Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Отчёт
По расчётно-графической работе №2
Вариант: 2

Выполнили:
Касьяненко В.М.
Кремпольская Е.А.
Шишминцев Д.В.
Кравцов К.Д.

Преподаватель:
Труфанова А.А.

г. Санкт-Петербург

2023 г.

1. Зная, что поток F векторного поля A по определению есть интеграл по поверхности S от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к поверхности

$$F = \iint\limits_S \vec{a}\vec{n}ds$$

Рассчитать поток векторного поля A через замкнутую поверхность S двумя способами

$$A = y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + x^2\vec{k},$$
$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Решение:

1) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Так как вектор нормали верхней стороны сферы образует с осью Oz острый угол, то третья координата вектора нормали плоскости должна быть положительной:

$n_1 = (S'_x; S'_y; S'_z) = (2x; 2y; 2z)$

Вектор нормали нижней стороны сферы образует с осью Oz тупой угол, то есть третья координата должна быть отрицательной:

$n_2 = (S'_x; S'_y; S'_z) = (2x; 2y; -2z)$

$|n| = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2$

Единичный вектор нормали для верхней части сферы: $n_{10} = \frac{n}{|n|} = (x;\ y;\ z)$

Единичный вектор нормали для нижней части сферы: $n_{20} = \frac{n}{|n|} = (x;\ y;\ -z)$

$an_{10} = (y^2i + z^2j + x^2k)(xi + yj + zk) = xy^2 + yz^2 + zx^2$

$an_{20} = (y^2i + z^2j + x^2k)(xi + yj - zk) = xy^2 + yz^2 - zx^2$

$z'_x = \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2}\right)'_x = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}(-x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$z'_y = \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2}\right)'_y = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$\sqrt{(z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2 + 1} = \sqrt{\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^2+y^2+1-x^2-y^2}{1-x^2-y^2}} =$

$= \sqrt{\frac{1}{1-x^2-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$F = F_1 + F_2$

$F_1 = \iint_S \ an_{10}dS = \ \iint_{D_{xy}}\left(xy^2 + y(1 - x^2 - y^2) + \sqrt{1 - x^2 - y^2}x^2\right)\sqrt{(z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2 + 1}dxdy =$

$= \iint_{D_{xy}}\left(xy^2 + y(1 - x^2 - y^2) + \sqrt{1 - x^2 - y^2}x^2\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\ dxdy =$

$= \iint_{D_{xy}}\left(\frac{xy^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + y\sqrt{1 - x^2 - y^2} + x^2\right)dxdy = \iint_{D_{xy}}\frac{\left(xy^2+y(1-x^2-y^2)+x^2\sqrt{1-x^2-y^2}\right)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy =$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r^3cos\varphi \sin^2\varphi + rsin\varphi - r^3\cos^2\varphi\, sin\,\varphi - r^3\sin^3\varphi + r^2\cos^2\varphi\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}}rdr =$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r^3cos\varphi \sin^2\varphi + rsin\varphi - r^3\,sin\,\varphi + r^2\cos^2\varphi\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}}rdr =$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r^3cos\varphi \sin^2\varphi + rsin\varphi - r^3\,sin\,\varphi + r^2\cos^2\varphi\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1-r^2}}rdr =$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\sin^2\varphi\, cos\varphi \int_0^1 \frac{r^4}{\sqrt{1-r^2}}dr + sin\varphi \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}dr - sin\,\varphi \int_0^1 \frac{r^4}{\sqrt{1-r^2}}dr + \cos^2\varphi \int_0^1 r^3dr\right)$

$r = sinu, dr = cosudu$

$\int_0^{2\pi} d\varphi \left(sin^2\,\varphi\, cos\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4\,u\,du + sin\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2\,u\,du - sin\,\varphi\left(-\left(\frac{cosusin^3u}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2\,u\,du\right) + \frac{1}{4}cos^2\,\varphi\right) =$

$\int_0^{2\pi} d\varphi \left(sin^2\,\varphi\, cos\varphi\left(0 + \frac{3}{4} * \frac{\pi}{4}\right) + \frac{sin\varphi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - cos\,(2u))du - \frac{3\pi}{16}sin\,\varphi + \frac{1}{4}cos^2\,\varphi\right) =$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{3\pi}{16}\sin^2\varphi\, cos\varphi + \frac{sin\varphi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \frac{3\pi}{16} sin\,\varphi + \frac{1}{4}\cos^2\varphi\right) =$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3\pi}{16}\sin^2\varphi\, cos\varphi + \frac{\pi}{4} sin\varphi - \frac{3\pi}{16} sin\,\varphi + \frac{1}{4}\cos^2\varphi\right) d\varphi =$$
$$= \frac{3\pi}{16}\int_0^{2\pi} (\sin^2\varphi\, cos\varphi)\, d\varphi + \frac{\pi}{4}\int_0^{2\pi} sin\varphi\, d\varphi - \frac{3\pi}{16}\int_0^{2\pi} sin\,\varphi\, d\varphi + \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi =$$
$$= \frac{3\pi}{16}\frac{\sin^3\varphi}{3}\Big|_0^{2\pi} + \frac{\pi}{4}(-cos\varphi)|_0^{2\pi} - 0 + \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1+\cos(2\varphi))\, d\varphi = 0 + 0 + 0 + \frac{1}{8}\left(\varphi + \frac{\sin(2\varphi)}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}$$

$$F_2 = \iint_S \; an_{20} dS = \iint_{D_{xy}} \left(xy^2 + y(1 - x^2 - y^2) - \sqrt{1 - x^2 - y^2}x^2\right)\sqrt{(z_x')^2 + \left(z_y'\right)^2 + 1} dxdy =$$
$$= \iint_{D_{xy}} \left(xy^2 + y(1 - x^2 - y^2) - \sqrt{1 - x^2 - y^2}x^2\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\; dxdy =$$
$$= \iint_{D_{xy}} \left(\frac{xy^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + y\sqrt{1 - x^2 - y^2} - x^2\right) dxdy =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r^3 cos\varphi \sin^2\varphi + r sin\varphi - r^3\cos^2\varphi\, sin\,\varphi - r^3\sin^3\varphi - r^2\cos^2\varphi\sqrt{1 - r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1 - r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}} rdr =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r^3 cos\varphi \sin^2\varphi + r sin\varphi - r^3 sin\,\varphi - r^2\cos^2\varphi\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1-r^2}} rdr =$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3\pi}{16}\sin^2\varphi\, cos\varphi + \frac{\pi}{4} sin\varphi - \frac{3\pi}{16} sin\,\varphi - \frac{1}{4}\cos^2\varphi\right) d\varphi = -\frac{\pi}{4}$$

$$F = F_1 + F_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$$

2) $diva = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$

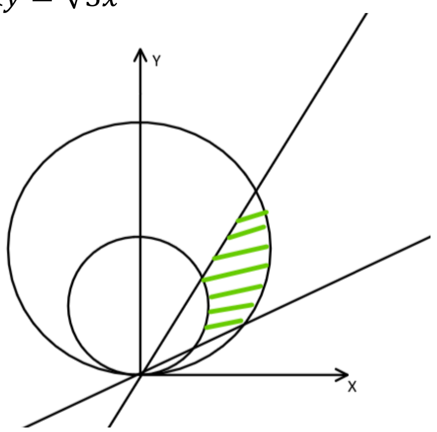
$F = \iiint_V \; diva\, dxdydz = \iiint_V \; 0\, dxdydz = 0$

2. Вычислить площадь области D, ограниченной функциями

$$D: \begin{cases} y^2 - 4y + x^2 = 0 \\ y^2 - 10y + x^2 = 0 \\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}, \;\; y = \sqrt{3}x \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} y = 2 + \sqrt{4 - x^2} \\ y = 2 - \sqrt{4 - x^2} \\ y = 5 + \sqrt{25 - x^2} \\ y = 5 - \sqrt{25 - x^2} \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} \\ y = \sqrt{3}x \end{cases}$$



$$\begin{cases} y^2-4y+x^2=0 \\ y=\frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 - 4\frac{x}{\sqrt{3}} + x^2 = 0 \\ y=\frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} = \begin{cases} 4x^2-4\sqrt{3}x=0 \\ y=\frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} => \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} y^2-4y+x^2=0 \\ y=\sqrt{3}x \end{cases} = \begin{cases} \left(\sqrt{3}x\right)^2 - 4\sqrt{3}x + x^2 = 0 \\ y=\sqrt{3}x \end{cases} = \begin{cases} 4x^2-4\sqrt{3}x=0 \\ y=\sqrt{3}x \end{cases} => \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} y^2-10y+x^2=0 \\ y=\frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 - 10\frac{x}{\sqrt{3}} + x^2 = 0 \\ y=\frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} = \begin{cases} 4x^2-10\sqrt{3}x=0 \\ y=\frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} => \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{5}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} y^2-10y+x^2=0 \\ y=\sqrt{3}x \end{cases} = \begin{cases} \left(\sqrt{3}x\right)^2 - 10\sqrt{3}x + x^2 = 0 \\ y=\sqrt{3}x \end{cases} = \begin{cases} 4x^2-10\sqrt{3}x=0 \\ y=\sqrt{3}x \end{cases} => \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{15}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$S_{D_1} = \int_{\sqrt{3}}^{2}\left(2-\sqrt{4-x^2}-\frac{x}{\sqrt{3}}\right)dx$

$x = 2sinu, dx = 2cosudu$

$(2x)\big|_{\sqrt{3}}^{2} - 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 u)du - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{\sqrt{3}}^{2} = 4-2\sqrt{3}-2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2u))du - \frac{1}{2\sqrt{3}} =$

$= 4-2\sqrt{3}-\frac{1}{2\sqrt{3}}-2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 4-2\sqrt{3}+\frac{-\pi+\sqrt{3}}{3}$

$S_{D_2} = \int_{\sqrt{3}}^{2}\left(\sqrt{3}x-\left(2+\sqrt{4-x^2}\right)\right)dx = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(4-2\sqrt{3}+2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}+3\sqrt{3}-4$

$S_{D_3} = \int_{\frac{5\sqrt{3}}{2}}^{5}\left(5-\left(5-\sqrt{25-x^2}\right)\right)dx = \frac{25}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2u))du = \frac{25\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)}{24}$

$S_{D_4} = \int_{\frac{5\sqrt{3}}{2}}^{5}\left(5+\sqrt{25-x^2}-5\right)dx = \frac{25\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)}{24}$

$S_{D_5} = \int_{2}^{\frac{5\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}x-\frac{x}{\sqrt{3}}\right)dx = \left(\frac{\sqrt{3}x^2}{2}-\frac{x^2}{2\sqrt{3}}\right)\Big|_{2}^{\frac{5\sqrt{3}}{2}} = \frac{59}{4\sqrt{3}}$

$S = S_{D_1}+S_{D_2}+S_{D_3}+S_{D_4}+S_{D_5} = 4-2\sqrt{3}+\frac{-\pi+\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{3}+3\sqrt{3}-4+2\frac{25\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)}{24}+\frac{59}{4\sqrt{3}} =$

$= \frac{71\sqrt{3}-4\pi+4\sqrt{3}-4\pi+50\pi-75\sqrt{3}}{12} = \frac{42\pi}{12} = \frac{7\pi}{2} \approx 11$ед^2

3. Вычислить объем тела T, ограниченного поверхностями

$$T: \begin{cases} x^2+y^2+4x=0 \\ z=8-y^2 \\ z=0 \end{cases}$$

Решение:

$V = \iiint_T dxdydz = \int_{-4}^{0}dx\int_{-\sqrt{-x^2-4x}}^{\sqrt{-x^2-4x}}dy\int_{0}^{8-y^2}dz = \int_{-4}^{0}dx\int_{-\sqrt{-x^2-4x}}^{\sqrt{-x^2-4x}}(8-y^2)dy =$

$= \int_{-4}^{0}\left(16\sqrt{-x^2-4x}-\frac{2(-x^2-4x)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)dx = 16\int_{-4}^{0}\left(\sqrt{-x^2-4x}\right)dx - \frac{2}{3}\int_{-4}^{0}(-x^2-4x)^{\frac{3}{2}}dx$

$u = x+2, du = dx$

$16\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{-u^2+4}\right)du - \frac{2}{3}\int_{-2}^{2}(-u^2+4)^{\frac{3}{2}}du$

$u = 2sint, du = 2costdt$

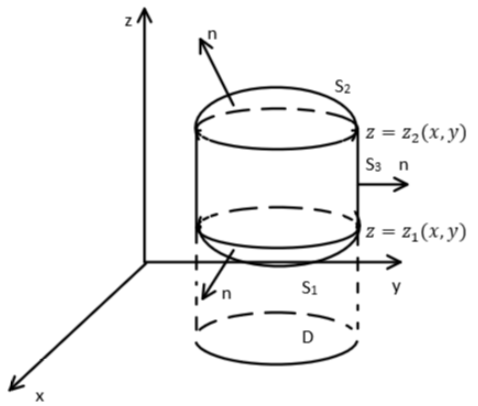
$64\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 t)dt - \frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cost(4-4\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}dt = 32\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2t))dt -$

$-\frac{4}{3}(8\cos^3 t\, sint + 3(x - \frac{1}{4}\sin(4x))\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}) = 32(\pi + 0) - \frac{4}{3}3\pi = 32\pi - 4\pi = 28\pi \approx 88\text{ед}^3$

4. При помощи формулы Остроградского-Гаусса докажите, что

$$\oiint_S f d\vec{S} = \iiint_T \nabla f dv$$

где T – ограниченная область в пространстве с границей – гладкой односвязной поверхностью S,
$f(x;\ y;\ z)$ – непрерывно дифференцируемая в области T скалярная функция,
$d\vec{S} = (dydz;\ dzdx;\ dxdy)$ – направленный элементарный участок поверхности S,
$dv = dxdydz$ – элементарный участок в области T.
Доказательство:
Пусть $\left\{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z), \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}\right\} \in c^0(T) \in \mathbb{R}^3$
Формула Остроградского-Гаусса в координатной форме:
$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \oiint_S (Pcos\alpha + Qcos\beta + Rcos\gamma)dS$
где поверхностный интеграл берется по внешней стороне поверхности S, а α, β, γ углы между внешней нормалью к поверхности S и осями координат Ox, Oy и Oz, соответственно.



Пусть T – z-цилиндрическая область.
$\measuredangle \iiint_T \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_D \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz\right] dxdy = \iint_D \left[R\big(x,y,z_2(x,y)\big) - R\big(x,y,z_1(x,y)\big)\right] dxdy =$
$= \iint_{S_2} R(x,y,z)dxdy + \iint_{S_1} R(x,y,z)dxdy + \iint_{S_3} R(x,y,z)dxdy =$
$= \iint_{S_2} R(x,y,z)dxdy + \iint_{S_1} R(x,y,z)dxdy + 0 = \oiint_S R(x,y,z)dxdy$
Пусть T – простая область. Разобьем ее на конечное число z-цилиндрических областей T_i с границами S_i, $i = 1,\ldots,n$. Для каждой области T_i справедливо равенство:
$\iiint_{T_i} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \oiint_{S_i} Rdxdy$
Суммируя все эти равенства, получим слева $\iiint_T \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz$ и справа – $\oiint_S Rdxdy$, поскольку поверхностные интегралы по вспомогательным поверхностям, разделяющим область T на части T_i , берутся дважды, причем один раз по одной стороне каждой такой поверхности, а другой раз по другой стороне, и поэтому, сумма таких двух интегралов равна нулю.

Аналогично:

$$\iiint_T \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \oiint_S Pdydz$$

$$\iiint_T \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \oiint_S Qdzdx$$

Сложим все части и получим:

$$\iiint_T \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz + \iiint_T \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz + \iiint_T \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \oiint_S Pdydz + \oiint_S Qdzdx + \oiint_S Rdxdy$$

$$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$\iiint_T \nabla f dv = \oiint_S f d\vec{S}$$