Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Отчёт
По расчётно-графической работе №1
Вариант: 6

Выполнили:
Касьяненко В.М.
Кремпольская Е.А.
Шишминцев Д.В.
Кравцов К.Д.

Преподаватель:
Труфанова А.А.

г. Санкт-Петербург

2023 г.

1) Найти частные производные до второго порядка включительно заданных функций.

$z = \ln{(x^2 + y)}$

Решение:

$z'_x = \frac{1}{x^2+y} * 2x = \frac{2x}{x^2+y}$

$z'_y = \frac{1}{x^2+y} * 1 = \frac{1}{x^2+y}$

$z''_{xx} = \frac{2(x^2+y)-2x*2x}{(x^2+y)^2} = \frac{2x^2-4x^2+2y}{(x^2+y)^2} = \frac{-2x^2+2y}{(x^2+y)^2}$

$z''_{yy} = \frac{0(x^2+y)-1*1}{(x^2+y)^2} = -\frac{1}{(x^2+y)^2}$

$z''_{xy} = \frac{0(x^2+y)-2x*1}{(x^2+y)^2} = -\frac{2x}{(x^2+y)^2}$

$z''_{yx} = \frac{0(x^2+y)-1*2x}{(x^2+y)^2} = -\frac{2x}{(x^2+y)^2}$

2) Найти градиент функции $u \ = \ f(x, y, z)$ в точке М.

$u = \ln(3 - x^2) + xy^2z, \quad M(1,3,2)$

Решение:

$grad\, u = \left(u'_x, u'_y, u'_z\right)$

$u'_x = \frac{1}{3-x^2} * (-2x) + y^2z = -\frac{2x}{3-x^2} + y^2z$

$u'_y = 0 + 2xyz = 2xyz$

$u'_z = 0 + xy^2 = xy^2$

$u'_x|_M = -\frac{2}{3-1} + 9 * 2 = 17$

$u'_y|_M = 2xyz = 2 * 1 * 3 * 2 = 12$

$u'_z|_M = 1 * 9 = 9$

$grad\, u = (17,\ 12,\ 9)$

3) Найти производную функции $u(\mathrm{x}, \mathrm{y}, z)$ в точке A по направлению к точке B.

$u = \ln(3 - x^2) + xy^2z, \quad A(1, 3, 2), \quad B(0, 5, 0)$

Решение:

$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x} cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} cos\gamma$

$\bar{S} = (-1, 2, -2)$

$cos\alpha = \frac{S_x}{|S|} = \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}} = -\frac{1}{3}$

$cos\beta = \frac{S_y}{|S|} = \frac{2}{3}$

$cos\gamma = \frac{S_z}{|S|} = -\frac{2}{3}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2x}{3-x^2} + y^2 z$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz$

$\frac{\partial u}{\partial z} = xy^2$

$\frac{\partial u}{\partial x}|_A = -\frac{2x}{3-x^2} + y^2 z = 17$

$\frac{\partial u}{\partial y}|_A = 2xyz = 12$

$\frac{\partial u}{\partial z}|_A = xy^2 = 9$

$\frac{\partial u}{\partial S} = 17 * \left(-\frac{1}{3}\right) + 12 * \frac{2}{3} + 9 * \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{11}{3}$

$u(x, y, z)$ в точке A по направлению к точке B убывает.

4) Найти производные z'_x и z'_y, функции $z = z(u, v)$, где $u = u(x, y)$ и $v = v(x, \text{y})$.

$z = \ln(u - v^2)$, $u = x^2 + y^2$, $v = y$

Решение:

$z'_x = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{u-v^2} * 1 * 2x + \frac{1}{u-v^2} * (-2v) * 0 = \frac{2x}{u-v^2} = \frac{2x}{(x^2+y^2)-y^2} = \frac{2}{x}$

$z'_y = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dy} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dy} = \frac{1}{u-v^2} * 1 * 2y + \frac{1}{u-v^2} * (-2v) * 1 = \frac{2y}{u-v^2} - \frac{2v}{u-v^2} = \frac{2y}{(x^2+y^2)-y^2} - \frac{2y}{(x^2+y^2)-y^2} = 0$

5) Найти производные функций $\text{y} = \text{y}(x)$, заданных неявно уравнениями.

$x - y + arctgy = 0$

Решение:

$F(x, y) = 0$

$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{1+0+0}{0-1+\frac{1}{1+y^2}} = -\frac{1}{\frac{-1-y^2+1}{1+y^2}} = -\frac{(1+y^2)}{-y^2} = \frac{1+y^2}{y^2}$

6) Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке M.

$z = arctg\left(\frac{x}{y}\right)$, $M\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

Решение:

$\Lambda\colon z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M (x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial_y}\Big|_M (y - y_0)$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} * \frac{1}{y} = \frac{1}{y+y\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{1}{y+\frac{x^2}{y}} = \frac{y}{y^2+x^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} * \frac{0*y - x*1}{y^2} = -\frac{x}{y^2+y^2\left(\frac{x}{y}\right)^2} = -\frac{x}{y^2+x^2}$$

$$\Lambda: z - \frac{\pi}{4} = \frac{y}{y^2+x^2}\bigg|_M (x-1) - \frac{x}{y^2+x^2}\bigg|_M (y-1)$$

$$\Lambda: z - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1)$$

$$\Lambda: z - \frac{\pi}{4} = \frac{x-1-y+1}{2}$$

$$\Lambda: \frac{x}{2} - \frac{y}{2} - z + \frac{\pi}{4} = 0$$

$$\Lambda: x - y - 2z + \frac{\pi}{2} = 0$$

$$n: \quad \frac{x-x_0}{z'_x|_M} = \frac{y-y_0}{z'_y|_M} = \frac{z-z_0}{-1}$$

$$n: \frac{x-1}{\frac{1}{2}} = \frac{y-1}{-\frac{1}{2}} = \frac{z-\frac{\pi}{4}}{-1}$$

7) Найти стационарные точки заданных функций и исследовать их характер.

$z = 4x + 2y - x^2 - y^2$

Решение:

$x, y \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4 - 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2 - 2y$$

$$\begin{cases} 4 - 2x = 0 \\ 2 - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$M(2, 1)$ – стационарная точка

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

$4 > 0, A < 0 => M - max$

8) В этом задании в каждом варианте даны функция u трёх переменных x, y, z и уравнение в частных производных (е). Проверьте, является ли функция u решением уравнения (e)

$u = x^{y^3 z}, \quad (e)\colon\ x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = y^3(zy^3 lnx + 1)u$

Решение:

$\frac{\partial u}{\partial x} = y^3 z x^{y^3 z - 1}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 3y^2 * zx^{y^3 z - 1} + y^3 * zx^{y^3 z - 1}\ln(x) * 3y^2 z = 3y^2 * zx^{y^3 z - 1} + 3y^5 z^2 x^{y^3 z - 1}\ln(x) =$
$= 3y^2 z x^{y^3 z - 1}(1 + zy^3 ln(x))$

Подставим в левую часть уравнения (e): $x * \left(3y^2 z x^{y^3 z - 1}(1 + zy^3\ln(x))\right) =$
$= x * \frac{\left(3y^2 z x^{y^3 z}(1 + zy^3\ln(x))\right)}{x} = 3y^2 z x^{y^3 z}(1 + zy^3\ln(x))$

Подставим в правую часть уравнения (e): $u = x^{y^3 z} => y^3 x^{y^3 z}(zy^3 lnx + 1)$

$3y^2 z x^{y^3 z}(1 + zy^3\ln(x)) \neq y^3 x^{y^3 z}(zy^3 lnx + 1) =>$ функция u не является решением (e)

9) В этом задании в каждом варианте даны функция z двух переменных x и y и область D. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции z в области D.

$z = -x^2 - 4x - y^2 + 2y - 4$, область D задана неравенствами $-4 \leq x \leq 0$ и $0 \leq y \leq 2$.

Решение:

$x, y\ \in \mathbb{R}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x - 4$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y + 2$

$\begin{cases} -2x - 4 = 0 \\ -2y + 2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -2 \\ \ y = 1 \end{cases}$

$M(-2, 1)$ – стационарная точка

$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2$

$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$

$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$

$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4$

$4 > 0, A < 0 => M - max$

$z(-2, 1) = -4 + 8 - 1 + 2 - 4 = 1$

$x = -4;\ 0 \le y \le 2$

$z(y) = -16 + 16 - y^2 + 2y - 4 = -y^2 + 2y - 4$

$z'_y = -2y + 2$

$z'_y = 0$ при $y = 1$

$z(1) = -1 + 2 - 4 = -3$

$x = 0;\ 0 \le y \le 2$

$z(y) = 0 + 0 - y^2 + 2y - 4 = -y^2 + 2y - 4$

$z'_y = -2y + 2$

$z'_y = 0$ при $y = 1$

$z(1) = -1 + 2 - 4 = -3$

$y = 0;\ -4 \le x \le 0$

$z(x) = -x^2 - 4x + 0 + 0 - 4 = -x^2 - 4x - 4$

$z'_x = -2x - 4$

$z'_x = 0$ при $x = -2$

$z(-2) = -4 + 8 - 4 = 0$

$y = 2;\ -4 \le x \le 0$

$z(x) = -x^2 - 4x - 4 + 4 - 4 = -x^2 - 4x - 4$

$z'_x = -2x - 4$

$z'_x = 0$ при $x = -2$

$z(-2) = -4 + 8 - 4 = 0$

Проверим вершины:

$z(-4, 2) = -16 + 16 - 4 + 4 - 4 = -4$

$z(-4, 0) = -16 + 16 - 0 + 0 - 4 = -4$

$z(0, 0) = 0 + 0 + 0 + 0 - 4 = -4$

$z(0, 2) = 0 + 0 - 4 + 4 - 4 = -4$

Максимум: $z(-2, 1) = 1$

Минимум: $z(-4, 2) = z(-4\ , 0) = z(0, 0) = z(0, 2) = -4$