Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Отчёт
По расчётно-графической работе №3
Вариант: 2

Выполнили:
Касьяненко В.М.
Кремпольская Е.А.
Шишминцев Д.В.
Кравцов К.Д.

Преподаватель:
Труфанова А.А.

г. Санкт-Петербург

2023 г.

1. Найти общее решение уравнения

$$y' + \sin\frac{x+y}{2} = \sin\frac{x-y}{2}$$

Решение:

$y' = \sin\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x+y}{2}$

$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2} * \sin\frac{A-B}{2}$

$y' = -2\cos\left(\frac{\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}}{2}\right) * \sin\left(\frac{\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}}{2}\right)$

$y' = -2\cos\left(\frac{2x}{4}\right) * \sin\left(\frac{2y}{4}\right)$

$\frac{dy}{dx} = -2\cos\frac{x}{2} * \sin\frac{y}{2}$

$\frac{1}{\sin\frac{y}{2}}dy = -2\cos\frac{x}{2}dx, \quad y = 0 -$ уравнение с разделяющимися переменными

$\int\frac{1}{\sin\frac{y}{2}}dy = -2\int\cos\frac{x}{2}dx$

Вычислим $\int\frac{1}{\sin\frac{y}{2}}dy$:

$t = \frac{y}{2}; dy = 2dt$

$\int\frac{2}{\sin t}dt = 2\int\frac{\sin t}{\sin^2 t}dt = 2\int\frac{\sin t}{(1-\cos^2 t)}dt$

$u = \cos t\,; dt = -\frac{1}{\sin t}du$

$2\int -\frac{1}{1-u^2}du = 2 * \frac{1}{2*1} * \ln\left(\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right) = \ln\left(\left|\frac{\cos\frac{y}{2}-1}{\cos\frac{y}{2}+1}\right|\right) = \ln\left(-tg\left(\frac{y}{4}\right)^2\right) = 2\ln\left(tg\frac{y}{4}\right) + C$

Вычислим $\int\cos\frac{x}{2}dx$:

$t = \frac{x}{2}; dx = 2dt$

$2\int\cos t\,dt = 2\sin t = 2\sin\frac{x}{2} + C$

$2\ln tg\frac{y}{4} = -4\sin\frac{x}{2} + C$

$\ln tg\frac{y}{4} = C - 2\sin\frac{x}{2}, \quad y = 0$

2. Найти общее решение уравнения

$$y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$$

Решение:

Линейное уравнение неоднородное первого порядка

Метод Лагранжа вариации произвольной постоянной:

Решим однородное уравнение:

$y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 0$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(1-2x)}{x^2}$

$\frac{dy}{y} = \frac{(2x-1)dx}{x^2}, \; y = 0 -$ уравнение с разделяющимися переменными

$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2x-1}{x^2} dx$

Вычислим $\int \frac{2x-1}{x^2} dx$:

$\int \frac{2x-1}{x^2} dx = 2 \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx = 2\ln(|x|) + \frac{1}{x} + C(x)$

$\ln(|y|) = 2\ln(|x|) + \frac{1}{x} + \ln C(x)$

$y = C(x) x^2 \sqrt[x]{e}$

Найдем $C(x)$:

$y' = C'(x) x^2 \sqrt[x]{e} + 2C(x) x \sqrt[x]{e} - C(x) \sqrt[x]{e}$

$C'(x) x^2 \sqrt[x]{e} + 2C(x) x \sqrt[x]{e} - C(x) \sqrt[x]{e} + \frac{1-2x}{x^2} C(x) x^2 \sqrt[x]{e} = 1$

$C'(x) x^2 \sqrt[x]{e} = 1$

$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{1}{x^2 \sqrt[x]{e}}$

$\int 1 \, dC(x) = \int \frac{1}{x^2 \sqrt[x]{e}} dx -$ уравнение с разделяющимися переменными

Вычислим $\int \frac{1}{x^2 \sqrt[x]{e}} dx$:

$t = \frac{1}{x}; \; -dt = \frac{1}{x^2} dx$

$\int -\frac{1}{e^t} dt$

$s = -t; t = -s; dt = -ds$

$\int e^s ds = e^s = \frac{1}{e^t} = \frac{1}{\sqrt[x]{e}} + C$

$C(x) = \frac{1}{\sqrt[x]{e}} + C$

Подставим в $y = C(x)x^2\sqrt[x]{e}$

$y = Cx^2\sqrt[x]{e} + x^2$

3. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$y = x(y' - x\cos x),\ \ y(\pi) = -5$$

Решение:

$y' = \frac{y}{x} + x\cos x$

$y' - \frac{1}{x}y = x\cos x -$ линейное неоднородное уравнение первого порядка

Метод Лагранжа вариации произвольной постоянной:

Решим однородное уравнение:

$y' - \frac{1}{x}y = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}y$

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},\ \ y = 0 -$ уравнение с разделяющимися переменными

$\ln|y| = \ln|x| + \ln C(x)$

$y = C(x)x$

Найдем $C(x)$:

$y' = C'(x)x + C(x)$

$C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = x\cos x$

$C'(x) = \cos x\,,\ \ x = 0$

$\frac{dC(x)}{dx} = \cos x$

$\int dC(x) = \int \cos x\, dx$

$C(x) = \sin x + C$

Подставим в $y = C(x)x$

$y = x(C + \sin x)$

$y = x\sin x + Cx$

Решение задачи Коши:

Подставим начальные условия в решение уравнения $y = x\sin x + Cx$

$5 = 0 + \pi C$

$C = \frac{5}{\pi}$

$y = x\sin x + \frac{5}{\pi}x$

4. Найти общее решение уравнения

$$2xy'y'' = (y')^2 + 1$$

Решение:

Дифференциальное уравнение, допускающее понижение порядка (нет “y”)

$y' = z;\ y'' = z'$

$2xzz' = z^2 - 1$

$\frac{zdz}{dx} = \frac{z^2-1}{2x}$

$\frac{zdz}{z^2-1} = \frac{dx}{2x},\ \ z = \pm 1, y = \pm x + C_0 -$ уравнение с разделяющимися переменными

$\int \frac{zdz}{z^2-1} = \int \frac{dx}{2x}$

Вычислим $\int \frac{zdz}{z^2-1}$:

$t = z^2 - 1,\ \ \frac{1}{2}dt = zdz$

$\int \frac{1}{2t}dt = \frac{1}{2}\ln(|t|) + C = \frac{1}{2}\ln(|z^2 - 1|) + C$

$\ln|z^2 - 1| = \ln|x| + C$

$z^2 - 1 = Cx$

$(y')^2 = Cx + 1$

$y' = \pm\sqrt{Cx + 1}$

$dy = \pm\sqrt{Cx + 1}dx -$ уравнение с разделяющимися переменными

$\int dy = \pm \int \sqrt{Cx + 1}\,dx$

Вычислим $\int \sqrt{Cx + 1}\,dx$:

$t = Cx + 1,\ \ dx = \frac{1}{C}dt$

$\int \sqrt{t}\frac{1}{C}dt = \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3C} + C_1 = \frac{2}{3C}(Cx + 1)^{\frac{3}{2}} + C_1$

$y = \pm\frac{2}{3C}(Cx + 1)^{\frac{3}{2}} + C_1,\ \ y = \pm x + C_0$

5. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x, \;\; y(0) = 2, \;\; y'(0) = 3$$

Решение:

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

Составим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$

$D = 16 - 20 = -4$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} => \left[\begin{array}{l}\lambda_1 = 2 + i \\ \lambda_2 = 2 - i\end{array}\right.$

Решение однородного уравнения:

$\hat{y} = e^{2x}\, C_1 \sin x \; + e^{2x}\, C_2 \cos x$

Найдем частное решение, используем метод неопределенных коэффициентов

$y^* = e^x(Ax^2 + Dx + C)$

$y^{*\prime} = e^x(Ax^2 + x(B + 2A) + C + B)$

$y^{*\prime\prime} = e^x(Ax^2 + x(B + 4A) + C + 2B + 2A)$

$2e^xAx^2 + e^xx(2B - 4A) + e^x(2C - 2B + 2A) = 2x^2e^x$

$\begin{cases} 2A = 2 \\ 2B - 4A = 0 \\ 2C - 2B + 2A = 0 \end{cases} => \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \\ C = 1 \end{cases}$

$y^* = e^x(x^2 + 2x + 1)$

$y = \hat{y} + y^*$

$y = e^{2x}\, C_1 \sin x \; + e^{2x}\, C_2 \cos x + e^x(x^2 + 2x + 1)$

$y = e^{2x}\, C_1 \sin x \; + e^{2x}\, C_2 \cos x + e^xx^2 + 2e^xx + e^x$

Решение задачи Коши:

$y = e^{2x}\, C_1 \sin x \; + e^{2x}\, C_2 \cos x + e^xx^2 + 2e^xx + e^x$

$y' = 2e^{2x}\, C_1 \sin x - e^{2x}C_2 \sin x \; + e^{2x}\, C_1 \cos x + 2e^{2x}C_2 \cos x + e^xx^2 + 4e^xx + 3e^x$

$\begin{cases} 2 = 0 + C_2 + 0 + 0 + 1 \\ 3 = 0 - 0 + C_1 + 2C_2 + 0 + 0 + 3 \end{cases} => \begin{cases} 2 = C_2 + 1 \\ 3 = C_1 + 2C_2 + 3 \end{cases} => \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = 1 \end{cases}$

$y = -2e^{2x}\; \sin x \; + e^{2x}\; \cos x + e^xx^2 + 2e^xx + e^x$

6. Составить линейное неоднородное дифференциальное уравнение по характеристическому полиному однородной его части, и решить его

$$9\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$$

Решение:

$9y'' - 6y' + y = e^x -$ линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$\lambda_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \dfrac{1}{3}$

Решение однородного уравнения:

$\hat{y} = C_1 e^{\frac{1}{3}x} + C_2 x e^{\frac{1}{3}x}$

Найдем частное решение, используем метод неопределенных коэффициентов

$y^* = Ae^x$

$y^{*\prime} = Ae^x$

$y^{*\prime\prime} = Ae^x$

$9Ae^x - 6Ae^x + Ae^x = e^x$

$4Ae^x = e^x$

$A = \dfrac{1}{4}$

$y^* = \dfrac{e^x}{4}$

$y = \hat{y} + y^*$

$y = C_1 e^{\frac{1}{3}x} + C_2 x e^{\frac{1}{3}x} + \dfrac{e^x}{4}$

7. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z \\ \dot{y} = 2y + x - z \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$$

Решение:

Система дифференциальных уравнений

Метод Эйлера

$|A - \gamma E| = 0$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Вычислим собственные значения:

$$|A-\gamma E| = \begin{vmatrix} 2-\gamma & -1 & 1 \\ 1 & 2-\gamma & -1 \\ 1 & -1 & 2-\gamma \end{vmatrix} = (2-\gamma)^3 - 1 + 1 - (2-\gamma) - (2-\gamma) + (2-\gamma) =$$

$$= (2-\gamma)^3 - (2-\gamma) = -\gamma^3 + 6\gamma^2 - 12\gamma + 8 + \gamma - 2 = -y^3 + 6\gamma^2 - 11\gamma + 6 =$$

$$= -(\gamma-1)(\gamma^2 - 5\gamma + 6)) = -(\gamma-1)(\gamma-2)(\gamma-3) = 0$$

$\gamma_1 = 1; \gamma_2 = 2; \gamma_3 = 3$

$\gamma = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -1 & 1 \\ 1 & 2-1 & -1 \\ 1 & -1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1 - v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 - v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 + v_3 = 0 \end{cases} => \begin{cases} v_1 - v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 - v_3 = 0 \end{cases} => \begin{cases} v_1 - v_2 + v_3 = 0 \\ 2v_2 - 2v_3 = 0 \end{cases} => \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 - v_3 = 0 \end{cases} => \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = v_3 \end{cases}$$

Пусть $v_3 = 1, u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\gamma = 2$:

$$\begin{pmatrix} 2-2 & -1 & 1 \\ 1 & 2-2 & -1 \\ 1 & -1 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 - v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \end{cases} => \begin{cases} v_1 - v_3 = 0 \\ -v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \end{cases} => \begin{cases} v_1 - v_3 = 0 \\ -v_2 + v_3 = 0 \\ -v_2 + v_3 = 0 \end{cases} => \begin{cases} v_1 = v_3 \\ v_2 = v_3 \end{cases}$$

Пусть $v_3 = 1, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\gamma = 3$:

$$\begin{pmatrix} 2-3 & -1 & 1 \\ 1 & 2-3 & -1 \\ 1 & -1 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -v_1 - v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 - v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 - v_3 = 0 \end{cases} => \begin{cases} v_1 + v_2 - v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 - v_3 = 0 \end{cases} => \begin{cases} v_1 + v_2 - v_3 = 0 \\ -2v_2 = 0 \end{cases} => \begin{cases} v_1 - v_3 = 0 \\ v_2 = 0 \end{cases} => \begin{cases} v_1 = v_3 \\ v_2 = 0 \end{cases}$$

Пусть $v_3 = 1, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x(t,c) = C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} \\ y(t,c) = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} \\ z(t,c) = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} \end{cases}$$