

# Chapter 6

苏亦凡 计算机科学与技术学院 200111229

## 6-1

解：

由库仑定律，取一小段距P点距离为 $r$ ，长度为 $dr$ 的棒，有：

$$dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qqdr}{L} r^{-2}$$

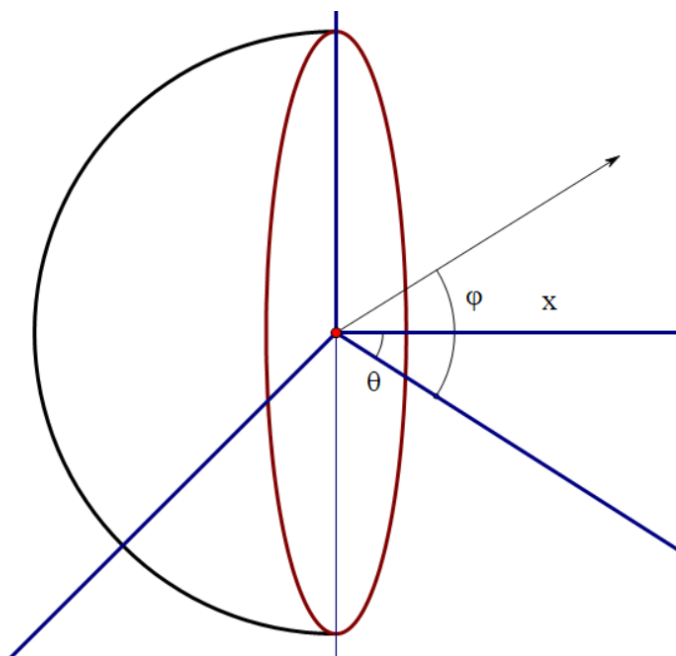
得：

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{L} \int_{a-L/2}^{a+L/2} r^{-2} dr = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{4a^2 - L^2}$$

$F$ 的方向沿OP。

## 6-3

解：



如图建立坐标系。分析可得，电场强度沿x轴。

取 $\varphi$ 角处张角为 $d\varphi$ 的圆环，有：

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\sigma R^2 \sin \varphi d\varphi}{R^2} \cos \varphi$$

得：

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$$

方向沿x轴。

## 6-5

解：

- (1) 对导线+ $\lambda$ ，做以其为中轴线，半径为 $r$ 的圆柱面，截取高为 $l$ 的一段。由高斯定理可得：

$$\begin{aligned} 2\pi Rl \cdot E(r) &= \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow E(r) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

代入此题情景，得：

$$\begin{aligned} E(x) &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(a-x)} \\ &= \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0 x(x-a)} \end{aligned}$$

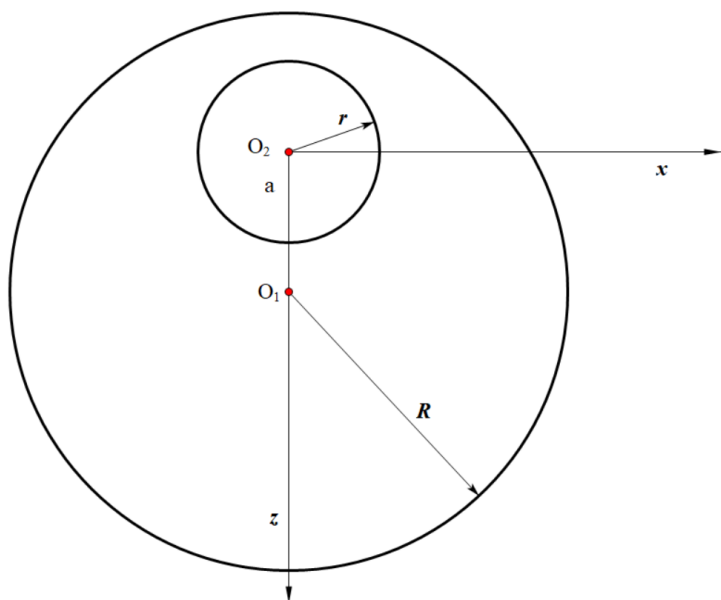
- (2) 代入导线处另一条导线的电场强度，得：

$$\frac{dF}{dl} = E \cdot \lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 a}$$

## 6-6

解：

等效为两个带电体：完整的半径为 $R$ 、电荷密度为 $\rho$ 的球，和半径为 $r$ 、电荷密度为 $-\rho$ 的球。



小球的电场强度为：

$$\vec{E}_1 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_0$$

大球的电场强度为：

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r}_0 - \vec{O_2O_1})$$

得：

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{O_1O_2}$$

取模长：

$$E = \frac{\rho a}{3\epsilon_0}$$

## 6-8

解：

取立方体六面为高斯面，由对称性，三面电场强度通量为0,另外三面电场强度通量相等，设为 $\Phi$ 。由高斯定理：

$$3\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

解得：

$$\Phi = \frac{q}{3\epsilon_0}$$

## 6-10

解：

对O点：

$$U_O = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l^{2l} \lambda x^{-1} dx + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{2l}^{3l} \lambda x^{-1} dx = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{3}{4}$$

对P点：

分析：由对称性，可知BP及其延长线上的电场强度方向与 $\overrightarrow{AC}$ 相同，垂直于BP。故将P点上一个电荷沿BP移向无穷远，电场力不做功。故P点与无穷远处等电势，即：

$$U_P = 0$$

## 6-11

解：

由球对称性，电场方向沿径向。

- 在内部：

$$4\pi\epsilon_0 r^2 E(r) = \int_0^r \frac{k}{r} 4\pi r^2 dr = 2k\pi r^2$$

解得：

$$E(r) = \frac{k}{2\epsilon_0}$$

- 在外部：

$$4\pi\epsilon_0 r^2 E(r) = \int_0^R 4\pi r^2 dr = 2k\pi R^2$$

解得：

$$E(r) = \frac{k}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r^2}$$

综上，电场强度为：

$$E(r) = \begin{cases} \frac{k}{2\epsilon_0}, & r \in [0, r] \\ \frac{k}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r^2}, & r \in [r, +\infty) \end{cases}$$

由  $U(r) = -\int_{\infty}^r E dr$ ，得：

$$U(r) = \begin{cases} \frac{k}{2\epsilon} (2R - r), & r \in [0, r] \\ -\frac{k}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r}, & r \in [r, +\infty) \end{cases}$$

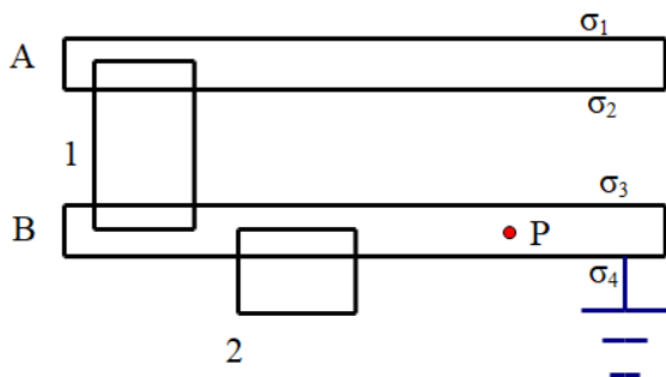
## 6-13

解：

$$A = -\Delta W = \frac{2q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{3R} \right) = \frac{q^2}{3\pi\epsilon_0 R}$$

## 6-16

解：



取如图1，2两个高斯面。由于下极板接地，故下极板以下无电场，又导体内部没有电场。由高斯定理得：

$$\begin{aligned} \sigma_2 + \sigma_3 &= 0 \\ \sigma_4 &= 0 \end{aligned}$$

对P点分析,由p的电场强度为0得：

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

又有：

$$(\sigma_1 + \sigma_2)S = Q_1$$

$$(\sigma_3 + \sigma_4)S = Q'_2$$

解得：

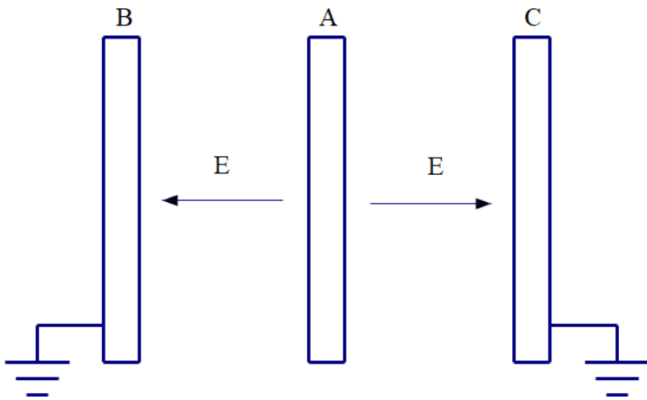
$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_4 = 0 \\ \sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{Q_1}{S} \end{cases}$$

故A、B间电场强度为：

$$E = \frac{Q_1}{\epsilon_0 S}$$

## 6-17

解：



- (1) 由B、C板电势相同，得：

$$\frac{q_B d_{AB}}{\epsilon_0 S} = \frac{q_C d_{AC}}{\epsilon_0 S}$$

又有：

$$q_B + q_C = -Q_A$$

得：

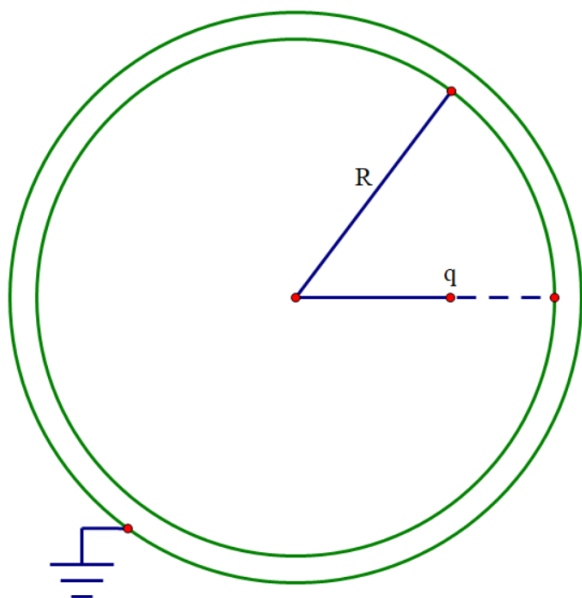
$$\begin{cases} q_B = -1.0 \times 10^{-7} \text{ C} \\ q_C = -2.0 \times 10^{-7} \text{ C} \end{cases}$$

- (2)

$$U_A = E \cdot \frac{d}{2} = \frac{q_B d_{AB}}{2\epsilon_0 S} = 2.26 \times 10^4 \text{ V}$$

## 6-18

解：



由于静电屏蔽，球壳外无电场，球壳内表面带上总和为 $-q$ 的电荷。故有：

$$U_O = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{d} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{R} \right)$$

## 6-21

解：

- (1) 由高斯定理易得：

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0, & r \in [0, R_1) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \mathbf{e}_r, & r \in (R_1, R_2) \\ 0, & r \in (R_2, R_3) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1+Q_2}{r^2} \mathbf{e}_r, & r \in (R_3, +\infty) \end{cases}$$

- (2)

$$\begin{aligned}
 W_e &= \iiint_{\Omega} w dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 \cdot 4\pi r^2 dr \\
 &= \frac{Q_1^2}{8\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)
 \end{aligned}$$

- (3) 代入, 得:

$$W_e = 6 \times 10^{-4} \text{ J}$$

## 6-23

解:

- 电容器能量公式:

$$W = \frac{1}{2} C (\Delta U)^2 = 4\pi \epsilon_0 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) (\Delta U)^2$$

- 电场能量公式:

$$Q = C \Delta U$$

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

$$W = \iiint_{\Omega} w dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot 4\pi r^2 dr$$

联立解得:

$$W = 4\pi \epsilon_0 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) (\Delta U)^2$$