Расчётно-графическая работа по разделу «Евклидово пространство»

Задача №1

Найти норму векторов **a** и **b** и угол между ними в евклидовом пространстве

1. **a** = (0, 2, −2, −1), **b** = (1, 1, −1, 1).
2. **a** = (2, 0, 2, −1), **b** = (3, 1, 1, −1).
3. **a** = (2, 1, −2, 1), **b** = (3, 3, −1, −1).
4. **a** = (−2, 3, 0, 3), **b** = (−1, 3, −1, 2, 4).
5. **a** = (0, 2, 1, 2), **b** = (1, 3, 1, 1).
6. **a** = (−2, −1, 1, 3), **b** = (−1, 2, 3, 4).
7. **a** = (−2, 3, 0, 3), **b** = (−1, 3, −1, 2, 4).
8. **a** = (−2, −1, 0, −2), **b** = (1, 1, −1, 3).
9. **a** = (−2, −1, 2, 0), **b** = (1, 3, −1, −1, −1).
10. **a** = (−1, 2, −2, −2), **b** = (3, 0, 1, 4).

Задача №2

Найти норму элементов **f** и **g** и угол между ними в евклидовом пространстве многочленов с вещественными коэффициентами и скалярным произведением

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx$$

1. $f(x) = -2x+1, g(x) = x$
2. $f(x) = 1, g(x) = -2x+2$
3. $f(x) = -1, g(x) = -x$
4. $f(x) = -2x+4, g(x) = 4x-3$
5. $f(x) = -x, g(x) = x-1$
6. $f(x) = -1, g(x) = 3x-1$
7. $f(x) = 3x-4, g(x) = x+1$
8. $f(x) = 3x-2, g(x) = -x+1$
9. $f(x) = 2x-1, g(x) = 3x-2$
10. $f(x) = -x, g(x) = 1$

Задача №3

Проверить, что система векторов ортогональна в E^4, дополнить её до ортогонального базиса (дополнение не единственно)

1. $a_1 = (2,-2,1,1), a_2 = (2,3,1,1)$
2. $a_1 = (2,1,1,3), a_2 = (-4,-2,1,3)$
3. $a_1 = (3,-5,1,0), a_2 = (3,2,1,2)$

4. $a_1 = (-2,2,1,1), a_2 = (0,1,-2,0)$
5. $a_1 = (3,1,1,1), a_2 = (1,-3,0,0)$
6. $a_1 = (-1,-1,1,1), a_2 = (1,1,1,1)$
7. $a_1 = (1,-1,-1,-1), a_2 = (3,1,1,1)$
8. $a_1 = (1,1,1,1) a_2 = (1,-2,1,0)$
9. $a_1 = (-1,1,0,0), a_2 = (1,1,3,1)$
10. $a_1 = (1,-1,0,1), a_2 = (1,2,3,1)$

Задача №4

С помощью процесса ортогонализации построить ортонормированный базис линейной оболочки, порождённой системой векторов
1. $a_1 = (0,0,-2,-1), a_2 = (0,1,2,1), a_3 = (0,1,-2,-1), a_4 = (1,-2,0,-5)$
2. $a_1 = (2,3,-1,1), a_2 = (3,7,-1,2), a_3 = (-4,-1,3,-1), a_4 = (1,4,0,1)$
3. $a_1 = (-2,1,1,3), a_2 = (-3,3,3,6), a_3 = (-7,3,1,-1), a_4 = (-5,5,3,-1)$
4. $a_1 = (-1,1,-2,3), a_2 = (1,4,-3,7), a_3 = (7,3,4,-1), a_4 = (2,3,-1,4)$
5. $a_1 = (2,1,-2,1), a_2 = (-3,-2,4,-4), a_3 = (1,0,5,-2), a_4 = (3,2,1,4)$
6. $a_1 = (0,3,1,3), a_2 = (-2,6,-1,7), a_3 = (-4,-3,-7,-1), a_4 = (-2,3,-2,4)$
7. $a_1 = (-2,2,1,2), a_2 = (5,-4,-2,-3), a_3 = (2,-4,-1,0), a_4 = (-4,0,1,2)$
8. $a_1 = (0,3,-1,-2), a_2 = (0,-5,5,4), a_3 = (1,-5,5,-3), a_4 = (1,-1,-3,-7)$
9. $a_1 = (-2,-1,3,3), a_2 = (-1,3,-6,-9), a_3 = (-7,0,3,0), a_4 = (3,1,3,7)$
10. $a_1 = (-2,2,0,-1), a_2 = (-4,5,1,0), a_3 = (2,0,2,5), a_4 = (-2,3,1,1)$

Задача №5

Найти базис (находится неоднозначно) ортогонального дополнения подпространства, порождённого системой векторов
1. $a_1 = (-2,-1,-1,-1), a_2 = (3,2,4,1), a_3 = (5,3,5,2)$
2. $a_1 = (2,3,2,4), a_2 = (-1,0,3,-1), a_3 = (0,1,1,4)$
3. $a_1 = (0,-2,2,-2), a_2 = (1,0,1,1), a_3 = (1,-2,3,-1)$
4. $a_1 = (-2,-1,3,2), a_2 = (-1,-1,4,1), a_3 = (1,-1,6,-1)$
5. $a_1 = (4,3,4,0), a_2 = (-1,2,1,-1), a_3 = (0,0,-2,1)$
6. $a_1 = (2,2,-1,0), a_2 = (1,-1,-2,-1), a_3 = (8,4,-7,-2)$
7. $a_1 = (3,2,2,2), a_2 = (2,1,0,2), a_3 = (5,4,6,2)$
8. $a_1 = (3,0,4,3), a_2 = (0,1,-1,1), a_3 = (3,1,3,-1)$
9. $a_1 = (1,1,0,3), a_2 = (4,-2,4,4), a_3 = (-3,3,-4,-1)$
10. $a_1 = (4,2,-1,1), a_2 = (1,0,-2,0), a_3 = (2,2,3,1)$

Задача №6

Найти: а) проекцию вектора **x** на подпространство, являющееся линейной оболочкой заданных векторов a_1, a_2, a_3, и его ортогональную составляющую;
б) угол между вектором **x** и подпространством, являющимся линейной оболочкой заданных векторов a_1, a_2, a_3;
в) расстояние от вектора **x** до подпространства, являющегося линейной оболочкой заданных векторов a_1, a_2, a_3

1. $a_1 = (2,-2,3,1), a_2 = (0,2,-1,0), a_3 = (2,-4,4,1), x = (3,-4,4,-1)$
2. $a_1 = (1,1,-1,1), a_2 = (0,2,-1,1), a_3 = (1,1,-1,11), x = (3,-1,0,-2)$
3. $a_1 = (0,-1,2,-1), a_2 = (-2,2,-1,1), a_3 = (2,-3,3,-2), x = (5,-1,0,-3)$
4. $a_1 = (1,-2,0,-2), a_2 = (0,1,-1,-1), a_3 = (-1,5,-3,-1), x = (5,-3,-1,-8)$
5. $a_1 = (-1,0,1,-1), a_2 = (2,0,-1,0), a_3 = (-4,0,3,-2), x = (-3,0,4,1)$
6. $a_1 = (0,-1,0,-2), a_2 = (-1,0,1,-1), a_3 = (2,-2,-2,-2), x = (0,-4,-1,-2)$
7. $a_1 = (-2,0,-1,3), a_2 = (2.-1,0,-1), a_3 = (-2,-2,-3,7), x = (-3,2,-4,6)$
8. $a_1 = (-2,2,-1,1), a_2 = (0,1,0,1), a_3 = (-4,5,-2,3), x = (4,-7,1,-3)$
9. $a_1 = (-2/-1,-1,2), a_2 = (0,0,1,1), a_3 = (-4,-2,-4,2), x = (4,5,2,-2)$
10. $a_1 = (1,0,2,0), a_2 = (1,0,-2,-2), a_3 = (0,0,-4,-2), x = (-4,0,1,0)$

Задача №7

Используя теорию квадратичных форм, привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка; классифицировать поверхность; построить график поверхности в исходной системе координат, отметив систему координат, в которой уравнение поверхности имеет канонический вид

1. $-3x^2 + 6xy + 12xz - y^2 - 24yz + 9z^2 + 2x - 4y + 6z - 1 = 0$
2. $-x^2 - 4xy - 12xz - 2y^2 - 16yz + 17z^2 + 2x - 4y + 6z - 1 = 0$
3. $-4x^2 + 4xy + 4xz - y^2 - 2yz - z^2 + 2x - 4y + 6z - 1 = 0$
4. $3x^2 - 2xy + 4xz + 2y^2 - 2yz + 2z^2 + 2x - 4y + 6z - 1 = 0$
5. $-3x^2 + 2xy + 4xz - y^2 - 2yz - 3z^2 + 2x - 4y + 6z - 1 = 0$
6. $-2xy + 4xz - 4yz + 3z^2 + 2x - 4y + 6z - 1 = 0$
7. $-4xy - 4xz + 4yz + 2x - 4y + 6z - 1 = 0$
8. $2x^2 - 2xy - 2xz + 2y^2 - 2yz + 2z^2 + 2x - 4y + 6z - 1 = 0$
9. $x^2 + 2xy + 6xz + 28y^2 - 12yz + 9z^2 + 2x - 4y + 6z - 1 = 0$
10. $x^2 + 6xy - 2xz + 5y^2 - 18yz - 10z^2 + 2x - 4y + 6z - 1 = 0$

Задача №8

В пространстве многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше третьей, определённых на отрезке $[-1,1]$, заданы многочлены Лежандра, определяемые по формуле Родрига:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, n = 0,1,2,3.$$

8.1 Доказать, что многочлены Лежандра ортогональны относительно веса $\rho(x) = 1$ на отрезке $[-1,1]$.

8.2 Вычислить норму указанных многочленов Лежандра.

8.3 Построить ортонормированную систему многочленов Лежандра, используя алгоритм ортогонализации Грама – Шмидта системы линейно независимых многочленов $\varphi_k(x) = x^k, k = 0,1,2,3$(предварительно убедившись в их линейной независимости).

8.4 Доказать полноту системы, состоящей из многочленов Лежандра, в пространстве многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше третьей, определённых на отрезке $[-1,1]$, с помощью равенства Парсеваля.

8.5 Разложить многочлен f(x) по системе ортонормированных многочленов Лежандра.

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$	2. $f(x) = x^3 + 3x - 1$
3. $f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 2$	4. $f(x) = x^3 + x^2 + 4x - 3$
5. $f(x) = 2x^3 + 3x + 1$	6. $f(x) = x^3 + x^2 + 1$
7. $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$	8. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$
9. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$	10. $f(x) = x^3 + 3x - 1$

Задача №9

В пространстве многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше третьей, определённых на отрезке $[-1,1]$, заданы многочлены Чебышева, определяемые по формуле:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), n = 0,1,2,3.$$

9.1 Убедиться, что функции $T_n(x)$ действительно являются многочленами степени n и удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), n = 2,3...$$

9.2 Доказать, что многочлены Чебышева образуют ортогональную систему относительно веса $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на отрезке $[-1,1]$.

9.3 Вычислить норму указанных многочленов Чебышева.

9.4 Построить ортонормированную систему многочленов Чебышева.

9.5 Разложить многочлен f(x) по системе ортонормированных многочленов Чебышева.

1. $f(x)=x^3-2x^2+x+1$ 2. $f(x)=x^3+3x-1$
3. $f(x)=2x^3-x^2+x+2$ 4. $f(x)=x^3+x^2+4x-3$
5. $f(x)=2x^3+3x+1$ 6. $f(x)=x^3+x^2+1$
7. $f(x)=x^3-3x^2+x$ 8. $f(x)=x^3+3x^2-2x+1$
9. $f(x)=x^3-2x^2+x+1$ 10. $f(x)=x^3+3x-1$

Задача №10

10.1 Доказать, что тригонометрическая система функций $\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cos 3x,\sin 3x,\ldots,\cos nx,\sin nx\}$ ортогональна на отрезке $[-\pi,\pi]$ и является базисом пространства, образованного тригонометрическими многочленами

$$P_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx.$$

10.2 Нормировать эту систему.

10.3 Найти наилучшее приближение функции f(x) на отрезке $[-\pi,\pi]$ тригонометрическим многочленом Фурье степени, не выше n, то есть,

$$P_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx,$$

где a_k, b_k- вещественные коэффициенты.

10.4 Построить графики функции f(x) и полученного приближения (рассмотреть многочлены Фурье нескольких порядков). Проанализировать поведение построенного многочлена при росте его порядка.

1. $f(x)=x^2$ 2. $f(x)=x$
3. $f(x)=2x$ 4. $f(x)=-3x$
5. $f(x)=x+1$ 6. $f(x)=4x$
7. $f(x)=-x+1$ 8. $f(x)=signx$
9. $f(x)=0{,}5x$ 10. $f(x)=-signx$

Шкала оценивания и критерии оценки:

К расчетно-графической работе предъявляются следующие требования:

1. **к выполнению заданий** – в работе должны быть:
    1. представлены в логической последовательности основные этапы исследования или решения,
    2. указаны используемые теоретические положения и методы,
    3. получены точные численные результаты и построены требуемые графические изображения;
2. **к оформлению отчета** – отчет должен быть представлен в печатном, рукописном или (предпочтительно) электронном виде в форматах doc, docx, pdf и содержать:
    1. титульный лист (название работы, ФИО исполнителей, номера групп, ФИО проверяющего);
    2. условия всех заданий;
    3. решение (исследование), его теоретическое обоснование, численные результаты;
    4. графики или рисунки, иллюстрирующие решение каждой задачи (выполненные в графическом или математическом редакторе);
    5. выводы.
3. **к докладу** – для доклада отводится от семи до десяти минут. Во время доклада оценивается качество устного изложения материала и ответы на вопросы по теме работы. Доклад должен содержать:

    3.1 постановку задачи;

    3.2 изложение основных этапов исследования или решения;

    3.3 ссылки на теоретический материал, используемый при исследовании и решении;

    3.4 результаты исследования или решения и их оценку;

    3.5 выводы.

Наименование критерия	**Минимальное количество баллов**	**Максимальное количество баллов**
I. КАЧЕСТВО ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ		
Последовательность, полнота и оптимальность решения, обоснованное и корректное применение методов решения.	0	2
II. КАЧЕСТВО ОТЧЕТА		
Полнота и качество оформления отчета	0	1
III. КАЧЕСТВО ДОКЛАДА		
Содержательность и качество устного изложения материала и ответа на дополнительные вопросы	0	2
ИТОГОВАЯ ОЦЕНКА ЗА ИТР	**0**	**5**

Максимальный балл 5 выставляется, если обучающийся правильно выполнил все задания, представляет верные и обоснованные ответы на вопросы по теме работы, качество оформления отчета – высокое. Минимальный балл 0 выставляется, если задание выполнено не полностью, при выполнении задания и ответах на вопросы обучающийся допускает существенные ошибки, неудовлетворительное качество оформления отчета.

Основанием для снижения количества баллов являются:

1) ошибки в вычислениях, аналитическом решении, графических построениях;

2) затруднения и неточности при ответах на вопросы теоретического и прикладного характера;

3) не оптимальность решения, неумение обосновать применение методов, бездоказательность выводов;

4) низкое качество оформления отчета.