Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Отчёт
По расчётно-графической работе
Линейной алгебре
Вариант: 1

Выполнили:
Кремпольская Екатерина Александровна P3121
Касьяненко Вера Михайловна P3120
Принял:
Цветков Константин Борисович

г. Санкт-Петербург

2023 г.

Задача 1

Будет ли линейным оператором, действующим в V, каждое из следующих отображений $A: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$?

а) $\mathbb{V} = M_2(\mathbb{R})$, то есть линейное пространство, в котором действует отображение, совпадает с линейным пространством всех матриц второго порядка с вещественными элементами. Для любой матрицы $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$A(M) = \det(M) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $\det(M) = m_{1,1}m_{2,2} - m_{1,2}m_{2,1}$ – определитель матрицы M.

Решение:

- $A(M) = \det(M) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$
- $A(M_1 + M_2) = \det(M_1 + M_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \det(M_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \det(M_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

  $= A(M_1) + A(M_2)$

Пусть $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} => \det(M_1 + M_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \left\{\det(M_1 + M_2) = det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\right\} = 0 * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$

$\det(M_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \det(M_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Так как $A(M_1 + M_2) \neq A(M_1) + A(M_2)$ (не выполняется аддитивность), A не линейный оператор.

б) $\mathbb{V} = V_3(O)$, то есть линейное пространство, в котором действует отображение, совпадает с линейным пространством всех векторов в пространстве, начало которых находится в начале координат, и стандартными операциями сложения векторов и умножения на число. Для любого вектора x $\in V_3(O)$ и некоторых фиксированных векторов $a, b \in V_3(O)$.

$A(x) = a \times x$ (здесь $a \times x$ означает векторное произведение векторов a и x)

Решение:

Пусть $\bar{a} = \{a_1', a_2', a_3'\}$; $\bar{x} = \{x_1', x_2', x_3'\}$

- $A(x) = [\, a \times x] = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ a_1' & a_2' & a_3' \\ x_1' & x_2' & x_3' \end{vmatrix} =$

  $= \bar{\imath}(a_2'x_3' - a_3'x_2') + \bar{\jmath}(a_3'x_1' - a_1'x_3') + \bar{k}(a_1'x_2' - a_2'x_1') \in V_3(O)$
- $A(x_1 + x_2) = [a \times (x_1 + x_2)] = [a \times x_1] + [a \times x_2] = A(x_1) + A(x_2)$

$[a;\ (x_1 + x_2)] = [a;\ x_1] + [a;\ x_2]$, так как свойство векторного произведения

- $A(\lambda x_1) = [a; \lambda x_1] = \lambda[a, x_1] = \lambda A(x_1)$

$[a; \lambda x_1] = \lambda[a; x_1]$, так как свойство векторного произведения

A – линейный оператор.

в) $\mathbb{V} = \mathbb{R}[x]_n$. Для любого многочлена $f(x) = f_0 x^n + \ldots + f_n \in \mathbb{R}[x]_n$

$A(f) = f' + 3f''$

Решение:

- $A(f) = f' + 3f'' \in \mathbb{R}[x]_n$
- $A(F_1 + F_2) = (F_1 + F_2)' + 3(F_1 + F_2)'' = F_1{}' + F_2{}' + 3F_1{}'' + 3F_2{}'' = F_1{}' + 3F_1{}'' + F_2{}' + 3F_2{}'' = A(F_1) + A(F_2)$
- $A(\lambda F) = (\lambda F)' + 3(\lambda F)'' = \lambda(F' + 3F'') = \lambda A(F)$

A – линейный оператор.

Задача 2

Пусть A и B – операторы поворота плоскости на углы $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{4}$ соответственно. Найти: а) -A; б) A+B; в) AB; г) A-B; д) 2A; е) A^2.

$$\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \varphi \in [0,2\pi]$$

$$A = \begin{pmatrix} cos\frac{\pi}{6} & -sin\frac{\pi}{6} \\ sin\frac{\pi}{6} & cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} cos\frac{\pi}{4} & -sin\frac{\pi}{4} \\ sin\frac{\pi}{4} & cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\text{а)} -A = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$б)\ A\ +B=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} & -\frac{1+\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1+\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

$$в)\ A*B=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{4}\end{pmatrix}$$

$$г)\ A-B=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} & \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

$$д)\ 2A=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$е)\ A^2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Задача 3

Показать, что каждое из следующих отображений, действующих в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$, является линейным оператором, найти его матрицу в базисе $e_1 = (1,0,0);\ e_2 = (0,1,0); e_3 = (0,0,1)$ и его определитель. Отображение задано по формуле: для любого вектора $A(x) \in |\mathbb{R}^3, x = (x_1; x_2; x_3) \in |\mathbb{R}^3$

Решение:

- $A(\bar{x}) = (-3x_1 + 3x_2 - 2x_3;\ x_1 + 2x_2 - x_3;\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3)$
- $A(x + x') = (-3(x_1 + x_1{}') + 3(x_2 + x_2{}') - 2(x_3 + x_3{}'); (x_1 + x_1{}') + 2(x_2 + x_2{}') - (x_3 + x_3{}');\ -(x_1 + x_1{}') - 3(x_2 + x_2{}') + 2(x_3 + x_3{}')) = ((-3x_1 + 3x_2 - 2x_3) + (-3x_1{}' + 3x_2{}' - 2x_3{}'); (x_1 + 2x_2 - 1x_3) + (x_1{}' + 2x_2{}' - x_3{}');\ (-x_1 - 3x_2 + 2x_3) + (-x_1{}' - 3x_2{}' + 2x_3{}')) = (-3x_1 + 3x_2 - 2x_3;\ x_1 + 2x_2 - x_3;\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3) + (-3x_1{}' + 3x_2{}' - 2x_3{}';\ x_1{}' + 2x_2{}' - x_3{}';\ -x_1{}' - 3x_2{}' + 2x_3{}') = A(x) + A(x')$
- $A(\lambda x) = \big(\lambda(-3x_1 + 3x_2 - 2x_3); \lambda(x_1 + 2x_2 - x_3); \lambda(-x_1 - 3x_2 + 2x_3)\big) = \lambda(-3x_1 + 3x_2 - 2x_3;\ x_1 + 2x_2 - x_3;\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3) = \lambda A(x)$

А – линейный оператор.

$$A = \big(A(e_1); A(e_2); A(e_3)\big)$$

$$A(e_1) = (-3, 1, -1)$$

$$A(e_2) = (3, 2, -3)$$

$$A(e_3) = (-2, -1, 2)$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \det(A) = -4$$

Задача 4

Линейный оператор A в базисе e имеет матрицу A_e. Найти матрицу A_u линейного оператора A в базисе u.

Решение:

$$A_e = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad e_1 = (1, -2, 0);\ e_2 = (1,\ 3, 1);\ e_3 = (1, 2, 1)$$

$$u_1 = (2, 1, 1);\ u_2 = (3, -3, 1);\ u_3 = (1, -3, 0)$$

$$A_u = P_{u \to e} A_e P_{e \to u}$$

$$e * P_{e \to u} = u; \quad e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad u = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{e \to u} = e^{-1} * u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{u \to e} = {P_{e \to u}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A_u = P_{u \to e} * A_e * P_{e \to u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 5

Найти ранг, базисы ядра и образа линейного оператора A, действующего в линейном пространстве $\mathbb{R}^4$ по правилу Ax=Mx, где матрица M определена ниже.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \; A(x) \in |R^4; \; A(x) = M(x)$$

Решение:

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 0 & 1 & 1 \\ \mathbf{-2} & 0 & -1 & -1 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{4} & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 0 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ФСР: } \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 1 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\dim(Ker\,A) = 3 \qquad rank = 1$$

$$Ker\,A = \alpha * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta * \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma * \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \; \alpha, \beta, \gamma \in |R$$

$$Im\,A = \alpha * \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}; \; \alpha \in |R$$