Лекция 12

Квазистационарные токи. Переменный ток через активное сопротивление. Переменный ток через емкость. Переменный ток через индуктивность. Переменный ток в RC-цепочке. Последовательная RLC-цепь. Резонанс напряжений. Параллельная RLC-цепь. Резонанс токов. Закон Ома. Работа и мощность переменного тока. Потери в линиях передачи.

Квазистационарные токи

До сих пор при изучении электромагнитных явлений мы подробно исследовали случаи, соответствующие электрическому полю неподвижных зарядов и магнитному полю постоянных токов. Такие электрическое и магнитное поля существуют независимо и не связаны друг с другом. Тем не менее большинство установленных законов справедливы и для более общих случаев, когда происходят взаимные превращения электрического и магнитного полей. Наиболее простые явления, связанные с изменяющимися электрическим или магнитным полями - это так называемые квазистационарные явления в электрических цепях, содержащих резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности. В действительности любой проводник обладает и сопротивлением, и емкостью, и индуктивностью. Но на практике различие, например, в индуктивности катушки и линейного проводника настолько велико, что с хорошей точностью можно использовать модель цепи с сосредоточенными параметрами, то есть считать, что каждый элемент цепи обладает только одной из этих трех характеристик. Именно такие цепи широко используются в электротехнике, радиотелевизионной технике и микроэлектронике.

Будем называть явления в электрической цепи квазистационарными, если во всех ее последовательно соединенных участках силу тока в один и тот же момент времени можно считать одинаковой. В этом приближении пренебрегается конечностью скорости распространения электромагнитного поля вдоль проводов, образующих цепь. Например, при замыкании ключа ток появляется сразу, то есть одновременно, в любом поперечном сечении, даже удаленном от источника, несмотря на то, что электромагнитный сигнал из источника тока может дойти до него спустя значительный промежуток времени.

Переменный ток через активное сопротивление

Изучение квазистационарных явлений начнем с простейшего случая, когда изменяющееся со временем напряжение прикладывается к концам цепи, содержащей только резисторы, т. е. обычные сопротивления R. Сила тока в цепи будет даваться таким же выражением, как при приложенном постоянном напряжении:

$$I(t) = \frac{U(t)}{R}.$$

Это выражение представляет собой закон Ома для цепи, содержащей только обычное сопротивление R, называемое активным. При приложении к его концам переменного напряжения $U(t)$ ток в цепи изменяется по такому же закону, что и приложенное напряжение. Связывающий $U(t)$ и $I(t)$ постоянный множитель R - это то же самое сопротивление, что и для постоянного тока. Например, когда приложенное напряжение зависит от времени по гармоническому (синусоидальному) закону

$$U(t) = U_0 \cos \omega t,$$

сила тока определяется выражением:

$$I(t) = I_0 \cos \omega t, \quad I_0 = \frac{U_0}{R}.$$

Ток в цепи изменяется в фазе с приложенным напряжением. При прохождении тока, изменяющегося со временем, через активное сопротивление, происходит выделение теплоты в соответствии с законом Джоуля-Ленца. Это означает, что в резисторе происходит необратимое превращение (диссипация) электрической энергии во внутреннюю энергию.

Переменный ток через емкость

В цепи, содержащей только емкость C, сила тока определяется скоростью изменения заряда конденсатора: $I = dq/dt$. Так как $q = CU(t)$, $U(t) = U_0 \cos \omega t$, емкость конденсатора постоянна. Тогда для силы тока получаем:

$$I(t) = CdU/dt = -C\omega U_0 \sin \omega t = C\omega U_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, ток в цепи имеет гармонический характер и опережает по фазе приложенное напряжение на $\pi/2$:

$$I(t) = I_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Связи между амплитудными значениями подаваемого напряжения U_0 и тока в цепи I_0 можно придать вид закона Ома, если ввести понятие зависящего от частоты ω емкостного сопротивления R_C :

$$I_0 = \frac{U_0}{R_C}, \qquad R_C = \frac{1}{\omega C}.$$

Полученный результат можно наглядно проиллюстрировать с помощью графиков зависимости напряжения и тока от времени (рисунок). В те моменты времени, когда подаваемое напряжение достигает экстремальных значений, заряд на конденсаторе не меняется и, следовательно, ток в цепи обращается в нуль. В точках, где напряжение обращается в нуль, его значение меняется наиболее быстро и, следовательно, ток достигает экстремальных значений.

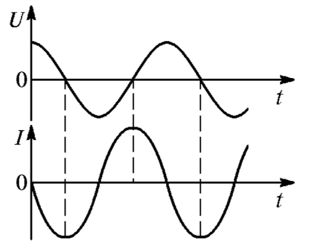

Рисунок 1: Напряжение на конденсаторе и переменный ток в цепи

Итак, физическая причина сдвига по фазе очевидна, величина сдвига равна $\pi/2$, а направление сдвига (опережение или отставание по фазе) легко установить, рассматривая, например, первую четверть периода изменения напряжения: оно убывает, т. е. конденсатор разряжается, несмотря на то, что ток увеличивается по абсолютной величине. Это возможно, только если напряжение и ток имеют противоположные знаки, т. е. график тока действительно имеет вид, изображенный на рисунке. При прохождении электрического тока через конденсатор не происходит диссипации электрической энергии: при зарядке конденсатора в нем накапливается энергия, а при разрядке эта энергия возвращается в электрическую цепь.

Переменный ток через индуктивность

Случай, когда синусоидальное напряжение подается на индуктивность L, проще всего проанализировать, сравнивая выражения

$$I = C\frac{dU}{dt}, \quad U = L\frac{dI}{dt}.$$

Первая формула представляет собой выражение для тока в цепи, содержащей только емкость C. Второе соотношение отражает тот факт, что поданное на индуктивность L синусоидальное напряжение U в каждый момент времени компенсирует возникающую в катушке электродвижущую силу самоиндукции $\mathcal{E} = -LdI/dt$. Заменим $I \to U, C \to L$:

$$U(t) = L\omega I_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

В цепи, содержащей индуктивность, напряжение опережает ток на $\pi/2$. Задаваемой величиной является подаваемое напряжение $U(t) = U_0 \cos \omega t$, поэтому для тока I получаем

$$I(t) = I_0 \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Как и раньше, связи между амплитудными значениями тока и напряжения можно придать вид закона Ома, если ввести индуктивное сопротивление R_L :

$$I_0 = \frac{U_0}{R_L}, \quad R_L = \omega L.$$

Полученный результат также можно проиллюстрировать с помощью графиков (рисунок). На верхнем графике показана зависимость тока от времени. На втором графике изображена ЭДС самоиндукции. Положение экстремумов и сдвиг этого графика относительно графика тока легко определить с помощью закона электромагнитной индукции и закона Ленца: $\mathcal{E} = -LdI/dt$. Действительно, ЭДС самоиндукции обращается в нуль в точках экстремума тока и достигает экстремальных значений в те моменты, когда ток меняется наиболее быстро. В каждый момент полярность ЭДС самоиндукции должна быть такой, чтобы препятствовать изменению тока, — этим сразу устанавливается направление сдвига по фазе между током и ЭДС самоиндукции. И наконец, приложенное напряжение изменяется в противофазе с ЭДС самоиндукции (нижний график на рисунке). При прохождении электрического тока через катушку индуктивности не происходит диссипации энергии: при нарастании тока в катушке накапливается энергия магнитного поля, а при убывании тока эта энергия возвращается в электрическую цепь.

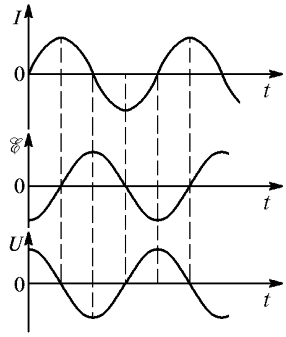

Рисунок 2: Ток, ЭДС самоиндукции и напряжение на источнике переменного тока

Рассмотрение этих простейших цепей показывает, что, за исключением случая активного сопротивления R, невозможно написать закон Ома для цепей переменного тока, определяющий мгновенное значение тока $I(t)$ в виде отношения приложенного напряжения к сопротивлению соответствующего участка, вследствие того, что между током и напряжением существует сдвиг по фазе. Сдвиг по фазе между приложенным синусоидальным напряжением и силой тока характерен для цепей, содержащих емкостное или индуктивное сопротивление. Для них используется общее название - реактивное сопротивление. Как мы видели, закон Ома справедлив только для амплитудных значений тока и напряжения. Подчеркнем, что введенные выше понятия емкостного и индуктивного сопротивлений имеют смысл только для синусоидального приложенного напряжения. Сами их определения содержат циклическую частоту ω этого напряжения. Ясно, что эти понятия неприменимы в случаях, когда конденсатор или катушка индуктивности подключаются к источнику постоянного напряжения или напряжения, изменяющегося со временем по какому-либо иному (несинусоидальному) закону.

Переменный ток в RC-цепочке

Синусоидальные токи по сравнению со всеми другими токами позволяют наиболее просто и экономично осуществлять передачу, распределение, преобразование и использование электрической энергии. Только в случае синусоидальных токов сохраняются неизменными формы кривых зависимости от времени напряжения и токов на всех участках линейной электрической цепи, т. е. цепи, содержащей резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности. В цепи, содержащей нелинейные элементы - диоды, транзисторы, электронные лампы и т. п. - форма этих кривых не сохраняется при любой, в том числе и синусоидальной, зависимости от времени подаваемого напряжения (тока).

Рассмотрим следующую простую линейную цепь, состоящую из конденсатора C и резистора R (рисунок). Посмотрим, что будет на выходе этой цепи, если на ее вход подавать напряжение в виде прямоугольных импульсов. Начало каждого прямоугольного импульса соответствует подключению к цепи источника постоянного напряжения на время, равное длительности импульса. При этом в цепи скачком возникает ток, который постепенно уменьшается по мере того, как конденсатор заряжается.

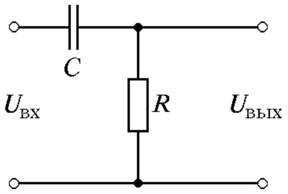

Рисунок 3: RC-цепочка

Время, в течение которого продолжается процесс зарядки конденсатора, определяется произведением $\tau = RC$. Если это время меньше длительности подаваемого на вход прямоугольного импульса, ток зарядки прекратится раньше, чем закончится прямоугольный импульс. Именно этот случай изображен на рисунке.

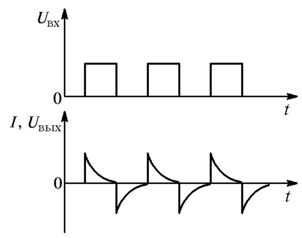

Рисунок 4: Преобразование прямоугольных импульсов RC-цепочкой

В момент прихода заднего фронта прямоугольного импульса подаваемое напряжение скачком обращается в нуль. Но этого можно добиться только путем короткого замыкания входных клемм схемы. Цепь, содержащая R и C, становится короткозамкнутой, и конденсатор C разряжается через сопротивление R. Направление тока разрядки противоположно зарядному току, поэтому выходное напряжение на сопротивлении R имеет противоположную полярность. Форма выходного напряжения становится совершенно иной, чем форма входного напряжения.

Посмотрим теперь, что получится, если на вход той же RC-цепочки подать синусоидальное напряжение $U(t) = U_0 \cos \omega t$. Будем считать, что это напряжение действует в течение достаточно большого по сравнению с $\tau = RC$ промежутка времени, так что все переходные процессы к рассматриваемому моменту уже закончились. Тогда ток в цепи будет изменяться по синусоидальному закону с той же частотой ω, причем между приложенным напряжением и током будет некоторый сдвиг по фазе. Чтобы найти амплитуду этого тока и сдвиг по фазе, воспользуемся тем обстоятельством, что мгновенное значение любой изменяющейся по синусоидальному закону величины $x(t) = x \cos \omega t$ можно представить как проекцию вектора длиной x_0 на некоторое заранее выбранное направление, причем сам вектор равномерно вращается в плоскости с угловой скоростью ω, равной циклической частоте, а длина вектора равна амплитудному значению x_0 соответствующей величины (рисунок).

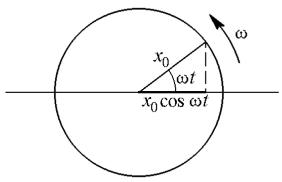

Рисунок 5

С помощью такого представления каждой исследуемой схеме можно сопоставить определенную векторную диаграмму. В RC-цепочке, которую мы рассматриваем, сумма мгновенных значений напряжений на конденсаторе C и резисторе R равна значению приложенного напряжения в тот же момент времени: $U = U_C + U_R$. Если цепочка не нагружена, т. е. к выходу ничего не подключено, то сила тока через конденсатор C и резистор R в каждый момент времени одинакова. Этой схеме можно сопоставить векторную диаграмму, изображенную на рисунке. Вся система векторов вращается как целое против часовой стрелки с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка.

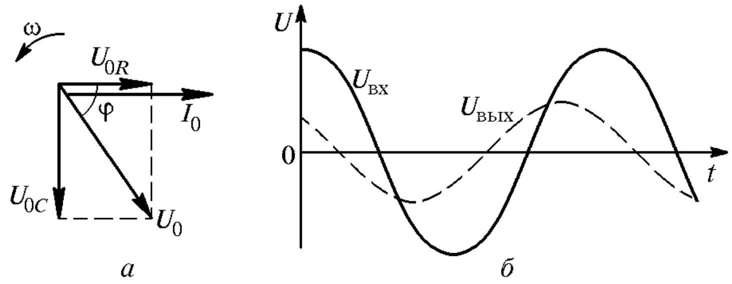

Рисунок 6

Поскольку ток в цепи находится в фазе с напряжением U_R и опережает на $\pi/2$ напряжение на емкости U_C, то при выбранном направлении вращения векторы I_0 и U_{0R}, направленные в одну сторону, опережают на $\pi/2$ вектор U_{0C}. Очевидно, что вектор U_0, изображающий приложенное напряжение $U_{вх}$, должен быть равен векторной сумме U_{0R} и U_{0C}.

Из рисунка видно, что

$$U_0^2 = U_{0R}^2 + U_{0C}^2, \quad \operatorname{tg}\varphi = +U_{0C}/U_{0R}.$$

Используя связь между амплитудным значением силы тока I_0 и амплитудными значениями U_{0R} и U_{0C} напряжений на резисторе и конденсаторе

$$U_{0R} = I_0 R, \quad U_{0C} = \frac{I_0}{\omega C},$$

Находим

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{1/\omega C}{R}.$$

Если приложенное напряжение дается формулой $U(t) = U_0 \cos\omega t$, то сила тока в цепи определяется выражением

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

где I_0 и φ уже определены. Это значит, что выходное напряжение $U_{вых}$ (рисунок), совпадающее с напряжением на резисторе R, как и подаваемое напряжение $U_{вх}$, будет синусоидальным, но опережающим его по фазе на φ (рисунок). Этот сдвиг по фазе зависит не только от соотношения между C и R, но и от частоты ω входного напряжения. Подчеркнем еще раз, что для сохранения формы передаваемого напряжения необходимо использовать именно синусоидальный переменный ток. Проиллюстрированный на примере RC-цепочки метод векторных диаграмм можно применять для исследования любых линейных цепей переменного тока.

Последовательная RLC-цепь. Резонанс напряжений

Рассмотрим произвольную последовательную цепь переменного тока, содержащую активное сопротивление R, емкость C и индуктивность L (рисунок). Будем считать, что на вход этой цепи подано напряжение $U(t) = U_0 \cos\omega t$.

В последовательной цепи квазистационарного переменного тока сила тока I в каждый момент времени во всех участках цепи одинакова. Сумма мгновенных значений напряжений на сопротивлении R, емкости C и индуктивности L равна значению приложенного напряжения U в тот же момент времени: $U = U_R + U_C + U_L$. Этой схеме можно сопоставить векторную диаграмму, изображенную на рисунке (а).

Каждой величине — току $I(t)$, напряжениям на сопротивлении R, емкости C и индуктивности L — сопоставляются векторы, длина каждого из которых равна амплитудному значению соответствующей величины. Вся система векторов вращается как целое с угловой скоростью ω. Мгновенные значения величин I, U_R, U_C и U_L, получаются проецированием соответствующих векторов на заранее выбранное фиксированное направление NN. Ток в цепи I изменяется в фазе с напряжением

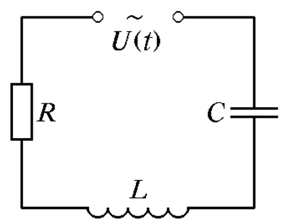

Рисунок 7: Последовательная цепь переменного тока

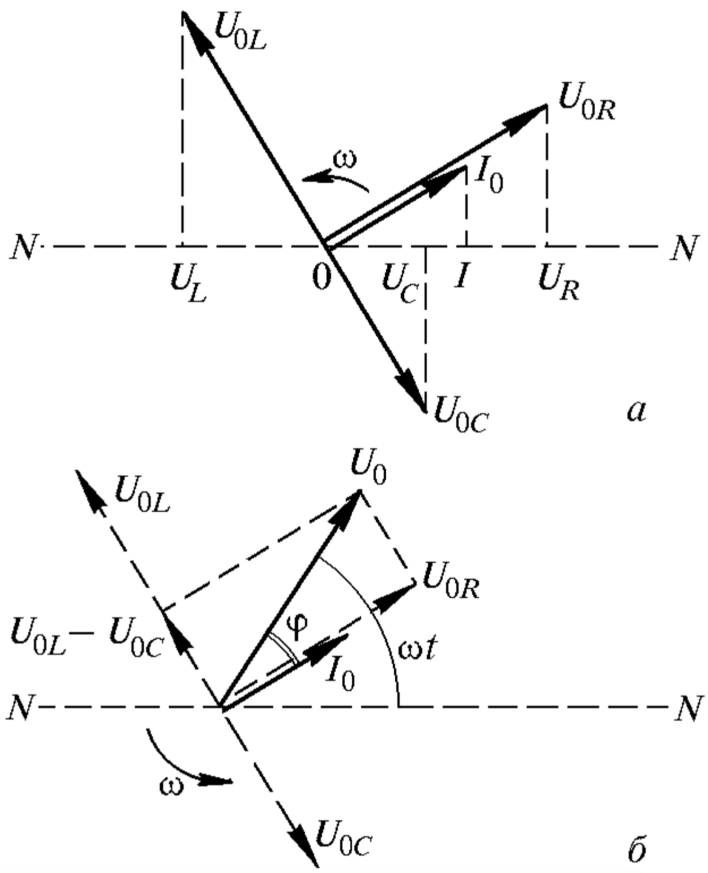

Рисунок 8: Векторные диаграммы последовательной RLC-цепи: (а) система вращающихся векторов I_0, U_{0R}, U_{0C} и U_{0L}; (б) определение связи между приложенным напряжением U_0 и силой тока в цепи I_0.

U_R, отстает на $\pi/2$ от напряжения на индуктивности U_L, и опережает на $\pi/2$ напряжение на емкости U_C, то при указанном направлении вращения вектор U_{0L} опережает векторы I, и U_{0R} на $\pi/2$, которые в свою очередь опережают на $\pi/2$ вектор U_{0C}. Вектор, изображающий приложенное напряжение U, равен сумме векторов U_{0R}, U_{0C} и U_{0L}, так как проекция результирующего вектора, которая определяет мгновенное значение приложенного напряжения U, равна сумме проекций составляющих векторов, равных мгновенным значениям напряжений U_R, U_C, и U_L.

Из рисунка видно, что

$$U_0^2 = U_{0R}^2 + (U_{0L} - U_{0C})^2, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{U_{0L} - U_{0C}}{U_{0R}}.$$

Используя связь между амплитудным значением тока I_0 и амплитудными значениями напряжений на отдельных элементах цепи:

$$U_{0R} = I_0 R, \quad U_{0C} = \frac{I_0}{\omega C}, \quad U_{0L} = I_0 \omega L,$$

получаем

$$I = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}.$$

Итак, если приложенное напряжение $(t) = U_0 \cos\omega t$, то ток в цепи $I = I_0 \cos\omega t^{-}\varphi$, где I_0 и φ уже определены. Ток в цепи, как и напряжение, меняется по синусоидальному закону, но между током и напряжением существует сдвиг по фазе, равный φ. С помощью векторной диаграммы на рисунке (б) теперь легко написать выражения для мгновенных напряжений на отдельных элементах схемы:

$$U_R = I_0 R \cos(\omega t - \varphi),$$
$$U_L = I_0 \omega L \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$U_C = \frac{I_0}{\omega C} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Выясним, что покажет вольтметр, если его подключить к какому-либо из элементов схемы. Произведя измерения напряжений на всех элементах схемы по отдельности, можно убедиться, что сумма этих напряжений всегда больше действующего значения подаваемого на схему напряжения. Более того, напряжение на любом из реактивных сопротивлений может быть гораздо больше подаваемого напряжения. Напряжение же на активном сопротивлении никогда не бывает больше подаваемого напряжения.

Если при измерении напряжений на реактивных элементах напряжения окажутся равными друг другу, то это значит, что равны реактивные сопротивления: $\omega L = 1/(\omega C)$. Такую ситуацию называют резонансом напряжений в цепи переменного тока. При этом напряжение на активном сопротивлении равно приложенному внешнему напряжению. Сопротивление всей последовательной цепи при резонансе напряжений становится чисто активным и равным R. Сдвиг фаз между приложенным напряжением и током в этом случае отсутствует. При резонансе напряжений дважды за период колебаний происходят взаимные превращения энергии электрического поля конденсатора в энергию магнитного поля катушки и обратно. Энергия, подводимая к контуру из внешней цепи, целиком идет на компенсацию джоулевых потерь в активном сопротивлении контура.

Параллельная RLC-цепь. Резонанс токов

Рассмотрим цепь переменного тока, содержащую параллельно соединенные активное сопротивление R, индуктивность L и емкость C (рисунок), на которую подается переменное напряжение $U(t) = U_0 \cos\omega t$. Как и в случае последовательного соединения элементов, эту цепь удобно исследовать с помощью векторных диаграмм.

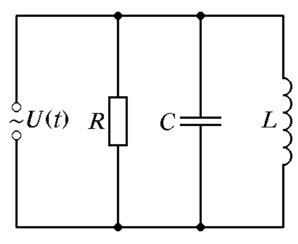

Рисунок 9: Параллельное соединение R, L, C

Напряжение на всех параллельно соединенных элементах одинаково и равно приложенному напряжению $U(t)$. Мгновенное значение квазистационарного тока в неразветвленной части цепи $I(t)$ равно алгебраической сумме токов в параллельных участках: $I(t) = I_R + I_C + I_L$ Поскольку ток через сопротивление R находится в фазе с приложенным напряжением, ток в ветви, содержащей емкость, опережает напряжение на $\pi/2$, а ток через индуктивность отстает от напряжения на $\pi/2$, то векторная диаграмма, соответствующая этой цепи, имеет вид, изображенный на рисунке.

Учитывая связь между амплитудными значениями токов в различных элементах и амплитудным значением приложенного напряжения: $U_0 = I_0 R = I_{0C}/\omega C = I_{0L}\omega L$ с помощью векторной диаграммы на рисунке получаем следующие выражения для амплитуды тока в неразветвленной

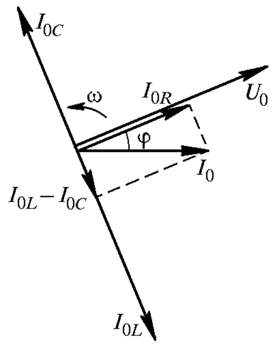

Рисунок 10: Векторная диаграмма параллельной RLC-цепи

части цепи и для сдвига по фазе между приложенным напряжением и этим током:

$$I_0 = U_0\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2},$$
$$\operatorname{tg}\varphi = R\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right).$$

Таким образом, ток в неразветвленной части цепи равен $I = I_0\cos(\omega t - \varphi)$, где I_0 и φ определены. Векторная диаграмма дает также возможность написать выражение для мгновенных значений тока в отдельных ветвях цепи:

$$I_R = \frac{U_0}{R}\cos\omega t, \quad I_L = \frac{U_0}{\omega L}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad I_C = U_0\omega C\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

и для сдвига по фазе между приложенным напряжением и этим током:

$$I_0 = U_0\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2},$$
$$\operatorname{tg}\varphi = R\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right).$$

При равенстве емкостного и индуктивного сопротивлений, т. е. при $\omega L = 1/\omega C$, сдвиг фаз между током в неразветвленной части цепи и напряжением обращается в нуль. Токи I_C и I_L при этом равны по величине, и так как они находятся в противофазе, то ток в неразветвленной части становится равным току I_R через активное сопротивление. Заметим, что токи I_C и I_L, в отдельных ветвях цепи могут значительно превосходить ток в проводящих проводах. Такая ситуация носит название резонанса токов. При этом, как и в последовательной RLC-цепи при резонансе напряжений, происходит обмен энергией между электрическим и магнитным полями, сосредоточенными в емкости и индуктивности, а источник питания только компенсирует потери энергии за счет выделения джоулевой теплоты на сопротивлении R. Если сопротивление R вообще убрать из цепи ($R \to \infty$), то энергетические потери в такой идеализированной схеме отсутствуют и ток в подводящих проводах равен нулю, хотя в контуре, состоящем из L и C, ток может быть сколь угодно большим. В этом случае на резонансной частоте $\omega = 1/\sqrt{LC}$ полное реактивное сопротивление контура неограниченно возрастает.

Резонанс токов, наряду с резонансом напряжений, широко используется в технике. В качестве примера можно указать на использование резонансных свойств RLC-цепи для выделения сигнала нужной частоты в антенне радиоприемника при настройке на определенную радиостанцию. Другим важным примером использования резонанса токов является индукционная печь, в которой нагревание и плавление металлов производятся вихревыми токами. Параллельно нагревающей катушке, в которую помещается разогреваемый металл, присоединяют конденсатор и подбирают его емкость так, чтобы получить на частоте питающего генератора резонанс токов. Тогда через подводящие провода и генератор пойдет сравнительно небольшой ток, который может быть во много раз меньше тока в LC-контуре, образованном конденсатором и нагревающей катушкой.

Закон Ома

Закон Ома - это утверждение о пропорциональности между током и напряжением в цепи. Рассмотрим для простоты участок цепи, содержащий последовательно соединенные резистор R, конденсатор C и катушку индуктивности L. Как было показано, вид закона Ома имеет только соотношение между амплитудными значениями тока и напряжения в цепи:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}.$$

Наличие определенного сдвига по фазе φ между током и напряжением приводит к тому, что мгновенные значения тока и напряжения не пропорциональны друг другу и мы не можем с помощью вещественных чисел представить ток в цепи как отношение приложенного напряжения к сопротивлению.

Однако это можно легко сделать, используя комплексные числа. Разумеется, ток, напряжение и сопротивление цепи, как и любые другие измеряемые на опыте физические величины, должны выражаться вещественными числами. Мгновенные значения интересующих нас физических величин получаются в результате проецирования векторной диаграммы. Но вектор на плоскости можно задать с помощью комплексного числа. Будем фиксировать мгновенное значение каждого из вращающихся векторов заданием некоторого комплексного числа. В частности, вектору, изображающему ток, сопоставим комплексное число $\tilde{I}$, вектору, изображающему напряжение, - комплексное число $\tilde{U}$. Поскольку угол φ между этими вращающимися векторами постоянен, комплексные числа $\tilde{U}$ и $\tilde{I}$, сопоставляемые этим векторам, можно связать равенством $\tilde{I} = \tilde{U}/Z$, где $Z-$ некоторое постоянное комплексное число.

Это соотношение формально имеет вид закона Ома для участка цепи, причем комплексное число Z как-то характеризует сопротивление этого участка цепи переменному току. Найдем вид этого числа. Запишем выражения для $\tilde{U}$ и $\tilde{I}$ в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= U_0(\cos\omega t + i\sin\omega t) \\ \tilde{I} &= I_0[\cos(\omega t - \varphi) + i\sin(\omega t - \varphi)] \end{aligned}$$

и учтем, что разность аргументов этих комплексных чисел равна постоянному сдвигу фаз φ между напряжением и током. Используя правило деления комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, получим

$$Z = \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = \frac{U_0}{I_0}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = Z_0(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Таким образом, модуль Z_0 комплексного числа Z, равен

$$Z_0 = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

а его аргумент φ представляет собой сдвиг фаз между напряжением и током. Переходя от тригонометрической к алгебраической форме комплексного числа и учитывая, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z}, \quad Z_0 = \sqrt{(\operatorname{Re} Z)^2 + (\operatorname{Im} Z)^2},$$

получаем для Z выражение

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Комплексное число Z полностью характеризует сопротивление рассматриваемого участка цепи синусоидальному переменному току с частотой ω. Оно носит название комплексного сопротивления или импеданса цепи. Зная Z, легко найти амплитуду тока и сдвиг по фазе между напряжением и током.

Импеданс последовательной цепи можно получить, если элементам схемы R, L и C сопоставить комплексные сопротивления переменному току по следующему правилу:

$$R \to R, \quad L \to i\omega L, \quad C \to \frac{1}{i\omega C},$$

после чего сложить эти «сопротивления» по правилу сложения сопротивлений в последовательной цепи.

Полученный рецепт имеет совершенно общий характер и справедлив для любой разветвленной цепи: всем элементам сопоставляются комплексные сопротивления, которые затем складываются по правилам для цепей постоянного тока.

Если воспользоваться формулой Эйлера, можно сделать полученное выражение компактнее:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

При этом, очевидно, $\tilde{U} = U_0 e^{i\omega t}$, $\tilde{I} = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$ и

$$Z = \tilde{U}/\tilde{I} = Z_0 e^{i\varphi}$$

Работа и мощность переменного тока

Как мы видели, в цепи синусоидального переменного тока, вообще говоря, возникает сдвиг по фазе между приложенным напряжением и током:

$$U(t) = U_0 \cos\omega t, \quad I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi).$$

Сдвиг фаз φ зависит от соотношения между активным и реактивными сопротивлениями и тем самым от частоты ω. Поскольку напряжение и ток в цепи изменяются с частотой ω, то при подсчете работы тока нужно рассматривать настолько малый промежуток времени Δt, чтобы значения напряжения и тока можно было считать постоянными:

$$\Delta A = I(t)U(t)\Delta t.$$

Отсюда получается следующее выражение для мгновенной мощности тока:

$$P(t) = \Delta A/\Delta t = I(t)U(t).$$

Подставив сюда значения $I(t)$ и $U(t)$, получаем

$$P(t) = U_0 I_0 \cos\omega t \cdot \cos(\omega t - \varphi).$$

Воспользовавшись тригонометрическим тождеством

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)],$$

перепишем выражение $P(t)$ в следующем виде:

$$P(t) = \frac{1}{2} I_0 U_0 [\cos\varphi + \cos(2\omega t - \varphi)].$$

Выражение для мгновенной мощности состоит из двух слагаемых: одно из них не зависит от времени, а второе осциллирует с удвоенной частотой 2ω. Это значит, что дважды за каждый период изменения приложенного напряжения изменяется направление потока энергии: в течение какой-то части периода энергия поступает в цепь от источника переменного напряжения, а в течение другой части возвращается обратно. Средний за период поток энергии положителен, т. е. энергия поступает в цепь от источника.

Если интересоваться работой переменного тока за промежуток времени, сравнимый с периодом $T = 2\pi/\omega$, то в выражении для мощности следует учитывать оба слагаемых. При вычислении работы, совершаемой током за промежуток времени, значительно превышающий период, вклад второго слагаемого будет пренебрежимо малым. В этом случае можно пользоваться выражением для средней мощности P :

$$P = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos\varphi.$$

Часто эту формулу записывают в виде

$$P = IU\cos\varphi,$$

где I и U - так называемые действующие значения силы тока и напряжения, в $\sqrt{2}$ раз меньшие соответствующих амплитудных значений:

$$I = I_0/\sqrt{2}, \quad U = U_0/\sqrt{2}.$$

Использование действующих значений вместо амплитудных удобно потому, что в нагрузке с чисто активным сопротивлением, где $\varphi = 0$, выражение для средней мощности будет таким же, как и для постоянного тока.

Потери в линиях передачи

Потребителю обычно подается напряжение определенной величины U, поэтому одна и та же мощность P будет потребляться при разных значениях тока в цепи I в зависимости от сдвига фазы между током и напряжением. При малых значениях $\cos\varphi$ ток должен быть большим, что приводит к большим тепловым потерям в подводящих проводах линии передачи.

Если r - сопротивление линии передачи, то рассеиваемая мощность тепловых потерь в линии P_1 равна I^2r. Выражая ток в цепи, для P_1 получаем

$$P_1 = \frac{P^2}{U^2\cos^2\varphi}r.$$

Для уменьшения потерь следует добиваться как можно меньшего сдвига фазы между током и напряжением в нагрузке.

Большинство современных потребителей электрической энергии синусоидального тока представляют собой нагрузки индуктивного характера, токи в которых отстают по фазе от напряжения источника питания. Эквивалентную схему такого потребителя можно изобразить в виде последовательно соединенных активного сопротивления R и индуктивности L (рисунок (а)).

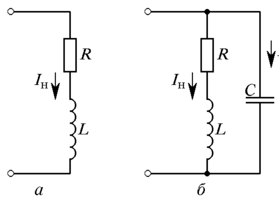

Рисунок 11: Эквивалентная схема для потребителя с индуктивной нагрузкой (а) и включение вспомогательного конденсатора для увеличения $\cos\varphi$ (б)

Соответствующая векторная диаграмма показана ниже. Ток $I_н$ через нагрузку отстает от приложенного напряжения на определенный угол $\varphi_н$. Потребляемая нагрузкой мощность равна

$$P = \frac{1}{2}U_0 I_{0н}\cos\varphi_н.$$

Из этой формулы видно, что при напряжении U_0 такую же мощность можно было бы получить и при любом другом токе I_0, таком, что изображающий его вектор (показанный штриховой линией на рисунке (а) оканчивается на перпендикуляре AB, опущенном из конца $I_{0\ н}$ на направление U_0, так как при этом $I_0\cos\varphi = I_{0\ н}\ \cos\varphi_н$. Но если $\varphi < \varphi_н$, то $I_0 < I_{0\ н}$ и при той же мощности тепловые потери в подводящих проводах будут меньше.

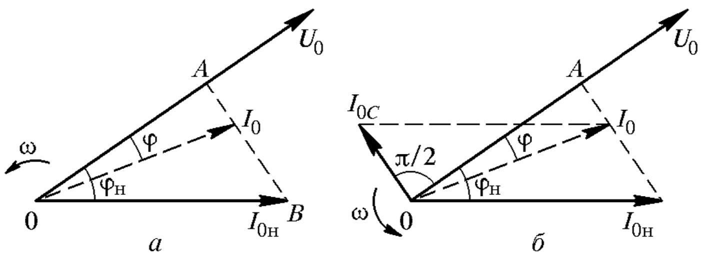

Рисунок 12: Векторные диаграммы для цепей: с индуктивной нагрузкой (а); с индуктивной нагрузкой и вспомогательным конденсатором (б)

Как же добиться того, чтобы сдвиг фаз между напряжением и током в цепи уменьшился? Легко сообразить, что для этого можно подсоединить параллельно нагрузке вспомогательный конденсатор (рисунок (б)). Векторная диаграмма в этом случае будет иметь вид, изображенный ниже. Векторы, изображающие приложенное напряжение U и ток через нагрузку $I_н$, останутся неизменными, а полный ток в неразветвленной цепи, равный сумме токов через нагрузку и вспомогательный конденсатор, будет изображаться вектором I_0. Подбирая емкость конденсатора, можно добиться того, чтобы сдвиг по фазе принял заданное значение φ. Длина вектора I_0 равна

$$I_{OC} = |OA|\left(\operatorname{tg}\varphi_{Н} - \operatorname{tg}\varphi\right).$$

Но $|OA| = I_0 \cos\varphi_\text{Н}$, находим $|OA| = 2P/U_0$. Амплитудное значение тока в конденсаторе I_{0C} связано с амплитудным значением подаваемого напряжения формулой $I_{0C} = U_0\omega C$. Подставляя $|OA|$ и I_{0C} в выражение для тока I_{0C}, находим

$$C = \frac{2P}{U_0^2\omega}\left(\operatorname{tg}\varphi_\text{н} - \operatorname{tg}\varphi\right).$$

Таким образом, существует достаточно простой и эффективный способ снижения потерь в линиях передачи энергии переменного тока, связанных с реактивным характером сопротивления нагрузки: подключение конденсатора к индуктивной нагрузке позволяет получить равное нулю значение сдвига фаз φ.

Но даже в том случае, когда сопротивление нагрузки является чисто активным и сдвиг фаз между напряжением и током отсутствует, т. е. $\cos\varphi = 1$, тепловые потери в линии передачи все равно неизбежны. Можно ли их каким-либо способом уменьшить? При заданном значении передаваемой потребителю мощности P уменьшить тепловые потери в линии можно, либо уменьшая сопротивление R проводов линии передачи, либо повышая напряжение U переменного тока, подаваемого потребителю. Уменьшение сопротивления линии в настоящее время возможно лишь до известных пределов, поэтому до создания эффективных линий электропередачи приходится повышать напряжение.

Подготовка к контрольной работе №2

ЗАДАЧА 1

Определите ток через индуктивность L через время τ после замыкания ключа K.
$R = 10$ Ом, $L = 10$ Гн, $\mathcal{E} = 12$ В, $\tau = 1$ с, $I_L-?$

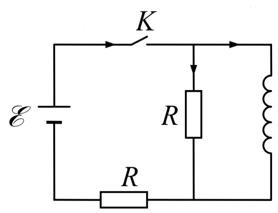

Рисунок 13

ЗАДАЧА 2

К сети с действующим напряжением U подключили катушку, индуктивное сопротивление которой X_L и импеданс Z. Найти разность фаз между током и напряжением, а также тепловую мощность, выделяемую в катушке.
$U = 100$ В, $X_L = 30$ Ом, $Z = 50$ Ом, $\varphi-?$ $P-?$

ЗАДАЧА 3

Цепь из последовательно соединенных конденсатора емкости C, сопротивления R и катушки с индуктивностью L и пренебрежимо малым активным сопротивлением подключена к генератору синусоидального напряжения, частоту которого можно менять при постоянной амплитуде. Найти частоту, при которой максимальна амплитуда напряжения:
а) на конденсаторе; б) на катушке.
$C = 30$ мкФ, $R = 210$ Ом, $L = 5$ Гн, $\omega_1-?$ $\omega_2-?$

Контрольные вопросы

1. В каких случаях явления в электрических цепях называются квазистационарными?
2. Как связаны между собой сила тока и изменяющееся приложенное напряжение в цепи, содержащей только обычное (активное) сопротивление R? 3. Как связаны между собой сила тока и приложенное напряжение в цепи, содержащей только емкость C или только индуктивность L? Можно ли этой связи придать вид закона Ома? Применимы ли соответствующие соотношения при несинусоидальном приложенном напряжении?
4. Объясните физическую причину возникновения сдвига по фазе между приложенным синусоидальным напряжением и силой тока в цепях, содержащих емкость и индуктивность.
5. Что такое реактивное сопротивление? В каких случаях имеют смысл понятия индуктивного и емкостного сопротивлений?
6. В чем заключаются достоинства переменного тока синусоидальной формы?
7. Как преобразуются прямоугольные импульсы RC-цепочкой? Рассмотрите случай, когда длительность импульсов много больше $\tau = RC$ и когда она много меньше τ.
8. Поясните идею метода векторных диаграмм для расчета цепей синусоидального переменного тока?
9. Рассмотрите последовательную RC-цепочку и постройте соответствующую ей векторную диаграмму. Найдите сдвиг фаз между приложенным напряжением и током в цепи. Будет ли ток отставать от напряжения или опережать его?
10. Рассмотрите последовательную RL-цепочку и постройте соответствующую ей векторную диаграмму. Найдите сдвиг фаз между приложенным напряжением и током в цепи. Будет ли ток отставать от напряжения или опережать его?
11. При каких соотношениях между параметрами последовательной RLC-цепи ток в ней опережает по фазе приложенное напряжение, а при каких — отстает от него?
12. Поясните, почему на векторной диаграмме для параллельной RLC-цепи складываются токи, а не напряжения?
13. Что такое резонанс напряжений и резонанс токов? Какие энергетические превращения при этом происходят в цепи?