# Seminar 6
# Введение в классическую механику

Victor Ivanov Yu.*

**Аннотация**

Physics and Mathematics

## Содержание



## 1 Неинерциальные системы отсчета

Пусть $O_I$ и $O$ – начала двух систем координат. Пусть вектор от $O_I$ до $O$ есть $\mathbf{R}$, пусть вектор от $O_I$ до частицы есть $\mathbf{r}_I$, и пусть вектор от $O$ до частицы есть $\mathbf{r}$. Тогда

$$\mathbf{r}_I = \mathbf{R} + \mathbf{r} \tag{1}$$

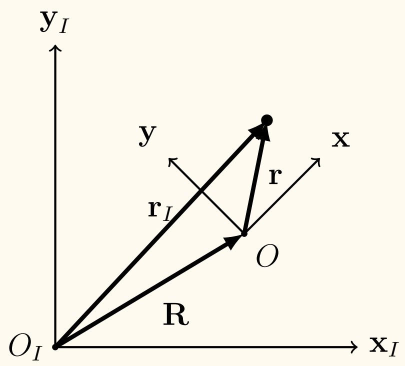
Эти векторы существуют независимо от какой-либо конкретной системы координат, но давайте запишем их в терминах некоторых определенных координат. Мы можем написать

$$\mathbf{R} = X\hat{\mathbf{x}}_I + Y\hat{\mathbf{y}}_I + Z\hat{\mathbf{z}}_I$$

$$\mathbf{r}_I = x_I\hat{\mathbf{x}}_I + y_I\hat{\mathbf{y}}_I + z_I\hat{\mathbf{z}}_I \tag{2}$$

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$$

*VI




Наша цель – взять вторую производную по времени от уравнения (1) и затем интерпретировать результат в форме $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Единственное нетривиальное место это вторая производная от $\mathbf{r}$.

Возьмем вторую производную от произвольного вектора $\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$ в движущейся системе координат, а после заменим $\mathbf{A}$ на $\mathbf{r}$.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = (\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{z}}) + (A_x\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} + A_y\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{y}}}{\mathrm{d}t} + A_z\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{z}}}{\mathrm{d}t}). \tag{3}$$

Таким образом, полное изменение вектора $\mathbf{A}$ проявляется в виде двух групп слагаемых. Первая группа представляет скорость изменения $\mathbf{A}$, измеренную относительно движущейся системы отсчета. Обозначим это изменение как $\frac{\delta\mathbf{A}}{\delta t}$.

Вторая группа возникает из-за перемещения осей координат. Каким образом они движутся? Мы уже выделили движение начала ускоряющейся системы введением вектора $\mathbf{R}$, поэтому осталось только вращение вокруг некоторой оси $\boldsymbol{\omega}$ через это начало ($Theorem$). Ось $\boldsymbol{\omega}$ может меняться со временем, но во всякий момент систему описывает единственная ось вращения. Тот факт, что ось может измениться, будет иметь значение при нахождении второй производной от $\mathbf{r}$, но не при нахождении первой производной.

Очевидно, что всякий вектор фиксированной длины и вращающийся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} \equiv \omega\hat{\boldsymbol{\omega}}$ изменяется со скоростью ($Theorem$)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \tag{4}$$

В частности,

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{x}} \tag{5}$$

и т.д. Таким образом во второй группе преобразований $A_x(\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t}) = A_x(\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{x}}) = \boldsymbol{\omega} \times (A_x\hat{\mathbf{x}})$. Объединяя полученные выражения:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta\mathbf{A}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}. \tag{6}$$

Беря вторую производную, имеем

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{A}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{A} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} \tag{7}$$

Вспоминая, что такое $\frac{\delta\mathbf{A}}{\delta t}$ и используя (6)

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{A}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\delta^2\mathbf{A}}{\delta t^2} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{\delta\mathbf{A}}{\delta t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{A} \tag{8}$$

Теперь перейдем от общей задачи к частной, и подставим $\mathbf{A} = \mathbf{r}$, что дает

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}, \tag{9}$$

где $\mathbf{r}, \mathbf{v} \equiv \delta\mathbf{r}/\delta t$, и $\mathbf{a} \equiv \delta^2\mathbf{r}/\delta t^2$ есть положение, скорость и ускорение частицы, измеренные относительно ускоренной системы отсчета.

## 2 Псевдосилы

Из (1)

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_I}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{R}}{\mathrm{d}t^2} \tag{10}$$

Можно приравнять это выражение с (9), а после умножить на массу частицы $m$, и заметить, что $m(d^2\mathbf{r}_I)/dt^2$ это сила $\mathbf{F}$ действующая на частицу ($\mathbf{F}$ может быть гравитацией, нормальной силой, трением, силой натяжения нити и т.д.), можно получить для $m\mathbf{a}$

$$\begin{aligned} m\mathbf{a} &= \mathbf{F} - m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{R}}{\mathrm{d}t^2} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r} \\ &\equiv \mathbf{F} + \mathbf{F}_{translation} + \mathbf{F}_{centrifugal} + \mathbf{F}_{Coriolis} + \mathbf{F}_{azimuthal} \end{aligned} \tag{11}$$

где псевдосилы определены следующими выражениями

$$\mathbf{F}_{trans} \equiv -m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{R}}{\mathrm{d}t^2} \tag{12}$$

$$\mathbf{F}_{cent} \equiv -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{13}$$

$$\mathbf{F}_{cor} \equiv -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \tag{14}$$

$$\mathbf{F}_{az} \equiv -m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r} \tag{15}$$

## 3 Упражнения

**Задача 3.1.** *Рассмотрим человека, неподвижно стоящего относительно карусели на расстоянии $r$ от центра. Пусть карусель вращается в плоскости $x-y$ с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{z}}$. Какую центробежную силу ощущает человек?*

*Решение.* Elementary ■

**Задача 3.2.** *Рассмотрим человека, неподвижно стоящего на земле под полярным углом $\theta$. Во вращающейся системе Земли человек помимо силы тяжести, $m\boldsymbol{g}$, ощущает центробежную силу (направленную от оси вращения). Чему равна реальная $\boldsymbol{g}$, измеренная человеком?*

*Решение.* Elementary ■

**Задача 3.3.** *Карусель вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью* $\boldsymbol{\omega}$. *Предположим, кто-то идет по карусели радиально внутрь (представьте себе радиальную линию, нарисованную на карусели; человек идет по этой линии) со скоростью* $v$ *относительно карусели. Чему равна сила Кориолиса и куда она направлена? Что будет, если человек будет двигаться по касательной к карусели, в направлении вращения?*

*Решение.* Elementary ■

**Задача 3.4.** *При каком угле* $\theta$ *(вниз от северного полюса) угол между* $\boldsymbol{g}_{eff}$ *и* $\boldsymbol{g}$ *максимален?*

*Решение.* Elementary ■

**Задача 3.5.** *Шайба скользит со скоростью* $v$ *по льду без трения. Поверхность «ровная» в том смысле, что она ортогональна* $g_{eff}$ *во всех точках. Покажите, что шайба движется по кругу, как видно во вращающейся системе координат Земли. Каков радиус круга? Какова частота движения? Будем считать, что радиус круга мал по сравнению с радиусом Земли.*

*Решение.* Elementary ■

**Задача 3.6.** *Колесо радиуса* $R$ *лежит на плоском столе. Безмассовую струну, одним концом прикрепленную к ободу колеса, большое количество раз обвивают вокруг колеса по часовой стрелке. Когда струна полностью обернута вокруг колеса, к свободному концу прикрепляют точечную массу* $m$ *и приклеивают ее к колесу. Затем колесо заставляют вращаться с постоянной угловой скоростью* $\omega$. *В какой-то момент клей на массе не выдерживает, и масса и струна постепенно разматываются (скорость колеса поддерживается постоянной* $\omega$ *с помощью двигателя). Покажите, что длина размотанной струны увеличивается с постоянной скоростью* $R\omega$ *как в направлении по часовой стрелке, так и против часовой стрелки для* $\omega$.

*Решение.* Elementary ■

**Задача 3.7.** *Шар падает с высоты* $h$ *(малой по сравнению с радиусом Земли) под полярным углом* $\theta$. *Предположим (ошибочно), что Земля представляет собой идеальную сферу. Покажите, что эффект Кориолиса второго порядка приводит к отклонению на юг (в северном полушарии), равному* $(2/3)(\omega^2 h^2/g)\sin\theta\cos\theta$.

*Оказывается, фактическое отклонение на юг больше этого; оно равно* $4(\omega^2 h^2/g)\sin\theta\cos\theta$. *Так что, очевидно, действуют и другие эффекты. Основная задача – показать, как коэффициент* $2/3$ *превращается в коэффициент* $4$. *В дальнейшем мы будем сохранять слагаемые до порядка* $\omega^2$ *(или технически* $\omega^2 R/g$*) и порядка* $h/R$. *Кроме того, будет проще вычислить смещение на юг относительно точки на земле вдоль радиуса до точки сброса; назовем эту точку* $P$. *Но нашей конечной целью будет определение смещения на юг относительно отвеса.*

1. *Докажите, что расстояние между отвесом и точкой* $P$ *равно* $(\omega^2 Rh/g)\sin\theta\cos\theta(1 - h/R)$.

2. *Тот факт, что сила гравитации уменьшается с высотой, означает, что шару требуется больше времени, чем стандартные* $\sqrt{2h/g}$, *чтобы упасть на землю. Докажите, что время равно* $2h/g(1 + 5h/6R)$.

3. *Пусть* $y$ *– высота над землей, а* $z$ *– расстояние на юг от радиальной линии до точки падения. Покажите, что центробежная сила создает ускорение в южном направлении от радиальной линии, равное* $\ddot{z} = \omega^2(R+y)\sin\theta\cos\theta$.

4. *Покажите, что сила гравитации вызывает ускорение на север, обратное к радиальной линии, равное* $\ddot{z} = -g(z/R)$.

5. *Объедините части полученные результаты и покажите, что центробежные и гравитационные силы приводят к отклонению на юг от* $P$*, равному* $(\omega^2 Rh/g)\sin\theta\cos\theta(1+7h/3R)$*. Прибавление вышеупомянутого эффекта Кориолиса и вычитание положения отвеса быстро дает желаемый коэффициент 4.*

*Решение.* Elementary ■

**Задача 3.8.** *Шарик массы* $m$ *вынужден двигаться по обручу без трения радиуса* $r$*, расположенному на расстоянии* $R$ *от объекта массы* $M$*. Предположим, что* $R \gg r$*, и предположим, что* $M$ *много больше массы обруча, которая намного больше* $m$*.*

1. *Если обруч удерживать неподвижным и шар отпустить из точки, самой правой крайней на обруче, какова частота малых колебаний?*

2. *Какова частота малых колебаний, если обруч отпустить и шар стартует из точки, близкой к крайней правой? Предположите, что вы взяли* $M$ *и переместили его вправо, чтобы держать его на расстоянии* $R$ *от обруча.*

*Решение.* Elementary ■

# 4 Homework

**Задача 4.1.** *Рассмотрим особый случай, когда* $\boldsymbol{\omega}$ *системы отсчета изменяется только по направлению (а не по амплитуде). В частности, рассмотрим конус катящейся по столу, что является естественным примером такой ситуации. Пусть начало отсчета связанное с конусом будет вершиной конуса. Эта точка остается неподвижной в инерциальной системе отсчета. Мгновенная* $\boldsymbol{\omega}$ *для катящегося конуса направлена вдоль линии его контакта со столом, поскольку эти точки покоятся в эти моменты. Эта линия прецессирует вокруг начала отсчета. Пусть частота прецессии равна* $\Omega$*.*

*Чтобы выделить азимутальную силу, нарисуйте на поверхности конуса точку (назовем ее точкой* $P$*) и рассмотрите момент, когда точка лежит на мгновенном оси* $\boldsymbol{\omega}$*. Найдите ускорение точки* $P$*. Вычислите азимутальную силу, действующую на массу* $m$*, расположенную в точке* $P$*, и покажите, что результат соответствует ускорению, которое вы определили.*

*Решение.* Elementary ■