Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Отчёт
По расчётно-графической работе
по Линейной алгебре
Вариант: 5

Выполнили:
Кремпольская Екатерина Александровна
Касьяненко Вера Михайловна
Р3120

Принял:
Цветков Константин Борисович

г. Санкт-Петербург

2023 г.

Задача №1

Найти норму векторов **a** и **b** и угол между ними в евклидовом пространстве

$\boldsymbol{a} = (0, 2, 1, 2),\ \boldsymbol{b} = (1, 3, 1, 1).$

Решение:

Норма (длина) вектора x в евклидовом пространстве считается по формуле $\|x\| = = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

$\|a\| = \sqrt{0+4+1+4} = \sqrt{9} = 3$

$\|b\| = \sqrt{1+9+1+1} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Угол φ между двумя векторами a и b определяется равенством $cos\varphi = \frac{(a,b)}{\|a\|*\|b\|}$, где $0 \le \varphi < \pi$

Найдем скалярное произведение векторов:

$a * b = a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + a_3 * b_3 + a_4 * b_4 = 0 * 1 + 2 * 3 + 1 * 1 + + 2 * 1 = 9$

$cos\varphi = \frac{9}{3*2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\varphi = 30°$

Задача №2

Найти норму элементов **f** и **g** и угол между ними в евклидовом пространстве многочленов с вещественными коэффициентами и скалярным произведением $\int_0^1 f(x)g(x)dx$

$f(x) = -x, g(x) = x - 1$

Решение:

Чтобы найти нормы элементов f и g, найдем скалярные квадраты:

$(f,f) = \int_0^1 (-x)(-x)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \ => \ \|f\| = \sqrt{\frac{1}{3}}$

$(g,g) = \int_0^1 (x-1)(x-1)dx = (\frac{x^3}{3} - x^2 + x)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \ => \ \|g\| = \sqrt{\frac{1}{3}}$

Далее найдем угол:

$(f,g) = \int_0^1 (-x)(x-1)dx = (-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2})\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$

$cos\varphi = \frac{(f,g)}{\|f\|*\|g\|} = \frac{\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1}{3}}*\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2},\ 0 \le \varphi < \pi$

$\varphi = 60°$

Задача №3

Проверить, что система векторов ортогональна в E^4, дополнить её до ортогонального базиса (дополнение не единственно)

$a_1 = (3, 1, 1, 1),\ a_2 = (1, -3, 0, 0)$

Решение:

Используем необходимое и достаточное условие ортогональности двух векторов $a_1 \perp a_2 <=> a_1 * a_2 = 0$

$a_1 * a_2 = 3 - 3 + 0 + 0 = 0 => a_1 \perp a_2$

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) -$ искомый вектор, ортогональный векторам a_1 и a_2. Тогда $a_1 * x = 0$ и $a_2 * x = 0$. Это приводит к однородной системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

Решим эту систему методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0 & 1 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}3x_3 - 0{,}3x_4 \\ x_2 = -0{,}1x_3 - 0{,}1x_4 \end{cases}$$

Получено общее решение. Отсюда при $x_3 = -10, x_4 = -10$ получаем частное решение $a_3 = (6{,}2, -10, -10)$ – один из векторов, ортогональных данным векторам a_1 и a_2.

Теперь необходимо подобрать еще один вектор, ортогональный каждому из векторов a_1, a_2 и a_3. Пусть искомый вектор $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. Тогда имеем: $a_1 * y = 0$, $a_2 * y = 0$ и $a_3 * y = 0$. Это приводит к однородной системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0 \\ y_1 - 3y_2 = 0 \\ 6y_1 + 2y_2 - 10y_3 - 10y_4 \end{cases}$$

Решим ее методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -10 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -12 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$$

Получено общее решение. Отсюда при $x_4 = -1$ получаем частное решение $a_4 = (0{,}0{,}1, -1)$ – один из векторов, ортогональных данным векторам a_1, a_2 и a_3.

Таким образом, чтобы получить ортогональный базис векторного пространства R^4 можно добавить к данным векторам a_1 и a_2 векторы $a_3 = (6, 2, -10, -10)$ и $a_4 = (0, 0, 1, -1)$.

Задача №4

С помощью процесса ортогонализации построить ортонормированный базис линейной оболочки, порождённой системой векторов

$a_1 = (2, 1, -2,1),\ a_2 = (-3, -2,4, -4), a_3 = (1, 0, 5, -2), a_4 = (3,2,1,4)$

Решение:

Найдем базис линейной оболочки:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & -1 & 0,5 \\ 0 & -0,5 & 1 & -2,5 \\ 0 & -0,5 & 6 & -2,5 \\ 0 & 0,5 & 4 & 2,5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & -1 & 0,5 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & -1 & 0,5 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Получена ступенчатая матрица, содержащая три ненулевые строки. Значит, ранг данной системы векторов равен 3, и система векторов $\{a_1, a_2, a_3\}$ линейно независима. Следовательно, векторы $\{a_1, a_2, a_3\}$ составляют базис данной линейной оболочки, являющейся подпространством в E^4.

Для построения ортонормированного базиса в E^4 применим метод ортогонализации Грама-Шмидта. Получим

$b_1 = a_1, b_2 = a_2 - x_{12}b_1, b_3 = a_3 - x_{13}b_1 - x_{23}b_2$

Последовательно найдем

$b_1 = a_1 = (2, 1, -2, 1)$

$x_{12} = \frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)} = \frac{(-6-2-8-4)}{(4+1+4+1)} = -\frac{20}{10} = -2$

$b_2 = a_2 - x_{12}b_1 = (-3, -2, 4, -4) + 2(2, 1, -2, 1) = (1, 0,0, -2)$

$x_{13} = \frac{(a_3,b_1)}{(b_1,b_1)} = \frac{(2+0-10-2)}{10} = -1$

$x_{23} = \frac{(a_3,b_2)}{(b_2,b_2)} = \frac{(1+0+0+4)}{(1+0+0+4)} = 1$

$b_3 = a_3 - x_{13}b_1 - x_{23}b_2 = (1, 0, 5, -2) + (2, 1, -2, 1) - (1, 0, 0, -2) = (2, 1,3,1)$

Следовательно, система векторов $\{b_1, b_2, b_3\}$ является искомым ортогональным базисом. Заметим, что ортогональность векторов $\{b_1, b_2, b_3\}$ легко проверяется:

$b_1 * b_2 = 2 + 0 + 0 - 2 = 0$

$b_1 * b_3 = 4 + 1 - 6 + 1 = 0$

$b_2 * b_3 = 2 + 0 + 0 - 2 = 0$

Пусть $b_4 = (a, b, c, d)$, то неизвестные координаты (a, b, c, d) найдутся из условий

$(b_4, b_1) = 2a + b - 2c + d = 0, (b_4, b_2) = a - 2d = 0, (b_4, b_3) = 2a + b + 3c + d = 0$

Так как $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, неизвестные a, b, c можно взять в качестве базисных неизвестных.

Если для свободной (небазисной) неизвестной $d = 1$, то $b_4 = (2, -5, 0, 1)$

Нормировав найденные векторы b_1, b_2, b_3, b_4, построим ортонормированный базис в E^4:

$|b_1| = \sqrt{10}$

$|b_2| = \sqrt{5}$

$|b_3| = \sqrt{4 + 1 + 9 + 1} = \sqrt{15}$

$|b_4| = \sqrt{4 + 25 + 0 + 1} = \sqrt{30}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5} & \frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{-\sqrt{10}}{5} & \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{15}}{15} & \frac{\sqrt{15}}{15} & \frac{\sqrt{15}}{5} & \frac{\sqrt{15}}{15} \\ \frac{\sqrt{30}}{15} & -\frac{\sqrt{30}}{6} & 0 & \frac{\sqrt{30}}{30} \end{pmatrix}$$

Задача №5

Найти базис (находится неоднозначно) ортогонального дополнения подпространства, порождённого системой векторов

$a_1 = (4,3,4,0), \ a_2 = (-1,2,1,-1), a_3 = (0,0,-2,1)$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0{,}75 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

Получена ступенчатая матрица с количеством ненулевых строк $n = 3$, следовательно, ранг матрицы $r(A) = 3$ и векторы являются линейно зависимыми. То есть линейное подпространство L определено векторами a_1, a_2, a_3 и поскольку они линейно независимы, то составляют его базис.

Дополним систему этих двух векторов до базиса R^4 вектором b_1, который удовлетворяет условиям $(a_1, b_1) = 0, (a_2, b_1) = 0$ и $(a_3, b_1) = 0$ и положим $L_1 = b_1$. Вектор b_1 является решением системы из трех уравнений $(a_1, x) = 0, (a_2, x) = 0$ и $(a_3, x) = 0$ и в качестве него можно взять любую фундаментальную систему решений.

Найдем ФСР:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2{,}75 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}5x_4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0{,}5x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

$$X = x_4 \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, $b_1 = (-1, 0{,}1{,}2)^T$

Из выбора вектора b_1 следует, что он составляет базис ортогонального дополнения подпространства $L^{\perp}$, то есть $L_1 = L^{\perp}$.

Задача №6

Найти:

а) проекцию вектора **x** на подпространство, являющееся линейной оболочкой заданных векторов a_1, a_2, a_3, и его ортогональную составляющую;

б) угол между вектором **x** и подпространством, являющимся линейной оболочкой заданных векторов a_1, a_2, a_3;

в) расстояние от вектора **x** до подпространства, являющегося линейной оболочкой заданных векторов a_1, a_2, a_3

$a_1 = (-1{,}0{,}1,-1),\ a_2 = (2{,}0,-1{,}0), a_3 = (-4{,}0{,}3,-2), x = (-3{,}0{,}4{,}1)$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Получена ступенчатая матрица с количеством ненулевых строк $n = 2$, следовательно, ранг матрицы $r(A) = 2$ и векторы являются линейно зависимыми. То есть линейное подпространство L определено векторами a_1, a_2 и поскольку они линейно независимы, то составляют его базис.

Вычисляем скалярные произведения:

$(a_1, a_2) = -2 + 0 - 1 + 0 = -3$

$(a_1, a_1) = 1 + 0 + 1 + 1 = 3$

$(a_2, a_2) = 4 + 0 + 1 + 0 = 5$

$(a_1, x) = 3 + 0 + 4 - 1 = 6$

$(a_2, x) = -6 + 0 - 4 + 0 = -10$

Составим неоднородную систему:

$$\begin{cases} 3l_1 - 3l_2 = 6 \\ -3l_1 + 5l_2 = -10 \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем: $l_1 = 0, l_2 = -2$, т. е. проекция $pr_L x = l_1 a_1 + l_2 a_2 =$ $= -2(2,0-1,0) = (-4,0,2,0)$, а ортогональная составляющая $ort_L x =$ $= x - pr_L x = (-3,0,4,1) - (-4,0,2,0) = (1,0,2,1)$

Таким образом, угол $\varphi = \arccos\left(\frac{(x, pr_L x)}{|x||pr_L x|}\right) = \arccos\left(\frac{20}{\sqrt{26} * \sqrt{20}}\right) = \arccos\frac{\sqrt{130}}{13} \approx$ $\approx 28{,}71°$, а расстояние $\rho(x, L) = \sqrt{1 + 0 + 4 + 1} = \sqrt{6}$

Задача №7

Используя теорию квадратичных форм, привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка; классифицировать поверхность; построить график поверхности в исходной системе координат, отметив систему координат, в которой уравнение поверхности имеет канонический вид

$$-3x^2 + 2xy + 4xz - y^2 - 2yz - 3z^2 + 2x - 4y + 6z - 1 = 0$$

Решение:

$$f(x\,, y\,, z) = -3x^2 - y^2 - 3z^2 + 2xy + 4xz - 2yz$$

Матрица этой квадратичной формы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Столбец коэффициентов линейной формы:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 - 7\lambda^2 - 9\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 + 6\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = \sqrt{6} - 3$$

$$\lambda_3 = -\sqrt{6} - 3$$

- Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} => \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Полагая в последнем равенстве $x_3 = C$, получим $x_1 = C, x_2 = 0$

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = -1$, имеют вид $v = C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C \in \mathbb{C}/\{0\}$.

- Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2 = \sqrt{6} - 3$:

$$\begin{cases} \sqrt{6}x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + (\sqrt{6} + 2)x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + \sqrt{6}x_3 = 0 \end{cases} => \begin{cases} x_1 + \frac{\sqrt{6}}{6}x_2 + \frac{\sqrt{6}}{3}x_3 = 0 \\ x_2 + \left(\sqrt{6} + 2\right)x_3 = 0 \end{cases} => \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + \left(\sqrt{6} + 2\right)x_3 = 0 \end{cases}$$

Полагая в последнем равенстве $x_3 = \mathrm{C}_1$, получим $x_1 = -C, x_2 = \left(\sqrt{6} - 2\right)C$

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2 = \sqrt{6} - 3$, имеют вид $v = C\begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{6} - 2 \\ 1 \end{pmatrix}, C \in \mathbb{C}/\{0\}$.

- Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_3 = -\sqrt{6} - 3$:

$$\begin{cases} -\sqrt{6}x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + (-\sqrt{6} + 2)x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - \sqrt{6}x_3 = 0 \end{cases} => \begin{cases} x_1 + \frac{-\sqrt{6}}{6}x_2 + \frac{-\sqrt{6}}{3}x_3 = 0 \\ x_2 + \left(-\sqrt{6} + 2\right)x_3 = 0 \end{cases} => \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - \left(\sqrt{6} - 2\right)x_3 = 0 \end{cases}$$

Полагая в последнем равенстве $x_3 = C$, получим $x_1 = -C, x_2 = \left(\sqrt{6} - 2\right)C$

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_3 = -\sqrt{6} - 3$, имеют вид $v = C\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{6} - 2 \\ 1 \end{pmatrix}, C \in \mathbb{C}/\{0\}$.

Нормируя векторы, получим:

$$e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3$$

$$e_2' = -\frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}}e_1 - \frac{\sqrt{6}+2}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}}e_2 + \frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}}e_3$$

$$e_3' = -\frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}}e_1 + \frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}}e_2 + \frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}}e_3$$

Матрица ортогонального преобразования:

$$S=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} & -\frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}}\\ 0 & -\frac{\sqrt{6}+2}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} & \frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} & \frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}}\end{pmatrix}$$

Отсюда получаем формулы преобразования координат:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}}y'-\frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}}x' \\ y=-\frac{\sqrt{6}+2}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}}y'+\frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}}z' \\ z=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}}y'+\frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}}z' \end{cases}$$

Вычисляем столбец коэффициентов линейной формы:

$$a'=S^T*a=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} & -\frac{\sqrt{6}+2}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} & \frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}}\\ -\frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}} & \frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}} & \frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\ \sqrt{3+\sqrt{6}}\\ \sqrt{3-\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

Составляем уравнение:

$$\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+\lambda_3(z')^2+2a_1'x'+2a_2'y'+2a_3'z'+a_0=0$$

$$-1(x')^2+\left(\sqrt{6}-3\right)(y')^2+\left(-\sqrt{6}-3\ \right)(z')^2+4\sqrt{2}x'+2\sqrt{3+\sqrt{6}}y'+2\sqrt{3-\sqrt{6}}z'-$$
$$-1=0$$

Выделим полные квадраты:

$$-\left(x'-2\sqrt{2}\right)^2+8+\left(\sqrt{6}-3\right)\left(y'+\frac{\sqrt{3+\sqrt{6}}}{\sqrt{6}-3}\right)^2-\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{6}-3}+\left(-\sqrt{6}-3\right)\left(z'+\frac{\sqrt{3-\sqrt{6}}}{-\sqrt{6}-3}\right)^2-$$
$$-\frac{3-\sqrt{6}}{-\sqrt{6}-3}-1=0$$

$$-\left(x'-2\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}-3\right)\left(y'+\frac{\sqrt{3+\sqrt{6}}}{\sqrt{6}-3}\right)^2+\left(-\sqrt{6}-3\right)\left(z'+\frac{\sqrt{3-\sqrt{6}}}{-\sqrt{6}-3}\right)^2=-17$$

Произведя параллельный перенос осей координат по формулам $x''=x'-2\sqrt{2}$, $y''=y'+\frac{\sqrt{3+\sqrt{6}}}{\sqrt{6}-3}, z''=z'+\frac{\sqrt{3-\sqrt{6}}}{-\sqrt{6}-3}$ и разделив уравнение на -17, приходим к уравнению $\frac{\left(x''\right)^2}{17}+\frac{3\left(y''\right)^2}{51+17\sqrt{6}}+\frac{3\left(z''\right)^2}{51-17\sqrt{6}}=1$

Делаем замену $x'''=y'', y'''=x'', z'''=z''$, переименовывая координатные оси: $\frac{3\left(x'''\right)^2}{51+17\sqrt{6}}+\frac{\left(y'''\right)^2}{17}+\frac{3\left(z'''\right)^2}{51-17\sqrt{6}}=1$

Получили каноническое уравнение эллипсоида.

Найдем замену неизвестных, приводящую исходное уравнение к каноническому виду

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} & -\frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}+2}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} & \frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} & \frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{3+\sqrt{6}}}{\sqrt{6}-3} \\ -\frac{\sqrt{3-\sqrt{6}}}{-\sqrt{6}-3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}$$

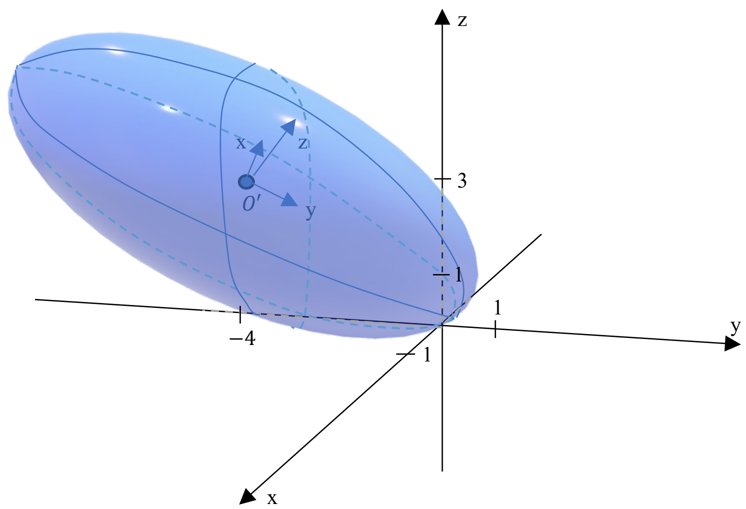
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} & -\frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}+2}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} & \frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} & \frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{3+\sqrt{6}}}{\sqrt{6}-3} \\ -\frac{\sqrt{3-\sqrt{6}}}{-\sqrt{6}-3} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} & -\frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}+2}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} & \frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} & \frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}} \\ -\frac{\sqrt{6}+2}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} & 0 & \frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}$$

Таким образом, начало канонической системы координат O' относительно исходной системы координат имеет координаты $1, -4, 3$, а матрица перехода от исходного базиса к каноническому имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}} \\ -\frac{\sqrt{6}+2}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} & 0 & \frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}} \end{pmatrix}$$



Задача №8

В пространстве многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше третьей, определённых на отрезке $[-1, 1]$, заданы многочлены Лежандра, определяемые по формуле Родрига:

$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, n = 0, 1, 2, 3.$

8.1 Доказать, что многочлены Лежандра ортогональны относительно веса $\rho(x) = 1$ на отрезке $[-1, 1]$.

8.2 Вычислить норму указанных многочленов Лежандра.

8.3 Построить ортонормированную систему многочленов Лежандра, используя алгоритм ортогонализации Грама – Шмидта системы линейно независимых многочленов $\varphi_k(x) = x^k, k = 0, 1, 2, 3$ (предварительно убедившись в их линейной независимости).

8.4 Доказать полноту системы, состоящей из многочленов Лежандра, в пространстве многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше третьей, определённых на отрезке $[-1, 1]$, с помощью равенства Парсеваля.

8.5 Разложить многочлен $f(x)$ по системе ортонормированных многочленов Лежандра.

$f(x) = 2x^3 + 3x + 1$

Решение:

Докажем, что многочлены Лежандра ортогональны относительно веса на отрезке $[-1,1]$.

Пусть $n = m$: $\big(P_n(x), P_m(x)\big) = \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}((x^2-1)^n)^{(n)}P_m(x)dx =$

Используем формулу: $\int_a^b u * v^{(n)}dx = \left(uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \dots + (-1)^{n-1}u^{n-1}v\right)\Big|_a^b +$
$+(-1)^n\int_a^b u^{(n)}vdx = \frac{1}{2^n n!}((P_m(x)((x^2-1)^n)^{(n-1)} - P_m'(x)((x^2-1)^n)^{(n-2)} + \dots +$
$+(-1)^{n-1}P_m^{(n-1)}(x)((x^2-1)^n))\Big|_{-1}^{1} + (-1)^{n-1}\int_{-1}^{1}P_m^{(n)}(x)((x^2-1)^n)xd)$

Многочлен $(x^2-1)^n$ имеет корни ±1 n-й степени. Значит, его производная до (n-1)-го порядка включительно имеют корни ±1, поэтому:

$(x^2-1)^n|_{x=\pm1} = 0;\ ((x^2-1)^n)'|_{x=\pm1} = 0; ((x^2-1)^n)''|_{x=\pm1} = 0; \dots$

$((x^2-1)^n)^{(n-2)}\Big|_{x=\pm1} = 0;\ ((x^2-1)^n)^{(n-1)}\Big|_{x=\pm1} = 0;$

Многочлен $P_m(x)$ имеет степень m<n, поэтому $P_m^{(n)}(x) = 0$.

Отсюда следует, что $\big(P_n(x), P_m(x)\big) = 0$, т. е. $P_n(x), n = 0,1,2,3 \dots$ образуют ортогональную систему.

Вычислим норму указанных многочленов Лежандра.

$\big||P_n(x)|\big| = \sqrt{(P_n(x), P_n(x))}$

$(P_n(x), P_n(x)) = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}((x^2-1)^n)^{(n)}\,((x^2-1)^n)^{(n)}dx\ =$

$= \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}((x^2-1)^n)^{(2n)}\,(x^2-1)^n dx =$

$(x^2-1)^n$ – многочлен степени 2n со старшим коэффициентом равным 1

$= \frac{(-1)^n(dn)!}{(2^n(n!))^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx = \{(x^2-1)^n = (-(1-x^2))^n = (-1)^n(1-x^2)^n\} =$

$= \frac{(2n)!}{(2^n(n!))^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = \{\text{т. к. } 1-x^2 - \text{ четная ф} - \text{ия}\} = \frac{2*(2n)!}{(2^n(n!))^2}\int_{0}^{1}(1-x^2)^n dx$

$\int_0^1(1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n+1}tdt = \mathcal{J}_{2n+1}$

$x = sint$

$\mathcal{J}_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n}td(sint) = cos^{2n}(t) * (sint)|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(2n)cos^{2n-1}(t) * (-sin^2t)dt\ =$

$= (2n)\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n-1}(t) * (1-cos^2t)dt = (2n)\mathcal{J}_{2n-1} - (2n)\mathcal{J}_{2n+1}$

Отсюда $(2n+1)\mathcal{J}_{2n+1} = (2n)\mathcal{J}_{2n-1}$

$$\mathcal{J}_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\mathcal{J}_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} * \frac{(2n-2)}{(2n-1)}\mathcal{J}_{2n-3} = \frac{2n}{2n+1} * \frac{(2n-2)}{(2n-1)} * \frac{(2n-4)}{(2n-3)}\mathcal{J}_{2n-5} =$$

$= \cdots = \frac{2n*(2n-2)*\ldots*4*2}{(2n+1)*(2n-1)*\ldots*3}\mathcal{J}_1$

$\mathcal{J}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} costdt = sint|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

В итоге $\mathcal{J}_{2n+1} = \frac{2n!!}{(2n+1)!!}$

$(P_n(x), P_n(x)) = \frac{2*(2n)!}{(2n!!)^2} * \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = 2 * \frac{(2n)!}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}$

Значит, $||P_n(x)|| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$

$||P_0(x)|| = \sqrt{2};\ ||P_1(x)|| = \sqrt{\frac{2}{3}};\ ||P_2(x)|| = \sqrt{\frac{2}{5}};\ ||P_3(x)|| = \sqrt{\frac{2}{7}}$

Построим ортонормированную систему многочленов Лежандра, используя алгоритм ортогонализации Грама – Шмидта системы линейно независимых многочленов $\varphi_k(x) = x^k, k = 0,1,2,3$.

Чтобы убедиться в линейной независимости многочленов $\varphi_k(x) = x^k, k = 0,1,2,3$ найдем матрицу Грама:

$\varphi_0 = 1;\ \varphi_1 = x;\ \varphi_2 = x^2;\ \varphi_3 = x^3$

$(\varphi_0, \varphi_0) = \int_{-1}^{1} dx = 2;\ (\varphi_0, \varphi_1) = \int_{-1}^{1} xdx = 0; (\varphi_0, \varphi_2) = \int_{-1}^{1} x^2dx = 2\int_0^1 x^2dx =$

$= \frac{2}{3};\ (\varphi_0, \varphi_3) = \int_{-1}^{1} x^3dx = 0$

$(\varphi_1, \varphi_1) = \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3};\ (\varphi_1, \varphi_2) = \int_{-1}^{1} x^3dx = 0; (\varphi_1, \varphi_3) = \int_{-1}^{1} x^4dx = \frac{2}{5}$

$(\varphi_2, \varphi_2) = \int_{-1}^{1} x^4dx = \frac{2}{5}; (\varphi_2, \varphi_3) = \int_{-1}^{1} x^5dx = 0$

$(\varphi_3, \varphi_3) = \int_{-1}^{1} x^6 dx = \frac{2}{7}$

Матрица Грама: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 2/5 \\ 2/3 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 2/7 \end{pmatrix}$

Определитель этой матрицы равен $\frac{256}{23625} \neq 0, => \varphi_k$ линейно независимы.

Применим к нам процесс ортогонализации:

$\psi_0 = \varphi_0 = 1$

$\psi_1 = \varphi_1 - \frac{(\varphi_1,\psi_0)}{(\psi_0,\psi_0)}\psi_0 = x - \frac{0}{2} * 1 = x$

$\psi_2 = \varphi_2 - \frac{(\varphi_2,\psi_0)}{(\psi_0,\psi_0)}\psi_0 - \frac{(\varphi_2,\psi_1)}{(\psi_1,\psi_1)}\psi_1 = x^2 - \frac{\frac{2}{3}}{2} * 1 - 0 = x^2 - \frac{1}{3} = \frac{3x^2-1}{3}$

$\psi_3 = \varphi_3 - \frac{(\varphi_3,\psi_0)}{(\psi_0,\psi_0)}\psi_0 - \frac{(\varphi_3,\psi_1)}{(\psi_1,\psi_1)}\psi_1 - \frac{(\varphi_3,\psi_2)}{(\psi_2,\psi_2)}\psi_2$

$(\varphi_3, \varphi_0) = 0;\ (\varphi_3, \varphi_2) = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x^3(3x^2 - 1)dx = 0$

$\psi_3 = x^3 - \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}}x = x^3 - \frac{3}{5}x = \frac{5x^3-3x}{5}$

$||\varphi_0|| = \sqrt{2};\ ||\psi_1|| = \sqrt{\frac{2}{3}};$

$||\psi_2|| = \sqrt{(\varphi_2, \psi_2)};\ (\psi_2, \psi_2) = \frac{1}{9}\int_{-1}^{1}(3x^2 - 1)^2 dx = \frac{2}{9}\int_{0}^{1}(3x^2 - 1)^2 dx =$
$= \frac{2}{9}\int_{0}^{1}(9x^4 - 6x^2 + 1)dx = \frac{2}{9}\left(\frac{9}{5} - 2 + 1\right) = \frac{2}{9} * \frac{4}{5} = \frac{8}{45};\ ||\psi_2|| = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$

$||\psi_3|| = \sqrt{(\varphi_3, \psi_3)};\ (\psi_3, \psi_3) = \frac{1}{25}\int_{-1}^{1}(5x^3 - 3x)^2 dx = \frac{2}{25}\int_{0}^{1}(25x^6 - 30x^4 + 9x^2)dx =$
$= \frac{2}{25}\left(\frac{25}{7} - 6 + 3\right) = \frac{8}{175};\ ||\psi_3|| = \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}$

Ортонормированная система:

$p_0 = \frac{1}{\sqrt{2}};\ p_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}x;\ p_2 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3x^2 - 1);\ p_3 = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(5x^3 - 3x)$

Докажем полноту системы, состоящей из многочленов Лежандра, в пространстве многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше третьей, определённых на отрезке $[-1,1]$, с помощью равенства Парсеваля.

Система многочленов $p_i; i = \overline{0,3}$ из предыдущего пункта ортонормирована, если $f(x)$ – многочлен степени не выше n и $f(x) = a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3$, то $||f(x)||^2 = \big(f(x), f(x)\big) = {a_0}^2 + {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2$, т.к. $(p_i, p_j) = 0$ при $i \neq j$, и $(p_i, p_i) = 1$

Значит равенство Парсеваля выполнено.

Разложем многочлен $f(x)$ по системе ортонормированных многочленов Лежандра.

$f(x) = 2x^3 + 3x + 1 = a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3$

$a_0 = (f, p_0) = \int_{-1}^{1} f(x)p_0(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}(2x^3 + 3x + 1)dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} 1dx = \frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_{-1}^{1} = \sqrt{2}$

$a_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}(2x^4 + 3x^2 + x)dx = \sqrt{6}\int_{-1}^{1} x^4dx + 3\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{\sqrt{6}x^5}{5}\Big|_{-1}^{1} + \frac{\sqrt{3}x^3}{\sqrt{2}}\Big|_{-1}^{1} =$
$= \frac{2\sqrt{6}}{5} + \sqrt{6} = \frac{7\sqrt{6}}{5}$

$a_2 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}(2x^3 + 3x + 1) * (3x^2 - 1)dx = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}(6x^5 + 7x^3 + 3x^2 - 3x - 1)dx =$
$= 0 + 0 + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + 0 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = 0$

$a_3 = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}(2x^3 + 3x + 1) * (5x^3 - 3x)dx =$
$= \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}(10x^6 + 9x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 3x)dx = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \frac{9\sqrt{7}}{5\sqrt{2}} + 0 - \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{2}} + 0 = \frac{4\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}$

В итоге: $f(x) = 2x^3 + 3x + 1 = \sqrt{2}p_0(x) + \frac{7\sqrt{6}}{5}p_1(x) + \frac{4\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}p_3(x)$

Задача №9

В пространстве многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше третьей, определённых на отрезке $[-1, 1]$, заданы многочлены Чебышева, определяемые по формуле:

$T_n(x) = \cos(n \arccos x)\,, n = 0, 1, 2, 3.$

9.1 Убедиться, что функции $T_n(x)$ действительно являются многочленами степени n и удовлетворяют рекуррентному соотношению $T_n(x) = 2xT_{n-1}\ (x) - T_{n-2}\ (x), n = 2, 3 \ldots$

9.2 Доказать, что многочлены Чебышева образуют ортогональную систему относительно веса $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на отрезке $[-1, 1]$.

9.3 Вычислить норму указанных многочленов Чебышева.

9.4 Построить ортонормированную систему многочленов Чебышева.

9.5 Разложить многочлен $f(x)$ по системе ортонормированных многочленов Чебышева.

$f(x) = 2x^3 + 3x + 1$

Решение:

Для того чтобы убедиться, что функции $T_n(x)$ являются многочленами степени n и удовлетворяют рекуррентному соотношению $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$, мы можем последовательно проверить это для каждого значения n.

Для $n = 0$: $T_0(x) = \cos(0\ *\ \arccos(x))\ =\ \cos(0)\ =\ 1$

Многочлен степени 0, соотношение выполняется.

Для $n = 1$: $T_1(x) = \cos(1\ *\ \arccos(x))\ =\ \cos(\arccos(x))\ =\ x$

Многочлен степени 1, соотношение выполняется.

Для $n = 2$: $T_2(x) = \cos(2 * \arccos(x)) = \cos(\arccos(2x^2 - 1)) = 2x^2 - 1$

Многочлен степени 2, соотношение выполняется.

Для $n = 3$: $T_3(x) = \cos(3 * \arccos(x)) = \cos(\arccos(4x^3 - 3x)) = 4x^3 - 3x$

Многочлен степени 3, соотношение выполняется.

Мы видим, что для каждого значения n функции $T_n(x)$ являются многочленами степени n и удовлетворяют рекуррентному соотношению $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$, начиная с $n = 2$.

Чтобы доказать, что многочлены Чебышева образуют ортогональную систему относительно веса $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на отрезке $[-1,1]$, необходимо проверить условие ортогональности для любых двух различных многочленов $T_m(x)$ и $T_n(x)$, где m ≠ n.

Условие ортогональности для функций $f(x)$ и $g(x)$ относительно веса $\rho(x)$ на интервале $[a, b]$ определяется следующим интегралом: $\int_a^b f(x) * g(x) * \rho(x)dx = 0$.

Для многочленов Чебышева мы должны проверить:

$\int_{-1}^{1} T_m(x) * T_n(x) * \rho(x)dx = 0$, где m ≠ n

Проверим это для всех возможных комбинаций многочленов Чебышева $T_n(x)$, где $n = 0,1,2,3$:

1. Для $n = 0$ и $m = 1$:

$\int_{-1}^{1} T_0(x) * T_1(x) * \rho(x)dx = \int_{-1}^{1} 1 * x * \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Данный интеграл равен 0, так как является нечетной функцией на симметричном интервале [-1, 1].

2. Для $n = 0$ и $m = 2$:

$\int_{-1}^{1} T_0(x) * T_2(x) * \rho(x)dx = \int_{-1}^{1} 1 * (2x^2 - 1) * \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^{1} \frac{2x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Данный интеграл равен 0, так как является нечетной функцией на симметричном интервале [-1, 1].

3. Для $n = 0$ и $m = 3$:

$\int_{-1}^{1} T_0(x) * T_3(x) * \rho(x)dx = \int_{-1}^{1} 1 * (4x^3 - 3x) * \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^{1} \frac{4x^3-3x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Данный интеграл равен 0, так как является нечетной функцией на симметричном интервале [-1, 1].

4. Для $n = 1$ и $m = 2$:

$\int_{-1}^{1} T_1(x) * T_2(x) * \rho(x)dx = \int_{-1}^{1} x * (2x^2 - 1) * \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^{1} \frac{2x^3-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Данный интеграл равен 0, так как является нечетной функцией на симметричном интервале [-1, 1].

5. Для $n = 1$ и $m = 3$:

$$\int_{-1}^{1} T_1(x) * T_3(x) * \rho(x) dx = \int_{-1}^{1} x * (4x^3 - 3x) * \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{1} \frac{4x^4 - 3x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Данный интеграл равен 0, так как является нечетной функцией на симметричном интервале [-1, 1].

6. Для $n = 2$ и $m = 3$:

$$\int_{-1}^{1} T_2(x) * T_3(x) * \rho(x) dx = \int_{-1}^{1} (2x^2 - 1) * (4x^3 - 3x) * \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{8x^5 - 6x^3 - 4x^3 + 3x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Данный интеграл равен 0, так как является нечетной функцией на симметричном интервале [-1, 1].

Таким образом, мы видим, что все интегралы для различных комбинаций многочленов Чебышева $T_n(x)$ и $T_m(x)$ с $n \neq m$ равны 0. Это означает, что многочлены Чебышева образуют ортогональную систему относительно веса $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на отрезке $[-1,1]$.

Норма многочлена определяется как квадратный корень из скалярного произведения многочлена на самого себя. Для вычисления нормы многочлена Чебышева $T_n(x)$ на отрезке $[-1,1]$, нам понадобится вычислить следующий интеграл:

$$||T_n(x)|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} T_n{}^2(x) * \rho(x) dx}, \text{ где } \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ – весовая функция.}$$

Вычислим норму для каждого многочлена Чебышева с заданными значениями n.

1. Для $n = 0$:

$$||T_0(x)|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} T_0{}^2(x) * \rho(x) dx} = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1^2 * \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx}$$

Данный интеграл представляет собой интеграл от функции, известной как арксинус, на интервале [-1, 1]. Интегрируя, получаем: $||T_0(x)|| = \sqrt{\pi}$

2. Для $n = 1$:

$$||T_1(x)|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} T_1{}^2(x) * \rho(x) dx} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \left(\cos\left(\arccos(x)\right)\right)^2 * \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx} =$$
$$= \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 * \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx}$$

Данный интеграл можно вычислить аналитически или приближенно, и его значение равно: $||T_1(x)|| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

3. Для $n = 2$:

$$||T_2(x)|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} T_2{}^2(x) * \rho(x) dx} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \left(\cos\left(2\arccos(x)\right)\right)^2 * \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx} =$$
$$= \sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{(2x^2 - 1)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx}$$

Также можно вычислить этот интеграл аналитически или численно, и его значение равно: $||T_2(x)|| = 2\sqrt{\pi}$

4. Для $n = 3$:

$$||T_3(x)|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} T_3{}^2(x) * \rho(x)dx} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \left(\cos(3\arccos(x))\right)^2 * \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx} =$$
$$= \sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{(4x^3 - 3x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx}$$

И снова, этот интеграл может быть вычислен аналитически или численно, и его значение равно: $||T_3(x)|| = 4\sqrt{\pi}$

Для построения ортонормированной системы многочленов Чебышева на отрезке $[-1,1]$, нам необходимо нормировать каждый многочлен Чебышева относительно весовой функции $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ортонормированные многочлены Чебышева можно получить путем деления каждого многочлена Чебышева на его норму.

Нормируем каждый многочлен Чебышева с заданными значениями n:

1. Для $n = 0$: $T_0(x) = \cos(\arccos(x))$

Норма многочлена $T_0(x)$ равна $||T_0(x)|| = \sqrt{\pi}$ (по предыдущему ответу).

Тогда ортонормированный многочлен $T_0(x)$ будет: $\varphi_0(x) = \frac{T_0(x)}{||T_0(x)||} = \frac{\cos(\arccos(x))}{\sqrt{\pi}}$

2. Для $n = 1$: $T_1(x) = \cos(\arccos(x))$

Норма многочлена $T_1(x)$ равна $||T_1(x)|| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (по предыдущему ответу).

Тогда ортонормированный многочлен $T_1(x)$ будет: $\varphi_1(x) = \frac{T_1(x)}{||T_1(x)||} = \frac{\cos(\arccos(x))}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

3. Для $n = 2$: $T_2(x) = \cos(2\arccos(x))$

Норма многочлена $T_2(x)$ равна $||T_2(x)|| = 2\sqrt{\pi}$ (по предыдущему ответу).

Тогда ортонормированный многочлен $T_2(x)$ будет: $\varphi_2(x) = \frac{T_2(x)}{||T_2(x)||} = \frac{\cos(2\arccos(x))}{2\sqrt{\pi}}$

4. Для $n = 3$: $T_3(x) = \cos(3\arccos(x))$

Норма многочлена $T_3(x)$ равна $||T_3(x)|| = 4\sqrt{\pi}$ (по предыдущему ответу).

Тогда ортонормированный многочлен $T_3(x)$ будет: $\varphi_3(x) = \frac{T_3(x)}{||T_3(x)||} = \frac{\cos(3\arccos(x))}{4\sqrt{\pi}}$

Для разложения многочлена $f(x) = 2x^3 + 3x + 1$ по системе ортонормированных многочленов Чебышева, нам понадобится вычислить коэффициенты разложения, которые можно получить с помощью формулы коэффициентов Фурье.

Коэффициенты разложения многочлена f(x) по системе ортонормированных многочленов Чебышева можно вычислить следующим образом:

$$f(x) = 2x^3 + 3x + 1 = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3$$

$a_n = \int_{-1}^{1} f(x) * \varphi_n(x) * \rho_n(x)dx$, где $\varphi_n(x)$ – ортонормированный многочлен Чебышева, $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ – весовая функция.

Вычислим коэффициенты разложения многочлена $f(x)$ по системе ортонормированных многочленов Чебышева.

$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x) * \varphi_0(x) * \rho(x)dx = \int_{-1}^{1}(2x^3 + 3x + 1) * (\frac{\cos(\arccos(x))}{\sqrt{\pi}}) * (\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\, dx = \frac{9\sqrt{\pi}}{4}$

$a_1 = \int_{-1}^{1} f(x) * \varphi_1(x) * \rho(x)dx = \int_{-1}^{1}(2x^3 + 3x + 1) * (\frac{\cos(\arccos(x))}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}) * (\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\, dx = \frac{9\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{4}$

$a_2 = \int_{-1}^{1} f(x) * \varphi_2(x) * \rho(x)dx = \int_{-1}^{1}(2x^3 + 3x + 1) * (\frac{\cos(2\arccos(x))}{2\sqrt{\pi}}) * (\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\, dx = 0$

$a_3 = \int_{-1}^{1} f(x) * \varphi_3(x) * \rho(x)dx = \int_{-1}^{1}(2x^3 + 3x + 1) * (\frac{\cos(3\arccos(x))}{4\sqrt{\pi}}) * (\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{16}$

Вычислив все четыре коэффициента разложения a_0, a_1, a_2, a_3, мы сможем записать разложение многочлена $f(x)$ по системе ортонормированных многочленов Чебышева:

$$f(x) = 2x^3 + 3x + 1 = \frac{9\sqrt{\pi}}{4}\varphi_0(x) + \frac{9\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{4}\varphi_1(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{16}\varphi_3(x)$$

Задача №10

10.1 Доказать, что тригонометрическая система функций $\{1, cosx, sinx, cos2x, sin2x, cos3x, sin3x, \dots, cosnx, sinnx\}$ ортогональна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и является базисом пространства, образованного тригонометрическими многочленами

$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k coskx + b_k sinkx.$

10.2 Нормировать эту систему.

10.3 Найти наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическим многочленом Фурье степени, не выше n, то есть, $P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k coskx + b_k sinkx$, где a_k, b_k вещественные коэффициенты.

10.4 Построить графики функции $f(x)$ и полученного приближения (рассмотреть многочлены Фурье нескольких порядков). Проанализировать поведение построенного многочлена при росте его порядка.

$f(x) = x + 1$

Решение:

Система непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций называется ортогональной на отрезке $[a, b]$, если $\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m dx = 0$ для $\forall n, m \in \mathbb{N}$ и $n \neq m$.

Заметим, что все функции, входящие в систему $\{1, cosx, sinx, cos2x, sin2x, cos3x, sin3x, \dots, cosnx, sinnx\}$ являются периодическими с общим наименьшим положительным периодом 2π, так как 1 – периодическая с любым, отличным от нуля периодом, функции $cosx$ и $sinx$ имеют наименьший положительный период 2π, а функции $cos\pi x$ и $sin\pi x$ имеют наименьший положительный период $\frac{2\pi}{n}$. Поэтому число $T = 2\pi$ является с одной стороны общим, а с другой стороны наименьшим положительным периодом для всех функций, входящих в систему.

Тригонометрическая система является ортогональной на отрезке $[-\pi; \pi]$ в следующем смысле: интеграл по отрезку $[-\pi; \pi]$ от произведения любых двух различных функций этой системы равен нулю, а интеграл по отрезку $[-\pi; \pi]$ от квадрата любой функции этой системы отличен от нуля.

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 * coskxdx = \frac{1}{k} sinkx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 * sinkxdx = -\frac{1}{k} coskx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cosmx * cosnxdx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)\,x + \cos(m-n)\,x]dx = 0, \text{при } m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sinmx * sinnxdx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)\,x - \cos(m+n)\,x]dx = 0, \text{при } m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sinmx * cosnxdx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)\,x + \sin(m-n)\,x]dx = 0, \text{при } m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+cos2nx}{2} dx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-cos2nx}{2} dx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = x|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

Доказали, что тригонометрическая система функций $\{1, cosx, sinx, cos2x, sin2x, cos3x, sin3x, \dots, cosnx, sinnx\}$ ортогональна на отрезке $[-\pi, \pi]$

Представим тригонометрический многочлен $P_{\text{n}}(x)$ в общем виде: $P_{\text{n}}(x) = \frac{a^0}{2} +$ $+ a_1 cos(x) + b_1 sin(x) + a_2 cos(2x) + b_2 sin(2x) + \dots + a_{\text{n}} cos(nx) + b_{\text{n}} sin(nx)$.

Теперь рассмотрим каждое слагаемое в $P_{\text{n}}(x)$ отдельно и покажем, как его можно представить в виде линейной комбинации функций из тригонометрической системы.

1. $\frac{a^0}{2}$: Это постоянное слагаемое, которое можно рассматривать как функцию $f^0(x) = \frac{a^0}{2} * 1$, где 1 - функция из тригонометрической системы. Таким образом, $\frac{a^0}{2}$ представлено линейной комбинацией функций из системы.
2. $a_1 cos(x)$ и $b_1 sin(x)$: Слагаемые $a_1 cos(x)$ и $b_1 sin(x)$ представляют собой функции из тригонометрической системы, поскольку $cos(x)$ и $sin(x)$ уже присутствуют в

системе. Таким образом, $a_1cos(x)$ и $b_1sin(x)$ также представлены линейной комбинацией функций из системы.

3. $a_ncos(nx)$ и $b_nsin(nx)$: аналогично можно представить в виде линейной комбинации функций из системы.

Рассматривая этот процесс для всех слагаемых, мы видим, что каждое слагаемое в $P_{\text{n}}(x)$ может быть представлено в виде линейной комбинации функций из тригонометрической системы.

Таким образом, каждая тригонометрическая функция $cos(kx)$ и $sin(kx)$ в многочлене $P_{\text{n}}(x)$ может быть представлена в виде линейной комбинации функций из тригонометрической системы функций, то есть тригонометрическая система функций $\{1, cos(x), sin(x), cos(2x), sin(2x), \dots, cos(nx), sin(nx)\}$ является базисом пространства, образованного тригонометрическими многочленами $P_{\text{n}}(x)$.

Нормированной на отрезке $[-\pi, \pi]$ система не будет, так как $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi$. Нормой каждой из функций $\sin nx$ и $\cos nx$ является $\sqrt{\pi}$, а норма единицы равна $\sqrt{2\pi}$.

Для получения нормированных функций воспользуемся уравнением $\int_a^b \left(\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^2 dx = \frac{1}{\lambda_n}\int_a^b \varphi_n^2(x)dx = \frac{\lambda_n}{\lambda_n} = 1.$

Поделив функции на их нормы получим ортонормальную на отрезке$[-\pi, \pi]$ систему функций $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}cosx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}sinx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}cos2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}sin2x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}cosnx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}sinnx\right\}$

Для нахождения наилучшего приближения функции $f(x) = x + 1$ тригонометрическим многочленом Фурье степени не выше n найдем значения коэффициентов a_0, a_{k} и b_{k} на отрезке $[-\pi, \pi]$.

$$a^0 = \left(\frac{1}{\pi}\right)\int_{-\pi}^{\pi}(x + 1)\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2$$

$$a_{\text{k}} = \left(\frac{1}{\pi}\right)\int_{-\pi}^{\pi}(x + 1)\cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi}\left(x * \frac{\sin(kx)}{k} + \frac{\sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$b_{\text{k}} = \left(\frac{1}{\pi}\right)\int_{-\pi}^{\pi}(x + 1)\ sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\left(-x * \frac{\cos(kx)}{k} - \frac{\cos(kx)}{k} + \frac{\sin(kx)}{k^2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2(-1)^k}{k}$$

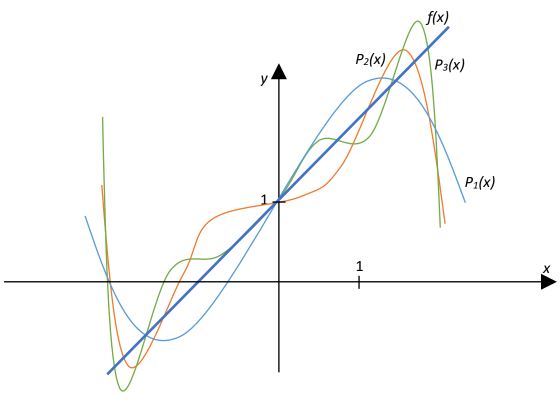
Таким образом, наилучшим приближением функции $f(x) = x + 1$ тригонометрическим многочленом Фурье степени имеет следующий вид: $P_{\text{n}}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(-2\frac{(-1)^k}{k}\right) * sin(kx)$

Рассмотрим для $n = 1, 2, 3$

$P_1(x) = 1 + 2sinx$

$P_2(x) = 1 + 2sinx - sin2x$

$P_3(x) = 1 + 2sinx - sin2x + 2\left(\frac{1}{3}sin3x\right)$



Можно заметить, что по мере увеличения порядка n, многочлен $P_{\mathrm{n}}(x)$ будет стремиться к функции $f(x) = x + 1$ ближе и ближе на всем пространстве определения, однако это может также приводить к более сложному выражению многочлена $P_{\mathrm{n}}(x)$. Низкий порядок n может давать более грубое приближение, но более простое выражение многочлена.