Касьяненко Вера (Р3220, Теор.Вероятн. 5.1)

ИДЗ 19.1 (вариант 5)

Дано:

В результате эксперимента получены данные, записанные в виде статистического ряда:

1,6	4,4	10,9	6,4	4,0	2,8	5,2	1,2	7,6	3,4
2,9	5,3	1,7	7,7	6,9	10,1	5,4	4,1	8,8	6,5
6,6	4,2	5,5	0,5	8,9	4,5	1,8	5,6	7,8	3,0
1,9	10,2	7,9	2,5	5,7	3,1	6,7	4,3	0,6	9,0
6,8	3,2	4,4	9,1	10,3	6,0	7,9	6,9	8,0	2,0
7,0	10,7	8,1	2,1	5,8	6,4	0,3	4,5	9,2	3,3
7,6	9,3	3,4	4,6	5,0	3,8	5,9	8,2	2,2	7,1
2,3	0,8	7,2	8,3	11,1	6,5	3,5	9,4	10,8	4,7
4,8	6,1	3,6	9,5	8,4	2,4	6,2	7,3	5,7	0,9
7,4	8,5	5,8	1,1	5,9	4,9	3,7	9,6	2,6	6,1

Решение:

а) Располагаем значения результатов эксперимента в порядке возрастания, т.е. записываем вариационный ряд:

0,3	0,5	0,6	0,8	0,9	1,1	1,2	1,6	1,7	1,8
1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,8	2,9
3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8
4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,4	4,5	4,5	4,6	4,7
4,8	4,9	5,0	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,7
5,8	5,8	5,9	5,9	6,0	6,1	6,1	6,2	6,4	6,4
6,5	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	6,9	7,0	7,1	7,2
7,3	7,4	7,6	7,6	7,7	7,8	7,9	7,9	8,0	8,1
8,2	8,3	8,4	8,5	8,8	8,9	9,0	9,1	9,2	9,3
9,4	9,5	9,6	10,1	10,2	10,3	10,7	10,8	10,9	11,1

б) Находим размах варьирования: $\omega = x_{max} - x_{min} = 11{,}1 - 0{,}3 = 10{,}8$

Величина отдельного интервала: $h = \frac{\omega}{9} = \frac{10{,}8}{9} = 1{,}2$

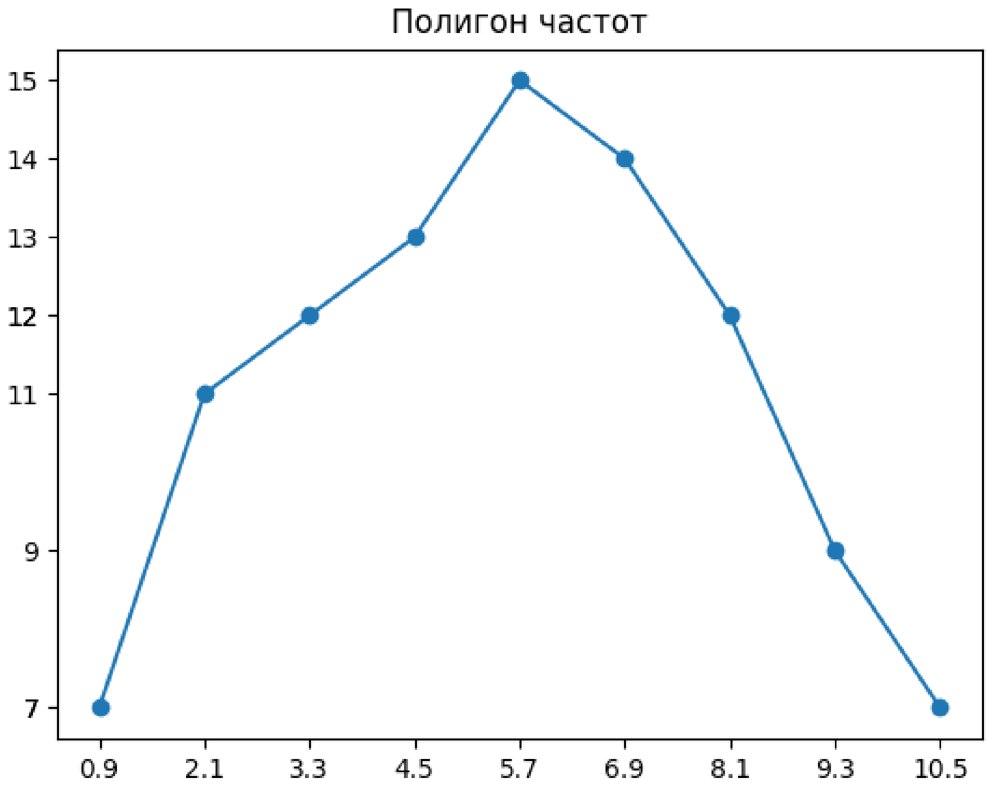
Номер частичного интервала l_i	Границы интервала $x_i - x_i + 1$	Середина интервала $x_i' = \dfrac{x_i \ + \ x_i \ + 1}{2}$	Частота интервала n_i	Относительная частота $W_i = \dfrac{n_i}{n}$	Плотность относительной частоты $\frac{W_i}{h}$
1	0,3 – 1,5	0,9	7	0.07	0,0583
2	1,5 – 2,7	2,1	11	0.11	0,0917
3	2,7 – 3,9	3,3	12	0.12	0,1
4	3,9 – 5,1	4,5	13	0.13	0,1083
5	5,1 – 6,3	5,7	15	0.15	0,125
6	6,3 – 7,5	6,9	14	0.14	0,117
7	7,5 – 8,7	8,1	12	0.12	0,1
8	8,7 – 9,9	9,3	9	0.09	0,075
9	9,9 – 11,1	10,5	7	0.07	0,0583
$\sum_i$	–	–	100	–	–

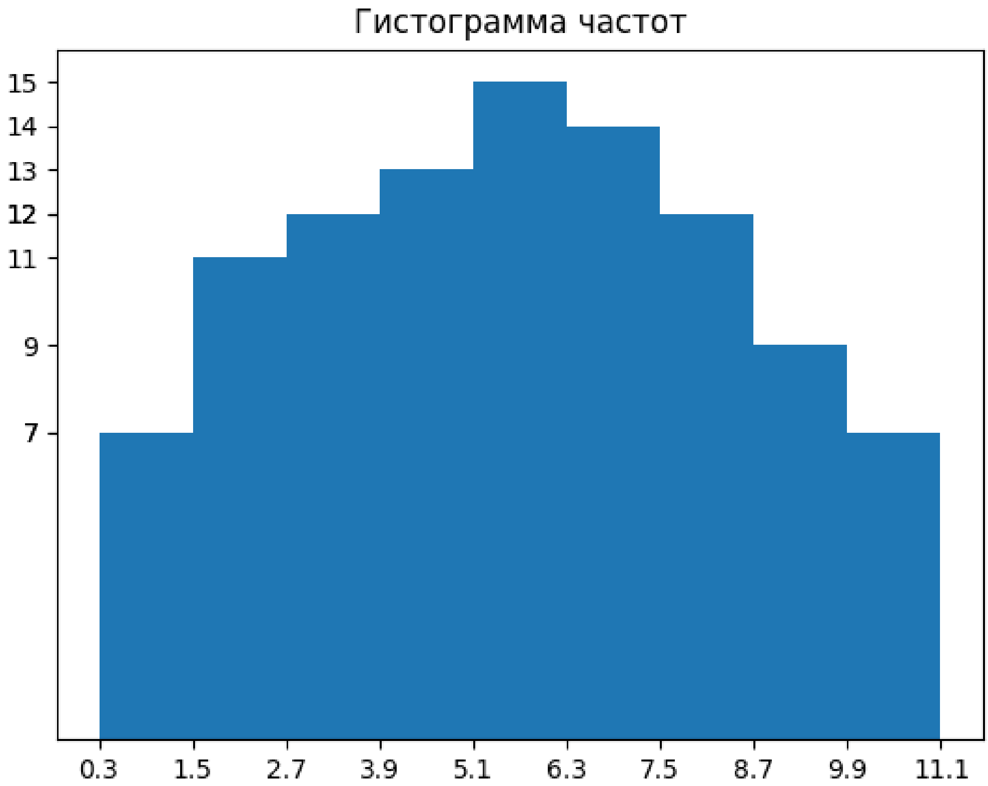
в) Строим полигон частот и гистограмму относительных частот и график эмпирической функции распределения.

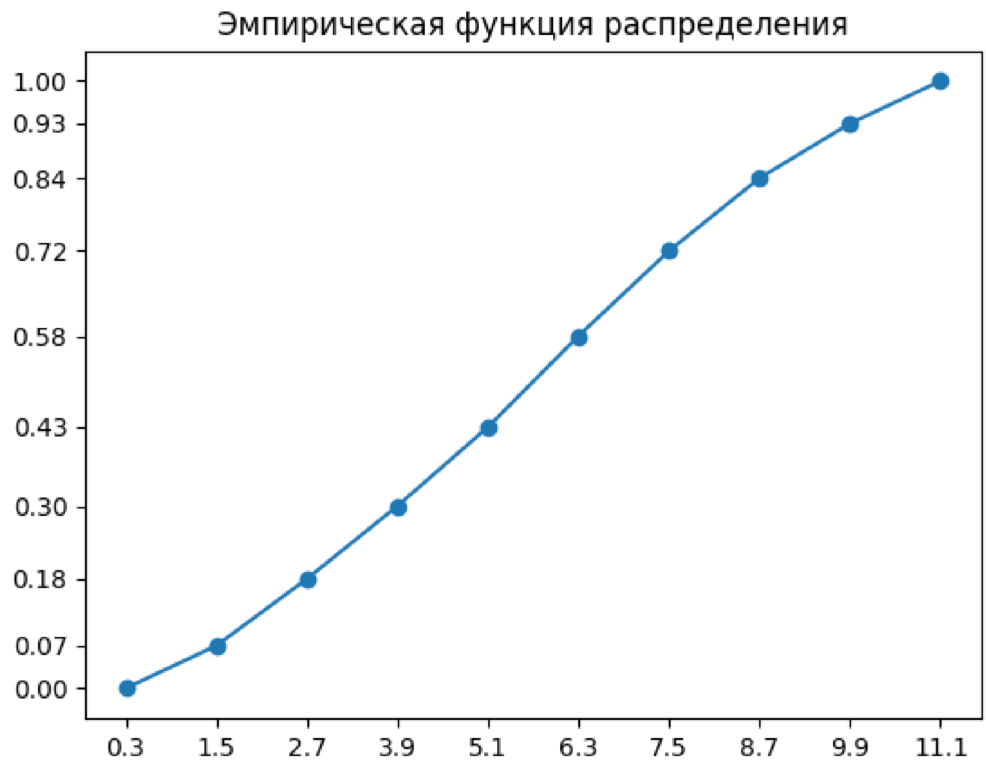
Находим значения эмпирической функции распределения $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$: $F^*(0,3) = 0$;

$F^*(1,5) = 0,07$; $F^*(2,7) = 0,18$; $F^*(3,9) = 0,3$; $F^*(5,1) = 0,43$; $F^*(6,3) = 0,58$;

$F^*(7,5) = 0,72$; $F^*(8,7) = 0,84$; $F^*(9,9) = 0,93$; $F^*(11,1) = 1$.


Полигон частот
15
14
13
12
11
9
7
0.9
2.1
3.3
4.5
5.7
6.9
8.1
9.3
10.5


Гистограмма частот
15
14
13
12
11
9
7
0.3
1.5
2.7
3.9
5.1
6.3
7.5
8.7
9.9
11.1



Эмпирическая функция распределения
1.00
0.93
0.84
0.72
0.58
0.43
0.30
0.18
0.07
0.00
0.3
1.5
2.7
3.9
5.1
6.3
7.5
8.7
9.9
11.1

г) Находим выборочное среднее и выборочную дисперсию:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{k} x_i' n_i = 5{,}64$$

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} (x_i' - \bar{x})^2 n_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} (x_i')^2 n_i - \bar{x} = 7{,}5852$$

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}} = 2{,}75412$$

Расчетная таблица:

m_i	Границы интервала $x_i; x_{i+1}$	Середина интервала x_i'	Частота интервала n_i	$n_i x_i'$	$(x_i')^2$	$n_i (x_i')^2$
1	0,3 – 1,5	0,9	7	6,3	0,81	5,67
2	1,5 – 2,7	2,1	11	23,1	4,41	48,51
3	2,7 – 3,9	3,3	12	39,6	10,89	130,68
4	3,9 – 5,1	4,5	13	58,5	20,25	487,35
5	5,1 – 6,3	5,7	15	85,5	32,49	487,35
6	6,3 – 7,5	6,9	14	96,6	47,61	666,54
7	7,5 – 8,7	8,1	12	97,2	65,61	787,32
8	8,7 – 9,9	9,3	9	83,7	86,49	778,41
9	9,9 – 11,1	10,5	7	73,5	110,25	771,75
$\sum_i$	–	–	100	564	–	4163,58

Выборочная дисперсия является смещенно оценкой генеральной дисперсии, а исправленная дисперсия – несмещенной оценкой:

$$\widetilde{D}_{\text{в}} = \frac{n}{(n-1)} D_{\text{в}} = \frac{100}{99} * 7{,}5852 = 7{,}661$$

$$\tilde{\sigma}_{\text{в}} = \sqrt{\widetilde{D}_{\text{в}}} = 2{,}768$$

Согласно критерию Пирсона необходимо сравнить эмпирические и теоретические частоты. Эмпирические частоты даны. Найдем теоретические частоты. Для этого пронумеруем X, т. е. перейдем к СВ $z = (x - \bar{x})/\sigma_{\text{в}}$ и вычислим концы интервалов z_i и z_{i+1}, причем наименьшее значение z, т.е. z_1, положим стремящимся к $-\infty$, а наибольшее, т. е. z_{m+1} к $+\infty$. Результаты занесем в таблицу.

i	Границы интервала $x_i; x_{i+1}$		$x_i - \bar{x}$	$x_{i+1} - \bar{x}$	Границы интервала $z_i; z_{i+1}$	
	x_i	x_{i+1}			$z_i = \dfrac{x_i - \bar{x}}{\sigma_в}$	$z_{i+1} = \dfrac{x_{i+1} - \bar{x}}{\sigma_в}$
1	0,3	1,5	$-$	$-4{,}14$	$-$	$-1{,}5032$
2	1,5	2,7	$-4{,}14$	$-2{,}94$	$-1{,}5032$	$-1{,}06749$
3	2,7	3,9	$-2{,}94$	$-1{,}74$	$-1{,}06749$	$-0{,}631781$
4	3,9	5,1	$-1{,}74$	$-0{,}54$	$-0{,}631781$	$-0{,}19607$
5	5,1	6,3	$-0{,}54$	0,66	$-0{,}19607$	0,239641
6	6,3	7,5	0,66	1,86	0,239641	0,675352
7	7,5	8,7	1,86	3,06	0,675352	1,11106
8	8,7	9,9	3,06	4,26	1,11106	1,54677
9	9,9	11,1	4,26	$-$	1,54677	$-$

Находим теоретические вероятности P_i и теоретические частоты $n'_i = nP_i = 100P_i$. Составляем расчетную таблицу.

i	Границы интервала $z_i; z_{i+1}$		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$n'_i = 100P_i$
	z_i	z_{i+1}				
1	$-$	$-1{,}5032$	$-0{,}5000$	$-0{,}4332$	0,0668	6,68
2	$-1{,}5032$	$-1{,}06749$	$-0{,}4332$	$-0{,}3554$	0,0778	7,78
3	$-1{,}06749$	$-0{,}631781$	$-0{,}3554$	$-0{,}2357$	0,1197	11,97
4	$-0{,}631781$	$-0{,}19607$	$-0{,}2357$	$-0{,}0753$	0,1604	16,04
5	$-0{,}19607$	0,239641	$-0{,}0753$	0,0910	0,1663	16,63
6	0,239641	0,675352	0,0910	0,2517	0,1607	16,07
7	0,675352	1,11106	0,2517	0,3665	0,1148	11,48
8	1,11106	1,54677	0,3665	0,4382	0,0717	7,17
9	1,54677	$-$	0,4382	0,5000	0,0618	6,18
$\sum_i$	–	–	–	–	1	100

Вычислим наблюдаемое значение критерия Пирсона. Для этого составим расчетную таблицу. Последние два столбца служат для контроля вычисления по формуле:

$$x^2_{набл} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i^2 - n$$

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$(n_i - n'_i)^2/n'_i$	n_i^2	$n_i^2/\, n'_i$
1	7	6,68	0,32	0,1024	0,0153293	49	7,3353
2	11	7,78	3,22	10,3684	1,3327	121	15,5527
3	12	11,97	0,03	0,0009	0,000075	144	12,0301
4	13	16,04	$-3{,}04$	9,2416	0,57616	169	10,53616
5	15	16,63	$-1{,}63$	2,6569	0,159765	225	13,52977
6	14	16,07	$-2{,}07$	4,2849	0,26664	196	12,19664
7	12	11,48	0,52	0,2704	0,023554	144	12,54355
8	9	7,17	1,83	3,3489	0,467071	81	11,29707
9	7	6,18	0,82	0,6724	0,108803	49	7,9288
$\sum_i$	100	100	–	–	$x^2_{набл} = 2{,}9500973$	–	102,95009

Контроль: $\frac{\sum n_i^2}{n_i'} - n = \frac{\sum(n_i - n_i')^2}{n} = 102{,}95009 - 100 = 2{,}95009$

По таблице критических точек распределения χ^2, уровню значимости $\alpha = 0{,}0025$ и числу степеней свободы $k = l - 3 = 9 - 3 = 6$ находим: $\chi^2_{\text{кр}} = 14{,}4$

Так как $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$, то гипотеза H_0 о нормальном распределении генеральной совокупности принимается.

е) Если СВ X генеральной совокупности распределена нормально, то с надежность γ = 0.95 можно утверждать, что математическое ожидание α СВ X покрывается доверительным интервалом

$$\left(\bar{x} - \frac{\tilde{\sigma}_{\text{в}}}{\sqrt{n}} t_\gamma; \bar{x} + \frac{\tilde{\sigma}_{\text{в}}}{\sqrt{n}} t_\gamma\right), \text{где } \delta = \frac{\tilde{\sigma}_{\text{в}}}{\sqrt{n}} t_\gamma - \text{точность оценки.}$$

В нашем случае $\bar{x} = 5{,}64, \tilde{\sigma}_{\text{в}} = 2{,}768, n = 100. t_\gamma = 1{,}984, \delta = 0{,}549$. Доверительным интервалом для α будет $(5{,}091;\ 6{,}189)$. Доверительный интервал, покрывающий среднее квадратичное отклонение σ с заданной надежностью γ, $(\tilde{\sigma}_{\text{в}}(1-q);\ \tilde{\sigma}_{\text{в}}(1+q))$. При $\gamma = 0{,}95$ и $n = 100$ имеем: $q = 0{,}143$. Доверительным интервалом для σ будет $(2{,}625;\ 2{,}911)$