

センサ工学演習問題 2 レポート

相田舟星
学籍番号: 21C1002

October 30, 2024

1. 次の表に示すデータがある。最小2乗法によって当てはまる直線の方程式を求め、結果を図で示せよ。

$$X = \{-3, -1, 1, 3\}, Y = \{0, 1, 2, 4\}$$

X	-3	-1	1	3
Y	0	1	2	4

回答

最小二乗法により、直線の方程式 $y = ax + b$ を求めます。まず、平均 \bar{X} と \bar{Y} を計算します。

$$\bar{X} = \frac{-3 + (-1) + 1 + 3}{4} = 0, \quad \bar{Y} = \frac{0 + 1 + 2 + 4}{4} = 1.75$$

次に、傾き a と切片 b を求めます。傾き a は次の式で与えられます。

$$a = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(X_i - \bar{X})^2}$$

具体的に計算すると、

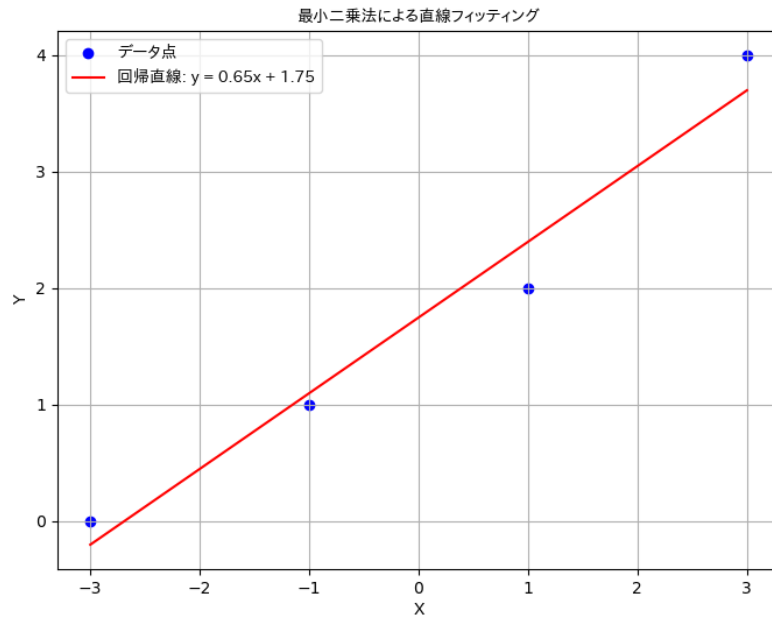
$$\begin{aligned} a &= \frac{(-3 - 0)(0 - 1.75) + (-1 - 0)(1 - 1.75) + (1 - 0)(2 - 1.75) + (3 - 0)(4 - 1.75)}{(-3 - 0)^2 + (-1 - 0)^2 + (1 - 0)^2 + (3 - 0)^2} \\ &= \frac{5.25 + 0.75 + 0.25 + 6.75}{9 + 1 + 1 + 9} = \frac{13}{20} = 0.65 \end{aligned}$$

切片 b は次の式で求められます。

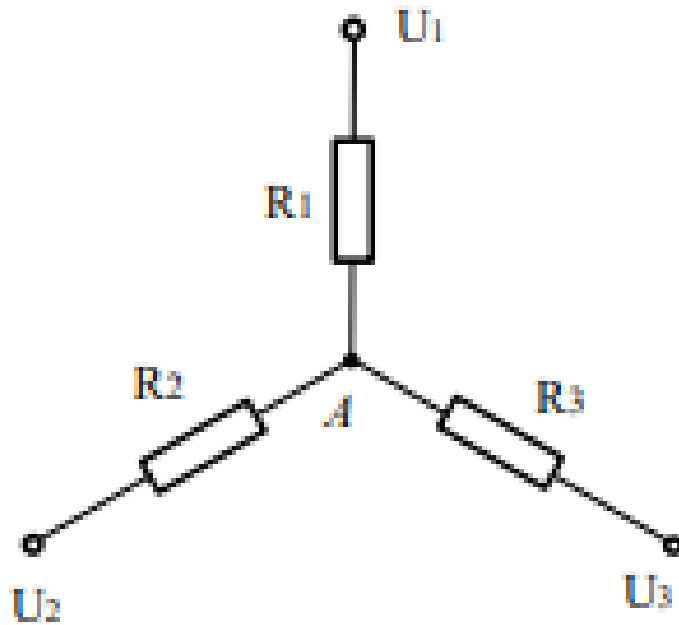
$$b = \bar{Y} - a \cdot \bar{X} = 1.75 - 0.65 \cdot 0 = 1.75$$

したがって、直線の方程式は次のようになります。

$$y = 0.65x + 1.75$$



2. 右の回路について電圧 U_1, U_2, U_3 と抵抗値 R_1, R_2, R_3 が既知の場合、A 点の電圧値を導出せよ。



回答

キルヒホッフの電流法則により、A 点での電流のバランスを考えます。

$$\frac{U_1 - V_A}{R_1} + \frac{U_2 - V_A}{R_2} + \frac{U_3 - V_A}{R_3} = 0$$

この式を整理して V_A について解きます。

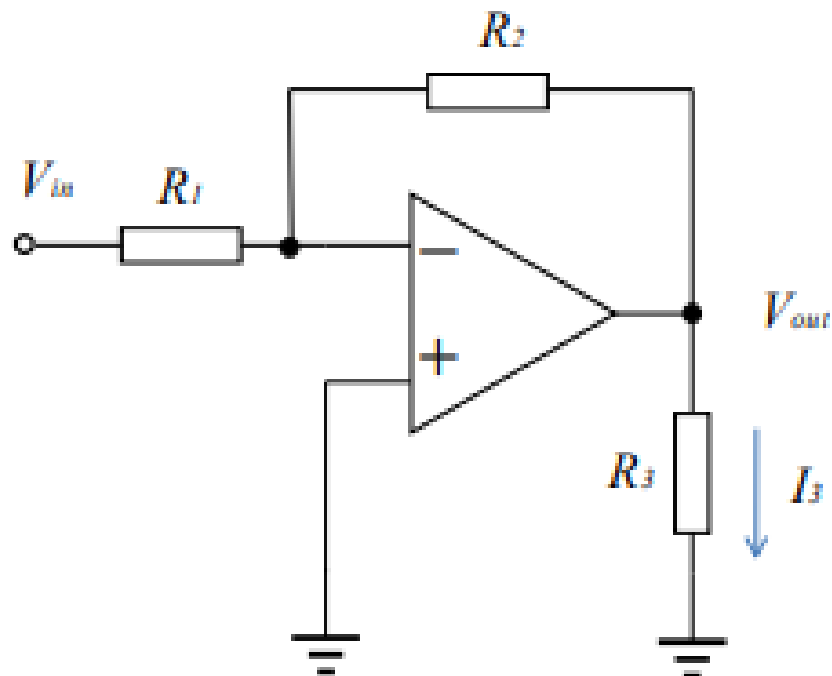
$$V_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_3}{R_3}$$

$$V_A = \frac{\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

この式は抵抗の合成抵抗 R を用いると次のように表されます。

$$V_A = \frac{R_1 R_2 U_3 + R_1 R_3 U_2 + R_2 R_3 U_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

3. 下記オペアンプ回路について電圧 V_{IN} と抵抗値 R_1, R_2, R_3 が既知の場合、抵抗 R_3 に流れている電流 I_3 を導出せよ。 $R_1 = 10\text{k}\Omega, R_2 = 50\text{k}\Omega$ の際、回路の増幅率を計算せよ。



回答

反転増幅器の増幅率は次の式で与えられます。

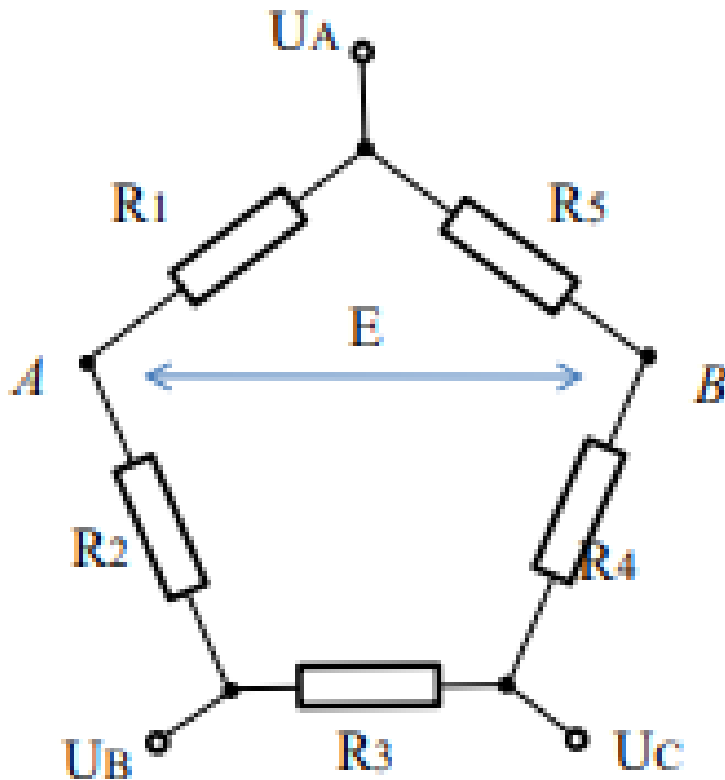
$$\text{増幅率} = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{50\text{ k}\Omega}{10\text{ k}\Omega} = -5.0$$

また、抵抗 R_3 に流れる電流 I_3 は次の式で表されます。

$$I_3 = -\frac{5 \cdot V_{in}}{R_3}$$

Ex.1 データ $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ を最小 2 乗法によって下記式に当てはまる場合の係数 (a, b, c) を導出せよ。

$$y = ax^2 + bx + c$$



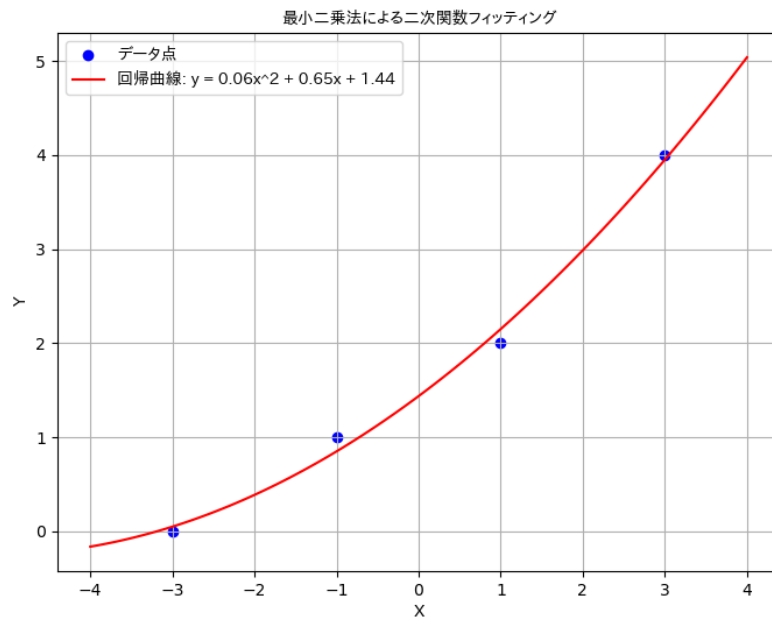
回答

2 次関数フィッティングにより、係数 a, b, c を求めます。
行列を用いて A と Y を表すと、

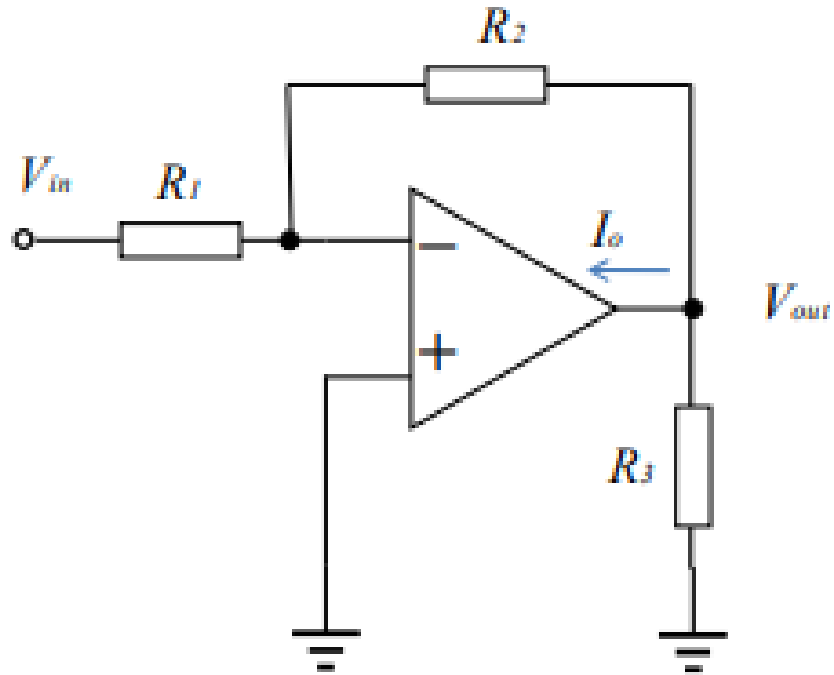
$$A = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_1 & 1 \\ X_2^2 & X_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n^2 & X_n & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

この方程式を解くことで a, b, c の値が得られます。
計算の結果、次の 2 次関数が得られます。

$$y = 0.06x^2 + 0.65x + 1.44$$



Ex.2 右の回路について電圧 U_A, U_B, U_C と抵抗値 R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 が既知の場合、AB 点間の電圧値 E を導出せよ。



回答

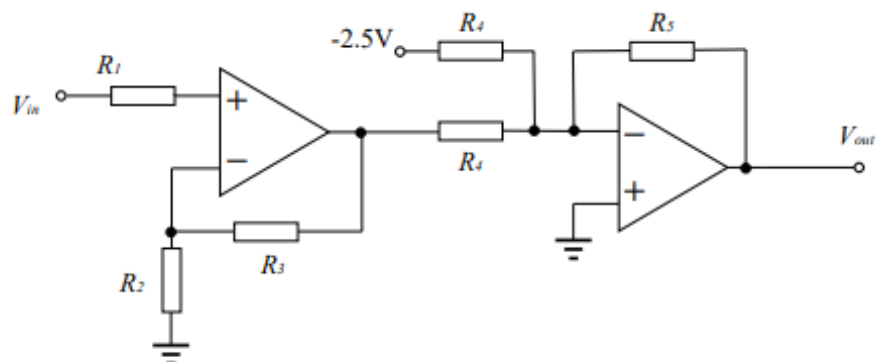
キルヒホッフの法則を適用し、AB 間の電圧 E を求めます。各点での電圧のバランスを以下のように設定します。

$$\frac{U_A - E}{R_1} + \frac{U_B - E}{R_2} + \frac{U_C - E}{R_3} = 0$$

この式を整理して E について解きます。一般的には各抵抗の値が異なるため、シンボリックな解として次のように表せます。

$$E = \frac{R_1 R_2 U_C + R_1 R_3 U_B + R_2 R_3 U_A}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Ex.3 下記オペアンプ回路について電圧 U_{IN} と抵抗値 R_1, R_2, R_3 が既知の場合、オペアンプの出力端子に流れ込む電流 I_o を導出せよ。



回答

出力電流 I_o は次のように表されます。

$$I_o = \frac{U_{IN}}{R_1} - \frac{U_{IN}}{R_2} = \frac{U_{IN}(R_2 - R_1)}{R_1 R_2}$$