

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Отчёт
По расчётно-графической работе №1
Вариант: 6

Выполнили:
Касьяненко В.М.
Кремпольская Е.А.
Шишминцев Д.В.
Кравцов К.Д.

Преподаватель:
Труфанова А.А.

г. Санкт-Петербург

2023 г.

1) Найти частные производные до второго порядка включительно заданных функций.

$$z = \ln(x^2 + y)$$

Решение:

$$z'_x = \frac{1}{x^2+y} * 2x = \frac{2x}{x^2+y}$$

$$z'_y = \frac{1}{x^2+y} * 1 = \frac{1}{x^2+y}$$

$$z''_{xx} = \frac{2(x^2+y)-2x*2x}{(x^2+y)^2} = \frac{2x^2-4x^2+2y}{(x^2+y)^2} = \frac{-2x^2+2y}{(x^2+y)^2}$$

$$z''_{yy} = \frac{0(x^2+y)-1*1}{(x^2+y)^2} = -\frac{1}{(x^2+y)^2}$$

$$z''_{xy} = \frac{0(x^2+y)-2x*1}{(x^2+y)^2} = -\frac{2x}{(x^2+y)^2}$$

$$z''_{yx} = \frac{0(x^2+y)-1*2x}{(x^2+y)^2} = -\frac{2x}{(x^2+y)^2}$$

2) Найти градиент функции $u = f(x, y, z)$ в точке М.

$$u = \ln(3 - x^2) + xy^2z, \quad M(1, 3, 2)$$

Решение:

$$\text{grad } u = (u'_x, u'_y, u'_z)$$

$$u'_x = \frac{1}{3-x^2} * (-2x) + y^2z = -\frac{2x}{3-x^2} + y^2z$$

$$u'_y = 0 + 2xyz = 2xyz$$

$$u'_z = 0 + xy^2 = xy^2$$

$$u'_x|_M = -\frac{2}{3-1} + 9 * 2 = 17$$

$$u'_y|_M = 2xyz = 2 * 1 * 3 * 2 = 12$$

$$u'_z|_M = 1 * 9 = 9$$

$$\text{grad } u = (17, 12, 9)$$

3) Найти производную функции $u(x, y, z)$ в точке А по направлению к точке В.

$$u = \ln(3 - x^2) + xy^2z, \quad A(1, 3, 2), \quad B(0, 5, 0)$$

Решение:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

$$\bar{S} = (-1, 2, -2)$$

$$\cos \alpha = \frac{S_x}{|S|} = \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}} = -\frac{1}{3}$$

$$\cos \beta = \frac{S_y}{|S|} = \frac{2}{3}$$

$$\cos \gamma = \frac{S_z}{|S|} = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2x}{3-x^2} + y^2 z$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = xy^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \big|_A = -\frac{2x}{3-x^2} + y^2 z = 17$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \big|_A = 2xyz = 12$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \big|_A = xy^2 = 9$$

$$\frac{\partial u}{\partial S} = 17 * \left(-\frac{1}{3}\right) + 12 * \frac{2}{3} + 9 * \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{11}{3}$$

$u(x, y, z)$ в точке A по направлению к точке B убывает.

4) Найти производные z'_x и z'_y , функции $z = z(u, v)$, где $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$.

$$z = \ln(u - v^2), \quad u = x^2 + y^2, \quad v = y$$

Решение:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{u-v^2} * 1 * 2x + \frac{1}{u-v^2} * (-2v) * 0 = \frac{2x}{u-v^2} = \frac{2x}{(x^2+y^2)-y^2} = \frac{2}{x}$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{u-v^2} * 1 * 2y + \frac{1}{u-v^2} * (-2v) * 1 = \frac{2y}{u-v^2} - \frac{2v}{u-v^2} = \frac{2y}{(x^2+y^2)-y^2} - \frac{2y}{(x^2+y^2)-y^2} = 0$$

5) Найти производные функций $y = y(x)$, заданных неявно уравнениями.

$$x - y + \arctg y = 0$$

Решение:

$$F(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{1+0+0}{0-1+\frac{1}{1+y^2}} = -\frac{1}{\frac{-1-y^2+1}{1+y^2}} = -\frac{(1+y^2)}{-y^2} = \frac{1+y^2}{y^2}$$

6) Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке M .

$$z = \arctg\left(\frac{x}{y}\right), \quad M\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$$

Решение:

$$\Lambda: z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x} \bigg|_M (x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y} \bigg|_M (y - y_0)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} * \frac{1}{y} = \frac{1}{y+y\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{1}{y+\frac{x^2}{y}} = \frac{y}{y^2+x^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} * \frac{0 * y - x * 1}{y^2} = -\frac{x}{y^2 + y^2 \left(\frac{x}{y}\right)^2} = -\frac{x}{y^2 + x^2}$$

$$\Lambda: z - \frac{\pi}{4} = \frac{y}{y^2 + x^2} \Big|_M (x - 1) - \frac{x}{y^2 + x^2} \Big|_M (y - 1)$$

$$\Lambda: z - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 1)$$

$$\Lambda: z - \frac{\pi}{4} = \frac{x-1-y+1}{2}$$

$$\Lambda: \frac{x}{2} - \frac{y}{2} - z + \frac{\pi}{4} = 0$$

$$\Lambda: x - y - 2z + \frac{\pi}{2} = 0$$

$$n: \frac{x-x_0}{z'_x|_M} = \frac{y-y_0}{z'_y|_M} = \frac{z-z_0}{-1}$$

$$n: \frac{x-1}{\frac{1}{2}} = \frac{y-1}{-\frac{1}{2}} = \frac{z-\frac{\pi}{4}}{-1}$$

7) Найти стационарные точки заданных функций и исследовать их характер.

$$z = 4x + 2y - x^2 - y^2$$

Решение:

$$x, y \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4 - 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2 - 2y$$

$$\begin{cases} 4 - 2x = 0 \\ 2 - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$M(2, 1)$ – стационарная точка

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

$$4 > 0, A < 0 \Rightarrow M - \max$$

8) В этом задании в каждом варианте даны функция u трёх переменных x, y, z и уравнение в частных производных (е). Проверьте, является ли функция u решением уравнения (е)

$$u = x^{y^3z}, \quad (e): x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) = y^3 (zy^3 \ln x + 1)u$$

Решение:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^3 z x^{y^3z-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 3y^2 * z x^{y^3z-1} + y^3 * z x^{y^3z-1} \ln(x) * 3y^2 z = 3y^2 * z x^{y^3z-1} + 3y^5 z^2 x^{y^3z-1} \ln(x) = \\ &= 3y^2 z x^{y^3z-1} (1 + zy^3 \ln(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Подставим в левую часть уравнения (е): } x * \left(3y^2 z x^{y^3z-1} (1 + zy^3 \ln(x)) \right) &= \\ = x * \frac{(3y^2 z x^{y^3z} (1 + zy^3 \ln(x)))}{x} &= 3y^2 z x^{y^3z} (1 + zy^3 \ln(x)) \end{aligned}$$

$$\text{Подставим в правую часть уравнения (е): } u = x^{y^3z} \Rightarrow y^3 x^{y^3z} (zy^3 \ln x + 1)$$

$$3y^2 z x^{y^3z} (1 + zy^3 \ln(x)) \neq y^3 x^{y^3z} (zy^3 \ln x + 1) \Rightarrow \text{функция } u \text{ не является решением (е)}$$

9) В этом задании в каждом варианте даны функция z двух переменных x и y и область D . Найдите наибольшее и наименьшее значение функции z в области D .

$$z = -x^2 - 4x - y^2 + 2y - 4, \text{ область } D \text{ задана неравенствами } -4 \leq x \leq 0 \text{ и } 0 \leq y \leq 2.$$

Решение:

$$x, y \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x - 4$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y + 2$$

$$\begin{cases} -2x - 4 = 0 \\ -2y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$M(-2, 1)$ – стационарная точка

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

$$4 > 0, A < 0 \Rightarrow M - \max$$

$$z(-2, 1) = -4 + 8 - 1 + 2 - 4 = 1$$

$$x = -4; 0 \leq y \leq 2$$

$$z(y) = -16 + 16 - y^2 + 2y - 4 = -y^2 + 2y - 4$$

$$z'_y = -2y + 2$$

$$z'_y = 0 \text{ при } y = 1$$

$$z(1) = -1 + 2 - 4 = -3$$

$$x = 0; 0 \leq y \leq 2$$

$$z(y) = 0 + 0 - y^2 + 2y - 4 = -y^2 + 2y - 4$$

$$z'_y = -2y + 2$$

$$z'_y = 0 \text{ при } y = 1$$

$$z(1) = -1 + 2 - 4 = -3$$

$$y = 0; -4 \leq x \leq 0$$

$$z(x) = -x^2 - 4x + 0 + 0 - 4 = -x^2 - 4x - 4$$

$$z'_x = -2x - 4$$

$$z'_x = 0 \text{ при } x = -2$$

$$z(-2) = -4 + 8 - 4 = 0$$

$$y = 2; -4 \leq x \leq 0$$

$$z(x) = -x^2 - 4x - 4 + 4 - 4 = -x^2 - 4x - 4$$

$$z'_x = -2x - 4$$

$$z'_x = 0 \text{ при } x = -2$$

$$z(-2) = -4 + 8 - 4 = 0$$

Проверим вершины:

$$z(-4, 2) = -16 + 16 - 4 + 4 - 4 = -4$$

$$z(-4, 0) = -16 + 16 - 0 + 0 - 4 = -4$$

$$z(0, 0) = 0 + 0 + 0 + 0 - 4 = -4$$

$$z(0, 2) = 0 + 0 - 4 + 4 - 4 = -4$$

$$\text{Максимум: } z(-2, 1) = 1$$

$$\text{Минимум: } z(-4, 2) = z(-4, 0) = z(0, 0) = z(0, 2) = -4$$