Chapter 9

苏亦凡　　计算机科学与技术学院　　200111229

> 说明：$\dot{x}$表示x对时间的一阶导数，$\ddot{x}$表示x对时间的二阶导数

9-1

解：

代入初值，得：

$$\begin{aligned} A\cos\varphi &= 0.06 \\ -3\pi A\sin\varphi &= -0.24 \end{aligned} \tag{SI}$$

解得：

$$\begin{aligned} &A = 6.52\times 10^{-2} \quad \mathrm{m} \\ &\varphi = \arctan(-0.637) = -32.5^{\circ} \end{aligned}$$

9-2

解：

设振动表达式为$x = A\cos(\omega t+\varphi)$，得：

$$\begin{aligned} v_m &= A\omega \\ \varphi &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

即：

$$\begin{aligned} &\omega = 1.5 \quad \mathrm{rad\cdot s^{-1}} \\ &\varphi = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

故振动表达式为：

$$x = 0.02\cos(1.5t+\frac{\pi}{2}) \tag{SI}$$

9-3

解：

- (1)
  由题意可知，物体振动表达式为$x = A\cos\omega t$，其中

$$
\begin{aligned}
&A = 4.8 \times 10^{-2} \quad \mathrm{m} \\
&\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2}{3}\pi \quad \mathrm{rad \cdot s^{-1}}
\end{aligned}
$$

  带入$t = 0.5\ \mathrm{s}$，得：

$$
x = \frac{A}{2} = 2.4 \times 10^{-2} \quad \mathrm{m}
$$

- (2)
  得：

$$
\cos\omega t = \frac{1}{2}
$$

  得最小的$t = 0.5\ \mathrm{s}$

9-4

解：

设$x = A\cos(\omega t + \varphi)$ 由图可知：

$$
\begin{aligned}
&\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \quad \mathrm{rad \cdot s^{-1}} \\
&A = 10 \quad \mathrm{m} \\
&\varphi = -\frac{2}{3}\pi
\end{aligned}
$$

故得：

$$
x = 10\cos(\pi t - \frac{2}{3}\pi) \qquad \text{(SI)}
$$

9-5

解：

- (1)
  设摆角为θ，有$\theta \ll 1$，设总能量为E，以圆心处为势能零点。有：

  $$E = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - mgr\cos\theta$$

  由能量守恒，有：

  $$\frac{dE}{dt} = 0$$

  代入且利用$\theta \ll 1$，得：

  $$\begin{aligned} mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgr\sin\theta \cdot \dot{\theta} = 0 \\ \Rightarrow \dot{\theta} + \frac{g}{r}\theta = 0 \end{aligned}$$

  为简谐运动方程。
- (2)
  由(1)可得：

  $$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$$

  故：

  $$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

9-6

解：

- (1)
  设浸没深度为h。

  $$\rho l^3\ddot{h} = \rho l^3 g - \rho_w l^2 hg$$

  有$h = a$时平衡，进行换元$h = a + x$，得：

  $$\ddot{x} + \frac{g}{a}x = 0$$

为简谐运动。

- (2)
  由(1)得：

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

  由题目所给条件，有：

$$A=|b-a|$$

9-8

解：

能量表达式：

$$E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

由能量守恒$\frac{dE}{dt}=0$：

$$m\ddot{x}+\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{(x^+R^2)^{3/2}}=0$$

利用$x\ll R$，得：

$$\ddot{x}+\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 mR^3}x=0$$

为简谐运动，振动周期为：

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 mR^3}{Qq}}$$

9-10

解：

- (1)

$$A=\sqrt{\frac{2E}{k}}=0.25\ \mathrm{m}$$

- (2)

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = 0.2\ \mathrm{J}$$

$$E_k = E - U = 0.6\ \mathrm{J}$$

- (3)

$$v_m = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 2.5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

9-12

解:

- (1)
  有$E_k = E_p$且$E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$，故有:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}kA^2$$

  得:

$$x = 3\sqrt{2}\times 10^{-2}\ \mathrm{m}$$

- (2)

$$\sin\Delta\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = 0.75\ \mathrm{s}$$

9-14

- (1)

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = 5\ \mathrm{m}$$

$$\varphi = \arctan\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = 0.40\ \mathrm{rad}$$

- (2)

$$A=\sqrt{A_1^2+A_3^2+A_1A_3\cos(\varphi-\frac{\pi}{3})}$$

故有：

当$\varphi=\frac{\pi}{3}$时，合振幅最大；当$\varphi=\frac{4\pi}{3}$时，合振幅最小。