Задача 1.

♦ Будет ли линейным оператором, действующим в $\mathbb{V}$, каждое из следующих отображений $A : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$?

а) $\mathbb{V} = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, то есть линейное пространство, в котором действует отображение, совпадает с линейным пространством всех матриц второго порядка с вещественными элементами. Для любой матрицы $\mathsf{M} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$

1. $A(\mathsf{M}) = \det(\mathsf{M}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $\det(\mathsf{M}) = m_{1,1}m_{2,2} - m_{1,2}m_{2,1}$ — определитель матрицы M;
2. $A(\mathsf{M}) = \mathrm{tr}(\mathsf{M}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, где $\mathrm{tr}(\mathsf{M}) = m_{1,1} + m_{2,2}$ — след матрицы M (сумма всех элементов, стоящих на главной диагонали матрицы M);
3. $A(\mathsf{M}) = \mathrm{rang}(\mathsf{M}) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, где $\mathrm{rang}(\mathsf{M})$ — ранг матрицы M;
4. $A(\mathsf{M}) = m_{1,1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, где $m_{1,1}$ — элемент матрицы M, стоящий в первой строке и первом столбце;
5. $A(\mathsf{M}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathsf{M} + \mathsf{M} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$;
6. $A(\mathsf{M}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathsf{M} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \mathsf{M}$;
7. $A(\mathsf{M}) = \det(\mathsf{M}) \cdot \mathsf{M}$, где $\det(\mathsf{M}) = m_{1,1}m_{2,2} - m_{1,2}m_{2,1}$ — определитель матрицы M;
8. $A(\mathsf{M}) = \begin{pmatrix} m_{2,2} & m_{2,1} \\ m_{1,2} & m_{1,1} \end{pmatrix}$;
9. $A(\mathsf{M}) = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & 1 \end{pmatrix}$;
10. $A(\mathsf{M}) = \begin{pmatrix} m_{1,1} + m_{2,2} & m_{1,2} + m_{2,1} \\ m_{2,1} - m_{1,2} & m_{2,1} \end{pmatrix}$;
11. $A(\mathsf{M}) = (m_{1,2} + m_{2,2} - m_{2,1}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;
12. $A(\mathsf{M}) = \begin{pmatrix} m_{1,1}m_{2,2} & m_{1,2}m_{2,1} \\ m_{2,1}m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}$;
13. $A(\mathsf{M}) = |m_{1,1}| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Б) $\mathbb{V} = V_3(O)$, то есть линейное пространство, в котором действует отображение, совпадает с линейным пространством всех векторов в пространстве, начало которых находится в начале координат, и стандартными операциями сложения векторов и умножения на число. Для любого вектора $\mathbf{x} \in V_3(O)$ и некоторых фиксированных векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_3(O)$

1). $A(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ (здесь $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ означает векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{x}$) ;

2). $A(\mathbf{x}) = (\mathbf{abx})\mathbf{x}$ (здесь $\mathbf{abx}$ означает смешанное произведение трех векторов, затем это число умножается на вектор $\mathbf{x}$);

3). $A(\mathbf{x}) = (\mathbf{abx})(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ (здесь $\mathbf{abx}$ означает смешанное произведение трех векторов, затем это число умножается на вектор, равный векторному произведению векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$);

4). $A(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} + \mathbf{x}) \times \mathbf{b}$ (здесь сумма векторов $\mathbf{a}, \mathbf{x}$ векторно умножается на вектор $\mathbf{b}$);

5). $A(\mathbf{x}) = (\mathbf{ax})\mathbf{x}$(здесь $\mathbf{ax}$ означает скалярное произведение двух векторов, затем это число умножается на вектор $\mathbf{x}$);

6). $A(\mathbf{x}) = (\mathbf{axx})\mathbf{x} + \mathbf{x} \times \mathbf{b}$ (здесь $\mathbf{axx}$ означает смешанное произведение трех векторов, затем это число умножается на вектор $\mathbf{x}$ и прибавляется к векторному произведению векторов $\mathbf{b}, \mathbf{x}$) ;

7). $A(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|\mathbf{x}$ (здесь $|\mathbf{x}|$ означает длину вектора, затем это число умножается на вектор $\mathbf{x}$) ;

8). $A(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{x}$ (здесь $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{x}$ означает двойное векторное произведение трех векторов) ;

9). $A(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} + \mathbf{b} \times \mathbf{x}$ (здесь $\mathbf{b} \times \mathbf{x}$ означает векторное произведению векторов) ;

10). $A(\mathbf{x}) = (\mathbf{ax})\mathbf{b}$(здесь $\mathbf{ax}$ означает скалярное произведение двух векторов, затем это число умножается на вектор $\mathbf{b}$);

11). Ортогональное проектирование пространства на прямую $x = y = z$ (плоскость $x + y + z = 0$);

12). Ортогональное проектирование пространства на ось Ox (Oy, Oz);

13). Зеркальное отражение относительно плоскости Oxy (Oxz, Oyz); относительно оси Ox (Oy, Oz); относительно начала координат.

в) $\mathbb{V} = \mathbb{R}[x]_n$. Для любого многочлена $f(x) = f_0x^n + \cdots + f_n \in \mathbb{R}[x]_n$

1. $A(f) = f' + 3f''$;
2. $A(f) = (x+1)f'')$;
3. $A(f) = f(1)(x^{n-1} + 1)$;
4. $A(f) = f - f_0(x^n + 1)$;
5. $A(f) = f(0)f'$;
6. $A(f) = (f(1) + f(2))f'$.

$\mathbb{V} = \mathbb{R}[x]$. Для любого многочлена $f(x) = f_0x^n + \cdots + f_n \in \mathbb{R}[x]$

7. $A(f) = 3f'' + f' - f$;
8. $(Af)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$;
9. $(Af)(x) = xf(x)$;
10. $A(f) = f'' - f' + 5$;
11. $(Af)(x) = f(x+1)$;
12. $(Af)(x) = (f(x), x^7)$.

В задании 12 (f, g) есть наибольший общий делитель многочленов f и g.

13. $(Af)(x) = x^2 f(x)$

Задача 2

1. Пусть A и B — операторы поворота плоскости на углы $\pi/6$ и $\pi/4$ соответственно. Найти а) $-A$; б) $A + B$; в) AB; г) $A - B$; д) $2A$; е) A^2.

2. Пусть P — оператор проектирования плоскости (проектирования любого вектора плоскости)на ось Ox параллельно оси Oy, Q — оператор проектирования плоскости на ось Oy параллельно оси Ox. Найти а) $I - P$; б) $I - Q$; в) $2P + Q$; г) $-P - Q$; д) $f(P)$, где $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 1$; е) $f(Q)$, где $f(x) = 2x^6 - x^3 - x^2$.

3. Найти а) $A + B$; б) $-2A$; в) AB; г) BA; д) B^2; е) A^3 для дифференциальных операторов A и B, действующих в пространстве $\mathbb{C}[x]_3$ всех многочленов степени не больше 3 по формулам: i) $Af = f'' + f'$, $Bf = 2f''' - f' + f$; ii) $Af = f'' + 2f$, $(Bf)(x) = f'''(x) + x^2 f''(x) - f(x)$.

4. Для операторов, действующих в $\mathbb{R}^3$, найти а) $A + B$; б) $3A$; в) AB; г) BA; д) A^2; е) B^3, если i) $A\mathbf{x} = (x_1 + x_3; x_1 - x_2 + 2x_3; x_1 - x_2)$, $B\mathbf{x} = (x_1 + x_2 - x_3; x_1 + 2x_2 + 2x_3; x_1 + x_2)$, $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3)$.

5. Для операторов, действующих в $\mathbb{R}^2$, найти а) $A - B$; б) $2A + 3B$; в) AB; г) BA; д) A^2; е) B^3, если $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, $B\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, $\mathbf{x} = (x_1; x_2)$.

6. Пусть P — оператор проектирования плоскости (проектирования любого вектора плоскости)на прямую с уравнением $x - 2y = 0$ параллельно прямой с уравнением $2x - y = 0$, Q — оператор проектирования плоскости на прямую с уравнением $2x - y = 0$ параллельно прямой с уравнением $x - 2y = 0$. Найти операторы: а) $P + Q$; б) PQ; в) $Q + 2P$; г) $P^4Q^3 + Q^5P^6$; д) $-P^2 - Q^5$; е) $I - P$.

7. Пусть P_x — оператор ортогонального проектирования пространства (проектирования любого вектора пространства)на ось Ox, P_y — на ось Oy, P_z — на ось Oz. Пусть P_{xy} — оператор ортогонального проектирования пространства (проектирования любого вектора пространства)на плоскость Oxy, P_{xz} — на плоскость Oxz, P_{yz} — на плоскость Oyz. Найти операторы: а) $P_x + P_y$; б) P_zP_{yz}; в) $P_x + P_y + P_z$; г) $I - P_x$; д) $P_y + P_{xz}$; е) $P_{xy} + P_{xz}$; ж) $P_{xy} + P_{xz} + P_{yz}$; и) $P_{xy}P_{yz}$.

8-10 Пусть $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$, $A\bar{x} = (x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3)^T$, $B\bar{x} = (x_2, 2x_3, x_1)^T$. Найти

8. а) AB, б) $A^2 + B$, в) $A^2 - B^2$, г) BA^2, д) $(A-B)^2$, е) $B - A + B^2$

9. а) A^2, б) $A^2 - B$ в) B^4 г) $A^2 + B^2$ д) BA е) $B(2A - B)$

10. а) B^2 б) $2A + 3B^2$ в) $B^2 + A$ г) $B - 2A^2$ д) B^3 е) $A(B - A)$

11. см 6.

12. см. 7.

13. см. 5.

Задача 3.

Показать, что каждое из следующих отображений, действующих в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$, является линейным оператором, найти его матрицу в базисе $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ и его определитель. Отображение задано по формуле: для любого вектора $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$

1). $A\mathbf{x} = (-3x_1 + 3x_2 - 2x_3; x_1 + 2x_2 - x_3; -x_1 - 3x_2 + 2x_3)$;

2). $A\mathbf{x} = (-2x_2 - x_3; 3x_1 + 2x_2 + 3x_3; x_1 + 2x_2 + 2x_3)$;

. Показать, что каждое из следующих отображений, действующих в линейном пространстве $\mathbb{R}[x]_2$, является линейным оператором, найти его матрицу в базисе $\mathbf{e}_0 = 1$, $\mathbf{e}_1 = x$, $\mathbf{e}_2 = x^2$ и его определитель. Отображение задано по формуле: для любого многочлена $f \in \mathbb{R}[x]_2$

3). $Af = -3f'' + 3f'$; 4). $(Af)(x) = f(-2) + f(2)x + f(3)x^2$;

5. $(Af)(x) = f(x+2) + f(0)x + f'(x)$;

6). $(Af)(x) = f(x) + f(2)x + f'(x)$; 7. $Af = 2f'' + 3f$.

8). $(Af)(x) = f(x+2) + f(-3)x + f'(x)$;

. Показать, что каждое из следующих отображений, действующих в линейном пространстве $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$, является линейным оператором, найти его матрицу в базисе $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и его определитель. Отображение задано по формуле: для любой матрицы $\mathsf{X} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$

9). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$; 10 $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + 2\mathsf{X}$;

11. $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; 12. $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 2\mathsf{X}$;

13. $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \mathsf{X}$.

Задача 4.

Линейный оператор A в базисе e имеет матрицу A_e. Найти матрицу A_u линейного оператора A в базисе u.

1 $A_e = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (1; -2; 0)$; $\mathbf{e}_2 = (1; 3; 1)$; $\mathbf{e}_3 = (1; 2; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (2; 1; 1)$; $\mathbf{u}_2 = (3; -3; 1)$; $\mathbf{u}_3 = (1; -3; 0)$;

2 $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (1; -1; 1)$; $\mathbf{e}_2 = (-1; 1; 0)$; $\mathbf{e}_3 = (2; -3; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (2; -3; 0)$; $\mathbf{u}_2 = (-1; 2; 1)$; $\mathbf{u}_3 = (3; -4; 2)$;

3 $A_e = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (-2; 3; 3)$; $\mathbf{e}_2 = (0; 3; 2)$; $\mathbf{e}_3 = (-1; 1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (1; -3; -3)$; $\mathbf{u}_2 = (-2; 1; 2)$; $\mathbf{u}_3 = (1; 1; 0)$;

Линейный оператор A в базисе $\mathbf{f}_1(x) = 1$, $\mathbf{f}_2(x) = x$, $\mathbf{f}_3(x) = x^2$ имеет матрицу A_f. Найти матрицу A_g линейного оператора A в базисе $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. $A_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = 1 + 2x$; $\mathbf{g}_2(x) = -1 + 2x + x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = -1 + x + x^2$;

5. $A_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = -3 + x + 2x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = -2 + x + x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = -2 + x^2$;

6. $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = -1 + 2x - 2x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = -1 + x$; $\mathbf{g}_3(x) = 2 - 2x + x^2$;

7. $A_f = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = 2 - 3x + x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = -1 + 3x - x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = -2x + x^2$;

8. $A_f = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = 1 - 2x - x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = -2 + 3x + x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = 2x + x^2$;

9. $A_f = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = 1 + 3x + 2x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = 3x + 2x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = -1 + x + x^2$;

. Линейный оператор A в базисе e имеет матрицу A_e. Найти матрицу A_u линейного оператора A в базисе u, если известно разложение векторов базиса e в линейные комбинации по базису u.

10. $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$;

11. $A_e = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_3$;

12. $A_e = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$;

13. $A_e = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3$;

Задание 5

Найти ранг, базисы ядра и образа линейного оператора A, действующего в линейном пространстве $\mathbb{R}^4$ по правилу $A\mathbf{x} = \mathsf{M}\mathbf{x}$, где матрица M определена ниже.

1. $\mathsf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $\mathsf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. $\mathsf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\mathsf{M} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найдите ранг, базисы ядра и образа линейного оператора $A : \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ такого, что для любой матрицы $\mathsf{X} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$

5. $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\mathsf{X} + \mathsf{X}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathsf{X} + \mathsf{X}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathsf{X} + \mathsf{X}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\mathsf{X} + \mathsf{X}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найдите ранг, базисы ядра и образа линейного оператора $A : \mathbb{C}[x]_3 \to \mathbb{C}[x]_3$, действующего в линейном пространстве $\mathbb{C}[x]_3$ всех многочленов степени не выше 3 с комплексными коэффициентами по правилу

9. $(Af)(x) = (-3+2x^3)f'''(x) + (3+3x-x^2)f''(x) + (-1-x)f'(x) + f(x)$.
10. $(Af)(x) = (2x+2x^2)f'''(x) - 2(1+x)f''(x)$.
11. $(Af)(x) = (1+x^2)f'''(x) - (2+x-x^2)f''(x) - (1+3x)f'(x) + 3f(x)$.
12. $(Af)(x) = f'''(x) + (-2x+x^2)f''(x) + (2-3x)f'(x) + 3f(x)$.
13. $(Af)(x) = (-2x^2+2x^3)f'''(x) - 2x^2f''(x)$.