

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1. Найти матрицу оператора проектирования пространства \mathbb{R}^3 на подпространство $U: -20x = 15y = 12z$ параллельно подпространству $V: 2x + 3y - z = 0$.
2. Линейное отображение задано матрицей A в базисах e и f . Найдите ядро и образ отображения

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 12 & -8 \\ 4 & -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Матрица линейного отображения в стандартных базисах задана матрицей A . Новые базисы f и g — столбцы матриц B и C . Найти матрицу в базисах f и g .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -9 & -7 \\ 4 & -9 & 0 & -5 \\ -2 & 7 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

5. Пусть V — пространство функций вида $y = e^t p(t)$, где $p(t)$ — многочлен степени не выше 2. Найти собственные числа и векторы оператора $\varphi(y) = y'' - 2y' + y$
6. Найти жорданову форму и базис матрицы

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & -7 \\ -3 & 0 & 3 & -7 \\ 3 & 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

7. В пространстве многочленов степени ≤ 3 задан треугольник со сторонами t , t^3 , $t - t^3$. Найдите углы и длины сторон. Скалярное произведение:

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt.$$

8. Найдите длины и скалярное произведение векторов u и v , скалярное произведение задано при помощи матрицы Грама Γ

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

9. Найти ортогональную проекцию $35t^4 + 15t^3 - 15t^2 - 8t + 4$ на подпространство многочленов не выше 2. Скалярное произведение из задачи 7

10. Найдите проекции вектора x на U и U^\perp . Пространство U задано системой линейных уравнений с матрицей A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

11. Найти матрицу перехода к ортонормированному базису из собственных векторов оператора A и матрицу в этом базисе.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

12. Оператор φ переводит столбцы матрицы A в соответствующие столбцы матрицы B . Является ли φ ортогональным?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

13. Привести квадратичную форму $x_1x_2 + 2x_2x_3 - 3x_3x_4$ к каноническому виду с помощью метода Лагранжа

14. Найдите ортонормированный базис, в котором квадратичная форма $3x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2$ имеет диагональный вид