

Chapter 1 Section 2

苏亦凡 计算机科学与技术学院 200111229

说明:

1. \dot{x} 表示 x 对时间的一阶导数, \ddot{x} 表示 x 对时间的二阶导数。
2. 粗体字母表示矢量。

2-4

解:

取微元 dx , 有:

$$dF_T = x\lambda\omega^2 dx$$

其中 $\lambda = m/L$,为绳子的线密度。积分得:

$$F_T(x) = \frac{m\omega^2}{2L}(L^2 - x^2)$$

2-6

解:

- (1)
有:

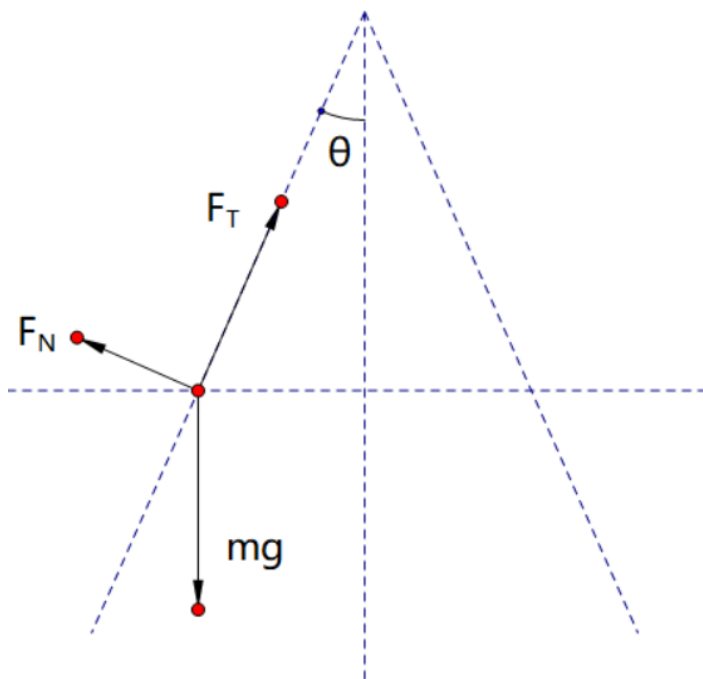
$$\begin{cases} mg \cos \theta + F_T = m \frac{v^2}{R} \\ ma_t = mg \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_T = m \frac{v^2}{R} - mg \cos \theta \\ a_t = g \sin \theta \end{cases}$$

- (2)
有: $|a_t| = g|\sin \theta|$, 方向垂直于半径向下。

2-8

解:

- (1)



沿绳与垂直于面的方向分解，有：

$$\begin{cases} F_T = mg \cos \theta + m\omega^2 l \sin^2 \theta \\ F_N = mg \sin \theta - m\omega^2 l \sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

• (2)

即 $F_N = 0$ 时。令 $F_N = 0$ ，有：

$$\begin{aligned} mg \sin \theta &= m\omega_0^2 l \sin \theta \cos \theta \\ \Rightarrow \omega_0 &= \sqrt{\frac{g}{l \cos \theta}} \end{aligned}$$

代入得：

$$F_T = \frac{mg}{\cos \theta}$$

2-10

解：

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = F(h - h_0)(\csc \theta_0 - \csc \theta_1) = 18.26(\text{J})$$

2-13

解：

由功能原理，得：

$$W_{tot} = \Delta E_k = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \quad (1)$$

由运动方程求对时间求一阶导数，得：

$$\begin{cases} \dot{x} = 5 \\ \dot{y} = t \end{cases} \text{ (SI)} \quad (2)$$

联立代入 $t = 2s \rightarrow 4s$ ，得：

$$W_{tot} = 3\text{J}$$

2-14

解：

有两颗中子星的速度等大反向，设大小为 v 。由能量守恒，得：

$$\begin{aligned} 2 \times \frac{1}{2}mv^2 &= Gm^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right) \\ \Rightarrow v &= \sqrt{Gm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right)} \\ \xrightarrow{r_1 = \frac{1}{2}r_0} v &= \sqrt{\frac{Gm}{r_0}} \end{aligned}$$

代入得：

$$v = 8.17 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

2-15

解：

由功能关系，得：

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}$$

解得：

$$F = \sqrt{\frac{3}{4}kmv_0^2}$$

2-16

解：

由能量守恒，有：

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 - W_f$$

解得：

$$W_f = -42.4\text{J}$$

2-17

最远位移有 $\dot{x} = 0$ ，即 $v = 0$ 。由能量守恒有：

$$Fx = \mu mgx + \frac{1}{2}kx^2$$

排除 $x = 0$ 的解，解得：

$$x = 2\frac{F - \mu mg}{k}$$

则系统弹性势能：

$$E_{pk} = \frac{1}{2}kx^2 = 2\frac{(F - \mu mg)^2}{k}$$

2-20

解：

- 动量定理

$$\boldsymbol{I} = m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1 = -m\omega R\boldsymbol{i} - m\omega R\boldsymbol{j}$$

- 积分法
受力分析：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = -m\omega^2 \boldsymbol{r} \\ \Rightarrow \boldsymbol{F} &= m\omega^2 R(-\boldsymbol{i} \cos \omega t - \boldsymbol{j} \sin \omega t)\end{aligned}$$

代入冲量定义

$$I = m\omega^2 R \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} (-\boldsymbol{i} \cos \omega t - \boldsymbol{j} \sin \omega t) dt = -m\omega R \boldsymbol{i} - m\omega R \boldsymbol{j}$$

2-22

解：

子弹穿过第一个木块的过程，由冲量定理：

$$(m_1 + m_2)v_A = F\Delta t_1 \quad (1)$$

子弹穿过第二个木块的过程，由冲量定理：

$$m_2(v_B - v_A) = F\Delta t_2 \quad (2)$$

解得：

$$\begin{cases} v_A = \frac{F\Delta t_1}{m_1 + m_2} \\ v_B = \frac{F\Delta t_1}{m_1 + m_2} + \frac{F\Delta t_2}{m_2} \end{cases}$$

2-23

解：

$$\begin{cases} 2ma_0 = mg \\ \frac{1}{2}a_0 t^2 = L \\ v_0 = a_0 t \\ 3mv_1 = 2mv_0 \end{cases}$$

联立解得：

$$v_1 = \frac{2}{3} \sqrt{gL} = \frac{14}{15} \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

2-24

解：

取船的原速方向为正方向。对三艘船分别使用动量守恒(其中b代表前船，m代表中船，a代表后船)：

$$\begin{cases} (m' + m)v_b = m'v + m(v + u) \\ (m' - 2m)v_m + m(v + u) + m(v - u) = mv \\ (m' + m)v_a = m'v + m(v - u) \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} v_b = v + \frac{m}{m'+m}u \\ v_m = v \\ v_a = v - \frac{m}{m'+m}u \end{cases}$$

2-28

解：

设B点后的链条长度为 x ，链条线密度为 λ ，有：

$$\lambda L \frac{d^2 x}{dt^2} = \lambda x g \sin \alpha$$

作变换：

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

得：

$$\begin{aligned} Lv dv &= x dx g \sin \alpha \\ \Rightarrow v &= \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{L} (L^2 - a^2)} \end{aligned}$$