Universidad Tecnológica Nacional

Análisis de Señales y Sistemas
Trabajo Practico 3

Franco Palombo - 401910
Ignacio Gil - 401891
Laureano Valentin Reinoso - 402075
Luciano Tomas Cortesini Perez - 402719

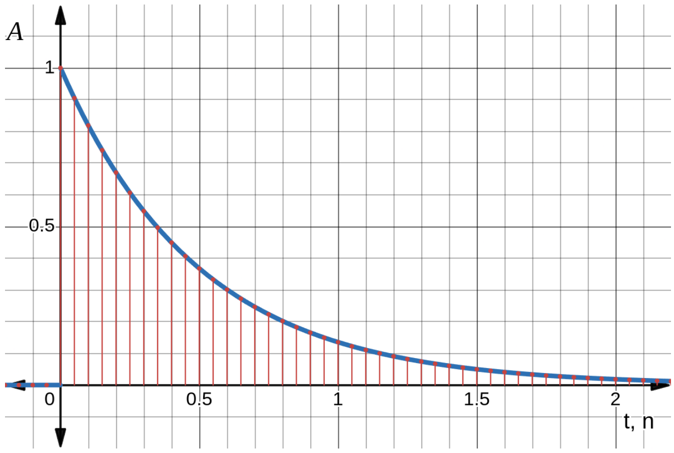
07 / 10 / 2024

Tabla de Contenidos

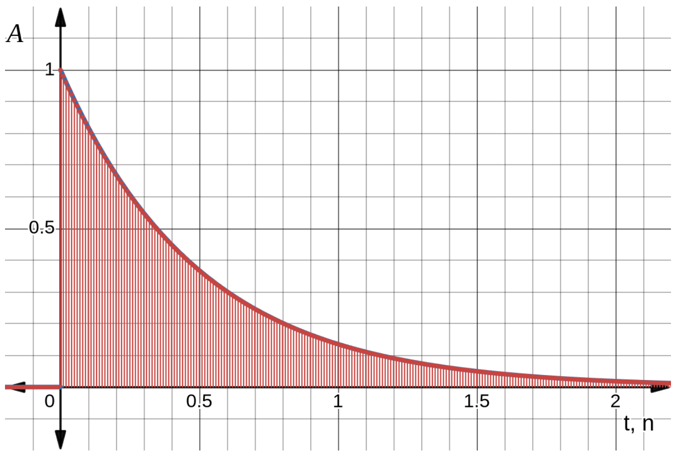
Ejercicio 1

Graficar ambas señales superpuestas, y verificar cuántas muestras de tiempo discreto se corresponden con el rango de tiempo continuo utilizado para la representación gráfica.

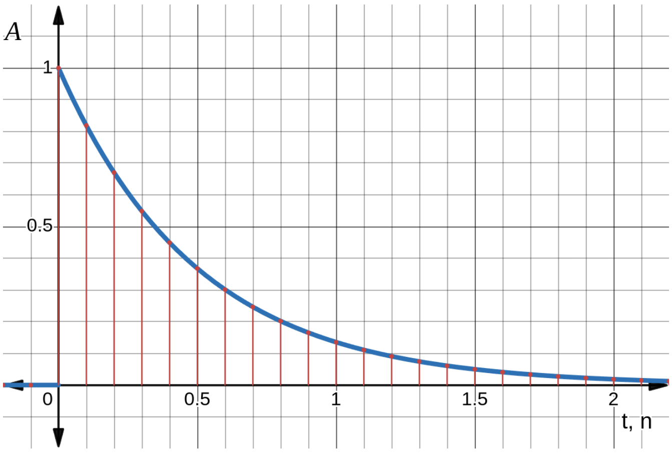
a) Una señal analógica $x(t) = e^{-2t}\mu(t)$ se muestrea para generar la secuencia de tiempo discreto $x_{[n]}$, considerar $n = nT_s$, con $T_s = 0.05$, $T_s = 0.01$, $T_s = 0.1$.



Muestreo con $T_s = 0.05$
Muestras en el intervalo: 48

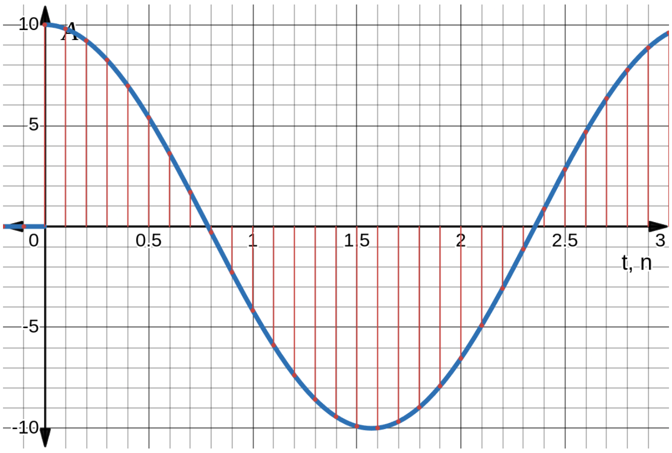


Muestreo con $T_s = 0.01$
Muestras en el intervalo: 140

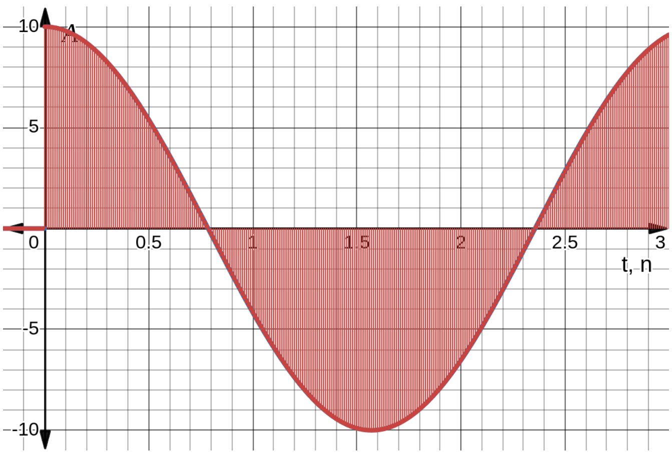


Muestreo con $T_s = 0.1$
Muestras en el intervalo: 24

b) Una señal analógica $x(t) = 10\cos(2t)\mu(t)$ se muestrea para generar la secuencia de tiempo discreto $x_{[n]}$, con $T_s = 0.1$ y $T_s = 0.01$.



Muestreo con $T_s = 0.1$
Muestras en el intervalo: 32



Muestreo con $T_s = 0.01$
Muestras en el intervalo: 320

c) Considerar a continuación una secuencia de valores obtenida de una adquisición de datos en un proceso de muestreo. Describir una expresión matemática que permita involucrar la secuencia temporal del proceso de adquisición. Considerar la secuencia causal:

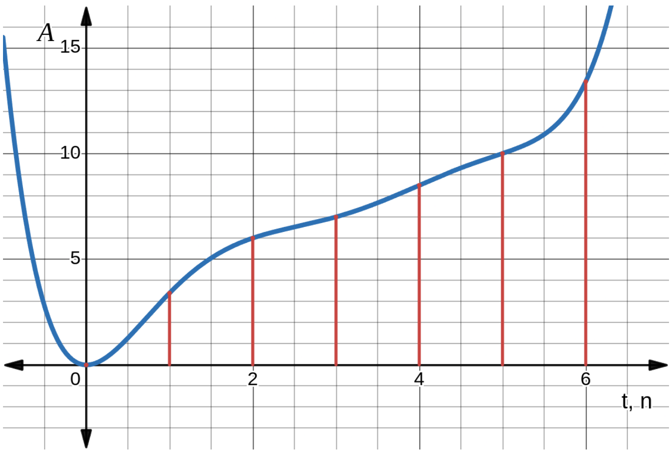
$$\{0, 3.4, 6, 7, 8.5, 10, 13.4\}$$

Para encontrar una función que pase por todos los puntos de la secuencia, como una forma de aproximar la señal en el dominio temporal de la cual se obtuvo la secuencia, utilizamos el método de interpolación de Lagrange. Definido por:

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n} f_{[j]} \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{t - t_i}{t_k - t_i}$$

Donde:

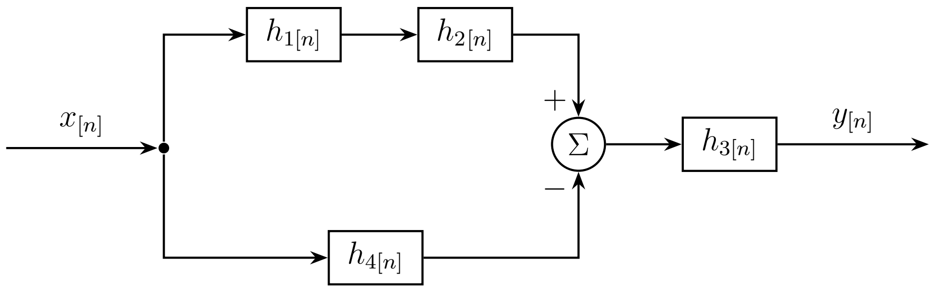
n: número de elementos de la secuencia
$f_{[k]}$: el elemento k-esimo de la secuencia
t_i: el instante temporal del elemento i-esimo



Interpolación por polinomio de Lagrange

Ejercicio 2

Considerar el siguiente sistema de tiempo discreto:



a) Si $h_{1[n]} = h_{2[n]} = 3^{-n}\mu_{[n]}$, $h_{3[n]} = \mu_{[n]}$, $h_{4[n]} = 2^{-n}\mu_{[n]}$:

La respuesta al impulso del sistema corresponde a:

$$h_{[n]} = (h_{1[n]} * h_{2[n]} - h_{4[n]}) * h_{3[n]}$$
$$h_{[n]} = (3^{-n}\mu_{[n]} * 3^{-n}\mu_{[n]} - 2^{-n}\mu_{[n]}) * \mu_{[n]}$$
$$h_{[n]} = (3^{-n}(n-1)\mu_{[n]} - 2^{-n}\mu_{[n]}) * \mu_{[n]}$$
$$h_{[n]} = 3^{-n}n\mu_{[n]} * \mu_{[n]} - 3^{-n}\mu_{[n]} * \mu_{[n]} - 2^{-n}\mu_{[n]} * \mu_{[n]}$$
$$h_{[n]} = \sum_{k=0}^{n} 3^{-k}k - \sum_{k=0}^{n} 3^{-k} - \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}$$

La serie geométrica:

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \tag{2.1}$$

Va a ayudarnos a resolver la segunda y tercera sumatoria. Sin embargo, para la primera vamos a necesitar manipularla.

Primero derivamos la expresión anterior respecto a r.

$$\sum_{k=0}^{n} kr^{k-1} = \frac{1-(n+1)r^n + nr^{n+1}}{(1-r)^2}$$

Y finalmente multiplicamos por r.

$$\sum_{k=0}^{n} kr^k = \frac{r-(n+1)r^{n+1} + nr^{n+2}}{(1-r)^2} \tag{2.2}$$

Con estos resultados, podemos continuar el desarrollo.

$$h_{[n]} = \left(\frac{\frac{1}{3} - (n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \right)\mu_{[n]}$$

$$h_{[n]} = \left(-\frac{11}{4} - \frac{9}{4}(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{9}{4}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)\mu_{[n]}$$

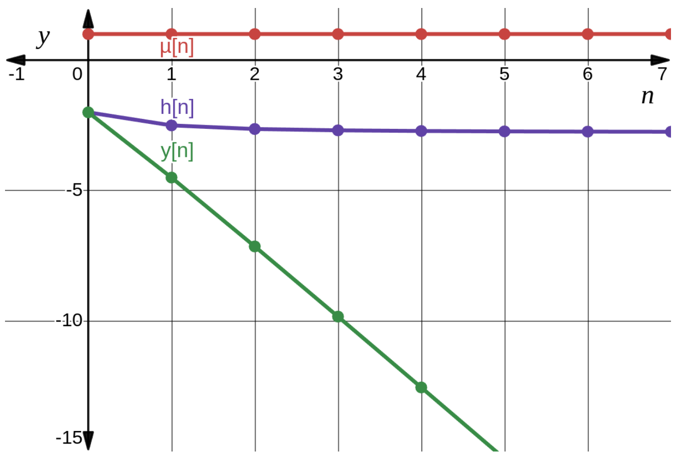
$$h_{[n]} = \left(-\frac{11}{4} - \frac{3}{4}n3^{-n} - \frac{3}{4}3^{-n} + \frac{1}{4}n3^{-n} - \frac{1}{2}3^{-n} - 2^{-n}\right)\mu_{[n]}$$
$$h_{[n]} = \left(-\frac{11}{4} - 2^{-n} - \frac{2}{4}n3^{-n} - \frac{5}{4}3^{-n}\right)\mu_{[n]}$$

La respuesta al escalón unitario está definida por:

$$y_{[n]} = \mu_{[n]} * h_{[n]}$$
$$y_{[n]} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{11}{4} - 2^{-n} - \frac{2}{4}n3^{-n} - \frac{5}{4}3^{-n}\right)\mu_{[k]}\mu_{[n-k]}$$
$$y_{[n]} = \mu_{[n]}\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{11}{4} - 2^{-n} - \frac{2}{4}n3^{-n} - \frac{5}{4}3^{-n}\right)$$

El desarrollo, ademas de largo, es engorroso y carece de la aplicación de alguna propiedad importante o identidad no vista. Todos los términos de la suma usan o la identidad de la serie trigonométrica (2.1), su derivada (2.2), o la identidad de una sumatoria constante. Como resultado, se obtiene lo siguiente:

$$y_{[n]} = \frac{5}{4} - \frac{11}{4}(n+1) + \frac{5n+1}{8\cdot 3^n} + \frac{3(n+1)}{8\cdot 3^n} - \frac{1}{2^n}$$



Gráfica con las tres funciones discretas.

b) Si $h_{1[n]} = 2^{-n}u_{[n]}$, $h_{2[n]} = \delta_{[n]}$, $h_{3[n]} = h_{4[n]} = 3^{-n}u_{[n]}$:

La respuesta al impulso del sistema corresponde a:

$$h_{[n]} = (h_{1[n]} * h_{2[n]} - h_{4[n]}) * h_{3[n]}$$
$$h_{[n]} = (2^{-n}\mu_{[n]} * \delta_{[n]} - 3^{-n}\mu_{[n]}) * 3^{-n}\mu_{[n]}$$
$$h_{[n]} = (2^{-n}\mu_{[n]} * 3^{-n}\mu_{[n]} - 3^{-n}\mu_{[n]} * 3^{-n}\mu_{[n]})$$
$$h_{[n]} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(2^{-k}\cdot 3^{-(n-k)}\right)\cdot\mu_{[k]}\cdot\mu_{[n-k]} - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(3^{-k}\cdot 3^{-(n-k)}\right)\cdot\mu_{[k]}\cdot\mu_{[n-k]}$$

$$h_{[n]} = 3^{-n} \cdot \mu_{[n]} \sum_{k=0}^{n} \left(2^{-k} \cdot 3^{k}\right) - 3^{-n} \cdot \mu_{[n]} \sum_{k=0}^{n} \left(3^{-k} \cdot 3^{k}\right)$$

$$h_{[n]} = 3^{-n} \cdot \mu_{[n]} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{2}\right)^{k} - 3^{-n} \cdot \mu_{[n]} \sum_{k=0}^{n} 1$$

Aplicando la serie trigonométrica (2.1) y la serie de una constante, se obtiene el siguiente resultado:

$$h_{[n]} = -3^{-n} \left(2\left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right) + (n+1)\right) \mu_{[n]}$$

$$h_{[n]} = \left(-2 \cdot 3^{-n} + 2 \cdot 3^{-n} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - n \cdot 3^{-n} - 3^{-n}\right) \mu_{[n]}$$

La respuesta al escalón unitario está definida por:

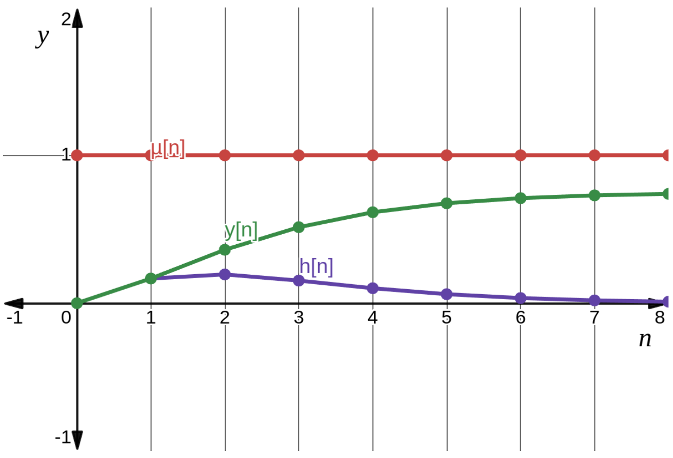
$$y_{[n]} = \mu_{[n]} * h_{[n]}$$

$$y_{[n]} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(-2 \cdot 3^{-k} + 2 \cdot 3^{-k} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} - k \cdot 3^{-k} - 3^{-k}\right) \mu_{[k]} \cdot \mu_{[n-k]}$$

$$y_{[n]} = \mu_{[n]} \sum_{k=0}^{n} \left(-2 \cdot 3^{-k} + 2 \cdot 3^{-k} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} - k \cdot 3^{-k} - 3^{-k}\right)$$

Nuevamente, aplicando las identidades de la serie geométrica (2.1), su derivada (2.2) y la serie de una constante, se obtiene que:

$$y_{[n]} = \left(-9\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{2} + 6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - \left(\frac{\frac{1}{3} - n\left(\frac{1}{3}\right)^{n} + (n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{2}} + 3^{-n} \cdot n\right)\right)$$



Gráfica con las tres funciones discretas.

Ejercicio 3

Considerar un sistema bancario de ahorro a tasa de interés mensual constante. Plantear el sistema considerando un depósito mensual constante en el mes n de \$10, r es la tasa de interés en el mismo periodo, y se considera el saldo inmediatamente después del depósito en el periodo.

a) Identificar en el problema las variables de entrada y salida del mismo.

La variable de entrada sería el depósito mensual, en este caso constante, $x_{[n]} = 10\mu_n$.

La variable de salida sería el ahorro acumulado hasta el mes n, $y_{[n]}$.

b) Plantear un modelo en ecuaciones de diferencias capaz de caracterizar el sistema propuesto.

El modelo en ecuaciones de diferencias que se plantea es el siguiente:

$$y_{[n]} = x_{[n]} + r \cdot y_{[n-1]}$$

Podemos identificar un modelo recursivo en la ecuación, desarrollando un poco más obtenemos:

$$y_{[n-1]} = x_{[n-1]} + r \cdot y_{[n-2]}$$

$$y_{[n-2]} = x_{[n-2]} + r \cdot y_{[n-3]}$$

$$y_{[n-3]} = x_{[n-3]} + r \cdot y_{[n-4]}$$

Que sustituyendo en las previas:

$$y_{[n]} = x_{[n]} + r \cdot (x_{[n-1]} + r \cdot (x_{[n-2]} + r \cdot (x_{[n-3]} + r \cdot y_{[n-4]})))$$

Distribuyendo "r":

$$y_{[n]} = x_{[n]} + r \cdot x_{[n-1]} + r^2 \cdot x_{[n-2]} + r^3 \cdot x_{[n-3]} + r^4 \cdot y_{[n-4]}$$

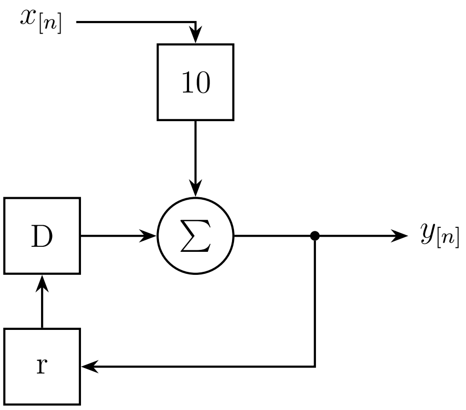
Está ecuación se puede reescribir como la siguiente serie geométrica:

$$y_{[n]} = \sum_{k=0}^{n} r^k \cdot x_{[n-k]}$$

Como el factor que multiplica a r, es decir, $x_{[n]}$ es constante, se puede tratar como tal y la solución a la serie para un r genérico es:

$$y_{[n]} = x_{[n]} \cdot \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

c) Representar la ecuación en diferencias por medio de un diagrama de bloques con retardos unitarios.



d) Evaluar el saldo para un periodo de capitalización de 48 meses.

Para un periodo de capitalización de 48 meses, se haría $n = 48$ y se utilizaría la serie geométrica desarrollada en el apartado b, quedando:

$$y_{[n]} = x_{[n]} \cdot \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$
$$y_{[48]} = x_{[48]} \cdot \frac{1 - r^{48+1}}{1 - r}$$

Suponiendo un $r = 1.1$ el saldo resultaría:

$$y_{[48]} = x_{[48]} \cdot \frac{1 - (1.1)^{48+1}}{1 - 1.1}$$
$$y_{[48]} = 10 \cdot \frac{1 - (1.1)^{49}}{-0.1}$$
$$y_{[48]} = 10.571.89$$

Ejercicio 4

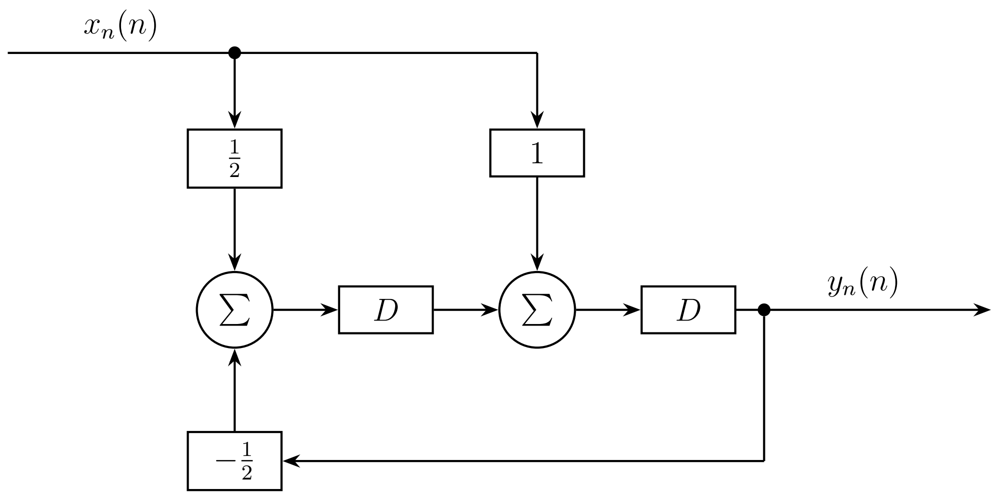
a) Diagramar en un diagrama de bloques normalizado representativo del sistema para la siguiente ecuación en diferencias:

$$y_{[n+1]} + \frac{1}{2}y_{[n-1]} = x_{[n]} + \frac{1}{2}x_{[n-1]}$$

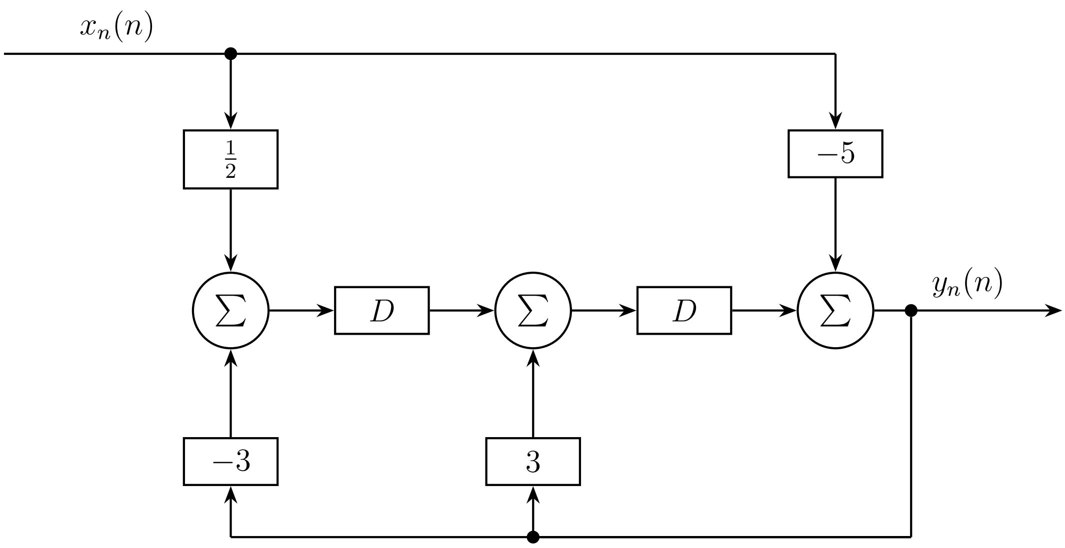
$$y_{[n+1]} = x_{[n]} + \frac{1}{2}x_{[n-1]} - \frac{1}{2}y_{[n-1]}$$

$$y_{[n]} = x_{[n-1]} + \frac{1}{2}x_{[n-2]} - \frac{1}{2}y_{[n-2]}$$

$$y_{[n]} = D\{x_{[n]}\} + D^2\{\frac{1}{2}x_{[n]} - \frac{1}{2}y_{[n]}\}$$



b) Dado el sistema simulado por el diagrama de bloques a continuación, determinar la ecuación en diferencias que lo describe.



$$
\begin{aligned}
y_{[n]} &= -5y_{[n]} + D\{3y_{[n]}\} + D^2\{\frac{1}{2}x_{[n]} - 3y_{[n]}\} \\
y_{[n]} &= -5x_{[n]} + 3y_{[n-1]} + \frac{1}{2}x_{[n-2]} - 3y_{[n-2]} \\
3y_{[n-2]} - 3y_{[n-1]} + y_{[n]} &= \frac{1}{2}x_{[n-2]} - 5x_{[n]}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 5

El objetivo de este trabajo práctico es obtener el espectro de frecuencias de una secuencia en tiempo discreto. Considerar la siguiente secuencia periódica en tiempo discreto y aplicar la Serie de Fourier Discreta (DFT).

a) Obtener el espectro de frecuencias para $N = 3$:

$$x[n] = 1 + \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

La serie de Fourier discreta está definida como:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot e^{j\frac{2\pi kn}{N}} \tag{5.1}$$

Donde:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \tag{5.2}$$

Entonces:

$$a_k = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{3-1} \left(1 + cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right) \cdot e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

Para llevar a cabo esta sumatoria, es recomendable expandirla termino a término, ya que si pasamos el coseno a su forma compleja, y usamos la simplificación de la serie geométrica (2.1), todos los términos terminan valiendo cero.

$$a_k = \frac{1}{3}\left((1 + cos\,(0))\,e^0 + \left(1 + cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)e^{-j\frac{2\pi k}{3}} + \left(1 + cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)e^{-j\frac{4\pi k}{3}}\right)$$

$$a_k = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi k}{3}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{4\pi k}{3}}\right)$$

$$a_k = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\left(e^{-j\frac{2\pi k}{3}} + e^{-j\frac{4\pi k}{3}}\right)$$

Teniendo la expresión de a_k, la obtención de su espectro es tan simple como obtener su modulo y fase.
Para el módulo, usamos la expresión:

$$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} \tag{5.3}$$

Y para la fase, usamos:

$$Arg(z) = arctan2(x, y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & y \geq 0,\ x < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & y < 0,\ x < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & y > 0,\ x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & y < 0,\ x = 0 \\ \text{indefinido} & y = 0,\ x = 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

Donde nos termina quedando:

$$|a_k| = \begin{cases} 1.8\overline{3} & k = 3m, \quad m \in \mathbb{Z} \\ 1.\overline{3} & k = 3m+1, \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad \angle a_k = 0$$

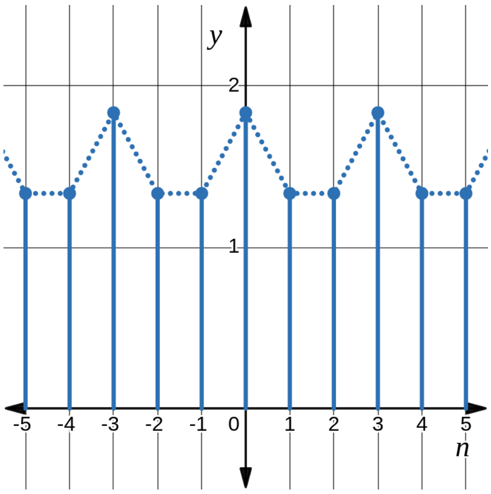


Diagrama de modulo a_k

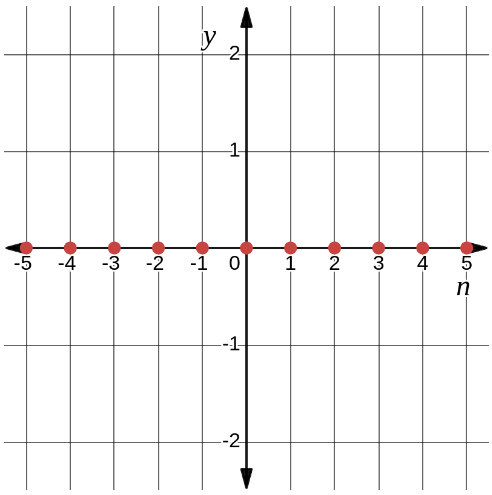


Diagrama de fases a_k

b) Obtener el espectro de frecuencias para $N = 6$:

$$x[n] = 1 + \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

Utilizando la ec. (5.2) tenemos:

$$a_k = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{6-1}\left(1 + cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)\right) \cdot e^{-j\frac{2\pi k n}{6}}$$

Para llevar a cabo esta sumatoria, nuevamente, es recomendable expandirla termino a término. Resolviendo algebraicamente:

$$a_k = \frac{1}{6}\left(2 + \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi k}{3}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi k}{3}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{4\pi k}{3}} + \frac{3}{2}e^{-j\frac{5\pi k}{3}}\right)$$

$$a_k = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi k}{3}} + \frac{1}{12}e^{-j\frac{2\pi k}{3}} + \frac{1}{12}e^{-j\frac{4\pi k}{3}} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{5\pi k}{3}}$$

Teniendo la expresión de a_k, la obtención de su espectro es tan simple como obtener su modulo (5.3) y fase (5.4).

$$|a_k| = \begin{cases} 1 & k = 6m, \quad m \in \mathbb{Z} \\ 0,5 & k = 6m+1, \quad m \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \qquad \angle a_k = Arg(a_k)$$

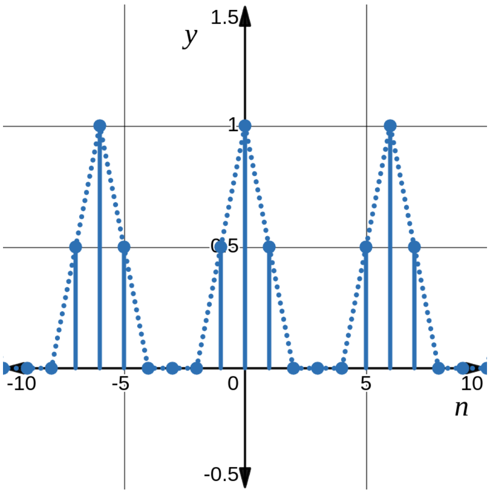


Diagrama de modulo a_k

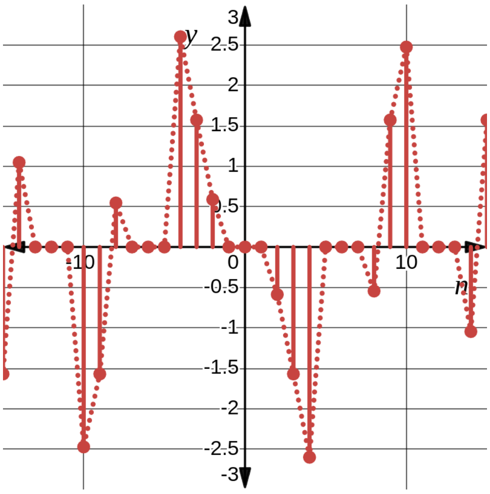


Diagrama de fases a_k

Nos encontramos con la peculiaridad de que el diagrama de fases no respeta con la cláusula de "periódica de periodo N". Es por eso por lo que se tomó la iniciativa de hacer una herramienta en la plataforma Desmos para ver en donde estaba el error. La herramienta devolvió los siguientes gráficos:

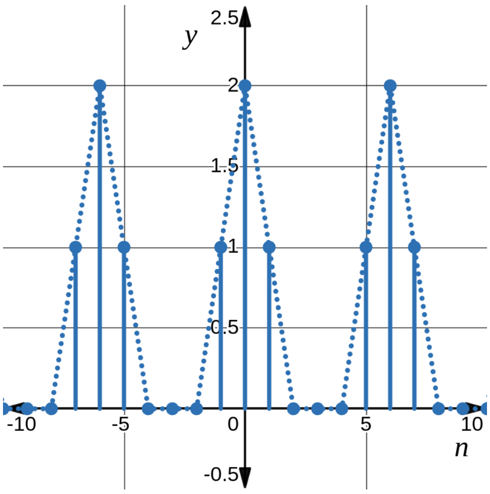


Diagrama de modulo a_k

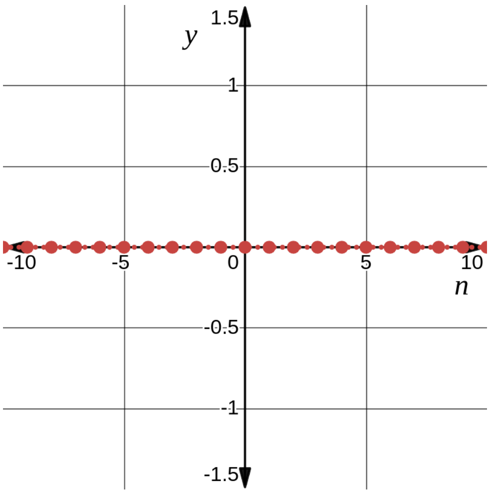


Diagrama de fases a_k

No fuimos capaces de determinar dónde estaba el error.

Ejercicio 6

Considerar un sistema LTI, causal, caracterizado por una ecuación en diferencias:

$$y_{[n]} - 1.2y_{[n-1]} - 0.13y_{[n-2]} - 0.36y_{[n-3]} = x_{[n]}$$

a) Determinar $Y(z) = \mathcal{Z}\{y_{[n]}\}$, la solución completa, con las siguientes condiciones iniciales:

$$y_{[-1]} = 1, \quad y_{[-2]} = -1, \quad y_{[-3]} = 1$$

Despejando $y_{[n]}$:

$$y_{[n]} = x_{[n]} + 1.2y_{[n-1]} + 0.13y_{[n-2]} + 0.36y_{[n-3]}$$

Y aplicando las propiedades de linealidad y desplazamiento temporal de la transformada Z:

$$\begin{aligned}
Y_{(z)} &= X_{(z)} + 1.2(Y_{[z]}z^{-1} + y_{[-1]}) + 0.13(Y_{[z]}z^{-2} + y_{[-1]}z^{-1} + y_{[-2]}) + \\
&\qquad 0.36(Y_{[z]}z^{-3} + y_{[-1]}z^{-2} + y_{[-2]}z^{-1} + y_{[-3]}) \\
Y_{(z)} &= X_{(z)} + 1.2(Y_{[z]}z^{-1} + 1) + 0.13(Y_{[z]}z^{-2} + z^{-1} - 1) + 0.36(Y_{[z]}z^{-3} + z^{-2} - z^{-1} + 1) \\
Y_{(z)} &= X_{(z)} + 1.2Y_{[z]}z^{-1} + 0.13Y_{[z]}z^{-2} + 1.43 + 0.36Y_{[z]}z^{-3} + 0.36z^{-2} - 0.23z^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{(z)} - 0.36Y_{[z]}z^{-3} - 0.13Y_{[z]}z^{-2} - 1.2Y_{[z]}z^{-1} &= X_{(z)} + 1.43 + 0.36z^{-2} - 0.23z^{-1} \\
Y_{(z)}(1 - 0.36z^{-3} - 0.13z^{-2} - 1.2z^{-1}) &= X_{(z)} + z^{-3} + 1.43 + 0.36z^{-2} - 0.23z^{-1} \\
Y_{(z)} &= \frac{X_{(z)} + 1.43 + z^{-3} + 0.36z^{-2} - 0.23z^{-1}}{(1 - 0.36z^{-3} - 0.13z^{-2} - 1.2z^{-1})}
\end{aligned}$$

b) Obtener la función de transferencia $H(z)$, respuesta al impulso con condiciones iniciales nulas, por medio de residuos.

Teniendo en cuenta CI nulas para la expresión previamente obtenida de $Y_{[z]}$

$$\begin{gathered}
Y_{(z)} = X_{(z)} + 1.2Y_{[z]}z^{-1} + 0.13Y_{[z]} + 0.36Y_{[z]}z^{-3} \\
Y_{(z)}(1 - 1.2z^{-1} - 0.13 - 0.36z^{-3}) = X_{(z)} \\
H_{(z)} = \frac{1}{1 - 1.2z^{-1} - 0.13z^{-2} - 0.36z^{-3}} \\
H_{(z)} = \frac{z^3}{z^3 - 1.2z^2 - 0.13z - 0.36}
\end{gathered}$$

Factorizando el denominador:

$$H_{(z)} = \frac{z^3}{(z - 1.4584)(z + (0.1292 + j0.4797))(z + (0.1292 - j0.4797))}$$

c) Obtener $h_{[n]} = \mathcal{Z}^{-1}\{H_{(z)}\}$

Planteamos la antitransformada cómo:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{H_{(z)}\} = h_{[n]} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C H_{(z)} z^{n-1} dz$$

Podemos resolver esta integral a través del teorema del residuo siendo:

$$\oint_C H_{(z)} z^{n-1} dz = 2\pi j \sum_{i=1}^{n} Res(H_{(z)} z^{n-1}, z_i)$$

siendo n el numero de polos y z_i el polo i-esimo.

Identificamos los polos:

$$z_1 = 1.4584$$
$$z_2 = -0.1292 - j0.4797$$
$$z_3 = -0.1292 + j0.4797$$

Calculamos los residuos:

$$Res(H_{(z)} z^{n-1}, z_1) = \lim_{z \to z_1} \frac{(z - z_1) z^{n+2}}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}$$
$$Res(H_{(z)} z^{n-1}, z_1) = \frac{{z_1}^{n+2}}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}$$
$$Res(H_{(z)} z^{n-1}, z_1) = \frac{1.4584^{n+2}}{2,7596}$$

$$Res(H_{(z)} z^{n-1}, z_2) = \lim_{z \to z_2} \frac{(z - z_2) z^{n+2}}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}$$
$$Res(H_{(z)} z^{n-1}, z_2) = \frac{{z_2}^{n+2}}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)}$$
$$Res(H_{(z)} z^{n-1}, z_2) = \frac{(-0.1292 - j0.4797)^{n+2}}{(-0.4602 + j1.5231)}$$

$$Res(H_{(z)} z^{n-1}, z_3) = \lim_{z \to z_3} \frac{(z - z_3) z^{n+2}}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}$$
$$Res(H_{(z)} z^{n-1}, z_3) = \frac{{z_3}^{n+2}}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)}$$
$$Res(H_{(z)} z^{n-1}, z_3) = \frac{(-0.1292 + j0.4797)^{n+2}}{(-0.4602 - j1.5231)}$$

Como la consigna del ejercicio indica que el sistema es causal, la respuesta al impulso debe ser causal. Siendo entonces:

$$h_{[n]} = \left(\frac{1.4584^{n+2}}{2.7596} + \frac{(-0.1292 - j0.4797)^{n+2}}{(-0.4602 + j1.5231)} + \frac{(-0.1292 + j0.4797)^{n+2}}{(-0.4602 - j1.5231)} \right) \mu_{[n]}$$

Si bien este resultado en un principio parece una función compleja, lo cual no seria valido, teniendo en cuenta que:

$$(z^*)^n = (z^n)^*$$

Podemos afirmar que los numeradores de los dos últimos términos siempre serán complejos conjugados, pudiendo generalizar la expresión cómo:

$$\frac{z}{w} + \frac{z^*}{w^*} = \frac{a + jb}{c + jd} + \frac{a - jb}{c - jd} = \frac{2(ac + bd) + j(bc - bc - ad + ad)}{c^2 + d^2}$$

Demostrando así que la expresión obtenida de $h_{[n]}$ siempre da un resultado real.

d) Obtener la respuesta al escalón unitario con condiciones iniciales nulas, por medio de fracciones parciales $y_{[n]} = \mathcal{Z}^{-1}\{Y_{(z)}\}$.

Partiendo de:

$$Y_{(z)} = \frac{X_{(z)}}{(1 - 1.2z^{-1} - 0.13 - 0.36z^{-3})}$$

Y considerando que la respuesta al escalón unitario es:

$$X_{(z)} = \frac{z}{z - 1}$$

La expresión final será:

$$Y_{(z)} = \frac{\frac{z}{z-1}}{(1 - 1.2z^{-1} - 0.13 - 0.36z^{-3})}$$

Multiplicando y dividiendo por z^3, y luego resolviendo:

$$Y_{(z)} = \frac{z^4}{(z-1)(z^3 - 1.2z^2 - 0.13z - 0.36)}$$

$$Y_{(z)} = \frac{z^4}{(z-1)(z - 1.4584)(z + 0.1292 - j0.4797)(z + 0.1291 + j0.4797)}$$

$$Y_{(z)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z - 1.4584} + \frac{C}{z + 0.1292 - j0.4797} + \frac{D}{z + 0.1291 + j0.4797}$$

Resolviendo los coeficientes obtenemos:

$$A = -1.4493 \quad B = 3.5878 \quad C = 0.0307 - j0.0056 \quad D = 0.0307 + j0.0056$$

Finalmente reemplazando en la $Y_{(z)}$:

$$Y_{(z)} = \frac{-1.4493}{z-1} + \frac{3.5878}{z - 1.4584} + \frac{0.0307 - j0.0056}{z + (0.1292 + j0.4797)} + \frac{0.0307 + j0.0056}{z + (0.1292 - j0.4797)}$$

Realizando la antitransformada por primitivas, donde:

$$\mathbb{Z}^{-1}\left\{\frac{A}{z-a}\right\} = Aa^{n-1}\mu_{[n]} \tag{6.1}$$

Tenemos entonces:

$$y_{[n]} = \big((-1.4493) + 3.5878(1.4584)^{n-1} + (0.0307 - j0.0056)(0.1292 + j0.4797)^{n-1} +$$
$$(0.0307 + j0.0056)(0.1929 - j0.4797)^{n-1}\big)\mu_{[n]}$$

e) Obtener $y_{[n]} = \mu_{[n]} * h_{[n]}$, la respuesta al escalón unitario sin condiciones iniciales por medio de la convolución temporal.

$$y_{[n]} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1.4584^{k+2}}{2.7596} + \frac{(-0.1292 - j0.4797)^{k+2}}{(-0.4602 + j1.5231)} + \frac{(-0.1292 + j0.4797)^{k+2}}{(-0.4602 - j1.5231)}\right)\mu_{[k]}\mu_{[n-k]}$$

$$y_{[n]} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1.4584^{k+2}}{2.7596} + \frac{(-0.1292 - j0.4797)^{k+2}}{(-0.4602 + j1.5231)} + \frac{(-0.1292 + j0.4797)^{k+2}}{(-0.4602 - j1.5231)}$$

$$y_{[n]} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1.4584^{k+2}}{2.7596} + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-0.1292 - j0.4797)^{k+2}}{(-0.4602 + j1.5231)} + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-0.1292 + j0.4797)^{k+2}}{(-0.4602 - j1.5231)}$$

Resolviendo cada sumatoria por separado:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{1.4584^{k+2}}{2.7596} &= \frac{1.4584^{2}}{2.7596}\sum_{k=0}^{n}1.4584^{k} \\
&= 0.7707\frac{1 - 1.4584^{n+1}}{1 - 1.4584} \\
&= \frac{0.7707}{1 - 1.4584}(1 - 1.4584^{n+1}) \\
&= -1.6812(1 - 1.4584^{n+1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{(-0.1292 - j0.4797)^{k+2}}{(-0.4602 + j1.5231)} &= \frac{(-0.1292 - j0.4797)^{2}}{(-0.4602 + j1.5231)}\sum_{k=0}^{n}(-0.1292 - j0.4797)^{k} \\
&= (0.1134 + j0.1059)\frac{1 - (-0.1292 - j0.4797)^{n+1}}{1 - (-0.1292 - j0.4797)} \\
&= \frac{(0.1134 + j0.1059)}{1 - (-0.1292 - j0.4797))}(1 - (-0.1292 - j0.4797)^{n+1}) \\
&= 0.1188 + j0.0433(1 - (-0.1292 - j0.4797)^{n+1})
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-0.1292+j0.4797)^{k+2}}{(-0.4602-j1.5231)} = \frac{(-0.1292+j0.4797)^{2}}{(-0.4602-j1.5231)} \sum_{k=0}^{n}(-0.1292+j0.4797)^{k}$$

$$=(-0.2867+j0.2679)\frac{1-(-0.1292+j0.4797)^{n+1}}{1-(-0.1292+j0.4797)}$$

$$=\frac{(-0.2867+j0.2679)}{1-(-0.1292+j0.4797)}(1-(-0.1292+j0.4797)^{n+1})$$

$$=-0.3004+j0.1096(1-(-0.1292+j0.4797)^{n+1})$$

Finalmente:

$$y_{[n]} = -1.6812(1-1.4584^{n+1}+0.1188+j0.0433(1-(-0.1292-j0.4797)^{n+1}$$

$$-0.3004+j0.1096(1-(-0.1292+j0.4797)^{n+1})$$

f) Verificar $y_{[n]}$ para la respuesta al escalón unitario por división directa hasta la quinta muestra y reconstruir $Y_{(z)} = \mathcal{Z}\{y_{[n]}\}$.

El método de división directa consiste en realizar sucesivas divisiones de polinomios convenientes con el objetivo de obtener una expresión de la forma tal que se encuentren los valores x[n] por analogía con la definición de la transformada Z

$$X_{[z]} = \sum_{n=0}^{\infty} x_{[n]} z^{-n}$$

Partimos de la expresión:

$$Y_{(z)} = \frac{z}{(z-1)(1-1.2z^{-1}-0.13-0.36z^{-3})}$$

$$Y_{(z)} = \frac{z^4}{z^4-2.2z^3+1.07z^2-0.23z+0.36}$$

Dividimos considerando un cociente $\frac{z^4}{z^4} = 1$

$$Y_{(z)} = 1 + \frac{2.2z^3-1.07z^2-0.23z-0.36}{z^4-2.2z^3+1.07z^2-0.23z+0.36}$$

Dividimos considerando un cociente $\frac{-2.2z^3}{z^4} = 2.2z^{-1}$

$$Y_{(z)} = 1 + 2.2z^{-1} + \frac{3.77z^2-2.117z-0.146z-0.792z^{-1}}{z^4-2.2z^3+1.07z^2-0.23z+0.36}$$

Dividimos considerando un cociente $\frac{3.77z^2}{z^4} = 3.77z^{-2}$

$$Y_{(z)} = 1 + 2.2z^{-1} + 3.77z^{-2}\frac{6.17z-3.88+0.078z^{-1}-1.357z^{-2}}{z^4-2.2z^3+1.07z^2-0.23z+0.36}$$

Dividimos considerando un cociente $\frac{6.17z^3}{z^4} = 6.17z^{-3}$

$$Y_{(z)} = 1 + 2.2z^{-1} + 3.77z^{-2} + 6.17z^{-3} + \frac{9.77z - 6.52z^{-1} + 0.062z^{-2} - 2.221z^{-3}}{z^4 - 2.2z^3 + 1.07z^2 - 0.23z + 0.36}$$

Dividimos considerando un cociente $\frac{9.77}{z^4} = 9.77z^{-4}$

$$Y_{(z)} = 1 + 2.2z^{-1} + 3.77z^{-2} + 6.17z^{-3} + 9.77z^{-4} + ...$$

Obtenemos así por analogía los valores de $y_{[n]}$

$$y_{[0]} = 1, \qquad y_{[1]} = 2.2, \qquad y_{[2]} = 3.77, \qquad y_{[3]} = 6.17, \qquad y_{[4]} = 9.77$$

g) Verificar el régimen transitorio (TVI) y el régimen de estado permanente (TVF) en ambos dominios $\{z, n\}$ para la respuesta al escalón unitario con condiciones iniciales nulas.

El teorema del valor inicial indica que:

$$\lim_{z\to\infty} Y_{[z]} = y_{[0]} \tag{6.2}$$

Aplicando el teorema a la respuesta del escalón unitario en z:

$$y_{[0]} = \lim_{z\to\infty} Y(z)$$
$$y_{[0]} = \lim_{z\to\infty} \frac{z^4}{(z-1)(z^3 - 1.2z^2 - 0.13z - 0.36)}$$
$$y_{[0]} = \lim_{z\to\infty} \frac{z^4}{z^4 - 2.2z^3 + 1.07z^2 - 0.23z + 0.36}$$
$$y_{[0]} = \frac{\infty^4}{\infty^4 - 2.2\infty^3 + 1.07\infty^2 - 0.23\infty + 0.36}$$
$$y_{[0]} = 1$$

Valuando la función $y_{[n]}$ da un numero muy próximo a 1. Suponemos que el error esta dado por el truncamiento de los decimales después de la coma.

El teorema del valor final indica que:

$$\lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})Y_{[z]} = y_{[\infty]} \tag{6.3}$$

Aplicando el teorema a la respuesta del escalón unitario en z:

$$y_{[\infty]} = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})Y(z)$$
$$y_{[\infty]} = \lim_{z\to 1} \frac{(1 - z^{-1})z^4}{z^4 - 2.2z^3 + 1.07z^2 - 0.23z + 0.36}$$

Una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ que requiere reacomodar los términos para salvar la indeterminación:

$$y_{[\infty]} = \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)z^3}{(z-1)(z^3-1.2z^2-0.13z-0.36)}$$

$$y_{[\infty]} = \lim_{z\to 1} \frac{z^3}{z^3-1.2z^2-0.13z-0.36}$$

$$y_{[\infty]} = -\frac{100}{69}$$

Lo cual no coincide con lo que da la función en ∞, la cual diverge por los números elevados a n.

h) Elaborar la síntesis del sistema por medio de diagrama de bloques con retardos unitarios.