Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Отчёт
По расчётно-графической работе
Математического анализа
Вариант: 21

Выполнили:
Касьяненко Вера Михайловна P3120
Принял:
Цветков Константин Борисович

г. Санкт-Петербург

2023 г.

Страница 17

Задача 1

Исследовать ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(3n)}{\sqrt[5]{n^7}}$

Признак Даламбера.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$

при $q < 1$ – ряд сходится, $q > 1$ – ряд расходится, $q = 1$ – получаем неопределенность (дополнительные исследования).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(3n+3)}{\sqrt[5]{(n+1)^7}}}{\frac{\ln(3n)}{\sqrt[5]{n^7}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(3n+3)}{\ln(3n)} * \frac{\sqrt[5]{n^7}}{\sqrt[5]{(n+1)^7}} = 1$$

Поскольку $q = 1$, то получаем неопределенность.

Исследуем сходимость ряда при помощи интегрального признака сходимости Коши.

Рассмотрим несобственный интеграл:

$\int \frac{\ln(3x)}{\sqrt[5]{n^7}} dx$

Процесс интегрирования можно упростить, если сделать замену переменных:

$t = 3x$

Тогда исходный интеграл можно записать так:

$\int 3^{\frac{2}{5}} \frac{\ln(t)}{\sqrt[5]{t^7}} dt$

Формула интегрирования по частям:

$\int U(x) * dV(x) = U(x) * V(x) - \int V(x) * dU(x)$

Исходный интеграл представим как:

$3^{\frac{2}{5}} \int \frac{\ln(t)}{\sqrt[5]{t^7}} dt$

Найдем:

$\int \frac{\ln(t)}{\sqrt[5]{t^7}} dt$

а затем результат домножим на $3^{\frac{2}{5}}$

Пусть:

$U = ln(t)$

$dV = \frac{\frac{1}{t^7}}{5} dt$

Тогда:

$dU = \frac{1}{t} dt$

$V = -\frac{5}{2} * \frac{1}{t^{\frac{2}{5}}}$

Поэтому:

$\int \frac{\ln(t)}{\sqrt[5]{t^7}} dt = -\frac{5}{2} * \frac{\ln(t)}{\sqrt[5]{t^2}} - \int \left(-\frac{5}{2} * \frac{1}{\sqrt[5]{t^7}}\right) dt = -\frac{5}{2} * \frac{\ln(t)}{\sqrt[5]{t^2}} + \int \frac{5}{2} * \frac{1}{\sqrt[5]{t^7}} * dt$

Находим интеграл:

$\int \frac{5}{2} * \frac{1}{\sqrt[5]{t^7}} * dt = -\frac{25}{4} * \frac{1}{\sqrt[5]{t^2}}$

В итоге получаем:

$\int \frac{\ln(t)}{\sqrt[5]{t^7}} = -\frac{5}{2} * \frac{\ln(t)}{\sqrt[5]{t^2}} - \frac{25}{4} * \frac{1}{\sqrt[5]{t^2}} + C = -\frac{10*\ln(t)+25}{4\sqrt[5]{t^2}} + C$

С учетом коэффициента $3^{\frac{2}{5}}$, получаем

$\frac{\sqrt[5]{3^2}}{4} * \frac{-10*\ln(t)-25}{\sqrt[5]{t^2}}$

Чтобы записать окончательный ответ, осталось вместо t подставить $3x$.

$\frac{-10*\ln(3x)-25}{4\sqrt[5]{x^2}} + C$

Вычислим определенный интеграл:

$\int_1^\infty \frac{\ln(3n)}{\sqrt[5]{n^7}} dn = \left.\frac{-10\ln(3n)-25}{4\sqrt[5]{x^2}}\right|_1^\infty = -\frac{-10\ln(3)-25}{4}$

Так как несобственный интеграл сходится, то сходится и исследуемый ряд.

Следовательно, ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(3n)}{\sqrt[5]{n^7}}$ сходится.

Задача 2

Исследовать ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 3^n}{(3n-2)^n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$

при $q < 1$ – ряд сходится, $q > 1$ – ряд расходится, $q = 1$ – получаем неопределенность (дополнительные исследования).

$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\frac{(n+1)^3}{(3(n+1)-2)^{n+1}}}{3^n \frac{n^3}{(3n-2)^n}} = \lim_{n\to\infty} 3^{n+1} \frac{(n+1)^3}{3^n * n^3} * \frac{(3n-2)^n}{(3n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} 3(n+1)^3 * \frac{(3n-2)^n}{n^3(3n+1)(3n+1)^n} = 0$

Поскольку $q < 1$, то ряд сходится.

Следовательно, ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 3^n}{(3n-2)^n}$ сходится.

Задача 3

Исследовать ряд на абсолютную сходимость: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(2n-1)}$

Коэффициент общего члена не влияет на сходимость или расходимость ряда, поэтому выносим его за пределы суммы:

$(-1)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\ln(2n-1)}$

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\ln(2n-1)}$

Рассмотрим первые три члена ряда:

$\frac{1}{\ln(3)}, -\frac{1}{\ln(5)}, \frac{1}{\ln(7)}$

Это числовой знакочередующийся ряд, исследуем его по признаку Лейбница.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(2n-1)}$

а) По первому признаку Лейбница каждый последующий член ряда по абсолютной величине должен быть меньше предыдущего, т.е. для нашего ряда это условие выполняется

$\frac{1}{\ln(3)} > \frac{1}{\ln(5)} > \frac{1}{\ln(7)}$

б) По второму признаку Лейбница предел ряда должен стремится к 0.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(2n-1)} = 0$

Второе условие Лейбница выполняется.

Таким образом, рассматриваемый ряд сходится.

Сравним с рядом $v_n = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(2n-1)} \geq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$

Поскольку $u_n \geq v_n$, то, если ряд v_n будет расходиться, то будет расходиться и исходный u_n.

Так как $\alpha = 1 \ \leq \ 1$, то ряд расходится.

Следовательно, ряд сходится условно.

Задача 4

Исследовать ряд на абсолютную сходимость и вычислить сумму ряда с точностью α:

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{5^n}$, $\alpha = 0{,}001$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$$

при $q\ <\ 1$ – ряд сходится, $q\ >\ 1$ – ряд расходится, $q\ =\ 1$ – получаем неопределенность (дополнительные исследования).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{5^{n+1}}}{\frac{(-1)^n n^3}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{5^{n+1}}*\frac{5^n}{(-1)^n n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)(n+1)^3}{5n^3}=-\frac{1}{5}$$

Поскольку $q\ <\ 1$, то ряд сходится.

Применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^3}{5^n}}$$

Поскольку:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^n}=5$$

Получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^3}{5^n}}=\frac{1}{5}$$

Поскольку полученное значение меньше 1, то ряд сходится.

Следовательно, ряд сходится абсолютно.

Для того чтобы найти с точностью 0,001 сумму данного ряда надо взять столько его членов, чтобы следующий член ряда был по модулю меньше 0,001. Тогда весь остаток ряда, начинающийся с этого члена, будет также меньше 0,001.

Рассмотрим первые члены ряда:

$$\left|-\frac{1}{5}\right|=0{,}2>0{,}001,\left|\frac{8}{25}\right|=0{,}32>0{,}001,\left|-\frac{27}{125}\right|=0{,}216>0{,}001,$$

$$\left|\frac{64}{625}\right|=0{,}1024>0{,}001,\left|-\frac{125}{3125}\right|=0{,}04>0{,}001,\left|\frac{216}{15625}\right|=0{,}013824>0{,}001,$$

$$\left|-\frac{343}{78125}\right|=0{,}0043904>0{,}001,\left|\frac{512}{390625}\right|=0{,}00131072>0{,}001,$$

$$\left|-\frac{729}{1953125}\right|=0{,}000373248<0{,}001$$

Поэтому с точностью 0,001:

$$S=-\frac{1}{5}+\frac{8}{25}-\frac{27}{125}+\frac{64}{625}-\frac{125}{3125}+\frac{216}{15625}-\frac{343}{78125}+\frac{512}{390625}=-\frac{8928}{390625}\approx-0{,}022\pm0{,}001$$

Страница 17

Задача 1

Найти область сходимости функционального ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(x+5)^n tg\left(\frac{1}{3^n}\right)$

Используя признак Даламбера, найдём интервал сходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+5)^{n+1}tg\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)}{(x+5)^n tg\left(\frac{1}{3^n}\right)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+5)tg\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)}{tg\left(\frac{1}{3^n}\right)}\right| = \frac{|x+5|}{3}$$

Ряд сходится при $\frac{|x+5|}{3} < 1$. То есть $|x+5| < 3$

$$\begin{cases} x < -2, x \geq -5 \\ x > -8, x < -5 \end{cases}$$

В результате мы получили интервал сходимости: $x \in (-8, -2)$.

Сразу проконтролируем значение $x = 0$, чтобы оно не вошло в область сходимости ряда.

Теперь проверим сходимость ряда на концах этого интервала.

Пусть $x = -8$

Получаем ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} tg\left(\frac{1}{3^n}\right)(-8+5)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-3)^n tg\left(\frac{1}{3^n}\right)$$

Исследуем сходимость ряда при помощи признаков сходимости.

Рассмотрим первые три члена ряда:

$$-3tg\left(\frac{1}{3}\right), 9tg\left(\frac{1}{9}\right), -27tg\left(\frac{1}{27}\right)$$

Это числовой знакочередующийся ряд, исследуем его по признаку Лейбница.

$$\lim_{n\to\infty} 3^n tg\left(\frac{1}{3^n}\right)$$

а) По первому признаку Лейбница каждый последующий член ряда по абсолютной величине должен быть меньше предыдущего, то есть для нашего ряда это условие выполняется

$$3tg\left(\frac{1}{3}\right) > \ 9tg\left(\frac{1}{9}\right) > 27tg\left(\frac{1}{27}\right)$$

б) По второму признаку Лейбница предел ряда должен стремиться к 0.

$$\lim_{n\to\infty} 3^n tg\left(\frac{1}{3^n}\right) = 1$$

Второе условие Лейбница не выполняется.

Таким образом, рассматриваемый ряд расходится (один из признаков не выполняется).
Ряд расходится, значит, $x = -8$ – точка расходимости.
При $x = -2$ получаем ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} tg\left(\frac{1}{3^n}\right)(-2+5)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 3^n tg\left(\frac{1}{3^n}\right)$$

Исследуем его сходимость при помощи признаков сходимости.

В силу свойств замечательных пределов, исходное выражение можно упростить:

$\lim_{n\to\infty} tg\left(\frac{1}{3^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n}$

Тогда исходный ряд можно представить в виде:

$\sum_{n=1}^{\infty} 1$

Сумма этого ряда стремится к ∞. Ряд расходится, значит, $x = -2$ – точка расходимости.

Таким образом, данный степенной ряд является сходящимся при: $x \in (-8, -2)$

Страница 38

Задача 1

Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням *x*: $\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$

$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-5x}} = \frac{x^2}{2}\left(1 + \left(-\frac{5}{4}x\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$

Используем стандартное разложение в биномиальный ряд степенной функции:

$(1+t)^m = 1 + mt + \frac{m(m-1)}{2!}t^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}t^3 + \cdots$

Пусть $t = -\frac{5}{4}x$, а $m = -\frac{1}{2}$

$(1+t)^m = 1 - \frac{t}{2} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)*\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}t^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)*\left(-\frac{3}{2}\right)*\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}t^3 + \cdots = 1 - \frac{t}{2} + \frac{3t^2}{8} - \frac{5t^3}{16} + \cdots$

Подставим $-\frac{5}{4}x$ вместо *t*

$1 + \frac{5}{8}x + \frac{75}{128}x^2 + \frac{625}{1024}x^3 + \cdots$

Подставим в изначальное выражение и получим разложение:

$$\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}} = \frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{5}{8}x + \frac{75}{128}x^2 + \frac{625}{1024}x^3 + \cdots\right) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{75}{256}x^4 + \frac{625}{2048}x^5 + \cdots$$

Использованное выше разложение функции$(1+t)^m$ в биномиальный ряд справедливо для $-1 < t < 1$, а, следовательно, и для x

$-1 < -\frac{5}{4}x < 1 \to -\frac{4}{5} < x < \frac{4}{5}$

Найденный интервал сходимости и является интервалом сходимости полученного ряда Тейлора для функции $f(x)$.

Задача 2

Вычислить интеграл с точностью до 0,001: $\int_0^{0,2} \sin(25x^2)dx$

Разложим функцию $sint$ в ряд Маклорена:

$$sint = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}t^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

При $t = 25x^2$получим $\sin(25x^2) = 25x^2 - \frac{5^6x^6}{3!} + \frac{5^{10}x^{10}}{5!} - \frac{5^{14}x^{14}}{7!} + \cdots +$
$+ \frac{(-1)^{n+1}5^{4n-2}x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \cdots$

Почленно интегрируем

$$\int_0^{0,2} \sin(25x^2)\,dx = \frac{25x^3}{3}\Big|_0^{0,2} - \frac{5^6x^7}{3!7}\Big|_0^{0,2} + \frac{5^{10}x^{11}}{5!11}\Big|_0^{0,2} - \frac{5^{14}x^{15}}{7!15}\Big|_0^{0,2} + \cdots +$$
$$+ \frac{(-1)^{n+1}5^{4n-2}x^{4n-1}}{(2n-1)!}\Big|_0^{0,2} + \cdots = \frac{5^2 0{,}2^3}{3} - \frac{5^6 0{,}2^7}{3!7} + \frac{5^{10} 0{,}2^{11}}{5!11} - \frac{5^{14} 0{,}2^{15}}{7!15} + \cdots +$$
$$+ \frac{(-1)^{n+1}5^{4n-2}0{,}2^{4n-1}}{(2n-1)!} + \cdots = \frac{0{,}2}{3} - \frac{0{,}2}{42} + \frac{0{,}2}{1320} - \frac{0{,}2}{75600} + \cdots$$

Этот ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, поэтому он сходится и его сумма

$$\int_0^{0,2} \sin(25x^2)\,dx = \frac{0{,}2}{3} - \frac{0{,}1}{21} + \frac{1}{6600} - \frac{1}{37800} + \cdots \approx \frac{1}{15} - \frac{1}{210} = \frac{13}{210} \approx 0{,}0619 \approx 0{,}062$$

Так как $\frac{1}{6600} < \alpha = 0{,}001$

Страница 64

Задача 1

Разложить в ряд Фурье заданную функцию $f(x)$, построить графики функции $f(x)$ и суммы ее ряда Фурье. Если не указывается, какой вид разложения в ряд необходимо представить, то требуется разложить функцию либо в общий тригонометрический ряд Фурье, либо следует выбрать оптимальный вид разложения в зависимости от данной функции.

$$f(x) = \begin{cases} cosx, 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \end{cases}$$

по синусам кратных дуг;

Ряд Фурье по синусам в общем случае существует только для нечетной функции. Для того, чтобы построить ряд Фурье по синусам для нашей функции, продолжим ее нечетным образом на промежуток $(0; \pi]$. Затем, считая, что период разложения $T = 2\pi$, воспользуемся стандартным видом ряда Фурье для нечетной функции:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{b_n} sinn\omega t$$

$$\widetilde{b_n} = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x) sinn\omega x dx, n = 1, 2, \ldots$$

Вычислим коэффициенты:

$$\widetilde{b_n} = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx \sin\left(\frac{\pi n x}{\pi}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0 \sin\left(\frac{\pi n x}{\pi}\right) dx\ \right] = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{cosx\cos(nx)}{n}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right] =$$

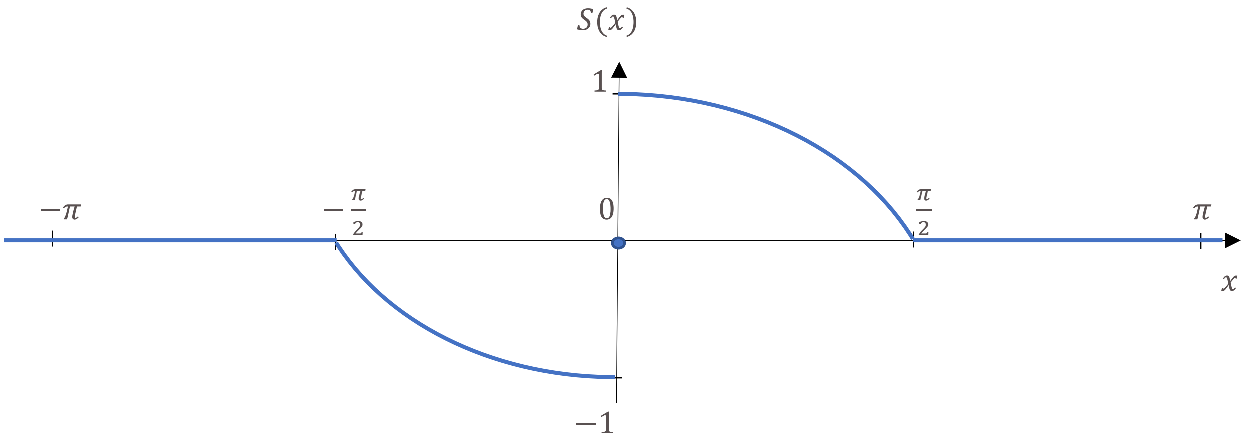
$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-cosx\ cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+cosx}{n}\right] = \frac{2cosx\left(1- cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)}{\pi n}$$

В точке разрыва функции $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$ ряд Фурье сойдётся к изолированному значению, которое располагается ровно посередине «скачка» разрыва.
Левосторонний предел для $x = 0$: $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} \cos(-2\pi) = -1$;
правосторонний: $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} \cos(0) = 1$. Ордината средней точки равна 0.
Пределы для $x = \frac{\pi}{2}$: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+0} 0 = 0$.

Применив теорему Дирихле, видим, что

$f(x) = S(x)$ при $x \neq 2\pi k$, и $S(2\pi k) = 0$ при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Таким образом, график суммы этого ряда имеет вид:



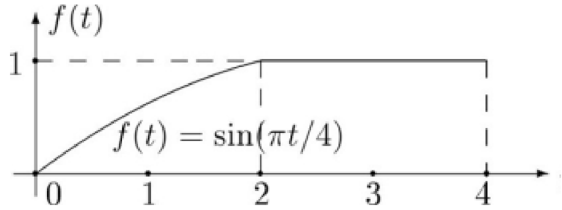
Ответ:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2cosx\left(1- cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)}{\pi n}\right]\sin(nx)$$

при $x \neq 2\pi k$ и $S(2\pi k) = 0, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Задача 2

Для заданной графически функции $f(t)$ построить ряд Фурье в комплексной форме, изобразить график суммы построенного ряда.



Ряд Фурье для функции в комплексной форме имеет вид $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega nt}$,
$c_n = \frac{1}{T}\int_a^b f(t)e^{-i\omega nt}dt,\ \ \omega = \frac{2\pi}{T}$

Зададим функцию, график которой изображен на рисунке, аналитически.

$$f(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right),\ 0 \le t \le 2 \\ 1,\ 2 \le t \le 4 \end{cases}$$

Таким образом, $a = 0, b = 4, T = 4, \omega = \frac{\pi}{2}$

$$c_n = \frac{1}{4}\left[\int_0^2 \left(\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)\right) e^{-i\frac{\pi}{2}nt}dt + \int_2^4 e^{-i\frac{\pi}{2}nt}dt\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{4e^{-\frac{i\pi nt}{2}}}{\pi} + \frac{2}{-i\pi n}e^{-2i\pi n} - \frac{2}{-i\pi n}e^{-i\pi n}\right] =$$

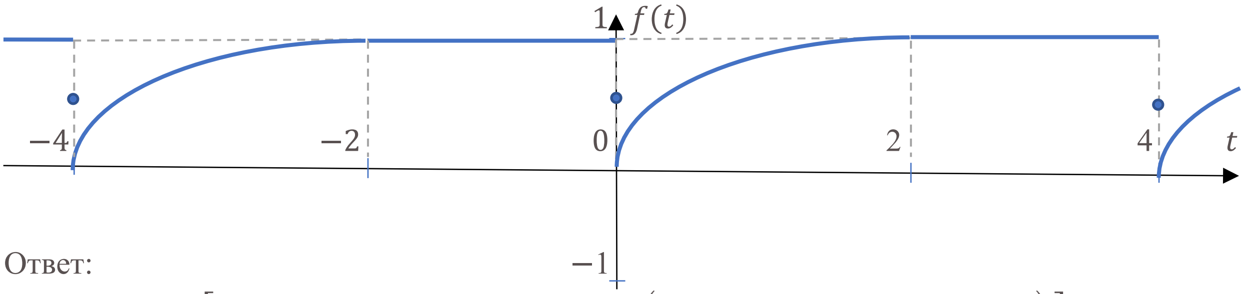
$$= \frac{e^{-\frac{i\pi nt}{2}}}{\pi} - \frac{i\,e^{-2i\pi n}\left(-1 + e^{i\pi n}\right)}{2\,\pi\,n} = \frac{2\,n\,cos\left(\frac{\pi\,n\,t}{2}\right) - sin(\pi\,n) + sin(2\,\pi\,n)}{2\,\pi\,n} - \frac{i\left(2\,n\,sin\left(\frac{\pi\,n\,t}{2}\right) + cos(\pi\,n) - cos(2\,\pi\,n)\right)}{2\,\pi\,n}$$

Отметим, что коэффициенты c_n связаны с коэффициентами a_n, b_n общего ряда Фурье следующим образом:

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n),\ n \le 0 \\ \frac{1}{2}(a_n + ib_n),\ n > 0 \end{cases}$$

Затем, используя теорему Дирихле о поточечной сходимости ряда Фурье, видим, что построенный ряд Фурье в комплексной форме сходится к периодическому, периода $T = 4$, продолжению исходной функции при всех $t \ne 4n$, и $S(4n) = \frac{1}{2}$ при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

График суммы этого ряда Фурье имеет следующий вид:



Ответ:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{2\,n\,cos\left(\frac{\pi\,n\,t}{2}\right) - sin(\pi\,n) + sin(2\,\pi\,n)}{2\,\pi\,n} - \frac{i\left(2\,n\,sin\left(\frac{\pi\,n\,t}{2}\right) + cos(\pi\,n) - cos(2\,\pi\,n)\right)}{2\,\pi\,n}\right] e^{-\frac{i\pi nt}{2}}$$

при $t \ne 4n$ и $S(4n) = \frac{1}{2}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$