Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Отчёт
По расчётно-графической работе
по Линейной алгебре
Вариант: 2

Выполнили:
Кремпольская Екатерина Александровна
Касьяненко Вера Михайловна
P3120

Принял:
Цветков Константин Борисович

г. Санкт-Петербург

2023 г.

Задача №1

Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицей второго и четвёртого порядка соответственно.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица имеет размерность 2×2, то есть является представлением линейного оператора в пространстве R^2. Собственный вектор матрицы будем искать в виде: $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Составим уравнение для отыскания собственных векторов в матричном виде:

$$Aa = \lambda a <=> Aa = \lambda Ea <=> (A - \lambda E)a = 0$$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Перепишем матричное уравнение в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Однородная система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель ее главной матрицы равен 0.

Характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda) - 1 * 1 = 0$$

$$1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2) = 0$$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$ – собственные значения линейного оператора.

- Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 0$:

$(A - \lambda_1 E)x = 0$ или $\begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

т.е. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} => x_1 + x_2 = 0$

Полагая в последнем равенстве $x_1 = C_1$, получим $x_2 = -C_1$.

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 0$, имеют вид $\vec{a} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, C_1 \in \mathbb{C}/\{0\}$.

- Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2 = 2$:

$(A - \lambda_2 E)x = 0$ или $\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

т.е. $\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + -x_2 = 0 \end{cases} => x_1 - x_2 = 0$

Полагая в последнем равенстве $x_1 = \mathrm{C}_2$, получим $x_2 = \mathrm{C}_2$.

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2 = 2$, имеют вид $\vec{a} = \mathrm{C}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{C}_2 \in \mathbb{C}/\{0\}$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица имеет размерность 4×4, то есть является представлением линейного оператора в пространстве R^4. Собственный вектор матрицы будем искать в виде: $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

Составим уравнение для отыскания собственных векторов в матричном виде:

$Aa = \lambda a <=> Aa = \lambda E a <=> (A - \lambda E)a = 0$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -\lambda & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Перепишем матричное уравнение в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} (-1-\lambda)x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + (1-\lambda)x_4 = 0 \end{cases}$$

Однородная система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель ее главной матрицы равен 0.

Характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -\lambda & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-(-1)\begin{vmatrix} 2 & 3-\lambda & 2 \\ -3 & -3 & -\lambda \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -\lambda \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+(1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ -3 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$3 - 6\lambda + 3\lambda^2 - 3 + 6\lambda - 3\lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

$$\lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda = 0$$

$$3\lambda^2(1-\lambda) - \lambda(1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2) = 0$$

$$-\lambda(1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2-3\lambda) = 0$$

$$\lambda(1-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0$$

$$\lambda(1-\lambda)^3 = 0$$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ – собственные значения линейного оператора.

- Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 0$:

$(A - \lambda_1 E)x = 0$ или $\begin{pmatrix} -1-\lambda_1 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 3-\lambda_1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -\lambda_1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, т.е.

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} => \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0 \\ -3x_2 + -5x_3 + -2x_4 = 0 \end{cases} =>$$

$$=> \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} => \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Полагая в последнем равенстве $x_4 = C_1$, получим $x_1 = -C_1, x_2 = C_1, x_3 = -C_1$.

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 0$, имеют вид $\vec{a} = C_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, C_1 \in \mathbb{C}/\{0\}$.

- Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2 = 1$:

$$(A-\lambda_2 E)x=0 \text{ или } \begin{pmatrix} -1-\lambda_2 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 3-\lambda_2 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -\lambda_2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} -2x_1-2x_2-2x_3-x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \\ -3x_1-3x_2-x_3=0 \\ 3x_1+3x_2+x_3=0 \end{cases} => \begin{cases} x_1+x_2+x_3+0.5x_4=0 \\ 2x_3+1.5x_4=0 \\ -2x_3-1.5x_4=0 \end{cases} => \begin{cases} x_1+x_2-0.25x_4=0 \\ x_3+0.75x_4=0 \end{cases}$$

Полагая в последнем равенстве $x_2=\mathrm{C}_2$ и $x_4=\mathrm{C}_3$, получим $x_1=-\mathrm{C}_2+0.25\mathrm{C}_3,\ x_3=-0.75\mathrm{C}_3$.

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2=1$, имеют вид $\vec{a}_1=\mathrm{C}_2\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathrm{C}_2 \in \mathbb{C}/\{0\}$ и $\vec{a}_2=\mathrm{C}_3\begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \\ -0.75 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{C}_3 \in \mathbb{C}/\{0\}$.

Задание №2

Показать, что матрицу линейного оператора в четырёхмерном вещественном пространстве можно привести к диагональному виду путём перехода к новому базису. Найти этот базис и соответствующую ему матрицу.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Матрица имеет размерность 4×4, то есть является представлением линейного оператора в пространстве R^4. Собственный вектор матрицы будем искать в виде: $\vec{a}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

Составим уравнение для отыскания собственных векторов в матричном виде:

$$Aa=\lambda a <=> Aa=\lambda Ea <=> (A-\lambda E)a=0$$

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ -2 & 3 & -1 & 3\\ 2 & -2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1 & -2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 0 & 1\\ -2 & 3-\lambda & -1 & 3\\ 2 & -2 & 1-\lambda & -2\\ 2 & -2 & 1 & -2-\lambda\end{pmatrix}$$

Перепишем матричное уравнение в виде системы уравнений:

$$\begin{cases}-\lambda x_1+x_2+x_4=0\\ -2x_1+(3-\lambda)x_2-x_3+3x_4=0\\ 2x_1-2x_2+(1-\lambda)x_3-2x_4=0\\ 2x_1-2x_2+x_3+(-2-\lambda)x_4=0\end{cases}$$

Однородная система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель ее главной матрицы равен 0.

Характеристическое уравнение $|A-\lambda E|=0$.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0 & 1\\ -2 & 3-\lambda & -1 & 3\\ 2 & -2 & 1-\lambda & -2\\ 2 & -2 & 1 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$-\lambda\begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & 3\\ -2 & 1-\lambda & -2\\ -2 & 1 & -2-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-2 & -1 & 3\\ 2 & 1-\lambda & -2\\ 2 & 1 & -2-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-2 & 3-\lambda & -1\\ 2 & -2 & 1-\lambda\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\lambda^2-2\lambda^3+\lambda^4-2\lambda+2\lambda^2+2\lambda-2\lambda^2=0$$

$$\lambda^4-2\lambda^3+\lambda^2=0$$

$$\lambda^2(1-\lambda)^2=0$$

$\lambda_1=0, \lambda_2=1$ – собственные значения линейного оператора.

- Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1=0$:

$$(A-\lambda_1 E)x=0 \text{ или } \begin{pmatrix}-\lambda_1 & 1 & 0 & 1\\ -2 & 3-\lambda_1 & -1 & 3\\ 2 & -2 & 1-\lambda_1 & -2\\ 2 & -2 & 1 & -2-\lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ -2 & 3 & -1 & 3\\ 2 & -2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases}x_2+x_4=0\\ -2x_1+3x_2-x_3+3x_4=0\\ 2x_1-2x_2+x_3-2x_4=0\\ 2x_1-2x_2+x_3-2x_4=0\end{cases} => \begin{cases}x_1-1.5x_2+0.5x_3-1.5x_4=0\\ x_2+x_4=0\end{cases} => \begin{cases}x_1+0.5x_3=0\\ x_2+x_4=0\end{cases}$$

Полагая в последнем равенстве $x_3=C_1$ и $x_4=C_2$, получим $x_1=-0.5C_1,\ x_2=-C_2$.

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 0$, имеют вид $\vec{a}_1 = C_1 \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C_1 \in \mathbb{C}/\{0\}$ и $\vec{a}_2 = C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C_2 \in \mathbb{C}/\{0\}$.

- Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2 = 1$:

$(A - \lambda_2 E)x = 0$ или $\begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3-\lambda_2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1-\lambda_2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & -2-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, т.е.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} => \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} => \begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Полагая в последнем равенстве $x_2 = C_3$ и $x_4 = C_4$, получим $x_1 = C_3 + C_4$, $x_3 = C_4$.

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2 = 1$, имеют вид $\vec{a}_1 = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C_3 \in \mathbb{C}/\{0\}$ и $\vec{a}_2 = C_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C_4 \in \mathbb{C}/\{0\}$.

- Для матрицы A найдены собственные векторы $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$ $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, соответствующие собственным значениям $\lambda_1 = 0$, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$, $\lambda_2 = 1$. Поскольку собственные значения не различны попарно, но собственных векторов четыре, то составим матрицу M из собственных векторов:

$$M = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Покажем, что векторы линейно независимы

$$\begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, т.е. собственные векторы образуют искомый базис.

Соответствующая ему диагональная матрица, на диагонали которой расположены собственные значения в соответствии с их кратностью.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание №3

Найти все собственные значения и корневые подпространства линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)(2\lambda^2 - \lambda^3 - \lambda) - (\lambda - \lambda^2) = 0$$

$$-2\lambda^2 + \lambda^3 + \lambda - 2\lambda^3 + \lambda^4 + \lambda^2 - \lambda + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^4 - \lambda^3 = 0$$

$$\lambda^3(1 - \lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ – собственные значения линейного оператора.

- Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 0$:

$$(A - \lambda_1 E)x = 0 \text{ или } \begin{pmatrix} -1-\lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1-\lambda_1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda_1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 - 0.5x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 - 0.5x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - 0.5x_4 = 0 \end{cases}$$

Полагая в последнем равенстве $x_3 = C_1$ и $x_4 = C_2$, получим $x_1 = C_1 + 0.5C_2$, $x_2 = C_1 + 0.5C_2$,.

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 0$, имеют вид $\vec{a}_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C_1 \in \mathbb{C}/\{0\}$ и $\vec{a}_2 = C_2 \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C_2 \in \mathbb{C}/\{0\}$.

- Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2 = 1$:

$$(A - \lambda_2 E)x = 0 \text{ или } \begin{pmatrix} -1-\lambda_2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1-\lambda_2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda_2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 0.5x_2 = 0 \\ x_2 - 0.8x_3 - 0.4x_4 = 0 \\ -1.5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 0.5x_2 = 0 \\ x_2 - 0.8x_3 - 0.4x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \\ 0.4x_3 - 0.8x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Полагая в последнем равенстве $x_4 = C_3$, получим $x_1 = C_3$, $x_2 = 2C_3, x_3 = 2C_3$.

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2 = 1$, имеют вид $\vec{a} = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, C_3 \in \mathbb{C}/\{0\}$.

Получаем два корневых подпространства: V^0 и V^1. Найдем их.

- $\lambda = 0$:

$$(A-\lambda E)^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем базис $V^0 = Ker\ A^2$:

$-2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$

Полагая в последнем равенстве $x_1 = \text{C}_1, x_3 = \text{C}_2, x_4 = \text{C}_3$, получим $x_2 = \text{C}_2 + 0.5\text{C}_3$.

ФСР: $\vec{v}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\vec{v}_3 = (0, 0.5, 0, 1)$. Тогда $V^0 =< \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 >$

- $\lambda = 1$:

$$A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем базис $V^1 = Ker\ (A - \lambda E)$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & -2 & 1 \\ 0 & 1.5 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.8 & -0.4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} =>$$
$$=> \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Полагая в последнем равенстве $x_4 = \text{C}_4$, получим $x_1 = \text{C}_3$, $x_2 = 2\text{C}_3, x_3 = 2\text{C}_3$.

ФСР: $\vec{v}_4 = (1, 2, 2, 1)$. Тогда $V^1 =< \vec{v}_4 >$

Задание №4

а) Найти жорданову нормальную форму матрицы четвёртого порядка.

б) Найти базис, в котором матрица заданного линейного оператора имеет жорданову форму.

в) Найти матрицу перехода из заданного базиса в жорданов базис.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения.

Характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -\lambda & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(-\lambda^2 - \lambda^3) + \lambda^2 = 0$$

$$-\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda^3 + \lambda^4 + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^4 = 0$$

$\lambda = 0$ – собственное значение линейного оператора, алгебраическая кратность $\mu = 4$.

Определим максимальную длину жордановых цепочек. Для этого составим матрицу $(A - \lambda E)$ и будем возводить ее последовательно в степени m = 1, 2, ... до тех пор, пока не получится равенство $rk(A - \lambda E)^m = n - \mu$, где n – порядок матрицы, а μ – алгебраическая кратность собственного значения линейного оператора, т.е. пока не получится равенство $rk(A)^m = 4 - 4 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rk\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} - 0E\right)^1\right) = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rk\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} - 0E\right)^2\right) = 0$$

Следовательно, жордановы цепочки имеют максимальную длину $k = 2$.

Матрица J в Жордановой нормальной форме:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем Жордановы цепочки.

Найдем решения $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} - 0E\right)^2 * X = 0$

Базис для системы решений: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

- $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} - 0I\right)^{(2-1)} * X \neq 0$ => обобщенный собственный вектор

Жорданова цепь для этого вектора:

1) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2) $v_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} - 0E\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} - 0E\right)^{(2-1)} * X \neq 0 \Rightarrow$$ обобщенный собственный вектор

Жорданова цепь для этого вектора:

1) $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $v_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} - 0E\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Жордановы цепочки обобщенных собственных векторов $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ составляют линейно-независимый набор векторов для собственного значения.

Покажем, что векторы линейно независимы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, т.е. векторы образуют искомый базис.

Составим из линейно-независимых векторов матрицу перехода M:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задание №5

а) Найти жорданову нормальную форму матрицы шестого порядка.

б) Найти базис, в котором матрица заданного линейного оператора имеет жорданову форму.

в) Найти матрицу перехода из заданного базиса в жорданов базис.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения.

Характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^6 - 5\lambda^5 + 13\lambda^4 - 22\lambda^3 + 23\lambda^2 - 13\lambda + 3 = 0$

$(\lambda - 1)^4(\lambda^2 - \lambda + 3) = 0$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \frac{-i\sqrt{11}+1}{2}, \lambda_3 = \frac{i\sqrt{11}+1}{2}$– собственные значения линейного оператора, алгебраическая кратность которых $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 1, \mu_3 = 1$

Определим максимальную длину жордановых цепочек. Для этого составим матрицу $(A - \lambda_i E)$ и будем возводить ее последовательно в степени m = 1, 2, ... до тех пор, пока не получится равенство $rk(A - \lambda_i E)^m = n - \mu_i$, где n – порядок матрицы, а μ_i – алгебраическая кратность собственного значения линейного оператора, т.е. пока не получится равенство $rk(A - \lambda_1 E)^m = 6 - 4 = 2,\ rk(A - \lambda_2 E)^m = 6 - 5 = 1$ и $rk(A - \lambda_3 E)^m = 6 - 5 = 1$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - E =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} =>$$

$$=> \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1.5 & -1.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 4/3 & 1 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 1.5 & 2.5 & 1.5 & -1 & 1.5 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & -2 & 2.5 & -0.5 & 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} =>$$

$$=> \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1.5 & -1.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 4/3 & 1 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -31/12 & -0.75 & -5/12 & -0.75 \end{pmatrix} =>$$

$$=> \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1.5 & -1.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 4/3 & 1 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rk\left(\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - E\right)^{1}\right) = 4$$

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - E\right)^2$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 6 & -8 & -2 & -8 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 8 & 2 & 8 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -5 & -5 & -6 & -2 \end{pmatrix} =>$$

$$=> \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -0.5 & -3 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rk\left(\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - E\right)^2\right) = 2$$

$$rk\left(\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{-i\sqrt{11}+1}{2}E\right)^1\right) = 5$$

$$rk\left(\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{i\sqrt{11}+1}{2}E\right)^1\right) = 5$$

Следовательно, жордановы цепочки имеют максимальную длину $k_1 = k_2 = 2$, $k_3 = 1$, $k_4 = 1$.

Матрица J в Жордановой нормальной форме:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-i\sqrt{11}+1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i\sqrt{11}+1}{2} \end{pmatrix}$$

Найдем Жордановы цепочки.

Найдем решения $\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - E \right)^2 * X = 0$

Базис для системы решений: $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

- $x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - E \right)^{(2-1)} * X \neq 0$ => обобщенный собственный вектор

Жорданова цепь для этого вектора:

1) $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $v_2 = \left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - E \right) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 3 \\ -10 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

- $x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - E \right)^{(2-1)} * X \neq 0$ => обобщенный собственный вектор

Жорданова цепь для этого вектора:

1) $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $v_2 = \left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - E \right) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.5 \\ 1.5 \\ -4.5 \\ 1.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$

Найдем решения $\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{-i\sqrt{11}+1}{2} E \right)^{1} * X = 0$

Базис для системы решений: $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{-i\sqrt{11}+1}{6} \\ \frac{i\sqrt{11}-1}{3} \\ 0 \\ \frac{-i\sqrt{11}+1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

- $x_1 = \begin{pmatrix} \frac{-i\sqrt{11}+1}{6} \\ \frac{i\sqrt{11}-1}{3} \\ 0 \\ \frac{-i\sqrt{11}+1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{-i\sqrt{11}+1}{2}E\right)^{(1-1)} * X \neq 0 \qquad =>$$

обобщенный собственный вектор

Жорданова цепь для этого вектора:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{-i\sqrt{11}+1}{6} \\ \frac{i\sqrt{11}-1}{3} \\ 0 \\ \frac{-i\sqrt{11}+1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Найдем решения $\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{i\sqrt{11}+1}{2}E\right)^{1} * X = 0$

Базис для системы решений: $\left\{\begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{11}+1}{6} \\ \frac{-i\sqrt{11}-1}{3} \\ 0 \\ \frac{i\sqrt{11}+1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

- $x_1 = \begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{11}+1}{6} \\ \frac{-i\sqrt{11}-1}{3} \\ 0 \\ \frac{i\sqrt{11}+1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{i\sqrt{11}+1}{2}E\right)^{(1-1)} * X \neq 0$$ => обобщенный собственный вектор

Жорданова цепь для этого вектора:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{11}+1}{6} \\ \frac{-i\sqrt{11}-1}{3} \\ 0 \\ \frac{i\sqrt{11}+1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Жордановы цепочки обобщенных собственных векторов $\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 3 \\ -10 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4.5 \\ 1.5 \\ -4.5 \\ 1.5 \\ -1.5 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} \frac{-i\sqrt{11}+1}{6} \\ \frac{i\sqrt{11}-1}{3} \\ 0 \\ \frac{-i\sqrt{11}+1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{11}+1}{6} \\ \frac{-i\sqrt{11}-1}{3} \\ 0 \\ \frac{i\sqrt{11}+1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ составляют линейно-независимый набор векторов для собственного значения, т.е. векторы образуют искомый базис

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 & \frac{-i\sqrt{11}+1}{6} & \frac{i\sqrt{11}+1}{6} \\ 9 & 2 & 4.5 & 0.5 & \frac{i\sqrt{11}-1}{3} & \frac{-i\sqrt{11}-1}{3} \\ 3 & 1 & 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & -4.5 & 1 & \frac{-i\sqrt{11}+1}{3} & \frac{i\sqrt{11}+1}{3} \\ 3 & 0 & 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1.5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Составим из линейно-независимый набора векторов матрицу перехода M:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 & \frac{-i\sqrt{11}+1}{6} & \frac{i\sqrt{11}+1}{6} \\ 9 & 2 & 4.5 & 0.5 & \frac{i\sqrt{11}-1}{3} & \frac{-i\sqrt{11}-1}{3} \\ 3 & 1 & 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & -4.5 & 1 & \frac{-i\sqrt{11}+1}{3} & \frac{i\sqrt{11}+1}{3} \\ 3 & 0 & 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1.5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание №6

Найти все инвариантные подпространства размерностей один и два для линейного оператора, действующего в линейном комплексном трёхмерном пространстве и заданного в некотором базисе матрицей третьего порядка:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

Матрица имеет размерность 3×3, то есть является представлением линейного оператора в пространстве R^3. Собственный вектор матрицы будем искать в виде: $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Составим уравнение для отыскания собственных векторов в матричном виде:

$$Aa = \lambda a <=> Aa = \lambda E a <=> (A - \lambda E)a = 0$$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Перепишем матричное уравнение в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + (1-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

Однородная система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель ее главной матрицы равен 0.

Характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(-\lambda+3)\cdot(-\lambda+1)\cdot(-\lambda+1)+1\cdot1\cdot1+(-1)\cdot(-1)\cdot1-1\cdot(-\lambda+1)\cdot(-1)-1\cdot1\cdot(-\lambda+3)-(-\lambda+1)\cdot(-1)\cdot1=-\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4\ =0$

$(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$

$\lambda_1=1, \lambda_2=2$ – собственные значения линейного оператора.

- Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1=1$:

$$(A-\ \lambda_1 E)x=0 \text{ или } \begin{pmatrix} 3-\lambda_1 & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda_1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0 \\ -x_1+x_3=0 \\ x_1+x_2=0 \end{cases} => \begin{cases} x_1-x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$$

Полагая в последнем равенстве $x_3=\mathrm{C}_1$, получим $x_1=\mathrm{C}_1, x_2=-\mathrm{C}_1$.

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1=1$, имеют вид $\vec{a}=\mathrm{C}_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{C}_1\ \in \mathbb{C}/\{0\}$.

- Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2=2$:

$$(A-\ \lambda_2 E)x=0 \text{ или } \begin{pmatrix} 3-\lambda_2 & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0 \\ -x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2-x_3=0 \end{cases} => \{x_1+x_2-x_3=0$$

Полагая в последнем равенстве $x_2=\mathrm{C}_2$ и $x_3=\mathrm{C}_3$, получим $x_1=-\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_3$.

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2=2$, имеют вид $\vec{a}_1=\mathrm{C}_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathrm{C}_2\ \in \mathbb{C}/\{0\}$ и $\vec{a}_2=\mathrm{C}_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{C}_3\ \in \mathbb{C}/\{0\}$.

Найдем все инвариантные подпространства размерности 1:

1. Так как у оператора есть собственный вектор (1,-1,1) при собственном значении 1, то он является базисом инвариантного подпространства, порожденного этим собственным вектором.
2. Также существует инвариантное подпространство, порожденное любым собственным вектором, отвечающим собственному значению 2. Мы знаем, что у оператора есть два линейно независимых собственных вектора (-1,1,0) и (1,0,1) при

собственном значении 2, поэтому каждый из них порождает инвариантное подпространство размерности 1.

Таким образом, мы нашли три инвариантных подпространства размерности 1: первое порождено вектором (1,-1,1), второе - вектором (-1,1,0), третье - вектором (1,0,1).

Инвариантные подпространства размерности два могут быть построены как линейные комбинации пар векторов из этого базиса: то есть подпространство, порожденное векторами (-1,1,0) и (1,0,1).