Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Отчёт
По расчётно-графической работе №3
Вариант: 2

Выполнили:
Касьяненко В.М.
Кремпольская Е.А.
Шишминцев Д.В.
Кравцов К.Д.

Преподаватель:
Труфанова А.А.

г. Санкт-Петербург

2023 г.

1. Найти общее решение уравнения

$$y' + \sin\frac{x+y}{2} = \sin\frac{x-y}{2}$$

Решение:

$$y' = \sin\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x+y}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2} * \sin\frac{A-B}{2}$$

$$y' = -2\cos\left(\frac{\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}}{2}\right) * \sin\left(\frac{\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}}{2}\right)$$

$$y' = -2\cos\left(\frac{2x}{4}\right) * \sin\left(\frac{2y}{4}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -2\cos\frac{x}{2} * \sin\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2} * \frac{1}{\sin\frac{y}{2}} dy = -\cos\frac{x}{2} dx$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{y}{2} dy = -\cos\frac{x}{2} dx$$

$$\frac{1}{2}\int \operatorname{cosec}\frac{y}{2} = \int \cos\frac{x}{2} dx$$

$$\ln tg\frac{y}{4} = -\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$\ln tg\frac{y}{4} = C - 2\sin\frac{x}{2}$$

2. Найти общее решение уравнения

$$y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$$

Решение:

$$y = uv$$

$$y' = uv' + u'v$$

$$uv' + u'v + \frac{uv(1-2x)}{x^2} = 1$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v(1-2x)}{x^2}\right) = 1$$

$$v' + \frac{v(1-2x)}{x^2} = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v(1-2x)}{x^2}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{(2x-1)dx}{x^2}$$

$$\int \frac{1}{v} dv = \int \frac{2x-1}{x^2} dx$$

$$\int \frac{2x-1}{x^2} dx = 2\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx = 2\ln(x) + \frac{1}{x}$$

$$\ln(v) = 2\ln(x) + \frac{1}{x}$$

$$v = x^2 \sqrt[x]{e}$$

$$u' x^2 \sqrt[x]{e} = 1$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2 \sqrt[x]{e}}$$

$$\int 1\, du = \int \frac{1}{x^2 \sqrt[x]{e}} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt[x]{e}} dx$$

$$t = \frac{1}{x};\ -dt = \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int -\frac{1}{e^t} dt$$

$$s = -t; t = -s; dt = -ds$$

$$\int e^s ds = e^s = \frac{1}{e^t} = \frac{1}{\sqrt[x]{e}}$$

$$u = \frac{1}{\sqrt[x]{e}} + C$$

$$y = x^2\left(C\sqrt[x]{e} + 1\right)$$

$$y = Cx^2\sqrt[x]{e} + x^2$$

3. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$y = x(y' - x\cos x), y(\pi) = -5$$

Решение:

$$y' = \frac{y}{x} + x\cos x$$

$$y' - \frac{1}{x}y = x\cos x$$

$$y' - \frac{1}{x}y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C$$

$$y = C(x)x$$

$$y' = C'(x)x + C(x)$$

$$C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = x\cos x$$

$$C'(x) = \cos x$$

$$\int dC = \int \cos x\, dx$$

$$C = \sin x$$

$$y = y_{\text{о}} + y_{\text{ч}}$$

$$y = x\sin x + Cx$$

$$y = x(C + \sin x)$$

$$5 = \pi C$$

$$C = \frac{5x}{\pi}$$

$$y = x\sin x + \frac{5x}{\pi}$$

4. Найти общее решение уравнения

$$2xy'y'' = (y')^2 + 1$$

Решение:

$$y' = z;\ y'' = z'$$

$$2xzz' = z^2 - 1$$

$$z^2 - 1 = 0 => z^2 = 1 => \left[\begin{array}{l} z = -1 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

$$z' = 0, \text{тогда равенство верно}$$

$$\text{если } z = -1, \text{то } y' = -1 \text{ и } y = -x + C$$

$$\text{если } z = 1, \text{то } y' = 1 \text{ и } y = x + C$$

$$2xz\frac{dz}{dx} = z^2 - 1$$

$$\frac{2zdz}{z^2 - 1} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{2zdz}{z^2 - 1} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{d(z^2 - 1)}{z^2 - 1} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|z^2 - 1| = \ln|x| + C_1$$

$$z^2 - 1 = C_1 x$$

$$(y')^2 = C_1 x + 1$$

$$y' = \pm\sqrt{C_1 x + 1}$$

$$y = \pm \int (C_1 x + 1)^{\frac{1}{2}} = \pm \frac{(C_1 x + 1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2} + 1} * \frac{1}{C_1} + C_2 = \pm \frac{2}{3C_1}(C_1 x + 1)^{\frac{3}{2}} + C_2$$

$$y - C_2 = \frac{2}{3C_1}(C_1 x + 1)^{\frac{3}{2}}$$

$$3C_1(y - C_2) = 2(C_1 x + 1)^{\frac{3}{2}}$$

$$9C_1^2(y - C_2)^2 = 4(C_1 x + 1)^3; \quad y = \pm x + C$$

5. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x, y(0) = 2, y'(0) = 3$$

Решение:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$D = 16 - 20 = -4$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} => \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 + i \\ \lambda_2 = 2 - i \end{array}\right.$$

$$y_{\text{о}} = e^{2x} C_1 \sin x + e^{2x} C_2 \cos x$$

$$y_{\text{ч}} = e^x(Ax^2 + Dx + C)$$

$$y_ч' = e^x(Ax^2 + x(B+2A) + C + B)$$

$$y_ч'' = e^x(Ax^2 + x(B+4A) + C + 2B + 2A)$$

$$2e^xAx^2 + e^xx(2B-4A) + e^x(2C-2B+2A) = 2x^2e^x$$

$$\begin{cases} 2A = 2 \\ 2B - 4A = 0 \\ 2C - 2B + 2A = 0 \end{cases} => \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \\ C = 1 \end{cases}$$

$$y_ч = e^x(x^2 + 2x + 1)$$

$$y = y_о + y_ч$$

$$y = e^{2x}\,C_1 \sin x \; + e^{2x}\,C_2 \cos x + e^x(x^2 + 2x + 1)$$

$$y = e^{2x}\,C_1 \sin x \; + e^{2x}\,C_2 \cos x + e^xx^2 + 2e^xx + e^x$$

$$y' = 2e^{2x}\,C_1 \sin x - e^{2x}C_2 \sin x \; + e^{2x}\,C_1 \cos x + 2e^{2x}C_2 \cos x + e^xx^2 + 4e^xx + 3e^x$$

$$\begin{cases} 2 = C_2 + 1 \\ 3 = C_1 + 2C_2 + 3 \end{cases} => \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

$$y = -2e^{2x}\, \sin x \; + e^{2x}\, \cos x + e^xx^2 + 2e^xx + e^x$$

6. Составить линейное неоднородное дифференциальное уравнение по характеристическому полиному однородной его части, и решить его

$$9\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$$

Решение:

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \frac{1}{3}$$

$$y = C_1e^{\frac{1}{3}x} + C_2xe^{\frac{1}{3}x}$$

7. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z \\ \dot{y} = 2y + x - z \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$$

Решение:

$$|A - \gamma E| = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A - \gamma E| = \begin{vmatrix} 2-\gamma & -1 & 1 \\ 1 & 2-\gamma & -1 \\ 1 & -1 & 2-\gamma \end{vmatrix} = (2-\gamma)^3 - 1 + 1 - (2-\gamma) - (2-\gamma) + (2-\gamma) =$$

$$= (2-\gamma)^3 - (2-\gamma) = -\gamma^3 + 6\gamma^2 - 12\gamma + 8 + \gamma - 2 = -y^3 + 6\gamma^2 - 11\gamma + 6 =$$

$$= -(\gamma - 1)(\gamma^2 - 5\gamma + 6)) = -(\gamma - 1)(\gamma - 2)(\gamma - 3) = 0$$

$$\gamma_1 = 1; \gamma_2 = 2; \gamma_3 = 3$$

$$\gamma = 1:$$

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -1 & 1 \\ 1 & 2-1 & -1 \\ 1 & -1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1 - v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 - v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 + v_3 = 0 \end{cases} => \begin{cases} v_1 - v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 - v_3 = 0 \end{cases} => \begin{cases} v_1 - v_2 + v_3 = 0 \\ 2v_2 - 2v_3 = 0 \end{cases} => \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 - v_3 = 0 \end{cases} => \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = v_3 \end{cases}$$

Пусть $v_3 = 1, u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\gamma = 2:$$

$$\begin{pmatrix} 2-2 & -1 & 1 \\ 1 & 2-2 & -1 \\ 1 & -1 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 - v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \end{cases} => \begin{cases} v_1 - v_3 = 0 \\ -v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \end{cases} => \begin{cases} v_1 - v_3 = 0 \\ -v_2 + v_3 = 0 \\ -v_2 + v_3 = 0 \end{cases} => \begin{cases} v_1 = v_3 \\ v_2 = v_3 \end{cases}$$

Пусть $v_3 = 1, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\gamma = 3:$$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & -1 & 1 \\ 1 & 2-3 & -1 \\ 1 & -1 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -v_1 - v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 - v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 - v_3 = 0 \end{cases} => \begin{cases} v_1 + v_2 - v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 - v_3 = 0 \end{cases} => \begin{cases} v_1 + v_2 - v_3 = 0 \\ -2v_2 = 0 \end{cases} => \begin{cases} v_1 - v_3 = 0 \\ v_2 = 0 \end{cases} => \begin{cases} v_1 = v_3 \\ v_2 = 0 \end{cases}$$

Пусть $v_3 = 1, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x(t,c) = C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} \\ y(t,c) = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} \\ z(t,c) = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} \end{cases}$$