Лекция 14

Вихревое электрическое поле. Ток смещения. Векторные поля. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

Вихревое электрическое поле

Основные формулы электродинамики могут быть выведены из нескольких утверждений.

Утверждение 1. Электростатическое поле создается зарядами. Силовые линии электрического поля начинаются и заканчиваются на зарядах.

Математической формулировкой этого утверждения является теорема Остроградского-Гаусса

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho_e dV.$$

В правой части стоит интеграл от плотности зарядов по произвольному объему, который равен полному заряду внутри него. В левой части - поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность, ограничивающую этот объем. Как мы видели, в этом уравнении содержится, в частности, закон Кулона взаимодействия двух точечных электрических зарядов.

Утверждение 2. Магнитные заряды отсутствуют в природе. Математической формулировкой этого утверждения также является теорема Остроградского-Гаусса, в правой части которой стоит нуль:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Утверждение 3. Электростатическое поле потенциально: в нем нет замкнутых силовых линий. Математически это выражается как равенство нулю циркуляции электростатического поля по произвольному контуру:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Утверждение 4. Магнитное поле является вихревым. Математическим выражением этого утверждения является теорема о циркуляции вектора магнитной индукции:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

В левой части стоит циркуляция магнитного поля по произвольному замкнутому пути L, а в правой - интеграл от плотности полного тока по произвольной поверхности S, «натянутой» на этот контур. Этот интеграл равен сумме токов, пронизывающих поверхность S. В этом уравнении содержится закон Био-Савара-Лапласа.

Эти четыре уравнения надо дополнить выражением для силы Лоренца, действующей на движущиеся заряды со стороны электромагнитных полей:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Два последних утверждения подлежат модификации с учетом явления электромагнитной индукции. Если магнитный поток через проводящий виток L меняется, то в витке возникает ЭДС индукции. Что это означает? Заряды, находящиеся в проводнике, будут испытывать действие силы, связанной с этой ЭДС. Но сила, действующая на заряд, означает появление какого-то электрического поля. Циркуляция этого поля по периметру витка как раз и равна по определению ЭДС индукции:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_i.$$

Отличие циркуляции от нуля означает, что данное электрическое поле не потенциально, а имеет вихревой характер, подобно магнитному полю. Но если такое поле появилось, то в чем тогда роль витка? Виток - это не более чем удобный детектор для регистрации вихревого электрического поля по возникшему индукционному току. Для того, чтобы расстаться с витком окончательно, выразим ЭДС индукции через поток магнитного поля. Перепишем закон Фарадея в виде:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Утверждение 3 (дополненное). Изменяющееся магнитное поле приводит к возникновению вихревого электрического поля.

Математически это выражается в виде уравнения

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

В этом уравнении содержится закон электромагнитной индукции Фарадея. Здесь надо проявить немного осторожности: раз у нас появилось дополнительное электрическое поле, не изменит ли оно первое утверждение? По счастью, ответ отрицателен: поток вихревого поля через замкнутую поверхность равен нулю.

Электрическое (вихревое) поле можно породить без зарядов, просто изменением магнитного поля. Почему же магнитное поле нельзя породить не токами, а изменением электрического поля? Для ответа на этот вопрос нужно ввести понятие "тока смещения".

Ток смещения

Дж. К. Максвелл был первым, кто задался вопросом о модификации четвертого утверждения о вихревом характере магнитного поля. Токи, порождающие вихревое магнитное поле, должны быть замкнутыми, они нигде не могут прерываться. Действительно, на один и тот же контур L можно «натянуть» множество поверхностей S. Пусть, скажем, мы выберем две из них - S_1 и S_2. Так как левая часть $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ для них одинакова, то будут равны и правые части. Это значит, что весь ток, вошедший через S_1, должен выйти через поверхность S_2. Так с обычными токами и происходит. Но бывают нестационарные процессы, когда в каких-то точках меняется плотность электрического заряда. Линии тока будут кончаться в этих местах, и войдя внутрь поверхности, охватывающей такие точки, наружу уже не выйдут, что противоречит нашему выводу. Чтобы проиллюстрировать подобные случаи, рассмотрим уже знакомый процесс разрядки конденсатора. Пусть имеются две пластины с зарядами $+q$ и $-q$. Пока цепь разомкнута, равные и разноименные заряды создают в пространстве между пластинами постоянное электрическое поле. Ток по проводам не идет, и вокруг цепи нет магнитного поля (рисунок а).

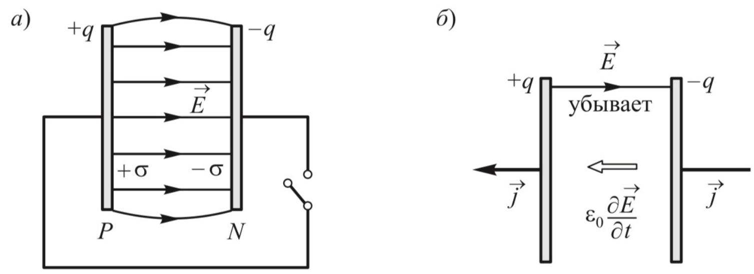

Рисунок 1

При замыкании ключа начнется разрядка конденсатора, и во внешней цепи через соединяющий пластины проводник потечет ток, направленный от пластины P к N. Уменьшение заряда на пластине на величину dq означает, что это же количество электричества протечет по проводу, подсоединенному к пластине (закон сохранения заряда). Поэтому плотность тока проводимости в непосредственной близости от поверхности обкладок будет определяться выражением:

$$j = \frac{\dot{q}}{S} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{q}{S}\right) = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

Когда по проводу пошел ток, возникло магнитное поле. Однако в пространстве между пластинами никакого тока в обычном понимании нет - там происходит только изменение электрического поля. Получается, что ток проводимости не замкнут: он начинается на одной из пластин и кончается на другой. Благодаря этому заряд на пластинах меняется.

Рассмотрим, что происходит в пространстве между пластинами (рисунок б). Напряженность поля внутри конденсатора $E = \sigma/\varepsilon_0$. Следовательно, при разрядке конденсатора

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

Мы получили, что скорость изменения поля в конденсаторе численно равна плотности тока проводимости.

Так как вектор электрического смещения поля направлен от положительной пластины P к отрицательной N, то при разрядке конденсатора скорость изменения электрической индукции отрицательна и направлена в сторону, противоположную $\vec{E}$. Таким образом, направление вектора $\varepsilon_0(\partial\vec{E}/\partial t)$ совпадает с направлением тока в цепи, в которую включен конденсатор.

Поэтому величину $\varepsilon_0(\partial\vec{E}/\partial t)$ можно рассматривать как продолжение тока проводимости в той области, где заведомо нет движения зарядов. Максвелл назвал величину $\varepsilon_0(\partial\vec{E}/\partial t)$ плотностью тока смешения:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Так как численные значения плотности тока смещения $\vec{j}_{\text{см}}$ и плотности тока проводимости $\vec{j}$ равны, то, следовательно, линии плотности тока проводимости внутри проводника непрерывно переходят в линии плотности тока смещения между пластинами (обкладками конденсатора).

Если ввести понятие полного тока, который включает в себя сумму тока проводимости и тока смещения, то для его плотности имеем

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{с}} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

На примере конденсатора мы обнаружили, что полный ток будет замкнут: его линии продолжаются, нигде не прерываясь (даже в пространстве между пластинами конденсатора). По этому своему свойству именно полный ток должен стоять в правой части уравнения $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$. В этом и состояла идея Максвелла. В результате мы приходим к видоизмененному утверждению 4:

Утверждение 4. Вихревое магнитное поле создается полным током, т. е. токами проводимости и изменяющимся электрическим полем.

Математическим выражением этого утверждения является уравнение, получаемое при подстановке плотности полного тока:

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S} + \mu_0\varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}.$$

Таким образом, Максвелл предсказал новое явление, обратное электромагнитной индукции. Эксперимент подтвердил, что магнитное поле действительно может создаваться изменяющимся электрическим полем.

Векторные поля

Четыре утверждения, выраженные математические, называются уравнениями Максвелла в интегральной форме. Однако существует и другая форма математической записи этих утверждений в виде дифференциальных уравнений. Такая форма записи уравнений Максвелла позволяет говорить о связи электрического и магнитного поля в каждой точке пространства (локальная или дифференциальная форма уравнений). Чтобы перейти к ней, необходимо напомнить некоторые результаты, касающиеся дифференциальных операций над векторными полями. Если в каждой точке пространства $\vec{r}$ задан некоторый вектор $\vec{a}(\vec{r})$, то вся совокупность таких векторов образует векторное поле. Примерами векторных полей служат поле скоростей течения жидкости, поле вектора электрической напряженности и т. д. Дифференциальным оператором, действующим на векторные поля, является уже знакомый нам оператор «набла» $\vec{\nabla}$ с компонентами, являющимися производными по координатам. В прямоугольной декартовой системе координат он записывается как

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

При действии оператора «набла» на какое-то скалярное поле $\varphi(\vec{r})$ мы получаем градиент этого поля:

$$\vec{\nabla}\varphi = \vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \operatorname{grad}\varphi$$

В определенном смысле с оператором «набла» можно обращаться как с обычным вектором (но проявляя осторожность, имея дело с произведениями полей). При его действии на какое-то векторное поле $\vec{a}$ возможны два варианта - скалярное произведение и векторное. При скалярном произведении «наблы» и поля $\vec{a}$ мы получаем $\boldsymbol{\partial}$ дивергенцию векторного поля:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

В результате применения дивергенции к векторному полю мы получаем скалярное поле.

Рассмотрим для примера решение задачи:
Найти $\operatorname{div}(p\vec{a})$, где $p-$ скалярное поле, а $\vec{a}-$ векторное.
Решение. Используем оператор «набла» и правила дифференцирования произведения:

$$\operatorname{div}(p\vec{a}) = \vec{\nabla}\cdot(p\vec{a}) = \vec{a}\cdot\nabla p + p\nabla\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\operatorname{grad}p + p\operatorname{div}\vec{a}.$$

При векторном произведении «наблы» на поле $\vec{a}$ мы приходим к новому векторному полю, ортогональному первоначальному. Это поле называется ротором векторного поля $\vec{a}$. В декартовых координатах ротор векторного поля $\vec{a}$ записывается в виде:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{\nabla}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$
$$= \vec{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right).$$

Векторное произведение любого вектора на себя равно нулю: $\vec{b}\times\vec{b} = 0$. Если под вектором $\vec{b}$ понимать оператор «набла», действующий на какое-то скалярное поле φ, то получим, что последовательность операций градиента и ротора тождественно дает ноль: $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0$ для любого поля φ. Для смешанного произведения векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$ справедливо равенство $\vec{b}\cdot[\vec{b}\times\vec{a}] = 0$, так как векторное произведение $[\vec{b}\times\vec{a}]$ ортогонально вектору $\vec{b}$. Если вместо вектора $\vec{b}$ подставить сюда $\vec{\nabla}$, то придем к тождеству $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0$ для любого поля $\vec{a}$. Из этих утверждений вытекает важная теорема Гельмгольца: любое векторное поле может быть представлено в виде суммы двух других векторных полей, причем у одного из них будет равен нулю ротор, а у другого - дивергенция:

$$\begin{aligned} &\vec{a} = \vec{a}_d + \vec{a}_r, \\ &\operatorname{rot}\vec{a}_d = 0, \quad \operatorname{div}\vec{a}_r = 0, \\ &\operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{div}\vec{a}_d \quad \operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{a}_r. \end{aligned}$$

Пусть теперь нам дан интеграл по некоторому объему V от дивергенции какого-то поля $\vec{a}$. Теорема о дивергенции (она же теорема Остроградского-Гаусса) позволяет свести этот объемный интеграл к интегралу по замкнутой поверхности S, ограничивающей данный объем:

$$\int_V \operatorname{div}\vec{a}dV = \oint_S \vec{a}\cdot d\vec{S}$$

($d\vec{S} = \vec{n}dS$, а $\vec{n}-$ внешняя нормаль к элементу поверхности dS). для погруженного в жидкость тела любой формы, не ограничиваясь при этом предположением о несжимаемости жидкости. Закон Паскаля имеет вид:

$$\operatorname{grad}p = \rho\vec{g}.$$

Здесь p - давление в жидкости, ρ - ее плотность, а $\vec{g}$ - вектор ускорения свободного падения. Умножим это уравнение скалярно на произвольный вектор $\vec{a}$:

$$\vec{a}\cdot\operatorname{grad}p = \rho\vec{a}\cdot\vec{g}$$

Так как дивергенция постоянного вектора равна нулю, то левую часть этого уравнения можно представить как дивергенцию произведения p и $\vec{a}$:

$$\operatorname{div}(p\vec{a}) = \rho\vec{a}\cdot\vec{g}$$

Проинтегрируем обе части по объему тела, погруженного в жидкость, и применим к левой части теорему о дивергенции:

$$\int_V \operatorname{div}(p\vec{a})dV = \vec{a}\cdot\int_V \rho\vec{g}dV$$

Из-за произвольности вектора $\vec{a}$, приходим к векторному равенству:

$$\oint_S p d\vec{S} = \int_V \rho \vec{g} dV.$$

Это и есть закон Архимеда. В самом деле, на элемент $d\vec{S}$ поверхности тела со стороны жидкости действует сила $d\vec{F} = -\vec{n} p dS$, где $\vec{n}$ - единичный вектор внешней нормали к элементу $d\vec{S}$. Тогда действующая на тело выталкивающая сила равна интегралу от $d\vec{F}$ по поверхности тела, погруженного в жидкость:

$$\vec{F}_A = -\oint_S p d\vec{S}.$$

Выражение ρdV есть масса жидкости dm в элементарном объеме dV. Тогда полная масса вытесненной телом жидкости равна $m_V = \int_V \rho dV$.

Получаем:

$$\vec{F}_A = -m_V \vec{g},$$

где знак "минус"означает, что выталкивающая сила направлена против силы тяжести.

Теорема о циркуляции (теорема Стокса) позволяет свести интеграл от вектора $\vec{a}$ вдоль замкнутой кривой (контура) L к интегралу по поверхности S, опирающейся на этот контур:

$$\oint_L \vec{a} \cdot \vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S},$$

здесь $d\vec{l}$ - элемент контура L, имеющий длину dl, направленный по касательной к нему вдоль направления обхода.

Если мы применим теорему о циркуляции к полю $\vec{a}_d$, ротор которого равен нулю, то получим, что циркуляция этого вектора по любому замкнутому контуру также равна нулю. Это значит, что интеграл $\int_1^2 \vec{a}_d \cdot d\vec{l}$ между двумя произвольными точками 1 и 2 не зависит от пути интегрирования. Это позволяет ввести потенциал такого поля φ, такой, что $\vec{a}_d = -\operatorname{grad} \varphi$, так как $\operatorname{rot} \vec{a}_d = 0$. Безвихревые поля, ротор которых всюду равен нулю, являются потенциальными.

Поле $\vec{a}_r$ с равной нулю дивергенцией, называется соленоидальным или вихревым полем. Такое поле можно представить в виде ротора некоторого другого поля: $\vec{a}_r = \operatorname{rot} \vec{A}$, пользуясь тождеством $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a}_r = 0$. Применим к такому полю теорему Стокса:

$$\oint_S \vec{a}_r \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{a}_r dV = \int_V \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} dV = 0.$$

Мы получили, что поток соленоидального поля через любую замкнутую поверхность S всегда равен нулю, то есть линии вихревого поля нигде не начинаются и не заканчиваются (сколько их вошло внутрь поверхности, столько же и вышло).

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

Перейдем от интегральной формы уравнений Максвелла к дифференциальной:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho_e dV;$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0;$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S};$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

В левой части первого уравнения стоит поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность S (интегральная величина). Преобразуем ее в объемный интеграл с помощью теоремы Остроградского-Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho_e dV$$

Если объемные интегралы этого выражения равны, то равны и подынтегральные функции (локальные величины):

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$$

Аналогично преобразуется второе уравнение:

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$

Применяя теорему Стокса о циркуляции к третьему уравнению, запишем его в виде равенства двух поверхностных интегралов:

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{E}\cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

Поверхностные интегралы берутся по произвольным поверхностям S, поэтому их равенство означает, что равны их подынтегральные функции:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.$$

Преобразуем аналогичным способом четвертое уравнение Максвелла, в котором содержится ток смещения $\vec{j}_{\text{см}} = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$:

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right).$$

Теперь понятно, что дивергенция описывает конфигурацию силовых линий, расходящихся из точек, где имеются электрические заряды ($\rho_e \neq 0$, а ротор - вихревые поля вокруг их источников - токов или переменных полей.

Применяя теорему о дивергенции, мы получаем закон сохранения электрического заряда:

$$\frac{\partial\rho_e}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{j}$$

Физический смысл этого выражения заключается в том, что плотность заряда уменьшается в тех точках, откуда вытекает электрический ток.

В конечном итоге мы получили четыре уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной форме. Согласно им электростатическое поле потенциально, а магнитное - соленоидально. Уравнения Максвелла записаны для вакуума. Чтобы учесть свойства электрические и магнитные свойства среды, вводятся понятия диэлектрической проницаемости ε и магнитной проницаемости μ. Только в простейшем случае однородных сред с неизменными свойствами, в уравнениях можно заменить ε_0 на $\varepsilon_0\varepsilon$, μ_0 - на $\mu_0\mu$ и дополнить четыре уравнения законом Ома в дифференциальной форме: $\vec{j} = \sigma\vec{E}$. Получившаяся система уравнений полностью описывает классическую электродинамику, она обладает инвариантностью по отношению к преобразованиям Лоренца, предсказывает электромагнитные волны и определяет их скорость в вакууме: $c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$

Контрольные вопросы

1. Можно ли создать электрическое поле с замкнутыми силовыми линиями?
2. Можно ли создать магнитное поле с незамкнутыми силовыми линиями?
3. Что такое ток смещения?
4. Из постоянных во и но можно построить еще и величину с размерностью сопротивления (его называют иногда сопротивлением вакуума). Найдите эту комбинацию и вычислите сопротивление вакуума.
5. Какие из уравнений Максвелла потребовалось бы изменить, если бы в природе были обнаружены свободные магнитные заряды (монополи)?