Кремпольская Екатерина (P3220, Теор.Вероятн. 5.1)

ИДЗ 19.1 (вариант 7)

Дано:

В результате эксперимента получены данные, записанные в виде статистического ряда:

57	46	33	49	29	50	38	41	27	34
37	49	51	26	55	42	59	43	46	30
31	43	58	41	35	47	33	45	49	37
47	34	54	39	60	49	25	50	31	53
38	41	30	51	37	55	47	43	35	42
35	46	27	45	41	34	50	29	51	39
42	59	43	31	38	58	54	37	26	43
29	42	33	41	24	39	53	45	33	51
45	25	54	50	37	30	41	60	42	46
38	53	34	47	35	49	57	39	55	31

Решение:

а) Располагаем значения результатов эксперимента в порядке возрастания, т.е. записываем вариационный ряд:

24	25	25	26	26	27	27	29	29	29
30	30	30	31	31	31	31	33	33	33
33	34	34	34	34	35	35	35	35	37
37	37	37	37	38	38	38	38	39	39
39	39	41	41	41	41	41	41	42	42
42	42	42	43	43	43	43	43	45	45
45	45	46	46	46	46	47	47	47	47
49	49	49	49	49	50	50	50	50	51
51	51	51	53	53	53	54	54	54	55
55	55	57	57	58	58	59	59	60	60

б) Находим размах варьирования: $\omega = x_{max} - x_{min} = 60 - 24 = 36$

Величина отдельного интервала: $h = \frac{\omega}{9} = \frac{36}{9} = 4$

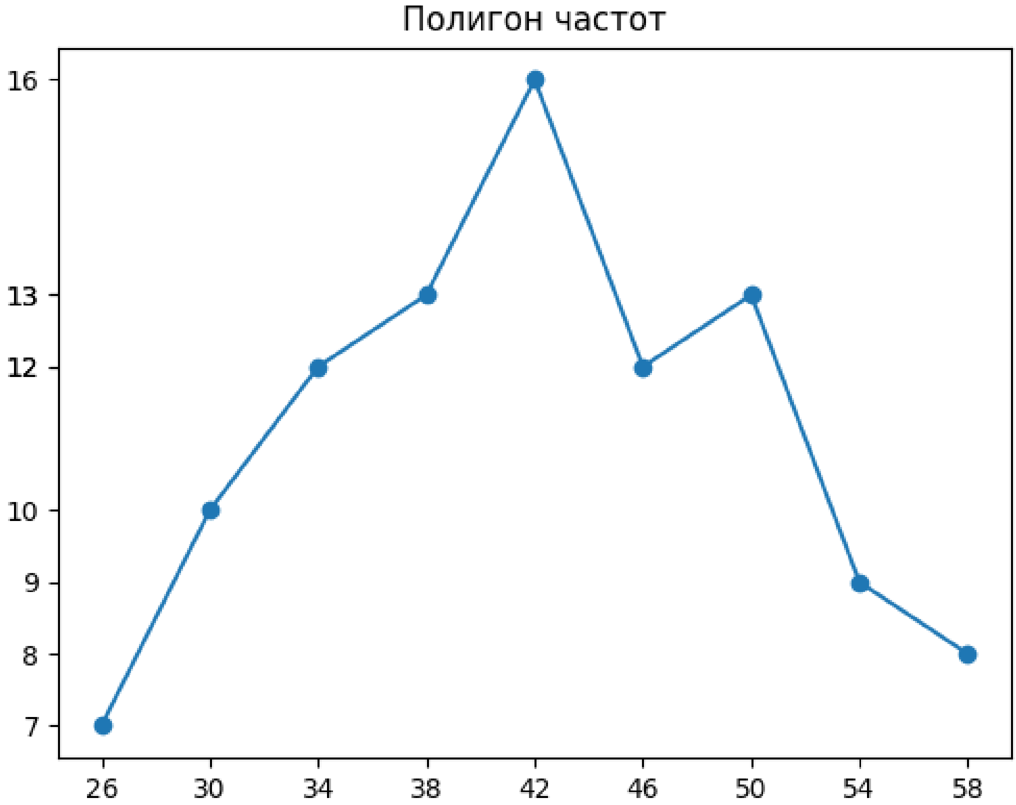
Номер частичного интервала l_i	Границы интервала $x_i - x_i + 1$	Середина интервала $x_i' = \dfrac{x_i + x_i + 1}{2}$	Частота интервала n_i	Относительная частота $W_i = \dfrac{n_i}{n}$	Плотность относительной частоты $\frac{W_i}{h}$
1	24 – 28	26	7	0,07	0,0175
2	28 – 32	30	10	0,10	0,025
3	32 – 36	34	12	0,12	0,03
4	36 – 40	38	13	0,13	0,0325
5	40 – 44	42	16	0,16	0,04
6	44 – 48	46	12	0,12	0,03
7	48 – 52	50	13	0,13	0,0325
8	52 – 56	54	9	0,09	0,0225
9	56 – 60	58	8	0,08	0,02
$\sum_i$	–	–	100	–	–

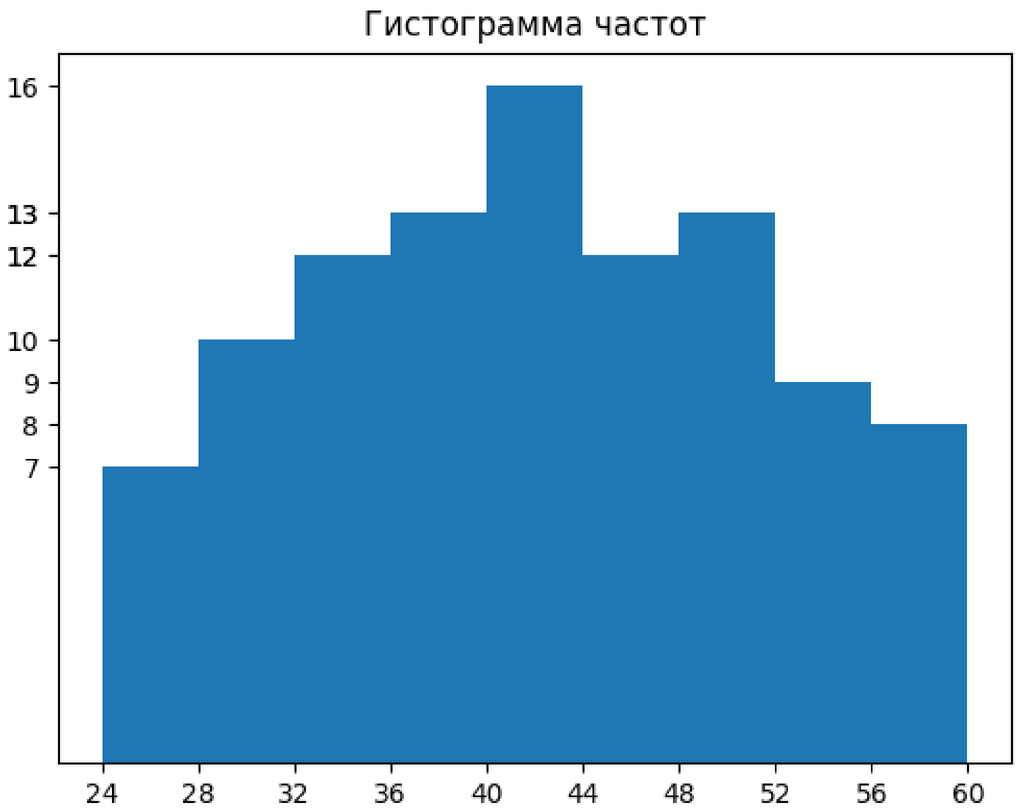
в) Строим полигон частот и гистограмму относительных частот и график эмпирической функции распределения.

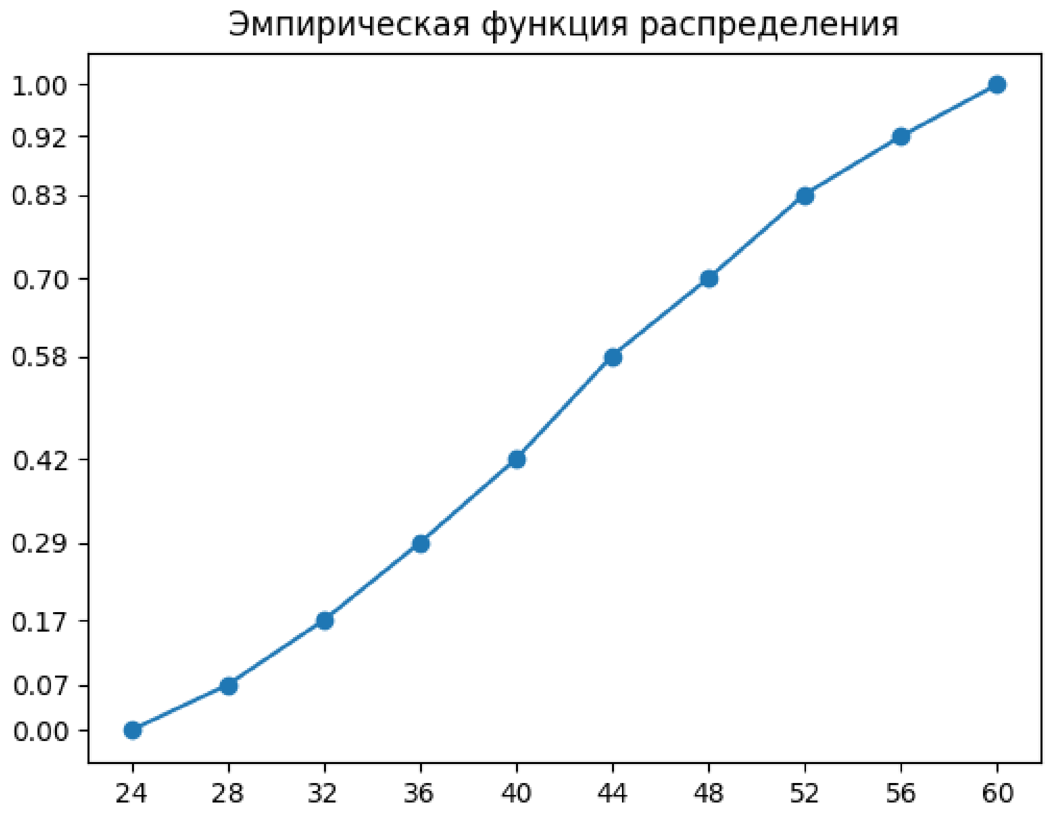
Находим значения эмпирической функции распределения $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$: $F^*(24) = 0$;

$F^*(28) = 0{,}07$; $F^*(32) = 0{,}17$; $F^*(36) = 0{,}29$; $F^*(40) = 0{,}42$; $F^*(44) = 0{,}58$;

$F^*(48) = 0{,}70$; $F^*(52) = 0{,}83$; $F^*(56) = 0{,}92$; $F^*(60) = 1$.


Полигон частот
16
13
12
10
9
8
7
26
30
34
38
42
46
50
54
58


Гистограмма частот
16
13
12
10
9
8
7
24
28
32
36
40
44
48
52
56
60


Эмпирическая функция распределения
1.00
0.92
0.83
0.70
0.58
0.42
0.29
0.17
0.07
0.00
24
28
32
36
40
44
48
52
56
60

г) Находим выборочное среднее и выборочную дисперсию:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{k} x_i' n_i = 42{,}08$$

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i' - \bar{x})^2 n_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i')^2 n_i - \bar{x}^2 = 85{,}7536$$

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}} = 9{,}26032$$

Расчетная таблица:

m_i	Границы интервала $x_i; x_{i+1}$	Середина интервала x_i'	Частота интервала n_i	$n_i x_i'$	$(x_i')^2$	$n_i(x_i')^2$
1	24 – 28	26	7	182	676	4732
2	28 – 32	30	10	300	900	9000
3	32 – 36	34	12	408	1156	13872
4	36 – 40	38	13	494	1444	18772
5	40 – 44	42	16	672	1764	28224
6	44 – 48	46	12	552	2116	25392
7	48 – 52	50	13	650	2500	32500
8	52 – 56	54	9	486	2916	26244
9	56 – 60	58	8	464	3364	26912
$\sum_i$	–	–	100	4208	–	185648

Выборочная дисперсия является смещенно оценкой генеральной дисперсии, а исправленная дисперсия – несмещенной оценкой:

$$\widetilde{D}_{\text{в}} = \frac{n}{(n-1)} D_{\text{в}} = \frac{100}{99} * 85{,}7536 = 86{,}6198$$

$$\tilde{\sigma}_{\text{в}} = \sqrt{\widetilde{D}_{\text{в}}} = 9{,}30698$$

Согласно критерию Пирсона необходимо сравнить эмпирические и теоретические частоты. Эмпирические частоты даны. Найдем теоретические частоты. Для этого пронумеруем X, т. е. перейдем к СВ $z = (x - \bar{x})/\sigma_{\text{в}}$ и вычислим концы интервалов z_i и z_{i+1}, причем наименьшее значение z, т.е. z_1, положим стремящимся к $-\infty$, а наибольшее, т. е. z_{m+1} к $+\infty$. Результаты занесем в таблицу.

i	Границы интервала $x_i; x_{i+1}$		$x_i - \bar{x}$	$x_{i+1} - \bar{x}$	Границы интервала $z_i; z_{i+1}$	
	x_i	x_{i+1}			$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_{\text{в}}}$	$z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}}{\sigma_{\text{в}}}$
1	24	28	–	−12,26	–	−1,3239283
2	28	32	−12,26	−8,26	−1,3239283	−0,8919778
3	32	36	−8,26	−4,26	−0,8919778	−0,4600273
4	36	40	−4,26	−0,26	−0,4600273	−0,0280768
5	40	44	−0,26	3,74	−0,0280768	0,40387373
6	44	48	3,74	7,74	0,40387373	0,83582425
7	48	52	7,74	11,74	0,83582425	1,26777476
8	52	56	11,74	15,74	1,26777476	1,69972528
9	56	60	15,74	–	1,69972528	–

Находим теоретические вероятности P_i и теоретические частоты $n'_i = nP_i = 100P_i$. Составляем расчетную таблицу.

i	Границы интервала $z_i; z_{i+1}$		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$n'_i = 100P_i$
	z_i	z_{i+1}				
1	–	−1,3239283	−0,5000	−0,4066	0,0934	9,34
2	−1,3239283	−0,8919778	−0,4066	−0,3133	0,0933	9,33
3	−0,8919778	−0,4600273	−0,3133	−0,1772	0,1361	13,61
4	−0,4600273	−0,0280768	−0,1772	−0,0120	0,1652	16,52
5	−0,0280768	0,40387373	−0,0120	0,1554	0,1674	16,74
6	0,40387373	0,83582425	0,1554	0,2967	0,1413	14,13
7	0,83582425	1,26777476	0,2967	0,3962	0,0995	9,95
8	1,26777476	1,69972528	0,3962	0,4554	0,0592	5,92
9	1,69972528	–	0,4554	0,5000	0,0446	4,46
$\sum_i$	–	–	–	–	1	100

Вычислим наблюдаемое значение критерия Пирсона. Для этого составим расчетную таблицу. Последние два столбца служат для контроля вычисления по формуле:

$$x^2_{\text{набл}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i^2 - n$$

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$(n_i - n'_i)^2/n'_i$	n_i^2	$n_i^2/\,n'_i$
1	9,34	−2,34	5,4756	0,58625268	49	5,246253	9,34
2	9,33	0,67	0,4489	0,04811361	100	10,71811	9,33
3	13,61	−1,61	2,5921	0,19045555	144	10,58046	13,61
4	16,52	−3,52	12,3904	0,75002421	169	10,23002	16,52
5	16,74	−0,74	0,5476	0,03271207	256	15,29271	16,74
6	14,13	−2,13	4,5369	0,3210828	144	10,19108	14,13
7	9,95	3,05	9,3025	0,93492462	169	16,98492	9,95
8	5,92	3,08	9,4864	1,60243243	81	13,68243	5,92
9	4,46	3,54	12,5316	2,80977578	64	14,34978	4,46
$\sum_i$	100	100	–	–	$x^2_{\text{набл}} = 7{,}27577$	–	107,2758

Контроль: $\frac{\sum n_i^2}{n_i'} - n = \frac{\sum (n_i - n_i')^2}{n} = 107{,}2758 - 100 = 7{,}2758$

По таблице критических точек распределения χ^2, уровню значимости $\alpha \; = \; 0{,}0025$ и числу степеней свободы $k \; = \; l - 3 \; = \; 9 - 3 \; = \; 6$ находим: $\chi^2_{\text{кр}} \; = \; 14{,}4$

Так как $\chi^2_{\text{набл}} < \; \chi^2_{\text{кр}}$, то гипотеза H_0 о нормальном распределении генеральной совокупности принимается.

е) Если СВ Х генеральной совокупности распределена нормально, то с надежность γ = 0.95 можно утверждать, что математическое ожидание α СВ Х покрывается доверительным интервалом

$$\left(\bar{x} - \frac{\tilde{\sigma}_{\text{в}}}{\sqrt{n}} t_\gamma ; \bar{x} + \frac{\tilde{\sigma}_{\text{в}}}{\sqrt{n}} t_\gamma \right), \text{где } \delta = \frac{\tilde{\sigma}_{\text{в}}}{\sqrt{n}} t_\gamma - \text{точность оценки.}$$

В нашем случае $\bar{x} = 42{,}08, \tilde{\sigma}_{\text{в}} = 9{,}30698, n \; = \; 100. \, t_\gamma = 1{,}984, \delta = \; 0{,}549$. Доверительным интервалом для α будет $(40{,}232; \; 43{,}926)$. Доверительный интервал, покрывающий среднее квадратичное отклонение σ с заданной надежностью γ, $(\tilde{\sigma}_{\text{в}}(1 - q); \; \tilde{\sigma}_{\text{в}}(1 + q))$. При $\gamma \; = \; 0{,}95$ и $n \; = \; 100$ имеем: $q \; = \; 0{,}143$. Доверительным интервалом для σ будет $(7{,}976; \; 10{,}638)$