

考虑空气阻力的抛体射程

郝成红

(上海应用技术学院 数理教学部, 上海 200235)

摘要:空气阻力对抛体的运动可以产生显著的影响. 运用近似的方法处理超越方程, 给出了考虑空气阻力的抛体运动落地时间和射程与抛射角的近似解析关系, 并且与数值解进行了比较.

关键词:抛体; 阻力; 射程; 抛射角

中图分类号: O 313.1

文献标识码: A

文章编号: 1000-0712(2008)12-0021-02

如果不考虑空气的阻力, 则抛体运动的轨迹为抛物线, 其射程为

$$d_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \quad (1)$$

其中 v_0 是抛体初速度的大小, α 为抛射角. 显然, 当 $\alpha = \pi/4$ 时的射程最大. 若考虑空气的阻力, 则抛体的实际射程要小于 d_0 . 空气阻力的大小是随抛体运动的速率变化而变化的, 而且这种变化关系往往是很复杂的. 文献[1]和[2]对此进行了简化处理, 给出了简化的模型: 假设空气对抛体的阻力与抛体的速度成正比, 即

$$F = -kv \quad (2)$$

式中 k 是比例系数. 设抛体的质量为 m , 根据质点运动微分方程并经过积分运算, 在 Oxy 直角坐标系中可以得到

$$x = \frac{m}{k} (v_0 \cos \alpha) (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \quad (3)$$

$$y = \frac{m}{k} \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k} \right) (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - \frac{mg}{k} t \quad (4)$$

文献[1]—文献[4]给出了抛体射程与抛射角 α 的数值关系.

本文在上述文献的基础上, 对抛体落地时间所满足的方程进行近似处理, 得到了抛体落地时间与抛射角, 以及射程与抛射角之间的近似解析表达式.

首先, 令式(4)中 $y = 0$, 得到抛体落地时间 t 满足的方程

$$\left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k} \right) (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - gt = 0 \quad (5)$$

经整理得

$$1 - \frac{gt}{\left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k} \right)} = e^{-\frac{k}{m}t} \quad (6)$$

这是一个超越方程, 无法求出 t 与 α 之间的解析表达式. 下面, 我们用近似方法求解超越方程的解析解.

将 $e^{-\frac{k}{m}t}$ 展开并取到二次项:

$$e^{-\frac{k}{m}t} \approx 1 - \frac{k}{m}t + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{m} \right)^2 t^2 \quad (7)$$

将式(7)代入式(6), 引入量纲一的参量 ξ , $\xi = kv_0/mg$, 得抛体从抛出到落地所经历时间 t 的近似解析表达式^{*}

$$t^* = \frac{2mv_0 \sin \alpha}{kv_0 \sin \alpha + mg} = \frac{1}{1 + \xi \sin \alpha} t_0 \quad (8)$$

显然它是抛射角 α 的函数, 其中

$$t_0 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \quad (9)$$

为无阻力时抛体的落地时间.

再将式(8)和式(5)代入式(3), 即得到考虑空气阻力后的抛体射程 d 的近似解析表达式^{*}

$$d^* = \frac{m^2 g v_0^2 \sin 2\alpha}{(kv_0 \sin \alpha + mg)^2} = \frac{1}{(1 + \xi \sin \alpha)^2} d_0 \quad (10)$$

上式对 α 求一阶导数并令之等于零, 即可得到最大射程对应的近似抛射角 α^* , 即最优抛射角的近似值所满足的方程:

$$2mg \sin^2 \alpha^* + kv_0 \sin \alpha^* - mg = 0 \quad (11)$$

这是一个关于 $\sin \alpha^*$ 的二次方程, 取其中的一个合理的解:

$$\sin \alpha^* = \frac{1}{4} (\sqrt{8 + \xi^2} - \xi) \quad (12)$$

图1是 α^* 与 ξ 的关系曲线, 曲线上黑点对应无阻力

收稿日期: 2007-07-31; 修回日期: 2008-06-24

作者简介: 郝成红(1960—)男, 黑龙江双城市人, 上海应用技术学院数理教学部副教授, 主要从事大学物理教学与研究工作.

情形.

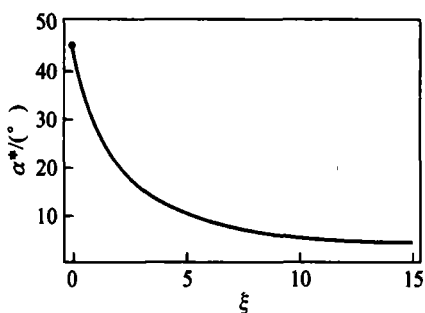


图 1 最优抛射角 α^* 与 ξ 的关系曲线

利用计算机软件求解式(6),可以得到 $t = t(\alpha, \xi)$,代入式(3)得到射程的精确表达式:

$$d = \frac{d_0}{1 + \xi \sin \alpha} t \quad (13)$$

根据式(10)和式(13),令 $\bar{d}^* = d^*/d_0$, $\bar{d} = d/d_0$, 给定 $\xi = 0.05$,则得到 \bar{d}^* 和 \bar{d} 与 α 之间的关系曲线(参见图 2), α 越小则相对偏差也越小;给定 $\alpha = 40^\circ$, 则得到 \bar{d}^* 和 \bar{d} 与 ξ 之间的关系曲线(参见图 3), $\xi = 0.05$ 时相对偏差为 2.25%, ξ 越小偏差也越小.

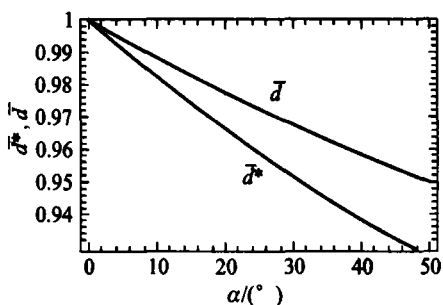


图 2 $\xi = 0.05$ 时 \bar{d}^* 和 \bar{d} 与 α 的关系曲线

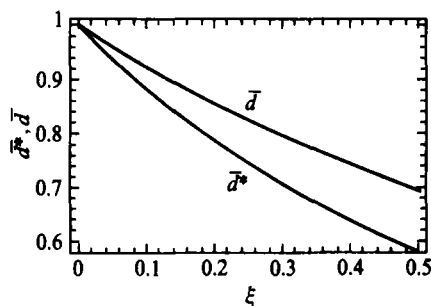


图 3 $\alpha = 40^\circ$ 时 \bar{d}^* 和 \bar{d} 与 ξ 的关系曲线

对式(8)、(10)和式(12)作如下几点讨论:

1) 当 $\xi = 0$ 时,即没有阻力的情况, $\sin \alpha^* = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\alpha^* = \frac{\pi}{4}; t^* = t_0, d^* = d_0;$$

2) 随着 ξ 变大,最优抛射角 α^* 将变小;

3) 由式(8)和式(10)可以看出,空气阻力使抛体的落地时间变短,射程变小.与落地时间相比,空气阻力对射程的影响更大一些.

参考文献:

- [1] 廖旭,任学藻,周自刚. 非理想抛体的最佳抛射角[J]. 大学物理, 2007, 26(8): 20-22.
- [2] 马文蔚. 物理学教程[M]: 高等教育出版社, 2002: 43-44.
- [3] 刘雅君. 高尔夫球射程的讨论[J]. 大学物理, 2005, 24(1): 30-32.
- [4] 蔡志东. 铅球最佳投掷角的精确方程及数值解[J]. 大学物理, 2005, 24(8): 16-18.

The range of projectile with air friction

HAO Cheng-hong

(Department of Mathematics and Physics Education, Shanghai Institute of Technology,
Shanghai 200235, China)

Abstract: Air friction has a notable effect on the motion of projectile. The formulae of time and range of projectile with the projecting angle taking account into air friction are obtained by using the approximate method to solve the equation. A comparison between the formulae and the numerical results is presented.

Key words: projectile; friction; range; projecting angle