№1

1) A_x, B_x, F_x не являются линейными, т.к. их координаты содержат константные значения. G_x не явл. линейным, т.к. многочлен третьей координаты имеет степень 4. C_x и E_x явл. линейными.

Проверка:

$C_{\alpha x} = (\alpha x_1 - 3\alpha x_2 - \alpha x_3 ; \alpha x_3 ; \alpha x_1 + 2\alpha x_2 + 3\alpha x_3)^T =$

$= \alpha (x_1 - 3x_2 - x_3 ; x_3 ; x_1 + 2x_2 + 3x_3)^T = \alpha C_x$ $\oplus$

$C_{x+y} = (x_1 + y_1 - 3(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3) ; x_3 + y_3 ; x_1 + y_1 + 2(x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3))^T =$

$= (x_1 - 3x_2 - x_3 ; x_3 ; x_1 + 2x_2 + 3x_3)^T + (y_1 - 3y_2 - y_3 ; y_3 ; y_1 + 2y_2 + 3y_3)^T =$

$= C_x + C_y$ $\oplus$

$E_{\alpha x} = (2\alpha x_1 ; 3\alpha x_1 + 2\alpha x_2 + 3\alpha x_3 ; 4\alpha x_1 + 52\alpha x_2 + 2\alpha x_3)^T =$

$= \alpha (2x_1 ; 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 ; 4x_1 + 52x_2 + 2x_3)^T = \alpha Ex$ $\oplus$

$E_{x+y} = (2(x_1 + y_1) ; 3(x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3) ; 4(x_1 + y_1) + 52(x_2 + y_2) +$

$+ 2(x_3 + y_3))^T = (2x_1 ; 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 ; 4x_1 + 52x_2 + 2x_3)^T + (2y_1 ; 3y_1 +$

$+ 2y_2 + 3y_3 ; 4y_1 + 52y_2 + 2y_3)^T = E_x + E_y$ $\oplus$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\ker A = (0;0;0)$ $\operatorname{Im} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\dim A = 3$

$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\ker B = (x; x; 0), x \in R$ $\operatorname{Im} B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\dim B = 2$

$\underset{+I}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$C = B^2 + 3A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}^2 + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -12 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C_x = \begin{pmatrix} 3x_1 - 12x_2 \\ 3x_2 + 3x_3 \\ -2x_1 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

$$D = BA + A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_x = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 3x_3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \\ -2x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

4) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \overline{e}_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3 \\ \overline{e}_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3 \\ \overline{e}_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3 \end{cases}$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -49 & -52 & 8 \\ 43 & 47 & -4 \\ -17 & -19 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B' = T^{-1} \cdot B \cdot T = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -55 & -68 & -6 \\ 26 & 43 & 24 \\ -8 & -14 & -9 \end{pmatrix}$$