

Темы индивидуальных заданий по интегральному исчислению

1. Интегрирование иррациональных функций с помощью подстановок Эйлера.
2. Необходимое условие интегрируемости функций. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости функции.
3. Классы интегрируемых функций. Интегрируемость непрерывной на отрезке функции. Вычисление определённого интеграла по определению.
4. Применение определённого интеграла при решении физических задач.
5. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов.
6. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Определение, свойства (о непрерывной зависимости собственного интеграла от параметра, о перестановке порядка интегрирования, о дифференцировании собственного интеграла от параметра).
7. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость несобственного интеграла по параметру. Признаки Вейерштрасса и Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла по параметру. Критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла по параметру.
8. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость несобственного интеграла по параметру. Вычисление интегралов Дирихле, Лапласа.
9. Вычисление интегралов Эйлера-Пуассона, Френеля.
10. Гамма-функция Эйлера, Бета-функция Эйлера.

1) Вычисление интегралов

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx,$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^z \sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad z \in \mathbb{N},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k \sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad p^2-4q < 0$$

5) Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} (e^x + x) \cos e^{2x} dx$$

$$\int_4^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} dx$$

6) Показать, что функции

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos \varphi) d\varphi$$

удовлетворяют уравнению Бесселя

$$x J_0''(x) + J_0'(x) + x J_0(x) = 0.$$

7) Исследовать на равномерную сходимость по параметру $y \in \mathbb{R}$ интегралы

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos xy dx, \quad \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx;$$

(2) Показать, что $\int_0^{+\infty} ye^{-xy} dx$ сходится равномерно по параметру y ; $y \in [0, +\infty)$.

(3) Исследовать на равномерную сходимость по параметру $\alpha \in [\alpha_0, +\infty)$, $\alpha_0 > 0$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx.$$

8) ① Доказать

$$\lim_{y \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

② Вычислить

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} ; \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2} dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin xy}{1+x^2} dx, \quad y \in \mathbb{R}.$$

9) Вычислить

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx, \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx,$$

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx.$$

10) Доказать: ① $\int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{\beta-1} \varphi d\varphi =$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2}) \Gamma(\frac{\beta}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+\beta}{2})}, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

② $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. ③ $\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{3-\cos t}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

4) Пусть плоская пластина в форме произвольной трапеции погружена в жидкость с плотностью ρ , так, что её боковые стороны параллельны поверхности жидкости и удалены от уровня поверхности на расстояния \underline{a} и \underline{b} . Найти силу давления жидкости на пластинку, вычислить силу давления жидкости на вертикальную стенку: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, диаметр расположен на поверхности жидкости ($x \geq 0$).