第24卷 第6期 2010年12月
空 军 雷 达 学 院 学 报
Journal of Air Force Radar Academy
Vol.24 No.6 Dec.2010

文章编号:1673-8691(2010)06-0452-02

考虑空气阻力的抛体最大射程和最佳抛射角研究

喻 莉, 杨植宗, 何 艳, 周本元
(空军雷达学院基础部, 武汉 430019)

摘 要:为了研究抛体在什么抛射角抛出时具有最大射程, 利用拉格朗日乘子法, 推导出存在空气阻力并且起点和终点不在同一高度时, 在某一斜面上抛出的抛体的最大射程和最佳抛射角. 通过计算机编程, 以计算投掷手榴弹时的最大射程和最佳抛射角为例进行验证, 并对物理教学中抛体运动的动力学过程进行了进一步的分析和讨论, 有利于提高教学效果.

关键词:抛体运动;最大射程;抛射角
中图分类号:O411 **文献标志码**:A DOI: 10.3969/ j.issn.1673-8691.2010.06.018

对于抛体运动的最大射程和最佳抛射角问题，目前已有较多的研究[1-4]. 大部分文献考虑的都是从平面上抛出的物体的最大射程和最佳抛射角问题[1,3-4]. 部分考虑的抛体是从斜面上抛射出去的，但却未考虑空气阻力的影响[2]. 在实际问题中，空气阻力是存在的，另外投掷者还可能处于斜面上. 在物理学课程中讨论得到，当略去空气阻力时，对于起点和终点在同一水平线上且初速度一定的抛体，抛射角为 45°时水平射程最大. 并提到了在存在空气阻力时，实际射程要比真空中射程小，但未具体讨论存在空气阻力时的动力学过程. 本文重点考虑了空气阻力及投掷者所处的斜面情况，利用拉格朗日乘子法，计算给出了最佳抛射角和最大射程的一般公式，然后利用 Fortran 语言编程，得到了在给定条件下投掷手榴弹时的最佳抛射角和最大射程，并将其分析方法应用到了质点运动学的教学中.

1 抛体最大射程的条件

如图 1 所示，一抛射体在倾角为 β $(-\pi/2 \le \beta \le \pi/2)$ 的斜面上空 P 点，以初速度 v_0 被抛出，v_0 与斜面间的夹角为 α，与水平面间的夹角为 γ，其中 $\gamma=\alpha+\beta$. 空气阻力 $f=-kv_0$，k 为阻力系数，现已知 v_0、β、k、重力加速度 g 和 P 点到斜面的垂直距离 y_0，求当 α 取何值时，抛体射程最大.

建立如图 1 所示的直角坐标系 xOy，对物体进行受力分析，再根据牛顿第二定律，可得

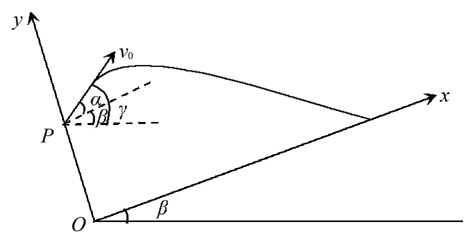

图 1 斜面上的抛体运动

$$\left.\begin{aligned} a_x &= -g\sin\beta - kv_x/m \\ a_y &= -g\cos\beta - kv_y/m \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

而 $a_x=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$，$a_y=\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$，可得

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -\frac{mg}{k}\sin\beta + \left(v_0\cos\alpha + \frac{mg}{k}\sin\beta\right)\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \\ v_y &= -\frac{mg}{k}\cos\beta + \left(v_0\sin\alpha + \frac{mg}{k}\cos\beta\right)\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

则抛体在任一时刻 t 的位置坐标为

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{mgt\sin\beta}{k} + \frac{mv_0\cos\alpha}{k} + \frac{m^2g}{k^2}\sin\beta - \\ &\quad \frac{m}{k^2}\left[(kv_0\cos\alpha + mg\sin\beta)\,\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right] \\ y &= -\frac{mgt\cos\beta}{k} + \frac{mv_0\sin\alpha}{k} + \frac{m^2g}{k^2}\cos\beta - \\ &\quad \frac{m}{k^2}\left[(kv_0\sin\alpha + mg\cos\beta)\,\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right] + y_0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

一般情况下，阻力系数比较小，$\dfrac{kt}{m} << 1$，由 Taylor 展开可得 $\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \approx 1-\dfrac{kt}{m}+\dfrac{k^2t^2}{2m^2}$，将此式代入式(3)中，可得

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0t\cos\alpha - \frac{kv_0t^2\cos\alpha}{2m} - \frac{gt^2\sin\beta}{2} \\ y &= v_0t\sin\alpha - \frac{kv_0t^2\sin\alpha}{2m} - \frac{gt^2\cos\beta}{2} + y_0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

采用文献[2]方法，利用拉格朗日乘子法，构建拉格朗日函数 $F=x+uy$ 可得

$$\begin{aligned} F &= v_0t\cos\alpha - \frac{kv_0t^2\cos\alpha}{2m} - \frac{gt^2\sin\beta}{2} + uv_0t\sin\alpha - \\ &\quad \frac{ukv_0t^2\sin\alpha}{2m} - \frac{ugt^2\cos\beta}{2} + uy_0 \end{aligned} \tag{5}$$

令 $\dfrac{\partial F}{\partial \alpha}=0$，有 $v_0t(u\cos\alpha-\sin\alpha)\left(1-\dfrac{kt}{2m}\right)=0$

由于实际情况中，$\dfrac{kt}{2m} << 1$，故 $u=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

令 $\dfrac{\partial F}{\partial t}=0$，有 $v_0\cos\alpha - \dfrac{kv_0t\cos\alpha}{m} - gt\sin\beta + uv_0\sin\alpha -$

收稿日期:2010-06-17
作者简介:喻 莉(1982-)，女，讲师，主要从事大学物理教学与材料物理研究.

$\frac{ukv_0 t\sin\alpha}{m} - ugt\cos\beta = 0$，可得

$$t = \frac{mv_0}{kv_0 + mg\sin\gamma} \tag{6}$$

将式(6)代入式(4)中,并令 $y = 0$,可得

$$km^2v_0^3\sin\alpha + m^3gv_0^2(2\sin\alpha\sin\gamma - \cos\beta) + 2my_0(kv_0 + my\sin\gamma)^2 = 0 \tag{7}$$

即为射程最大时初速度方向所应满足的条件.

2　讨论

1) 忽略空气阻力 $(k = 0)$

式(7)变为 $\frac{2gy_0}{v_0^2}\sin^2\gamma + 2\sin\alpha\sin\gamma - \cos\beta = 0$,此式与文献[2]中完全相同.若 $y_0 = 0$, $\beta = 0$,则 $\alpha = \pi/4$,这与力学教材中所给结论完全吻合.

2) 空气阻力不能忽略 $(k \neq 0)$

将 $\alpha = \gamma - \beta$ 代入式(7)中可得

$$2m^2gv_0^2\cos\beta\sin^2\gamma + 2y_0m^2g^2\sin^2\gamma + kmv_0^3\cos\beta\sin\gamma + 4y_0kv_0mg\sin\gamma - 2m^2gv_0^2\sin\beta\cos\gamma\sin\gamma - kmv_0^3\sin\beta\cos\gamma - m^2gv_0^2\cos\beta + 2y_0k^2v_0^2 = 0 \tag{8}$$

根据式(8)计算 γ 比较麻烦.利用Fortran语言编程计算,只要输入已知量 m、g、v_0、β、k, 就可以得到相应的解 γ.再将 γ 和 $\alpha = \gamma - \beta$ 代入式(6)和式(4),即可得到此时的最大射程值 x.而最佳抛射角 $\alpha = \gamma - \beta$.下面以投掷手榴弹为例进行验证.取具有代表性的值:设 $v_0 = 20$ m/s, $m = 0.5$ kg, $g = 9.8$ m/s^2, $y_0 = 1.75$ m.计算结果如表1所示.从表1可知,当 $k = 0$, $\beta = 0$ 时,由于考虑了抛出点到斜面的垂直距离,故其最佳抛射角要约小于45°.对于相同的斜面倾角,考虑空气阻力时的最佳抛射角和最大射程要小于不考虑空气阻力时的最佳抛射角和最大射程.而不管是否考虑空气阻力,随着斜面倾角增大,最佳抛射角都在逐渐减小.

表1　不同斜面倾角时的最佳抛射角和最大射程

斜面倾角 β/(°)	$k = 0$ kg/s 最佳抛射角/(°)	$k = 0$ kg/s 最大射程/m	$k = 0.01$ kg/s 最佳抛射角/(°)	$k = 0.01$ kg/s 最大射程/m
0	43.80	42.57	42.90	40.27
10	38.60	36.23	37.76	34.42
20	33.39	31.62	32.63	30.14
30	28.19	28.20	27.51	26.94
40	23.02	25.64	22.42	24.54
50	17.87	23.72	17.34	22.74
60	12.73	22.31	12.23	21.41
70	7.63	21.32	7.29	20.47
80	2.56	20.68	2.31	19.87

由本文推导得到的抛体运动的最大射程时抛射角所应满足的条件可知,当不计空气阻力时,对于起点和终点在同一水平线上且初速度一定的抛体,抛射角为45°时水平射程最大.这与力学教材中所讨论的情况符合.而考虑空气阻力,起点和终点不在同一水平线上时,最佳抛射角小于45°,并且随着斜面倾角的增大,最佳抛射角和最大射程逐渐减小,且均低于不考虑空气阻力而其他抛射条件相同时的最佳抛射角和最大射程.

本文所得到的抛体运动的最大射程条件和求最大射程的方法是适合所有斜上抛运动情况.通过编程计算,可以得到在该模型下任意已知条件时的最佳抛射角和最大射程.然而,抛体运动速度的变化范围较大,空气阻力不能简单的用 $f = -kv_0$ 表示,而且阻力系数也不是常量.如果还考虑抛体的旋转,情况就更加复杂.

3　结束语

本文考虑空气阻力及投掷者所处的斜面情况,将《物理学》中抛体运动的问题作了更深一步的讨论,并利用拉格朗日乘子法,计算给出了最佳抛射角和最大射程的一般公式,然后利用Fortran语言编程,得到了在给定条件下投掷手榴弹时的最佳抛射角和最大射程.

在物理学教学中,将高等数学中的知识与质点动力学分析方法相结合来解决质点运动学问题,将会取得较好的教学效果.

参考文献:

[1] 廖旭,任学澡,周自刚.非理想抛体的最佳抛射角[J].大学物理,2007,26(8):20-22.

[2] 王福新,李红. 抛体运动最大射程的概括性分析[J]. 大学物理, 2007,26(10):16-17.

[3] 陈小波, 李强. 关于抛体运动的分析[J]. 四川文理学院学报:自然科学版, 2009,19(5):25-28.

[4] 丁增平.由抛体运动的解题思路探究一题多解[J]. 安庆师范学院学报:自然科学版, 2009(3):127-128.

Study of Maximum Range and Optimum Projection Angle of Projectile With Air Resistance

YU Li，YANG Zhi-zong，HE Yan， ZHOU Ben-yuan

(Department of the Basics, AFRA, Wuhan 430019, China)

Abstract: In order to study the projectile can have the maximum range at what projection angle, the air resistance existed was deduced by using Lagrange multipliers, and the optimum projection angle and the maximum range of the projectile projecting out of some inclined plane were given. the maximum range and the best angle when the starting point and end point being not at the same height were deduced. By computer programming, it was verified by taking an example of calculating the maximum range and optimum projection angle while projecting grenades, by which the kinetics process of projectile motion in physics teaching was analyzed furthermore, helping improve the teaching effect.

Key words: projectile motion; maximum range; projection angle