

Национальный исследовательский Университет ИТМО  
Мегафакультет информационных и трансляционных технологий  
Факультет инфокоммуникационных технологий

# Математический анализ

Типовой расчет №6

**Работу**

**выполнил:**

В.М. Касьяненко

Группа: К3121

**Преподаватель:**

Ю.В. Танченко

Санкт-Петербург  
2022

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1. Исследование функции</b>	<b>4</b>
1.1. Область определения функции . . . . .	4
1.2. Проверка на периодичность . . . . .	4
1.3. Исследование функции с помощью первой производной . . . . .	4
1.4. Исследование функции с помощью второй производной . . . . .	4
1.5. Проверка на наличие асимптот . . . . .	5
1.6. Нахождение пересечений с осями координат . . . . .	5
<b>2. Построение графика</b>	<b>5</b>
2.1. Построение графика функции по заданию . . . . .	5
2.2. Проверка графика функции . . . . .	6
<b>Заключение</b>	<b>8</b>
<b>Список использованных источников</b>	<b>9</b>

# Введение

В данной работе будет проведено полное исследование заданной функции, взятой из типового расчета по математике [2]:

$$y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}. \quad (1)$$

Исследование функции будет проводиться по следующей схеме:

- Нахождение области значения функции.
- Проверка на периодичность.
- Исследование функции с помощью первой производной.
- Исследование функции с помощью второй производной.
- Проверка на наличие вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот графика функции.
- Нахождение точек пересечения графика с координатными осями.

# 1. Исследование функции

## 1.1. Область определения функции

Областью определения функции (1) является вся числовая ось, кроме точки  $x = 2$ .

## 1.2. Проверка на периодичность

Функция не является периодической. Проверим четность (нечетность):

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 3}{-x - 2}; f(-x) = \frac{x^2 - 3}{-x - 2}; f(-x) \neq \frac{x^2 - 3}{x - 2}; f(-x) \neq -f(x).$$

Значит, функция не является ни чётной, ни нечётной. График функции не имеет симметрии ни относительно оси ординат, ни относительно центра системы координат.

## 1.3. Исследование функции с помощью первой производной

Найдём первую производную функции (1):

$$y' = \left( \frac{x^2 - 3}{x - 2} \right)' = \frac{(x^2 - 3)'(x - 2) - (x^2 - 3)(x - 2)'}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(x - 2)^2}.$$

Тогда  $y' = 0$  при  $x_1 = 1, x_2 = 3$ .

Проверим знаки производной и определим промежутки монотонности функции (рисунок 1.1). Таким образом, функция (1) возрастает при  $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$  и убывает при  $x \in (1; 2) \cup (2; 3)$ . Далее, так как при переходе через стационарную точку  $x = 1$  производная меняет знак с плюса на минус, то  $x = 1$  - точка максимума ( $y_{\max} = y(1) = 2$ ). Аналогично, при переходе через стационарную точку  $x = 3$  производная меняет знак с минуса на плюс, поэтому  $x = 3$  - точка минимума ( $y_{\min} = y(3) = 6$ ).

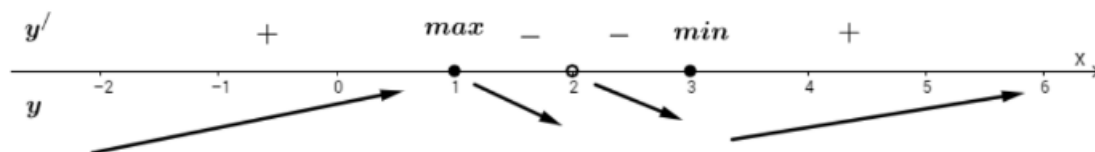


Рисунок 1.1. Промежутки монотонности функции (1)

## 1.4. Исследование функции с помощью второй производной

Найдём вторую производную функции (1):

$$y'' = \left( \frac{x^2 - 3}{x - 2} \right)'' = \left( \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} \right)' = \frac{(2x - 4)(x - 2)^2 - (x^2 - 4x + 3)2(x - 2)}{(x - 2)^4} = \frac{2}{(x - 2)^3}.$$

Проверим знаки второй производной функции и определим промежутки выпуклости (вогнутости) функции (рисунок 1.2).

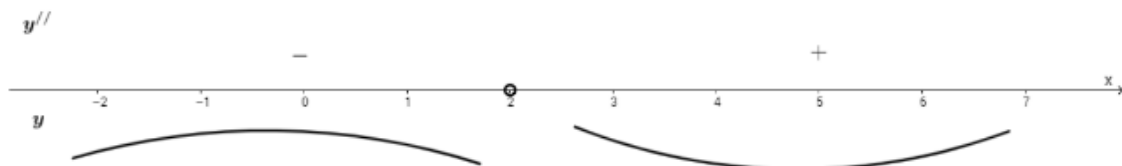


Рисунок 1.2. Промежутки выпуклости (вогнутости) функции (1)

Таким образом, функция (1) выпукла вверх при  $x \in (-\infty; 2)$  и выпукла вниз (вогнута) при  $x \in (2; +\infty)$ . Так как точка  $x = 2$  не принадлежит области определения функции, она не является и точкой перегиба функции.

## 1.5. Проверка на наличие асимптот

Так как функция (1) не является непрерывной в точке  $x = 2$ , проверим в этой точке наличие вертикальной асимптоты:

Найдём  $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2-3}{x-2} = \frac{1}{-0} = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2-3}{x-2} = \frac{1}{+0} = +\infty$ , откуда следует, что прямая  $x = 2$  является вертикальной асимптотой.

Проверим наличие горизонтальной асимптоты  $y = b$ :  $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-3}{x-2} = \pm\infty \neq \text{const}$ , откуда следует, что горизонтальной асимптоты нет.

Проверим наличие наклонной асимптоты  $y = kx + b$ :  $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-3}{x(x-2)} = 1$ ,  
 $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - kx = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2-3}{(x-2)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2-3-x(x-2)}{(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{2x-3}{x-2} \right) = 2$ .

Значит, прямая  $y = x + 2$  наклонная асимптота.

## 1.6. Нахождение пересечений с осями координат

Находим точки пересечения функции с координатными осями (таблица 1.1):

Таблица 1.1

Пересечения функции с координатными осями

x	0	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
y	1.5	0	0

Дополнительные точки:  $y(4) = 6, 5$ ;  $y(-4) \approx -2, 17$ .

## 2. Построение графика

### 2.1. Построение графика функции по заданию

График функции представлен на рисунке 2.1:

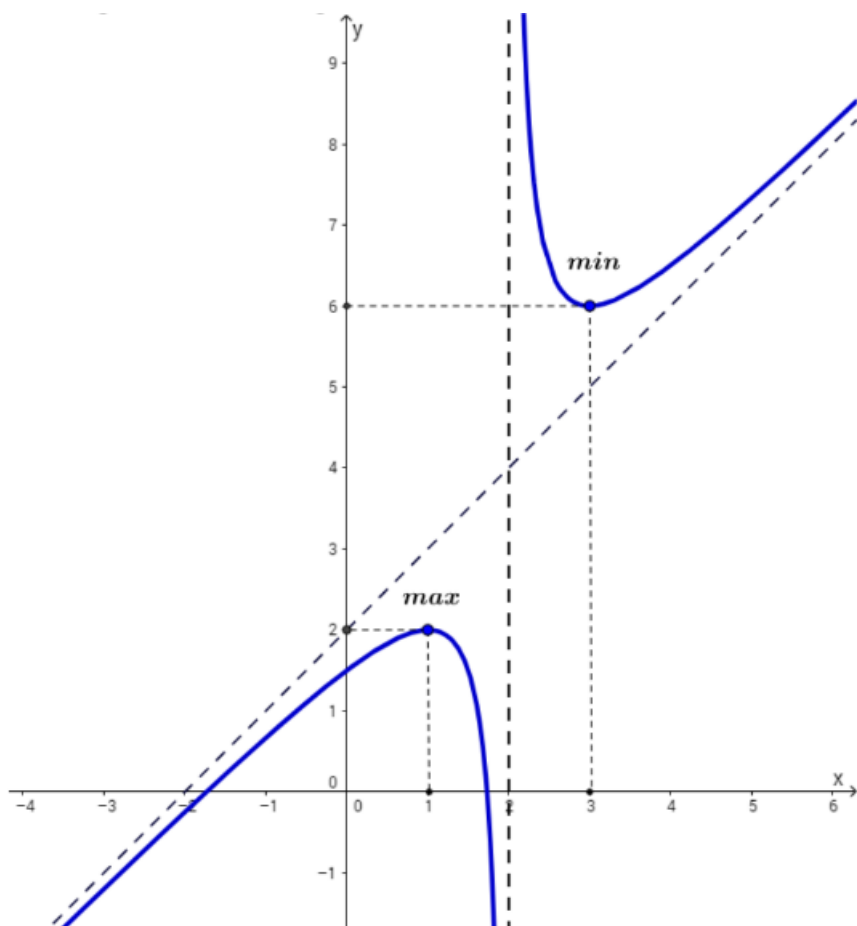


Рисунок 2.1. График функции (1)

## 2.2. Проверка графика функции

Проверим построенный график при помощи сайта [1]. Введем функцию (1) и получим график, представленный на рисунке 2.2:

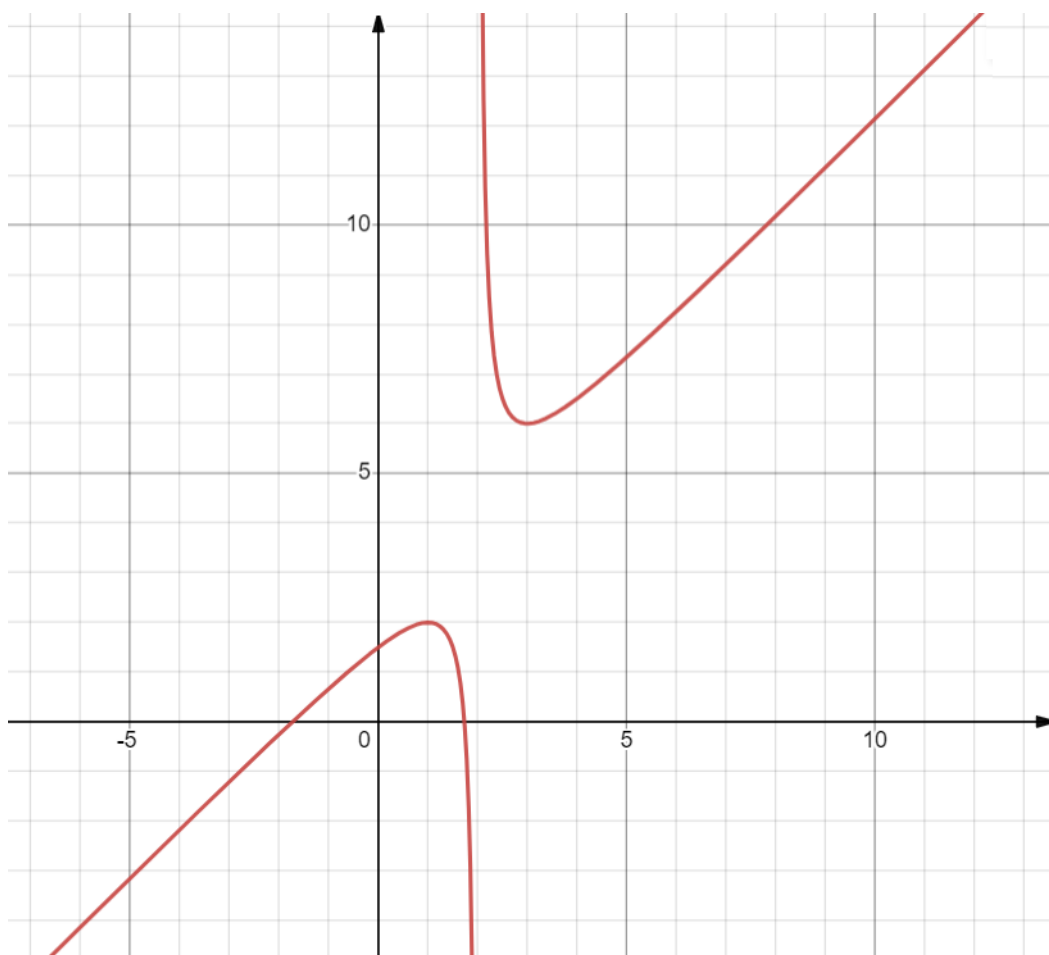


Рисунок 2.2. График функции (1), построенный сайтом

Графики совпадают, следовательно, график функции (1) был построен верно.

## Заключение

В данном типовом расчете была исследована функция (1), а также построен ее график.



## Список использованных источников

1. Desmos. — URL: <https://www.desmos.com/calculator/>.
2. *Сильванович О. В., Тимофеева Г. В.* Индивидуальные домашние задания по высшей математике. — СПб: Университет ИТМО, 2018. — 66 с.