

Касьяненко Вера (Р3220, Теор.Вероятн. 5.1)

ИДЗ 19.1 (вариант 5)

Дано:

В результате эксперимента получены данные, записанные в виде статистического ряда:

1,6	4,4	10,9	6,4	4,0	2,8	5,2	1,2	7,6	3,4
2,9	5,3	1,7	7,7	6,9	10,1	5,4	4,1	8,8	6,5
6,6	4,2	5,5	0,5	8,9	4,5	1,8	5,6	7,8	3,0
1,9	10,2	7,9	2,5	5,7	3,1	6,7	4,3	0,6	9,0
6,8	3,2	4,4	9,1	10,3	6,0	7,9	6,9	8,0	2,0
7,0	10,7	8,1	2,1	5,8	6,4	0,3	4,5	9,2	3,3
7,6	9,3	3,4	4,6	5,0	3,8	5,9	8,2	2,2	7,1
2,3	0,8	7,2	8,3	11,1	6,5	3,5	9,4	10,8	4,7
4,8	6,1	3,6	9,5	8,4	2,4	6,2	7,3	5,7	0,9
7,4	8,5	5,8	1,1	5,9	4,9	3,7	9,6	2,6	6,1

Решение:

а) Располагаем значения результатов эксперимента в порядке возрастания, т.е. записываем вариационный ряд:

0,3	0,5	0,6	0,8	0,9	1,1	1,2	1,6	1,7	1,8
1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,8	2,9
3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8
4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,4	4,5	4,5	4,6	4,7
4,8	4,9	5,0	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,7
5,8	5,8	5,9	5,9	6,0	6,1	6,1	6,2	6,4	6,4
6,5	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	6,9	7,0	7,1	7,2
7,3	7,4	7,6	7,6	7,7	7,8	7,9	7,9	8,0	8,1
8,2	8,3	8,4	8,5	8,8	8,9	9,0	9,1	9,2	9,3
9,4	9,5	9,6	10,1	10,2	10,3	10,7	10,8	10,9	11,1

б) Находим размах варьирования: $\omega = x_{\max} - x_{\min} = 11,1 - 0,3 = 10,8$

Величина отдельного интервала: $h = \frac{\omega}{9} = \frac{10,8}{9} = 1,2$

Номер частичного интервала l_i	Границы интервала $x_i - x_i + 1$	Середина интервала $x'_i = \frac{x_i + x_i + 1}{2}$	Частота интервала n_i	Относительная частота $W_i = \frac{n_i}{n}$	Плотность относительной частоты $\frac{W_i}{h}$
1	0,3 – 1,5	0,9	7	0,07	0,0583
2	1,5 – 2,7	2,1	11	0,11	0,0917
3	2,7 – 3,9	3,3	12	0,12	0,1
4	3,9 – 5,1	4,5	13	0,13	0,1083
5	5,1 – 6,3	5,7	15	0,15	0,125
6	6,3 – 7,5	6,9	14	0,14	0,117
7	7,5 – 8,7	8,1	12	0,12	0,1
8	8,7 – 9,9	9,3	9	0,09	0,075
9	9,9 – 11,1	10,5	7	0,07	0,0583
\sum_i	–	–	100	–	–

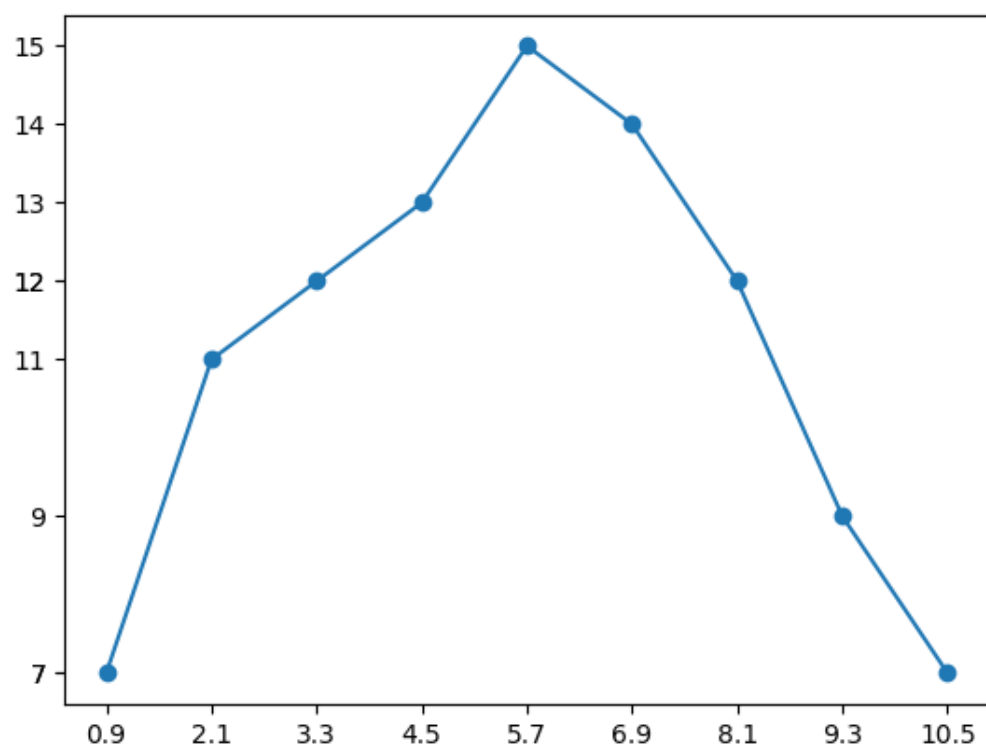
в) Строим полигон частот и гистограмму относительных частот и график эмпирической функции распределения.

Находим значения эмпирической функции распределения $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$: $F^*(0,3) = 0$;

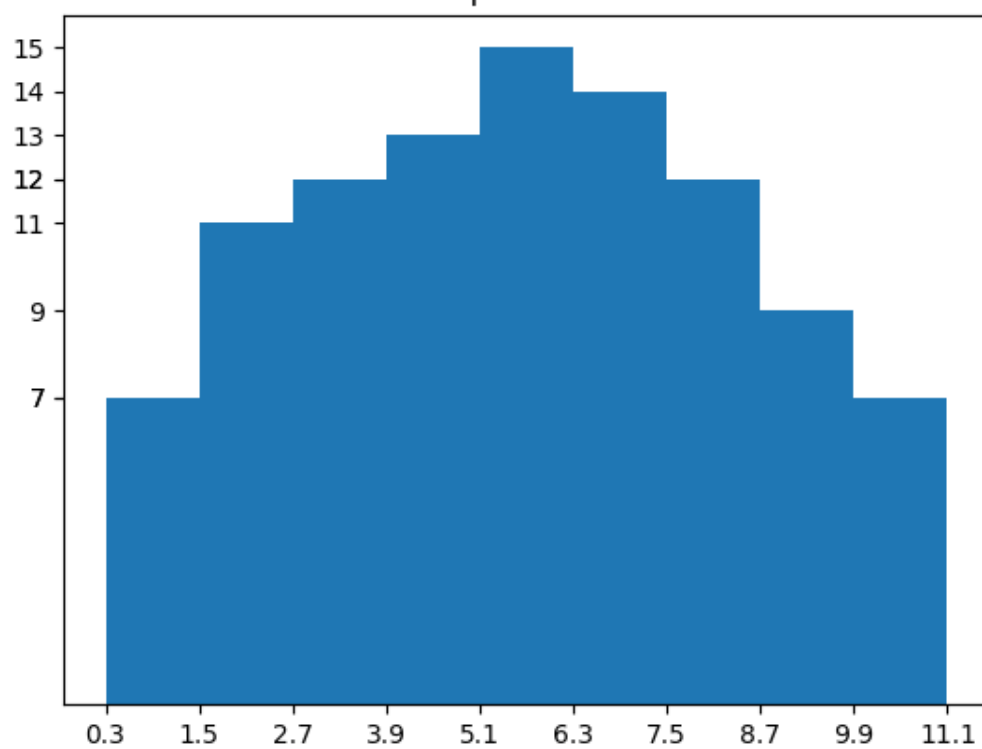
$F^*(1,5) = 0,07$; $F^*(2,7) = 0,18$; $F^*(3,9) = 0,3$; $F^*(5,1) = 0,43$; $F^*(6,3) = 0,58$;

$F^*(7,5) = 0,72$; $F^*(8,7) = 0,84$; $F^*(9,9) = 0,93$; $F^*(11,1) = 1$.

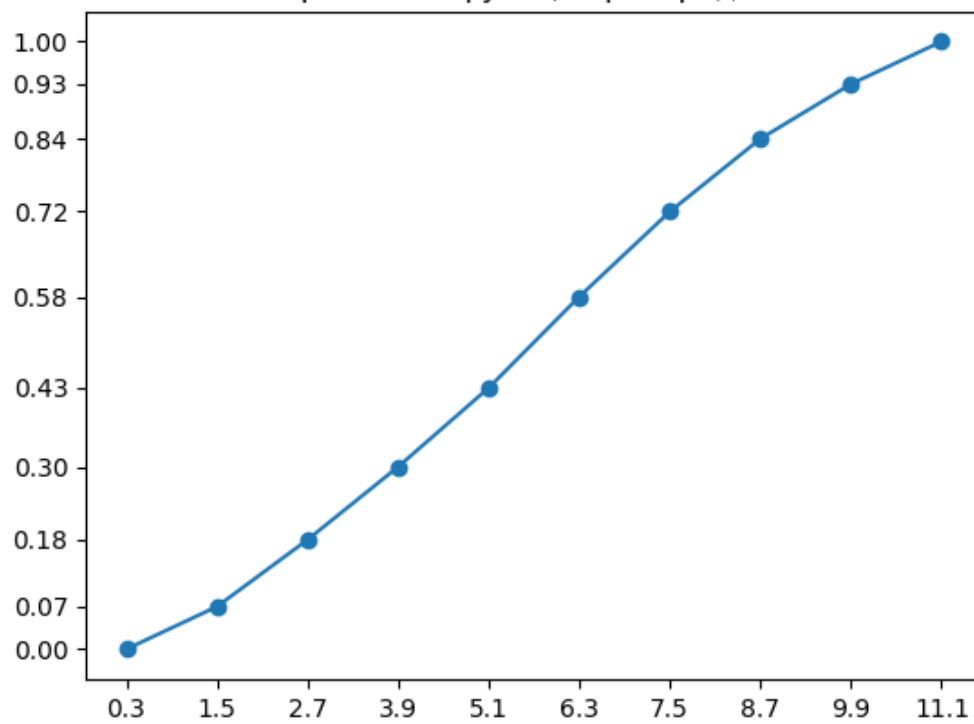
Полигон частот



Гистограмма частот



Эмпирическая функция распределения



г) Находим выборочное среднее и выборочную дисперсию:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^k x'_i n_i = 5,64$$

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x'_i - \bar{x})^2 n_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x'_i)^2 n_i - \bar{x}^2 = 7,5852$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = 2,75412$$

Расчетная таблица:

m_i	Границы интервала $x_i; x_{i+1}$	Середина интервала x'_i	Частота интервала n_i	$n_i x'_i$	$(x'_i)^2$	$n_i (x'_i)^2$
1	0,3 – 1,5	0,9	7	6,3	0,81	5,67
2	1,5 – 2,7	2,1	11	23,1	4,41	48,51
3	2,7 – 3,9	3,3	12	39,6	10,89	130,68
4	3,9 – 5,1	4,5	13	58,5	20,25	487,35
5	5,1 – 6,3	5,7	15	85,5	32,49	487,35
6	6,3 – 7,5	6,9	14	96,6	47,61	666,54
7	7,5 – 8,7	8,1	12	97,2	65,61	787,32
8	8,7 – 9,9	9,3	9	83,7	86,49	778,41
9	9,9 – 11,1	10,5	7	73,5	110,25	771,75
\sum_i	–	–	100	564	–	4163,58

Выборочная дисперсия является смещенно оценкой генеральной дисперсии, а исправленная дисперсия – несмещенной оценкой:

$$\tilde{D}_B = \frac{n}{(n-1)} D_B = \frac{100}{99} * 7,5852 = 7,661$$

$$\tilde{\sigma}_B = \sqrt{\tilde{D}_B} = 2,768$$

Согласно критерию Пирсона необходимо сравнить эмпирические и теоретические частоты. Эмпирические частоты даны. Найдем теоретические частоты. Для этого пронумеруем X, т. е. перейдем к СВ $z = (x - \bar{x})/\sigma_B$ и вычислим концы интервалов z_i и z_{i+1} , причем наименьшее значение z , т.е. z_1 , положим стремящимся к $-\infty$, а наибольшее, т. е. z_{m+1} к $+\infty$. Результаты занесем в таблицу.

i	Границы интервала $x_i; x_{i+1}$		$x_i - \bar{x}$	$x_{i+1} - \bar{x}$	Границы интервала $z_i; z_{i+1}$	
	x_i	x_{i+1}			$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_B}$	$z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}}{\sigma_B}$
1	0,3	1,5	—	−4,14	—	−1,5032
2	1,5	2,7	−4,14	−2,94	−1,5032	−1,06749
3	2,7	3,9	−2,94	−1,74	−1,06749	−0,631781
4	3,9	5,1	−1,74	−0,54	−0,631781	−0,19607
5	5,1	6,3	−0,54	0,66	−0,19607	0,239641
6	6,3	7,5	0,66	1,86	0,239641	0,675352
7	7,5	8,7	1,86	3,06	0,675352	1,11106
8	8,7	9,9	3,06	4,26	1,11106	1,54677
9	9,9	11,1	4,26	—	1,54677	—

Находим теоретические вероятности P_i и теоретические частоты $n'_i = nP_i = 100P_i$. Составляем расчетную таблицу.

i	Границы интервала $z_i; z_{i+1}$		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$n'_i = 100P_i$
	z_i	z_{i+1}				
1	—	−1,5032	−0,5000	−0,4332	0,0668	6,68
2	−1,5032	−1,06749	−0,4332	−0,3554	0,0778	7,78
3	−1,06749	−0,631781	−0,3554	−0,2357	0,1197	11,97
4	−0,631781	−0,19607	−0,2357	−0,0753	0,1604	16,04
5	−0,19607	0,239641	−0,0753	0,0910	0,1663	16,63
6	0,239641	0,675352	0,0910	0,2517	0,1607	16,07
7	0,675352	1,11106	0,2517	0,3665	0,1148	11,48
8	1,11106	1,54677	0,3665	0,4382	0,0717	7,17
9	1,54677	—	0,4382	0,5000	0,0618	6,18
\sum_i	—	—	—	—	1	100

Вычислим наблюдаемое значение критерия Пирсона. Для этого составим расчетную таблицу. Последние два столбца служат для контроля вычисления по формуле:

$$\chi^2_{\text{набл}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i^2 - n$$

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$(n_i - n'_i)^2 / n'_i$	n_i^2	n_i^2 / n'_i
1	7	6,68	0,32	0,1024	0,0153293	49	7,3353
2	11	7,78	3,22	10,3684	1,3327	121	15,5527
3	12	11,97	0,03	0,0009	0,000075	144	12,0301
4	13	16,04	−3,04	9,2416	0,57616	169	10,53616
5	15	16,63	−1,63	2,6569	0,159765	225	13,52977
6	14	16,07	−2,07	4,2849	0,26664	196	12,19664
7	12	11,48	0,52	0,2704	0,023554	144	12,54355
8	9	7,17	1,83	3,3489	0,467071	81	11,29707
9	7	6,18	0,82	0,6724	0,108803	49	7,9288
\sum_i	100	100	—	—	$\chi^2_{\text{набл}} = 2,9500973$	—	102,95009

Контроль: $\frac{\sum n_i^2}{n_i'} - n = \frac{\sum (n_i - n_i')^2}{n} = 102,95009 - 100 = 2,95009$

По таблице критических точек распределения χ^2 , уровню значимости $\alpha = 0,0025$ и числу степеней свободы $k = l - 3 = 9 - 3 = 6$ находим: $\chi_{кр}^2 = 14,4$

Так как $\chi_{набл}^2 < \chi_{кр}^2$, то гипотеза H_0 о нормальном распределении генеральной совокупности принимается.

е) Если СВ X генеральной совокупности распределена нормально, то с надежностью $\gamma = 0.95$ можно утверждать, что математическое ожидание α СВ X покрывается доверительным интервалом

$$\left(\bar{x} - \frac{\tilde{\sigma}_в}{\sqrt{n}} t_\gamma; \bar{x} + \frac{\tilde{\sigma}_в}{\sqrt{n}} t_\gamma \right), \text{ где } \delta = \frac{\tilde{\sigma}_в}{\sqrt{n}} t_\gamma - \text{точность оценки.}$$

В нашем случае $\bar{x} = 5,64, \tilde{\sigma}_в = 2,768, n = 100. t_\gamma = 1,984, \delta = 0,549$. Доверительным интервалом для α будет $(5,091; 6,189)$. Доверительный интервал, покрывающий среднее квадратичное отклонение σ с заданной надежностью $\gamma, (\tilde{\sigma}_в(1 - q); \tilde{\sigma}_в(1 + q))$. При $\gamma = 0,95$ и $n = 100$ имеем: $q = 0,143$. Доверительным интервалом для σ будет $(2,625; 2,911)$