

Chapter 1

苏亦凡 计算机科学与技术学院 200111229

说明： \dot{x} 表示 x 对时间的一阶导数， \ddot{x} 表示 x 对时间的二阶导数

1-1

解：

$$\begin{aligned}s &= x|_{t=4s} - x|_{t=0s} \\ &= 6 \times 4 - 4^2 - 0 \\ &= 8m\end{aligned}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 6 - 2t(SI)$$

令 $v = 0$,有 $t = 3s$.

$$\begin{aligned}l &= |\Delta s_1| + |\Delta s_2| \\ &= 6 \times 3 - 3^2 + 6 \times 3 - 3^2 - 6 \times 4 + 4^2 \\ &= 10m\end{aligned}$$

1-2

解：

$$\begin{cases} t = x/2 \\ y = 12 - 2t^2 \end{cases} (SI) \Rightarrow y = 12 - \frac{1}{2}x^2$$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 12 - 2t \end{cases} (SI)$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 \\ \dot{y} = -4t \end{cases} (SI)$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -4 \end{cases} (SI)$$

1-3

解:

$$s|_{t=4.5} = \int_0^{4.5} v(t) dt = 1 + 2 + 0.5 - 0.25 - 1 - 0.25 = 2m$$

1-4

解:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 3 + 9x^2 \\ \Rightarrow v \frac{dv}{dx} &= 3 + 9x^2 \\ \Rightarrow v dv &= (3 + 9x^2) dx \\ \Rightarrow \int_0^t v dv &= \int_0^t (3 + 9x^2) dx \\ \Rightarrow \frac{1}{2} v^2 &= 3x + 3x^3 \\ \Rightarrow v &= \sqrt{6x + 6x^3} \end{aligned}$$

1-5

解:

• (1)

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(9 - 16) - (4.5 - 2)}{1} = -9.5m/s$$

• (2)

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 4.5 - 6t^2$$

$$v(t=2) = 4.5 - 24 = -19.5 \text{ m/s}$$

• (3)

当 $t \in [1, 2]$ 时, 有 $v < 0$, 故

$$l = |\Delta x| = 9.5 \text{ m}$$

1-6

解:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -kv^2 \\ \Rightarrow v \frac{dv}{dx} &= -kv^2 \\ \Rightarrow \frac{dv}{v} &= -kdx \\ \Rightarrow \ln v - \ln v_0 &= -kx \\ \Rightarrow v &= v_0 e^{-kx} \end{aligned}$$

1-7

解:

• (1)

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -a\omega \sin \omega t \boldsymbol{i} + b\omega \cos \omega t \boldsymbol{j}$$

• (2)

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = b \sin \omega t \end{cases}$$

为椭圆的参数方程。

• (3)

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -a\omega^2 \cos \omega t \boldsymbol{i} - b\omega^2 \sin \omega t \boldsymbol{j}$$

有 $\boldsymbol{a} = -\omega^2 \boldsymbol{r}$, 即 \boldsymbol{a} 与 \boldsymbol{r} 方向相反。由(2)有 \boldsymbol{r} 背离中心, 故 \boldsymbol{a} 指向中心。

1-8

解：

$$\begin{aligned}\frac{x}{H} &= \frac{x-s}{h} \\ \Rightarrow hx &= Hx - Hs \\ \Rightarrow (H-h)x &= Hs \\ \Rightarrow x &= \frac{Hs}{H-h} \\ \Rightarrow v_{head} &= \frac{Hv_0}{H-h}\end{aligned}$$

1-9

解：

有物体加速度为 $\boldsymbol{a} = -g\boldsymbol{j}$ 。

分解到切向与法向，有：

$$\begin{cases} a_{\parallel} &= -g \sin \theta \\ a_{\perp} &= -g \cos \theta \end{cases}$$

1-10

解：

质点速度为：

$$v = \frac{ds}{dt} = b - ct$$

质点加速度为：

$$\begin{cases} a_t = |\dot{v}| = c \\ a_n = v^2/R = (b - ct)^2/R \end{cases}$$

令 $a_t = a_n$ ，有：

$$t = b/c \pm \sqrt{R/c}$$

1-11

解:

- (1)

切向速度 v :

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 - bt$$

切向加速度 a_t 与法向加速度 a_n :

$$\begin{cases} a_t = \dot{v} = -b \\ a_n = v^2/R = (v_0 - bt)^2/R \end{cases}$$

- (2)

加速度大小 a :

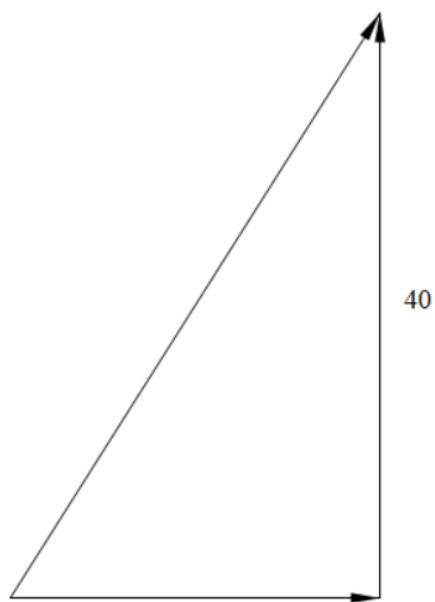
$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \\ &= \sqrt{b^2 + a_n^2} \end{aligned}$$

令 $a = b$, 有:

$$a_n = 0 \Rightarrow v_0 - bt = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{b}$$

1-12

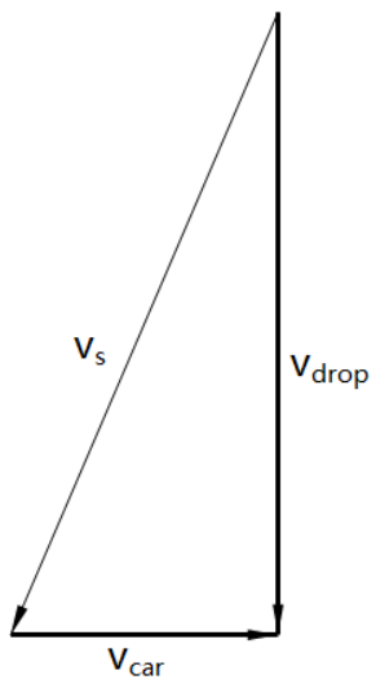
解:



$$\mathbf{v} = 25 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \mathbf{i} + 40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \mathbf{j}$$

1-13

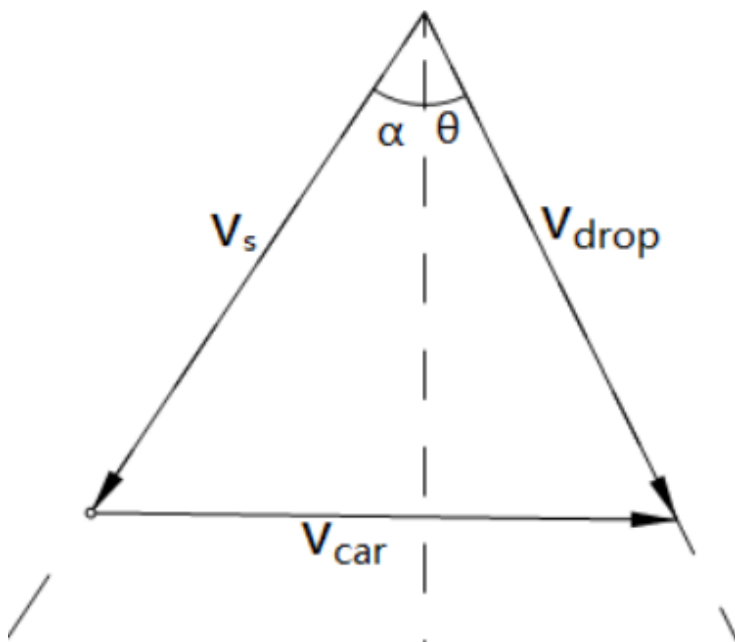
解：



$$v_s = \sqrt{v_{\text{car}}^2 + v_{\text{drop}}^2} = 4\sqrt{58}, \text{ 方向向下偏北 } \arctan \frac{3}{7}$$

1-14

解：



$$\tan \alpha = \frac{l}{h}, v_1 = v_2 \sin \theta + v_2 \cos \theta \tan \alpha$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2 \left(\sin \theta + \frac{l}{h} \cos \theta \right)$$

1-15

解：

有河流流速为：

$$v_{water} = \begin{cases} \frac{2v_0}{L}y, & y \in [0, \frac{L}{2}] \\ \frac{2v_0}{L}(l-y), & y \in [\frac{L}{2}, L] \end{cases}$$

1. 向河中心行驶：

有 $y = ut, v_x = \frac{2v_0}{L}y$ 。

可得：

$$v_x = \frac{2v_0 u}{L}t$$

$$\Rightarrow x = \frac{2v_0 u}{L} \int_0^t t dt$$

$$\Rightarrow x = \frac{v_0 u}{L} t^2$$

末状态有 $t_1 = \frac{L}{4u}, x_1 = \frac{v_0 L}{16u}$, 轨迹方程为 $x = \frac{v_0}{uL} y^2$

2. 回程：

有 $\frac{L}{4} - y = \frac{u}{2}(t - t_1), v_x = \frac{2v_0}{L}y$ 。

可得：

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{3v_0}{4} - \frac{v_0 u}{L} t \\ \Rightarrow x - x_1 &= \left[\frac{3v_0}{4} t - \frac{v_0 u}{2L} t^2 \right]_{t_1}^t \\ \Rightarrow x &= \frac{3v_0}{4} t - \frac{v_0 u}{2L} t^2 - \frac{3v_0 L}{32u}\end{aligned}$$

末状态有 $t_2 = \frac{3L}{4u}$, $x_2 = \frac{3v_0 L}{16u}$,

轨迹方程为 $x = -\frac{2v_0}{uL} y^2 - \frac{v_0}{u} y - \frac{3v_0 L}{8u} + \frac{9}{16} v_0 L$ 。

综上：

轨迹方程：

$$x = \begin{cases} x = \frac{v_0}{uL} y^2, & x \in [0, \frac{v_0 L}{16u}] \\ x = -\frac{2v_0}{uL} y^2 - \frac{v_0}{u} y - \frac{3v_0 L}{8u} + \frac{9}{16} v_0 L, & x \in [\frac{v_0 L}{16u}, \frac{3v_0 L}{16u}] \end{cases}$$

返回本岸时离出发点的距离为 $\frac{3v_0 L}{16u}$ 。