

Seminar 3

Введение в классическую механику

Victor Ivanov Yu.*

Аннотация

Physics and Mathematics

Содержание

1 Преобразование Галилея	1
2 Центр масс	2
3 Упражнения	2
4 Homework	3

1 Преобразование Галилея

Галилео Галилей (1564–1642), итальянский ученый, профессор математики в Пизе. Только те, кто побывал в Пизе, могут оценить вдохновение (для изучения свободного падения тел из разных материалов) от невероятно падающей башни. *Opus magnum* Галилея (справа) был опубликован Elsevier в 1638 году. Предоставлено Википедией (общественное достояние).

Вывод следует из первого закона Ньютона. Рассмотрим две системы, где одна движется относительно другой,

$$x' = x + f(t)$$

Тогда для ученого в покоящейся системе координат, сила действующая на тело будет пропорциональна ускорению $\frac{d^2x}{dt^2}$. Для ученого в движущейся системе координат (в штрихованной) та же сила будет равна $\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2f}{dt^2}$. Здесь $\frac{d^2f}{dt^2}$ кажущаяся сила.

Условие линейности функции $f(t)$ дает $x' = x + vt$. Теперь следует важный шаг в рассуждениях. Запишем в самом общем виде линейное преобразование координат и времени (поэтому силы, вычисляемые в обеих системах координат, одинаковы):

$$\begin{cases} x' = Ax + Bt \\ t' = Cx + Dt \end{cases}.$$

*VI

Такое преобразование должно быть обратимо, очевидно. Тогда можно показать, что должно выполняться $A = D$.

Преобразование Галилея

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}.$$

2 Центр масс

Рассмотрим теперь важное приложение закона сохранения импульса.

Определение 2.1. Для системы из N частиц, движущихся в \mathbb{R}^n , центром масс системы в фиксированный момент времени является вектор $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, заданный формулой

$$\mathbf{c} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{M} \mathbf{x}^j$$

где $M = \sum_{j=1}^N m_j$ полная масса системы.

Дифференцируя по времени

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \dot{\mathbf{x}}_j = \frac{\mathbf{p}}{M}$$

где \mathbf{p} полный импульс системы.

Утверждение 2.1. Предположим, что полный импульс \mathbf{p} системы сохраняется. Тогда центр масс движется прямолинейно с постоянной скоростью. А именно,

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}(t_0) + (t - t_0) \frac{\mathbf{p}}{M}$$

Доказательство. Очевидно ■

Рассмотрим элементарный пример:

Задача 2.1. Два шарика массой 250 г каждый, соединенные нитью длиной 1 м, движутся по гладкой горизонтальной поверхности. В некоторый момент один из шариков неподвижен, а скорость другого равна 4 м/с и направлена перпендикулярно нити. Чему равна сила натяжения нити?

Решение. Elementary ■

3 Упражнения

Задача 3.1. Тело брошено под углом к горизонту с высоты 10 м над поверхностью земли со скоростью 20 м/с. Чему будет равна его скорость на высоте 25 м?

Решение. Elementary ■

Задача 3.2. Кинетическая энергия частицы, движущейся по окружности радиуса R , зависит от пройденного пути s по закону $T = as^2$, где a постоянная величина. Найти силу, действующую на частицу, в зависимости от s .

Решение. Elementary ■

Задача 3.3. Частица движется вдоль оси x по закону $x = \alpha t^2 - \beta t^3$, где α и β – положительные постоянные. В момент $t = 0$ сила, действующая на частицу, равна F_0 . Найти значения F_x силы в точках поворота и в момент, когда частица опять окажется в точке $x = 0$.

Решение. Elementary ■

Задача 3.4. Аэростат массы $m = 250$ кг начал опускаться с ускорением $a = 0.2$ м/с². Определить массу балласта, который следует сбросить за борт, чтобы аэростат получил такое же ускорение, но направленное вверх.

Решение. Elementary ■

Задача 3.5. Небольшое тело пустили вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 15^\circ$ с горизонтом. Найти коэффициент трения, если время подъема тела оказалось в 2 раза меньше времени спуска.

Решение. Elementary ■

Задача 3.6. Тело массы m бросили под углом к горизонту с начальной скоростью v_0 . Найти приращение импульса $\Delta \mathbf{p}$ тела за первые t секунд движения и модуль приращения импульса тела за все время движения.

Решение. Elementary ■

Задача 3.7. На экваторе с высоты $h = 500$ м на поверхность Земли падает тело (без начальной скорости относительно Земли). На какое расстояние и в какую сторону отклонится от вертикали тело при падении?

Решение. Elementary ■

4 Homework

Задача 4.1. Гладкий горизонтальный диск вращают с угловой скоростью $\omega = 5$ рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. В центре диска поместили небольшую шайбу массой $m = 60$ г и сообщили ей толчком горизонтальную скорость $v_0 = 2.6$ м/с. Найти модуль силы Кориолиса, действующей на шайбу в системе отсчета "диск" через $t = 0.5$ с после начала ее движения.

Решение. Elementary ■

Задача 4.2. Поезд массы $m = 2000$ т движется на северной широте $\phi = 60^\circ$. Определить модуль и направление силы бокового давления поезда на рельсы, если он движется вдоль меридиана со скоростью $v = 54$ км/ч.

Решение. Elementary ■

Задача 4.3. Частица массы m движется по внутренней гладкой поверхности вертикального цилиндра радиуса R . Найти силу давления частицы на стенку цилиндра, если в начальный момент ее скорость равна v_0 и составляет угол α с горизонтом.

Решение. Elementary ■