Задача №1

Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицей второго и четвёртого порядка соответственно.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Задача №2

Показать, что матрицу линейного оператора в четырёхмерном вещественном пространстве можно привести к диагональному виду путём перехода к новому базису. Найти этот базис и соответствующую ему матрицу.

1. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Задача №3

Найти все собственные значения и корневые подпространства линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей:

1. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

Задача №4

а) Найти жорданову нормальную форму матрицы четвёртого порядка.

б) Найти базис, в котором матрица заданного линейного оператора имеет жорданову форму.

в) Найти матрицу перехода из заданного базиса в жорданов базис.

1. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Задача №5

а) Найти жорданову нормальную форму матрицы шестого порядка.

б) Найти базис, в котором матрица заданного линейного оператора имеет жорданову форму.

в) Найти матрицу перехода из заданного базиса в жорданов базис.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & -3 & 2 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & -3 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & -3 & 2 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & -3 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Задача №6

Найти все инвариантные подпространства размерностей один и два для линейного оператора, действующего в линейном комплексном трёхмерном пространстве и заданного в некотором базисе матрицей третьего порядка:

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Найти все инвариантные подпространства размерностей один и два для линейного оператора, действующего в линейном вещественном трёхмерном пространстве и заданного в некотором базисе матрицей третьего порядка:

4. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$