Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Отчёт
По расчётно-графической работе №2
Вариант: 2

Выполнили:
Касьяненко В.М.
Кремпольская Е.А.
Шишминцев Д.В.
Кравцов К.Д.

Преподаватель:
Труфанова А.А.

г. Санкт-Петербург

2023 г.

1. Зная, что поток F векторного поля A по определению есть интеграл по поверхности S от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к поверхности

$$F = \iint\limits_S \vec{a}\vec{n}ds$$

Рассчитать поток векторного поля A через замкнутую поверхность S двумя способами

$$A = y^2\vec{\imath} + z^2\vec{\jmath} + x^2\vec{k},$$
$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Решение:

1) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$$n = \pm\frac{(-z'_x i - z'_y j + k)}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}$$

$$z'_x = \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2}\right)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}(-x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$z'_y = \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2}\right)'_y = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^2+y^2+1-x^2-y^2}{1-x^2-y^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1-x^2-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$n = \pm\frac{\left(-\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}i - \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}j + k\right)}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}} = \pm\left(xi + yj + \sqrt{1 - x^2 - y^2}k\right)$$

$$an = \pm(y^2i + z^2j + x^2k)(xi + yj + zk) = \pm(xy^2 + yz^2 + zx^2)$$

Для положительной z:

$$F_1 = \iint_S \ andS = \iint_{D_{xy}}\left(xy^2 + y(1 - x^2 - y^2) + \sqrt{1 - x^2 - y^2}x^2\right)\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}dxdy =$$

$$= \iint_{D_{xy}}\left(xy^2 + y(1 - x^2 - y^2) + \sqrt{1 - x^2 - y^2}x^2\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\ dxdy =$$

$$= \iint_{D_{xy}}\left(\frac{xy^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + y\sqrt{1 - x^2 - y^2} + x^2\right)dxdy = \iint_{D_{xy}}\frac{\left(xy^2+y(1-x^2-y^2)+x^2\sqrt{1-x^2-y^2}\right)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r^3cos\varphi\sin^2\varphi + rsin\varphi - r^3\cos^2\varphi\sin\varphi - r^3\sin^3\varphi + r^2\cos^2\varphi\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}}rdr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r^3cos\varphi\sin^2\varphi + rsin\varphi - r^3\sin\varphi + r^2\cos^2\varphi\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}}rdr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r^3cos\varphi\sin^2\varphi + rsin\varphi - r^3\sin\varphi + r^2\cos^2\varphi\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1-r^2}}rdr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi\left(\sin^2\varphi\, cos\varphi\int_0^1\frac{r^4}{\sqrt{1-r^2}}dr + sin\varphi\int_0^1\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}dr - \sin\varphi\int_0^1\frac{r^4}{\sqrt{1-r^2}}dr + \cos^2\varphi\int_0^1 r^3dr\right)$$

$r = sinu, dr = cosudu$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\left(sin^2\varphi\, cos\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 u\, du + sin\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 u\, du - \sin\varphi\left(-\left(\frac{cosusin^3u}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 u\, du\right) + \frac{1}{4}cos^2\varphi\right) =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\left(sin^2\varphi\, cos\varphi\left(0 + \frac{3}{4} * \frac{\pi}{4}\right) + \frac{sin\varphi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - cos\,(2u))du - \frac{3\pi}{16}sin\,\varphi + \frac{1}{4}cos^2\varphi\right) =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi\left(\frac{3\pi}{16}\sin^2\varphi\, cos\varphi + \frac{sin\varphi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \frac{3\pi}{16}sin\,\varphi + \frac{1}{4}\cos^2\varphi\right) =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{3\pi}{16}\sin^2\varphi\, cos\varphi + \frac{\pi}{4}sin\varphi - \frac{3\pi}{16}sin\,\varphi + \frac{1}{4}\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{3\pi}{16}\int_0^{2\pi}(\sin^2\varphi\, cos\varphi)\,d\varphi + \frac{\pi}{4}\int_0^{2\pi} sin\varphi\, d\varphi - \frac{3\pi}{16}\int_0^{2\pi} sin\,\varphi\, d\varphi + \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{3\pi}{16}\frac{\sin^3\varphi}{3}\Big|_0^{2\pi} + \frac{\pi}{4}(-cos\varphi)|_0^{2\pi} - 0 + \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1+\cos(2\varphi))\,d\varphi = 0+0+0+\frac{1}{8}\left(\varphi + \frac{\sin(2\varphi)}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}$$

Для отрицательной z:

$$F_2 = \iint_S a(-n)dS = -\iint_{D_{xy}}\left(xy^2 + y(1-x^2-y^2) + \sqrt{1-x^2-y^2}x^2\right)\sqrt{(z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2 + 1}dxdy = -\frac{\pi}{4}$$

$$F = F_1 + F_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$$

2) $diva = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 0+0+0 = 0$

$$F = \iiint_V diva\,dxdydz = \iiint_V 0\,dxdydz = 0$$

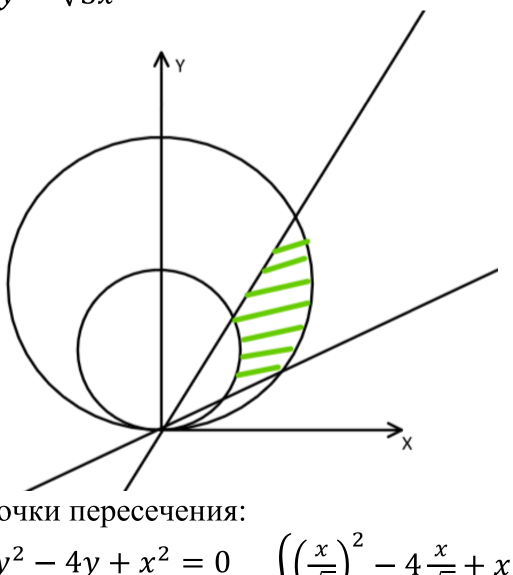
2. Вычислить площадь области D, ограниченной функциями

$$D: \begin{cases} y^2 - 4y + x^2 = 0 \\ y^2 - 10y + x^2 = 0 \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}},\ \ y = \sqrt{3}x \end{cases}$$

Решение:

$$S = \iint_D dxdy$$

$$\begin{cases} y = 2 + \sqrt{4-x^2} \\ y = 2 - \sqrt{4-x^2} \\ y = 5 + \sqrt{25-x^2} \\ y = 5 - \sqrt{25-x^2} \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} \\ y = \sqrt{3}x \end{cases}$$



Точки пересечения:

$$\begin{cases} y^2 - 4y + x^2 = 0 \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 - 4\frac{x}{\sqrt{3}} + x^2 = 0 \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} = \begin{cases} 4x^2 - 4\sqrt{3}x = 0 \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} => \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} y^2 - 4y + x^2 = 0 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} = \begin{cases} \left(\sqrt{3}x\right)^2 - 4\sqrt{3}x + x^2 = 0 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} = \begin{cases} 4x^2 - 4\sqrt{3}x = 0 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} => \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} y^2-10y+x^2=0 \\ y=\frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2-10\frac{x}{\sqrt{3}}+x^2=0 \\ y=\frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} = \begin{cases} 4x^2-10\sqrt{3}x=0 \\ y=\frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} => \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{5}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} y^2-10y+x^2=0 \\ y=\sqrt{3}x \end{cases} = \begin{cases} \left(\sqrt{3}x\right)^2-10\sqrt{3}x+x^2=0 \\ y=\sqrt{3}x \end{cases} = \begin{cases} 4x^2-10\sqrt{3}x=0 \\ y=\sqrt{3}x \end{cases} => \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{15}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Для D_1:

$\sqrt{3} \le x \le 2$

$\frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le 2-\sqrt{4-x^2}$

Для D_2:

$\sqrt{3} \le x \le 2$

$2+\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{3}x$

Для D_3:

$2 \le x \le \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$\frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x$

Для D_4:

$\frac{5\sqrt{3}}{2} \le x \le 5$

$5-\sqrt{25-x^2} \le y \le 5+\sqrt{25-x^2}$

$$S_{D_1} = \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{\frac{x}{\sqrt{3}}}^{2-\sqrt{4-x^2}} dy = \int_{\sqrt{3}}^{2}\left(2-\sqrt{4-x^2}-\frac{x}{\sqrt{3}}\right)dx$$

$x = 2sinu, dx = 2cosudu$

$$(2x)\Big|_{\sqrt{3}}^{2} - 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 u)du - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{\sqrt{3}}^{2} = 4-2\sqrt{3}-2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2u))du - \frac{1}{2\sqrt{3}} =$$

$$= 4-2\sqrt{3}-\frac{1}{2\sqrt{3}}-2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 4-2\sqrt{3}+\frac{-\pi+\sqrt{3}}{3}$$

$$S_{D_2} = \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{2+\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{3}x} dy = \int_{\sqrt{3}}^{2}\left(\sqrt{3}x-\left(2+\sqrt{4-x^2}\right)\right)dx = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(4-2\sqrt{3}+2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right) =$$

$$-\frac{\pi}{3}+3\sqrt{3}-4$$

$$S_{D_3} = \int_{2}^{\frac{5\sqrt{3}}{2}} dx \int_{\frac{x}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}x} dy = \int_{2}^{\frac{5\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}x-\frac{x}{\sqrt{3}}\right)dx = \left(\frac{\sqrt{3}x^2}{2}-\frac{x^2}{2\sqrt{3}}\right)\Big|_{2}^{\frac{5\sqrt{3}}{2}} = \frac{59}{4\sqrt{3}}$$

$$S_{D_4} = \int_{\frac{5\sqrt{3}}{2}}^{5} dx \int_{5-\sqrt{25-x^2}}^{5+\sqrt{25-x^2}} dy = \int_{\frac{5\sqrt{3}}{2}}^{5}\left(5+\sqrt{25-x^2}-\left(5-\sqrt{25-x^2}\right)\right)dx =$$

$$= 2\int_{\frac{5\sqrt{3}}{2}}^{5}\left(\sqrt{25-x^2}\right)dx = 2*\frac{25}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2u))du = \frac{25\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)}{12}$$

$$S = S_{D_1}+S_{D_2}+S_{D_3}+S_{D_4} = 4-2\sqrt{3}+\frac{-\pi+\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{3}+3\sqrt{3}-4+\frac{25\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)}{12}+\frac{59}{4\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{71\sqrt{3}-4\pi+4\sqrt{3}-4\pi+50\pi-75\sqrt{3}}{12} = \frac{42\pi}{12} = \frac{7\pi}{2} \approx 11\text{ед}^2$$

3. Вычислить объем тела T, ограниченного поверхностями

$$T:\begin{cases} x^2+y^2+4x=0 \\ z=8-y^2 \\ z=0 \end{cases}$$

Решение:

$$V=\iiint_T \ dxdydz=\int_{-4}^{0}dx\int_{-\sqrt{-x^2-4x}}^{\sqrt{-x^2-4x}}dy\int_0^{8-y^2}dz=\int_{-4}^{0}dx\int_{-\sqrt{-x^2-4x}}^{\sqrt{-x^2-4x}}(8-y^2)dy=$$

$$=\int_{-4}^{0}\left(16\sqrt{-x^2-4x}-\frac{2(-x^2-4x)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)dx=16\int_{-4}^{0}\left(\sqrt{-x^2-4x}\right)dx-\frac{2}{3}\int_{-4}^{0}(-x^2-4x)^{\frac{3}{2}}dx$$

$u=x+2, du=dx$

$$16\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{-u^2+4}\right)du-\frac{2}{3}\int_{-2}^{2}(-u^2+4)^{\frac{3}{2}}du$$

$u=2sint, du=2costdt$

$$64\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 t)dt-\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}cost(4-4\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}dt=32\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2t))dt-$$

$$-\frac{4}{3}(8\cos^3 t\,sint+3(x-\frac{1}{4}\sin(4x))\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}})=32(\pi+0)-\frac{4}{3}3\pi=32\pi-4\pi=28\pi\approx 88\text{ед}^3$$

4. При помощи формулы Остроградского-Гаусса докажите, что

$$\oiint\limits_S f d\vec{S}=\iiint\limits_T \nabla f dv$$

где T – ограниченная область в пространстве с границей – гладкой односвязной поверхностью S,
$f(x;\ y;\ z)$ – непрерывно дифференцируемая в области T скалярная функция,
$d\vec{S}\ =\ (dydz;\ dzdx;\ dxdy)$ – направленный элементарный участок поверхности S,
$dv\ =\ dxdydz$ – элементарный участок в области T.

Доказательство:

$$d\vec{S}=(dydz;\ dzdx;\ dxdy)=dydzi+dzdxj+dxdyk$$

$$\nabla f=gradf=\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j+\frac{\partial f}{\partial z}k$$

Распишем левую часть в координатной форме:

$$\oiint_S \ fdydzi+fdzdxj+fdxdyk$$

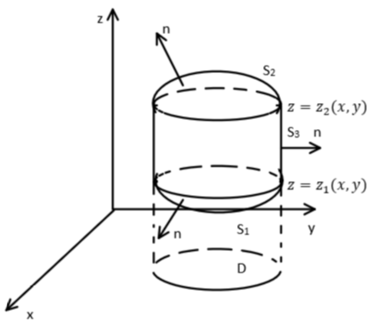
Правая часть в координатной форме:

$$\iiint_T \ \left(\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j+\frac{\partial f}{\partial z}k\right)dxdydz$$

Воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса, которая связывает поверхностный интеграл II рода с тройным интегралом по телу T:

$$\oiint_S \ fdydzi+fdzdxj+fdxdyk=\iiint_T \ \left(\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j+\frac{\partial f}{\partial z}k\right)dxdydz$$

Докажем равенство:



Пусть T – z-цилиндрическая область.

$\measuredangle \iiint_T \frac{\partial f}{\partial z} k\, dxdydz = \iint_D \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial f}{\partial z} dz\right] dxdy\, k = \iint_D \left[f\big(x,y,z_2(x,y)\big) - f\big(x,y,z_1(x,y)\big)\right] dxdyk =$

$= \iint_{S_2} f(x,y,z)dxdy\, k + \iint_{S_1} f(x,y,z)dxdy\, k + \iint_{S_3} f(x,y,z)dxdy\, k =$

$= \iint_{S_2} f(x,y,z)dxdy\, k + \iint_{S_1} f(x,y,z)dxdy\, k + 0 = \oiint_S f(x,y,z)dxdy\, k$

$\iiint_T \frac{\partial f}{\partial z} k\, dxdydz = \oiint_S fdxdy\, k$

Аналогично:

$\iiint_T \frac{\partial f}{\partial x} i\, dxdydz = \oiint_S fdydz\, i$

$\iiint_T \frac{\partial f}{\partial y} j\, dxdydz = \oiint_S fdzdx\, j$

Сложим все части и получим:

$\iiint_T \frac{\partial f}{\partial x} i\, dxdydz + \iiint_T \frac{\partial f}{\partial y} j\, dxdydz + \iiint_T \frac{\partial f}{\partial z} k\, dxdydz = \oiint_S fdydz\, i + \oiint_S fdzdx\, j + \oiint_S fdxdy\; k$

$\iiint_T \left(\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k\right) dxdydz = \oiint_S fdydz\, i + fdzdx\, j + fdxdy\, k$

$\iiint_T \nabla f dv = \oiint_S fd\vec{S}$