Национальный исследовательский Университет ИТМО
Мегафакультет информационных и трансляционных технологий
Факультет инфокоммуникационных технологий

Математический анализ

Типовой расчет №6

Работу выполнил:
В.М. Касьяненко
Группа: K3121
Преподаватель:
Ю.В. Танченко

Санкт-Петербург
2022

Содержание

Введение

В данной работе будет проведено полное исследование заданной функции, взятой из типового расчета по математике [2]:

$$y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}. \tag{1}$$

Исследование функции будет проводиться по следующей схеме:

- Нахождение области значения функции.
- Проверка на периодичность.
- Исследование функции с помощью первой производной.
- Исследование функции с помощью второй производной.
- Проверка на наличие вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот графика функции.
- Нахождение точек пересечения графика с координатными осями.

1. Исследование функции

1.1. Область определения функции

Областью определения функции (1) является вся числовая ось, кроме точки $x = 2$.

1.2. Проверка на периодичность

Функция не является периодической. Проверим четность (нечетность):

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 3}{-x - 2};\ f(-x) = \frac{x^2 - 3}{-x - 2};\ f(-x) \neq \frac{x^2 - 3}{x - 2};\ f(-x) \neq -f(x).$$

Значит, функция не является ни чётной, ни нечётной. График функции не имеет симметрии ни относительно оси ординат, ни относительно центра системы координат.

1.3. Исследование функции с помощью первой производной

Найдём первую производную функции (1):

$$y' = \left(\frac{x^2 - 3}{x - 2}\right)' = \frac{(x^2 - 3)'(x - 2) - (x^2 - 3)(x - 2)'}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(x - 2)^2}.$$

Тогда $y' = 0$ при $x_1 = 1, x_2 = 3$.

Проверим знаки производной и определим промежутки монотонности функции (рисунок 1.1). Таким образом, функция (1) возрастает при $x \in (-\infty; 1) \cup (3; = \infty)$ и убывает при $x \in (1; 2) \cup (2; 3)$. Далее, так как при переходе через стационарную точку $x = 1$ производная меняет знак с плюса на минус, то $x = 1$ - точка максимума ($y_{max} = y(1) = 2$). Аналогично, при переходе через стационарную точку $x = 3$ производная меняет знак с минуса на плюс, поэтому $x = 3$ - точка минимума ($y_{min} = y(3) = 6$)

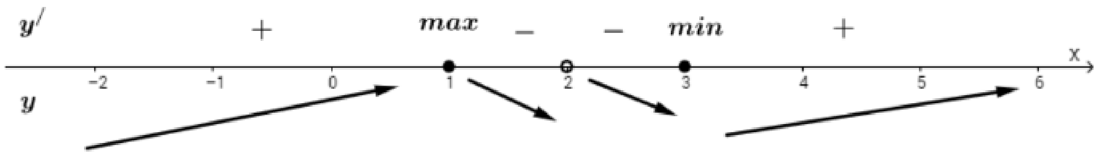

Рисунок 1.1. Промежутки монотонности функции $y = \frac{x^2-3}{x-2}$

1.4. Исследование функции с помощью второй производной

Найдём вторую производную функции (1):

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 3}{x - 2}\right)'' = \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}\right)' = \frac{(2x - 4)(x - 2)^2 - (x^2 - 4x + 3)2(x - 2)}{(x - 2)^4} = \frac{2}{(x - 2)^3}.$$

Проверим знаки второй производной функции и определим промежутки выпуклости (вогнутости) функции (рисунок 1.2).

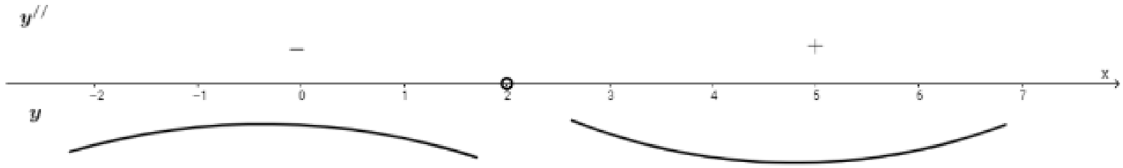

Рисунок 1.2. Промежутки выпуклости (вогнутости) функции (1)

Таким образом, функция (1) выпукла вверх при $x \in (-\infty; 2)$ и выпукла вниз (вогнута) при $x \in (2; +\infty)$. Так как точка $x = 2$ не принадлежит области определения функции, она не является и точкой перегиба функции.

1.5. Проверка на наличие асимптот

Так как функция (1) не является непрерывной в точке $x = 2$, проверим в этой точке наличие вертикальной асимптоты:

Найдём $\lim\limits_{x\to 2-0} \frac{x^2-3}{x-2} = \frac{1}{-0} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0} \frac{x^2-3}{x-2} = \frac{1}{+0} = +\infty$, откуда следует, что прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой.

Проверим наличие горизонтальной асимптоты $y = b$: $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3}{x-2} = \pm\infty \neq const$, откуда следует, что горизонтальной асимптоты нет.

Проверим наличие наклонной асимптоты $y = kx + b$: $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3}{x(x-2)} = 1$, $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - kx = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-3}{(x-2)} - x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-3-x(x-2)}{(x-2)}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x-3}{x-2}\right) = 2.$

Значит, прямая $y = x + 2$ - наклонная асимптота.

1.6. Нахождение пересечений с осями координат

Находим точки пересечения функции с координатными осями (таблица 1.1):

Таблица 1.1

Пересечения функции с координатными осями

x	0	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
y	1.5	0	0

Дополнительные точки: $y(4) = 6,5$; $y(-4) \approx -2,17$.

2. Построение графика

2.1. Построение графика функции по заданию

График функции представлен на рисунке 2.1:

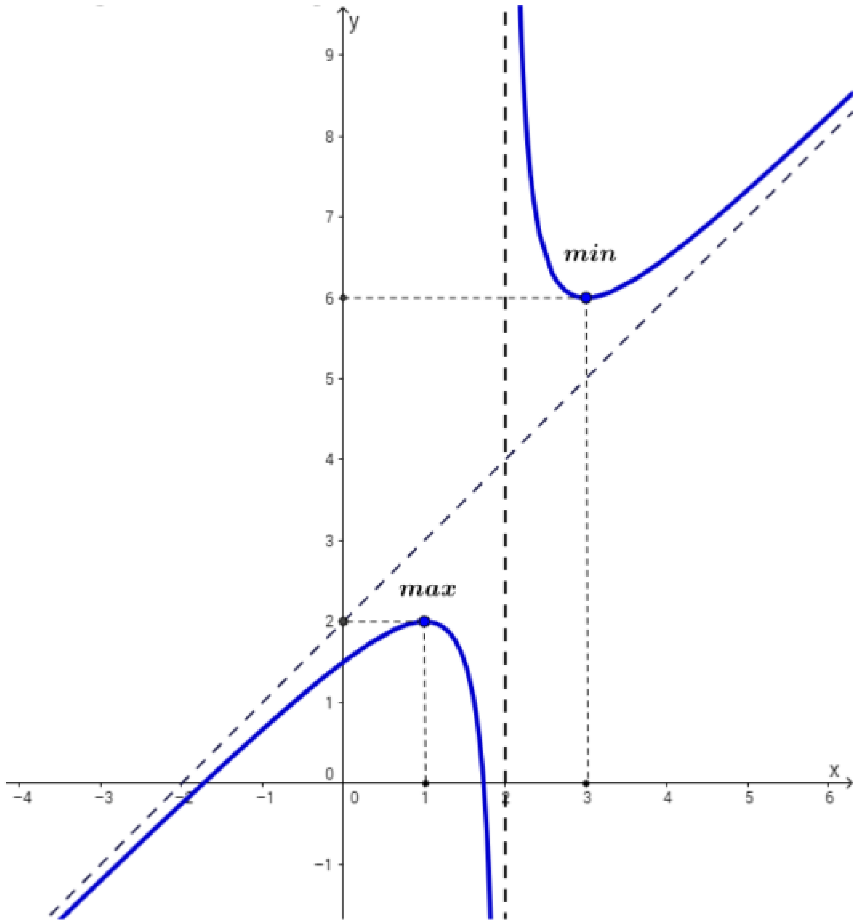

Рисунок 2.1. График функции (1)

2.2. Проверка графика функции

Проверим построенный график при помощи сайта [1]. Введем функцию (1) и получим график, представленный на рисунке 2.2:

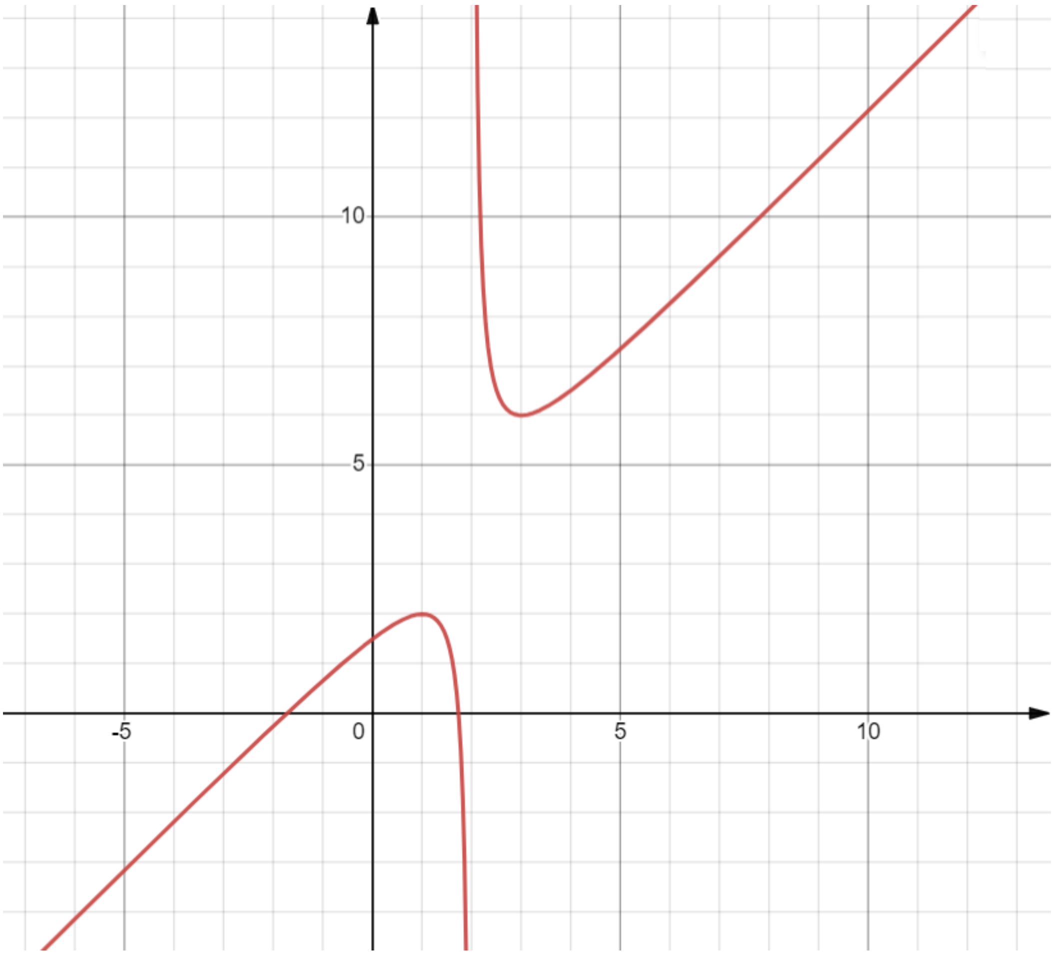

Рисунок 2.2. График функции (1), построенный сайтом

Графики совпадают, следовательно, график функции (1) был построен верно.

Заключение

В данном типовом расчете была исследована функция (1), а также построен ее график.

Список использованных источников

1. Desmos. — URL: https://www.desmos.com/calculator/.
2. *Сильванович О. В.*, *Тимофеева Г. В.* Индивидуальные домашние задания по высшей математике. — СПб: Университет ИТМО, 2018. — 66 с.