Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Отчёт
По расчётно-графической работе №2
Вариант: 2

Выполнили:
Касьяненко В.М.
Кремпольская Е.А.
Шишминцев Д.В.
Кравцов К.Д.

Преподаватель:
Труфанова А.А.

г. Санкт-Петербург

2023 г.

1. Зная, что поток F векторного поля A по определению есть интеграл по поверхности S от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к поверхности

$$F = \iint\limits_S \vec{a}\vec{n}ds$$

Рассчитать поток векторного поля A через замкнутую поверхность S двумя способами

$$A = y^2\vec{\imath} + z^2\vec{\jmath} + x^2\vec{k},$$
$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Решение:

1) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$n_0 = \pm \frac{(-z'_x i - z'_y j + k)}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}$

$z'_x = \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2}\right)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}(-x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$z'_y = \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2}\right)'_y = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^2+y^2+1-x^2-y^2}{1-x^2-y^2}} =$

$= \sqrt{\frac{1}{1-x^2-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$n_0 = \pm \frac{\left(-\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}i - \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}j + k\right)}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}} = \pm\left(xi + yj + \sqrt{1-x^2-y^2}k\right)$

$an_0 = \pm(y^2 i + z^2 j + x^2 k)(xi + yj + zk) = \pm(xy^2 + yz^2 + zx^2)$

Для положительной z:

$F_1 = \iint_S \ an_0 dS = \ \iint_{D_{xy}} \left(xy^2 + y(1 - x^2 - y^2) + \sqrt{1-x^2-y^2}x^2\right)\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}dxdy =$

$= \iint_{D_{xy}} \left(xy^2 + y(1 - x^2 - y^2) + \sqrt{1-x^2-y^2}x^2\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \ dxdy =$

$= \iint_{D_{xy}} \left(\frac{xy^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + y\sqrt{1-x^2-y^2} + x^2\right)dxdy = \iint_{D_{xy}} \frac{\left(xy^2 + y(1-x^2-y^2) + x^2\sqrt{1-x^2-y^2}\right)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy =$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r^3 cos\varphi \sin^2\varphi + rsin\varphi - r^3\cos^2\varphi \sin\varphi - r^3\sin^3\varphi + r^2\cos^2\varphi\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}} rdr =$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r^3 cos\varphi \sin^2\varphi + rsin\varphi - r^3\sin\varphi + r^2\cos^2\varphi\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}} rdr =$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r^3 cos\varphi \sin^2\varphi + rsin\varphi - r^3\sin\varphi + r^2\cos^2\varphi\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1-r^2}} rdr =$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\sin^2\varphi \, cos\varphi \int_0^1 \frac{r^4}{\sqrt{1-r^2}}dr + sin\varphi \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}dr - sin\,\varphi \int_0^1 \frac{r^4}{\sqrt{1-r^2}}dr + \cos^2\varphi \int_0^1 r^3 dr\right)$

$r = sinu, dr = cosudu$

$\int_0^{2\pi} d\varphi \left(sin^2\varphi\, cos\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 u\, du + sin\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 u\, du - sin\,\varphi\left(-\left(\frac{cosusin^3 u}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 u\, du\right) + \frac{1}{4}cos^2\varphi\right) =$

$\int_0^{2\pi} d\varphi \left(sin^2\varphi\, cos\varphi\left(0 + \frac{3}{4} * \frac{\pi}{4}\right) + \frac{sin\varphi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - cos\,(2u))du - \frac{3\pi}{16}sin\,\varphi + \frac{1}{4}cos^2\varphi\right) =$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{3\pi}{16}\sin^2\varphi\, cos\varphi + \frac{sin\varphi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \frac{3\pi}{16}sin\,\varphi + \frac{1}{4}\cos^2\varphi\right) =$

$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3\pi}{16}\sin^2\varphi\, cos\varphi + \frac{\pi}{4}sin\varphi - \frac{3\pi}{16}sin\,\varphi + \frac{1}{4}\cos^2\varphi\right)d\varphi =$

$= \frac{3\pi}{16}\int_0^{2\pi}(\sin^2\varphi\, cos\varphi)\, d\varphi + \frac{\pi}{4}\int_0^{2\pi} sin\varphi\, d\varphi - \frac{3\pi}{16}\int_0^{2\pi} sin\,\varphi\, d\varphi + \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi =$

$= \frac{3\pi}{16}\frac{\sin^3\varphi}{3}\Big|_0^{2\pi} + \frac{\pi}{4}(-cos\varphi)|_0^{2\pi} - 0 + \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1+\cos(2\varphi))\,d\varphi = 0+0+0+\frac{1}{8}\left(\varphi + \frac{\sin(2\varphi)}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}$

Для отрицательной z:

$F_2 = \iint_S \ a(-n_0)dS = -\iint_{D_{xy}}\left(xy^2 + y(1-x^2-y^2) + \sqrt{1-x^2-y^2}x^2\right)\sqrt{(z_x')^2 + \left(z_y'\right)^2 + 1}dxdy = -\frac{\pi}{4}$

$F = F_1 + F_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$

2) $diva = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 0+0+0 = 0$

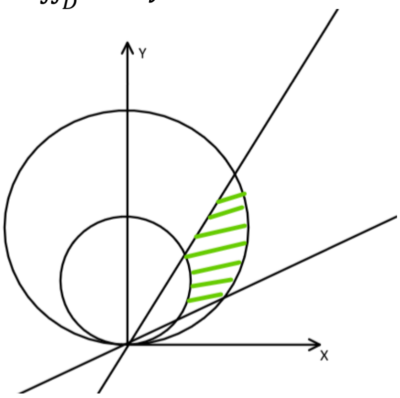
$F = \iiint_V \ diva\ dxdydz = \iiint_V \ 0\ dxdydz = 0$

2. Вычислить площадь области D, ограниченной функциями

$$D: \begin{cases} y^2 - 4y + x^2 = 0 \\ y^2 - 10y + x^2 = 0 \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}},\ \ y = \sqrt{3}x \end{cases}$$

Решение:

$S = \iint_D \ dxdy$



Точки пересечения:

$\begin{cases} y^2 - 4y + x^2 = 0 \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 - 4\frac{x}{\sqrt{3}} + x^2 = 0 \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} = \begin{cases} 4x^2 - 4\sqrt{3}x = 0 \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} => \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$

$\begin{cases} y^2 - 4y + x^2 = 0 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} = \begin{cases} \left(\sqrt{3}x\right)^2 - 4\sqrt{3}x + x^2 = 0 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} = \begin{cases} 4x^2 - 4\sqrt{3}x = 0 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} => \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right.$

$\begin{cases} y^2 - 10y + x^2 = 0 \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 - 10\frac{x}{\sqrt{3}} + x^2 = 0 \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} = \begin{cases} 4x^2 - 10\sqrt{3}x = 0 \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} => \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{5}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

$\begin{cases} y^2 - 10y + x^2 = 0 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} = \begin{cases} \left(\sqrt{3}x\right)^2 - 10\sqrt{3}x + x^2 = 0 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} = \begin{cases} 4x^2 - 10\sqrt{3}x = 0 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} => \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{15}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

Для D_1:

$\sqrt{3} \le x \le 2$

$\frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le 2 - \sqrt{4 - x^2}$

Для D_2:
$\sqrt{3} \le x \le 2$
$2 + \sqrt{4 - x^2} \le y \le \sqrt{3}x$
Для D_3:
$2 \le x \le \frac{5\sqrt{3}}{2}$
$\frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x$
Для D_4:
$\frac{5\sqrt{3}}{2} \le x \le 5$
$5 - \sqrt{25 - x^2} \le y \le 5 + \sqrt{25 - x^2}$

$S_{D_1} = \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{\frac{x}{\sqrt{3}}}^{2-\sqrt{4-x^2}} dy = \int_{\sqrt{3}}^{2} \left(2 - \sqrt{4 - x^2} - \frac{x}{\sqrt{3}}\right) dx$
$x = 2sinu, dx = 2cosudu$
$(2x)\Big|_{\sqrt{3}}^{2} - 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 u) du - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{\sqrt{3}}^{2} = 4 - 2\sqrt{3} - 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2u)) du - \frac{1}{2\sqrt{3}} =$
$= 4 - 2\sqrt{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}} - 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 4 - 2\sqrt{3} + \frac{-\pi + \sqrt{3}}{3}$
$S_{D_2} = \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{2+\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{3}x} dy = \int_{\sqrt{3}}^{2} \left(\sqrt{3}x - \left(2 + \sqrt{4 - x^2}\right)\right) dx = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(4 - 2\sqrt{3} + 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right) =$
$-\frac{\pi}{3} + 3\sqrt{3} - 4$
$S_{D_3} = \int_{2}^{\frac{5\sqrt{3}}{2}} dx \int_{\frac{x}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}x} dy = \int_{2}^{\frac{5\sqrt{3}}{2}} \left(\sqrt{3}x - \frac{x}{\sqrt{3}}\right) dx = \left(\frac{\sqrt{3}x^2}{2} - \frac{x^2}{2\sqrt{3}}\right)\Big|_{2}^{\frac{5\sqrt{3}}{2}} = \frac{59}{4\sqrt{3}}$
$S_{D_4} = \int_{\frac{5\sqrt{3}}{2}}^{5} dx \int_{5-\sqrt{25-x^2}}^{5+\sqrt{25-x^2}} dy = \int_{\frac{5\sqrt{3}}{2}}^{5} \left(5 + \sqrt{25 - x^2} - \left(5 - \sqrt{25 - x^2}\right)\right) dx =$
$= 2\int_{\frac{5\sqrt{3}}{2}}^{5} \left(\sqrt{25 - x^2}\right) dx = 2 * \frac{25}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2u)) du = \frac{25\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)}{12}$

$S = S_{D_1} + S_{D_2} + S_{D_3} + S_{D_4} = 4 - 2\sqrt{3} + \frac{-\pi + \sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{3} + 3\sqrt{3} - 4 + \frac{25\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)}{12} + \frac{59}{4\sqrt{3}} =$
$= \frac{71\sqrt{3} - 4\pi + 4\sqrt{3} - 4\pi + 50\pi - 75\sqrt{3}}{12} = \frac{42\pi}{12} = \frac{7\pi}{2} \approx 11$ед^2

3. Вычислить объем тела T, ограниченного поверхностями

$$T: \begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 0 \\ z = 8 - y^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Решение:
$V = \iiint_T \ dxdydz = \int_{-4}^{0} dx \int_{-\sqrt{-x^2-4x}}^{\sqrt{-x^2-4x}} dy \int_{0}^{8-y^2} dz = \int_{-4}^{0} dx \int_{-\sqrt{-x^2-4x}}^{\sqrt{-x^2-4x}} (8 - y^2) dy =$
$= \int_{-4}^{0} \left(16\sqrt{-x^2 - 4x} - \frac{2(-x^2-4x)^{\frac{3}{2}}}{3}\right) dx = 16\int_{-4}^{0} \left(\sqrt{-x^2 - 4x}\right) dx - \frac{2}{3}\int_{-4}^{0} (-x^2 - 4x)^{\frac{3}{2}} dx$
$u = x + 2, du = dx$
$16\int_{-2}^{2} \left(\sqrt{-u^2 + 4}\right) du - \frac{2}{3}\int_{-2}^{2} (-u^2 + 4)^{\frac{3}{2}} du$
$u = 2sint, du = 2costdt$

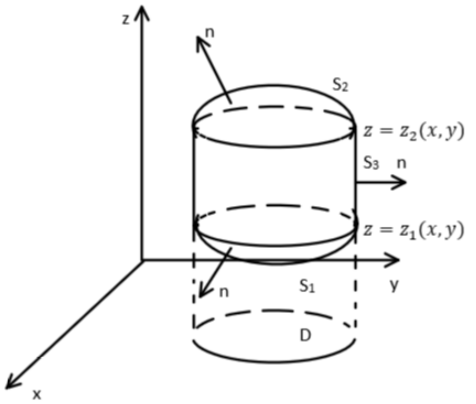
$$64\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 t)dt - \frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cost(4-4\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}dt = 32\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2t))dt -$$

$$-\frac{4}{3}(8\cos^3 t\, sint + 3(x - \frac{1}{4}\sin(4x))\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}) = 32(\pi+0) - \frac{4}{3}3\pi = 32\pi - 4\pi = 28\pi \approx 88\text{ед}^3$$

4. При помощи формулы Остроградского-Гаусса докажите, что

$$\oiint\limits_S f d\vec{S} = \iiint\limits_T \nabla f dv$$

где T – ограниченная область в пространстве с границей – гладкой односвязной поверхностью S,
$f(x;\ y;\ z)$ – непрерывно дифференцируемая в области T скалярная функция,
$d\vec{S} = (dydz;\ dzdx;\ dxdy)$ – направленный элементарный участок поверхности S,
$dv = dxdydz$ – элементарный участок в области T.
Доказательство:
$d\vec{S} = (dydz;\ dzdx;\ dxdy) = dydzi + dzdxj + dxdyk$
$\nabla f = gradf = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$
Распишем правую часть в координатной форме:
$\oiint_S \ fdydzi + fdzdxj + fdxdyk$
Левая часть в координатной форме:
$\iiint_T \ \left(\frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k\right)dxdydz$
Воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса, которая связывает поверхностный интеграл II рода с тройным интегралом по телу T:
$\oiint_S \ fdydzi + fdzdxj + fdxdyk = \iiint_T \ \left(\frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k\right)dxdydz$
Докажем равенство:



Пусть T – z-цилиндрическая область.
$\measuredangle \iiint_T \ \frac{\partial f}{\partial z}k\, dxdydz = \iint_D \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial f}{\partial z}dz\right]dxdy\, k = \iint_D \left[f\big(x,y,z_2(x,y)\big) - f\big(x,y,z_1(x,y)\big)\right]dxdyk =$
$= \iint_{S_2} f(x,y,z)dxdy\, k + \iint_{S_1} \ f(x,y,z)dxdy\, k + \iint_{S_3} \ f(x,y,z)dxdy\, k =$
$= \iint_{S_2} f(x,y,z)dxdy\, k + \iint_{S_1} \ f(x,y,z)dxdy\, k + 0 = \oiint_S \ f(x,y,z)dxdy\, k$
$\iiint_T \ \frac{\partial f}{\partial z}k\, dxdydz = \oiint_S \ fdxdy\, k$

Аналогично:

$$\iiint_T \frac{\partial f}{\partial x} i \, dxdydz = \oiint_S f dydz \, i$$

$$\iiint_T \frac{\partial f}{\partial y} j \, dxdydz = \oiint_S f dzdx \, j$$

Сложим все части и получим:

$$\iiint_T \frac{\partial f}{\partial x} i \, dxdydz + \iiint_T \frac{\partial f}{\partial y} j \, dxdydz + \iiint_T \frac{\partial f}{\partial z} k \, dxdydz = \oiint_S f dydz \, i + \oiint_S f dzdx \, j + \oiint_S f dxdy \, k$$

$$\iiint_T \left(\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k\right) dxdydz = \oiint_S f dydz \, i + f dzdx \, j + f dxdy \, k$$

$$\iiint_T \nabla f dv = \oiint_S f d\vec{S}$$