Seminar 8
Введение в классическую механику

Victor Ivanov Yu.*

Аннотация

Physics and Mathematics

Содержание

1 Абсолютно твердое тело

Система для полного описания абсолютно твердого тела

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathbf{F}_i \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathbf{M}_i \end{cases} \tag{1}$$

Угловой момент точечной массы, относительно заданного начала координат, определяется как

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{2}$$

Для набора частиц угловой момент есть просто сумма угловых моментов всех частиц.

Крутящий момент определяется как

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{dL}}{\mathbf{d}\boldsymbol{t}} \tag{3}$$

Пусть $\mathbf{L} = L\hat{\mathbf{L}}$. Тогда задачи, связанные с угловым моментом можно разбить на три типа, когда меняется только длина вектора углового момента, его направление, а также, когда меняется и то и другое.

*VI

1.1 Constant $\hat{\mathbf{L}}$

Здесь все просто. Рассмотрим вращающуюся пластинку, центр которой выбран в качестве начала координат. Тогда вектор $\mathbf{L}$ перпендикулярен пластинке, потому что пластинке перпендикулярен каждый терм суммы.

Найдем кинетическую энергию и момент импульса твердого тела на плоскости $x - y$ в общем случае (это удобно сделать, введя координаты центра масс $\mathbf{R}$, тогда штрихованные координаты будут координаты точки относительно центра масс)

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm \\ &= \int (\mathbf{R} + \mathbf{r}') \times (\mathbf{V} + \mathbf{v}') dm \\ &= \int \mathbf{R} \times \mathbf{V} dm + \int \mathbf{r}' \times \mathbf{v}' dm \\ &= M\mathbf{R} \times \mathbf{V} + \int r'^2 \omega' dm \cdot \hat{\mathbf{z}} \\ &\equiv \mathbf{R} \times \mathbf{P} + (I_z^{CM} \omega')\hat{\mathbf{z}}\end{aligned} \tag{4}$$

Theorem. *Угловой момент (относительно начала координат) тела может быть найдет, если вместо тела рассмотреть точку в центре масс и после этого найти угловой момент этой точки относительно начала координат и после прибавить угловой момент относительно центра масс.*

Доказательство. Очевидно ■

Эта теорема работает только в том случае, если мы используем центр масс в качестве воображаемой точечной массы (иначе в выражении для интеграла перекрестные термы не будут равны нулю).

В специальном случае, когда центр масс движется вокруг начала координат по окружности с угловой скоростью Ω, мы получим

$$\mathbf{L} = (MR^2\Omega + I_z^{CM}\omega')\hat{\mathbf{z}} \tag{5}$$

Выражение для кинетической энергии

$$\begin{aligned}T &= \int \frac{1}{2} v^2 dm \\ &= \frac{1}{2} |\mathbf{V} + \mathbf{v}'|^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \int V^2 dm + \frac{1}{2} \int v'^2 dm \\ &= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \int r'^2 \omega'^2 dm \\ &\equiv \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_z^{CM} \omega'^2\end{aligned} \tag{6}$$

Theorem. *Кинетическая энергия тела может быть найдена, рассматривая тело как точечную массу, расположенную в центре масс, а после останется добавить кинетическую энергию тела, обусловленную движением относительно центра масс.*

Доказательство. Очевидно ■

Theorem. *(О параллельной оси)* $I_z = MR^2 + I_z^{CM}$

Доказательство. Очевидно ■

1.2 General $\hat{\mathbf{L}}$

Theorem. *(Chasles' theorem) Рассмотрим твердое тело, совершающее произвольное движение. Выберите любую точку P на теле. Тогда в любой момент времени движение тела можно записать как сумму поступательного движения P плюс вращение вокруг некоторой оси (которая может меняться со временем), проходящей через P.*

Доказательство. Очевидно ■

Theorem. *Если объект вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, скорость точки в положении $\boldsymbol{r}$ есть*

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{7}$$

Доказательство. Очевидно ■

Theorem. *Пусть координатные системы S_1, S_2 и S_3 имеют совмещенное начало. Пусть также, S_1 вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_{1,2}$ по отношению к S_2, и пусть S_3 вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_{2,3}$ по отношению к S_3. Тогда S_1 вращается (мгновенно) с угловой скоростью*

$$\boldsymbol{\omega}_{1,3} = \boldsymbol{\omega}_{1,2} + \boldsymbol{\omega}_{2,3} \tag{8}$$

по отношению к S_3.

Доказательство. Очевидно ■

Важный момент, касающийся вращений, состоит в том, что они определяются относительно определенной системы координат. Бессмысленно спрашивать, насколько быстро объект вращается относительно определенной точки или даже определенной оси.

В базисе главных осей $\mathbf{L}$ и T можно записать следующим образом

$$\mathbf{L} = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3) \tag{9}$$

$$T = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) \tag{10}$$

Напомню, что главные оси существуют всегда для любого объекта и любого начала координат.

2 Упражнения

Задача 2.1. ***(Расчет моментов инерции)****: Кольцо массы M и радиуса R (ось проходит через центр, перпендикулярно плоскости).*

Решение. MR^2 ■

Задача 2.2. ***(Расчет моментов инерции)***: *Диск массы M и радиуса R (ось проходит через центр в плоскости).*

Решение. $\frac{1}{2}MR^2$ ■

Задача 2.3. ***(Расчет моментов инерции)***: *Тонкий однородный стержень массы M и длины L (ось через центр, перпендикулярно стержню, а также рассмотреть ось через один из концов стержня).*

Решение. $\frac{1}{12}ML^2$ и $\frac{1}{3}ML^2$ ■

Задача 2.4. ***(Расчет моментов инерции)***: *Сферическая оболочка массы M и радиуса R (ось через центр сферы).*

Решение. $\frac{2}{3}MR^2$ ■

Задача 2.5. *Нить обвивает однородный цилиндр массы M, лежащий на неподвижной плоскости в виде треугольника. Нить проходит по безмассовому блоку на конце обрыва и соединена с массой m. Предположим, что цилиндр катится по плоскости без проскальзывания, а струна параллельна плоскости. Чему равно ускорение массы m? Какое условие должно выполняться для отношения M/m, чтобы цилиндр ускорялся, двигаясь вниз по плоскости?*

Решение.

$$a_2 = \frac{(M \sin\theta - 2m)}{(3/4)M + 2m} \tag{11}$$

$a_1 = a_2/2$. Ясно, что $a_1 > 0$ если $M/m > 2/\sin\theta$. Если $\theta \to 0$, тогда $M/m \to \infty$. Если $\theta \to \pi/2$, тогда $M/m \to 2$. ■

Задача 2.6. ***(Удар по палке)***: *По палке массой m и длиной l, первоначально находящейся в состоянии покоя, ударяют молотком. Удар наносится перпендикулярно палке с одного конца. Пусть удар произошел быстро, чтобы палка не успела сильно сдвинуться с места во время контакта с молотком. Если центр масс палки в конечном итоге движется со скоростью v, какова скорость концов палки сразу после удара?*

Решение. $4v$ и $-2v$ ■

Задача 2.7. ***(Упругое столкновение)***: *Масса m движется перпендикулярно стержню массы m и длины l, который изначально находится в состоянии покоя. В каком месте масса должна упруго столкнуться с палкой, чтобы после столкновения масса и центр палки двигались с одинаковой скоростью?*

Решение. $h = \frac{l}{\sqrt{6}}$ от середины палки. ■

Задача 2.8. ***(Неупругое столкновение)***: *Масса m движется со скоростью v_0 перпендикулярно стержню массы m и длины l, который изначально находится в состоянии покоя. Масса абсолютно неупруго сталкивается с одним из концов палки и прилипает к ней. Какова результирующая угловая скорость системы?*

Решение. $\omega = \frac{6v_0}{5l}$ ■

Задача 2.9. ***(Куб в начале координат)***: *Вычислите тензор инерции для твердого куба с массой M и стороной L, с координатными осями параллельными ребрам куба и с началом координат в углу куба.*

Решение.

$$\mathbf{I} = ML^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{pmatrix} \tag{12}$$

■

Задача 2.10. ***(Движение после импульсивного удара)***: *Рассмотрим твердый объект: три массы соединены тремя невесомыми стержнями, имеющими форму равнобедренного прямоугольного треугольника (ABC) с длиной гипотенузы $4a$. Масса под прямым углом равна $2m$, а две другие массы – m. Пусть треугольник свободно плавает в пустом пространстве. По массе B наносится быстрый удар, направленным в страницу. Пусть переданный импульс имеет величину $Fdt = P$. Каковы скорости трех масс сразу после удара?*

Решение. $\mathbf{v}_A = (0, 0, 0)$, $\mathbf{v}_B = (0, 0, -P/m)$, $\mathbf{v}_C = (0, 0, 0)$ ■

Задача 2.11. ***(Частота движения из-за крутящего момента)***: *Рассмотрим палку длиной l, массой m и однородной плотностью. Палка прикреплена к потолку верхним концом и вращается вокруг вертикальной оси. Предположим, что заданы условия, при которых палка всегда составляет угол θ с вертикалью. Какова частота ω этого движения?*

Решение. $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l\cos\theta}}$ ■

Задача 2.12. ***(Волчок)***: *Симметричный волчок массы M имеет центр масс на расстоянии l от своей точки соприкосновения с землей. Моменты инерции относительно этой неподвижной точки равны $I_1 = I_2 \equiv I$ и I_3. Волчок вращается вокруг своей оси симметрии с частотой ω_3, а начальные условия заданы так, что центр масс прецессирует вокруг вертикальной оси (по круговой траектории). Ось симметрии составляет с вертикалью постоянный угол θ.*

1. *Предполагая, что угловой момент, обусловленный ω_3, намного больше любого другого углового момента в задаче, найдите приближенное выражение для частоты прецессии Ω*

2. *Теперь точно решите задачу. То есть найдите Ω, рассматривая весь угловой момент*

Решение.

1. $\Omega = \frac{Mgl}{I_3\omega_3}$

2. $\Omega_\pm = \frac{I_3\omega_3}{2I\cos\theta}(1 \pm \sqrt{(1 - \frac{4MIgl\cos\theta}{I_3^2\omega_3^2}}))$

■

3 Homework

Задача 3.1. ***(Расчет моментов инерции)***: *Равнобедренный треугольник массы M, угол при вершине 2β и длина общей стороны L (две стороны при известном угле) (ось, проходящая через вершину при угле β, перпендикулярно плоскости).*

Решение. $\frac{1}{2}ML^2(1 - \frac{2}{3}\sin\beta)$ ■

Задача 3.2. *Рассмотрим леденец, состоящий из твердого шара массы m и радиуса r, проткнутого радиально безмассовой палкой. Свободный конец палки поворачивается на земле. Сфера катится по земле без проскальзывания, ее центр движется по окружности радиуса R с частотой Ω. Какова нормальная сила между землей и сферой?*

Решение. $N = mg + \frac{7}{5}mr\Omega^2$ ■

Задача 3.3. *Начальные условия заданы так, что монета радиуса r катится по кругу. Точка контакта на земле очерчивает круг радиуса R, а монета составляет постоянный угол θ с горизонтом (она наклонена). Монета катится без проскальзывания (предположим, что трение настолько велико, насколько это необходимо). Какова частота кругового движения Ω точки контакта с землей? Покажите, что такое движение существует только в том случае, если $R > (5/6)r\cos\theta$.*

Решение.

$$\Omega^2 = \frac{g}{\frac{3}{2}R\tan\theta - \frac{5}{4}r\sin\theta} \tag{13}$$

Условие:

$$R > \frac{5}{6}r\cos\theta \tag{14}$$

необходимо, что правая часть уравнения выше была положительной. ■

Задача 3.4. *Лестница длины l и равномерной плотности стоит на гладком (нет трения) полу и прислонена к гладкой стене. Первоначально она удерживается неподвижно, а его нижний конец находится на бесконечно малом расстоянии от стены. Затем его отпускают, при этом нижний конец начинает скользить прочь от стены, а верхний скользит вниз по стене. Какова горизонтальная составляющая скорости центра масс, когда лестница теряет контакт со стеной?*

Решение. $v_x = \frac{\sqrt{gl}}{3}$ ■

Задача 3.5. *Прямоугольник высотой $2a$ и шириной $2b$ покоится на неподвижном цилиндре радиуса R (прямоугольник находится на боковой части цилиндра). Момент инерции прямоугольника вокруг его центра равен I. Прямоугольник получает бесконечно малый удар, а затем «скатывается» по цилиндру, без соскальзывания. Найдите уравнение движения для угла наклона прямоугольника. При каких условиях прямоугольник полностью вылетит с цилиндра и при каких условиях он будет совершать колебания назад и вперед? Найдите частоту этих малых колебаний.*

Решение. Уравнение движения

$$(ma^2 + mR^2\theta^2 + I)\ddot{\theta} + mR^2\theta\dot{\theta}^2 = mga\sin\theta - mgR\theta\cos\theta \tag{15}$$

Частота малых колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{mg(R-a)}{ma^2+I}} \tag{16}$$

Условия срыва с цилиндра, очевидно, $a \geq R$ ■

Задача 3.6. *Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 0.5$ рад/с вокруг горизонтальной оси AB. В момент $t = 0$ ось AB начали поворачивать вокруг вертикали с постоянным угловым ускорением $\beta_0 = 0.1$ рад/с^2. Найти модули угловой скорости и углового ускорения тела через $t = 3.5$ с.*

Решение.

$$\omega = \omega_0\sqrt{1 + (\beta_0 t/\omega_0)^2} = 0.6 \text{ рад/с} \tag{17}$$

$$\beta = \beta_0\sqrt{1 + \omega_0^2 t^2} = 0.2 \text{ рад/с}^2 \tag{18}$$

■

Задача 3.7. *Вычислить момент инерции I_x кругового конуса, радиус основания которого R, высота L, масса M, относительно оси симметрии OX. Вычислить также момент инерции конуса I_z относительно оси OZ, перпендикулярной OX. Точка O – вершина конуса. Где находится центр масс C этого конуса?*

Решение. $I_x = \frac{3}{10}MR^2$, $I_z = \frac{3}{20}MR^2 + \frac{3}{5}ML^2$, $OC = \frac{3}{4}L$ ■

Задача 3.8. *Однородный цилиндр массой M и радиусом R вращается без трения вокруг горизонтальной оси под действием веса груза P, прикрепленного к легкой нити, намотанной на цилиндр (То есть, к потолку прикреплен цилиндр, который вращается, и через него перекинута нить, к концу которой прикреплен груз P). Найти угол ϕ поворота цилиндра в зависимости от времени, если при $t = 0$ $\phi = 0$*

Решение.

$$\phi = \frac{gt^2}{2R(1 + \frac{Mg}{2P})} \tag{19}$$

■

Задача 3.9. *Баскетбольный мяч, закрученный с угловой скоростью ω_0, брошен на пол под углом $\alpha = 11,4^o$ к вертикали со скоростью $v_0 = 2$ м/с. Ось вращения перпендикулярна плоскости падения. Определить величину угловой скорости ω_0, при которой мяч отскочит от пола вертикально. Коэффициент трения мяча о пол $k = 0.2$. Радиус мяча $R = 0.15$ м. Считать, что вся масса мяча сосредоточена в тонком поверхностном слое, изменением формы мяча и действием силы тяжести при ударе пренебречь.*

Решение.

$$\omega_0 = \frac{3}{2}\frac{v_0 \sin\alpha}{R} = 3.95\ c^{-1} \tag{20}$$

■

Задача 3.10. *Самолет при скорости $u = 300$ км/ч делает поворот радиусом $R =$ 100 м. Пропеллер с моментом инерции $I = 7$ кг $\cdot$ м^2 делает 1000 об/мин. Чему равен момент M гироскопических сил, действующих на вал со стороны пропеллера?*

Решение.

$$M = \frac{2\pi INu}{R} = 612\ H \cdot m^2 \tag{21}$$

■

«Computers are like humans – they do everything except think» – **John von Neumann**