

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Отчёт
По расчётно-графической работе №2
Вариант: 2

Выполнили:
Касьяненко В.М.
Кремпольская Е.А.
Шишминцев Д.В.
Кравцов К.Д.

Преподаватель:
Труфанова А.А.

г. Санкт-Петербург

2023 г.

1. Зная, что поток F векторного поля A по определению есть интеграл по поверхности S от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к поверхности

$$F = \iint_S \vec{a} \vec{n} ds$$

Рассчитать поток векторного поля A через замкнутую поверхность S двумя способами

$$A = y^2 \vec{i} + z^2 \vec{j} + x^2 \vec{k},$$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Решение:

$$1) z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$n = \pm \frac{(-z'_x i - z'_y j + k)}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}$$

$$z'_x = (\sqrt{1 - x^2 - y^2})'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} (-x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$z'_y = (\sqrt{1 - x^2 - y^2})'_y = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 1 - x^2 - y^2}{1 - x^2 - y^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1 - x^2 - y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$n = \pm \frac{\left(-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} i - \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} j + k\right)}{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}} = \pm (xi + yj + \sqrt{1 - x^2 - y^2} k)$$

$$an = \pm (y^2 i + z^2 j + x^2 k)(xi + yj + zk) = \pm (xy^2 + yz^2 + zx^2)$$

Для положительной z :

$$\begin{aligned} F_1 &= \iint_S an dS = \iint_{D_{xy}} (xy^2 + y(1 - x^2 - y^2) + \sqrt{1 - x^2 - y^2} x^2) \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} dxdy = \\ &= \iint_{D_{xy}} (xy^2 + y(1 - x^2 - y^2) + \sqrt{1 - x^2 - y^2} x^2) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dxdy = \\ &= \iint_{D_{xy}} \left(\frac{xy^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + y\sqrt{1 - x^2 - y^2} + x^2 \right) dxdy = \iint_{D_{xy}} \frac{(xy^2 + y(1 - x^2 - y^2) + x^2 \sqrt{1 - x^2 - y^2})}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dxdy = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + r \sin \varphi - r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - r^3 \sin^3 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi \sqrt{1 - r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi}}{\sqrt{1 - r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi}} r dr = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + r \sin \varphi - r^3 \sin \varphi + r^2 \cos^2 \varphi \sqrt{1 - r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi}}{\sqrt{1 - r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi}} r dr = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + r \sin \varphi - r^3 \sin \varphi + r^2 \cos^2 \varphi \sqrt{1 - r^2}}{\sqrt{1 - r^2}} r dr = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\sin^2 \varphi \cos \varphi \int_0^1 \frac{r^4}{\sqrt{1 - r^2}} dr + \sin \varphi \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1 - r^2}} dr - \sin \varphi \int_0^1 \frac{r^4}{\sqrt{1 - r^2}} dr + \cos^2 \varphi \int_0^1 r^3 dr \right) \\ & r = \sin u, dr = \cos u du \\ & \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\sin^2 \varphi \cos \varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u du + \sin \varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du - \sin \varphi \left(-\left(\frac{\cos u \sin^3 u}{2}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du \right) + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi \right) = \\ & \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\sin^2 \varphi \cos \varphi \left(0 + \frac{3}{4} * \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\sin \varphi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(2u)) du - \frac{3\pi}{16} \sin \varphi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi \right) = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{3\pi}{16} \sin^2 \varphi \cos \varphi + \frac{\sin \varphi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - \frac{3\pi}{16} \sin \varphi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi \right) = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3\pi}{16} \sin^2 \varphi \cos \varphi + \frac{\pi}{4} \sin \varphi - \frac{3\pi}{16} \sin \varphi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi \right) d\varphi = \\ &= \frac{3\pi}{16} \int_0^{2\pi} (\sin^2 \varphi \cos \varphi) d\varphi + \frac{\pi}{4} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi - \frac{3\pi}{16} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi + \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \end{aligned}$$

$$= \frac{3\pi \sin^3 \varphi}{16 \cdot 3} \Big|_0^{2\pi} + \frac{\pi}{4} (-\cos \varphi) \Big|_0^{2\pi} - 0 + \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\varphi)) d\varphi = 0 + 0 + 0 + \frac{1}{8} \left(\varphi + \frac{\sin(2\varphi)}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}$$

Для отрицательной z :

$$F_2 = \iint_S a(-n) dS = - \iint_{D_{xy}} (xy^2 + y(1 - x^2 - y^2) + \sqrt{1 - x^2 - y^2} x^2) \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} dxdy = -\frac{\pi}{4}$$

$$F = F_1 + F_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$$

$$2) \operatorname{div} a = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$F = \iiint_V \operatorname{div} a \, dxdydz = \iiint_V 0 \, dxdydz = 0$$

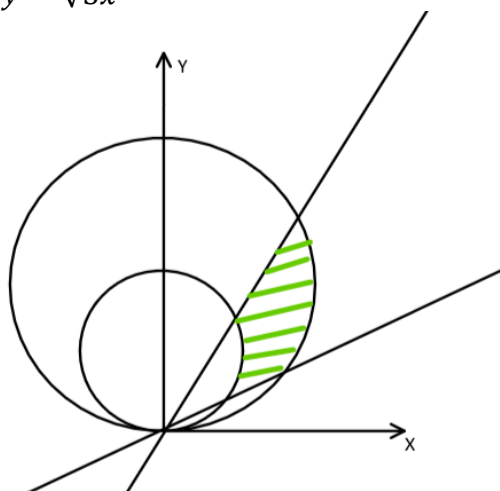
2. Вычислить площадь области D , ограниченной функциями

$$D: \begin{cases} y^2 - 4y + x^2 = 0 \\ y^2 - 10y + x^2 = 0 \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y = \sqrt{3}x \end{cases}$$

Решение:

$$S = \iint_D dxdy$$

$$\begin{cases} y = 2 + \sqrt{4 - x^2} \\ y = 2 - \sqrt{4 - x^2} \\ y = 5 + \sqrt{25 - x^2} \\ y = 5 - \sqrt{25 - x^2} \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} \\ y = \sqrt{3}x \end{cases}$$



Точки пересечения:

$$\begin{cases} y^2 - 4y + x^2 = 0 \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 - 4\frac{x}{\sqrt{3}} + x^2 = 0 \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} = \begin{cases} 4x^2 - 4\sqrt{3}x = 0 \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x=\sqrt{3} \\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 4y + x^2 = 0 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} = \begin{cases} (\sqrt{3}x)^2 - 4\sqrt{3}x + x^2 = 0 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} = \begin{cases} 4x^2 - 4\sqrt{3}x = 0 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x=\sqrt{3} \\ y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 10y + x^2 = 0 \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 - 10\frac{x}{\sqrt{3}} + x^2 = 0 \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} = \begin{cases} 4x^2 - 10\sqrt{3}x = 0 \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x=\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 10y + x^2 = 0 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} = \begin{cases} (\sqrt{3}x)^2 - 10\sqrt{3}x + x^2 = 0 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} = \begin{cases} 4x^2 - 10\sqrt{3}x = 0 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x=\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{15}{2} \end{cases}$$

Для D_1 :

$$\sqrt{3} \leq x \leq 2$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq 2 - \sqrt{4 - x^2}$$

Для D_2 :

$$\sqrt{3} \leq x \leq 2$$

$$2 + \sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{3}x$$

Для D_3 :

$$2 \leq x \leq \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}x$$

Для D_4 :

$$\frac{5\sqrt{3}}{2} \leq x \leq 5$$

$$5 - \sqrt{25 - x^2} \leq y \leq 5 + \sqrt{25 - x^2}$$

$$S_{D_1} = \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_{\frac{x}{\sqrt{3}}}^{2 - \sqrt{4 - x^2}} dy = \int_{\sqrt{3}}^2 \left(2 - \sqrt{4 - x^2} - \frac{x}{\sqrt{3}}\right) dx$$

$$x = 2\sin u, dx = 2\cos u du$$

$$\begin{aligned} (2x)|_{\sqrt{3}}^2 - 4 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 u) du - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{x^2}{2}\right) \Big|_{\sqrt{3}}^2 &= 4 - 2\sqrt{3} - 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2u)) du - \frac{1}{2\sqrt{3}} = \\ &= 4 - 2\sqrt{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}} - 2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 4 - 2\sqrt{3} + \frac{-\pi + \sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{D_2} &= \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_{2 + \sqrt{4 - x^2}}^{\sqrt{3}x} dy = \int_{\sqrt{3}}^2 \left(\sqrt{3}x - (2 + \sqrt{4 - x^2})\right) dx = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(4 - 2\sqrt{3} + 2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right) = \\ &= -\frac{\pi}{3} + 3\sqrt{3} - 4 \end{aligned}$$

$$S_{D_3} = \int_2^{\frac{5\sqrt{3}}{2}} dx \int_{\frac{x}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}x} dy = \int_2^{\frac{5\sqrt{3}}{2}} \left(\sqrt{3}x - \frac{x}{\sqrt{3}}\right) dx = \left(\frac{\sqrt{3}x^2}{2} - \frac{x^2}{2\sqrt{3}}\right) \Big|_2^{\frac{5\sqrt{3}}{2}} = \frac{59}{4\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} S_{D_4} &= \int_{\frac{5\sqrt{3}}{2}}^5 dx \int_{5 - \sqrt{25 - x^2}}^{5 + \sqrt{25 - x^2}} dy = \int_{\frac{5\sqrt{3}}{2}}^5 \left(5 + \sqrt{25 - x^2} - (5 - \sqrt{25 - x^2})\right) dx = \\ &= 2 \int_{\frac{5\sqrt{3}}{2}}^5 \sqrt{25 - x^2} dx = 2 * \frac{25}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2u)) du = \frac{25(2\pi - 3\sqrt{3})}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= S_{D_1} + S_{D_2} + S_{D_3} + S_{D_4} = 4 - 2\sqrt{3} + \frac{-\pi + \sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{3} + 3\sqrt{3} - 4 + \frac{25(2\pi - 3\sqrt{3})}{12} + \frac{59}{4\sqrt{3}} = \\ &= \frac{71\sqrt{3} - 4\pi + 4\sqrt{3} - 4\pi + 50\pi - 75\sqrt{3}}{12} = \frac{42\pi}{12} = \frac{7\pi}{2} \approx 11e\text{д}^2 \end{aligned}$$

3. Вычислить объем тела T , ограниченного поверхностями

$$T: \begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 0 \\ z = 8 - y^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_T dx dy dz = \int_{-4}^0 dx \int_{-\sqrt{-x^2-4x}}^{\sqrt{-x^2-4x}} dy \int_0^{8-y^2} dz = \int_{-4}^0 dx \int_{-\sqrt{-x^2-4x}}^{\sqrt{-x^2-4x}} (8-y^2) dy = \\ &= \int_{-4}^0 \left(16\sqrt{-x^2-4x} - \frac{2(-x^2-4x)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) dx = 16 \int_{-4}^0 (\sqrt{-x^2-4x}) dx - \frac{2}{3} \int_{-4}^0 (-x^2-4x)^{\frac{3}{2}} dx \\ u &= x+2, du = dx \\ 16 \int_{-2}^2 (\sqrt{-u^2+4}) du - \frac{2}{3} \int_{-2}^2 (-u^2+4)^{\frac{3}{2}} du \\ u &= 2\sin t, du = 2\cos t dt \\ 64 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t) dt - \frac{4}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t (4-4\sin^2 t)^{\frac{3}{2}} dt &= 32 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2t)) dt - \\ - \frac{4}{3} (8 \cos^3 t \sin t + 3(x - \frac{1}{4} \sin(4x))) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} &= 32(\pi+0) - \frac{4}{3} 3\pi = 32\pi - 4\pi = 28\pi \approx 88 \text{ед}^3 \end{aligned}$$

4. При помощи формулы Остроградского-Гаусса докажите, что

$$\oint_S f d\vec{S} = \iiint_T \nabla f dv$$

где T – ограниченная область в пространстве с границей – гладкой односвязной поверхностью S ,

$f(x; y; z)$ – непрерывно дифференцируемая в области T скалярная функция,

$d\vec{S} = (dydz; dzdx; dxdy)$ – направленный элементарный участок поверхности S ,

$dv = dxdydz$ – элементарный участок в области T .

Доказательство:

$$d\vec{S} = (dydz; dzdx; dxdy) = dydzi + dzdxj + dxdyk$$

$$\nabla f = \text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

Распишем левая часть в координатной форме:

$$\oint_S f dydzi + f dzdxj + f dxdyk$$

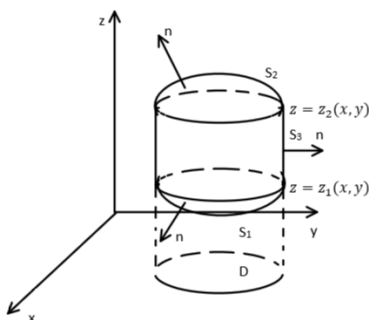
Правая часть в координатной форме:

$$\iiint_T \left(\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k \right) dxdydz$$

Воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса, которая связывает поверхностный интеграл II рода с тройным интегралом по телу T :

$$\oint_S f dydzi + f dzdxj + f dxdyk = \iiint_T \left(\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k \right) dxdydz$$

Докажем равенство:



Пусть T – z -цилиндрическая область.

$$\begin{aligned} \oint \iiint_T \frac{\partial f}{\partial z} k \, dx dy dz &= \iint_D \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial f}{\partial z} dz \right] dx dy k = \iint_D [f(x, y, z_2(x, y)) - f(x, y, z_1(x, y))] dx dy k = \\ &= \iint_{S_2} f(x, y, z) dx dy k + \iint_{S_1} f(x, y, z) dx dy k + \iint_{S_3} f(x, y, z) dx dy k = \\ &= \iint_{S_2} f(x, y, z) dx dy k + \iint_{S_1} f(x, y, z) dx dy k + 0 = \oint_S f(x, y, z) dx dy k \\ \iiint_T \frac{\partial f}{\partial z} k \, dx dy dz &= \oint_S f dx dy k \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} \iiint_T \frac{\partial f}{\partial x} i \, dx dy dz &= \oint_S f dy dz i \\ \iiint_T \frac{\partial f}{\partial y} j \, dx dy dz &= \oint_S f dz dx j \end{aligned}$$

Сложим все части и получим:

$$\begin{aligned} \iiint_T \frac{\partial f}{\partial x} i \, dx dy dz + \iiint_T \frac{\partial f}{\partial y} j \, dx dy dz + \iiint_T \frac{\partial f}{\partial z} k \, dx dy dz &= \oint_S f dy dz i + \oint_S f dz dx j + \oint_S f dx dy k \\ \iiint_T \left(\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k \right) dx dy dz &= \oint_S f dy dz i + f dz dx j + f dx dy k \\ \iiint_T \nabla f dv &= \oint_S f d\vec{S} \end{aligned}$$