Seminar 4
Введение в классическую механику

Victor Ivanov Yu.*

Аннотация

Physics and Mathematics

Содержание

1 Законы сохранения

Конец XIX века стал периодом гордости для физики, которая, казалось, наконец достигла состояния связности и ясности. Физики того времени считали, что мир состоит из двух царств: царства частиц и царства электромагнитных волн. Движение частиц было описано уравнением Исаака Ньютона с его поразительной простотой, универсальностью и красотой. Точно так же электромагнитные волны были точно описаны простыми и красивыми уравнениями Джеймса Клерка Максвелла. “Физика была элегантно упакована в коробку и перевязана бантиком“, – Молодой Планк. На этом закончилась классическая физика и началась квантовая.

1.1 Движение в $\mathbb{R}^1$

Theorem 1 (Закон сохранения энергии)**.** *Предположим, что частица удовлетворяет закону Ньютона в виде* $m\ddot{x} = F(x)$. *Пусть* $V(x) = -\int F(x)dx$ *и* $E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$. *Тогда энергия* E *сохраняется, а это означает, что для каждого решения* $x(t)$ *закона Ньютона,* $E(x(t), \dot{x}(t))$ *не зависит от* t.

Доказательство. Очевидно ■

*VI

1.2 Движение в $\mathbb{R}^n$

Theorem 2 (Закон сохранения энергии)**.** *Предположим, что частица удовлетворяет закону Ньютона в виде* $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}))$*, где* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^\mathbf{n} \times \mathbb{R}^\mathbf{n} \to \mathbb{R}^\mathbf{n}$ *некий силовой закон, который вообще может зависеть как от положения, так и от скорости частицы. Функция энергии* $E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{m}|\dot{\mathbf{x}}|^\mathbf{2} + \mathbf{V}(\mathbf{x})$ *сохраняется тогда и только тогда, когда справедливо равенство* $-\nabla V = \mathbf{F}$*, где* ∇V *градиент функции* V*.*

Доказательство. Очевидно ■

Definition. *Предположим, что* $\mathbf{F}$ *гладкая,* $\mathbb{R}^n$ *- значная функция на области* $U \subset \mathbb{R}^n$*.* $\mathbf{F}$ *называется консервативной функцией (силой) тогда и только тогда, когда существует гладкая, вещественнозначная функция* V *на* U *:* $\mathbf{F} = -\nabla \mathbf{V}$*.*

Если область определения функции U односвязная, тогда существует более простое условие на существование консервативной функции ($curl \nabla \times F = 0$ на U).

Теперь рассмотрим систему многих частиц.

Theorem 3 (Закон сохранения импульса)**.** *Если система, состоящая из нескольких частиц, имеет закон силы, исходящий из потенциала* V*, то полный импульс системы сохраняется тогда и только тогда, когда* $V(\mathbf{x^1} + \mathbf{a}, \mathbf{x^2} + \mathbf{a}, ..., \mathbf{x^N} + \mathbf{a}) = \mathbf{V}(\mathbf{x^1}, \mathbf{x^2}, ..., \mathbf{x^N})$ *для всех* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\mathbf{n}$

Доказательство. Очевидно ■

Theorem 4 (Закон сохранения углового момента)**.** *Предположим, что частица массы m движется в* $\mathbb{R}^2$ *под действием консервативной силы с потенциальной функцией* $V(x)$*. Если* V *инвариантно относительно вращений в* R^2*, то угловой момент* $J = x_1 p_2 - x_2 p_1$ *не зависит от времени вдоль любого решения уравнения Ньютона. Наоборот, если* J *не зависит от времени на любом решении уравнения Ньютона, то* V *инвариантно относительно вращений.*

Доказательство. Очевидно ■

2 Упражнения

Задача 2.1. *В момент, когда скорость падающего тела составила* $v_0 = 4$ *м/с, оно разорвалось на три одинаковых осколка. Два осколка разлетелись в горизонтальной плоскости под прямым углом друг к другу со скоростью* $v = 5$ *м/с каждый. Найти скорость третьего осколка сразу после разрыва.*

Решение. Elementary ■

Задача 2.2. *Тележка с песком движется по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы* $\boldsymbol{F}$*, совпадающей по направлению с ее скоростью. При этом песок высыпается через отверстие в дне с постоянной скоростью* μ *кг/с. Найти ускорение и скорость тележки в момент* t*, если в момент* $t = 0$ *тележка с песком имела массу* m_0 *и ее скорость была равна нулю.*

Решение. Elementary ■

Задача 2.3. *Частица совершила перемещение по некоторой траектории в плоскости xy из точки 1 с радиус-вектором* $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$ *в точку 2 с радиус-вектором* $\boldsymbol{r}_2 = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$. *При этом на нее действовали некоторые силы, одна из которых* $\boldsymbol{F} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$. *Найти работу, которую совершила сила* $\boldsymbol{F}$.

Решение. Elementary ■

Задача 2.4. *Локомотив массы* m *начинает двигаться со станции так, что его скорость меняется по закону* $v = \alpha\sqrt{s}$, *где* α *– постоянная,* s *– пройденный путь. Найти суммарную работу всех сил, действующих на локомотив, за первые* t *секунд после начала движения.*

Решение. Elementary ■

3 Homework

Задача 3.1. *Мотоциклист едет по вертикальной цилиндрической стенке радиуса* $R = 5$ *м. Центр масс человека с мотоциклом расположен на* $l = 0.8$ *м от стенки. Коэффициент трения между колесами и стенкой* $k = 0.34$. *С какой минимальной скоростью может ехать мотоциклист по горизонтальной окружности?*

Решение. Elementary ■

Задача 3.2. *Две небольшие шайбы масс* m_1 *и* m_2 *связаны нитью длины* l *и движутся по гладкой плоскости. В некоторый момент скорость одной шайбы равна нулю, а другой* v, *причем ее направление перпендикулярно нити. Найти силу натяжения нити.*

Решение. Elementary ■

Задача 3.3. *Снаряд, выпущенный со скоростью* $v_0 = 100$ *м/с под углом* $\alpha = 45^o$ *к горизонту, разорвался в верхней точке* O *траектории на два одинаковых осколка. Один осколок упал на землю под точкой* O *со скоростью* $v_1 = 97$ *м/с. С какой скоростью упал на землю второй осколок?*

Решение. Elementary ■

Задача 3.4. *Система частиц имеет суммарный импульс* $\boldsymbol{p}$ *и момент импульса* $\boldsymbol{M}$ *относительно точки* O. *Найти ее момент импульса* $\boldsymbol{M}'$ *относительно точки* O', *положение которой по отношению к точке* O *определяется радиус-вектором* $\boldsymbol{r}_0$. *В каком случае момент импульса системы частиц не будет зависеть от выбора точки* O*?*

Решение. Elementary ■