودی


y
۰ < a < ۱
y = a^x
a > ۱
y = a^x
a = ۱
y = a^x = ۱
x

تابع لگاریتم

دیدیم که به‌ازای $\circ < a \neq ۱$، تابع $y = a^x : \mathbb{R} \longrightarrow (\circ, +\infty)$ یک تابع اکیداً یکنواست، و لذا دارای وارون است. وارون این تابع را با $\log_a x$ نمایش می‌دهیم. پس داریم:

$$\log_a x : (\circ, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \log_a(a^x) = x, & \forall x \in \mathbb{R}, \\ a^{\log_a x} = x, & \forall x > \circ. \end{cases}$$

مشتق تابع $y = \log_a x$

$$y = \log_a x \Longleftrightarrow x = a^y$$

$$\xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق‌گیری از طرفین}} ۱ = y'(\ln a)a^y \Rightarrow y' = \frac{۱}{(\ln a)a^y}$$

$$\xrightarrow{x=a^y} \boxed{y' = \frac{۱}{(\ln a)x}.}$$

گزاره

فرض کنید $0 < a \neq 1$. به‌ازای هر $x > 0$، داریم $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

برهان: تابع کمکی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = \log_a x - \frac{\ln x}{\ln a}, \quad x > 0.$$

در این صورت، به‌ازای هر $x > 0$، داریم:

$$g'(x) = \frac{1}{x \ln a} - \frac{1}{x \ln a} = 0.$$

در نتیجه، $g(x)$ تابعی ثابت است. پس می‌توان نوشت:

$$g(x) = g(a) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \forall x > 0; g(x) = 0 \Rightarrow \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

مثال

نشان دهید خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^{\pi} - \pi^{x}$، در $x = \pi$ شیب منفی دارد.

پاسخ:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \pi x^{\pi-1} - \pi^{x}(\ln \pi) \\
\Rightarrow f'(\pi) &= \pi(\pi)^{\pi-1} - \pi^{\pi}(\ln \pi) \\
&= \pi^{\pi}(1 - \ln \pi).
\end{aligned}
$$

باید نشان دهیم $f'(\pi) < 0$. از آنجا که $\mathrm{e} < \pi$ و تابع $\ln x$ اکیداً صعودی است، داریم:

$$\ln \mathrm{e} < \ln \pi \xRightarrow{\ln \mathrm{e}=1} 1 < \ln \pi \Rightarrow 1 - \ln \pi < 0.$$

پس داریم:

$$f'(\pi) = \pi^{\pi}(1 - \ln \pi) < 0.$$

کاربرد $\ln$ در محاسبه‌ی مشتق برخی توابع

اگر $y = (f(x))^{g(x)}$ که در آن به‌ازای هر x، $f(x) > 0$، می‌خواهیم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ را محاسبه کنیم. برای این منظور، تابع $\ln$ را بر طرفین تساوی به صورت زیر اثر می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
&\ln y = g(x)\ln(f(x)) \\
&\xRightarrow{\text{مشتق‌گیری}} \frac{y'}{y} = g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} \\
&\qquad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = (f(x))^{g(x)}\left(g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).
\end{aligned}$$

مثال

اگر $y = (\sin x)^{\ln x}$ که $0 < x < \pi$، آن‌گاه مطلوب است محاسبه‌ی $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

پاسخ:

$$\ln y = (\ln x)\ln(\sin x)$$
$$\Longrightarrow \frac{y'}{y} = \left(\frac{1}{x}\right)\ln(\sin x) + (\ln x)\frac{\cos x}{\sin x}$$
$$\Longrightarrow y' = (\sin x)^{\ln x}\left(\frac{1}{x}\ln(\sin x) + (\ln x)\frac{\cos x}{\sin x}\right).$$

قضیه (رشد)

فرض کنید $a > \circ$ و b دلخواه هستند. آنگاه:

$$(\text{۱})\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = \circ,$$

$$(\text{۲})\quad \lim_{x\to\circ^+} x^a \ln x = \circ,$$

$$(\text{۳})\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{\mathrm{e}^x} = \circ,$$

$$(\text{۴})\quad \lim_{x\to-\infty} |x|^b\, \mathrm{e}^x = \circ.$$

برهان:

$$(۱)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}\overset{\text{Hop}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۱}{x}}{ax^{a-۱}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{ax^a}=۰.$$

$$(۲)\ \lim_{x\to۰^+}x^a\ln x\overset{u=\frac{۱}{x}}{=\!=}\lim_{u\to+\infty}\frac{۱}{u^a}\ln\left(\frac{۱}{u}\right)=\lim_{u\to+\infty}\frac{(-\ln u)}{u^a}\overset{\text{قسمت(۱)}}{=\!=}۰.$$

(۳) اگر $b\leq ۰$، آنگاه نتیجه واضح است. پس فرض می‌کنیم $b>۰$. حال، فرض کنید $u=\mathrm{e}^x$. در این صورت، $x=\ln u$، و لذا داریم:

$$x\to+\infty \Longleftrightarrow u\to+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{\mathrm{e}^x}=\lim_{u\to+\infty}\frac{(\ln u)^b}{\mathrm{e}^{\ln u}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{(\ln u)^b}{u}=\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{\ln u}{u^{\frac{۱}{b}}}\right)^b\overset{\text{قسمت(۱)}}{=\!=}۰.$$

(۴) اگر $b\leq ۰$، آنگاه نتیجه واضح است. پس فرض کنیم $b>۰$.

$$\lim_{x\to-\infty}|x|^b\,\mathrm{e}^x\overset{u=-x}{=\!=}\lim_{u\to+\infty}|u|^b\,\mathrm{e}^{-u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^b}{\mathrm{e}^u}\overset{\text{قسمت(۲)}}{=\!=}۰.$$

تذکر

$$\ln x \ \text{رشد} < x^a \ \text{رشد} < \mathrm{e}^x \ \text{رشد}$$

کاربرد $\ln$ در محاسبه‌ی برخی حدود

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ توابعی تعریف شده بر بازه‌ی باز I هستند به‌طوری که به‌ازای هر $x \in I$، داریم $f(x) > 0$. برای محاسبه‌ی حد $y = (f(x))^{g(x)}$ در $x = a$ که $a \in I$، می‌توان ابتدا تابع $\ln$ را بر طرفین اثر داد، که در این صورت داریم:

$$\ln y = g(x) \ln(f(x)).$$

سپس از طرفین رابطه‌ی اخیر در $x = a$ حد می‌گیریم. اگر حاصل این حد برابر با b شود، آن‌گاه بنابر پیوستگی e^x می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to a} \ln y = b \Rightarrow \mathrm{e}^{\left(\lim\limits_{x\to a} \ln y\right)} = \mathrm{e}^b \xRightarrow{\text{پیوستگی } \mathrm{e}^x} \lim_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln y} = \lim_{x\to a} y = \mathrm{e}^b,$$

یعنی حاصل حد تابع $y = (f(x))^{g(x)}$ در $x = a$، برابر با e^b است.

به‌عنوان مثالی از این تکنیک، به برهان گزاره‌ی بعد توجه کنید.

گزاره

برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}^{\alpha}\,.$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{\text{Hop}}{=\!=\!=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\frac{-\alpha}{\cancel{x^{2}}}}{1+\frac{\alpha}{x}}}{\frac{-1}{\cancel{x^{2}}}} = \frac{-\alpha}{-1} = \alpha$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}^{\alpha}\,.$$

مثال

کدام‌یک از اعداد π^{e} و e^{π} بزرگ‌تر است؟

پاسخ: تابع کمکی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

با قرار دادن $g'(x) = 0$، نتیجه می‌گیریم که $\ln x = 1$. پس $x = \mathrm{e}$ تنها نقطه‌ی بحرانی $g(x)$ است.

اگر $x < \mathrm{e}$، آن‌گاه $\ln x < \ln \mathrm{e} = 1$، و در نتیجه $g'(x) > 0$.

اگر $x > \mathrm{e}$، آن‌گاه $\ln x > \ln \mathrm{e} = 1$، و در نتیجه $g'(x) < 0$. به‌ویژه روی بازه‌ی $[\mathrm{e}, +\infty)$، تابع $g(x)$ اکیداً نزولی است.

پس $x = \mathrm{e}$ ماکسیمم مطلق تابع $g(x)$ است. بنابراین، داریم:

$$g(\pi) < g(\mathrm{e}).$$

$$\Rightarrow \frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} \Rightarrow \mathrm{e} \ln \pi < \pi \ln \mathrm{e}$$

$$\Rightarrow \ln(\pi^{\mathrm{e}}) < \ln(\mathrm{e}^{\pi}) \xRightarrow{\mathrm{e}^x \text{ اکیداً صعودی}} \mathrm{e}^{\ln(\pi^{\mathrm{e}})} < \mathrm{e}^{\ln(\mathrm{e}^{\pi})}$$

$$\Rightarrow \pi^{\mathrm{e}} < \mathrm{e}^{\pi}.$$

تذکر

توجه کنید که برای پاسخ به مثال قبل، فقط کافی بود نشان دهیم که تابع $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ بر $[\mathrm{e}, +\infty)$ تابعی اکیداً نزولی است؛ زیرا $\mathrm{e} < \pi$.