Глава 1

№1

1) $\exists\ \omega \in A \setminus B$, тогда $\omega \in A$, $\omega \notin B$, $\omega \in \overline{B}$.

Это означает, что $\omega \in A\overline{B}$. В обратную сторону, $\omega \in A\overline{B} \Rightarrow \omega \in A, \omega \in \overline{B}, \omega \notin B \Rightarrow \omega \in A \setminus B$

2) a. $\exists\ \omega \in A \setminus B \Rightarrow \omega \in A, \omega \notin AB$, т.к. $\omega \notin B \Rightarrow \omega \in A \setminus AB$

b. $\exists\ \omega \in A, \omega \notin AB$. Из второго $\omega \notin A$ или $\omega \notin B$, но поскольку $\omega \in A$, то $\omega \notin B$. Тогда получаем $\omega \in A \setminus B$, а это то же самое, что и $\omega \in (A+B) \setminus B$, т.к. $(A+B)\setminus B = (A \setminus B) + (B \setminus B) = A \setminus B + \varnothing = A \setminus B$

c. $\exists\ \omega \in (A+B) \setminus B$, по проделанному выше получаем $\omega \in A \setminus B$

3) a. $\exists\ \omega \in \overline{A+B} \Rightarrow \omega \notin A, \omega \notin B \Leftrightarrow \omega \in \overline{A}$, $\omega \in \overline{B} \Rightarrow \omega \in \overline{A}\,\overline{B}$. Обратное доказывается аналогично

b. $\exists\ \omega \in \overline{AB} \Leftrightarrow \omega \notin AB$. Тогда $\omega \notin A$ или $\omega \notin B$ или в обоих сразу. НУО считаем, что $\omega \notin A \Rightarrow \omega \in \overline{A}$, а значит, что $\omega \in \overline{A} + \overline{B}$. Для остальных случаев доказывается аналогично.

В обратную сторону, пусть $\omega \in \overline{A} + \overline{B}$. НУО считаем, что $\omega \in \overline{A} \Rightarrow \omega \notin A$, а тогда $\omega \notin AB \Leftrightarrow \omega \in \overline{AB}$

4) a. $\exists\, \omega \in A, \omega \in (B \setminus C) \Leftrightarrow \omega \in A, \omega \in (B \setminus C)$.

Из второго $\omega \in B, \omega \in \overline{C}$. Тогда $\omega \in AB$ и $\omega \in A\overline{C} \Rightarrow \omega \notin AC$.

Получаем $\omega \in AB(\overline{AC})$, а это по 1 пункту $\omega \in AB \setminus AC$

b. Обратно по 1 пункту $\omega \in AB(\overline{AC}) \Rightarrow \omega \in AB$, $\omega \notin AC$. Поскольку $\omega \in AB \Rightarrow \omega \in A, \omega \in B$ и $\omega \notin AC \Rightarrow$ $\Rightarrow \omega \notin C \Rightarrow \omega \in A, \omega = B\overline{C} \Rightarrow \omega \in A(B \setminus C)$

№2

1) $A \setminus (B \setminus C) = A(\overline{B\overline{C}}) = A(\overline{B} + C) = A \setminus B + AC$. Неверно.

2) Верно, доказано в пункте 1.

3) $(A+B) \setminus C \Leftrightarrow \omega \in (A+B), \omega \in \overline{C} \Leftrightarrow \omega \in A\overline{C}$ или $\omega \in B\overline{C}$, а это то же самое, что и $\omega \in (A \setminus C) + (B \setminus C)$. Верно

4) Неверно, доказано в пункте 3.

5) Множество, получающееся справа как минимум не меньше, чем $A \Rightarrow$ оно является подмнот. $A+B$. Верно.

6) $(A \setminus B)(C \setminus D) = A\overline{B}C\overline{D} = (AC)(\overline{B}\,\overline{D}) = (AC)(\overline{B+D}) = (AC) \setminus (B+D)$. Неверно.

№3

1) $A + AB = A$

2) $(A+B)(A+\overline{B}) = A(B+\overline{B}) = A$

3) $(A \setminus C)(B \setminus \overline{C}) = (A\overline{C})(BC) = A\overline{C}\,BC = \emptyset$

4) $(A+B)(\overline{A}+B)(A+\overline{B}) = (A+\overline{A})B(A+\overline{B}) = B(A+\overline{B}) = BA + B\overline{B} = BA$

№4

a. При $n \to \infty$ x для A_n стремится к a, т.к. он ограничен сверху выражением, кот. стремится к a ($\lim\limits_{n\to\infty} a + \frac{1}{n} = a$).

Поэтому $A = a$, если мы рассматр. всюду плотное мн-во.

b. При $n \to \infty$ для B_n $x : a \leq x \leq b$, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} b - \frac{1}{n} = b$.

Поэтому $B = \{x : a \leq x \leq b\}$

№5

1) $A = \{$ГРР, ГРГ, ГГР, ГГГ$\}$

2) $A = \{$РГГ, ГРГ, ГГР$\}$

3) $A = \{$РРР, РРГ, РГР, ГРР$\}$

№6

1) $A\overline{B}\overline{C}$

2) $AB\overline{C}$

3) ABC

4) $\Omega - \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = A + B + C$

5) $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$

6) $\overline{ABC}$

7) $\Omega - ABC = \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

№7

$\varnothing$ и Ω входят, т.к. если $\Omega \in U$, то $\varnothing = \Omega / \Omega \in U$, также если $\{ГГГ, ГРГ, ГГР, ГРР\} \in U$, то и $\Omega / \{ГГГ, ГРГ, ГГР, ГРР\} = \{РГГ, РРГ, РГР, РРР\} \in U$

Верно.

Глава 2

№1

1) $A = \frac{1}{6}$

2) $\overline{A} = \frac{5}{6}$

3) $B = \frac{11}{36}$

4) $A\overline{B} = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$

№2

$\frac{(n-1)!\,2}{n!} = \frac{2}{n}$

№3

$P(\Omega) = 1$, при расставлении чисел от 1 до n возможны следующ. конфигурации: 123, 132, 312, 321, 213, 231, где между цифрами или до, или после может что-то стоять, а может и не стоять. Так как каждое из событий равновероятно, то вероятность равна $\frac{1}{6}$

№6

1) $1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 0{,}51774691$

2) $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}49140387б \Rightarrow$ 1) больше 2)

№7

a. Нет парных: $\frac{4^n \cdot C_n^{2n}}{C_{2n}^{2n}}$

b. Одна пара $\frac{n 2^{2n-2} C_{n-1}^{2n-2}}{C_{2n}^{2n}}$

№8

a. Ровно одно бракованное

C_{10}^{1} – брак, C_{90}^{9} – исправное изделие, т.е.

$\frac{10 \cdot C_{90}^{9}}{C_{100}^{10}} \approx 0{,}40799532$

b. Нет брака. $\frac{C_{90}^{10}}{C_{100}^{10}} \approx 0{,}33047621\!1$

№11

$S_{кр} = \pi h^2$, $S_{кв} = 4h^2 \Rightarrow$ Отнош. площадей: $\frac{\pi h^2}{4h^2} = \frac{\pi}{4}$

№13

a. $1 - \frac{n!}{n^n}$

b. $\frac{n!\,n(n-1)}{2n^n}$, где $\frac{n!\,n(n-1)}{2}$ – кол-во вариантов

№14

C_{49}^{6} – общее кол-во возможных исходов

Случаи, кот. нам удовлетворяют: из первых 5 чисел в лото было угадано ровно 3, т.к. они совпад. на обеих карточках, из первых 5 чисел в лото было угадано ровно 2, а также на каждой карточке было угадано последнее число $\Rightarrow \frac{C_5^3 C_{42}^3 + C_5^2 C_{42}^2}{C_{49}^6} \approx 0{,}00882520$1

№15

F – линейная $\Rightarrow F' = const$, т.к. $[a,b]=[0,1]$, то $F'=1$ на $[a,b]$

Глава №3

№1 $\exists$ $P(A)$ – вер., что сумма делится на 3, $P(B)$ – вер. выпадения двух троек

$P(A) = \frac{12}{36}$

$A = \{(1,2),(1,5),(2,1),(2,4),(3,3),(3,6),(4,2),(4,5),(5,1),(5,4),(6,3),(6,6)\}$

$P(B) = P(AB) = \frac{1}{36}$

$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{12}$

№2

$P(A)$ – вер. выпад. хотя бы одной „1", $P(AB)$ – две или более „1"

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\sum_{i=2}^{10} C_{10}^{i}\left(\frac{5}{6}\right)^{10-i}\left(\frac{1}{6}\right)^{i}}{\sum_{i=1}^{10} C_{10}^{i}\left(\frac{5}{6}\right)^{10-i}\left(\frac{1}{6}\right)^{i}} \approx 0{,}6147724$$

№3

$P(A) = \frac{C_n^2}{n(n-1)}$

$$P(AB) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}(j-i-1)}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{3}$$

№4

$A_0^{(i)}$ – событие, что i-й шар черный, $A_1^{(i)}$ – белый шар

1) $$P(A_1^{(5)} \mid A_1^{(1)} A_0^{(2)} A_0^{(3)} A_1^{(4)}) = \frac{P(A_1^{(5)} A_1^{(1)} A_0^{(2)} A_0^{(3)} A_1^{(4)})}{P(A_1^{(1)} A_0^{(2)} A_0^{(3)} A_1^{(4)})} = \frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}} = \frac{1}{4}$$

2) $P_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}$; $P_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}$;

$P_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}$

$P(A) = \sum_{i=1}^{3} = \frac{60+60+60}{336}$; $P(AB) = \sum_{i=1}^{3} P_i(A)\cdot P(A_0^{(4)}) =$

$= \frac{3}{5}\cdot\frac{60+60+60}{336}$

$P(B|A) = \frac{3}{5}$

№5

- $\exists$ A, B – независ., тогда $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$
- $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$
- $P(AB) = P(A)\cdot P(B) = P(A)\cdot(1-P(\overline{B})) = P(A) - P(A)\cdot P(\overline{B}) = P(A)\setminus P(B) =$

$= P(A) - P(A\overline{B})$

Тогда $P(A) - P(A)P(\overline{B}) = P(A) - P(A\overline{B}) \Leftrightarrow P(A)\cdot P(\overline{B}) = P(A\overline{B})$

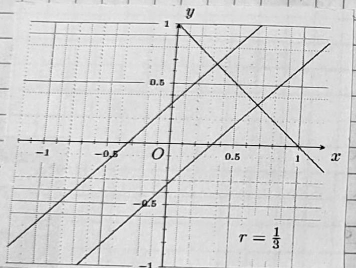
№6

$$P_r(A) = F_A(x) = \begin{cases} 1, & r \le 0 \\ (1-r)^2, & 0 < r \le 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}$$

$$P_r(B) = F_B(x) = \begin{cases} 0, & r \le 0 \\ \frac{1}{2}(3r)^2, & 0 < r \le \frac{1}{3} \\ 1 - \frac{1}{2}(2-3r)^2, & \frac{1}{3} < r \le \frac{2}{3} \\ 1, & r > \frac{2}{3} \end{cases}$$

События независ. $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$ или $P(B|A) = P(B)$ или $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, т.е. событ. незав. когда $r \ge \frac{2}{3}$, т.к. $P(AB) = 1 \cdot P(A) = P(A|B)$, и когда $r \le 0$, т.к. $P(AB) = P(B) \cdot 1 = P(B|A)$

Найдем при каких r: $P(A) \cdot P(B) = P(AB)$



При $0 < r < \frac{1}{3}$: $P_r(A) \cdot P_r(B) = (1-r)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (3r)^2$

$(1-r)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (3r)^2 = 2r^2 \Rightarrow r = \frac{1}{3}$

Для остальных интервалов равенства не возникает

Ответ: $r \le 0$, $r \ge \frac{2}{3}$, $r = \frac{1}{3}$

№8

· $P(\bar{A}_1 A_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2)$, $P(A_3 A_4) = P(A_3) \cdot P(A_4)$

· $P(\bar{A}_1 A_2) \cdot P(A_3 A_4) = P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4)$

· $P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = P(\bar{A}_1 A_2 A_3 A_4)$, т.е.

$P(\bar{A}_1 A_2) \cdot P(A_3 A_4) = P(\bar{A}_1 A_2 A_3 A_4)$

№9

1) $P(A_1 \bar{A}_3 A_4) = P(A_1) \cdot P(A_3) P(A_4) = p_1(1-p_3)p_4$

2) $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) = p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2$

3) $P((A_1 + A_2)(A_3 + A_4)) = P(A_1 + A_2) \cdot P(A_3 + A_4) = (P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2))(P(A_3) + P(A_4) - P(A_3) \cdot P(A_4)) = (p_1 + p_2 - p_1 p_2)(p_3 + p_4 - p_3 p_4)$

№11

A_k – k-й игрок вытащил белый шар

1) $P(A_1) = a_1 = \frac{3}{8}$

2) $P(A_2) = P(A_2|A_1) + P(A_2|\bar{A}_1) = a_{11} \cdot a_1 + a_{12}(1-a_1) = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{7}(1-\frac{3}{8}) = \frac{3}{8}$

3) $P(A_1 A_2) = a_1 + a_{11} = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$

№15

$$P(B_m|A) = \frac{P(AB_m)}{P(A)} = \frac{P(AB_m)}{P(B_w)P(A|B_w) + P(B_m)P(A|B_m)} = \frac{0{,}05 \cdot \frac{1}{2}}{0{,}05 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}0025 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{20}{21}$$

Глава №4

№1

$$P(A) = P_1(A) + P_3(A) + P_5(A) = P(W) + P(BBW) + P(BBBBW) =$$

$$= \frac{2}{6} + \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} + \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2} = \frac{120+72+24}{360} = \frac{3}{5}$$

№2

$$P(A_1) = \frac{2}{7} + \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{44}{105}$$

$$P(A_2) = \frac{4}{7}\cdot\frac{2}{6} + \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{28}{105}$$

$$P(B) = \frac{1}{7} + \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{6} + \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

№3

$$A_k = \frac{M}{N}$$

$$B_{k,l} = \frac{M}{N}\cdot\frac{M-1}{N-1}$$

$$C_{k,l} = \frac{N-M}{N}\cdot\frac{M}{N-1}$$

№4

2 шестерки из 3 кубиков: $C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}$

$$P(m=4) = C_{10}^4\left(\frac{15}{216}\right)^4\left(\frac{201}{216}\right)^6 \approx 0{,}0031712$$

№6

„на кубике 1 шестерка": $\frac{1}{10}$

Вер., что „6" выпала на k-ом шаге: $\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{9}{10}\right)^{(i-1)}\cdot\frac{1}{10}$

$$\frac{\frac{1}{6}\left(\left(\frac{9}{10}\right)^k - 1\right)}{\frac{9}{10}-1} = \left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^k\right) \geq a$$

При $a=0{,}7$ $k \geq 11{,}4272$; $a=0{,}9$ $k \geq 21{,}8543$

Ответ: $a=0{,}7$, $k=12$; $a=0{,}9$, $k=22$

№8

Вер., когда ни один не выиграл: $P_n(A) = \frac{C_M^0 C_{4M}^n}{C_{5M}^n}$

Хотя бы один выиграл $Q(n) = 1 - P_n(A) = 1 - \frac{C_M^0 C_{4M}^n}{C_{5M}^n}$

1) $M=3$

- $n=5$, $Q(n) = \frac{67}{91} \approx 0{,}736263$
- $n=11$, $Q(n) = \frac{451}{455} \approx 0{,}991208$
- $n=21$, $Q(n) = 1$

2) $M=10$

- $n=5$, $Q(n) = \frac{182594}{264845} \approx 0{,}689437$
- $n=11$, $Q(n) = \frac{438024217}{466921735} \approx 0{,}938111$
- $n=21$, $Q(n) = \frac{578896}{580027} \approx 0{,}998050$

№9

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B) = \left(C_{n-l}^m\cdot p^m\cdot(1-p)^{n-l-m}\right)(1\cdot p^l) = C_{n-l}^m p^{m+l}(1-p)^{n-l-m}$$

№10

$$\sum_{k=0}^n C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$$

№11

a) $\sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} q^k = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^n = q^n\sum_{k=0}^n C_n^k p^k = q^n(1+p)^n = (1-p)^n(1+p)^n = (1-p^2)^n$

б) $(1-p^2)^{n-k} p^{2k} C_n^k$

в) $P(|A_1| > |A_2|) = \dfrac{1-(\frac{1}{2})^{2n} C_{2n}^n}{2}$

№19

$\lambda = np = 5$, $p \ll 1$, вер. попадания 2 и более выстрелов: $1-P(m\in[0,1])$

$P(\mu_n) \approx \dfrac{\lambda_n^m}{m!} e^{-\lambda_n}$, $P(\mu_n \ge 2) \approx 1 - \left(\dfrac{5^0}{0!}\right) e^{-5} - \left(\dfrac{5^1}{1!}\right) e^{-5} = 0,9595723$

Глава №5

№1

$\int_1^\infty \dfrac{c}{x^4} dx = -\dfrac{x^{-3}}{3} c \Big|_1^\infty = \dfrac{c}{3} = 1 \Rightarrow c = 3$

$p_\eta(x) = \dfrac{\partial P(\eta<x)}{\partial x} = \dfrac{\partial P(\xi < e^x)}{\partial x} = p_\xi(e^x) e^x$

Тогда $p_\eta(x) = 3e^{-3x}$

$P(0,5<\eta<0,75) = \int_{0,5}^{0,75} 3e^{(-3x)} dx = -e^{-3x}\Big|_{0,5}^{0,75} = -e^{-2,25} + e^{-1,5} \approx 0,11773$

№2

а) $p_{\eta_1}(x) = \dfrac{\partial P(\eta_1<x)}{\partial x} = \dfrac{\partial P(2\xi+1<x)}{\partial x} = p_\xi\left(\dfrac{x-1}{2}\right) \cdot \dfrac12 = \dfrac12$

$\dfrac{x-1}{2} \in [0,1] \Rightarrow x\in[1,3]$

б) $p_{\eta_2}(x) = \dfrac{\partial P(\eta_2<x)}{\partial x} = \dfrac{\partial P(-\ln(1-\xi)<x)}{\partial x} = \dfrac{\partial P(\xi<1-e^{-x})}{\partial x} = p_\xi(1-e^{-x})e^{-x} = e^{-x}$

$1-e^{-x}\in[0,1] \Leftrightarrow -e^{-x}\in[-1,0] \Leftrightarrow e^{-x}\in[0,1] \Leftrightarrow x\in[0,+\infty)$

№3

а) $p_{\eta_1}(x) = \dfrac{\partial P(\sqrt{\xi}<x)}{\partial x} = p_\xi(x^2)2x = 2x\alpha e^{-\alpha x^2}$, $x>0$

$x^2\in(0,+\infty) \Leftrightarrow x\in(0,+\infty)$

б) $p_{\eta_2}(x) = \dfrac{\partial P(\xi^2<x)}{\partial x} = p_\xi(\sqrt x)\dfrac{1}{2\sqrt x} = \alpha e^{-\alpha\sqrt x}\dfrac{1}{2\sqrt x} = \dfrac{\alpha e^{-\alpha\sqrt x}}{2\sqrt x}$, $x>0$

в) $p_{\eta_3}(x) = \dfrac{\partial P(\frac1\alpha \ln\xi<x)}{\partial x} = \dfrac{\partial P(\ln\xi<\alpha x)}{\partial x} = \dfrac{\partial P(\xi<e^{\alpha x})}{\partial x} = p_\xi(e^{\alpha x})e^{\alpha x}\alpha = \alpha^2 e^{-\alpha(e^{\alpha x}-x)}$

$e^{\alpha x}\in(0,+\infty) \Leftrightarrow x\in(-\infty,+\infty)$

г) $p_{\eta_4}(x) = \dfrac{\partial P(1-e^{-\alpha\xi}<x)}{\partial x} = \dfrac{\partial P(e^{-\alpha\xi}>1-x)}{\partial x} = \dfrac{\partial P(e^{-\alpha\xi}>e^{\ln(1-x)})}{\partial x} = \dfrac{\partial P(-\alpha\xi>\ln(1-x))}{\partial x} =$

$= \dfrac{\partial P(\xi > \ln(1-x)^{-\frac1\alpha})}{\partial x} = p_\xi(\ln(1-x)^{-\frac1\alpha})\left(\dfrac1\alpha\dfrac{1}{1-x}\right) = e^{\ln(1-x)}\dfrac{1}{1-x} = 1$

$\ln(1-x)^{-\frac1\alpha}\in(0,+\infty) = \ln(1-x)\in(-\infty,0) = x\in(0,1)$

№4

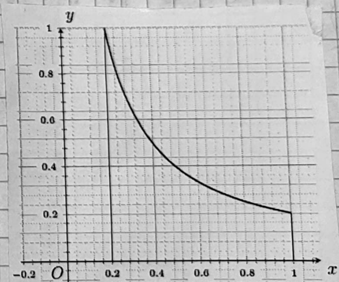
а) $p_{\eta_1}(x) = \dfrac{\partial P(\xi^2<x)}{\partial x} = \dfrac{\partial P(\xi<\sqrt x)}{\partial x} = p(\sqrt x)\dfrac{1}{2\sqrt x} = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac x2}$

б) $p_{\eta_2}(x) = \dfrac{\partial P(e^\xi<x)}{\partial x} = \dfrac{\partial P(\xi<\ln x)}{\partial x} = p_\xi(\ln x)\dfrac1x = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{\ln(x)^2}{2}}$

№5

$F(x) = x + \int_x^1 \dfrac{x}{t}dt = x + x\ln|x|\Big|_x^1 = x - x\ln x$

Тогда $p_\xi(x) = F'(x) = 1 - \ln|x| - \dfrac xx = -\ln|x|$



№7

а) $p_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(x-u)p_{\xi_2}(u)du = \int_0^1 p_{\xi_1}(x-u)du$

На $x\in[0,1]$ $p_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_0^x p_{\xi_1}(x-u)dx = x$

На $x\in[1,2]$ $p_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{x-1}^1 p_{\xi_1}(x-u)du = 1-x+1 = 2-x$

т.е. $p_{\xi_1+\xi_2}(x) = 1-|x-1|, \quad x\in[0,2]$

б) $F_{\xi_1-\xi_2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} du \int\limits_{u-x}^{+\infty} p_{\xi_1}(u)p_{\xi_2}(v)dv$

$v = z+u, \quad z = v-u$

$$F_{\xi_1-\xi_2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} du \int\limits_{-x}^{+\infty} p_{\xi_1}(u)p_{\xi_2}(z+u)dz = \int\limits_{-x}^{+\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(u)p_{\xi_2}(z+u)du =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x} dt - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(u)p_{\xi_2}(u-t)du$$

$$p_{\xi_1-\xi_2}(x) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(u)p_{\xi_2}(u-x)du = -\int\limits_{0}^{1} p_{\xi_2}(u-x)du$$

Отрезки, на кот. $p_{\xi_2}\neq 0$: $p_{\xi_2}(u-x)\neq 0 \Leftrightarrow 0\le u-x\le 1 \Rightarrow x\le u, x\ge u-1, x\le 1$

На $x\in[0,1]$: $p_{\xi_1-\xi_2}(x) = \int\limits_{x}^{1} p_{\xi_1}(u-x)du = 1-x$

На $x\in[1,2]$: $p_{\xi_1-\xi_2}(x) = \int\limits_{0}^{x+1} p_{\xi_1}(u-x)du = x+1$

Тогда через модуль: $p_{\xi_1-\xi_2}(x) = 1-|x|$

в)
$$F_{\xi_1/\xi_2}(x) = \begin{cases} x<0, & \int\limits_{-\infty}^{0} du \int\limits_{0}^{u/x} p_{\xi_1}(u)p_{\xi_2}(v)dv + \int\limits_{0}^{+\infty} du \int\limits_{u/x}^{0} p_{\xi_1}(u)p_{\xi_2}(v)dv \\ x\ge 0, & \int\limits_{-\infty}^{0} du \int\limits_{-\infty}^{u/x} p_{\xi_1}(u)p_{\xi_2}(v)dv + \int\limits_{-\infty}^{0} du \int\limits_{0}^{+\infty} p_{\xi_1}(u)p_{\xi_2}(v)dv + \\ & + \int\limits_{0}^{+\infty} du \int\limits_{u/x}^{+\infty} p_{\xi_1}(u)p_{\xi_2}(v)dv + \int\limits_{0}^{+\infty} du \int\limits_{-\infty}^{0} p_{\xi_1}p_{\xi_2}dv \end{cases}$$

№11

а) $P(\xi_1=-1) = \frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{7}{24} = \frac{1}{2}$

$P(\xi_1=1) = \frac{5}{24}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

$P(\xi_2=-1) = \frac{1}{8}+\frac{5}{24} = \frac{1}{3}$

$P(\xi_2=0) = \frac{1}{12}+\frac{1}{6} = \frac{1}{4}$

$P(\xi_2=1) = \frac{7}{24}+\frac{1}{8} = \frac{5}{12}$

б) $P(\eta_1=-2) = \frac{1}{8}$

$P(\eta_1=-1) = \frac{1}{12}$

$P(\eta_1=0) = \frac{7}{24}+\frac{5}{24} = \frac{1}{2}$

$P(\eta_1=1) = \frac{1}{6}$

$P(\eta_1=2) = \frac{1}{8}$

в) $P(\eta_2=0) = \frac{1}{12}+\frac{1}{6} = \frac{1}{4}$

$P(\eta_2=1) = \frac{1}{8}+\frac{5}{24}+\frac{7}{24}+\frac{1}{8} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

г) $P(\eta_1=0, \eta_2=1) = \frac{1}{2}$

№14

$\exists$ на k-ом испытании успех

$P(n=k) = (1-p)^{k-1}p$, где p — вер. успеха

Закон распределения τ: $P(\tau=k) = (1-p)^{k-1}p$

№15

$P(\tau_1=k) = (1-p)^{k-1}p, \quad P(\tau_2=l) = (1-p)^{l-1}p$

$P(\tau_1=k, \tau_2=l) = (1-p)^{k-1}p(1-p)^{l-1}p = P(\tau_1=k)\cdot P(\tau_2=l)$, независ.

№20

В средн. деталь сломается с вер. $\tau = 1000\cdot 0{,}0003+2000\cdot$
$\cdot 0{,}0005+7000\cdot 0{,}0001 = 0{,}3+1+0{,}7 = 2$

$P(k=2,3,4,\ldots) = \overline{1-P(k=2,3,4,\ldots)} = 1-P(k=0,1) = 1-\sum\limits_{k=0}^{1}\frac{\tau^k}{k!}e^{-\tau} = 1-e^{-2}-2e^{-2} \approx 0{,}594$

№22

$P(\xi_1 = i) = \frac{1}{10}, \; i \in \{0,1,\dots,9\}$

$P(\xi_2 = j) = \frac{1}{10}, \; j \in \{0,1,\dots,9\}$

$P(\xi_1 = i, \xi_2 = j) = \frac{1}{100} = P(\xi_1 = i)P(\xi_2 = j)$, независ.

Глава №6

№1

$p_\tau(k) = P(\tau = k) = (1-p)^{k-1}p$

$M_\tau = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1}p = p\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(1-p)^n$

$S_0 = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

$xS_0 = x\sum_{n=0}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$

$S_0 - xS_0 = 1 \Rightarrow S_0 = \frac{1}{1-x}$

$(1-p)M_\tau = p\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(1-p)^{n+1}$

$M_\tau - (1-p)M_\tau = p\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(1-p)^n - p\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(1-p)^{n+1} = p(1 + (1-p) + (1-p)^2 + \dots) = 1$

$M_\tau = \frac{1}{p}$

№2

$M_\xi = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1+2+\dots+n}{n} = \frac{(1+n)n}{2n} = \frac{1+n}{2}$

№3

$P(\tau = k) = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$

$M_\tau = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{n-1}{n}\right)^k = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$

№6

$M(\xi_1 + \xi_2) = \sum_{i,j=0}^{9}(i+j)P(\xi_1 = i, \xi_2 = j) = \sum_{i,j=0}^{9}\frac{i+j}{100} = \frac{900}{100} = 9$

$D(\xi_1 + \xi_2) = M((\xi_1 + \xi_2)^2) - (M(\xi_1 + \xi_2))^2 = 97{,}5 - 81 = 16{,}5$

№7

$P(\xi_i = 1) = p, \; P(\xi_i = 0) = q : \; \tau = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$

$M(\tau) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + \dots + M(\xi_n) = n(p\cdot(1-p)) = npq$

№8

$M(\eta_1) = 9, \; D(\eta_1) = 16{,}25$

$M(\eta_2) = 20{,}25, \; D(\eta_2) = M(\eta_2)^2 - (M(\eta_2))^2 = 402{,}1875$

№9

$M(\xi_1) = -1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = 0$

$M(\xi_2) = -1\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{5}{12} = \frac{1}{12}$

$D(\xi_1) = M(\xi_1)^2 - (M(\xi_1))^2 = 1 - 0 = 1$

$D(\xi_2) = M(\xi_2)^2 - (M(\xi_2))^2 = \frac{9}{12} - \frac{1}{144} = \frac{107}{144}$

$cov(\xi_1, \xi_2) = M_{\xi_1\xi_2} - M(\xi_1)\cdot M(\xi_2) = -\frac{1}{4} - 0 = -\frac{1}{4}$

№10

$\xi_2 \backslash \xi_1$	-1	0	1
-1	0	$\frac{1}{4}$	0
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0

$M(\xi_1) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$

$M(\xi_2) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$

$D(\xi_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; $D(\xi_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$cov(\xi_1, \xi_2) = 0$; завис.

Касьяненко Вера (P3220, Теор.Вероятн. 5.1)

№11

а) Пусть $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_2 = \xi_3 + \xi_4 + \xi_5$. Тогда

$D(\eta_1 + \eta_2) = D(\eta_1) + D(\eta_2) + 2\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2)$

$D(\eta_1 + \eta_2) = D(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5) = 5\sigma^2$

$D(\eta_1) = 2\sigma^2$, $D(\eta_2) = 3\sigma^2$

$\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2}(D(\eta_1 + \eta_2) - D(\eta_1) - D(\eta_2)) = 0 \Rightarrow \rho(\eta_1, \eta_2) = 0$

б) Пусть $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, $\eta_2 = \xi_3 + \xi_4 + \xi_5$

$D(\eta_1 + \eta_2) = D(\eta_1) + D(\eta_2) + 2\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2)$

$D(\eta_1 + \eta_2) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + 4D(\xi_3) + D(\xi_4) + D(\xi_5) = 8\sigma^2$

$D(\eta_1) = 3\sigma^2$, $D(\eta_2) = 3\sigma^2$

$\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2} 2\sigma^2 = \sigma^2$

$\rho(\eta_1, \eta_2) = \frac{\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2)}{\sqrt{D(\eta_1) D(\eta_2)}} = \frac{\sigma^2}{3\sigma^2} = \frac{1}{3}$

№16

Письма домой: $(n-1)!$

$P(A) = n \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \frac{1}{n(n-1)} + C_n^3 \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} =$

$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$

По формуле Тейлора: $P(A) \to 1 - e^{-1} \approx 0{,}63212$

№17

$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$

$M(\xi) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + \ldots + M(\xi_n) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$

$\xi_k^2(w) = \xi_k(w) \Rightarrow \xi^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 + \sum_{i \neq j} \xi_i \xi_j = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i + \sum_{i \neq j} \xi_i \xi_j = \xi + \sum_{i \neq j} \xi_i \xi_j$

$D(\xi) = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \sum_{i \neq j} M_{\xi_i \xi_j} + M_\xi - (M_\xi)^2 = \frac{n(n-1)}{n(n-1)} + 1 - 1 = 1$

Глава №7

№3

Пусть X – неотр. случ. вел., $X \in \mathbb{Z}$, $P_k = P(X = k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$\varphi(z) = \varphi_X(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z^n + \ldots$

Расп. Пуасс. $P(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Производящ. ф-ция распред. [1, 2]: $\varphi(z) = \varphi_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} z^k =$

$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}$

№4

Пусть X имеет д. расп. Пуасс.: $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k} e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$M_X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{tx_i} p_i = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ti} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{ti} \lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{e^t \lambda} = \exp(\lambda(e^t - 1))$

$M[X^n] = \frac{d^n}{dt^n}(M_X(t))|_{t=0}$

$\frac{d}{dt} M_X(t) = \frac{d}{dt} \exp(\lambda(e^t - 1)) = \exp(\lambda(e^t - 1))(\lambda(e^t - 1))' = (\exp(\lambda(e^t - 1)))' \lambda e^t +$

$+ \exp(\lambda(e^t - 1))(\lambda e^t)' = \exp(\lambda(e^t - 1))(\lambda e^t)^2 + \exp(\lambda(e^t - 1))(\lambda e^t) =$

$= \exp(\lambda(e^t - 1))(\lambda e^t)(\lambda e^t + 1)$

$\frac{d}{dt} M_X(t)|_{t=0} = \exp(\lambda(e^0 - 1)) \lambda e^0 = \exp(0) \lambda = \lambda$

$\frac{d^2}{dt^2} M_X(t)|_{t=0} = \exp(\lambda(e^0 - 1))(\lambda e^0)(\lambda e^0 + 1) = \lambda(\lambda + 1) = \lambda^2 + \lambda$

$M[X] = \frac{d}{dt}(M_x(t))\big|_{t=0} = \lambda$

$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = \frac{d^2}{dt^2}(M_x(t))\big|_{t=0} - (\lambda)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

№6

а) Величина ξ дискретна и $P\{\xi=1\}=p$, $P\{\xi=0\}=1-p=q$

Хар. ф-ция: $f_\xi(t) = e^{it\cdot 0}P\{\xi=0\} + e^{it\cdot 1}P\{\xi=1\} = q + e^{it}p$

б) $\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = e^{it0}p\{\xi=0\} + e^{it\cdot 1}p\{\xi=1\} = 1-p+pe^{it}$

в) $\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \sum_{k=0}^n e^{itk} p\{\xi=k\} = \sum_{k=0}^n e^{itk} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$
$= \sum_{k=0}^n C_n^k (pe^{it})^k (1-p)^{n-k} = (1-p+pe^{it})^n$

№7

$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \int_0^\infty e^{itx} f_\xi(x)dx = \int_0^\infty e^{itx}\frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}x^{\lambda-1}e^{-\alpha x}dx =$
$= \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty x^{\lambda-1}e^{-x(\alpha-it)}dx = \left(\frac{\alpha}{\alpha-it}\right)^\lambda = \left(1-\frac{it}{\alpha}\right)^{-\alpha}$

Интеграл вычисл. с пом. гамма-ф-ции: замена $y = x(\alpha-it)$

$\int_0^\infty x^{\lambda-1}e^{-x(\alpha-it)}dx = \frac{1}{(\alpha-it)^\lambda}\int_0^\infty y^{\lambda-1}e^{-y}dy = \frac{\Gamma(\lambda)}{(\alpha-it)^\lambda}$

№8

Заметим, что для того, чтобы законч. путь в 0, необх. совершить равное число шагов вправо и влево. Тогда надо выбрать $\frac{n}{2}$ шагов.

$g(x) = \sum_{k=0}^\infty C_{2n}^n x^n$

$f(x) = \sum_{n=0}^\infty C_n x^n$; $f'(x) = \sum_{n=0}^\infty nC_n x^{n-1}$

$C_n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n$, то справедливо $g(x) = (n+1)f(x) = xf'(x) + f(x)$

Производящ. ф-ция для чисел Каталана $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

$f'(x) = \frac{\frac{4x}{\sqrt{1-4x}} - 2 + 2\sqrt{1+4x}}{4x^2} = \frac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2x^2\sqrt{1-4x}}$

$g(x) = \frac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2x\sqrt{1-4x}} + \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$

№9

$m_\eta = M_\eta = M\{\varphi(\xi)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)p_\xi(x)dx$

$M_\eta = M\{(\xi-1)(3-\xi)\} = \int_{-1}^{5}(x-1)(3-x)\frac{1}{6}dx = \frac{1}{6}\int_{-1}^{5}(-x^2+4x-3)dx = -2$

№10

Т. Пуасс. для схемы Бернулли. $\exists$ $n\to\infty$ и $p_n\to 0$, так, что $np_n \to \lambda > 0$. Тогда для любого $k \geq 0$ вер. получить k успехов в n испыт. схемы Берн. с вер. успеха p_n стремится к вел. $\lambda^k\frac{e^{-\lambda}}{k!}$: $C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

Док-во:

$\exists$ $\lambda_n = n\cdot p_n \to \lambda > 0$, тогда $p_n = \frac{\lambda_n}{n}$ и $C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k} =$

$= C_n^k\frac{\lambda_n^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = \underbrace{\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}}_{\to 1}\frac{\lambda_n^k}{k!}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

В соотношении мы воспользовались тем, что $\lambda_n^k \to \lambda^k$ и замеч. пределом $\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}$

Докажем: $\ln\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n = n\ln\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right) = n\left(-\frac{\lambda_n}{n} + o\left(\frac{\lambda_n^2}{n^2}\right)\right) \to -\lambda$

№11

Ф-ция $y = -5x+2$ монот. убыв на $(-\infty, +\infty)$

Обратная ф-ция $x = \frac{(2-y)}{5} = \psi(y)$, $\psi'(y) = -\frac{1}{5}$

$p_\eta(y) = p_\xi(\psi(y))|\psi'(y)| = \frac{1}{5} p_\xi\left(\frac{2-y}{5}\right), y \in \mathbb{R}$

Т.к. $F_\eta(y) = F\{\eta<y\} = P\{-5\xi+2<y\} = P\{\xi > \frac{(2-y)}{5}\} =$

$= 1 - P\{\xi \le \frac{(2-y)}{5}\} = 1 - \left(P\{\xi < \frac{2-y}{5}\} + P\{\xi = \frac{(2-y)}{5}\}\right)$ и

$P\{\xi = \frac{2-y}{5}\} = 0$, имеем $F_\eta(y) = 1 - P\{\xi < \frac{2-y}{5}\} = 1 - F_\xi\left(\frac{2-y}{5}\right)$

Найдем плотность: $p_\eta(y) = F'_\eta(y) = \left(1-F_\xi\left(\frac{2-y}{5}\right)\right)'_y = -p_\xi\left(\frac{2-y}{5}\right)\left(\frac{2-y}{5}\right)'_y =$

$= -p_\xi\left(\frac{2-y}{5}\right)\left(-\frac15\right) = \frac15 p_\xi\left(\frac{2-y}{5}\right), y\in\mathbb{R}$

№12

Пред. т. Муавра-Лапласа: ∃ соб. A может произойти в модели из n независ. испыт. с одной и той же вер. p и пусть $\nu_n(A)$ - число осущ. события A в n испыт. Тогда $\frac{\nu_n(A)-np}{\sqrt{np(1-p)}} \Rightarrow N_{0,1}$ при $n\to\infty$, т.е. для люб. веществ. $x<y$ имеет место сходимость $P\left(x \le \frac{\nu_n(A)-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le y\right) \to \Phi_{0,1}(y) - \Phi_{0,1}(x) = \int_x^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

Д-во:

Велич. $\nu_n(A)$ есть сумма независ. одинак. распред. случ величин, имеющих распред. Бернулли с парам., равным веротн. успеха p: $\nu_n(A) = \xi_1 + \dots + \xi_n$, где

$\xi_i = I_i(A) = \begin{cases}1, & \text{если A произошло в i-том событии}\\ 0, & \text{если A не произошло в i-том событии}\end{cases}$

$E\xi_1 = p$; $D\xi_1 = p(1-p)$

№1

а) $Mx^{2\xi+1} = M(x^{2\xi}x^1) = M(x^{2\xi})M(x) = xM(x^{2\xi}) = xM((x^2)^\xi) = x\varphi(x^2)$

б) $\sum_{n=0}^\infty x^n P\{\xi \ge n\} = \sum_{n=0}^\infty x^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} P\{\xi=k\}\right) = \sum_{k=0}\left(\sum_{n=0}^{k} x^n\right) P\{\xi=k\} =$

$= \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1-x^{k+1}}{1-x}\right) P\{\xi=k\} = \frac{1}{1-x}\left(\sum_{k=0}^\infty (1-x^{k+1})P\{\xi=k\}\right) =$

$= \frac{1}{1-x}\left(\sum_{k=0}^\infty 1\cdot P\{\xi=k\} - \sum_{k=0}^\infty x^{k+1}P\{\xi=k\}\right) = \frac{1}{1-x}\left(1 - x\sum_{k=0}^\infty x^k P\{\xi=k\}\right) =$

$= \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x}\varphi(x) = \frac{1-x\varphi(x)}{1-x}$

в) $\sum_{n=0}^\infty x^n P\{\xi \le n\} = \sum_{n=0}^\infty x^n(1 - P\{\xi\ge n\} + P\{\xi=n\}) = \sum_{n=0}^\infty x^n -$

$- \sum_{n=0}^\infty x^n P\{\xi \ge n\} + \sum_{n=0}^\infty x^n P\{\xi=n\} = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x\varphi(x)}{1-x} + \varphi(x) =$

$= \frac{1-1+x\varphi(x)+(1-x)\varphi(x)}{1-x} = \frac{(x+1-x)\varphi(x)}{1-x} = \frac{\varphi(x)}{1-x}$

г) Чтобы изолировать чётные члены, сложим ф-цию $\varphi(x)$ с ф-цией $\varphi(-x)$

$\varphi(x) = \sum_{n=0}^\infty x^n P\{\xi=n\} = P\{\xi=0\} + xP\{\xi=1\} + x^2P\{\xi=2\} + \dots +$

$+ x^m P\{\xi=m\} + \dots$

$\varphi(-x) = \sum_{n=0}^\infty (-x)^n P\{\xi=n\} = P\{\xi=0\} - xP\{\xi=1\} + x^2P\{\xi=2\} + \dots +$

$+(-1)^m x^m P\{\xi=m\} + \dots$

$\varphi(x)+\varphi(-x) = 2P\{\xi=0\} + 2x^2P\{\xi=2\} + 2x^4P\{\xi=4\} + ((-1)^m+1)P\{\xi=m\} + \dots$

$\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2} = P\{\xi=0\}+x^2P\{\xi=2\}+x^4P\{\xi=4\}+\dots = \sum_{n=0}^\infty x^{2n}P\{\xi=2n\} = \sum_{n=0}^\infty (x^2)^n P\{\xi=2n\}$

Заменим x на $\sqrt{x}$, т.к. нам надо, чтобы в ряду встреч. члены с x^n, а не с x^{2n}: $\frac{\varphi(\sqrt x)+\varphi(-\sqrt x)}{2} = P\{\xi=0\} + \sqrt{x}^2 P\{\xi=2\} + \sqrt{x}^4 P\{\xi=4\} + \dots$

Ответ: а) $x\varphi(x^2)$; б) $\frac{1-x\varphi(x)}{1-x}$; в) $\frac{\varphi(x)}{1-x}$; г) $\frac{\varphi(\sqrt x)+\varphi(-\sqrt x)}{2}$