

Обработка сигналов. Лекция 4. Спектр сигнала. ДПФ.

16 ноября 2021 г.

1 Введение

В предыдущих лекциях мы определили некоторые из основных понятий теории дискретных сигналов и систем. Мы видели, что представление входного сигнала в виде взвешенной суммы сдвинутых импульсов позволяет интерпретировать сигнал, выходной из линейной стационарной системы, в виде линейной комбинации сдвинутых импульсных характеристик. Как и непрерывные, дискретные сигналы можно представлять различными способами. Например, синусоидальные и комплексные экспоненциальные сигналы играют особенно важную роль в представлении дискретных сигналов. Это происходит в связи с тем, что комплексные экспоненциальные последовательности являются собственными функциями линейных стационарных систем, а реакция этой системы на синусоидальную последовательность остаётся синусоидальной последовательностью с той же частотой, фазой и амплитуда которой полностью определяется системой. Фундаментальное свойство линейных стационарных систем, позволяющее представлять сигналы в терминах синусоидальных или комплексных экспоненциальных последовательностей (т.е. представление Фурье), активно используется в теории линейных систем.

2 Дискретное преобразование Фурье

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) - одна из двух наиболее распространенных и мощных процедур цифровой обработки сигналов. (Другая процедура — цифровая фильтрация.) ДПФ позволяет анализировать, преобразовывать и синтезировать сигналы такими способами, которые невозможны при непрерывной (аналоговой) обработке. Хотя сегодня ДПФ используется практически во всех областях инженерной деятельности, мы увидим, что сфера его применения продолжает расширяться по мере того, как расширяется понимание его полезности. По этой причине основательное понимание ДПФ необходимо всем, кто работает в области цифровой обработки сигналов.

ДПФ — это математическая процедура, используемая для определения гармонического, или частотного, состава дискретных сигналов. Хотя для нас дискретный сигнал представляет собой набор значений, полученных в результате периодической дискретизации непрерывного сигнала во временной области, мы увидим, что ДПФ полезно для анализа любых дискретных последовательностей, независимо от того, что на самом деле эти последовательности представляют. Истоком ДПФ, конечно же, является непрерывное преобразование Фурье $X(f)$, которое определяется как

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2j\pi ft} dt, \quad (1)$$

где $x(t)$ — некоторый непрерывный сигнал во временной области.

В области обработки непрерывных сигналов (1) используется для преобразования аналитического выражения для непрерывной временной функции $x(t)$ в непрерывную функцию $X(f)$ в частотной области. Последующее вычисление значений выражения $X(f)$ дает нам возможность определить частотный состав любого сигнала, используемого на практике, и открывает широкий спектр возможностей для анализа и обработки сигналов в физике и технике. Несомненно, преобразование Фурье — наиболее значительный и широко распространенный математический механизм для анализа физических систем. Это мнение лучше сформулировано в знаменитой цитате лорда Кельвина: “Теорема Фурье — не только один из наиболее красивых результатов современного анализа, можно сказать, что она предоставляет нам необходимый инструмент для рассмотрения почти каждого трудного вопроса в современной физике”.

С приходом в нашу жизнь цифровых компьютеров усилия пионеров цифровой обработки привели к разработке ДПФ, которое определяется как дискретная последовательность $X(m)$ в частотной области:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-2j\pi nm/N}. \quad (2)$$

Это экспоненциальная форма формулы ДПФ, где $x(n)$ представляет собой дискретную последовательность значений, полученных дискретизацией во временной области непрерывной переменной $x(t)$. Символ e , конечно же, обозначает основание натуральных логарифмов, а $j = \sqrt{-1}$.

2.1 Смысл формулы ДПФ

Уравнение (2) имеет замысловатый и не слишком воодушевляющий вид, но не стоит отчаиваться. К концу этой главы формула (2) станет для вас одним из самых доступных и мощных инструментов в цифровой обработке сигналов. Начнем с того, что запишем формулу (2) другим способом и внимательно рассмотрим её.

Из тождества Эйлера $e^{-j\phi} = \cos(\phi) - j \sin(\phi)$ следует, что (2) эквивалентно следующему выражению:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) [\cos(2\pi nm/N) - j \sin(2\pi nm/N)]. \quad (3)$$

Это тригонометрическая форма формулы ДПФ. Мы разделили комплексную экспоненту в (2) на действительную и мнимую части, где $X(m)$ - m -й компонент ДПФ, т.е. (0), (1), (2), (3) и т. д.,

m — индекс ДПФ в частотной области,

$m = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$,

(n) — последовательность входных отсчётов (0), (1), (2), (3) и т. д.,

n — временной индекс входных отсчетов $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$,

$j = \sqrt{-1}$,

N — количество отсчётов входной последовательности и количество частотных отсчётов результата ДПФ.

Хотя (3) выглядит более сложно, чем (2), его легче понять. В стандартной записи ДПФ индексы входных значений (n) и выходных отсчётов ДПФ (m) всегда принимают значения от 0 до $N-1$. Это значит, что при наличии N входных отсчётов во временной области ДПФ определяет спектральный состав входного сигнала в N равномерно распределённых точках частотной оси. Значение N является важным параметром, т. к. оно определяет необходимое количество входных отсчетов, разрешающую способность результата по частоте, а также время, необходимое для вычисления N -точечного ДПФ.

Полезно рассмотреть структуру выражения (3), записав слагаемые суммы по отдельности. Например, при $N = 4$ и n , и m принимают значения от 0 до 3, а (3) превращается в

$$X(m) = \sum_{n=0}^3 x(n) [\cos(2\pi nm/4) - j \sin(2\pi nm/4)]. \quad (4)$$

Запишем все слагаемые первого отсчёта ДПФ, которому соответствует $m = 0$,

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0) \cos(2\pi \cdot 0 \cdot 0/4) - jx(0) \sin(2\pi \cdot 0 \cdot 0/4) \\ &+ x(1) \cos(2\pi \cdot 1 \cdot 0/4) - jx(1) \sin(2\pi \cdot 1 \cdot 0/4) \\ &+ x(2) \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 0/4) - jx(2) \sin(2\pi \cdot 2 \cdot 0/4) \\ &+ x(3) \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 0/4) - jx(3) \sin(2\pi \cdot 3 \cdot 0/4). \end{aligned} \quad (5)$$

Для второго выходного отсчёта ДПФ, соответствующего $m = 1$, (4) принимает вид

$$\begin{aligned} X(1) &= x(0) \cos(2\pi \cdot 0 \cdot 1/4) - jx(0) \sin(2\pi \cdot 0 \cdot 1/4) \\ &+ x(1) \cos(2\pi \cdot 1 \cdot 1/4) - jx(1) \sin(2\pi \cdot 1 \cdot 1/4) \\ &+ x(2) \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 1/4) - jx(2) \sin(2\pi \cdot 2 \cdot 1/4) \\ &+ x(3) \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 1/4) - jx(3) \sin(2\pi \cdot 3 \cdot 1/4). \end{aligned} \quad (6)$$

Для третьего выходного отсчёта, соответствующего $m = 2$, (4) превращается в

$$\begin{aligned} X(2) = & x(0) \cos(2\pi \cdot 0 \cdot 2/4) - jx(0) \sin(2\pi \cdot 0 \cdot 2/4) \\ & + x(1) \cos(2\pi \cdot 1 \cdot 2/4) - jx(1) \sin(2\pi \cdot 1 \cdot 2/4) \\ & + x(2) \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 2/4) - jx(2) \sin(2\pi \cdot 2 \cdot 2/4) \\ & + x(3) \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 2/4) - jx(3) \sin(2\pi \cdot 3 \cdot 2/4). \end{aligned} \quad (7)$$

Наконец, для четвёртого, и последнего, выходного отсчёта, которому соответствует индекс $m = 3$, (4) превращается в

$$\begin{aligned} X(3) = & x(0) \cos(2\pi \cdot 0 \cdot 3/4) - jx(0) \sin(2\pi \cdot 0 \cdot 3/4) \\ & + x(1) \cos(2\pi \cdot 1 \cdot 3/4) - jx(1) \sin(2\pi \cdot 1 \cdot 3/4) \\ & + x(2) \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 3/4) - jx(2) \sin(2\pi \cdot 2 \cdot 3/4) \\ & + x(3) \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 3/4) - jx(3) \sin(2\pi \cdot 3 \cdot 3/4). \end{aligned} \quad (8)$$

Структура выражений (5) — (8) теперь понятна, и мы ясно видим, почему в (3) удобнее использовать символ суммирования. Каждый выходной отсчёт ДПФ $X(m)$ представляет собой сумму почленных произведений входной последовательности отсчётов сигнала на последовательность отсчётов комплексной синусоиды (гармоники) вида $\cos(\phi) - j \sin(\phi)$. Точные значения частоты разных синусоид зависят как от частоты дискретизации f_s , с которой был дискретизирован исходный сигнал, так и от количества отсчётов N . Например, если мы дискретизируем непрерывный сигнал с частотой 500 отсчётов в секунду, а затем выполняем 16-точечное ДПФ дискретизированных данных, основная частота синусоид будет равна $f_s/N = 500/16$ или 31.25 Гц. Другие частоты, соответствующие $X(m)$ кратны основной частоте, т. е. $X(0) = 1$ -й частотный отсчёт, частота анализа которого = $0 \cdot 31.25 = 0$ Гц,

$X(1) = 2$ -й частотный отсчёт с частотой анализа = $1 \cdot 31.25 = 31.25$ Гц,

$X(2) = 3$ -й частотный отсчёт с частотой анализа = $2 \cdot 31.25 = 62.5$ Гц,

$X(3) = 4$ -й частотный отсчёт с частотой анализа = $3 \cdot 31.25 = 93.75$ Гц,

...

$X(15) = 16$ -й частотный отсчёт с частотой анализа = $15 \cdot 31.25 = 468.75$ Гц.

N разных частот анализа ДПФ определяются выражением

$$f_{\text{analysis}}(m) = (mf_s)/N. \quad (9)$$

Таким образом, в этом примере отсчет ДПФ $X(0)$ сообщает нам амплитуду компонента входного сигнала, имеющего частоту 0 Гц (постоянной составляющей), отсчет $X(1)$ задаёт амплитуду компонента с частотой 31.25 Гц, $X(2)$ — амплитуду компонента с частотой 62.5 Гц и т. д. Более того, как мы увидим дальше на примере, отсчёты ДПФ определяют также фазовые соотношения между частотными составляющими входного сигнала.

Довольно часто нас интересует как амплитуда, так и мощность каждого отсчёта $X(m)$.

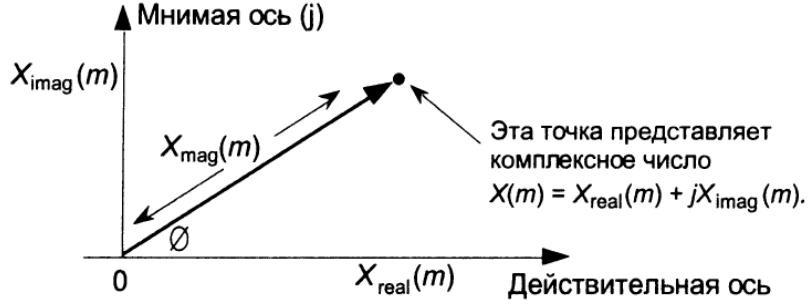


Рис. 1: Тригонометрические соотношения для отдельного комплексного значения $X(m)$.

Мощность сигнала пропорциональна квадрату его амплитуды. Если мы предположим, что коэффициент пропорциональности равен 1, мы можем выразить мощность последовательности во временной или частотной области как

$$x_{\text{pwr}}(n) = x(n)^2 = |x(n)|^2,$$

или

$$X_{\text{pwr}}(m) = X(m)^2 = |X(m)|^2,$$

Для вычисления амплитуды и мощности компонент $X(m)$ применимы стандартные соотношения в прямоугольном треугольнике.

Если мы представим произвольный отсчёт ДПФ (m) как сумму действительной и мнимой частей:

$$X(m) = X_{\text{real}}(m) + jX_{\text{imag}} = X_{\text{mag}} \quad (10)$$

с углом $X_{\phi}(m)$, то амплитуда (m) вычисляется как

$$X_{\text{mag}}(m) = |X(m)| = \sqrt{X_{\text{real}}(m)^2 + X_{\text{imag}}(m)^2}. \quad (11)$$

По определению, фазовый угол $X(m)$, $X_{\phi}(m)$ вычисляется как

$$X_{\phi}(m) = \tan^{-1}[X_{\text{imag}}(m)/X_{\text{mag}}(m)]. \quad (12)$$

Мощность отсчётов $X(m)$ которая называется спектром мощности, представляет собой амплитуду, возведённую в квадрат:

$$X_{\text{PS}} = X_{\text{mag}}(m)^2 = X_{\text{real}}(m)^2 + X_{\text{imag}}(m)^2. \quad (13)$$

2.2 Пример ДПФ №1

Смысл выражений (2) и (3) станет более ясным на примере, так что давайте подробно, по шагам, рассмотрим простую ситуацию. Допустим, мы

хотим дискретизировать непрерывный сигнал, содержащий компоненты с частотами 1 кГц и 2 кГц следующего вида:

$$x_{\text{in}}(t) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot t) + 0.5 \sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + 3\pi/4), \quad (14)$$

а затем выполнить 8-точечное ДПФ этого сигнала.

Чтобы сделать входной сигнал несколько более интересным, мы сдвинули компонент с частотой 2 кГц по фазе на 135° ($3\pi/4$ радиан) по отношению к компоненту с частотой 1 кГц. При частоте дискретизации f_s мы берем отсчёты входного сигнала каждые $1/f_s = t_s$ секунд. Поскольку $N = 8$, нам нужно взять 8 входных отсчетов, над которыми необходимо выполнить ДПФ. Таким образом, 8-элементная последовательность $x(n)$ равна $x_{\text{in}}(t)$, отсчёты которого берутся в моменты времени nt_s :

$$x(n) = x_{\text{in}}(nt_s) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot nt_s) + 0.5 \sin(2\pi \cdot 2000 \cdot nt_s + 3\pi/4). \quad (15)$$

Если мы выберем частоту дискретизации $f_s = 8000$ отсчетов в секунду, то, согласно (9), результат ДПФ будет показывать амплитуды составляющих, содержащихся в $x(n)$, с частотами анализа mf_s/N , или 0 кГц, 1 кГц, 2 кГц, ..., 7 кГц. При $f_s = 8000$ отсчетов/с наши восемь отсчетов (n) равны:

$$x(0) = 0.3535 \quad x(1) = 0.3535 \quad (16)$$

$$x(2) = 0.6464 \quad x(3) = 1.0607, \quad (17)$$

$$x(4) = 0.3535 \quad x(5) = -1.0607, \quad (18)$$

$$x(6) = -1.3535 \quad x(7) = -0.3535. \quad (19)$$

Эти значения отсчётов $x(n)$ показаны точками на сплошной непрерывной кривой, изображающей $x_{\text{in}}(t)$ на рисунке 2(a). (Обратите внимание на то, что сумма синусоидальных составляющих в (14), изображенных штриховыми линиями на рисунке 2(a), равна $x_{\text{in}}(t)$)

Теперь мы готовы использовать (3) для вычисления ДПФ нашего входного сигнала $x(n)$. Мы начнём с $m = 1$, потому что случай $m = 0$ даёт особый результат, который мы вкратце обсудим позже. Итак, для $m = 1$, или для отсчёта ДПФ с частотой 1 кГц ($mf_s/N = 1 \cdot 8000/8$), (3) в этом примере преобразуется в

$$X(1) = \sum_{n=0}^7 [x(n) \cos(2\pi n/8) - jx(n) \sin(2\pi n/8)]. \quad (20)$$

Затем мы умножим $x(n)$ на последовательные отсчёты косинуса и синуса первой частоты анализа, которые на восьми отсчетах проходят полный период. В нашем примере для $m = 1$ мы просуммируем произведения отсчётов последовательности $x(n)$ на отсчеты косинусоиды частоты 1 кГц и на отсчёты синусоиды частоты 1 кГц, вычисленные для значений аргумента $2\pi n/8$. Эти гармоники анализа показаны на рисунке 2(b) штриховыми линиями. Обратите внимание на то, что на нашем интервале анализа косинусоида и синусоида имеют $m = 1$ полный период.

Подставляя значения отсчётов $x(n)$ в (20) и записывая косинусоидальные члены в левом столбце, а синусоидальные — в правом, получаем:

$$\begin{aligned}
X(1) &= 0.3535 \cdot 1.0 & -j(0.3535 \cdot 0.0) & (n=0) \\
&+ 0.3535 \cdot 0.707 & -j(0.3535 \cdot 0.707) & (n=1) \\
&+ 0.6464 \cdot 0.0 & -j(0.6464 \cdot 1.0) & (n=2) \\
&+ 1.0607 \cdot -0.707 & -j(1.0607 \cdot 0.707) & \dots \\
&+ 0.3535 \cdot -1.0 & -j(0.3535 \cdot 0.0) & \dots \\
&- 1.0607 \cdot -0.707 & -j(0.3535 \cdot 0.0) & \dots \\
&- 1.3535 \cdot 0.0 & -j(-1.3535 \cdot -1.0) & \dots \\
&- 0.3535 \cdot 0.707 & -j(-0.3535 \cdot -0.707) & (n=7) \\
& & = 0.3535 + j0.0 & \\
& & + 0.250 - j0.250 & \\
& & + 0.0 - j0.6464 & \\
& & - 0.750 - j0.750 & \\
& & - 0.3535 - j0.0 & \\
& & + 0.750 - j0.750 & \\
& & + 0.0 - j1.3535 & \\
& & - 0.250 - j0.250 & \\
& & = 0.0 - j4.0 = 4\angle -90^\circ.
\end{aligned}$$

Итак, мы теперь видим, что входной сигнал $x(n)$ содержит компонент с частотой 1 кГц. Используя (11), (12) и (13) для $X(1)$ получаем: $X_{\text{mag}}(1) = 4$, $X_{\text{PS}}(1) = 16$ и фазовый угол $X(1)$ по отношению к косинусоиду с частотой 1 кГц составляет $X_\phi(1) = -90^\circ$.

Для частотной составляющей с $m = 2$ мы находим корреляцию $x(n)$ с косинусоидой и синусоидой с частотой 2 кГц. Эти сигналы изображаются штриховыми линиями на рисунке 2(с). Заметьте, что косинусоидальный и синусоидальный сигналы на нашем интервале анализа на рисунке 2(с) имеют ровно $m = 2$ полных периода. Подставляя значения отсчётов $x(n)$

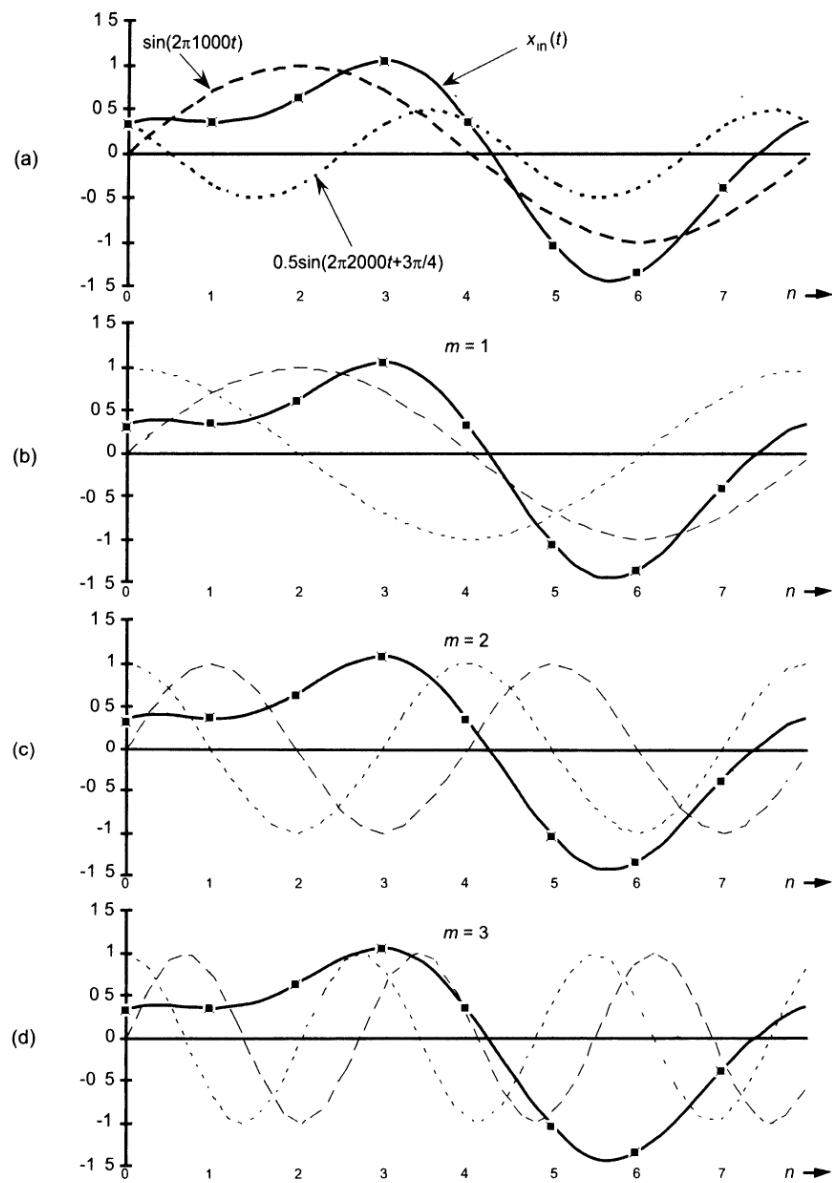


Рис. 2: Пример ДПФ №1: (а) входной сигнал; (b) входной сигнал и гармоники для $m = 1$; (с) входной сигнал и гармоники для $m = 2$; (d) входной сигнал и гармоники для $m = 3$.

в (3) для $m = 2$, получаем

$$\begin{aligned}
X(2) &= 0.3535 \cdot 1.0 & -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
&+ 0.3535 \cdot 0.0 & -j(0.3535 \cdot 1.0) \\
&+ 0.6464 \cdot -1.0 & -j(0.6464 \cdot 0.0) \\
&+ 1.0607 \cdot 0.0 & -j(1.0607 \cdot -1.0) \\
&+ 0.3535 \cdot 1.0 & -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
&- 1.0607 \cdot 0.0 & -j(-1.0607 \cdot 1.0) \\
&- 1.3535 \cdot -1.0 & -j(-1.3535 \cdot 0.0) \\
&- 0.3535 \cdot 0.0 & -j(-0.3535 \cdot -1.0) \\
&= 0.3535 + j0.0 \\
&\quad + 0.0 - j0.3535 \\
&\quad - 0.6464 - j0.0 \\
&\quad - 0.0 + j1.0607 \\
&\quad + 0.3535 - j0.0 \\
&\quad + 0.0 + j1.0607 \\
&\quad + 1.3535 - j0.0 \\
&\quad - 0.0 - j0.3535 \\
&= 1.414 + j1.414 = 2\angle 45^\circ.
\end{aligned}$$

В этом случае входной сигнал $x(n)$ содержит составляющую с частотой 2 кГц, относительная амплитуда которой равна 2, а фазовый угол по отношению к косинусоиду с частотой 2 кГц составляет 45° .

Для $m = 3$ мы находим корреляцию $x(n)$ с косинусоидой и синусоидой с частотой 3 кГц. Эти составляющие на рисунке 2(d) показаны штриховыми линиями. На интервале наблюдения на рисунке 2(d) и косинусоида, и синусоида имеют $m = 3$ полных периода. Подставляя значения отсчётов $x(n)$ в (3) для $m = 3$ получаем:

$$\begin{aligned}
X(3) &= 0.3535 \cdot 1.0 & -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
&+ 0.3535 \cdot -0.707 & -j(0.3535 \cdot 0.707) \\
&+ 0.6464 \cdot 0.0 & -j(0.6464 \cdot -1.0) \\
&+ 1.0607 \cdot 0.707 & -j(1.0607 \cdot 0.707) \\
&+ 0.3535 \cdot -1.0 & -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
&- 1.0607 \cdot 0.707 & -j(-1.0607 \cdot -0.707) \\
&- 1.3535 \cdot 0.0 & -j(-1.3535 \cdot 1.0) \\
&- 0.3535 \cdot -0.707 & -j(-0.3535 \cdot -0.707) \\
&= 0.3535 + j0.0 \\
&\quad -0.250 - j0.250 \\
&\quad +0.0 + j0.6464 \\
&\quad +0.750 - j0.750 \\
&\quad -0.3535 - j0.0 \\
&\quad -0.750 - j0.750 \\
&\quad +0.0 + j1.3535 \\
&\quad +0.250 - j0.250 \\
&= 0.0 - j0.0 = 0 \angle 0^\circ.
\end{aligned}$$

ДПФ показывает, что $x(n)$ не содержит компонентов с частотой 3 кГц. Продолжим вычисление ДПФ для $m = 4$ с использованием синусоид, показанных на рисунке 3(а).

Итак, (3) приобретает вид:

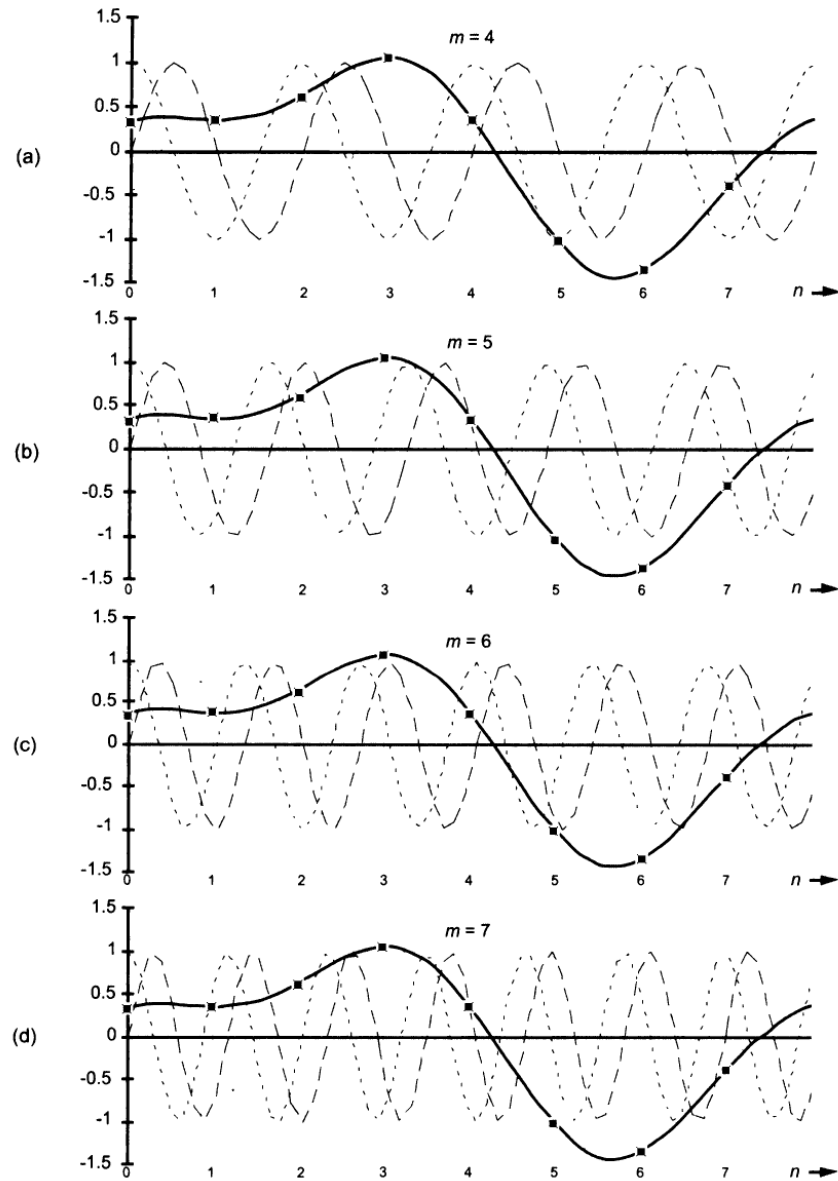


Рис. 3: Пример ДПФ №1: (а) входной сигнал и синусоиды для $m = 4$; (б) входной сигнал и синусоиды для $m = 5$; (с) входной сигнал и синусоиды для $m = 6$; (д) входной сигнал и синусоиды для $m = 7$.

$$\begin{aligned}
X(4) &= 0.3535 \cdot 1.0 & -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
&+ 0.3535 \cdot -1.0 & -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
&+ 0.6464 \cdot 1.0 & -j(0.6464 \cdot 0.0) \\
&+ 1.0607 \cdot -1.0 & -j(1.0607 \cdot 0.0) \\
&+ 0.3535 \cdot 1.0 & -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
&- 1.0607 \cdot -1.0 & -j(-1.0607 \cdot 0.0) \\
&- 1.3535 \cdot 1.0 & -j(-1.3535 \cdot 0.0) \\
&- 0.3535 \cdot -1.0 & -j(-0.3535 \cdot 0.0) \\
&& = 0.3535 - j0.0 \\
&& -0.3535 - j0.0 \\
&& +0.6464 - j0.0 \\
&& -1.0607 - j0.0 \\
&& +0.3535 - j0.0 \\
&& +1.0607 - j0.0 \\
&& -1.3535 - j0.0 \\
&& +0.3535 - j0.0 \\
&& = 0.0 - j0.0 = 0\angle 0^\circ.
\end{aligned}$$

(Внимательный читатель обнаружит, что в результате сложения левых частей не получится строгий ноль. Это погрешность цифровых вычислений. Всё же у нас курс цифровой обработки сигналов, и данный пример наглядно демонстрирует, с чем мы можем столкнуться.)

Для частотного отсчёта $m = 5$ использованием синусоид, приведенных на рисунке 3(b) ДПФ даёт:

$$\begin{aligned}
X(5) &= 0.3535 \cdot 1.0 & -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
&+ 0.3535 \cdot -0.707 & -j(0.3535 \cdot -0.707) \\
&+ 0.6464 \cdot 0.0 & -j(0.6464 \cdot 1.0) \\
&+ 1.0607 \cdot 0.707 & -j(1.0607 \cdot -0.707) \\
&+ 0.3535 \cdot -1.0 & -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
&- 1.0607 \cdot 0.707 & -j(-1.0607 \cdot 0.707) \\
&- 1.3535 \cdot 0.0 & -j(-1.3535 \cdot -1.0) \\
&- 0.3535 \cdot -0.707 & -j(-0.3535 \cdot 0.707) \\
& & = 0.3535 - j0.0 \\
& & -0.250 - j0.250 \\
& & +0.0 - j0.6464 \\
& & +0.750 + j0.750 \\
& & -0.3535 - j0.0 \\
& & -0.750 + j0.750 \\
& & +0.0 - j1.3535 \\
& & +0.250 + j0.250 \\
& & = 0.0 - j0.0 = 0\angle 0^\circ.
\end{aligned}$$

Для частотного отсчёта с $m = 6$ с использованием синусоид с рисунка 3(с), уравнение (3) даёт

$$\begin{aligned}
X(6) &= 0.3535 \cdot 1.0 & -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
&+ 0.3535 \cdot 0.0 & -j(0.3535 \cdot -1.0) \\
&+ 0.6464 \cdot -1.0 & -j(0.6464 \cdot 0.0) \\
&+ 1.0607 \cdot 0.0 & -j(1.0607 \cdot 1.0) \\
&+ 0.3535 \cdot 1.0 & -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
&- 1.0607 \cdot 0.0 & -j(-1.0607 \cdot -1.0) \\
&- 1.3535 \cdot -1.0 & -j(-1.3535 \cdot 0.0) \\
&- 0.3535 \cdot 0.0 & -j(-0.3535 \cdot 1.0) \\
&= 0.3535 - j0.0 \\
&\quad +0.0 + j0.3535 \\
&\quad -0.6464 - j0.0 \\
&\quad +0.0 - j1.0607 \\
&\quad +0.3535 - j0.0 \\
&\quad +0.0 - j1.0607 \\
&\quad +1.3535 - j0.0 \\
&\quad +0.0 + j0.3535 \\
&= 1.414 - j1.414 = 2\angle 45^\circ.
\end{aligned}$$

Для $m = 7$ и синусоид с рисунка 3(d) уравнение (3) даёт:

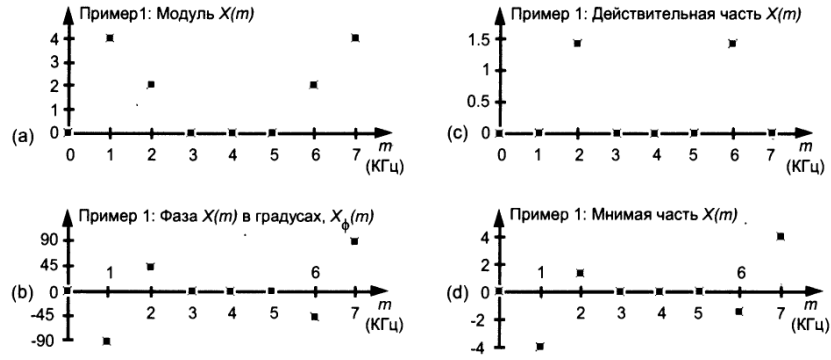


Рис. 4: Результат ДПФ из примера №1: (а) модуль $X(m)$; (б) фаза $X(m)$; (с) действительная часть $X(m)$; (г) мнимая часть $X(m)$.

$$\begin{aligned}
X(7) &= 0.3535 \cdot 1.0 & -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
&+ 0.3535 \cdot 0.707 & -j(0.3535 \cdot -0.707) \\
&+ 0.6464 \cdot 0.0 & -j(0.6464 \cdot -1.0) \\
&+ 1.0607 \cdot -0.707 & -j(1.0607 \cdot -0.707) \\
&+ 0.3535 \cdot -1.0 & -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
&- 1.0607 \cdot -0.707 & -j(-1.0607 \cdot 0.707) \\
&- 1.3535 \cdot 0.0 & -j(-1.3535 \cdot 1.0) \\
&- 0.3535 \cdot 0.707 & -j(-0.3535 \cdot 0.707) \\
&= 0.3535 + j0.0 \\
&\quad + 0.250 + j0.250 \\
&\quad + 0.0 + j0.6464 \\
&\quad - 0.750 + j0.750 \\
&\quad + 0.3535 - j0.0 \\
&\quad + 0.750 + j0.750 \\
&\quad + 0.0 + j1.3535 \\
&\quad - 0.250 + j0.250 \\
&= 0.0 + j4.0 = 4 \angle 90^\circ.
\end{aligned}$$

Если мы построим график модулей $X(m)$, как функции частоты, мы получим амплитудный *спектр* входной последовательности $x(n)$, приведённый на рисунке 4(а). Фазовые углы отсчетов $X(m)$ изображены на рисунке 4(б).

Сделаем последнее усилие, мы уже почти закончили с этим примером. Мы оставили вычисление отсчёта с $m = 0$ напоследок, т. к. он имеет особое

значение. Когда $m = 0$, мы находим корреляцию $x(n)$ с $\cos(0) - j \sin(0)$, так что (3) превращается в

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) [\cos(0) - j \sin(0)] \quad (21)$$

Поскольку $\cos(0) = 1$, а $\sin(0) = 0$,

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \quad (22)$$

Мы можем видеть, что (22) представляет собой сумму отсчётов $x(n)$. Эта сумма, конечно же, пропорциональна среднему значению $x(n)$. (Точнее, отсчёт $X(0)$ равен среднему значению $x(n)$, умноженному на N . Это не случайно, т. к. отсчёт $X(0)$ в частотной области представляет собой не изменяющийся во времени постоянный компонент $x(n)$. Если бы $X(0)$ был отличен от нуля, это подсказало бы нам, что последовательность $x(n)$ имеет некоторое постоянное смещение, и её среднее значение не равно нулю. Для нашего конкретного примера (14) сумма равна 0. Входная последовательность не имеет постоянной составляющей, так что мы знаем, что $X(0)$ будет равным нулю. Но не поленимся, и для успокоения совести всё-таки вычислим $X(0)$.

Вычисляя значение (3) или (22) при $m = 0$ мы видим, что

$$\begin{aligned} X(0) &= 0.3535 \cdot 1.0 & -j(0.3535 \cdot 0.0) \\ &+ 0.3535 \cdot 1.0 & -j(0.3535 \cdot 0.0) \\ &+ 0.6464 \cdot 1.0 & -j(0.6464 \cdot 0.0) \\ &+ 1.0607 \cdot 1.0 & -j(1.0607 \cdot 0.0) \\ &+ 0.3535 \cdot -1.0 & -j(0.3535 \cdot 0.0) \\ &- 1.0607 \cdot 1.0 & -j(-1.0607 \cdot 0.0) \\ &- 1.3535 \cdot 1.0 & -j(-1.3535 \cdot 0.0) \\ &- 0.3535 \cdot 1.0 & -j(-0.3535 \cdot 0.0) \\ &= 0.3535 - j0.0 \\ &+ 0.3535 - j0.0 \\ &+ 0.6464 - j0.0 \\ &+ 1.0607 - j0.0 \\ &+ 0.3535 - j0.0 \\ &- 1.0607 - j0.0 \\ &- 1.3535 - j0.0 \\ &- 0.3535 - j0.0 \\ &= 0.0 - j0.0 = 0 \angle 0^\circ. \end{aligned}$$

Таким образом, $x(n)$ не имеет постоянной составляющей, и, следовательно, его среднее значение равно нулю. Заметим, что рисунок 4 показывает, что $x_{\text{in}}(t)$ из (14) имеет компоненты с частотами 1 кГц ($m = 1$) и 2 кГц ($m = 2$). Более того, амплитуда тона с частотой 1 кГц в два раза выше амплитуды тона с частотой 2 кГц. Результат ДПФ, показанный на рисунке 3.4, показывает нам точный спектральный состав сигнала, определяемого уравнениями (14) и (15).

Наблюдательный студент должен был бы задать здесь два вопроса. Во-первых, что означают ненулевые значения амплитуды при $m = 6$ и $m = 7$ на рисунке 4(а)? А во-вторых, почему амплитуды оказались в четыре раза больше, чем мы ожидали? Это хорошие вопросы, и мы вскоре на них ответим. Приведенный пример 8-точечного ДПФ, хотя и довольно простой, иллюстрирует две очень важные особенности ДПФ, которые мы не должны забывать никогда. Во-первых, любое отдельное значение $X(m)$ — не более чем сумма почленных произведений входной последовательности отсчётов на косинусоиду и синусоиду (или корреляция), частота которых такова, что на интервале наблюдения из N отсчетов укладывается m их полных периодов. Это справедливо независимо от того, какова частота дискретизации f_s , и независимо от величины N в N -точечном ДПФ. Второй важной особенностью ДПФ действительного сигнала является симметрия выходных отсчётов ДПФ.

3 Симметрия ДПФ

Взглянув на рисунок 4(а), можно увидеть явную симметрию результатов ДПФ. Хотя стандартное ДПФ предназначено для обработки комплексных входных последовательностей, большинство реальных входных сигналов (таких как оцифрованные отсчёты некоторого непрерывного сигнала) относятся к действительным сигналам: действительные входные сигналы имеют отличные от нуля действительные части, а их мнимые части полагаются равными 0. Когда входная последовательность $x(n)$ действительна, как это будет во всех наших примерах, комплексные отсчёты ДПФ для m от 1 до $(N/2) - 1$ тесно связаны с частотными отсчётами с $m > (N/2)$. m -й отсчёт ДПФ имеет тот же модуль, что и $(N - m)$ -й отсчёт ДПФ. Фазовый угол m -го отсчёта ДПФ равен фазовому углу $(N - m)$ -го отсчёта, взятому с противоположным знаком. Таким образом, m -й и $(N - m)$ -й отсчёты связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} X(m) &= |X(m)| \text{ с углом } X_\phi(m) \text{ градусов} \\ &= |X(N - m)| \text{ с углом } -X_\phi(N - m) \text{ градусов} \end{aligned} \quad (23)$$

Мы можем утверждать, что, когда входная последовательность ДПФ действительна, $X(m)$ и $X(N - m)$ образуют комплексно-сопряжённую пару, или

$$X(m) = X^*(N - m), \quad (24)$$

где верхний индекс $*$ обозначает комплексную сопряженность.

Обратите внимание на то, что в нашем примере, рассмотренном выше на рисунках 4(b) и 4(d) отсчеты $X(5)$, $X(6)$ и $X(7)$ комплексно сопряжены отсчетам $X(3)$, $X(2)$ и $X(1)$ соответственно. Аналогично симметрии модуля ДПФ действительная часть $X(m)$ обладает тем, что называется чётной симметрией, как показано на рисунке 4(c), а мнимая часть ДПФ обладает нечётной симметрией, как показано на рисунке 4(d). Именно это соотношение имеют в виду, когда в литературе называют ДПФ сопряженно-симметричным. Это значит, что, если мы выполняем N -точечное ДПФ действительной последовательности, мы получим N отдельных комплексных отсчетов, но только $N/2 + 1$ отсчетов будут независимыми. Следовательно, чтобы получить ДПФ последовательности $x(n)$, нам необходимо вычислить только первые $N/2 + 1$ отсчетов $X(m)$ при $0 < m < (N/2)$; отсчеты от $X(N/2 + 1)$ до $X(N - 1)$ не дают дополнительной информации о спектре действительной последовательности $x(n)$.

Хотя (2) и (3) эквивалентны, экспоненциальная форма ДПФ (2) имеет огромное преимущество перед формой (3). Форма (2) не только позволяет сэкономить чернила и бумагу, экспонентами в (2) гораздо легче манипулировать, когда мы пытаемся анализировать соотношения, связанные с ДПФ. При использовании (2) умножение членов сводится к сложению показателей степени, и в этом случае не нужно запоминать все необходимые тригонометрические тождества. Вы можете убедиться в этом самостоятельно, доказав справедливость выражения (24) и симметрию ДПФ действительных последовательностей с использованием экспоненциальной против тригонометрической формы ДПФ.

Существует ещё одно свойство симметрии ДПФ, которое заслуживает упоминания. На практике нам иногда приходится вычислять ДПФ действительных последовательностей, для которых индекс n принимает как положительные, так и отрицательные значения. Если такая действительная последовательность чётна, то последовательность $X(m)$ всегда действительна и чётна; т. е., если действительная последовательность такова, что $x(n) = x(-n)$ то величина $X_{\text{real}}(m)$ в общем случае отлична от нуля, а $X_{\text{imag}}(m)$ равна 0. И наоборот, если действительная последовательность нечётна, т. е. $x(n) = -x(-n)$, то $X_{\text{real}}(m)$ всегда равна 0, а $X_{\text{imag}}(m)$ в общем случае отлична от 0. Это свойство ДПФ, связанное с симметрией входных последовательностей, присуще не только ДПФ, но и непрерывному преобразованию Фурье.

4 Модули ДПФ

Результаты примера ДПФ № 1 $|X(1)| = 4$ и $|X(2)| = 2$ могут озадачить, потому что входной сигнал $x(n)$ вида (15) содержит гармоники с амплитудами, равными 1.0 и 0.5 соответственно. Имеется важная особенность, о которой всегда следует помнить, рассматривая ДПФ, определяемое соотношением (2). Когда действительный входной сигнал содержит синусои-

дальний компонент с амплитудой A_0 и целым количеством периодов на N отсчётах, амплитуда выходного отсчёта ДПФ, соответствующего конкретной синусоиде, равна M_r , где

$$M_r = A_0 N / 2 \quad (25)$$

Если на вход ДПФ поступает комплексная синусоида амплитуды A_0 (т.е. $A_0 e^{j2\pi ft}$) с целым количеством периодов на N отсчётах, модуль соответствующего отсчёта ДПФ равен M_c , где

$$M_c = A_0 N \quad (26)$$

Как утверждалось в связи с (22), если входной сигнал имеет постоянную составляющую D_0 , то модуль отсчёта ДПФ $X(0)$ равен $D_0 N$.

В случае действительного входного сигнала частотой 1000 Гц из (15) $A_0 = 1$ и $N = 5$, так что $M_{\text{real}} = 1 \cdot 8/2 = 4$, что совпадает с результатом, полученным в примере. Соотношение (25) может быть не столь важным, когда мы выполняем ДПФ программно или аппаратно, используя числа с плавающей точкой, но если мы реализуем ДПФ в целочисленной арифметике, мы должны отдавать себе отчёт в том, что результат может принимать значения, которые в $N/2$ раз превышают пиковое значение входного сигнала. Это значит, что для действительного сигнала аппаратные регистры должны быть достаточно длинными, чтобы в них помещались большие числа, которые в $N/2$ раз больше максимальной амплитуды входного сигнала. Выражения (25) и (26) являются причиной того, что мы часто видим в литературе определение ДПФ в форме:

$$X'(m) = (1/N) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nm/N}. \quad (27)$$

Масштабирующий коэффициент $1/N$ (27) делает модули $X'(m)$ равными половине пикового значения синусоиды во временной области ценой дополнительной операции деления на N . Программные и аппаратные реализации ДПФ обычно используют (2), а не (27). Конечно, как всегда, имеются исключения. Существуют коммерческие пакеты программ, в которых используется следующая формула прямого и обратного ДПФ:

$$X''(m) = (1/\sqrt{N}) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nm/N}.$$

и

$$x(n) = (1/\sqrt{N}) \sum_{m=0}^{N-1} X''(m) e^{j2\pi nm/N}. \quad (28)$$

(Далее мы обсудим смысл и значение обратного ДПФ).

Масштабирующие множители в (28) кажутся несколько странными, но они позволяют выполнять вычисления так, что при последовательном выполнении прямого и обратного ДПФ масштаб сигнала не изменяется. На

практике при анализе спектра сигнала нас больше интересуют относительные значения отсчетов ДПФ, а не их абсолютные значения, поэтому обычно масштабные множители для нас не имеют значения.

5 Частотная ось ДПФ

Частотная ось m результатов ДПФ на рисунке 4 заслуживает того, чтобы мы обратили на неё внимание еще раз. Предположим, что мы не видели наш пример №1, нам дали восемь отсчётов входного сигнала из (16) и попросили выполнить 8-точечное ДПФ. Мы выполнили сложные расчеты согласно (2) и получили значения $X(m)$, показанные на рисунке 4. Затем мы спрашиваем: “Какова частота в Герцах компонента $X(m)$ с наибольшим модулем?”. Ответ зависит от частоты дискретизации f_s . Не зная её заранее, мы не можем ничего сказать о том, с каким временным интервалом брались отсчёты, следовательно, мы не знаем масштаб частотной оси. Правильный ответ состоит в том, чтобы взять f_s и подставить её в (9) при $m = 1$. Таким образом, если $f_s = 8000$ отсчётов в секунду, то частота, соответствующая отсчёту ДПФ наибольшей величины, равна

$$f_{\text{analysis}}(m) = mf_s/N = f_{\text{analysis}}(1) = (1 \cdot 8000)/8 = 1000\text{Гц}$$

Если бы нам сказали, что частота дискретизации f_s равна 75 отсчётам в секунду, мы бы знали, благодаря (9), что частота, соответствующая наибольшему отсчёту, равна

$$f_{\text{analysis}}(1) = (1 \cdot 75)/8\text{Гц}$$

Помните, что расстояние по частоте между отсчётами ДПФ (разрешение) равно f_s/N .

Итак, подведём итог тому, что мы узнали:

- каждый выходной отсчёт ДПФ есть сумма почленных произведений входной последовательности на последовательности, представляющие синусоидальный и косинусоидальный сигналы;
- для действительных сигналов N -точечное ДПФ дает только $N/2 + 1$ независимых отсчётов;
- ДПФ представляет собой линейную операцию;
- модули результатов ДПФ прямо пропорциональны N ;
- разрешающая способность ДПФ по частоте составляет f_s/N .

Важно также понимать, что согласно (9) отсчёт $X(N/2 + 1)$, для которого $m = N/2 + 1$, соответствует половине частоты дискретизации, т. е. частоте Найквиста $f_s/2$.

6 Теорема о сдвиге

ДПФ обладает важным свойством, которое выражают теоремой о сдвиге. Теорема утверждает, что сдвиг периодической последовательности $x(n)$ во времени проявляется в результатах ДПФ как добавка к их фазовым углам. (Здесь мы не будем доказывать эту теорему, т. к. доказательство имеется практически в любом учебнике по ЦОС.) Если мы берём отсчёты $x(n)$, начиная с некоторого n , равного целому k , а не с $n = 0$, ДПФ этой сдвинутой последовательности будет $X_{\text{shifted}}(m)$

$$X_{\text{shifted}}(m) = e^{j2\pi km/N} X(m). \quad (29)$$

Выражение (29) показывает, что, если начало взятия отсчётов $x(n)$ смещается вправо на k отсчётов, то спектр $X_{\text{shifted}}(m)$ состоит из комплексных отсчётов $X(m)$, умноженных на фазовый множитель, что приводит просто к сдвигу фазы на $2\pi km$ радиан, или на $360km/N$ градусов. Если же начало взятия отсчётов $x(n)$ сдвигается на k отсчётов влево, спектр $X_{\text{shifted}}(m)$ получается умножением $X(m)$ на $e^{-j2\pi km/N}$.

7 Обратное ДПФ

Хотя главной темой этой лекции является ДПФ, сейчас уместно ввести обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ). Обычно мы считаем, что ДПФ преобразует данные временной области в представление в частотной области. Но мы можем обратить этот процесс и получить исходный сигнал во временной области, выполнив ОДПФ отсчётов $X(m)$ в частотной области. Стандартные выражения для ОДПФ имеют вид:

$$x(n) = (1/N) \sum_{m=0}^{N-1} X(m) e^{j2\pi nm/N} \quad (30)$$

или

$$x(n) = (1/N) \sum_{m=0}^{N-1} X(m) [\cos(2\pi mn/N) + j \sin(2\pi mn/N)]. \quad (31)$$

Вспомним наше утверждение о том, что дискретный сигнал во временной области можно рассматривать как сумму синусоид с разными аналитическими частотами и что результат ДПФ, $X(m)$, представляет собой набор N комплексных отсчётов, которые отражают амплитуды и фазы этих синусоид. Формулы (30) и (31) представляют собой математические выражения этого утверждения. Если мы выполняем ОДПФ, подставляя результаты ДПФ из примера №1 в (30), мы возвращаемся из частотной области обратно во временную и получаем исходные действительные отсчёты $x(n)$ из (16),

имеющие значения

$$\begin{array}{ll} x(0) = 0.3535 + j0.0, & x(1) = 0.3535 + j0.0 \\ x(2) = 0.6464 + j0.0 & x(3) = 1.0607 + j0.0 \\ x(4) = 0.3535 + j0.0 & x(5) = -1.0607 + j0.0 \\ x(6) = -1.3535 + j0.0 & x(7) = -0.3535 + j0.0 \end{array}$$

Обратите внимание на то, что выражение (30) отличается от ДПФ (2) только масштабирующим множителем $1/N$ и знаком показателя степени. Кроме модуля результатов, все характеристики, которые мы до сих пор рассматривали для ДПФ, также присущи и ОДПФ.

8 Гребешковые искажения ДПФ

Гребешковые искажения — это флуктуации общего амплитудного спектра при N -точечном ДПФ. Все бины, а ими называются компоненты $X(m)$ ДПФ, дают составляющие, имеющие форму вида $\sin(x)/x$. На рисунке 5(а) показан общий спектр, полученный в результате наложения составляющих вида $\sin(x)/x$ от нескольких бинов. Возможно, картина на рисунке 5(а) послужила причиной того, что отдельные отсчеты ДПФ называют бинами. Вся энергия сигнала под кривой $\sin(x)/x$ попадает в “хранилище” данного отсчёта ДПФ. (“Bin” по-английски значит “ларь”, “бункер”). Поскольку боковые лепестки функции sinc в данном случае не играют роли, на рисунке 5(а) они не показаны. На рисунке 5(б) общая реакция ДПФ в частотной области показана толстой линией, огибающей главные лепестки бинов. Эта пульсирующая кривая, причину пульсации которой также называют эффектом частоткола, отображает потери, возникающие для частот, лежащих между центрами бинов. По рисунку 5(б) мы можем определить, что модуль ДПФ изменяется от 1 в центре бина до 0.637 на равном удалении от двух соседних бинов. С точки зрения энергетического спектра эти пульсации приведут к гребешковым искажениям почти в -4 дБ на равном удалении от соседних бинов.

На практике, однако, гребешковые искажения не являются серьезной проблемой. Реальные сигналы обычно имеют спектр, занимающий несколько бинов, так что пульсации спектра могут оказаться практически незаметными.

9 Интерпретация ДПФ

Теперь, когда мы кое-что узнали о ДПФ, самое время убедиться в том, что мы правильно понимаем, что в действительности представляет собой ДПФ, и постараться избежать обычных заблуждений относительно его поведения. В литературе по ЦОС мы найдём разделы, посвященные непрерывному преобразованию Фурье, рядам Фурье, дискретно-временному преобразованию Фурье, дискретному преобразованию Фурье и периодическим

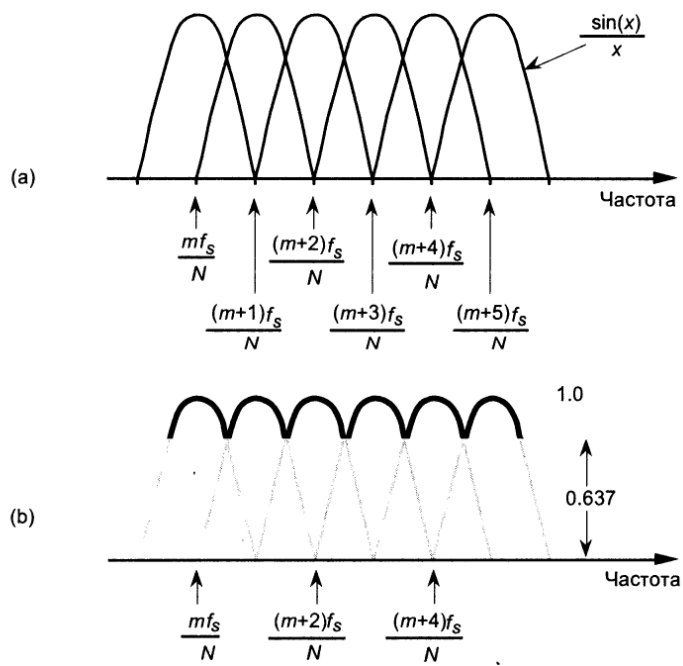


Рис. 5: Амплитудно-частотная характеристика бинов ДПФ: (а) отдельные кривые вида $\sin(x)/x$ для каждого бина ДПФ; (б) общая амплитудно-частотная характеристика.

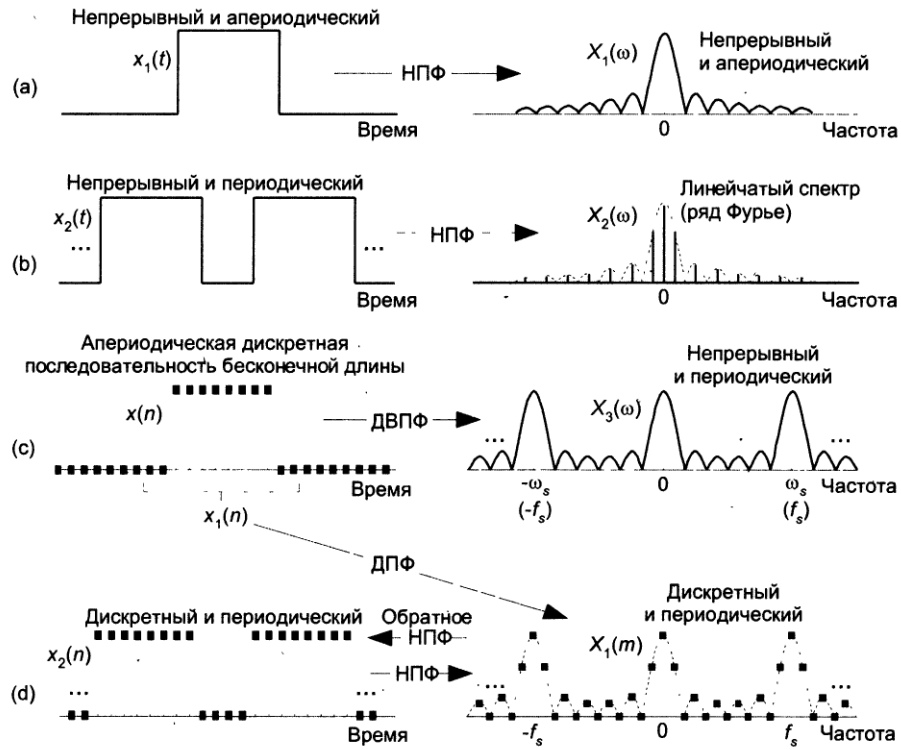


Рис. 6: Сигналы и последовательности во временной области и модули их преобразований в частотной области.

спектрам. Чтобы не запутаться во всех этих понятиях, требуется приложить определенные усилия, особенно когда вы читаете или слышите что-то вроде “ДПФ предполагает, что его входная последовательность периодична во времени”. (Вы удивляетесь, почему это так, поскольку ничего не стоит вычислить ДПФ аperiodической последовательности.) Такое замечание в лучшем случае сбивает с толку, т. е. ДПФ не требует подобных предположений.

Рассмотрим непрерывный сигнал бесконечной длительности, содержащий единственный импульс конечной длительности, показанный на рисунке 6(a). Модуль непрерывного преобразования Фурье (НПФ) такого сигнала представляет собой непрерывную функцию частоты $X_1(\omega)$. Если этот импульс можно описать аналитически, то функцию $X_1(\omega)$ можно также найти аналитически, взяв интеграл Фурье. Непрерывная частота ω измеряется в радианах в секунду.

Если мы возьмем НПФ бесконечного по длительности сигнала, представляющего собой периодическую последовательность импульсов, показанную на рисунке 6(b), мы получим линейчатый спектр, известный как

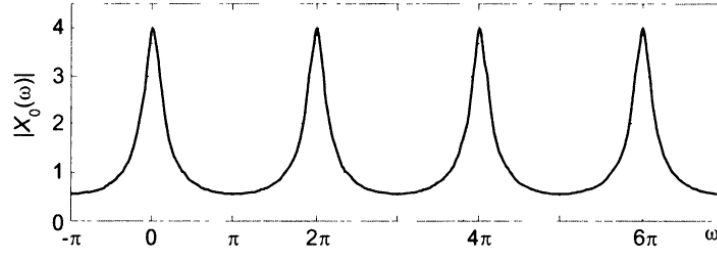


Рис. 7: Модуль ДВПФ $|X_0(\omega)|$.

ряд Фурье $X_2(\omega)$. (Точнее, спектр представляет собой коэффициенты ряда Фурье.) Линии этого спектра имеют бесконечно малую ширину, а $X_2(\omega)$ хорошо определен в промежутках между этими линиями, т. к. $X_2(\omega)$ является непрерывной функцией частоты.

Рисунок 6(b) показывает пример непрерывной периодической функции, спектр которой содержит ряд дискретных компонентов. Вы можете считать ряд Фурье $X_2(\omega)$ дискретизированной версией непрерывного спектра на рисунке 6(a). Это соотношение между временным и частотным представлением сигнала $x_2(t)$ и $X_2(\omega)$ показывает, что периодической функции в одной области соответствует дискретная по своей природе функция в другой области.

Далее, рассмотрим бесконечную по длительности дискретную последовательность $x(n)$, содержащую несколько ненулевых отсчётов, показанную на рисунке 6(c). Мы можем вычислить НПФ $x(n)$, которое описывает спектр в виде непрерывной функции $X_3(\omega)$. Этот непрерывный спектр называется дискретно-временным преобразованием Фурье (ДВПФ), которое определено как

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}. \quad (32)$$

Чтобы проиллюстрировать ДВПФ, предположим, что у нас есть последовательность вида $x_0(n) = (0.75)^n$ при $n \geq 0$. Её ДВПФ имеет вид

$$X_0(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0.75^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (0.75e^{-j\omega})^n. \quad (33)$$

Выражение (33) представляет собой геометрическую прогрессию, сумма которой равна

$$X_0(\omega) = 1/(1 - 0.75e^{-j\omega}) = e^{j\omega}/(e^{j\omega} - 0.75). \quad (34)$$

Спектр $X_0(\omega)$ непрерывен и периодичен с периодом 2π , его модуль показан на рисунке 7. Это пример дискретной функции времени, имеющей периодический спектр. Мы можем проверить периодичность ДВПФ, используя

целое число k в следующем выражении:

$$\begin{aligned} X(\omega + 2\pi k) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+2\pi k)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}e^{-j2\pi kn} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = X(\omega) \end{aligned} \quad (35)$$

потому что $e^{-j2\pi kn} = 1$ для целых значений k .

$X_3(\omega)$ на рисунке 6(с) также имеет период 2π , если представить его как функцию круговой частоты $\omega_s = 2\pi f_s$, где частота f_s представляет собой величину, обратную периоду отсчётов $x(n)$. Непрерывная периодическая функция $X_3(\omega)$ представляет собой то, что мы хотели бы иметь на практике, но мы не можем этого добиться. Мы используем компьютеры и не можем выполнять анализ непрерывных сигналов из-за дискретной природы самих компьютеров. Любые операции обработки данных выполняются над дискретными числами, хранящимися в памяти компьютера, и вследствие этого все сигналы во временной области и все частотные спектры представляют собой дискретные последовательности, полученные в результате дискретизации. Следовательно, НПФ и обратное НПФ последовательностей, с которыми мы работаем, будут периодическими.

Преобразования, показанные на рисунках 6(а–с) представляют собой результат математических выкладок на бумаге. В компьютере, использующем дискретные последовательности конечной длины, мы можем только аппроксимировать НПФ (ДВПФ) последовательности $x(n)$ бесконечной длины, показанное на рисунке 6(с). Эта аппроксимация есть дискретное преобразование Фурье (ДПФ), и это единственный инструмент Фурье, который нам доступен. Вычисляя ДПФ последовательности $x_1(n)$, которая является конечной частью $x(n)$, мы получаем дискретные периодические отсчеты $X_1(m)$, показанные на рисунке 6(d). Обратите внимание на то, что $X_1(m)$ есть дискретизированная версия непрерывного периодического спектра $X_3(\omega)$. Однако спектр $X_1(m)$ в точности равен НПФ периодической последовательности $x_2(n)$ на рисунке 6(d). Так что, когда кто-нибудь говорит: “ДПФ предполагает, что входная последовательность периодична во времени”, — он имеет в виду, что ДПФ равно непрерывному преобразованию Фурье (которое называется ДВПФ) периодической дискретной последовательности. Итог всего сказанного заключается в следующем: если функция периодична, ее прямое/обратное ДВПФ будет дискретным; если функция дискретна, ее прямое/обратное ДВПФ будет периодическим.