Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Отчёт
По расчётно-графической работе №4
Вариант: 7

Выполнили:
Касьяненко В.М.
Кремпольская Е.А.

Преподаватель:
Труфанова А.А.

г. Санкт-Петербург

2023 г.

1. Записать в алгебраическом виде

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+i\right)$$

Решение:

$z = \alpha + i\beta$ – алгебраическая форма записи комплексного числа.

$\sin\left(\frac{\pi}{3}+i\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos i + \cos\frac{\pi}{3}\sin i$

$\sin(iz) = i\,\mathrm{sh}\,z$ и $\cos(iz) = \mathrm{ch}\,z \Rightarrow\ \sin\frac{\pi}{3}\cos i + \cos\frac{\pi}{3}\sin i = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{ch}\,1 + \frac{1}{2} i\,\mathrm{sh}\,1 =$

$= \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{ch}\,1}{2} + i\frac{\mathrm{sh}\,1}{2}$

2. Вычислить все значения корня

$$\sqrt[4]{-8}$$

Решение:

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ \varphi = \arg z,\ \ k = 0, 1, \dots, n-1$

$|z| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{64+0} = 8$

$\alpha < 0, \beta = 0 \Rightarrow \varphi = \pi + \mathrm{arctg}\frac{\beta}{\alpha} = \pi + \mathrm{arctg}\frac{0}{-8} = \pi$

При $k = 0$: $\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{\pi+2\pi*0}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi*0}{4}\right) = \sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt[4]{8}\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{8}\sqrt{2}}{2} = \sqrt[4]{2} + i\sqrt[4]{2}$

При $k = 1$: $\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{\pi+2\pi*1}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi*1}{4}\right) = \sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt[4]{8}\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{8}\sqrt{2}}{2} = -\sqrt[4]{2} + i\sqrt[4]{2}$

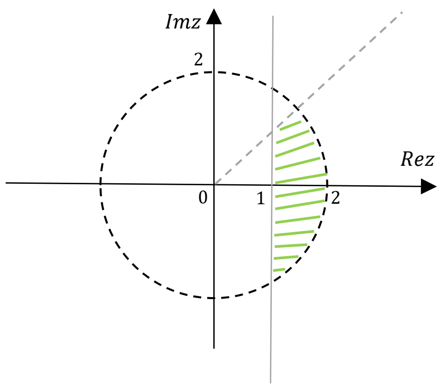
При $k = 2$: $\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{\pi+2\pi*2}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi*2}{4}\right) = \sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt[4]{8}\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{8}\sqrt{2}}{2} = -\sqrt[4]{2} - i\sqrt[4]{2}$

При $k = 3$: $\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{\pi+2\pi*3}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi*3}{4}\right) = \sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt[4]{8}\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{8}\sqrt{2}}{2} = \sqrt[4]{2} - i\sqrt[4]{2}$

3. Изобразить область, заданную неравенствами

$$\begin{cases} |z| < 2, \\ Rez \geq 1, \\ \arg(z) < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Решение:



$|z| < 2 \Rightarrow \sqrt{\alpha^2+\beta^2} < 2 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2 < 4$

4. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$, по действительной $u(x, y)$ её части

$$u(x, y) = 3x^2y - y^3, \ f(z_0) = f(0) = 1$$

Решение:

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

Функция $u(x, y)$ и искомая функция $v(x, y)$ должны удовлетворять условиям Коши–Римана: $u'_x = v'_y, \ u'_y = -v'_x$

$u(x, y) = 3x^2y - y^3 => u'_x = v'_y = 6xy$ и $- u'_y = v'_x = -3x^2 + 3y^2$

$v(x, y) = \int(-3x^2 + 3y^2)\,dx = -x^3 + 3xy^2 + v_0(y)$

$v'_y = \left(-x^3 + 3xy^2 + v_0(y)\right)'_y = 6xy + \left(v_0(y)\right)'_y$

$6xy + \left(v_0(y)\right)'_y = 6xy$

$\left(v_0(y)\right)'_y = 0$

$v_0(y) = \int 0dy = C$

$v(x, y) = -x^3 + 3xy^2 + C$

$f(z) = (3x^2y - y^3) + i(-x^3 + 3xy^2 + C) = -i(x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i) + iC =$

$= -i(x + iy) + iC = -iz^3 + iC$

$f(0) = 0 + iC = 1 => C = -i$

$f(z) = -iz^3 + 1$

5. Вычислить интеграл по заданной кривой

$$\int_{AB}(3z^2 + 2z)dz,$$

$$AB : \ y = x^2, \ \ z_A = 0, \ \ z_B = 1 + i$$

Решение:

Проверим на аналитичность:

$f(z) = 3z^2 + 2z = 3(x + iy)^2 + 2(x + iy) = (3x^2 - 3y^2 + 2x) + i(6xy + 2y)$

$u(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 2x$

$v(x, y) = 6xy + 2y$

Проверим условия Коши–Римана:

$u'_x = 6x + 2$ и $v'_y = 6x + 2 => u'_x = v'_y$

$u'_y = -6y$ и $v'_x = 6x => u'_y = -v'_x$

$f(z)$ – дифференцируема на $\mathbb{C}$, условия Коши–Римана выполняются и $f(z), u'_x, u'_y, v'_x, v'_y$ непрерывны на $\mathbb{C}$, следовательно, функция является аналитической и тогда результат не зависит от пути интегрирования по интегральной теореме Коши.

$$\int_{AB}(3z^2+2z)dz = \int_0^{1+i}(3z^2+2z)dz = (z^3+z^2)|_0^{1+i} = (1+i)^3+(1+i)^2 =$$

$$= 1+3i+3i^2+i^3+1+2i+i^2 = 1+3i-3-i+1+2i-1 = -2+4i$$

Решим другим способом. Представим кривую в параметрическом виде:

$$z(t) = x(t)+iy(t), x(t) = t, y(t) = t^2, z_A = z(0), z_B = z(1)$$

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_0^1 f[z(t)]z'(t)dt = \int_0^1 (3(t+it^2)^2+2(t+it^2))(1+2it)dt =$$

$$= \int_0^1 (3(t^2+2t^3i+i^2t^4)+2t+2t^2i)(1+2it)dt =$$

$$= \int_0^1 (3t^2+6t^3i-3t^4+2t+2t^2i)(1+2it)dt =$$

$$= \int_0^1 (3t^2+6t^3i+6t^3i-12t^4-3t^4-6t^5i+2t+4t^2i+2t^2i-4t^3)dt =$$

$$= \int_0^1 (3t^2+12t^3i-15t^4-6t^5i+2t+6t^2i-4t^3)dt =$$

$$= \left(t^3-3t^5+t^2-t^4+i(3t^4-t^6+2t^3)\right)\Big|_0^1 = 1-3+1-1+i(3-1+2) = -2+4i$$

6. Определить область аналитичности функции. Разложить функцию в степенной ряд во всей области аналитичности

$$\frac{z+4}{2z^2+z^3-z^4}$$

Решение:

$$f(z) = \frac{z+4}{2z^2+z^3-z^4} = \frac{z+4}{-z^2(z^2-z-2)} = \frac{z+4}{-z^2(z+1)(z-2)} = -\frac{1}{z^2}\frac{z+4}{(z+1)(z-2)}$$

$$\frac{z+4}{(z+1)(z-2)} = \frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-2} = \frac{Az-2A+Bz+B}{(z+1)(z-2)}$$

$$Az-2A+Bz+B = z+4$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+B=4 \end{cases} => \begin{cases} B=1-A \\ -2A+1-A=4 \end{cases} => \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{z+1}-\frac{2}{z-2}\right)$$

Особые точки: $z=0, z=-1, z=2$

Имеем три области, в каждой из которых функция аналитична:

1) $0 < |z| < 1$

2) $1 < |z| < 2$

3) $2 < |z|$

Найдем разложения функции в каждой из данных областей.

Рассмотрим область $0 < |z| < 1$:

$f(z) = \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{z+1} - \frac{2}{z-2}\right) = \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{1-(-z)} + \frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right) = \frac{1}{z^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right) =$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{2^n}$

Рассмотрим область $1 < |z| < 2$:

$f(z) = \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{z+1} - \frac{2}{z-2}\right) = \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)} + \frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right) = \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{z\left(1-\left(-\frac{1}{z}\right)\right)} + \frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right) =$

$= \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+3}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{2^n}$

Рассмотрим область $2 < |z|$:

$f(z) = \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{z+1} - \frac{2}{z-2}\right) = \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)} - \frac{2}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)}\right) = \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{z\left(1-\left(-\frac{1}{z}\right)\right)} - \frac{2}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)}\right) =$

$= \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n - \frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+3}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{z^{n+3}}$

7. Найти изолированные особые точки функции, определить их тип

$$f(z) = \frac{1}{\sin z^2}$$

Решение:

$\exists \lim\limits_{z\to\pm\sqrt{\pi k}}\left(\frac{1}{\sin z^2}\right) = \infty$

Особая точка при $\sin z^2 = 0 => z^2 = \pi k, k \in \mathbb{Z} => z = \pm\sqrt{\pi k}, k \in \mathbb{Z} -$ простой полюс

8. Вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{1 - z^4 + 3z^6}{2z^3} dz$$

Решение:

Особая точка при $z = 0$: $\exists \lim\limits_{z\to 0}\left(\frac{1-z^4+4z^6}{2z^3}\right) = \infty =>$ полюс 3 порядка

$\mathrm{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}\left(f(z)\right)(z-z_0)^k}{dz^{k-1}}$, где $z_0 = 0, k = 3$

$\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z) = \frac{1}{(3-1)!}\lim\limits_{z\to 0}\frac{d^{3-1}\left(\frac{1-z^4+3z^6}{2z^3}\right)(z-0)^3}{dz^{3-1}} = \frac{1}{2}\lim\limits_{z\to 0}\frac{d^2\left(\frac{1-z^4+3z^6}{2z^3}\right)z^3}{dz^2} = \frac{1}{4}\lim\limits_{z\to 0}\frac{d^2\left(1-z^4+3z^6\right)}{dz^2} =$

$= \frac{1}{4}\lim\limits_{z\to 0}(-12z^2 + 90z^4) = 0$

По основной теореме Коши о вычетах:

$\oint_{\gamma^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\operatorname{res}} f(z)$

$\oint_{|z|\,=\frac{1}{3}} \frac{1-z^4+3z^6}{2z^3} dz = 2\pi i * 0 = 0$

9. Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-3\sin t}$$

Решение:

$z = e^{it}, \mathrm{dz} = \mathrm{e}^{\mathrm{it}}\mathrm{dt},\ dt = \frac{dz}{iz}, \sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}$

$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint_{|z|=1} F(z)dz$

$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-3\sin t} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{5-3\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}} * \frac{1}{iz} dz = \oint_{|z|=1} \frac{1}{5iz-\frac{3}{2}(z^2-1)} dz = \oint_{|z|=1} \frac{2}{10iz-3(z^2-1)} dz =$

$= \oint_{|z|=1} \frac{2}{-(3z^2-10zi-3)} dz = \oint_{|z|=1} \frac{2}{-3\left(z-\frac{i}{3}\right)(z-3i)} dz$

$3z^2 - 10zi - 3 = 0$

$z_{1,2} = \frac{10i\pm\sqrt{100i^2+4*3*3}}{6} = \frac{10i\pm\sqrt{-100+36}}{6} = \frac{10i\pm 8i}{6} = \frac{5i\pm 4i}{3} \Rightarrow z_1 = 3i,\ \ z_2 = \frac{i}{3}$

Две особых точки $z = 3i$ и $z = \frac{i}{3}$

Точка $z = 3i$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования. Точка $z = \frac{i}{3}$ является простым полюсом, так как $\exists \lim\limits_{z\to\frac{i}{3}} \left(\frac{2}{-3\left(z-\frac{i}{3}\right)(z-3i)}\right) = \infty$.

$\mathrm{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim\limits_{z\to z_0} \frac{d^{k-1}(f(z))(z-z_0)^k}{dz^{k-1}}$, где $z_0 = \frac{i}{3}, k = 1$

$\underset{z=\frac{i}{3}}{\operatorname{res}} f(z) = \lim\limits_{z\to\frac{i}{3}} \frac{2}{-3\left(z-\frac{i}{3}\right)(z-3i)} \left(z-\frac{i}{3}\right) = \lim\limits_{z\to\frac{i}{3}} \frac{2}{-3(z-3i)} = -\frac{i}{4}$

По основной теореме Коши о вычетах:

$\oint_{\gamma^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\operatorname{res}} f(z)$

$\oint_{|z|\,=\,1} \frac{2}{-3\left(z-\frac{i}{3}\right)(z-3i)} dz = 2\pi i * \left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$