LECCIONES DE

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

La presente publicación obedece a la necesidad de proporcionar a los estudiantes de Ingeniería un texto que contenga reunidos todos los temas de la asignatura Análisis Matemático II.

Debido a la extensión del programa y al poco tiempo disponible para completarlo, es mi intención acercar a los alumnos un material básico de estudio con enfoques teóricos y ejemplos que permita agilizar las clases y así poder completar el desarrollo del programa correspondiente sin dificultad.

Posteriormente el alumno deberá completar el estudio de la materia por intermedio de los libros de texto que seleccione.

Agradezco a los integrantes de la cátedra el apoyo brindado y las sugerencias realizadas.

Ingeniero Miguel Omar Monllor
Profesor de la Cátedra Análisis Matemático II
Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Córdoba

2015

CONTENIDO

1- FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES INDEPENDIENTES

- Funciones de varias variables. Funciones Escalares, Campos Escalares, Funciones Vectoriales, Campos Vectoriales.
- Funciones de dos variables independientes. Dominio, Imagen, Funciones Explícitas, Funciones Implícitas, Funciones de más de dos variables independientes, Representación Gráfica de funciones de dos variables independientes, Líneas de Nivel, Superficies de Nivel.
- Incremento Total y Parcial de una función.
- Límites Dobles o Simultáneos. Cálculo de Límites Dobles o Simultáneos, Límites Sucesivos (o Iterados, o Reiterados), Límites Radiales.
- Continuidad de una función de varias variables. Discontinuidad Evitable.

2- DERIVADAS Y DIFERENCIALES

- Derivadas Parciales de una función de varias variables. Interpretación gráfica, Función Derivable.
- Derivadas Parciales Sucesivas, Teorema de Schwarz.
- Diferencial Total de una función de varias variables. Diferencial Parcial. Aplicaciones, Cálculos aproximados, Evaluación de errores de cálculo.
- Plano Tangente y Recta Normal a una Superficie.
- Diferenciales de Orden Superior.
- Derivación de Funciones Compuestas.
- Derivación de Funciones Implícitas. Jacobiano.
- Derivada Direccional. Interpretación Geométrica de la Derivada Direccional.
- Gradiente. Propiedades del Gradiente de una función, Gradiente de una función de tres variables independientes.

3- MÁXIMOS Y MÍNIMOS

- Fórmula de Taylor, Fórmula de Taylor de una función de dos variables independientes, Fórmula de Mac Laurin.
- Máximos y mínimos relativos de una función de dos variables independientes, Condición Necesaria y Condición Suficiente para la existencia de Extremo.
- Máximos y mínimos condicionados, Método Práctico, Método del Multiplicador de Lagrange.

4- FUNCIONES VECTORIALES Y CAMPOS VECTORIALES

- Funciones Vectoriales. Dominio, Límite, Continuidad, Curvas Planas, Curvas Alabeadas, Derivadas, Derivadas Sucesivas, Integrales de Funciones Vectoriales.
- Campos Vectoriales. Derivada de un Campo Vectorial, Matriz Jacobiana.

5- INTEGRALES MÚLTIPLES

- Integrales Múltiples. Cálculo de Volumen con Integrales Definidas.
- Integrales Dobles en dominios rectangulares.
- Cálculo de las Integrales Dobles. Integrales Iteradas (o Reiteradas, o Sucesivas), Cálculo de las Integrales Dobles.
- Integrales Dobles en dominios generales, Propiedades, Dominio Regular, Cálculo de volumen en el espacio con Integrales Dobles, Otras aplicaciones de Integrales Dobles.
- Cálculo de áreas de superficies.
- Integrales Dobles en Coordenadas Polares

- Cambio de variables en Integrales Dobles.
- Integrales triples. Propiedades, Otras aplicaciones de Integrales Triples.
- Cambio de variables en Integrales Triples.
- Integrales triples en Coordenadas Cilíndricas.
- Integrales Triples en Coordenadas Esféricas.

6- INTEGRALES CURVILÍNEAS

- Integrales Curvilíneas. Propiedades, Cálculo de la Integral Curvilínea.
- Área de un Dominio limitado por una curva cerrada.
- Fórmula de Green.
- Condición para que una Integral Curvilínea no dependa de la Trayectoria de Integración.
- Integral Curvilínea de una función $f(x, y)$.
- Integral Curvilínea en el espacio.
- Función Potencial y Campo Vectorial Conservativo. Diferencia de Potencial. Obtención de la Función Potencial.

7- INTEGRALES DE SUPERFICIE

- Operador de Hamilton
- Gradiente.
- Divergencia.
- Rotor.
- Campo Vectorial Irrotacional, Campo Vectorial Solenoidal, Ecuación de Laplace.
- Integral de Superficie.
- Teorema de Stoke.
- Teorema de la Divergencia.

8- ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

- Ecuaciones Diferenciales.
- Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden.
- Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden con Variables Separables.
- Ecuaciones Diferenciales Homogéneas de Primer Orden.
- Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden.
- Ecuaciones Diferenciales de Bernoulli.
- Ecuaciones Diferenciales Exactas (ó Totales).
- Soluciones Singulares.
- Trayectorias Ortogonales
- Aplicaciones, Ejercicios.

9- ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

- Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior.
- Ecuaciones Diferenciales Lineales de Enésimo Orden.
- Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de Segundo Orden.
- Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de Segundo Orden con Coeficientes Constantes. Ejercicios.
- Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de Enésimo Orden con Coeficientes Constantes.
- Ecuaciones Diferenciales Lineales no Homogéneas de Segundo Orden.
- Ecuaciones Diferenciales Lineales no Homogéneas de Segundo Orden con Coeficientes Constantes. Método de los Coeficientes Indeterminados, Método de la Variación de los Parámetros.
- Aplicaciones, Ejercicios.

10- SERIE DE FOURIER

- Serie de Fourier, Introducción, Condiciones de Dirichlet, Serie de Fourier, Cálculo de los Coeficientes, Series de seno y coseno.
- Serie de Fourier para funciones de período 2ℓ.
- Forma exponencial de la Serie de Fourier.
- Resumen.

11- ECUACIONES DIFERENCIALES CON DERIVADAS PARCIALES

- Ecuaciones Diferenciales con Derivadas Parciales.
- Ecuación de las ondas (D´ALEMBERT), Vibración transversal de una cuerda elástica, Solución de la ecuación por el Método de la Separación de Variables (Método de Fourier).
- Ecuación de Conducción de Calor o Ecuación de Fourier. Ecuación de la propagación de calor en un vástago, Solución de la ecuación por el Método de la Separación de Variables.
- Ecuación de Laplace. Estado estacionario de la temperatura de un cuerpo, Solución del problema de Dirichlet para un círculo.

BIBLIOGRAFÍA

HEBE T. RABUFETTI:	Introducción al Análisis Matemático (Cálculo 2)
N. PISKUNOV:	Cálculo Diferencial e Integral
MURRAY, SPIEGEL:	Cálculo Superior
JUAN DE BURGOS:	Cálculo Infinitesimal de Varias Variables
THOMAS, FINEY:	Cálculo Varias Variables
JAMES STEWART:	Cálculo. Trascendentes tempranas.
HSU:	Series de Fourier
EDWARDS PENNEY:	Ecuaciones Diferenciales
FRANK AYRES:	Ecuaciones Diferenciales
JERROLD E. MARSDEN, ANTHONY J. TROMBA:	Cálculo Vectorial
PETER V. O'NEIL:	Matemáticas avanzadas para Ingenieros.
IVAN S. SOKOLNIKOFF Y E. S. SOKOLNIKOFF:	Matemática Superior para Ingenieros y Físicos.
DENNIS G. ZILL:	Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelo.

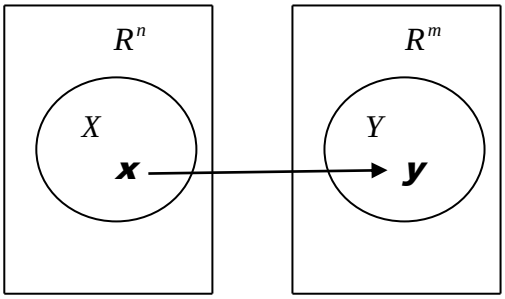
CAPÍTULO 1

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES INDEPENDIENTES

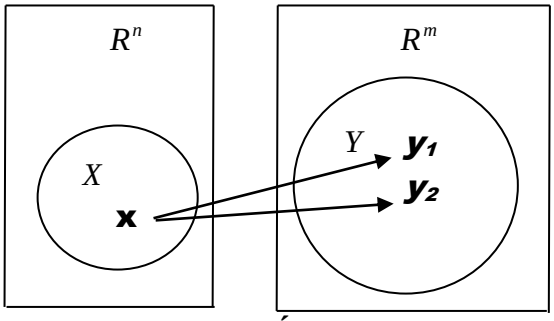
FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Consideremos los Espacios R^n y R^m (n y m números naturales, excluido el cero).
Sean los conjuntos $X \subseteq R^n$ e $Y \subseteq R^m$.

Llamaremos función f a toda relación que hace corresponder a cada elemento $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X$ uno y solo un elemento $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_m) \in Y$.



FUNCIÓN



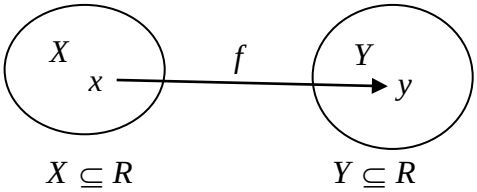
RELACIÓN

$R^n \xrightarrow{f} R^m$ y se lee f aplica R^n en R^m

Funciones Escalares

En Análisis Matemático I hemos trabajado con funciones de una sola variable independiente, de la forma:

$y = f(x)$ $\qquad R \xrightarrow{f} R$



Estas funciones reciben el nombre de Funciones Escalares, o también Funciones Escalares de Variable Escalar.

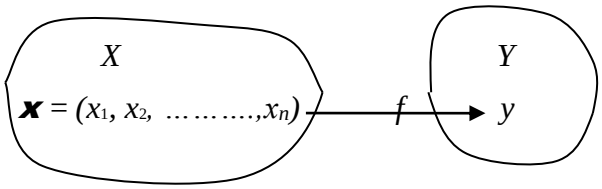
Pero al analizar distintos fenómenos nos lleva a la necesidad de estudiar funciones que contienen un mayor número de variables, es por ello que en Análisis Matemático II centraremos nuestra atención en este tipo de funciones.

Campos Escalares (ó Funciones de Varias Variables independientes)

Los Campos Escalares son Funciones de dos o más variables independientes a las que a un conjunto de *"n"* variables independientes le corresponden como imagen un número real o escalar.

$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

$y = f(\boldsymbol{x})$



$R^n \xrightarrow{f} R$ $\qquad X \subseteq R^n$ $\qquad Y \subseteq R$

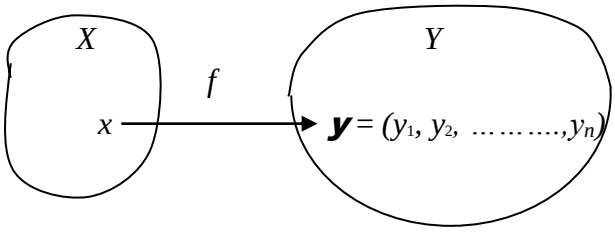
Las llamaremos Campos Escalares o simplemente Funciones de Varias Variables.
También se las conoce como Funciones Escalares de Variable Vectorial.

Un ejemplo de este tipo de funciones es la temperatura: a cada punto del espacio le corresponde un valor de la temperatura.

Funciones Vectoriales

La definición de Función Vectorial equivale a la definición de *"m"* funciones escalares:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ y_2 = f_2(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m = f_m(x) \end{cases}$$



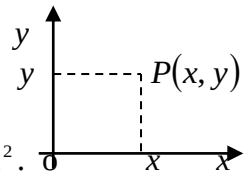
$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(x)$ $\qquad R \xrightarrow{F} R^m \qquad X \subseteq R \qquad Y \subseteq R^m$

Las Funciones Vectoriales son funciones a las que a una variable independiente le corresponde un conjunto de *"m"* números reales o un vector de *"m"* componentes.

Nos interesan en especial las Funciones Vectoriales cuyas imágenes son vectores de dos o tres dimensiones. Se utilizan, por ejemplo para describir curvas, movimientos de partículas, etc..

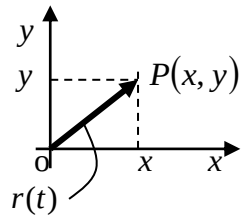
En R^2 una Función Vectorial, a cada número real, le asigna como imagen un vector de dos componentes o un par de números reales.

En forma paramétrica se la simboliza $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$



A cada valor de t le corresponde un par de valores de (x, y) es decir un punto en R^2.
A t se lo denomina parámetro.

O en forma vectorial $\qquad r(t) = [f(t), g(t)] = f(t)i + g(t)j$

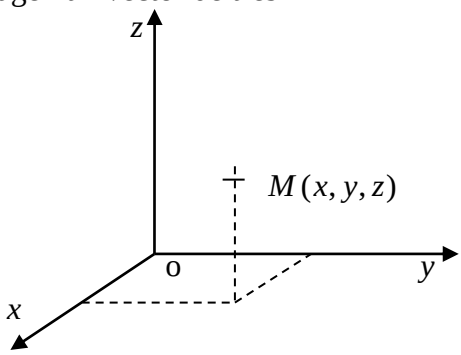


Para cada valor de t en el dominio de r existe un único vector denominado $r(t)$.

$f(t), g(t)$ son las funciones componentes del vector r.

En R^3 una Función Vectorial, a cada número real, le asigna como imagen un vector de tres componentes o una terna de números reales.

En forma paramétrica se la simboliza $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$

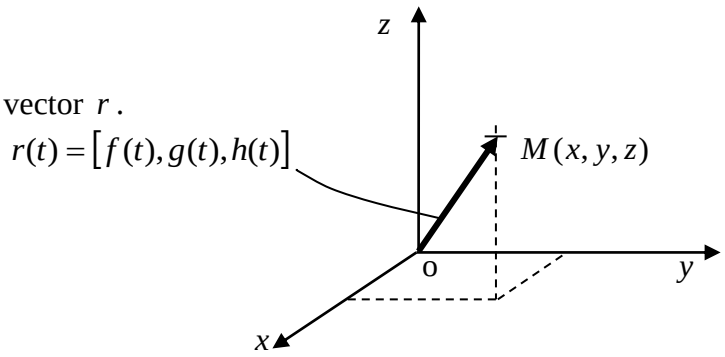


A cada valor de t le corresponde una terna de valores de (x, y, z) es decir un punto en R^3.

O en forma vectorial $r(t) = [f(t), g(t), h(t)] = f(t)i + g(t)j + h(t)k$

Para cada valor de t en el dominio de r existe un único vector denominado $r(t)$.

$f(t), g(t), h(t)$ son las funciones componentes del vector r.

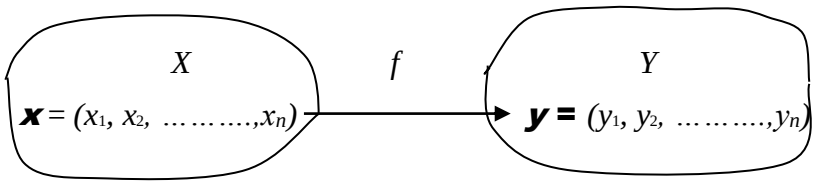


En general utilizamos la letra t como variable independiente pues el tiempo es la variable independiente en la mayoría de las aplicaciones de las Funciones Vectoriales.

Campos Vectoriales

Los Campos Vectoriales son funciones a las que a un conjunto de *"n"* variables independientes le corresponden como imagen un conjunto de *"m"* valores (es decir un vector).

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) \end{cases}$$

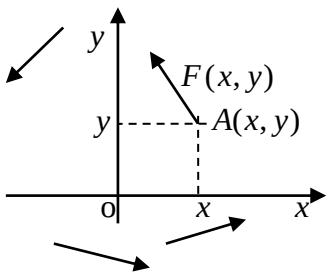


$X \subseteq R^n$ $\qquad$ $Y \subseteq R^m$

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ $\qquad$ $R^n \xrightarrow{F} R^m$

Como ejemplos de Campos Vectoriales podemos mencionar el Campo Eléctrico, Campo Magnético, Campo gravitacional, Campo de Velocidad de un fluido, etc.

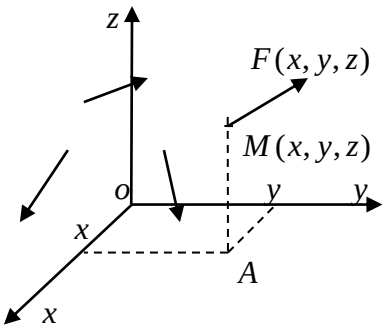
Estudiaremos en particular los Campos Vectoriales en R^2 o R^3.



Sea D una región plana R^2. **Un campo vectorial** en R^2 es una función F que asigna a cada punto $A(x, y)$ en D un vector bidimensional $F(x, y)$.

$F(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j$ $\qquad$ $R^2 \longrightarrow R^2$

$F(x, y) = [P(x, y), Q(x, y)]$



Y en tres dimensiones podemos definir:
Sea E un subconjunto de R^3. **Un Campo Vectorial** en R^3 es una función F que asigna a cada punto $M(x,y,z)$ en E un vector tridimensional $F(x,y,z)$.

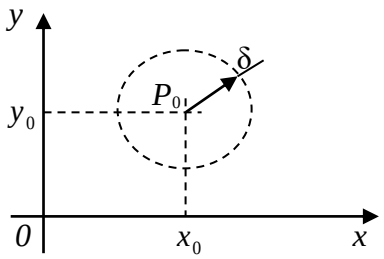
$$F(x,y,z) = P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k$$

$$F(x,y,z) = [P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)] \qquad R^3 \longrightarrow R^3$$

<u>Conjuntos, entornos, puntos</u>

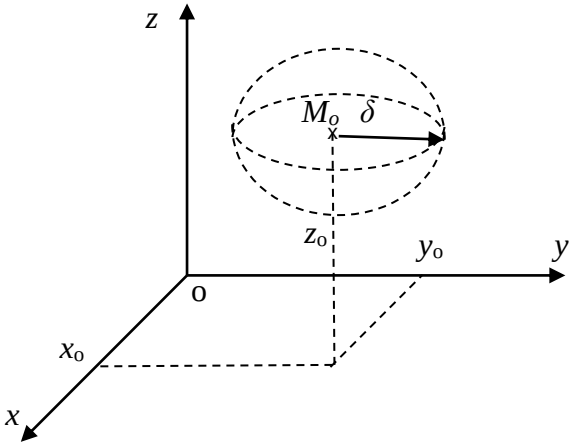
En R^2 el **<u>entorno de un punto</u>** $P_0(x_0, y_0)$ y de radio δ es el conjunto de puntos ubicados en el interior de un círculo de centro P_0 y radio δ.

$$\mathrm{E}(P_0,\delta) = \left\{(x,y)/\, 0 \le +\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\right\}.$$



De igual manera en R^3 el **<u>entorno de un punto</u>** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ y de radio δ es el conjunto de puntos ubicados en el interior de una esfera de centro M_0 y radio δ.

$$\mathrm{E}(M_0,\delta) = \left\{(x,y,z)/\, 0 \le +\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < \delta\right\}$$



Para espacios de mayores dimensiones $[R^n$ para $n \ge 3]$ la definición es similar, pero en estos casos no admite representación gráfica.

Un **<u>entorno de un punto es reducido</u>** cuando se excluye su centro.

En R^2: $\quad \mathrm{E}'(P_0,\delta) = \left\{(x,y)/\, 0 < +\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\right\}$ ó

$$\mathrm{E}'(P_0,\delta) = \mathrm{E}(P_0,\delta) - \{P_0\}$$

En R^3: $\quad E'(M_0,\delta)=\left\{(x,y,z)/\,0<+\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\right\}$ ó

$$E'(M_0,\delta)=E(M_0,\delta)-\{M_0\}$$

El punto perteneciente a un conjunto es un **punto interior** del mismo, si existe un entorno suyo cuyos puntos pertenecen todos a dicho conjunto.

Un punto no perteneciente a un conjunto es un **punto exterior** si existe un entorno suyo en donde ninguno de sus puntos pertenece a dicho conjunto.

Un punto perteneciente o no al conjunto es un **punto frontera** si no es interior ni exterior. Es decir que en un entorno suyo hay puntos que pertenecen al conjunto y otros que no pertenecen.

Un punto *P* perteneciente o no a un conjunto es un **punto de acumulación** si en todo entorno reducido suyo hay algún punto de dicho conjunto, distintos de *P*.

Un punto perteneciente a un conjunto es un **punto aislado** si en un entorno reducido suyo ninguno de sus puntos pertenecen a dicho conjunto.

La **frontera** de un conjunto está formada por la totalidad de los puntos frontera de dicho conjunto.

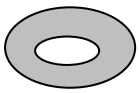
Conjunto abierto es el que está formado solo por los puntos interiores.

Conjunto cerrado es el que contiene también a la frontera.

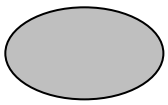
Un conjunto es **conexo** si dos de sus puntos pueden ser unidos por alguna poligonal íntegramente contenida en el conjunto.

Un conjunto es **simplemente conexo** cuando cualquier poligonal cerrada trazada en él, puede reducirse a un punto, por deformación continua sin salirse del conjunto.

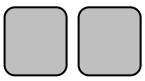
Conjunto conexo



Conjunto simplemente conexo



Conjunto no conexo



FUNCIONES DE DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

*"Se dice que **z** es una Función de dos Variables Independientes* (x, y) *definida en un dominio **D** si a cada par de valores* (x, y) *tomados de ese dominio **D** le corresponde un solo valor de **z**".*

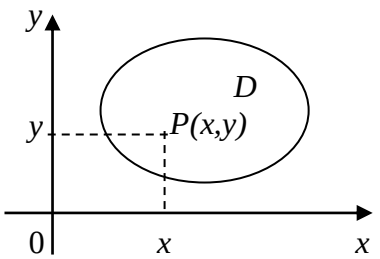
La simbolizamos así: $z = f(x, y)$ $\qquad R^2 \xrightarrow{f} R$

Puede suceder que la función *"z"* no esté definida para todos los valores arbitrarios de *x* e *y*.
Las variables *"x* e *y"* son la **variables independientes** y *"z"* es la **variable dependiente o función**.

Dominio

Definimos como Dominio de existencia de una función, al conjunto de pares de valores de (x, y) *para los que está definida la función* $z = f(x, y)$.

A cada par de valores de "*x* e *y*" le corresponde un punto en el plano *0xy*, el conjunto de estos puntos se denomina Dominio de la función.



$z = f(x, y)$ o $z = f(P)$

El Dominio es un subconjunto del producto cartesiano RxR, es decir $D_f \subseteq R^2$.

Frontera de un Dominio es la línea que limita al mismo. Y los puntos del Dominio que no pertenecen a la Frontera se denominan **puntos interiores** del Dominio.

Dominio abierto es el que está formado solo por puntos interiores.

Dominio cerrado es el que incluye también los puntos de la frontera.

Un dominio es **acotado** si existe una magnitud constante *C* tal que $|OP| < C$. Siendo *OP* la distancia entre el origen de coordenadas y todo punto *P* del dominio.

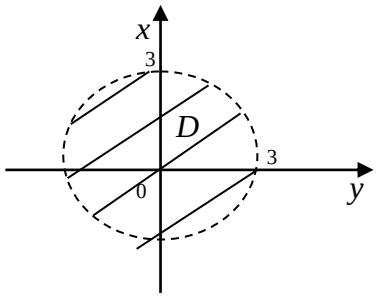
Imagen

Imagen o Rango de la función $z = f(x, y)$ es el conjunto de valores que toma *"z"* para todos los puntos que conforman el dominio. Es un subconjunto de los números reales, es decir $I_f \subseteq R$.

Ejemplo: determinemos el Dominio y la Imagen de la función $z = \dfrac{1}{+\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$.

Hay dos restricciones: el denominador debe ser $\sqrt{9 - x^2 - y^2} \neq 0$ y además el radicando debe ser $9 - x^2 - y^2 \geq 0$.

Por lo tanto el Dominio de la función resulta: $D_f = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 < 9\}$



Es decir que el Dominio está formado por todos los puntos interiores del círculo de radio 3 y centro en el origen de coordenadas.

Y la Imagen de la función es: $I_f = \left\{ z \in R / z \geq \frac{1}{3} \right\}$

Funciones Explícitas

Una función está expresada en forma explícita cuando está dada de la forma: $z = f(x, y)$.

Por ejemplo: $z = 3x^2 y - 2y^3$

Funciones Implícitas

Las funciones implícitas son las que están expresadas de la siguiente forma: $f(x, y, z) = 0$

Por ejemplo: $4x^3 z - y + 5 = 0$

Funciones de más de dos variables

Lo definido para funciones de dos variables independientes puede extenderse a funciones con un número mayor de variables sin inconveniente:

Definimos: ***y** es una **función de "n" variables independientes** $(x_1, x_2, ..., x_n)$ si a cada conjunto de valores de las variables $(x_1, x_2, ..., x_n)$ le corresponde un solo valor de **y**.*

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

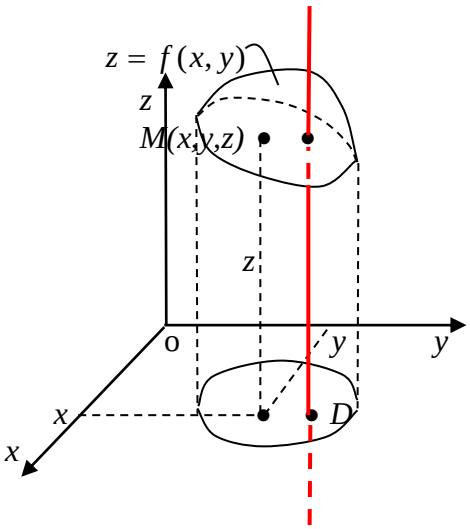
En una función de tres variables independientes de la forma $u = f(x, y, z)$, el dominio esta definido en el espacio de coordenadas *0xyz*. El dominio es un subconjunto del producto cartesiano $RxRxR$, es decir $D_f \subseteq R^3$.

En el caso de funciones de cuatro o más variables independientes es imposible determinar geométricamente el dominio correspondiente.

Representación gráfica de las funciones de dos variables independientes

Consideremos la función $z = f(x, y)$

Está definida en el dominio *D* del plano de coordenadas cartesianas *0xy*.
Y puede ser representada en el espacio de coordenadas cartesianas *0xyz.*



Si por cada punto (x, y) del dominio *D* trazamos una perpendicular al plano *0xy*, y tomamos un segmento de longitud igual a $f(x, y)$ obtendremos en el espacio un punto $M(x, y, z)$.

El lugar geométrico de todos los puntos *M* que satisfacen a La función $z = f(x, y)$ se llama gráfica de dicha función.

Una función de dos variables independientes nos define una <u>SUPERFICIE EN EL ESPACIO</u>.

La proyección de dicha superficie sobre el plano *0xy* es el dominio de la función.

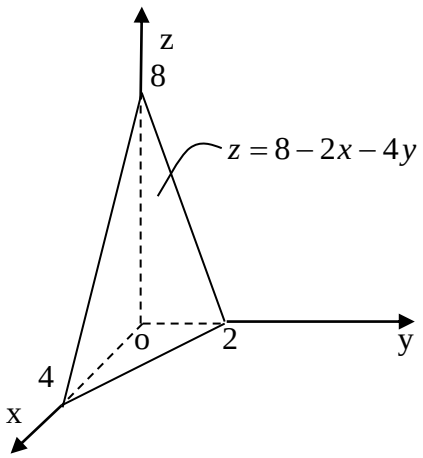
Cada recta perpendicular al plano *0xy* que pasa por un punto del dominio corta a la superficie $z = f(x, y)$ en un solo punto.

Ejemplos: Grafiquemos la función $z = 8 - 2x - 4y$.

Es un plano en el espacio de coordenada *0xy*.

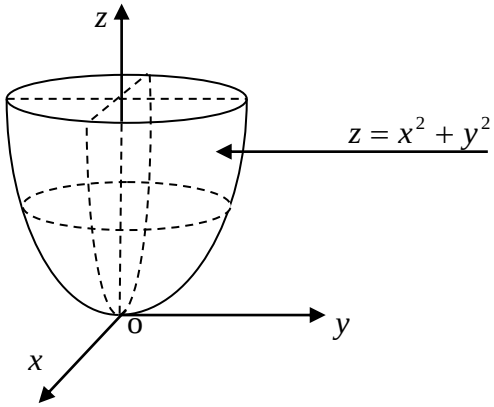
Su dominio es todo el plano *0xy*. Es decir $D_f = R^2$ y su Imagen $I_f = R$.

Dibujemos la porción de este plano en el primer octante:



Grafiquemos ahora la función $z = x^2 + y^2$.Su gráfica es un paraboloide en revolución.

Su dominio es $D_f = R^2$ y su Imagen $I_f = \{z \in R / z \geq 0\}$



Nota:

No se pueden representar gráficamente funciones de tres o más variables independientes.

Líneas de Nivel

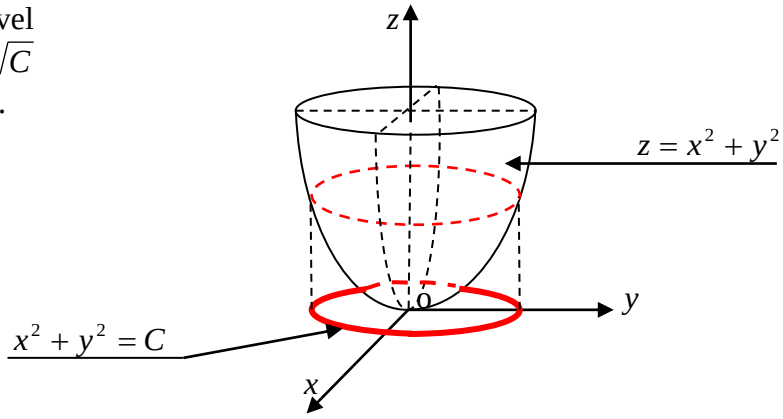
Líneas o Curvas de Nivel de una superficie $z = f(x, y)$, *es el conjunto de todos los puntos* (x, y) *en los que la función toma el mismo valor.*

Es decir que es la proyección, sobre el plano *0xy*, de la intersección entre la superficie y un plano paralelo al *0xy*.

Ejemplo:

Dada la función $z = x^2 + y^2$. Las Líneas de Nivel de esta superficie están representadas por la ecuación: $\boxed{x^2 + y^2 = C}$, siendo C una constante.

En este ejemplo, las Líneas de Nivel son circunferencias de radio $R = \sqrt{C}$ y centro en el origen de coordenas.



Superficies de Nivel

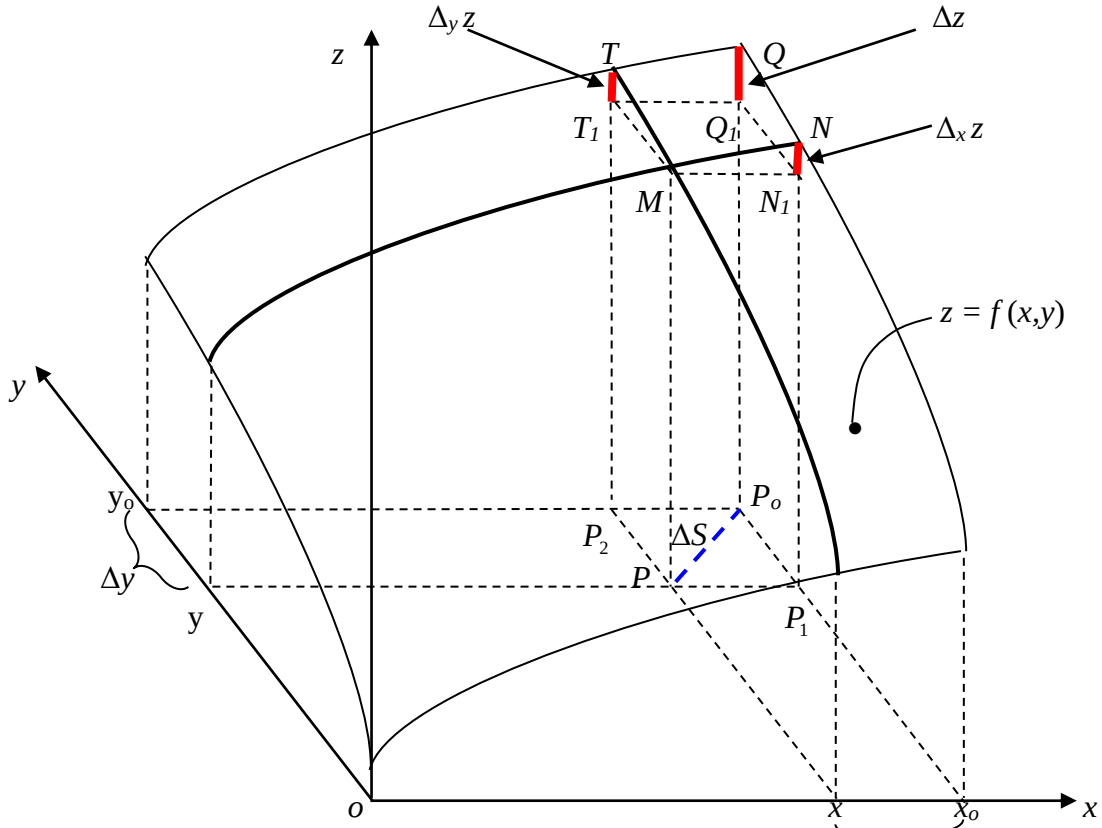
En el caso de una función de tres variables independientes podemos definir:

Superficies de Nivel de una función $u = f(x, y, z)$, *es el conjunto de todos los puntos* (x, y, z) *en los que la función toma el mismo valor.*

Cada una de estas superficies está dada por la ecuación $f(x, y, z) = C$.

Si por ejemplo $u = f(x, y, z)$ nos representa la temperatura en cada punto del dominio, $f(x, y, z) = C$ indicará un conjunto de puntos en los que la temperatura tiene el mismo valor y que forman una superficie en el espacio de coordenadas *0xyz*.

INCREMENTO TOTAL Y PARCIAL DE UNA FUNCIÓN



$\Delta S = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ $\qquad$ $\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

Si analizamos la curva ***MN*** formada por la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ y el plano $y = cte.$ vemos que al desplazarnos a lo largo de la misma, ***z*** variará solo en función de ***x***.

Si incrementamos a la variable independiente ***x*** en $\Delta x = \overline{PP_1} = \overline{MN_1}$ obtendremos el

Incremento Parcial de *z* respecto de *x* (es el segmento $\overline{NN_1}$ de la figura):

$$\boxed{\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}$$

De igual manera, considerando a $x = cte.$ y dando a ***y*** un incremento $\Delta y = \overline{PP_2} = \overline{MT_1}$ obtendremos el

Incremento Parcial de *z* respecto de *y* (que es el segmento $\overline{TT_1}$ de la figura):

$$\boxed{\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}$$

Si incrementamos simultáneamente a ***x*** en **Δx** y a ***y*** en **Δy** obtendremos el

Incremento Total de la función (segmento $\overline{QQ_1}$ de la figura):

$$\boxed{\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}$$

De forma similar se pueden determinar los incrementos de funciones con un mayor número de variables.

LÍMITES DOBLES O SIMULTÁNEOS

Dada la función $z = f(x, y)$ definida en un dominio *D*, podemos definir límite de esta función cuando en punto $P(x, y)$ se aproxima al punto $P_0(x_0, y_0)$ de la siguiente manera:
"$\lim f(x, y)$ *es igual a L si para cualquier número* $\varepsilon > 0$ *existe un número* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ *para* $0 < \Delta S < \delta$ *",* es decir:

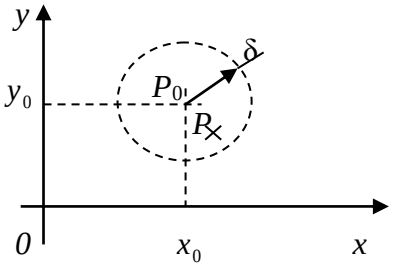
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L \quad \Leftrightarrow \quad |f(x, y) - L| < \varepsilon \quad \text{para} \quad 0 < \Delta S < \delta$$

Siendo P_0 un punto de acumulación del dominio D de dicha función y ΔS la distancia entre los puntos P y P_0:

$$\Delta S = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \qquad \text{o} \qquad \Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

También suele indicarse:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = L$$

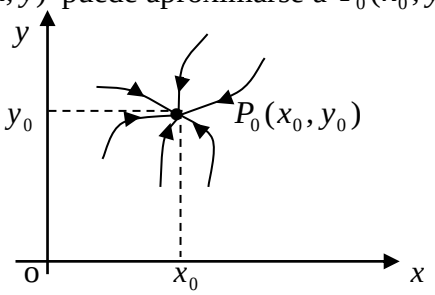


Esta definición implica que por más pequeño que sea ε [diferencia entre $f(x, y)$ y *L*] siempre existe un entorno reducido $E'(P_0, \delta)$ dentro del cual están los puntos $P(x, y)$.
Se ha considerado un entorno reducido de $P_0(x_0, y_0)$, pues no interesa lo que sucede en el punto, donde la función puede no estar definida o tener un valor distinto a *L*.
$P_0(x_0, y_0)$ debe ser un punto de acumulación pues a su alrededor debe haber puntos $P(x, y)$ que pertenezcan al dominio de la función.
El radio δ depende de ε, pues cuanto menores sean los valores de ε, los puntos $P(x, y)$ se encontrarán más cerca de $P_0(x_0, y_0)$ y menor resultará δ.

El concepto de Límite Doble para una función de dos variables independientes es el mismo que el de Límite Simple de una función de una sola variable independiente. Existe sin embargo una diferencia sustancial entre uno y otro caso:

En el segundo existen únicamente dos trayectorias posibles para $x \to x_0$ (por izquierda y por derecha), en consecuencia basta calcular los límites izquierdo y derecho, y si en estas condiciones los límites son iguales decimos que la función tiene límite para $x \to x_0$.

Pero en el caso de la función $z = f(x, y)$, el punto $P(x, y)$ es un punto en el plano *0xy*, y existen infinitas formas en que $P(x, y)$ puede aproximarse a $P_0(x_0, y_0)$.



Una forma de asegurar la existencia de límite es calcularlo aplicando la definición. Pero veamos un ejemplo para demostrar que ésta no es una tarea sencilla.

Ejemplo 1:

Demostremos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2} = 0$ aplicando la definición de límite.

Para ello debemos demostrar que para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que:

$$\left| f(x,y) - L \right| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

Es decir:

$$\left| \frac{2xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad 0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta \qquad \text{o sea}$$

$$\left| \frac{2xy^2}{x^2+y^2} \right| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

Vemos que:

$$\left| \frac{2xy^2}{x^2+y^2} \right| \le 2|x| \qquad \text{(a)}$$

Y por otro lado:

$$|x| \le \sqrt{x^2+y^2} \qquad |x| < \delta \qquad 2.|x| < 2\delta \qquad \text{(b)}$$

Eligiendo $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ y analizando (a) y (b) tendremos:

$$\left| \frac{2xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| \le 2\sqrt{x^2+y^2} < 2\delta = \varepsilon$$

Por lo tanto debido a la definición de límites dobles queda demostrado que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2-y^2} = 0$$

Como vemos no es práctico calcular límites aplicando la definición.
Veamos otro camino para determinar si una función tiene Límites Dobles ó Simultáneos.

Cálculo de Límites Dobles ó Simultáneos

Si deseamos calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ primero reemplazamos los valores de *x* e *y* por las coordenadas del punto $P_0(x_0, y_0)$ y analizamos lo obtenido.

Ejemplo 2: $\lim\limits_{(x,y)\to(3,1)} \left(xy - y^2\right) = 2$

Por cualquier camino que nos aproximemos al punto $P_0(3,1)$ los valores de la función tenderán a 2.
Este límite se denomina Límite Doble ó Simultáneo, porque ambas variables *x* e *y* tienden simultáneamente a 3 y 1 respectivamente.
En este caso decimos que la función tiene Límite Doble ó Simultáneo y es $L = 2$.

Ejemplo 3: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\text{sen}3xy}{x} = \dfrac{0}{0}$ salvamos la indeterminación:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\text{sen}3xy}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3y\,\text{sen}3xy}{3xy} = \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} 3y \right) \times \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\text{sen}3xy}{3xy} \right) = 0 \times 1 = 0$$

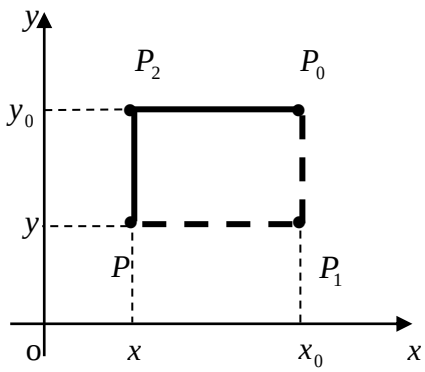
La función tiene Límite Doble ó Simultáneo y es $L = 0$.

Ejemplo 4: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2+y}{x^2-y} = \dfrac{0}{0}$

Obtenemos una indeterminación que no puede ser salvada. En estos casos debemos calcular límite por algunos de los infinitos caminos por los que nos podemos aproximar al punto, que por ser infinitos no podremos recorrerlos a todos.
En consecuencia resulta prácticamente imposible confirmar la existencia del límite como resultado de la igualdad de los mismos calculados por las infinitas trayectorias posibles. Pero si puede resultar sencillo afirmar cuando no existe límite, ya que si los límites calculados por dos trayectorias son diferentes, no existe límite.
A veces se utilizan métodos que comparan los Límites Dobles con los Límites Simples. Veamos al respecto los Límites Sucesivos y los Límites Radiales.

Límites Sucesivos (o Reiterados o Iterados)

Frecuentemente suelen calcularse los límites de una función por trayectorias muy particulares, denominadas **Trayectorias Escalonadas**, constituidas por paralelas a los ejes cartesianos y que consiste en pasar primero del punto P al P_1 (haciendo variar a x, manteniendo a y constante) y luego pasar de P_1 a P_0 (haciendo variar a y, manteniendo a x constante). Y luego repetir el cálculo pero pasando de P a P_2 y luego de P_2 a P_0, y comparar los resultados.



$\lim\limits_{y\to y_0}\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right]$ Trayectoria de línea de puntos.

$\lim\limits_{x\to x_0}\left[\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right]$ Trayectoria de trazo continuo.

Ejemplo 5:

Sea la función $z = \dfrac{2x^2+y^3}{3x^2-y^3}$, y calculemos sus Límites Sucesivos en el punto $P_0(0,0)$:

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+y^3}{3x^2-y^3}\right] = -1$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{2x^2+y^3}{3x^2-y^3}\right] = \frac{2}{3}$$

Los Límites Sucesivos son distintos, ello prueba que la función no tiene límite $P_0(0,0)$.

Ejemplo 6:

Sea la función $z = \dfrac{2xy}{3x^2 - y^2}$, y calculemos sus Límites Sucesivos en el punto $P_0(0,0)$:

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{2xy}{3x^2 - y^2}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{2xy}{3x^2 - y^2}\right] = 0$$

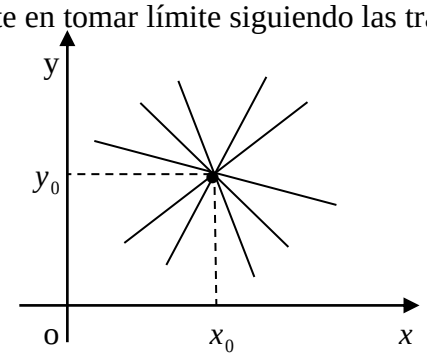
Los Límites Sucesivos son iguales, pero esto no garantiza que la función tenga límite en $P_0(0,0)$. Pues probemos una trayectoria que no sea paralela a los ejes coordenados, por ejemplo la trayectoria $y = 2x$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{3x^2 - y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x.2x}{3x^2 - (2x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{-x^2} = -4$$

Por lo tanto ello prueba que la función no tiene límite en el punto $P_0(0,0)$.

Límites Radiales

Consiste en tomar límite siguiendo las trayectorias del haz de rectas que pasan por el punto $P_0(x_0, y_0)$:



$$y - y_0 = m.(x - x_0)$$

Si el límite así calculado da un resultado que es función de m significa que tendrá un límite distinto para cada trayectoria, por lo tanto la función, en este caso, no tiene límite.

Resolvamos el ejemplo anterior por este método:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{3x^2 - y^2} \qquad \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \qquad \text{la trayectoria es:} \qquad y = mx$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{3x^2 - y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x.mx}{3x^2 - (mx)^2} = \frac{2m}{3 - m^2}$$

El resultado es función de m, tendrá un valor distinto para cada trayectoria, por lo tanto la función no tiene límite en $(0,0)$. Por ejemplo:

Para $m = 1$ el límite es $f(x,y) = 1$

Para $m = 2$ el límite es $f(x,y) = -4$ etc.

Ejemplo 7:

Calculemos ahora el límite de la función $z = \dfrac{2x^2 y}{x^4 + 3y^2}$ para $(x,y) \to (0,0)$.

Obtengamos primero los Límites Sucesivos:

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{2x^2 y}{x^4 + 3y^2}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{2x^2y}{x^4+3y^2}\right]=0$$

Calculemos los Límites Radiales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2y}{x^4+3y^2} \qquad \begin{cases} x_0=0 \\ y_0=0 \end{cases} \qquad \text{la trayectoria es:} \qquad y=mx$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2y}{x^4+3y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2.mx}{x^4+3.(mx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2mx}{x^2+3.m^2}=0$$

Hemos obtenido el mismo valor de límite a lo largo de cualquier trayectoria paralela a los ejes coordenados y de cualquier recta que pasa por el origen. Pero esto no demuestra que el límite de la función sea 0, pues si seguimos la trayectoria de la parábola $y=x^2$, tendremos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2y}{x^4+3y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2.x^2}{x^4+3.(x^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{x^4+3.x^4}=\frac{1}{2}$$

Obtenemos un valor distinto de límite, por lo tanto esta función no tiene límite cuando $(x,y)\to(0,0)$.
Como podemos comprobar, estos métodos son útiles para demostrar cuando la función NO tiene límite, pero no para determinar cuando SI tiene límite.

Tal como ocurre con los límites de funciones de una sola variable, en el caso de funciones de varias variables el cálculo se puede simplificar utilizando las propiedades de límites y también por la aplicación del concepto de continuidad.
Las propiedades de límites demostradas para las funciones de una sola variable independiente, son válidas también para las funciones de dos o mas variables independientes."El límite de la suma de funciones es igual a la suma de los límites", "el límite de la diferencia de funciones es igual a la diferencia de los límites", etc..
El cálculo de límites dobles en forma directa se puede llegar a realizar basándose en estas propiedades y además en el hecho de que la gran mayoría de las funciones que se estudian, normalmente son continuas.
En los casos en que los límites resulten indeterminados, se debe recurrir a simplificaciones o a otros artificios matemáticos.
Todo lo demostrado para funciones de dos variables independientes, puede ser ampliado a funciones de tres o más variables independientes.

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES

Sea la función $z=f(x,y)$ definida en un dominio D y $P_0(x_0,y_0)$ es un punto de acumulación del dominio, decimos que dicha función **es continua** en ese punto $P_0(x_0,y_0)$ si se verifica que:

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)}$$

Lo que incluye tres condiciones básicas:

1- Que el límite existe para $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$
2- Que la función está definida en $P_0(x_0,y_0)$
3- Que el límite de la función es igual al valor de la función en $P_0(x_0,y_0)$.

Ejemplo 8:

La función $z = 2x + y$ es continua en el punto $P(2,3)$ pues:

1- Pues el límite existe y es igual a: $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}(2x+y) = 7$
2- La función está definida en $P(2,3)$, dado que $f(2,3) = 7$
3- Y el valor del límite de la función es igual al valor de la función en $P(2,3)$:

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}} f(x,y) = f(2,3)}$$

A una función que es continua en cada punto de un dominio, se le llama **continua en este dominio**.
El significado práctico de continuidad es que si el punto $P(x,y)$ se desplaza una distancia suficientemente pequeña, el valor de la función variará también en una magnitud pequeña. En una función continua, su gráfica, es una superficie sin agujeros ni grietas.

Si la igualdad no se cumple en algún punto, a éste se le llama **punto de discontinuidad de la función**.

De igual forma se define continuidad de funciones de más de dos variables independientes.

Si no existe el límite la discontinuidad se denomina **esencial**.

Si existe el límite doble pero la función no es continua entonces la discontinuidad es **evitable**.

Discontinuidad Evitable

Se presenta cuando existe el límite doble en un punto pero la función no es continua.
Desde el punto de vista gráfico la función presenta un agujero en el punto de discontinuidad evitable.
Esta discontinuidad se puede **evitar** y transformar en continua a la función redefiniéndola, dándole a la función el valor del límite en el punto.

Ejemplo 9:

Analicemos la continuidad de la función $z = \dfrac{\text{sen}3xy}{x}$ en el origen de coordenadas:

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\text{sen}3xy}{x} = 0$ Este límite ya fue calculado en el ejemplo nº 3.
- La función no está definida en $P_0(0,0)$.
- La función tiene límite doble en el origen, pero no está definida en ese punto. Es una discontinuidad evitable.
- La redefiniremos para transformarla en función continua:

$$z \begin{cases} \dfrac{\text{sen}3xy}{x} & \text{para} \quad (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 0 & \text{para} \quad (\text{x},\text{y}) = (0,0) \end{cases}$$

CAPÍTULO 2

DERIVADAS Y DIFERENCIALES

DERIVADAS PARCIALES DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES

Sea la función $z = f(x, y)$, de dos variables independientes, y consideremos que se mantiene a ***y*** constante, haciendo variar solamente a ***x***, entonces la función planteada se comporta como una función de una variable independiente ***x***. Si en esta condición derivamos a esta función obtendremos la **derivada parcial de la función con respecto a "*x*"**, que se expresa así:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Esta derivada parcial se puede simbolizar también:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = z'_x = f'_x(x,y) = f'_x = f_x = D_x z = D_x f$$

Si ahora hacemos variar solamente a ***y***, manteniendo a ***x*** constante, la función se comporta como de una sola variable independiente ***y***. Y al derivarla obtendremos la **derivada parcial de la función con respecto a "y"**:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Esta derivada parcial se puede simbolizar también:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = z'_y = f'_y(x,y) = f'_y = f_y = D_y z = D_y f$$

De lo definido podemos deducir que la reglas para calcular derivadas parciales son las mismas que se utilizan para calcular la derivada de las funciones de una sola variable independiente; solo es preciso tener en cuenta con respecto a que variable se desea derivar y mantener la otra constante.

De forma similar se pueden definir las derivadas parciales de funciones de más de dos variables independientes.

Ejemplos:

1- Hallar las derivadas parciales de las siguientes funciones:

a) $z = y^3 \cos x$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -y^3 \operatorname{sen} x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 \cos x$$

b) $z = e^{2x-y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x-y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -e^{2x-y}$$

c) $z = y^x$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}$$

d) $u = \dfrac{5x^3y^2}{z}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{15x^2y^2}{z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{10x^3y}{z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{5x^3y^2}{z^2}$$

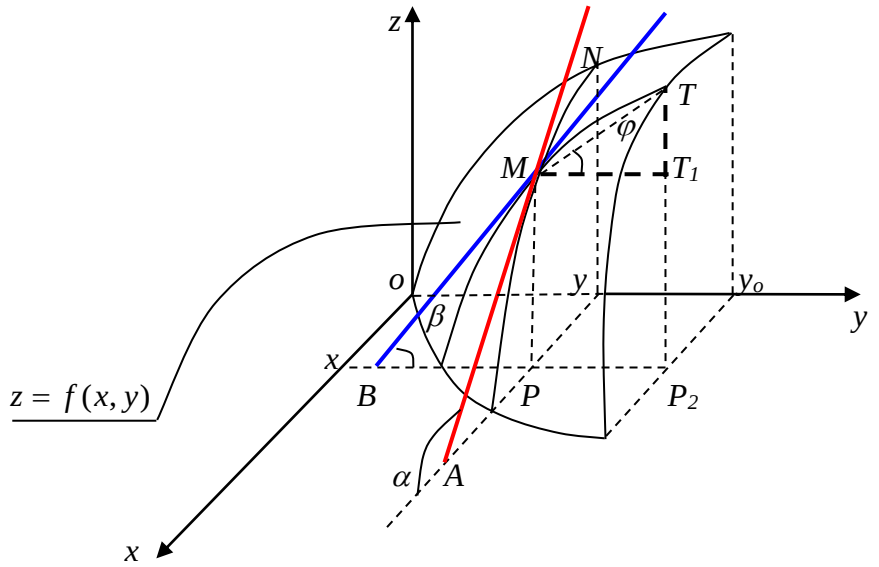
2- Calcular las derivadas parciales de la función $z = 3x^2y - y^2$ en el punto $P(1,2)$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6xy \qquad \frac{\partial f(1,2)}{\partial x} = 12$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2 - 2y \qquad \frac{\partial f(1,2)}{\partial y} = -1$$

<u>Interpretación gráfica de las derivadas parciales</u>

Consideremos la función $z = f(x,y)$ representada en el gráfico adjunto.



Veamos la interpretación gráfica de la $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Para ello tracemos el plano $x = cte.$, la intersección de éste con la superficie nos determina la curva MT.

Al punto $P(x,y)$ del plano $0xy$ le corresponde el punto $M(x,y,z)$ de la superficie $z = f(x,y)$.

Si mantenemos $x = cte.$ e incrementamos ***y*** en $\Delta y = \overline{PP_2} = \overline{MT_1}$, la función se incrementará en $\Delta_y f(x,y) = \overline{TT_1}$. Pues al incrementar ***y***, tendremos que al punto $P_2(x, y+\Delta y)$ del dominio le corresponde el punto $T(x, y+\Delta y, z+\Delta_y z)$ de la superficie.

La razón $\dfrac{\Delta_y f(x,y)}{\Delta y}$ es igual a la tangente del ángulo formado por la secante $\overline{MT}$ con la dirección positiva del eje $0y$, que si lo llamamos φ, tendremos:

$$\frac{\Delta_y f(x,y)}{\Delta y} = tg T\hat{M}T_1 = tg\varphi$$

Por consiguiente por definición de derivada parcial:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} tg\varphi$$

Pero cuando $\Delta y \to 0$ entonces el punto $T \to M$ y el ángulo $\varphi \to \beta$, por lo tanto finalmente obtendremos:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} tg\varphi = tg\beta$$

$$\boxed{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = tg\beta}$$

Es decir que la $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ es igual a la tangente del ángulo β, formado por la recta $\overline{MB}$ tangente a la curva MT en el punto $M(x,y,z)$, con la dirección positiva del eje *0y*. O sea que el valor numérico de la $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ es igual a la tangente del ángulo de inclinación de la recta tangente a la superficie, en el punto considerado, en la dirección del eje *0y*.

De igual modo se puede demostrar que:

$$\boxed{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = tg\alpha}$$

O sea que el valor numérico de la $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ es igual a la tangente del ángulo de inclinación de la recta tangente a la superficie, en el punto considerado, en la dirección del eje *0x*.

<u>Función Derivable</u>

Una función de varias variables independientes, se dice que es derivable en un punto si sus derivadas parciales son únicas y finitas en ese punto, en cuyo caso, al igual que en funciones de una sola variable independiente, la funciones derivadas son continuas en ese punto.

DERIVADAS PARCIALES SUCESIVAS

Las derivadas parciales de una función de varias variables son a su vez y por lo general funciones de esas mismas variables, en consecuencia admiten ser derivadas nuevamente y obtener así las denominadas derivadas parciales segundas, terceras, etc., con respecto a cada una de las variables consideradas.

Así para una función de dos variables independientes sus derivadas parciales son:

$$z = f(x, y) \qquad z = x^4 \text{sen} 5y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 \text{sen} 5y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 5x^4 \cos 5y$$

Estas pueden ser derivadas nuevamente y si estas derivadas existen obtendremos las **derivadas parciales de segundo orden** que son cuatro:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'_x(x + \Delta x, y) - f'_x(x, y)}{\Delta x} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 \text{sen} 5y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{xy}(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f'_x(x, y + \Delta y) - f'_x(x, y)}{\Delta y} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 20x^3 \cos 5y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{yx}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'_y(x + \Delta x, y) - f'_y(x, y)}{\Delta x} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 20x^3 \cos 5y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f'_y(x, y + \Delta y) - f'_y(x, y)}{\Delta y} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -25x^4 \text{sen} 5y$$

Observemos que en la notación $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ el orden de derivación de indica de derecha a izquierda, en cambio en la notación $f''_{xy}(x, y)$ el orden es de izquierda a derecha.

Estas derivadas de segundo orden pueden ser a su vez derivadas con respecto a ***x*** o respecto a ***y***, obteniendo así las **derivadas parciales de tercer orden** que si existen son ocho:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f'''_{xxx}(x, y) \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 24x \text{sen} 5y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = f'''_{xxy}(x, y) \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = 60x^2 \cos 5y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = f'''_{xyx}(x, y) \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = 60x^2 \cos 5y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = f'''_{xyy}(x, y) \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = -100x^3 \text{sen} 5y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{yxx}(x, y) \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 60x^2 \cos 5y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = f'''_{yxy}(x,y) \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = -100x^3 \text{sen}5y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = f'''_{yyx}(x,y) \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -100x^3 \text{sen}5y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = f'''_{yyy}(x,y) \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -125x^4 \cos 5y$$

Y así siempre que existan las derivadas correspondientes, se puede seguir derivando en forma sucesiva. De igual manera se definen las derivadas parciales sucesivas de funciones con un mayor número de variables independientes.

Estas derivadas parciales sucesivas no son todas distintas entre si, pues: *Si las derivadas parciales sucesivas a calcular son continuas, el orden de derivación no altera la derivada, siempre que la cantidad de veces que se derive respecto a cada variable sea la misma.*

En base a ello resulta:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

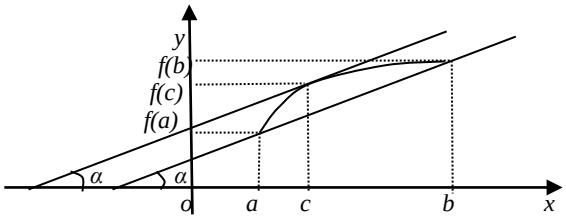
$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$$

Estas igualdades se demuestran por intermedio del Teorema de Schwarz (o de Clairaut).

Antes de enunciarlo, recordemos el Teorema del Valor Medio ó Teorema de Lagrange visto en Análisis Matemático I:
Si la función f(x) es continua en el intervalo [a,b] y derivable en un intervalo]a,b[, existirá un punto c que pertenece a]a,b[, en que se cumpla que:

f(b)-f(a)=f '(c).(b-a) *a<c<b*



<u>Teorema de Schwarz</u>

Dada la función $z = f(x,y)$ ***definida en un dominio D, tiene derivadas parciales continuas en un entorno del punto*** $P(x,y)$ ***interior al dominio, entonces en ese punto se verifica que:***

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) \qquad \text{ó} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

<u>Demostración</u>

Analicemos la expresión:

$$\text{A} = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x,y) \qquad \textbf{(1)}$$

a) Expresemos la **(1)** de la siguiente manera:

$$A = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - \left[f(x, y+\Delta y) - f(x, y)\right]$$

A los dos primeros términos se los puede considerar como la diferencia entre dos valores de una función de una sola variable ***y*** (***x*** permanece constante) y le aplicamos el Teorema del Valor Medio.

Hacemos lo mismo con los dos últimos términos y obtenemos:

$$A = f'_y(x+\Delta x, y_1)\Delta y - f'_y(x, y_1)\Delta y \qquad \text{para} \qquad y \le y_1 \le y+\Delta y$$

$$A = [\, f'_y(x+\Delta x, y_1) - f'_y(x, y_1)]\Delta y$$

Apliquemos nuevamente el Teorema del Valor Medio:

$$\boxed{A = f''_{yx}(x_1, y_1)\Delta x \Delta y} \qquad \textbf{(2)} \qquad \text{para} \qquad \begin{cases} x \le x_1 \le x+\Delta x \\ y \le y_1 \le y+\Delta y \end{cases}$$

b) Ahora expresemos la **(1)** de la siguiente manera:

$$A = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) - \left[f(x+\Delta x, y) - f(x, y)\right]$$

Aplicando a esta última expresión el Teorema del Valor Medio obtendremos:

$$A = f'_x(x_2, y+\Delta y)\Delta x - f'_x(x_2, y)\Delta x \qquad \text{para} \qquad x \le x_2 \le x+\Delta x$$

$$A = \left[f'_x(x_2, y+\Delta y) - f'_x(x_2, y)\right]\Delta x$$

Apliquemos nuevamente el Teorema del Valor Medio:

$$\boxed{A = f''_{xy}(x_2, y_2)\Delta x \Delta y} \qquad \textbf{(3)} \qquad \text{para} \qquad \begin{cases} x \le x_2 \le x+\Delta x \\ y \le y_2 \le y+\Delta y \end{cases}$$

Las expresiones **(2)** y **(3)** obtenidas en **(a)** y **(b)** respectivamente son iguales a A , por lo tanto:

$$f''_{xy}(x_2, y_2)\Delta x \Delta y = f''_{yx}(x_1, y_1)\Delta x \Delta y$$

$$f''_{xy}(x_2, y_2) = f''_{yx}(x_1, y_1)$$

Tomamos límite para $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, en ambos miembros:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(x_2, y_2) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{yx}(x_1, y_1)$$

Y finalmente resulta:

$$\boxed{f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)}$$

Lo demostrado se puede extender a derivadas parciales de orden superior al segundo, y también a funciones de más de dos variables independientes, siempre que se verifique la continuidad de las derivadas parciales correspondientes.

DIFERENCIAL TOTAL DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES

Dada la función $z = f(x, y)$, recordemos que su incremento total es:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

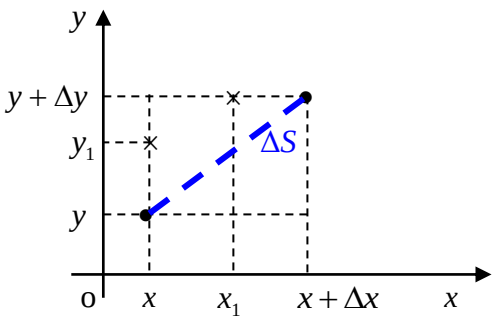
Consideraremos por hipótesis que la función es continua y tiene derivadas parciales también continuas en el punto considerado.

A la expresión del incremento total le sumamos y restamos $f(x, y + \Delta y)$:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

A los dos primeros términos se los puede considerar como la diferencia entre dos valores de una función de una sola variable "x" ("y" permanece constante) y le aplicamos el Teorema del Valor Medio. Hacemos lo mismo con los dos últimos términos pero considerándolas funciones de una sola variable "y", obteniendo:

$$\Delta z = f'_x(x_1, y + \Delta y)\Delta x + f'_y(x, y_1)\Delta y \qquad \text{para} \qquad \begin{cases} x \le x_1 \le x + \Delta x \\ y \le y_1 \le y + \Delta y \end{cases}$$



Pero por hipótesis la función es continua y tiene derivadas parciales también continuas, por lo tanto:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_x(x_1, y + \Delta y) = f'_x(x, y) \qquad \Rightarrow \qquad f'_x(x_1, y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \varepsilon_1$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_y(x, y_1) = f'_y(x, y) \qquad \Rightarrow \qquad f'_y(x, y_1) = f'_y(x, y) + \varepsilon_2$$

Dado que $x \le x_1 \le x + \Delta x$ e $y \le y_1 \le y + \Delta y$, entonces $x_1 \to x$ e $y_1 \to y$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$ respectivamente.

Y también $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$ (es decir cuando $\Delta S \to 0$).

De esta manera el incremento total es un infinitésimo compuesto:

$$\boxed{\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y} \qquad \textbf{Incremento Total}$$

Los dos últimos términos nos representan un infinitesimal de orden superior respecto de ΔS.

La suma de los dos primeros términos recibe el nombre de parte principal del incremento y es una expresión lineal respecto de Δx y Δy.

Esta parte principal del incremento recibe el nombre de **Diferencial Total** de la función y se lo designa dz ó $df(x,y)$:

$$dz = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y$$

Podemos indicar la siguiente igualdad aproximada:

$$\Delta z \cong dz$$

Los incrementos Δx y Δy de las variables independientes se llaman diferenciales de las variables independiente ***x*** e ***y,*** y se los designan dx y dy respectivamente:

$$\boxed{dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy}$$ **Diferencial Total**

También se suele expresar:

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy}$$

Todo lo demostrado para funciones de dos variables independientes puede extenderse a funciones con un mayor número de variables. Por ejemplo para una función de tres variables independientes:

$$u = f(x,y,z)$$

Su diferencial total es:

$$\boxed{du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz}$$ **Diferencial Total**

Y en general para la función:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n)$$

Su diferencial total es:

$$\boxed{dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial y}{\partial x_3}dx_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n}$$ **Diferencial Total**

Ejemplo1:
Calculemos el diferencial total de la función: $z = 3x^2 \cos \pi y$

$$dz = 6x\cos\pi y dx - 3\pi x^2 \operatorname{sen}\pi y dy$$

Ejemplo 2:

Calculemos ahora el diferencial total de la función $z = 2x^3y^2$, en el punto $P(1,2)$, para cuando la variable independiente "x" se incrementa en $dx = 0{,}03$ y la variable independiente "y" se incrementa en $dy = 0{,}02$.

$$df(x,y) = 6x^2y^2dx + 4x^3ydy$$
$$df(1,2) = 6.1^2.2^2.0{,}03 + 4.1^3.2.0{,}02$$
$$df(1,2) = 0{,}88$$

Significa que cuando las variables independientes x e y se incrementan en $dx = 0{,}02$ y en $dy = 0{,}03$ respectivamente, la función se incrementa aproximadamente en $dz = 0{,}88$.

Calculemos el valor exacto del incremento total de la función:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$\Delta z = 2.(1+0{,}03)^3.(2+0{,}02)^2 - 2.1^3.2^2 = 2.1{,}03^3.2{,}02^2 - 2.1^3.2^2 = 8{,}9175265 - 8$$

$$\Delta z = 0.9175265 \qquad \text{se verifica que } \Delta z \cong dz$$

Diferenciales Parciales de una Función de varias Variables Independientes

Vimos que dada la función:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n)$$

Su diferencial total es:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial y}{\partial x_3}dx_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n$$

Si todas las variables independientes se consideran como constantes menos una de ellas, por ejemplo x_i, el diferencial que resulta se llama **Diferencial Parcial** de la función respecto a esa variable x_i, y se lo indica:

$$\boxed{d_{x_i}y = \frac{\partial y}{\partial x_i}dx_i}$$

Este **Diferencial Parcial** expresa aproximadamente la variación de la función causada por el incremento $\Delta x_i = dx_i$ de la variable independiente x_i, mientras que el **Diferencial Total** dy expresa aproximadamente la variación de la función causada por las variaciones $dx_1, dx_2, \ldots\ldots\ldots dx_n$ de todas las variables independientes. Puede observarse que el Diferencial Total es la suma de los Diferenciales Parciales.

Desde el punto de vista de la Física, este hecho corresponde al principio de superposición de los efectos: "Cuando un número de cambios ocurren simultáneamente en algún sistema, cada uno de ellos obra como si actuara independientemente de los otros, y el efecto total es la suma de los efectos parciales.

Ejercicios:
Calcular el Diferencial Total de las siguientes funciones:

1. $z = e^{xy^2} + 2$ Respuesta: $dz = y^2 e^{xy^2} dx + 2xye^{xy^2} dy$

2. $z = x^2 y \operatorname{sen} y$ Respuesta: $dz = 2xy\operatorname{sen} y.dx + (x^2 \operatorname{sen} y + x^2 y \cos y)dy$

3. $\omega = \dfrac{x^3}{3} + \ln \dfrac{y^2 u}{z}$ Respuesta: $d\omega = x^2 dx + \dfrac{2}{y} dy - \dfrac{1}{z} dz + \dfrac{1}{u} du$

Aplicaciones del Diferencial Total de una función

Cálculos aproximados

Dada la función $z = f(x, y)$ sabemos que el Incremento total es:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Y sabemos que:

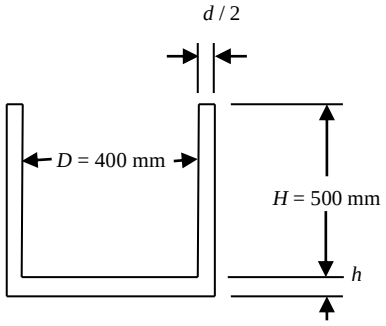
$$\Delta z \cong dz$$

Por lo tanto podemos expresar que:

$$dz \cong f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Donde la desigualdad está dada en infinitésimos de orden superior respecto a Δx y Δy.

Veamos como se pueden aplicar estas fórmulas al cálculo aproximado:



Ejercicio
Calcular el volumen de material necesario para construir un tanque de forma cilíndrica sin tapa y con un espesor de 2 mm y que tiene las siguientes dimensiones:
D : Diámetro interior del tanque
H : Altura interior del tanque
d / 2 y h: Espesor del tanque igual a 2 mm
v : Volumen total de material necesario.

Primero realizaremos el cálculo exacto y luego el aproximado aplicando diferencial total.

1. Cálculo exacto
2.

$$v = \frac{\pi (D + d)^2 (H + h)}{4} - \frac{\pi D^2 H}{4}$$

$$v = \frac{\pi .404^2 .502}{4} - \frac{\pi .400^2 .500}{4}$$

$\boxed{v = 1.519.299 mm^3}$ **Valor exacto**

3. Cálculo aproximado
   Podemos considerar la función $V = f(D,H)$ y los incrementos de las variables independientes son $\Delta D = d = 4mm$ y $\Delta H = h = 2mm$ y por lo tanto el volumen buscado será el Incremento Total de la función:

$$v = \Delta V \cong dV$$

$$V = \frac{\pi D^2 H}{4}$$

$$dV = \frac{\pi DH}{2} \cdot dD + \frac{\pi D^2}{4} \cdot dH = \frac{\pi .400.500}{2} \cdot 4 + \frac{\pi .400^2}{4} \cdot 2$$

$$dV = 1.507.968 mm^3$$

$$\boxed{v \cong 1.507.968 mm^3}$$ **Valor aproximado**

La diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado es de $11.331 mm^3$. Si bien a primera vista parece una diferencia grande, el error que se está cometiendo es del 0,75 %.

Por ejemplo si consideramos que el material con el que está construido el tanque es acero, pesaría aprox. 12 kg y el error que se cometería al considerar el diferencial en lugar del incremento sería de 88 gr.

Evaluaciones de errores de cálculo

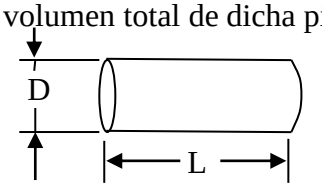
Sea la función $z = f(x,y)$ y supongamos que al evaluar los valores numéricos de ***x*** e ***y*** se cometen pequeños errores que llamaremos Δx y Δy respectivamente. Al calcular ***z*** con esos valores erróneos se cometerá un error total igual a Δz.

Si los errores Δx y Δy son suficientemente pequeños, podemos sustituir los incrementos por diferenciales y decir que el error total será:

$$\boxed{\Delta z \cong dz = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \cdot |dx| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \cdot |dy|}$$

Como los errores pueden ser positivos o negativos, se deben tomar los valores absolutos de las derivadas parciales y de los errores. De esta manera obtendremos aproximadamente el máximo error posible.

Ejemplo:
Se debe construir una pieza de forma cilíndrica de 120 mm de diámetro y de 80 mm de longitud. Si en cada medida se permite un error máximo de 0,02 mm, determinar el máximo error posible en el volumen total de dicha pieza.



Si llamamos *D* al diámetro, *L* a la longitud, *dD* y *dL* a los errores En el diámetro y en la longitud respectivamente, Tendremos:

$$V = \frac{\pi D^2 L}{4}$$ y el máximo error posible:

$$e_{\max} \cong dV = \frac{\pi DL}{2} dD + \frac{\pi D^2}{4} dL = \frac{\pi .120.80}{2} \cdot 0{,}02 + \frac{\pi .120^2}{4} \cdot 0{,}02$$

$$e_{\max} \cong 527{,}78 mm^3$$

Ejercicios:

1. Dado un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6m y 8m respectivamente, si se permite un error máximo de 0,1 m en cada uno. Hallar un valor aproximado del máximo error al calcular con estas medidas: a) El Área y b) La Hipotenusa.

2. Los lados de un paralelepípedo rectángulo miden 4m, 7m y 9m con errores máximos de 0,02m en cada uno. Hallar el valor del máximo error al calcular con estas medidas: a) El Volumen, b) La Superficie Total de sus caras y c) La Diagonal.

Resultados:

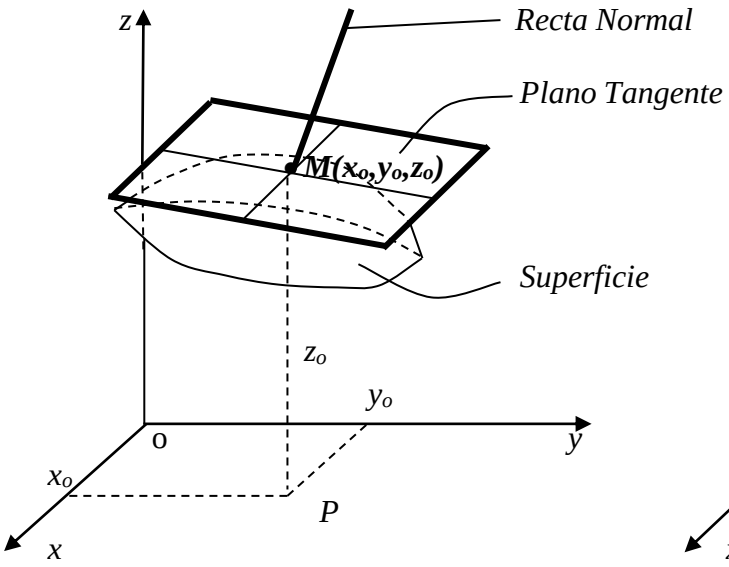
Ejercicio 1:

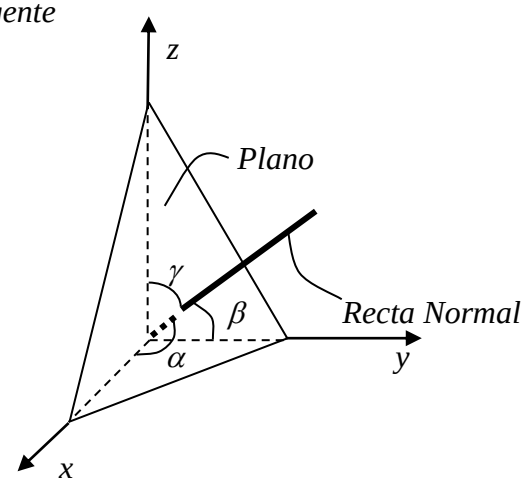
a) Error máximo al calcular el Área: $e_{\max} \cong 0{,}7 m^2$
b) Error máximo al calcular la Hipotenusa: $e_{\max} \cong 0{,}14 m$

Ejercicio 2:

a) Error máximo al calcular el Volumen: $e_{\max} \cong 2{,}54 m^3$
b) Error máximo al calcular la Superficie: $e_{\max} \cong 1{,}6 m^2$
c) Error máximo al calcular la Diagonal: $e_{\max} \cong 0{,}03 m$

PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA SUPERFICIE





Recordemos algunas ecuaciones conocidas:

$Ax + By + Cz = D$ Es la ecuación de un plano.

$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}$ Es la ecuación de la recta normal a este plano y que pasa por el origen.

A, B, C Son los números directores de la recta.

α, β, γ Son los ángulos directores de la recta.

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \cos\beta &= \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{aligned}\right\} \text{Son los cosenos directores de la recta.}$$

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ Es la ecuación de un plano que pasa por el punto $M(x_0, y_0, z_0)$

$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$ Es la ecuación de la recta normal a este plano y que pasa por $M(x_0, y_0, z_0)$

La ecuación de un plano también se puede expresar:

$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$ ó

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \cdot x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \cdot y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \cdot z = \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$ en la que

$p = \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ es la distancia desde el origen de coordenadas al plano.

Dada la función $z = f(x, y)$ recordemos que su diferencial es:

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy \qquad \text{ó}$$

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \Delta y$$

Si se fija x_o e y_o queda determinado z_o por la función $z = f(x, y)$.

Si consideramos que $\Delta x = x - x_0$ y $\Delta y = y - y_0$ resultará $dz = z - z_0$.

Reemplazando en la expresión del diferencial tendremos:

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

que es la ecuación de un plano que pasa por el punto $M(x_0, y_0, z_0)$.

La intersección entre este plano y el plano $x = x_0$ es la recta:

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

Que es la recta tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $M(x_0, y_0, z_0)$ en la dirección del eje *0y*.

Análogamente la recta intersección entre el plano dado y el plano $y = y_0$ es la recta:

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0)$$

Que es la recta tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $M(x_0, y_0, z_0)$ en la dirección del eje *0x*.

Por lo tanto el plano definido es el **Plano tangente** a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $M(x_0, y_0, z_0)$

$$\boxed{z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)}$$ **Plano Tangente**

La **Recta Normal** a la superficie en el punto $M(x_0, y_0, z_0)$ es:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{-\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{-\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{1}}$$ **Recta Normal**

$-\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$; $-\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$; 1 Son los números directores de la Recta Normal.

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{-\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)^2+1}} \\
\cos\beta &= \frac{-\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)^2+1}} \\
\cos\gamma &= \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)^2+1}}
\end{aligned}\right\}\ \text{Son los cosenos directores de la recta.}$$

Ejemplo:

Determinar las ecuaciones del Plano Tangente y la Recta Normal a la superficie $z = 9 - x^2 - y^2$ en el punto $M(1,2,4)$.

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cdot(y-y_0)$$ **Plano Tangente**

$$z - 4 = \frac{\partial f(1,2)}{\partial x}\cdot(x-1) + \frac{\partial f(1,2)}{\partial y}\cdot(y-2)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -2x \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f(1,2)}{\partial x} = -2$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f(1,2)}{\partial y} = -4$$

$z - 4 = -2(x-1) - 4(y-2)$ ó $\boxed{2x + 4y + z = 14}$ **Plano Tangente**

$$\frac{x - x_0}{-\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{-\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{1}$$ **Recta Normal**

$$\boxed{\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-4}{1}}$$ **Recta Normal**

DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Consideremos que la función $z = f(x, y)$ es continua y tiene derivadas parciales también continuas, su Diferencial Total es:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \qquad (1)$$

Si bien este Diferencial Total es válido aun si *x* e *y* no son variables independientes, para que tenga validez lo que veremos a continuación, consideraremos que *x* e *y* son variables independientes, y por lo tanto sus diferenciales, *dx* y *dy*, son constantes. Y también supondremos que las derivadas parciales de segundo orden de la función son continuas.

Diferenciando este Diferencial de la función obtendremos el Diferencial de Segundo Orden. Diferenciamos el diferencial (1):

$$d(dz) = d^2 z = d\left[\frac{\partial z}{\partial x} dx\right] + d\left[\frac{\partial z}{\partial y} dy\right]$$

$$d^2 z = d\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right] dx + d\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right] dy \qquad (2)$$

Como $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ son funciones de las variables independientes *x* e *y*, los diferenciamos:

$$d\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right] = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} dx + \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dy$$

$$d\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right] = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} dx + \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y} dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy$$

Llevando lo obtenido a la expresión (2) resultará:

$$d^2 z = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dy\right] dx + \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy\right] dy$$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

Como las Derivadas Parciales de Segundo Orden son continuas resulta $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, tendremos:

$$\boxed{d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2} \qquad \textbf{Diferencial de Segundo Orden} \qquad (3)$$

Este Diferencial de Segundo Orden puede representarse también mediante la siguiente formula simbólica:

$$\boxed{d^2 z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)^{[2]}}$$

Diferencial de Segundo Orden

Diferenciando en forma sucesiva los Diferenciales de 2º Orden, 3º Orden, etc. obtendremos los Diferenciales de 3º Orden, 4º Orden, etc. respectivamente.

En general, cuando existen las correspondientes Derivadas Parciales, se verifica la siguiente fórmula simbólica:

$$\boxed{d^n z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)^{[n]}}$$

Este exponente simbólico [n] indica orden de derivación para las Derivadas Parciales y exponente para los diferenciales.

Por ejemplo el Diferencial Total de Tercer Orden resulta:

$$\boxed{d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3}$$

<u>Ejemplo</u>:
Dada la función $z = x^4 \text{sen} 5y$ tendremos que:

$$dz = 4x^3 \text{sen} 5y dx + 5x^4 \cos 5y dy$$

$$d^2 z = 12x^2 \text{sen} 5y dx^2 + 40x^3 \cos 5y dx dy - 25x^4 \text{sen} 5y dy^2$$

$$d^3 z = 24x \text{sen} 5y dx^3 + 180x^2 \cos 5y dx^2 dy - 300x^3 \text{sen} 5y dx dy^2 - 125x^4 \cos 5y dy^3$$

DERIVACIÓN DE FUNCIONES COMPUESTAS

Supongamos que en la función escalar de variable vectorial:

$$z = f(x, y) \qquad (1) \qquad R^2 \xrightarrow{f} R$$

x e ***y*** son funciones vectoriales de variable vectorial cuyas variables independientes son ***u*** y ***v***:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u,v) \\ y = \varphi_2(u,v) \end{cases} \qquad (2) \qquad R^2 \xrightarrow{\varphi} R^2$$

Es decir que ***z*** es una Función Compuesta de las variables independientes ***u*** y ***v***.
Las variables ***x*** e ***y*** reciben el nombre de variables intermedias.

Podemos expresar a ***z*** en función de las variables independientes ***u*** y ***v***:

$$z = f\left[\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)\right] \qquad (3) \qquad R^2 \xrightarrow{\varphi_o f} R$$

Calcularemos $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$ a partir de las funciones (1) y (2), sin necesidad de recurrir a la función (3).

Consideremos que las funciones $f(x, y)$, $\varphi_1(u,v)$ y $\varphi_2(u,v)$ son continuas, al igual que sus derivadas parciales respecto a todas sus variables.

Si incrementamos a ***u*** en Δu, manteniendo constante la variable ***v***, en la función (2) tendremos que ***x*** e ***y*** resultarán incrementadas en $\Delta_u x$ y $\Delta_u y$ respectivamente.

Al resultar incrementadas ***x*** e ***y***, tendremos que en la función (1), ***z*** también recibirá un incremento Δz cuya expresión será:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta_u x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta_u y + \varepsilon_1 \Delta_u x + \varepsilon_2 \Delta_u y$$

Si dividimos todos los términos por Δu resultará:

$$\frac{\Delta z}{\Delta u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta_u x}{\Delta u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta_u y}{\Delta u} + \varepsilon_1 \frac{\Delta_u x}{\Delta u} + \varepsilon_2 \frac{\Delta_u y}{\Delta u}$$

Como consideramos continuas a las funciones $f(x, y)$, $\varphi_1(u,v)$ y $\varphi_2(u,v)$, tendremos que si $\Delta u \to 0$ también $\Delta_u x \to 0$ y $\Delta_u y \to 0$. Y en este caso también $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$.
Tomamos límite para $\Delta u \to 0$:

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta_u x}{\Delta u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta_u y}{\Delta u} + \lim_{\Delta u \to 0} \varepsilon_1 \cdot \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta_u x}{\Delta u} + \lim_{\Delta u \to 0} \varepsilon_2 \cdot \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta_u y}{\Delta u}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}}$$

De forma similar pero incrementando a ***v*** en Δv, manteniendo constante la variable ***u***, podremos obtener:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}}$$

Esta forma de derivar se conoce como **Regla de la Cadena**, y se puede generalizar para la derivación de funciones con un mayor número de variables.

En general dada la siguiente función compuesta:

$$z = f(y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_m) \qquad (1') \qquad R^m \xrightarrow{f} R$$

Donde $(y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_m)$ son funciones de las variables independientes $(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n)$:

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n) \\ y_2 = g_2(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n) \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ y_m = g_m(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n) \end{cases} \qquad (2') \qquad R^n \xrightarrow{G} R^m$$

En conclusión ***z*** es una función compuesta de las variables independientes $(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n)$ es decir $R^n \xrightarrow{Gof} R$.

Aplicando la Regla de la Cadena podemos calcular las derivadas parciales de la función con respecto a todas sus variables independientes:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{\partial z}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{\partial z}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial z}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{\partial z}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_2}$$

$$\bullet$$
$$\bullet$$
$$\bullet$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_n} = \frac{\partial z}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_n} + \frac{\partial z}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_n} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{\partial z}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_n}$$

Puede suceder que una o más variables sean independientes e intermedias a la vez.

Consideremos a continuación como ejemplo el caso particular en que ***x*** es variable independiente e intermedia a la vez:

$$\omega = f(x, y, z) \qquad (1'') \qquad \begin{cases} y = g_1(x) \\ z = g_2(x) \end{cases} \qquad (2'')$$

Finalmente ω es función de una sola variable independiente ***x***:

$$\omega = f[x, g_1(x), g_2(x)] \qquad (3")$$

Podemos calcular su derivada aplicando la Regla de la Cadena:

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{dz}{dx}$$

Y como resulta $\frac{dx}{dx} = 1$, entonces:

$$\boxed{\frac{d\omega}{dx} = \frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{dz}{dx}}$$ En esta expresión, $\frac{d\omega}{dx}$ y $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ nos representan respectivamente:

$\frac{d\omega}{dx} =$ Derivada de la Función Compuesta (3").

$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$ Derivada de la función (1'').

<u>Ejemplos</u>:
Calcular las derivadas de las siguientes Funciones Compuestas

1. $z = x\cos 2y \qquad \begin{cases} x = uv \\ y = u^2 \operatorname{sen} v \end{cases}$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = v\cos 2y - 4xu\operatorname{sen}2y.senv$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = u\cos 2y - 2xu^2\operatorname{sen}2y.\cos v$$

2. $\omega = (x-y)\operatorname{sen}z \qquad \begin{cases} y = \ln\frac{2}{x} \\ z = (3-x)^2 \end{cases}$

$$\frac{d\omega}{dx} = \operatorname{sen}z + \frac{\operatorname{sen}z}{x} - 2(x-y)(3-x)\cos z$$

DERIVACIÓN DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

Sea la función:

$$g(x, y) = 0 \qquad (1)$$

Decimos que esta función (1) define implícitamente a la función:

$$y = f(x) \qquad (2)$$

Si:

$$g[x, f(x)] = 0$$

Teorema de existencia y derivabilidad de Funciones Implícitas

Si $g(x, y) = 0$ es una función continua en cierto dominio que contiene un punto (x_0, y_0), donde se verifica que:

- $g(x_0, y_0) = 0$
- $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$ existen y son continuas en un entorno de dicho punto.
- $\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$

Entonces la función $g(x, y) = 0$ define implícitamente que ***y*** es función de ***x***, y además $g(x, y) = 0$ es derivable.

Lo definido se cumple también para las condiciones de existencia y derivabilidad de Funciones Implícitas con un mayor número de variables.

El problema a resolver consiste en calcular las derivadas de la función (2) pero a partir de la (1), ya que disponiendo de esta última no siempre será posible explicitarla.

De acuerdo al tipo de funciones y a la cantidad de variables que se pueden presentar, dividimos el tema en cuatro casos:

1º CASO

Sea la función $\quad g(x, y) = 0 \qquad R^{1+1} \xrightarrow{g} R \qquad (1)$

Que define implícitamente a la función:

$$y = f(x) \qquad R \xrightarrow{f} R \qquad (2)$$

Calcularemos la derivada de la función (2), es decir $\frac{dy}{dx}$, a partir de la Función Implícita (1).

Consideremos a las funciones (1) y (2) como Funciones Compuestas y derivemos con respecto a "x" aplicando la Regla de la Cadena:

$$g(x, y) = 0 \qquad \begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

Dado que $\frac{dx}{dx}=1$, entonces:

$$\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

Las derivadas parciales $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$ se pueden calcular utilizando la Función Implícita (1), por lo tanto despejando nuestra incógnita $\frac{dy}{dx}$ tendremos:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}}$$

Debiendo comprobarse como condición que $\frac{\partial g}{\partial y}\neq 0$.

Ejercicios

Calcular $\frac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones:

1. $6y^2-y-x^2=0$ Rta.: $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{12y-1}$
2. $y(x^2-3)-x=0$ Rta.: $\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy-1}{x^2-3}$
3. $x^2\operatorname{sen}y+y^3=0$ Rta.: $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x\operatorname{sen}y}{x^2\cos y+3y^2}$

2º CASO

Sea la función $g(x,y,z)=0$ $R^{2+1}\xrightarrow{g}R$ (1)

Que define implícitamente a la función:

$z=f(x,y)$ $R^2\xrightarrow{f}R$ (2)

Calcularemos las derivadas de la función (2), es decir $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, a partir de la Función Implícita (1).

Consideremos a las funciones (1) y (2) como Funciones Compuestas y derivemos aplicando la Regla de la Cadena:

$$g(x,y,z)=0 \qquad \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases}$$

a) Calculamos $\frac{\partial z}{\partial x}$ derivando con respecto a "x":

$$\frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

Dado que $\frac{dx}{dx}=1$ y $\frac{dy}{dx}=0$ entonces:

$$\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

Las derivadas parciales $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial z}$ se pueden calcular utilizando la Función Implícita (1), por lo tanto despejando nuestra incógnita $\frac{\partial z}{\partial x}$ tendremos:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}}}$$

b) Calculamos ahora $\frac{\partial z}{\partial y}$ repitiendo el procedimiento pero derivando con respecto a "y":

$$\frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dy}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dy}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

Dado que $\frac{dx}{dy}=0$ y $\frac{dy}{dy}=1$ entonces:

$$\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

Las derivadas parciales $\frac{\partial g}{\partial y}$ y $\frac{\partial g}{\partial z}$ se pueden calcular utilizando la Función Implícita (1), por lo tanto despejando nuestra incógnita $\frac{\partial z}{\partial y}$ tendremos:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}}}$$

Debiendo comprobarse en ambos casos como condición que $\frac{\partial g}{\partial z}\neq 0$.

Y en general para Funciones Implícitas con un mayor número de variables independientes será:

Dada la función $g(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n, y) = 0$ $\quad R^{n+1} \xrightarrow{g} R$ (1)

Que define implícitamente a la función:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n) \qquad R^n \xrightarrow{f} R \qquad (2)$$

Tendremos que las derivadas parciales de la función (2) con respecto a sus variables independientes $(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_i, \ldots\ldots\ldots x_n)$ serán de la forma:

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial g}{\partial y}}}$$

Debiendo comprobarse en todos los casos como condición que $\dfrac{\partial g}{\partial y} \neq 0$.

<u>Ejemplo</u>

Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en la siguiente Función Implícita:

$$y^2 z + xz + xy = 0 \qquad \text{Rta.:} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{z + y}{y^2 + x} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2yz}{y^2 + x} \end{cases}$$

<u>3º CASO</u>

Sea el sistema de funciones: $\begin{cases} g_1(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$ (1)

Que define implícitamente a las funciones:

$$\begin{cases} y = f_1(x) \\ z = f_2(x) \end{cases} \qquad R \longrightarrow R^2 \qquad (2)$$

Calcularemos las derivadas de las funciones (2), es decir $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{dz}{dx}$, a partir de la Función Implícita (1).

Consideremos a las funciones (1) y (2) como Funciones Compuestas y derivemos con respecto a "*x*" aplicando la Regla de la Cadena:

$$\begin{cases} g_1(x,y,z)=0 \\ \\ g_2(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x \\ y = f_1(x) \\ z = f_2(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_1}{\partial x}\dfrac{dx}{dx}+\dfrac{\partial g_1}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial g_1}{\partial z}\dfrac{dz}{dx}=0 \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x}\dfrac{dx}{dx}+\dfrac{\partial g_2}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial g_2}{\partial z}\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $\dfrac{dx}{dx}=1$ y reordenando términos obtendremos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_1}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial g_1}{\partial z}\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{\partial g_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial g_2}{\partial z}\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{\partial g_2}{\partial x} \end{cases}$$

Nos queda formado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas ($\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{dz}{dx}$), pues las derivadas parciales de las funciones g_1 y g_2 pueden ser calculadas utilizando las Funciones Implícitas (1).
Podemos resolver este sistema aplicando la Regla de Cramer:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\begin{vmatrix} -\dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ -\dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix}}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & -\dfrac{\partial g_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & -\dfrac{\partial g_2}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix}}$$

El determinante de los denominadores está formado por los coeficientes de las incógnitas, y recibe el nombre de **Determinante Jacobiano** de las funciones g_1 y g_2 respecto de las variables y y z.

Este Determinante Jacobiano es el determinante que está formado por las derivadas parciales de las funciones cuyas filas están definidas por las funciones y sus columnas por las variables con respecto a las que se derivan estas funciones.

Y se lo simboliza así:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix} = J\left(\frac{g_1, g_2}{y, z}\right) = \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(y, z)}$$

Si este determinante no se anula, entonces el sistema de ecuaciones tiene solución única.

Podemos utilizar una notación similar para los otros jacobianos:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix} = J\left(\frac{g_1, g_2}{x, z}\right) = \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x, z)} \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x} \end{vmatrix} = J\left(\frac{g_1, g_2}{y, x}\right) = \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(y, x)}$$

Finalmente las derivadas de las Funciones Implícitas se pueden expresar en forma resumida:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{J\left(\dfrac{g_1, g_2}{x, z}\right)}{J\left(\dfrac{g_1, g_2}{y, z}\right)}}$$

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = -\frac{J\left(\dfrac{g_1, g_2}{y, x}\right)}{J\left(\dfrac{g_1, g_2}{y, z}\right)}}$$

Debiendo comprobarse como condición que $J\left(\dfrac{g_1, g_2}{y, z}\right) \neq 0$

<u>Ejemplo</u>

Calcular $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{dz}{dx}$ si:

$$\begin{cases} 3x^3z^2 - 6y^2 - 5 = 0 \\ 9xy + z^3 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{J\left(\dfrac{g_1, g_2}{x, z}\right)}{J\left(\dfrac{g_1, g_2}{y, z}\right)} = -\frac{\begin{vmatrix} 9x^2z^2 & 6x^3z \\ 9y & 3z^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -12y & 6x^3z \\ 9x & 3z^2 \end{vmatrix}} = -\frac{27x^2z^4 - 54x^3yz}{-36yz^2 - 54x^4z} = \frac{3x^2z^3 - 6x^3y}{4yz + 6x^4}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{J\left(\dfrac{g_1, g_2}{y, x}\right)}{J\left(\dfrac{g_1, g_2}{y, z}\right)} = -\frac{\begin{vmatrix} -12y & 9x^2z^2 \\ 9x & 9y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -12y & 6x^3z \\ 9x & 3z^2 \end{vmatrix}} = -\frac{-108y^2 - 81x^3z^2}{-36yz^2 - 54x^4z} = -\frac{12y^2 + 9x^3z^2}{4yz + 6x^4}$$

4º CASO

Sea el sistema de funciones: $\begin{cases} g_1(x,y,u,v)=0 \\ g_2(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ (1)

Que define implícitamente a las funciones:

$$\begin{cases} u = f_1(x,y) \\ v = f_2(x,y) \end{cases} \qquad R^2 \longrightarrow R^2 \qquad (2)$$

Debemos calcular las derivadas de las funciones (2), es decir $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$, a partir de la Función Implícita (1).

Consideramos a las funciones (1) y (2) como Funciones Compuestas y derivamos aplicando la Regla de la Cadena:

$$\begin{cases} g_1(x,y,u,v)=0 \\ g_2(x,y,u,v)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x \\ y = y \\ u = f_1(x,y) \\ v = f_2(x,y) \end{cases}$$

a) Calculamos $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}$ derivando con respecto a "x":

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial g_1}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial g_1}{\partial u}\frac{\partial u}{dx}+\frac{\partial g_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial g_2}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial g_2}{\partial u}\frac{\partial u}{dx}+\frac{\partial g_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $\frac{dx}{dx}=1$ y $\frac{dy}{dx}=0$, y reordenando términos obtendremos:

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial g_1}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial g_2}{\partial x} \end{cases}$$

Nos queda formado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas ($\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}$), pues las derivadas parciales de las funciones g_1 y g_2 pueden ser calculadas utilizando las Funciones Implícitas (1'). Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}-\dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v}\\ -\dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{J\left(\dfrac{g_1,g_2}{x,v}\right)}{J\left(\dfrac{g_1,g_2}{u,v}\right)}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial u} & -\dfrac{\partial g_1}{\partial x}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & -\dfrac{\partial g_2}{\partial x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{J\left(\dfrac{g_1,g_2}{u,x}\right)}{J\left(\dfrac{g_1,g_2}{u,v}\right)}}$$

b) Calculamos ahora $\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$ repitiendo el procedimiento pero derivando con respecto a "*y*":

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g_1}{\partial x}\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{\partial g_1}{\partial y}\dfrac{dy}{dy}+\dfrac{\partial g_1}{\partial u}\dfrac{\partial u}{dy}+\dfrac{\partial g_1}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\\[2ex] \dfrac{\partial g_2}{\partial x}\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{\partial g_2}{\partial y}\dfrac{dy}{dy}+\dfrac{\partial g_2}{\partial u}\dfrac{\partial u}{dy}+\dfrac{\partial g_2}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $\frac{dx}{dy}=0$ y $\frac{dy}{dy}=1$, y reordenando términos obtendremos:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g_1}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial g_1}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\partial g_1}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial g_2}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial g_2}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\partial g_2}{\partial y}\end{cases}$$

Nos queda formado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas ($\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$), pues las derivadas parciales de las funciones g_1 y g_2 pueden ser calculadas utilizando las Funciones Implícitas (1').
Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}-\dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v}\\ -\dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{J\left(\dfrac{g_1,g_2}{y,v}\right)}{J\left(\dfrac{g_1,g_2}{u,v}\right)}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial u} & -\dfrac{\partial g_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & -\dfrac{\partial g_2}{\partial y}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{J\left(\dfrac{g_1,g_2}{u,y}\right)}{J\left(\dfrac{g_1,g_2}{u,v}\right)}}$$

Debiendo comprobarse en todos los casos como condición que $J\left(\dfrac{g_1,g_2}{u,v}\right)\neq 0$.

Y en general para el caso de Funciones Implícitas con un mayor número de variables sus derivadas parciales correspondientes se obtienen de forma similar.

<u>Ejemplo</u>

Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial y}$, siendo:

$$\begin{cases} 2uv^2-x^4y^2+8=0 \\ 4x^2u+2v-5=0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{J\left(\dfrac{g_1,g_2}{x,v}\right)}{J\left(\dfrac{g_1,g_2}{u,v}\right)}=-\frac{\begin{vmatrix}-4x^3y^2 & 4uv\\ 8xu & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2v^2 & 4uv\\ 4x^2 & 2\end{vmatrix}}=-\frac{-8x^3y^2-32xu^2v}{4v^2-16x^2uv}=\frac{4x^3y^2+16xu^2v}{2v^2-8x^2uv}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{J\left(\dfrac{g_1,g_2}{y,v}\right)}{J\left(\dfrac{g_1,g_2}{u,v}\right)}=-\frac{\begin{vmatrix}-2x^4y & 4uv\\ 0 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2v^2 & 4uv\\ 4x^2 & 2\end{vmatrix}}=-\frac{-4x^4y}{4v^2-16x^2uv}=\frac{2x^4y}{2v^2-8x^2uv}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{J\left(\dfrac{g_1,g_2}{u,x}\right)}{J\left(\dfrac{g_1,g_2}{u,v}\right)}=-\frac{\begin{vmatrix}2v^2 & -4x^3y^2\\ 4x^2 & 8xu\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2v^2 & 4uv\\ 4x^2 & 2\end{vmatrix}}=-\frac{16xuv^2+16x^5y^2}{4v^2-16x^2uv}=\frac{4xuv^2+4x^5y^2}{4x^2uv-v^2}$$

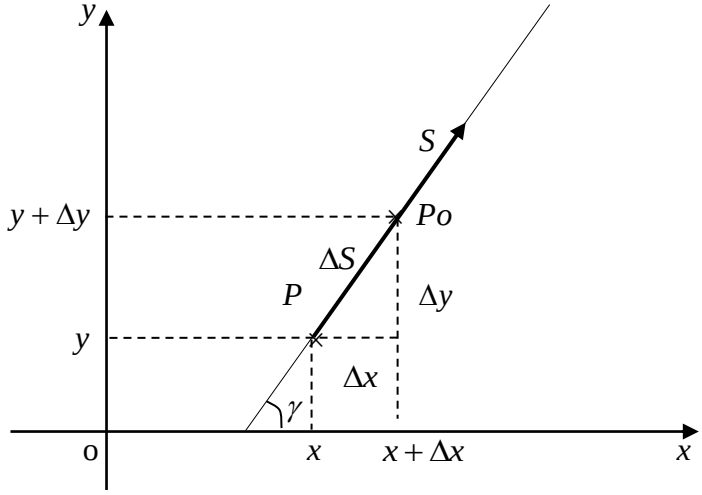
$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{J\left(\dfrac{g_1,g_2}{u,y}\right)}{J\left(\dfrac{g_1,g_2}{u,v}\right)}=-\frac{\begin{vmatrix}2v^2 & -4x^4y\\ 4x^2 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2v^2 & 4uv\\ 4x^2 & 2\end{vmatrix}}=-\frac{16x^6y}{4v^2-16x^2uv}=\frac{4x^6y}{4x^2uv-v^2}$$

DERIVADA DIRECCIONAL

Consideremos la función $z = f(x, y)$ definida en un dominio *D* que contiene al punto $P(x, y)$. Por este punto tracemos un vector *S* que forma con el eje 0*x* un ángulo γ.

Tomemos otro punto $P_0(x + \Delta x, y + \Delta y)$ sobre la dirección del mismo vector *S* a una distancia ΔS de su origen.

$$\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$



Consideremos que la función $z = f(x, y)$ es continua y tiene Derivadas Parciales también continuas en el dominio *D*. El Incremento Total de la función será:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

Donde $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$ (es decir cuando $\Delta S \to 0$).

Dividamos ambos miembros por ΔS:

$$\frac{\Delta z}{\Delta S} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta S} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta S} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta S} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta S}$$

Si analizamos el gráfico comprobamos que:

$$\frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos\gamma \qquad \text{y} \qquad \frac{\Delta y}{\Delta S} = \operatorname{sen}\gamma \qquad \text{reemplazamos:}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta S} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\gamma + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\gamma + \varepsilon_1 \cos\gamma + \varepsilon_2 \operatorname{sen}\gamma$$

Tomamos límite en ambos miembros para $\Delta S \to 0$:

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \to 0}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\gamma + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\gamma + \varepsilon_1 \cos\gamma + \varepsilon_2 \operatorname{sen}\gamma\right)$$

El límite de la razón $\frac{\Delta z}{\Delta S}$ para $\Delta S \to 0$ es la derivada de la función $z = f(x, y)$ en el punto $P(x, y)$ siguiendo la dirección del vector S y se simboliza $\frac{\partial z}{\partial S}$, es decir:

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta S} = \frac{\partial z}{\partial S} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial S} = \frac{\partial f}{\partial S} = f'_\gamma(x, y) = f'_\gamma = D_\gamma f(x, y)$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial S} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\gamma + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\gamma} \qquad \text{ó} \qquad \boxed{f'_\gamma(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\cos\gamma + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\operatorname{sen}\gamma}$$

Como vemos, conociendo las Derivadas Parciales, resulta fácil hallar la derivada siguiendo cualquier dirección.

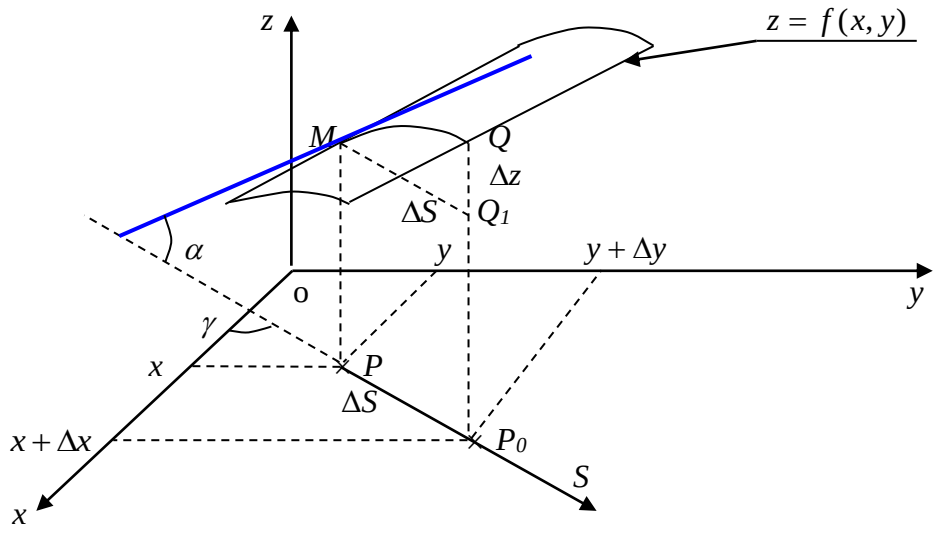
Las propias Derivadas Parciales se presentan como casos particulares de Derivada Direccional.
Si derivamos en la dirección $\gamma = 0^o$ tendremos:

$$f'_{0^o}(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}\cos 0^o + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen} 0^o = \frac{\partial z}{\partial x}$$

Y si derivamos en la dirección $\gamma = \frac{\pi}{2}$ tendremos:

$$f'_{\frac{\pi}{2}}(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Interpretación Geométrica de la Derivada Direccional



$$f'_\gamma(x, y) = \frac{\partial z}{\partial S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta S} = \operatorname{tg}\alpha$$

La derivada de la función $z = f(x, y)$ en el punto $P(x, y)$ siguiendo la dirección del vector S es igual a la pendiente de la recta tangente a la superficie, en el punto considerado, en la dirección de dicho vector.

Ejemplo 1

Sea la función $z = x^2 + y^2 + xy$, hallar su derivada en el punto $P(1,2)$ según la dirección $\gamma = \frac{\pi}{4}$.

$$f'_{\frac{\pi}{4}}(x,y) = (2x+y)\cos\frac{\pi}{4} + (2y+x)\text{sen}\frac{\pi}{4}$$

$$f'_{\frac{\pi}{4}}(x,y) = (2x+y)\frac{\sqrt{2}}{2} + (2y+x)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

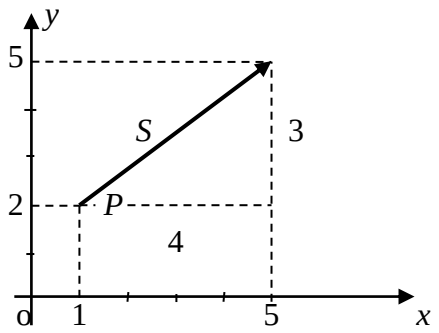
Y en el punto $P(1,2)$ la derivada resultará:

$$f'_{\frac{\pi}{4}}(1,2) = (2+2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (4+1)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{f'_{\frac{\pi}{4}}(1,2) = \frac{9\sqrt{2}}{2}}$$

Ejemplo 2

Dada la función $z = x^5 - 5y^2$, hallar su derivada en el punto $P(1,2)$ según la dirección del vector $S = 4i + 3j$



$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial S} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cos\gamma + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\text{sen}\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{4}{5}$$

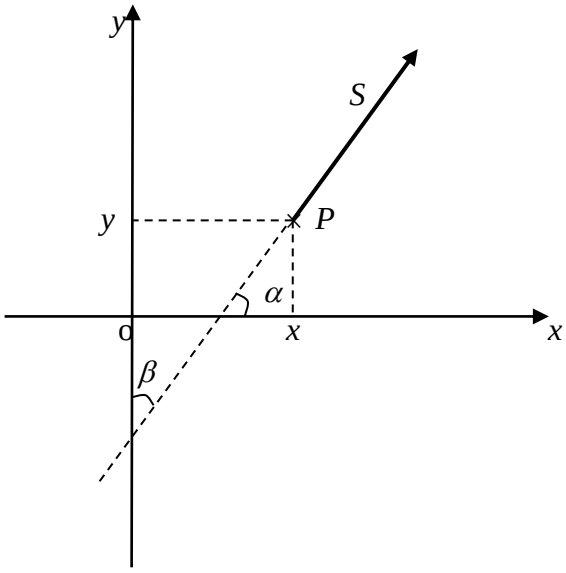
$$\text{sen}\gamma = \frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial S} = 5x^4\frac{4}{5} + (-10y)\frac{3}{5} = 4x^4 - 6y$$

Y en el punto $P(1,2)$:

$$\boxed{\frac{\partial f(1,2)}{\partial S} = -8}$$

También podemos expresar la Derivada Direccional en función de los cosenos directores.
La derivada de la función $z = f(x, y)$,
en el punto P(x,y) en la dirección del
vector S indicado en el gráfico, es igual a:



$$\frac{\partial z}{\partial S} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\alpha$$

Si analizamos el gráfico veremos que:

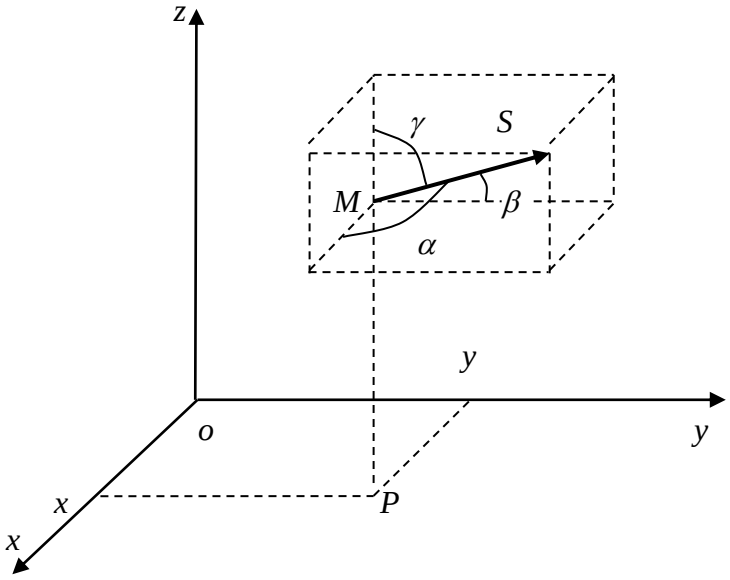
$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$$

y reemplazando en la expresión de la
Derivada Direccional tendremos:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial S} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta}$$

Y en el caso de una función de tres variables independientes:

$$u = f(x, y, z)$$



La derivada de esta función en el punto $M(x, y, z)$ en la dirección del vector S será:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma}$$

α, β, γ son los ángulos directores de la dirección y $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ los cosenos directores correspondientes.

Ejemplo:

Calculemos la derivada de la función $u = 2x^2 + y^2 - 3z^2$ en el punto $M(7,2,1)$, en la dirección del vector $S = 6i + 3j + 2k$.

Determinemos los cosenos directores del vector S

$$\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{6}{7}$$

$$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{3}{7}$$

$$\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = 4x \cdot \frac{6}{7} + 2y \cdot \frac{3}{7} - 6z \cdot \frac{2}{7}$$

Y en el punto $M(7,2,1)$:

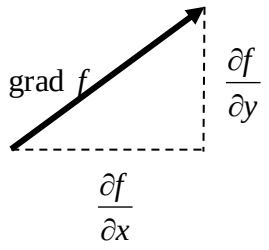
$$\frac{\partial u(7,2,1)}{\partial S} = 28 \cdot \frac{6}{7} + 4 \cdot \frac{3}{7} - 6 \cdot \frac{2}{7} = 24$$

$$\frac{\partial u(7,2,1)}{\partial S} = 24$$

GRADIENTE

En cada punto del dominio *D* en el que está definida la función $z = f(x, y)$, determinemos un vector cuyas proyecciones sobre los ejes coordenados son los valores de las Derivadas Parciales de la función en el punto correspondiente:

$$\boxed{\text{grad} f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} i + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} j} \qquad \text{o} \qquad \boxed{\text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x} i + \frac{\partial z}{\partial y} j = \left[\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right]}$$



Este vector recibe el nombre de **Gradiente** de la función $z = f(x, y)$ en el punto de coordenadas (x, y), y se lo simboliza de la siguiente manera:

$$\text{grad} f(x,y) = \text{grad } f = \text{grad } z = \nabla . f(x,y) = \nabla . f = \nabla . z$$

Ejemplo

Dada la función $z = x^2 + xy + y$, calcular su Gradiente en el punto $P(3,2)$.

$$\text{grad} f(x,y) = (2x + y)i + (x + 1)j$$

$$\text{grad} f(3,2) = 8i + 4j$$

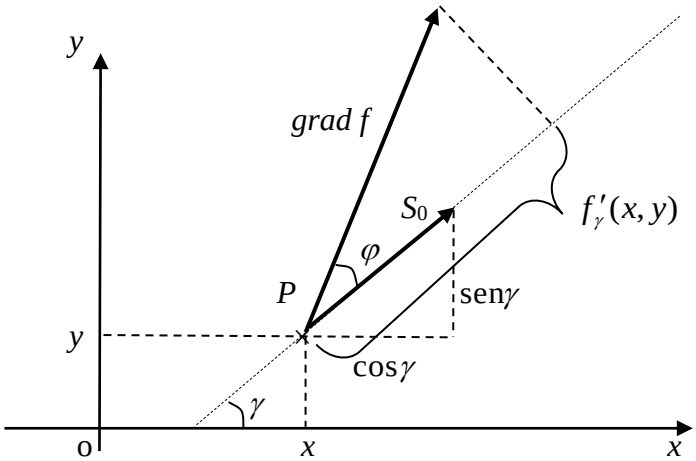
Propiedades del Gradiente de una función

Las propiedades que definiremos a continuación establecen la relación existente entre la Derivada Direccional y el Gradiente de una función:

1. *"La Derivada de la función $z = f(x, y)$ en el punto $P(x, y)$ según la dirección γ, es igual al producto escalar del vector Gradiente de esta función en el punto dado por el vector unitario S_0 correspondiente a esta dirección. Es decir, es igual a la proyección del vector Gradiente sobre el vector S_0".*

$$|S_0| = 1$$

$$S_0 = \cos\gamma\, i + \text{sen}\gamma\, j$$



Realicemos ahora el producto escalar enunciado:

$$\text{grad}f(x,y).S_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j\right)(\cos\gamma\, i + \text{sen}\gamma\, j)$$

$$\text{grad}f(x,y).S_0 = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\gamma + \frac{\partial f}{\partial y}\text{sen}\gamma$$

El segundo miembro es la expresión de la derivada de la función $z = f(x,y)$ en la dirección γ, con lo que queda demostrada la primera parte de la propiedad:

$$\boxed{f'_\gamma(x,y) = \text{grad}f(x,y).S_0}$$

Demostremos ahora la segunda parte de la propiedad, es decir que la Derivada Direccional es igual a la proyección del vector Gradiente sobre el vector S_0.

$$f'_\gamma(x,y) = \text{grad}f(x,y)S_0 = |\text{grad } f(x,y)| \cdot |S_0| \cos\varphi$$

y como $|S_0| = 1$ finalmente resulta:

$$\boxed{f'_\gamma(x,y) = |\text{grad } f(x,y)| \cos\varphi} \qquad (1)$$

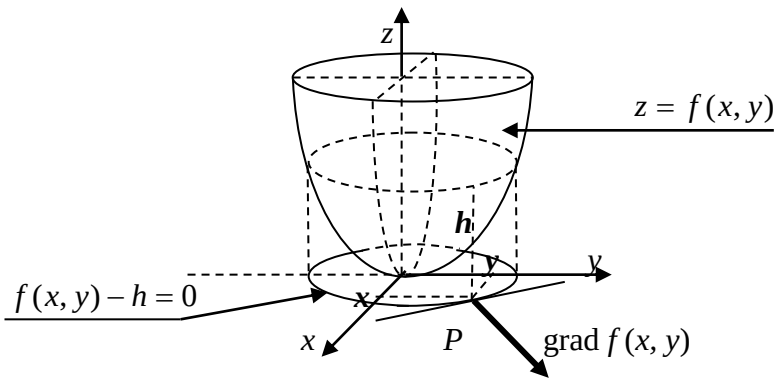
Con lo que queda demostrada la segunda parte de esta propiedad. De esta igualdad podemos deducir la propiedad fundamental del Gradiente de una función:

"En cada punto P(x,y) el vector Gradiente de la función $z = f(x,y)$ ***indica la dirección según la cual la Derivada Direccional*** $f'_\gamma(x,y)$ ***es máxima".***

En efecto, se observa en la igualdad (1) que si la dirección γ coincide con la del vector Gradiente (es decir $\varphi = 0$, o sea $\cos\varphi = 1$) el segundo miembro de la expresión toma el valor máximo. En conclusión el valor máximo de la Derivada Direccional resulta:

$$\boxed{f'_\gamma(x,y) = |\text{grad } f(x,y)|} \qquad \text{o} \qquad f'_\gamma(x,y) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

2. *"En cada punto* $P(x,y)$ *el vector Gradiente está dirigido según la Normal en ese punto a la Línea de Nivel de la superficie* $z = f(x,y)$ *".*
   En efecto, consideremos que en el punto $P(x,y)$ la función $z = f(x,y)$ toma el valor *h*.



La Línea de Nivel correspondiente estará definida por :

$h = f(x, y)$ o $f(x, y) - h = 0$

Si la derivamos, considerándola como función implícita:
$f(x, y) - h = 0$ siendo $y = g(x)$ tendremos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Por lo tanto la pendiente de la recta tangente a la Línea de Nivel será:

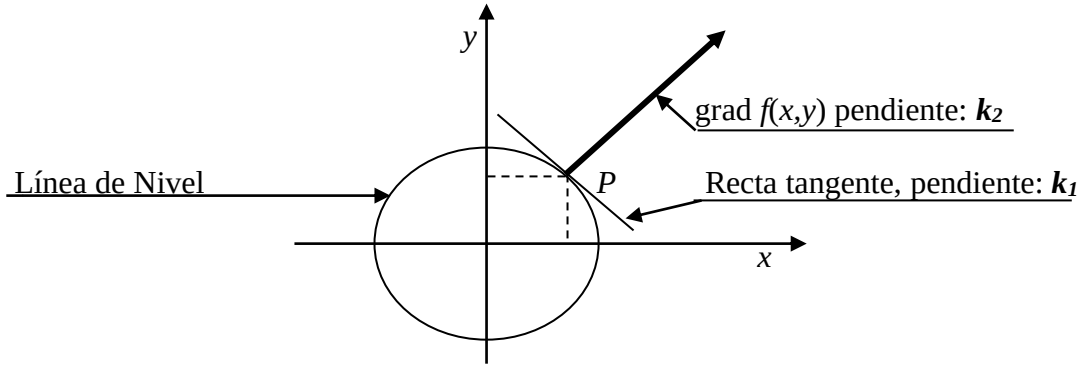
$$\boxed{k_1 = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}}$$

En tanto que el coeficiente angular del Gradiente es:

$$\boxed{k_2 = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}}$$

Por lo tanto resulta: $k_1 \cdot k_2 = -1$

Con lo que queda demostrado que el vector Gradiente es normal a la recta tangente a la Línea de Nivel en el punto considerado.



3. *"La derivada de la función , en el punto $P(x, y)$, en la dirección de la recta tangente a la Línea de Nivel en dicho punto, es igual a cero".*

En efecto, recordemos la igualdad (1):

$$f'_\gamma(x,y) = |\text{grad } f(x, y)| \cos\varphi$$

Si calculamos la derivada en la dirección de la recta tangente a la Línea de Nivel será:

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ es decir $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ por lo tanto resulta:

$$f'_\gamma(x,y) = 0$$

Ejemplo:

En el ejemplo anterior calculamos el gradiente de la función $z = x^2 + xy + y$, en el punto $P(3,2)$ y resultó:

$$\text{grad} f(3,2) = 8i + 4j$$

Ahora bien obtendremos el máximo valor de la Derivada Direccional de esta función en el punto considerado si la derivamos en la dirección del Vector Gradiente:

Valor máximo de la Derivada Direccional: $f'_\gamma(3,2) = |\text{grad} f(3,2)| = \sqrt{8^2 + 4^2} \cong 8{,}944$

Gradiente de una función de tres variables independientes

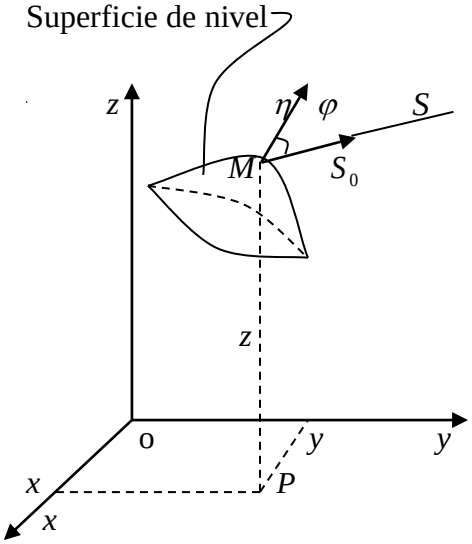
Para la función: $u = f(x, y, z)$

Su Gradiente resulta: $$\boxed{\text{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k = \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right]}$$

Todo lo demostrado para funciones de dos variables independientes puede ser ampliado para el Gradiente de funciones de tres variables independientes.

En este caso tendremos que:

En cada punto M(x, y, z) el vector Gradiente de la función $u = f(x, y, z)$ ***indica la dirección en la cual la Derivada Direccional es máxima. Y está dirigido según la Normal en ese punto a la Superficie de Nivel de la función*** $u = f(x, y, z)$**.**



Recordemos que la derivada de $u = f(x, y, z)$ en el punto $M(x, y, z)$ en la dirección S es:

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

α, β, γ son los ángulos directores de la dirección S.

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \text{grad}\, u.S_0 = \nabla u.S_0$$

S_0 es el vector unitario en la dirección S.

El máximo valor de esta derivada es en la dirección de la normal a la superficie de nivel en este punto. Si llamamos η al versor que señala esa dirección resultará:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \text{grad}\, u.\eta = |\text{grad}\, u|.|\eta|\cos\varphi = |\text{grad} u|$$ Siendo: $|\eta| = 1$; $\varphi = 0$ y $\cos\varphi = 1$

Y el valor máximo de la derivada será:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = |\text{grad}\, u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

Retomaremos este tema en el Capítulo nº 7.

CAPÍTULO 3

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

FORMULA DE TAYLOR

Antes de comenzar con la Fórmula de Taylor para una función de dos variables independientes, recordemos la Fórmula de Taylor para la función de una sola variable independiente $y = f(x)$.

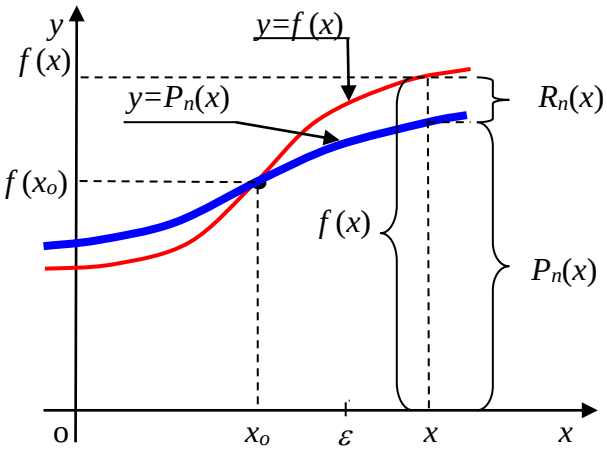
La Fórmula de Taylor permite sustituir a la función $y = f(x)$ por el polinomio $y = P_n(x)$ suficientemente próximo a dicha función.

En cualquier punto próximo a x_o resultará:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$P_n(x)$: Polinomio de Taylor.

$R_n(x)$: Término Complementario o Resto.



La Fórmula de Taylor para la función $y = f(x)$ **es:**

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots\dots\dots\dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n(x)}$$

Y teniendo en cuenta que 0!=1 y que $f^{(0)} = f$ también se la suele expresar así:

$$\boxed{f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0) + R_n(x)}$$

En el punto $x = x_0$ el polinomio y sus derivadas son iguales al valor de la función y sus derivadas.

El último término es el **Término Complementario**:

$$\boxed{R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\varepsilon)} \qquad \text{donde} \qquad \lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

siendo ε un punto comprendido entre x_0 y x:

$\varepsilon = x_0 + \theta(x - x_0)$ para $0 < \theta < 1$

Y recordemos también que la **Serie de Taylor** tiene la forma:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)}$$

Muy frecuentemente se trabaja con la Fórmula de Taylor para x_o=0, en este caso recibe el nombre de **Fórmula de Maclaurin** y tiene la forma:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(x_0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots\dots\dots\dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x)} \qquad \text{o}$$

$$\boxed{f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}f^{(i)}(0)+R_n(x)}$$

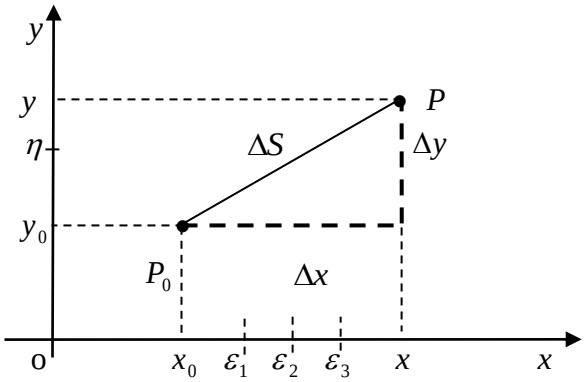
Y el **Término Complementario**:

$$\boxed{R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)} \qquad \text{para} \qquad 0<\theta<1$$

Comencemos ahora con nuestro tema:

FÓRMULA DE TAYLOR PARA UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

Sea $z=f(x,y)$ una función definida en un dominio *D*, con derivadas parciales continuas de hasta enésimo orden y $P_0(x_0,y_0)$ sea un punto interior de este dominio. Si $P(x,y)$ es un punto que pertenece a un entorno del punto P_0, la Fórmula de Taylor permite obtener un valor aproximado de $f(x,y)$, conociendo los valores de la función y sus derivadas parciales sucesivas en el punto $P_0(x_0,y_0)$.



Consideremos a $z=f(x,y)$ como una función de una sola variable independiente "*y*" ($x=\text{constante}$) y apliquemos la Fórmula de Taylor hasta los términos de segundo orden ($n=2$):

$$f(x,y)=f(x,y_0)+\frac{y-y_0}{1!}f'_y(x,y_0)+\frac{(y-y_0)^2}{2!}f''_{yy}(x,y_0)+\frac{(y-y_0)^3}{3!}f'''_{yyy}(x,\eta) \qquad (1)$$

Siendo η un punto comprendido entre y_0 e y: $\eta=y_0+\theta_1(y-y_0)$ para $0<\theta_1<1$

En la expresión (1) consideramos a $f(x,y_0)$, $f'_y(x,y_0)$, $f''_{yy}(x,y_0)$ y $f'''_{yyy}(x,\eta)$ como funciones de una sola variable "*x*" y aplicamos la Fórmula de Taylor hasta las derivadas parciales mixtas de tercer orden:

$$f(x,y_0)=f(x_0,y_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'_x(x_0,y_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''_{xx}(x_0,y_0)+\frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''_{xxx}(\varepsilon_1,y_0) \qquad (2)$$

Siendo ε_1 un punto comprendido entre x_0 y x: $\varepsilon_1=x_0+\theta_2(x-x_0)$ para $0<\theta_2<1$

$$f'_y(x,y_0)=f'_y(x_0,y_0)+\frac{x-x_0}{1!}f''_{yx}(x_0,y_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f'''_{yxx}(\varepsilon_2,y_0) \qquad (3)$$

Siendo ε_2 un punto comprendido entre x_0 y x: $\varepsilon_2 = x_0 + \theta_3(x - x_0)$ para $0 < \theta_3 < 1$

$$f''_{yy}(x, y_0) = f''_{yy}(x_0, y_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'''_{yyx}(\varepsilon_3, y_0) \qquad (4)$$

Siendo ε_3 un punto comprendido entre x_0 y x: $\varepsilon_3 = x_0 + \theta_4(x - x_0)$ para $0 < \theta_4 < 1$

Introduciendo las expresiones (2), (3) y (4) en la fórmula (1) y reordenando los términos según las potencias crecientes de $(x - x_0)$ e $(y - y_0)$ obtendremos la **Fórmula de Taylor** de la función $z = f(x, y)$ para $n = 2$:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(x_0,y_0) + (x - x_0) f'_x(x_0,y_0) + (y - y_0) f'_y(x_0,y_0) + \\ & + \frac{1}{2!}\left[(x - x_0)^2 f''_{xx}(x_0,y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0) f''_{xy}(x_0,y_0) + (y - y_0)^2 f''_{yy}(x_0,y_0)\right] + R_2 \end{aligned}}$$

Siendo R_2 el Término Complementario o Resto de la fórmula y es igual a:

$$R_2 = \frac{1}{3!}\left[(x - x_0)^3 f'''_{xxx}(\varepsilon_1, y_0) + 3(x - x_0)^2 (y - y_0) f'''_{xxy}(\varepsilon_2, y_0) + 3(x - x_0)(y - y_0)^2 f'''_{xyy}(\varepsilon_3, y_0) + (y - y_0)^3 f'''_{yyy}(x_0, \eta)\right]$$

Demostremos que $R_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Para ello consideremos:

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= \Delta x \\ y - y_0 &= \Delta y \end{aligned}\right\} \qquad \Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Realicemos en R_2 este reemplazo y además multipliquemos y dividamos por ΔS^3:

$$R_2 = \frac{1}{3!}\left[\frac{\Delta x^3}{\Delta S^3} f'''_{xxx}(\varepsilon_1, y_0) + 3\frac{\Delta x^2 \Delta y}{\Delta S^3} f'''_{xxy}(\varepsilon_2, y_0) + 3\frac{\Delta x \Delta y^2}{\Delta S^3} f'''_{xyy}(\varepsilon_3, y_0) + \frac{\Delta y^3}{\Delta S^3} f'''_{yyy}(x_0, \eta)\right] \cdot \Delta S^3$$

Pero como $|\Delta x| < \Delta S$ y $|\Delta y| < \Delta S$ y las derivadas parciales de tercer orden son continuas, por lo tanto tienen un valor acotado, entonces el coeficiente de ΔS^3 resulta acotado en el dominio examinado; si lo designamos por "**c**", tendremos:

$R_2 = c.\Delta S^3$ en general se verifica que:

$R_n = c.\Delta S^{n+1}$ y podemos comprobar que $c.\Delta S^{n+1} \to 0$ es decir $R_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

De esta manera la **Fórmula de Taylor** para $n = 2$ también se puede expresar:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \\ & + \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(x_0,y_0)\Delta x^2 + 2 f''_{xy}(x_0,y_0)\Delta x \Delta y + f''_{yy}(x_0,y_0)\Delta y^2\right] + R_2 \end{aligned}}$$

Para cualquier valor de "*n*" la Fórmula de Taylor tiene una forma similar a ésta.

También podemos representar a la Fórmula de Taylor así:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y + \\ + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right] + R_2$$

Y tal como lo hicimos en Diferenciales de Orden Superior, también podemos expresar a la Fórmula de Taylor mediante la siguiente forma simbólica:

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\left[\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y\right]^{[i]} + R_n$$

El exponente simbólico $[i]$ indica orden de derivación para las derivadas parciales y exponente para los incrementos Δx y Δy; y teniendo en cuenta que $\left[\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0+y_0)}{\partial y}\Delta y\right]^{[0]} = f(x_0,y_0)$ y que $0! = 1$.

Haciendo $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ la Fórmula de Taylor, que en este caso recibe también el nombre de **Fórmula de Maclaurin** se escribe así:

$$f(x,y) = f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(0,0)x^2 + 2f''_{xy}(0,0)xy + f''_{yy}(0,0)y^2\right] + R_2$$

Ejemplo

Desarrollar por la Fórmula de Taylor en un entorno del punto $P(3,1)$ hasta los términos de 2º orden inclusive a la función $f(x,y) = y^x$.

$$f(x,y) \cong f(3,1) + f'_x(3,1)(x-3) + f'_y(3,1)(y-1) + \\ + \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(3,1)(x-3)^2 + 2f''_{xy}(3,1)(x-3)(y-1) + f''_{yy}(3,1)(y-1)^2\right]$$

$f(x,y) = y^x$	$f(3,1) = 1$
$f'_x(x,y) = y^x \ln y$	$f'_x(3,1) = 0$
$f'_y(x,y) = xy^{x-1}$	$f'_y(3,1) = 3$
$f''_{xx}(x,y) = y^x(\ln y)^2$	$f''_{xx}(3,1) = 0$
$f''_{xy}(x,y) = xy^{x-1}\ln y + y^x\frac{1}{y}$	$f''_{xy}(3,1) = 1$
$f''_{yy}(x,y) = x(x-1)y^{x-2}$	$f''_{yy}(3,1) = 6$

$$f(x,y) \cong 1 + 0 + 3(y-1) + \frac{1}{2}\left[0 + 2(x-3)(y-1) + 6(y-1)^2\right]$$

$$f(x,y) \cong 3y - 2 + \frac{1}{2}\left[2(x-3)(y-1) + 6(y-1)^2\right]$$

Esta expresión nos permite calcular en forma aproximada los valores de la función $f(x,y) = y^x$ en las proximidades del punto $P(3,1)$. Por ejemplo si deseamos calcular $f(2{,}9;1{,}1) = 1{,}1^{2{,}9}$ tendremos:

$$f(2{,}9;1{,}1) \cong 3{,}3 - 2 + \frac{1}{2}\left[2(-0{,}1)(0{,}1) + 6(0{,}1)^2\right] = 1{,}32 \qquad \therefore \qquad \boxed{1{,}1^{2{,}9} \cong 1{,}32}$$

Si realizamos el cálculo exacto $\boxed{1{,}1^{2{,}9} = 1{,}318745}$ vemos que el error resulta $e < 1\%$.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

Dada la función $z = f(x,y)$ podemos definir sus máximos y mínimos de la siguiente forma:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

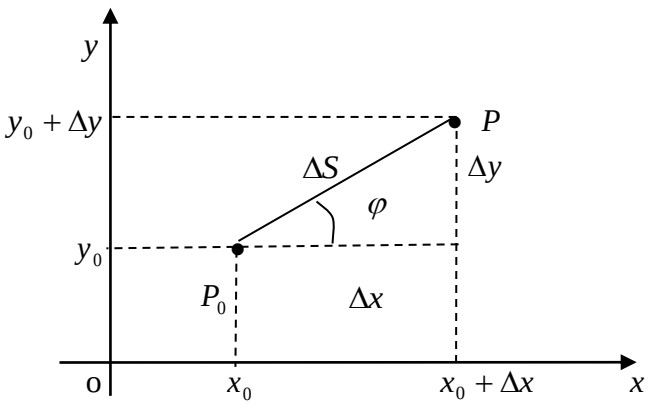
Si para todo incremento suficientemente pequeño de las variables independientes resulta $\Delta f < 0$, la función tiene un **Máximo Relativo (o Local)** en el punto $P_0(x_0, y_0)$.

Y si para todo incremento suficientemente pequeño de las variables independientes resulta $\Delta f > 0$, la función tiene un **Mínimo Relativo (o Local)** en el punto $P_0(x_0, y_0)$.

Estos Máximos y Mínimos reciben el nombre de **Extremos Relativos o Locales** de la función.

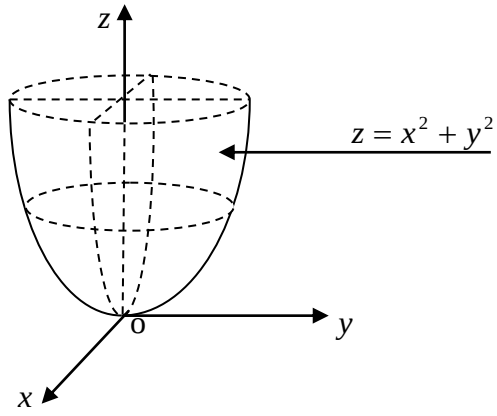
De todos lo Máximos Relativos, aquel en el que la función toma el mayor valor se denomina **Máximo absoluto.** Y de igual manera de todos lo Mínimos Relativos, aquel en el que la función toma el menor valor se denomina **Mínimo absoluto.**

De forma similar de pueden definir los Extremos de funciones con más de dos variables independientes.



Por ejemplo la función $z = x^2 + y^2$ tiene un Mínimo en el punto $P(0,0)$, pues como x^2 e y^2 son siempre positivos para $x \neq 0$ e $y \neq 0$ y además $f(0,0) = 0$ entonces:

$x^2 + y^2 > 0$ es decir $f(x,y) > f(0,0)$ para $x \neq 0$ e $y \neq 0$



Condición Necesaria para la Existencia de Extremo

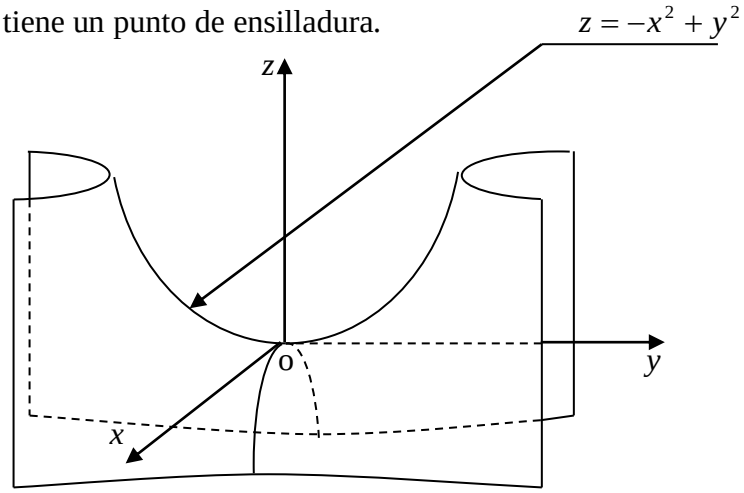
Si la función $z = f(x, y)$ *tiene un extremo en el punto* $P_0(x_0, y_0)$*, entonces sus derivadas parciales de primer orden, si existen, se anulan en este punto. Es decir* $\boxed{\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0}$

Para demostrarlo consideremos la función $g(x) = f(x, y_0)$ de una sola variable "*x*". Si por hipótesis *f* tiene un extremo relativo en (x_0, y_0) entonces *g* tiene un extremo relativo en (x_0), en este caso es $g'(x_0) = 0$, y como $g'(x_0) = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ entonces finalmente resulta: $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0$

De forma similar se puede demostrar que también se cumple que: $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$

Esta condición si bien es necesaria, no es suficiente para demostrar la existencia de extremos de la función, pues hay funciones en las cuales en algunos puntos se anulan sus derivadas parciales y sin embargo no son extremos; son los llamados **Puntos de Ensilladura o Puntos Silla.**

Así por ejemplo la función $z = -x^2 + y^2$ tiene sus derivadas parciales $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -2x$ y $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y$, podemos comprobar que éstas se anulan en el punto $P(0,0)$, y sin embargo la función **no** tiene un extremo en este punto, sino que tiene un punto de ensilladura.



Los puntos donde las derivadas parciales se anulan, se llaman **Puntos Críticos** o Puntos Estacionarios de la función. Si la función tiene algún extremo, este solo puede estar en un Punto Crítico.

Condición Suficiente para la Existencia de Extremo

Sea $z = f(x, y)$ una función continua y con derivadas parciales también continuas en un dominio que comprende al punto $P_0(x_0, y_0)$ y consideremos que éste es un Punto Crítico, es decir: $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$. La función tendrá o no un Extremo Relativo en dicho punto según se cumpla lo siguiente:

$$H(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} \right]^2$$

Si $H(x_0, y_0) > 0$ y $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0$ entonces la función tiene un MÁXIMO RELATIVO en $P_0(x_0, y_0)$

Si $H(x_0, y_0) > 0$ y $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0$ entonces la función tiene un MÍNIMO RELATIVO en $P_0(x_0, y_0)$

Si $H(x_0, y_0) < 0$ entonces la función tiene un PUNTO DE ENSILLADURA en $P_0(x_0, y_0)$

Si $H(x_0, y_0) = 0$ puede existir o no extremo, para determinarlo es necesario realizar un estudio más detallado

Nota:
Para facilitar su memorización a $H(x_0, y_0)$ se lo suele escribir en forma de determinante y recibe el nombre de **Hessiano**:

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

Demostración
La Fórmula de Taylor para $n = 2$ de la función $z = f(x, y)$ en este caso se expresa:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + \\ + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \Delta y^2 \right] + R_2$$

Por hipótesis las derivadas parciales de primer orden se anulan por ser P_0 un Punto Crítico. Entonces el incremento Δf de la función resulta:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$\Delta f = \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \Delta y^2 \right] + R_2$$

Debemos analizar el signo de Δf para todo incremento suficientemente pequeño de las variables independientes, para ello vamos a trabajar sobre la última expresión, multiplicando y dividiendo por ΔS^2 al primer término de su segundo miembro:

$$\Delta f = \frac{\Delta S^2}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{\Delta S^2} + 2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x}\frac{\Delta x.\Delta y}{\Delta S^2} + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\frac{\Delta y^2}{\Delta S^2}\right] + R_2$$

Analizando el gráfico comprobamos que:

$$\frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos\varphi \qquad \text{y} \qquad \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta S} = \mathrm{sen}\varphi$$

Reemplazando y expresando las derivadas parciales en forma resumida tendremos:

$$\boxed{\Delta f = \frac{\Delta S^2}{2!}\left(f_{xx}\cos^2\varphi + 2 f_{xy}\cos\varphi\cdot\mathrm{sen}\varphi + f_{yy}\mathrm{sen}^2\varphi\right) + R_2} \qquad \textbf{(1)}$$

Completemos el cuadrado de un binomio con los dos primeros términos dentro del paréntesis, para ello considerando $f_{xx} \neq 0$, multiplicamos y dividimos por f_{xx} dentro del corchete y luego sumamos y restamos $f_{\mathrm{xy}}^2\mathrm{sen}^2\varphi$:

$$\Delta f = \frac{\Delta S^2}{2!}\left[\frac{f_{xx}^2\cos^2\varphi + 2 f_{xx} f_{xy}\cos\varphi\cdot\mathrm{sen}\varphi + f_{xy}^2\mathrm{sen}^2\varphi + f_{xx} f_{yy}\mathrm{sen}^2\varphi - f_{xy}^2\mathrm{sen}^2\varphi}{f_{xx}}\right] + R_2$$

$$\boxed{\Delta f = \frac{\Delta S^2}{2!}\left\{\frac{\left(f_{xx}\cos\varphi + f_{xy}\mathrm{sen}\varphi\right)^2 + \left(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\right)\mathrm{sen}^2\varphi}{f_{xx}}\right\} + R_2} \qquad \textbf{(2)}$$

Si analizamos esta última expresión vemos que el signo de Δf depende del signo de:

$\left(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\right)$ y de f_{xx} del denominador

Examinemos todas las posibilidades que se pueden presentar:

1. $\boxed{\left(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\right) > 0 \qquad f_{\mathrm{xx}} < 0}$

   Entonces en el numerador de la fracción de la expresión **(2)** tendremos la suma de dos magnitudes positivas que no se anulan simultáneamente. Pues la segunda se anula cuando incrementamos en la dirección en que resulta $\varphi = 0$, pero en este caso no se anula la primera que se anula cuando incrementamos en la dirección en que resulta $\varphi = \mathrm{arctg}\left(-\frac{f_{xx}}{f_{xy}}\right)$. *(Ver aclaración de esta última afirmación en "Demostración 1" al final de este capítulo).*
   Y como $R_2 \to 0$ cuando $\Delta S \to 0$, para todo incremento ΔS suficientemente pequeño tendremos que:
   $\boxed{\Delta f < 0}$ ó $\boxed{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) < f(x_0,y_0)}$

para todos los puntos $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ suficientemente próximos al punto $f(x_0, y_0)$.

Es decir que en este caso:
La función tiene un MÁXIMO RELATIVO en el punto considerado.

2. $\boxed{\left(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\right) > 0 \qquad f_{xx} > 0}$

Razonando de forma similar que en el caso anterior, podemos determinar que ahora resulta siempre:

$\boxed{\Delta f > 0}$ ó $\boxed{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) > f(x_0, y_0)}$

para todos los puntos $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ suficientemente próximos al punto $f(x_0, y_0)$.
Es decir que en este caso:

La función tiene un MÍNIMO RELATIVO en el punto considerado.

3. $\boxed{\left(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\right) < 0 \qquad f_{xx} > 0}$

En este caso la función no tiene ni Máximo ni Mínimo pues Δf cambia de signo al incrementar en una u otra dirección. Es decir que a partir del punto P_0 la función crece cuando tomamos incremento en una dirección y decrece cuando incrementamos en otra dirección.

En efecto, si incrementamos en la dirección $\varphi = 0$ el incremento resulta:

$$\Delta f = \frac{\Delta S^2}{2!} f_{xx} + R_2 > 0 \qquad \text{La función crece.}$$

Y si incrementamos en la dirección en que resulta $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{f_{xx}}{f_{xy}}\right)$ el incremento será:

$$\Delta f = \frac{\Delta S^2}{2!}\left\{\frac{\left(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\right)\operatorname{sen}^2\varphi}{f_{xx}}\right\} + R_2 < 0 \qquad \text{La función decrece.}$$

La función tiene un PUNTO DE ENSILLADURA en el punto considerado.

4. $\boxed{\left(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\right) < 0 \qquad f_{xx} < 0}$

En este caso la función tampoco tiene extremo en el punto considerado. El estudio se realiza de modo similar al caso anterior.

5. $\boxed{\left(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\right) < 0 \qquad f_{xx} = 0}$

Por lo tanto $f_{xy} \neq 0$, en este caso analizamos el signo de Δf por intermedio de la expresión **(1)** que al ser por hipótesis $f_{xx} = 0$ resulta:

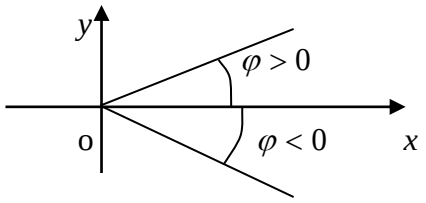
$$\Delta f = \frac{\Delta S^2}{2!}\left(2 f_{xy} \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi + f_{yy} \operatorname{sen}^2\varphi\right) + R_2$$

Sacamos factor común $\operatorname{sen}\varphi$ entro del paréntesis:

$$\Delta f = \frac{\Delta S^2}{2!} \operatorname{sen}\varphi \cdot \left(2 f_{xy} \cos\varphi + f_{yy} \operatorname{sen}\varphi\right) + R_2$$

Para valores suficientemente pequeños de φ la expresión $\left(2 f_{xy} \cos\varphi + f_{yy} \operatorname{sen}\varphi\right)$ conserva su signo, y su valor es próximo a $2 f_{xy}$ (ya que el valor de $\operatorname{sen}\varphi$ es muy pequeño y el valor de $\cos\varphi$ es próximo a 1).

En cambio el coeficiente $\operatorname{sen}\varphi$ del paréntesis cambia de signo al tomar φ mayor o menor que cero:



Tomando ΔS suficientemente pequeño para que $R_2 = c.\Delta S^3$ no influya en el resultado, el signo de Δf va a depender del signo de φ (es decir de los valores de Δx y Δy), por lo tanto en este caso la función tampoco tiene extremo.

6. $\boxed{\left(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\right) = 0 \qquad \text{así por ejemplo} \qquad f_{xx} \neq 0}$

Analizando a expresión **(2)**, ésta resulta:

$$\Delta f = \frac{\Delta S^2}{2!}\left[\frac{\left(f_{xx} \cos\varphi + f_{xy} \operatorname{sen}\varphi\right)^2}{f_{xx}}\right] + R_2$$

Cuando incrementemos en la dirección en que resulte $\varphi = arctg\left(-\frac{f_{xx}}{f_{xy}}\right)$ resultará:

$$\Delta f = R_2$$

Que es el Término complementario de la Fórmula de Taylor cuyo valor y signo desconocemos, lo que nos impide determinar si hay o no extremo, por lo tanto será necesaria una investigación especial.

Resumen

Para determinar los Extremos Relativos de la función $z = f(x, y)$ procedemos así:

1- Se determinan los puntos Críticos (Condición Necesaria)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \text{Se determinan las raíces} \quad \begin{cases} (x_1, y_1) \\ \text{“} \\ \text{“} \\ (x_n, y_n) \end{cases} \quad \text{Puntos Críticos}$$

2- Se analiza el signo del Hessiano para cada uno de los Puntos Críticos

$$H(x_i, y_i) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{cases} > 0 \text{ hay un Extremo} \\ \\ < 0 \text{ no hay extremo (hay Punto de Ensilladura)} \\ \\ = 0 \text{ nada puede asegurarse} \end{cases}$$

3- En los puntos (x_i, y_i) donde resulta $H_i > 0$ se determina el tipo de Extremo analizando el signo de: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ o $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (cuando hay Extremo ambas tienen el mismo signo)

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial x^2} \text{ o } \frac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial y^2} \begin{cases} < 0 \text{ hay un Máximo} \\ \\ > 0 \text{ hay un Mínimo} \end{cases}$$

4- Si se desea conocer la coordenada z_i del Extremo obtenido, obtenemos el valor de la función en el punto (x_i, y_i) correspondiente.

Ejemplo 1:

Determinar los Extremos Relativos de la función $z = -x^3 - \frac{3}{2}y^2 + 3xy + \frac{5}{2}$.

1- Determinamos los puntos Críticos

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -3x^2 + 3y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -3y + 3x = 0 \end{cases} \qquad \textbf{Puntos Críticos} \quad \begin{cases} P_1(0,0) \\ P_2(1,1) \end{cases}$$

2- Analizamos el signo del Hessiano en cada uno de los Puntos Críticos:

$$H(x_i, y_i) = \begin{vmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 18x - 9 \quad \begin{cases} H_1 = -9 < 0 \text{ No hay extremo en } P_1(0,0) \textbf{ (Es un punto de Ensilladura)} \\ H_2 = 9 > 0 \textbf{ Si hay Extremo en } P_2(1,1) \end{cases}$$

3- Determinamos el tipo de Extremo Relativo en el punto $P_2(1,1)$

$$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y^2} = -3 < 0$$ **Hay un MÁXIMO RELATIVO EN EL PUNTO** $\boxed{P_2(1,1)}$**.**

4- Determinamos z_2

$$z_2 = -1^3 - \frac{3}{2} \cdot 1^2 + 3.1.1 + \frac{5}{2} = 3$$

Finalmente resulta: $\boxed{M_2(1;1;3) \quad \text{MÁXIMO RELATIVO}}$

Ejemplo 2:

Determinar los Extremos Relativos de la función $z = x^3 + 3x^2 - 4xy + y^2$.

Rta.: $\boxed{M_2(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{4}{27}) \quad \text{MÍNIMO RELATIVO}}$

MÁXIMOS Y MÍNIMOS CONDICIONADOS

Consiste en determinar los extremos de una función de varias variables que no son todas independientes, sino que están relacionadas entre sí mediante ciertas condiciones adicionales.

Ejemplo:
Se debe construir un recipiente cilíndrico de chapa con tapa con una capacidad de 2 litros. ¿Qué dimensiones debe tener si se desea emplear la menor cantidad posible de material en su construcción?
La cantidad de material necesario en cm^2 es:

$$f(D,H) = \frac{\pi D^2}{2} + \pi DH \qquad (1)$$

La condición es que el recipiente tenga una capacidad de 2 litros (2000 cm^3):

$$\varphi(D,H) = \frac{\pi D^2 H}{4} - 2000 = 0 \qquad (2)$$

Debemos hallar el mínimo de la función (1) que cumpla con la condición (2). Al existir esta condición (2), entonces la función (1) es de una sola variable independiente.

Estudiaremos en principio el caso de Extremos Condicionados de una función de dos variables, relacionadas por una sola condición. Es decir hallaremos los Extremos de la función:

$$z = f(x,y) \qquad (1)$$

Estando $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ relacionadas por la condición:

$$\varphi(x,y) = 0 \qquad (2)$$

Al existir la condición (2) solo una de las variables será independiente (por ejemplo $\boldsymbol{x}$), pues la otra (por ejemplo $\boldsymbol{y}$) pasa a depender de ella por intermedio de la condición..
Veremos dos métodos para hallar Máximos y Mínimos Condicionados:

Método Práctico
Sea tener que determinar los Extremos de la función:

$$z = f(x,y) \qquad (1)$$

Que cumplan con la condición:

$$\varphi(x,y) = 0 \qquad (2)$$

Si de la condición despejamos una de las variables (por ejemplo $\boldsymbol{y}$) y se sustituye ese valor de $\boldsymbol{y}$ en la función (1), obtendremos la función:

$$z = F(x)$$

Los Extremos relativos de esta función son los Extremos de la función (1) que cumplen con la condición (2).
Si bien a primera vista este método aparenta ser de muy fácil aplicación, en realidad presenta dificultades que pueden resultar insuperables. Por un lado estamos limitados por la cantidad de variables, pues solo sabemos calcular Máximos y Mínimos Relativos de funciones de hasta dos variables independientes. Y por otro lado no siempre resulta posible explicitar una de las variables de la condición (2), y suele resultar más simple aplicar el método que veremos seguidamente.

Método del Multiplicador de Lagrange

Sea tener que determinar los Extremos de la función:

$$z = f(x, y) \qquad (1)$$

Que cumplan con la condición:

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad (2)$$

Partamos de la hipótesis que la (2) no es explicitable respecto a ninguna de sus variables, entonces procedemos así:

Vimos que al existir la condición (2) solo una da las variables es independiente (por ejemplo ***x***); es decir que la (1) es una función de una sola variable ***x***. Derivemos a la (1) como función compuesta:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

La condición necesaria para la existencia de extremo es que la derivada de esta función (1) se anule, es decir $\frac{dz}{dx} = 0$, es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (3)$$

Derivemos también a la condición (2) con respecto a ***x*** como función compuesta:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (4)$$

De ambas expresiones despejamos $\frac{dy}{dx}$ e igualamos lo obtenido:

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

que también podemos expresar:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} \qquad (5)$$

La expresión (5) se cumple para todos los puntos donde hay un posible extremo.

Igualamos la (5) al Multiplicador de Lagrange:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = -\lambda$$

y podemos obtener

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Estas expresiones nos permiten obtener una relación entre ***x*** e ***y***. Uniéndolas a la Ecuación de Condición (2) se pueden obtener los posibles extremos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

De este Sistema de Tres Ecuaciones determinamos los valores de x, y, λ que son las incógnitas; λ desempeñó un papel auxiliar y ya no es necesaria.
Las ecuaciones (6) son condición necesaria (pero no suficiente) para la existencia de extremo, por lo tanto este método no nos determina la naturaleza del Punto Crítico (si es extremo o no). Para ello hace falta realizar un análisis adicional. Solucionando problemas concretos, se logra en general determinar la naturaleza del Punto Crítico en base al carácter del mismo problema.
Tratar de llegar a la condición suficiente recurriendo a las derivadas parciales sucesivas, como lo hicimos con los Máximos y Mínimos Relativos puede resultar muy complicado.

Para facilitar la memorización de este método, observemos que las ecuaciones (6) son las derivadas parciales con respecto a x, y, λ de la función (llamada Función Auxiliar de Lagrange):

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) \qquad (7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x, y)$$

Resumen

Para determinar los posibles extremos de la función:

$$z = f(x, y) \qquad (1)$$

Que cumplan con la condición:

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad (2)$$

Se plantea la **Función Auxiliar de Lagrange**:

$$\boxed{F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda.\varphi(x, y)} \qquad (7)$$

Luego se igualan a cero sus derivadas parciales con respecto a x, y, λ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Finalmente se resuelve este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Este método puede ser aplicado en el estudio de Extremos condicionados de una función de "***n***" variables relacionadas mediante "***m***" ecuaciones de condición. Debiendo ser ***m<n***.

Sea en general calcular los Extremos de la función:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n) \qquad (1')$$

Que cumpla con las condiciones:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n) = 0 \\ \quad ,, \\ \quad ,, \\ \quad ,, \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n) = 0 \end{cases} \qquad (2')$$

Se plantea la **Función Auxiliar de Lagrange**:

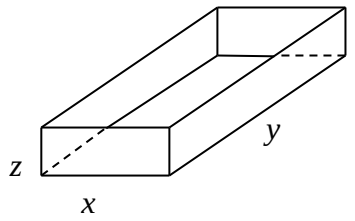
$$\boxed{F(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1, \ldots\ldots x_n) + \lambda_2\varphi_2(x_1, \ldots\ldots x_n) + \ldots\ldots + \lambda_m\varphi_m(x_1, \ldots\ldots x_n)} \quad (7')$$

Derivamos la (7') con respecto a cada una de sus variables:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \\ \quad ,, \\ \quad ,, \\ \quad ,, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \varphi_1(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = \varphi_2(x, y) = 0 \\ \quad ,, \\ \quad ,, \\ \quad ,, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_m} = \varphi_m(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (8')$$

Determinando de este sistema los valores de $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ buscados, como así también las incógnitas auxiliares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_m$.

Ejemplo 1:
Se debe construir una caja de cartón con forma de paralelepípedo rectangular sin tapa, con una capacidad de 32 cm^3. Determinar sus dimensiones de manera que la superficie total de sus caras sea mínima.



Debemos calcular los Extremos de la función:

$$f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz \qquad (1)$$

Que cumplan con la condición:

$$\varphi(x,y,z) = xyz - 32 = 0 \qquad (2)$$

Planteamos la **Función Auxiliar de Lagrange**:

$$F(x,y,z,\lambda) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - 32) \qquad (7)$$

Igualamos a cero sus derivadas parciales con respecto a x, y, z, λ:

$$\begin{cases} y + 2z + \lambda yz = 0 \\ x + 2z + \lambda xz = 0 \\ 2x + 2y + \lambda xy = 0 \\ xyz - 32 = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

No hay reglas establecidas para resolver estos sistemas, de acuerdo a las características que tenga se elige la forma que se considere en ese momento más apropiada.
Una forma puede ser despejar λ de las tres primeras ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lambda = -\dfrac{y+2z}{yz} \\ \lambda = -\dfrac{x+2z}{xz} \end{array}\right\} -\dfrac{y+2z}{yz} = -\dfrac{x+2z}{xz} \Rightarrow xyz + 2xz^2 = xyz + 2yz^2 \Rightarrow x = y \\ \left.\begin{array}{l} \lambda = -\dfrac{x+2z}{xz} \\ \lambda = -\dfrac{2x+2y}{xy} \end{array}\right\} -\dfrac{x+2z}{xz} = -\dfrac{2x+2y}{xy} \Rightarrow x^2y + 2xyz = 2x^2z + 2xyz \Rightarrow y = 2z \end{array}\right\} x = y = 2z$$

Y de la cuarta ecuación (es decir la Condición) obtenemos las dimensiones de la caja:

$$xyz - 32 = 2z.2z.z - 32 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

Ejemplo 2:

Determinar tres números positivos, tales que su producto sea 27 y su suma sea mínima.

Debemos calcular los Extremos de la función: $f(x, y, z) = x + y + z$
Que cumplan con la condición: $\varphi(x, y, z) = xyz - 27 = 0$

Rta.: Los tres números positivos son iguales a 3.

Ejemplo 3:

Dividir "**a**" en tres partes de tal manera que su producto sea máximo.

Debemos calcular los Extremos de la función: $f(x, y, z) = xyz$
Que cumplan con la condición: $\varphi(x, y, z) = x + y + z - a = 0$

Rta.: Se debe dividir a "**a**" en tres partes iguales.

Demostración 1:

Para que se anule la expresión $\left(f_{xx}\cos\varphi + f_{xy}\operatorname{sen}\varphi\right)^2$

Se debe cumplir que $f_{xx}\cos\varphi + f_{xy}\operatorname{sen}\varphi = 0$

$$f_{xy}\operatorname{sen}\varphi = -f_{xx}\cos\varphi$$

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{f_{xx}}{f_{xy}}$$

$$tg\varphi = -\frac{f_{xx}}{f_{xy}}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{f_{xx}}{f_{xy}}\right)$$

CAPÍTULO 4

FUNCIONES VECTORIALES

Y

CAMPOS VECTORIALES

FUNCIONES VECTORIALES

Recordemos el concepto de Funciones Vectoriales visto en el Capítulo nº 1.

La definición de Función Vectorial equivale a la definición de *"m"* Funciones Escalares:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ y_2 = f_2(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m = f_m(x) \end{cases} \qquad R \xrightarrow{F} R^m$$

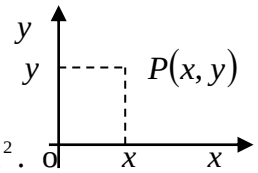
o considerando $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots, y_n)$ $\qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(x)$

Las Funciones Vectoriales son funciones a las que a una variable independiente le corresponde un conjunto de *"m"* números reales o un vector de *"m"* componentes.

Nos interesan en especial las Funciones Vectoriales cuyas imágenes son vectores de dos o tres dimensiones. Se utilizan, por ejemplo para describir curvas, movimientos de partículas, etc.

En R^2 una Función Vectorial, a cada número real, le asigna como imagen un vector de dos componentes o un par de números reales.

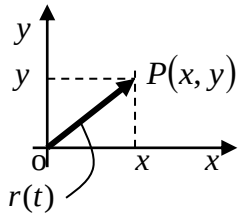
En forma paramétrica se la simboliza $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ $\qquad R \longrightarrow R^2$



A cada valor de t le corresponde un par de valores de (x, y) es decir un punto en R^2.

A t se lo denomina parámetro.

O en forma vectorial $\qquad r(t) = [f(t), g(t)] = f(t)i + g(t)j$

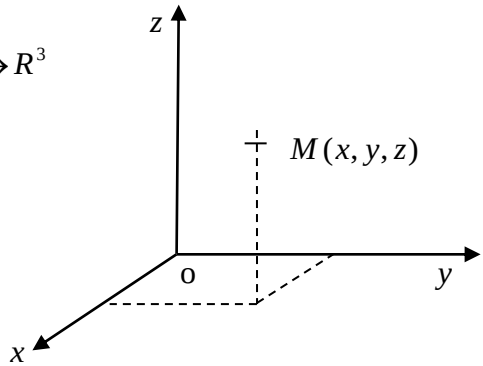


Para cada valor de t en el dominio de r existe un único vector denominado $r(t)$.

$f(t), g(t)$ son las funciones componentes del vector r.

En R^3 una Función Vectorial, a cada número real, le asigna como imagen un vector de tres componentes o una terna de números reales.

En forma paramétrica se la simboliza $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$ $\qquad R \longrightarrow R^3$

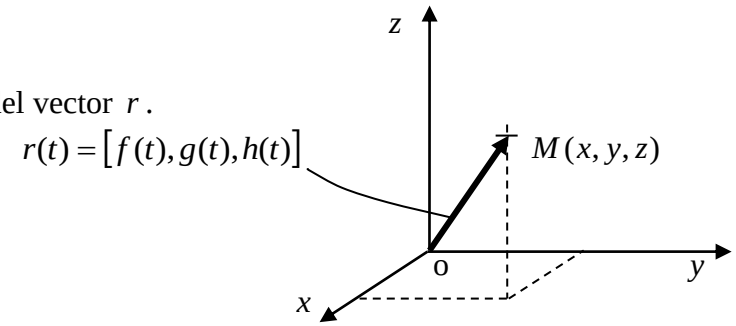


A cada valor de t le corresponde una terna de valores de (x, y, z) es decir un punto en R^3.

O en forma vectorial $\qquad r(t) = [f(t), g(t), h(t)] = f(t)i + g(t)j + h(t)k$

Para cada valor de t en el dominio de r existe un único vector denominado $r(t)$.

$f(t), g(t)$ y $h(t)$ son las funciones componentes del vector r.



En general utilizamos la letra t como variable independiente pues el tiempo es la variable independiente en la mayoría de las aplicaciones de las Funciones Vectoriales.

A lo estudiado en Funciones Escalares y en Funciones de Varias Variables (Campos Escalares), lo extenderemos ahora a Funciones Vectoriales.

A continuación definiremos Dominio, Límite, Continuidad, Derivadas e Integrales de Funciones Vectoriales y si bien trabajaremos en R^3 todo es igualmente válido para R^2.

Dominio

Dada la Función Vectorial $r(t) = [f(t), g(t), h(t)]$ su Dominio es el conjunto de valores de t para los que la Función está definida. Este dominio es la intersección de los Dominios de las Funciones Escalares componentes $f(t), g(t)$ y $h(t)$.

Ejemplo: $r(t) = [\ln t, \sqrt{1-t}, 3t] = \ln t\, i + \sqrt{1-t}\; j + 3t\, k$

Las funciones componentes son $f(t) = \ln t$, $g(t) = \sqrt{1-t}$ y $h(t) = 3t$.

Estas funciones están definidas cuando $t > 0$ y $1 - t \geq 0$.

Entonces el dominio de r es el intervalo $0 < t \leq 1$.

Límite

El Límite de una Función Vectorial $r(t)$ se obtiene tomando los Límites de sus Funciones Escalares componentes.

Dada la función $r(t) = [f(t), g(t), h(t)]$ y sea t_0 un punto de acumulación de su dominio, tendremos:

$$\lim_{t \to t_0} r(t) = \left[\lim_{t \to t_0} f(t), \lim_{t \to t_0} g(t), \lim_{t \to t_0} h(t) \right]$$

Siempre que los límites de las funciones componentes existan.

Las propiedades de límites de Funciones Vectoriales son las mismas propiedades de límites de las Funciones Escalares.

Ejemplo: Calculemos el $\lim_{t \to 0} r(t)$ siendo $r(t) = [\ln(e+t), t^2, (2+t)^2]$

$$\lim_{t \to 0} r(t) = [\lim_{t \to 0} \ln(e+t), \lim_{t \to 0} t^2, \lim_{t \to 0} (2+t)^2]$$

$$\lim_{t \to 0} r(t) = [1, 0, 4] = i + 4k$$

Continuidad

Una Función Vectorial $r(t)$ es continua en $t = t_0$ si $\boxed{\lim_{t \to t_0} r(t) = r(t_0)}$

Es decir si $\lim_{t \to t_0} r(t) = \left[\lim_{t \to t_0} f(t), \lim_{t \to t_0} g(t), \lim_{t \to t_0} h(t)\right] = \left[f(t_0), g(t_0), h(t_0)\right]$.

Es decir que $r(t)$ es continua en $t = t_0$ si sus funciones componentes son continuas en $t = t_0$.

Curvas

Veamos la relación existente entre Funciones Vectoriales y Curvas.

Cualquier Función Vectorial $r(t)$ define una curva que se forma por la punta del vector en movimiento.

Curvas Planas

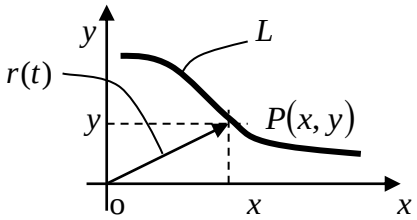
Hemos visto que las curvas planas o curvas en R^2 pueden ser representadas como imagen de las Funciones Escalares $y = f(x)$ o $x = g(y)$.

Pero también se puede representar una curva plana como imagen de una Función Vectorial.

Dada una Función Vectorial $r(t) = \left[f(t), g(t)\right] = f(t)i + g(t)j$ o en su forma paramétrica $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

siendo $f(t)$ y $g(t)$ funciones continuas en un intervalo $t_1 \le t \ge t_2$.

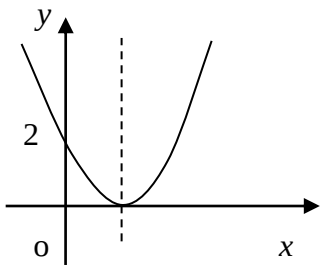
A cada valor de t le corresponde un par de valores de (x, y) es decir un punto en R^2. El conjunto de todos los pares de valores de (x, y) definen una curva L en el plano.



Ejemplo: Analicemos la curva definida por la Función Vectorial $r(t) = [t, (t^2 + 2)] = t\,i + (t^2 + 2)\,j$

O en forma paramétrica: $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 + 2 \end{cases}$

Es la parábola indicada en el gráfico.



Curvas Alabeadas

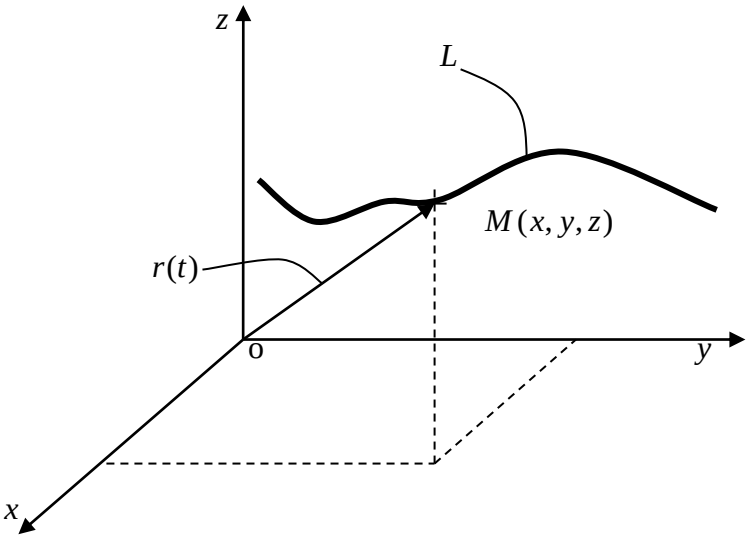
Las curvas alabeadas o curvas en R^3 pueden ser representadas como imagen de una Función Vectorial.

En efecto, dada la función vectorial $r(t) = \left[f(t), g(t), h(t)\right] = f(t)i + g(t)j + h(t)k$

o en su forma paramétrica $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$

siendo $f(t), g(t)$ y $h(t)$ funciones continuas en un intervalo $t_1 \le t \ge t_2$.

A cada valor de t le corresponde una terna de valores de (x, y, z) es decir un punto en R^3. El conjunto de todas las ternas de valores de (x, y, z) definen una curva L alabeada.



Ejemplo: Describamos la curva definida por la Función Vectorial

$$r(t) = [t+5, 3t+1, 2t+3] = (t+5)i + (3t+1)j + (2t+3)k$$

O en forma paramétrica: $\begin{cases} x = t+5 \\ y = 3t+1 \\ z = 2t+3 \end{cases}$

Esta es la ecuación de una recta en el espacio. Que también podemos expresar:

$$\frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$$

Derivadas

Definimos derivada de una Función Vectorial $r(t)$, de la misma manera que lo hicimos con las Funciones Escalares.

Dada la Función Vectorial $r(t) = [f(t), g(t), h(t)] = f(t)i + g(t)j + h(t)k$

$$\frac{dr}{dt} = r'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \qquad \text{si el límite existe.}$$

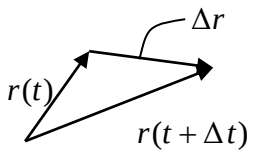
Y aplicando la definición de derivada a las Funciones Escalares componentes del vector tendremos:

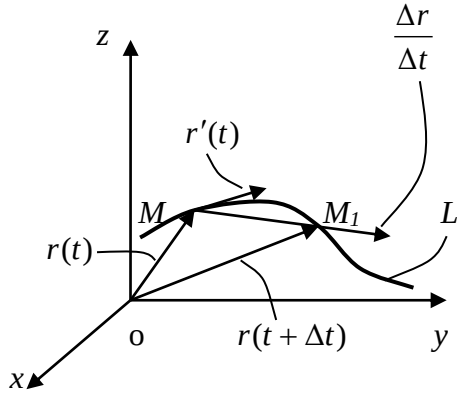
$$\boxed{\frac{dr}{dt} = \left[\frac{df}{dt}, \frac{dg}{dt}, \frac{dh}{dt}\right] = \frac{df}{dt}i + \frac{dg}{dt}j + \frac{dh}{dt}k}$$

Es decir que la derivada de una Función Vectorial se obtiene derivando cada una de sus Funciones Escalares componentes.

Y su módulo es: $\left|\frac{dr}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dh}{dt}\right)^2}$

Realicemos un análisis gráfico de esta derivada:





Si $\Delta t > 0$ el vector $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ es paralelo al vector Δr. Al tender $\Delta t \to 0$ el punto M_1 se acerca al punto M y este vector se acerca a un vector que está en la recta tangente a la curva en el punto M. Entonces el vector $r'(t)$ es un vector tangente a la curva definida por $r(t)$ en el punto M, siempre que $r'(t)$ exista y que sea distinta de cero.

Las propiedades de derivación de las Funciones Vectoriales son las mismas que las de las Funciones Escalares.

Ejemplo: Calculemos la derivada $r(t) = [t^2 - 3, \text{sen}4t, 2t] = (t^2 - 3)i + \text{sen}4t\ j + 2t\ k$

$$r'(t) = [2t, 4\cos 4t, 2] = 2t\ i + 4\cos 4t\ j + 2\ k$$

Derivadas Sucesivas de Funciones Vectoriales

Se obtienen calculando las Derivadas Sucesivas de las Funciones Escalares componentes respectivas. Calculemos la Derivada de Segundo Orden de la Función Vectorial del ejemplo anterior:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = r''(t) = [2, -16\text{sen}4t, 0] = 2\ i - 16\text{sen}4t\ j$$

Si el parámetro t es el tiempo, entonces:

$\frac{dr}{dt} = v$ es el vector velocidad del extremo del vector $r(t)$. Y

$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = w$ es el vector aceleración de dicho extremo.

Integral de una Función Vectorial

Se obtiene integrando cada una de sus Funciones Escalares componentes. Si éstas son integrables, entonces la Función Vectorial también es integrable.

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} r(t)dt = \left[\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt, \int_{t_1}^{t_2} g(t)dt, \int_{t_1}^{t_2} h(t)dt\right]}$$

Ejemplo: Dada $r(t) = [t^2, (1-t), e^t]$ calcular $\int_0^1 r(t)dt$

$$\int_0^1 r(t)dt = \left[\int_0^1 t^2 dt, \int_0^1 (1-t)dt, \int_0^1 e^t dt\right] = \left[\left|\frac{t^3}{3}\right|_0^1, \left|t - \frac{t^2}{2}\right|_0^1, \left|e^t\right|_0^1\right] = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, (e-1)\right]$$

CAMPOS VECTORIALES

Recordemos que los Campos Vectoriales son funciones a las que a un conjunto de *"n"* variables independientes le corresponden como imagen un conjunto de *"m"* valores (es decir un vector).

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) \end{cases} \qquad R^n \xrightarrow{F} R^m$$

También los podemos expresar usando notación matricial:

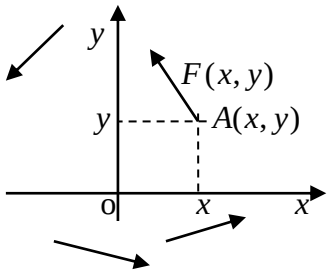
$$(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_m) = [\, f_1(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n),\ f_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n), \ldots\ldots\ldots,\ f_m(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)]$$

O si consideramos $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n)$ y $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots, y_n)$ las podemos indicar en forma más resumida:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}\,(\,\boldsymbol{x}\,)$$

$f_1, f_2, \ldots\ldots\ldots, f_m$ son las funciones componente del Campo Vectorial.

Estudiaremos en particular los Campos Vectoriales en R^2 o R^3.



Sea D una región plana R^2. **Un campo vectorial** en R^2 es una función F que asigna a cada punto $A(x, y)$ en D un vector bidimensional $F(x, y)$.

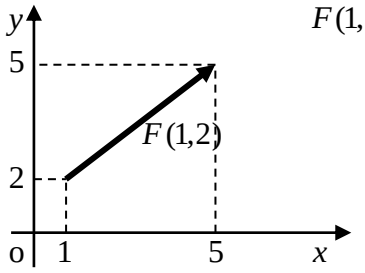
$$F(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)\,j \qquad R^2 \longrightarrow R^2$$

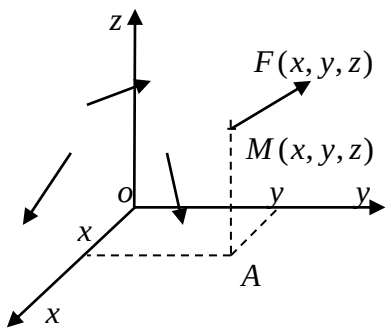
$$F(x, y) = [P(x, y), Q(x, y)]$$

<u>Ejemplo</u>:

Sea el Campo Vectorial $\quad F(x, y) = 2xy\,i + (x^3 + y)\,j = [2xy, x^3 + y]$

$$F(1,2) = 4\,i + 3\,j = [4,3]$$





Y en tres dimensiones podemos definir:

Sea E un subconjunto de R^3. **Un Campo Vectorial** en R^3 es una función F que asigna a cada punto $M(x, y, z)$ en E un vector de tres componentes $F(x, y, z)$.

$$F(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)\,j + R(x, y, z)k$$

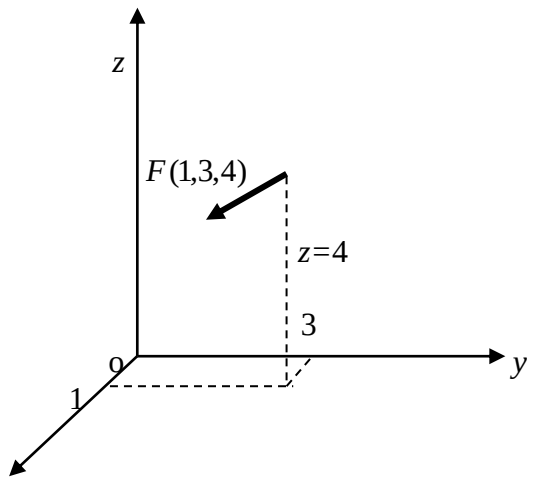
$$F(x, y, z) = [P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)]$$

$$R^3 \longrightarrow R^3$$

Ejemplo:

Sea el Campo Vectorial $F(x, y, z) = (y - x)\,i + (x + y - z)\,j + (z - x^2 y)k = [y - x, x + y - z, z - x^2 y]$

$$F(1,3,4) = 2\,i + k = [2,0,1]$$



Derivada de un Campo Vectorial

Dado el Campo Vectorial:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) \end{cases}$$

Tenemos *m* funciones de *n* variables independientes cada una, entonces podemos obtener $m \times n$ derivadas parciales, con las que se forma una matriz llamada Matriz de las Derivas Parciales o Matriz Jacobiana:

$$DF = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{grad } f_1 \\ \text{grad } f_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{grad } f_m \end{bmatrix}$$

También se la indica $J\left(\frac{f_1, f_2, \ldots\ldots\ldots, f_m}{x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n}\right) = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots\ldots\ldots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n)}$

Las filas de esta matriz son los vectores gradientes de las funciones componentes del Campo Vectorial.

En el caso de ser $m = n$ la matriz es cuadrada y el determinante de dicha matriz es el Determinante Jacobiano o Determinante Funcional.

Ejemplo 1:

Sea el Campo Vectorial en R^2 $\qquad F(x, y) = [x^3 - y, (x + y)^2]$

La Matriz Jacobiana correspondiente es: $\qquad DF = \begin{bmatrix} 3x^2 & -1 \\ 2x + 2y & 2x + 2y \end{bmatrix}$

Ejemplo 2:

Sea el Campo Vectorial en R^3 $\qquad F(x, y, z) = [2xy, xyz, yz^3]$

La Matriz Jacobiana es: $\qquad DF = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ yz & xz & xy \\ 0 & z^3 & 3yz^2 \end{bmatrix}$

Matriz Jacobiana de un Campo Escalar

Dado el Campo Escalar $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

Su Matriz Jacobiana es $$Df = \left[\frac{\partial f}{x_1}, \frac{\partial f}{x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$

Matriz Jacobiana de una Función Vectorial

Dada la Función Vectorial $\begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ y_2 = f_2(x) \\ ..... \\ ..... \\ ..... \\ y_m = f_m(x) \end{cases}$ o $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(x)$

Su Matriz Jacobiana es $$DF = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx} \\ \frac{df_2}{dx} \\ ..... \\ ..... \\ \frac{df_m}{dx} \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO 5

INTEGRALES MÚLTIPLES

INTEGRALES MÚLTIPLES

El concepto de Integral Definida puede ser generalizado a las Integrales Múltiples.
Así como las Integrales Definidas permiten calcular áreas, veremos que por medio de la Integrales Múltiples podemos obtener volúmenes, centros de gravedad, masas, momentos de inercia, etc..
Antes de comenzar recordemos que en Análisis Matemático I se estudió el cálculo de volumen de un cuerpo mediante la Integral definida:

Cálculo de volumen con Integrales Definidas

$$\boxed{V = \int_a^b F(x)dx} \qquad (1)$$

Donde $F(x)$ es el área de una sección transversal del cuerpo, obtenida mediante cortes efectuados en el cuerpo en dirección perpendicular al eje "x".

Recordemos su demostración

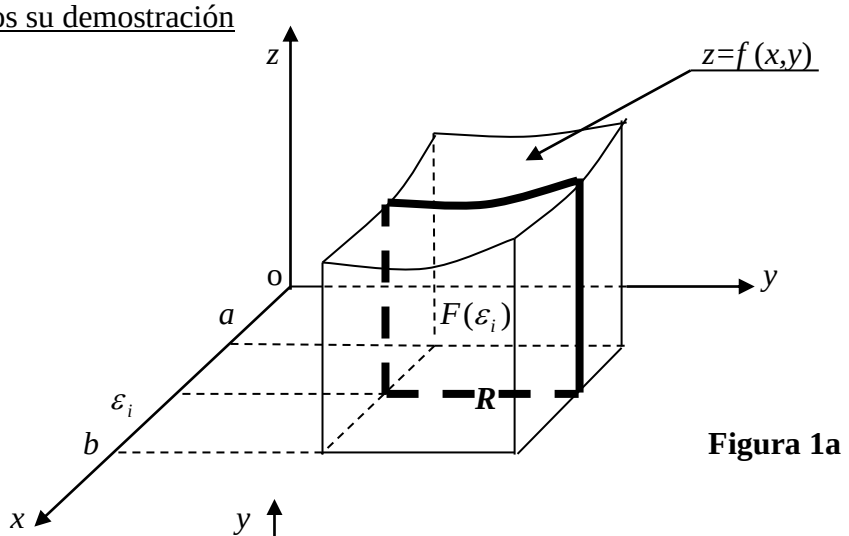


Figura 1a

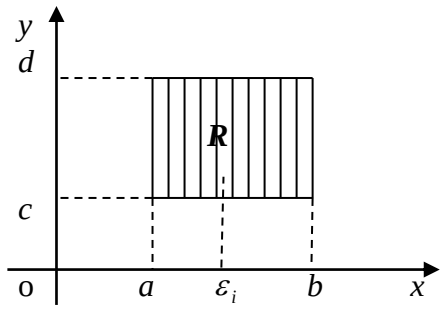
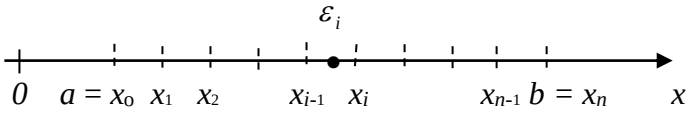


Figura 1b

Calculemos el volumen del cuerpo comprendido entre la función $z = f(x, y)$ y el rectángulo R de la Figura 1. Dividimos al intervalo $[a,b]$ en "n" partes por los puntos $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n = b$ y cortamos por estos puntos al cuerpo en rebanadas perpendiculares al eje "x".



Sea ε_i un punto intermedio entre los puntos x_i y x_{i-1}, es decir $x_{i-1} \le \varepsilon_i \le x_i$, el área de la rebanada en ese punto es $F(\varepsilon_i)$, y el volumen de la rebanada es aproximadamente:

$$V_i \cong F(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Siendo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ el espesor de la rebanada. Y el volumen total del cuerpo es aproximadamente:

$$V \cong \sum_{i=1}^{n} F(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

El valor exacto del volumen se obtiene tomando límite para $n \to \infty$ es decir para cuando $\text{máx}\Delta x \to 0$:

$$V = \lim_{\text{máx}\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)dx$$

Siendo "$\text{máx}\Delta x$" la longitud del subintervalo más largo de la subdivisión.

INTEGRALES DOBLES EN DOMINIOS RECTANGULARES

Consideremos la función $z = f(x, y)$ definida en el dominio rectangular $R = [a,b] \times [c,d]$ de la Figura 2a

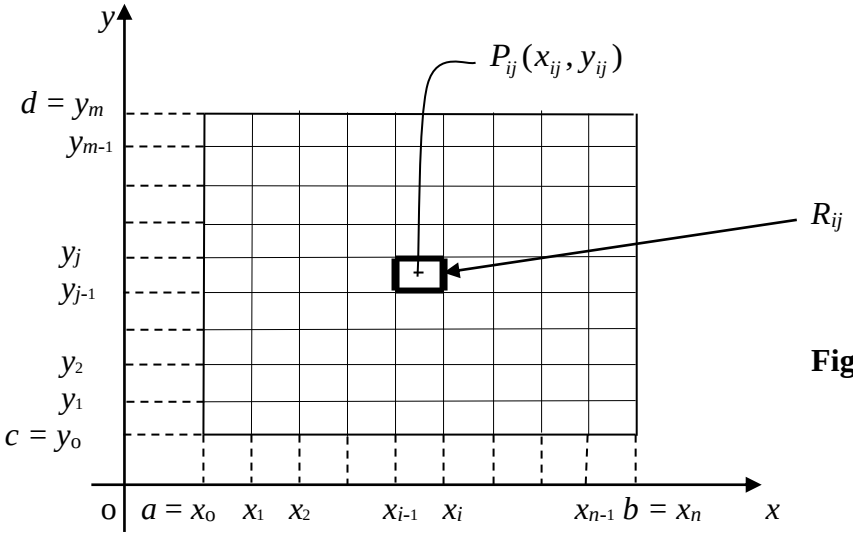


Figura 2a

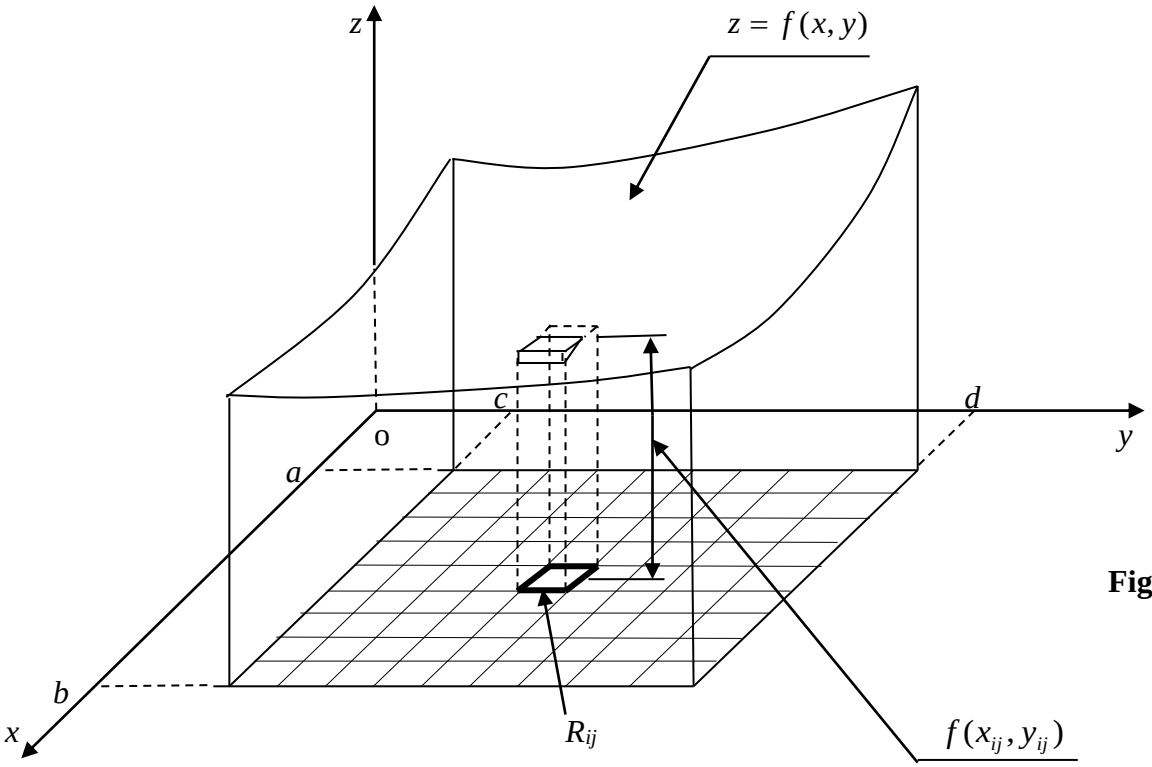


Figura 2b

Dividimos al intervalo $[a,b]$ en "n" partes por los puntos $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n = b$
y al intervalo $[c,d]$ en "m" partes por los puntos $y_0 = c, y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_m = d$
Consideramos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$
El área del rectángulo R_{ij} será: $\Delta A_{ij} = \Delta x_i . \Delta y_j$
Elijamos un punto $P_{ij}(x_{ij}, y_{ij})$ interior a este rectángulo R_{ij} y formemos la siguiente suma (**Suma Doble de Riemann**):

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A_{ij} \qquad (2)$$

Cada término de esta suma es el volumen de un sólido de base ΔA_{ij} y altura $f(x_{ij}, y_{ij})$ y el valor de esta suma es el volumen de un cuerpo.

Definamos como "$\text{máx}\Delta A$" al área del mayor de todos los rectángulos de la subdivisión de R.
Es decir que si R_{ij} es el rectángulo de mayor área entonces $\text{máx}\Delta A = \Delta x_i . \Delta y_j$.

El límite de la sumatoria (2) para cuando $\begin{cases} n \to \infty \\ m \to \infty \end{cases}$ es decir para cuando $\text{máx}\Delta A \to 0$ es la Integral Doble de la función $f(x,y)$ en el Rectángulo R:

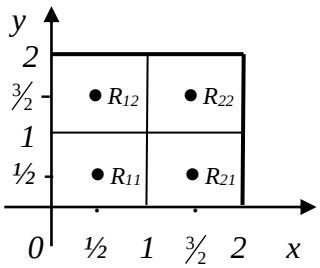
$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{\text{máx}\Delta A \to 0} \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A_{ij} \qquad (3)$$

Si este límite existe decimos que la función $f(x,y)$ es **integrable**.
R es el dominio de integración. Teniendo en cuenta que $\Delta A_{ij} = \Delta x_i . \Delta y_j$ la Integral Doble también se expresa:

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dxdy \qquad (4)$$

Si la función $f(x,y)$ es continua y además $f(x,y) \geq 0$ en todo el rectángulo R, esta integral es igual al volumen del cuerpo comprendido entre la superficie $z = f(x,y)$ y el rectángulo R.

<u>Ejemplo 1</u>:
Encontremos el valor aproximado de la integral $\iint_R (x^2 + y^2)dxdy$, siendo $R = \{(x,y) / 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 2\}$, calculamos la doble suma de Riemann tomando cuatro subrectángulos y considerando a los puntos $P_{ij}(x_{ij}, y_{ij})$ en el centro de cada rectángulo.



$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A_{ij} = f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\Delta A_{11} + f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2})\Delta A_{12} + f(\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2})\Delta A_{21} + f(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2})\Delta A_{22}$$

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A_{ij} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{5}{2}\cdot 1 + \frac{5}{2}\cdot 1 + \frac{9}{2}\cdot 1 = 10$$

Es decir que:

$$\iint_R (x^2 + y^2)dxdy \cong 10$$

Si en lugar de 4 subrectángulos tomamos solo1 el resultado que obtendríamos seria 8 y si tomamos 16 el resultado obtenido seria 10,5.

Como podemos comprobar, calcular las Integrales Dobles aplicando la definición; es decir subdividiendo el dominio y sumar no es tarea sencilla aún en las integrales más simples. Veamos una forma más práctica de resolver las Integrales Dobles.

CÁLCULO DE LAS INTEGRALES DOBLES

Demostraremos que las Integrales Dobles se pueden resolver mediante las llamadas Integrales Iteradas.

Integrales Iteradas (ó Reiteradas ó Sucesivas)

La siguiente expresión recibe el nombre de Integral Iterada extendida en el recinto rectangular $R = [a,b]\times[c,d]$ de la Figura 1b:

$$I_R = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$$

Esta expresión indica que primero se resuelve la integral entre corchetes, integrando con respecto a "*y*" (entre *c* y *d*) y luego la otra integral, integrando con respecto a "*x*" (entre *a* y *b*).
Al resolver la integral entre corchetes se integra con respecto a "*y*" que varía entre $c \le y \le d$, considerando a "*x*" como constante, es decir que se realiza una **integración parcial respecto a "*y*"** y el resultado es una función de "*x*":

$$\int_c^d f(x,y)dy = F(x)$$

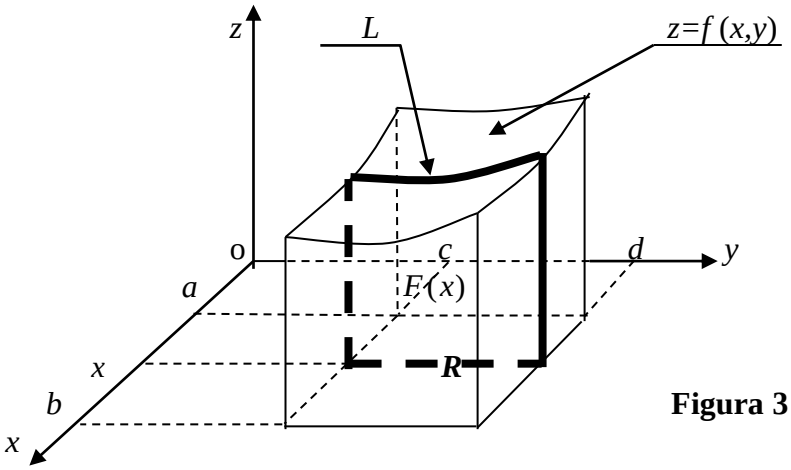


Figura 3

En la figura 3 podemos observar que $F(x)$ es el área de la figura bajo la curva L, cuya ecuación es $z = f(x,y)$. Por lo tanto resulta:

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx = \int_a^b F(x)dx$$

y por lo visto en el inicio del presente capítulo en Cálculo de Volumen con Integrales Definidas, esta Integral Definida nos calcula el volumen del cuerpo definido entre la función $z = f(x,y)$ y el recinto rectangular *R*.

De manera similar también podríamos haber planteado la Integral Iterada:

$$I_R = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy$$

Ésta establece que primero se resuelve la integral entre corchetes, integrando con respecto a "*x*" entre *a* y *b* (considerando a "y" como constante) y luego la otra integral, integrando con respecto a "*y*".
Si la función a integral es continua en el Dominio de Integración, el resultado es independiente del orden de integración.

Cálculo de las Integrales Dobles

Consideremos que $z = f(x,y)$ es una función integrable en el rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$.
La Integral Doble se resuelve expresándola como Integral Iterada:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx}$$

Hemos planteado la definición de Integral Doble extendida en el recinto *R* como el volumen del cuerpo definido entre la función $z = f(x,y)$ y dicho recinto *R* $[\text{cuando } f(x,y) \geq 0]$; y hemos demostrado que la Integral Iterada del segundo miembro nos da también ese volumen. Por lo tanto es válido resolver de esta manera las Integrales Dobles.
Para simplificar la expresión, se eliminan los corchetes y la integral se expresa así:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy}$$

Primero se resuelve la integral de la derecha (integrando con respecto a "*y*") y luego la de la izquierda (integrando con respecto a "*x*").
También se puede resolver la Integral Doble, invirtiendo el orden de integración:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy} \qquad \text{ó}$$

$$\boxed{\iint_R f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx}$$

Primero se resuelve la integral de la derecha (integrando con respecto a "*x*") y luego la de la izquierda (integrando con respecto a "*y*").

Aunque la demostración se realizó considerando $f(x,y) \geq 0$, es igualmente válido para cuando $f(x,y) < 0$, solo que en este caso la Integral Doble correspondiente no nos representa un volumen.

Cuando la función $z = f(x,y)$ toma valores tanto positivos como negativos en el Dominio de Integración, la Integral es una diferencia entre volúmenes ($V_a - V_d$), siendo V_a el volumen que está **arriba** de *R* y debajo de $z = f(x,y)$, y V_d el que está **debajo** de *R* y arriba de $z = f(x,y)$.

Ejemplo 2:

Resolvamos la misma Integral Doble del ejemplo anterior $\iint_R (x^2+y^2)dxdy$, siendo $R=\{(x,y)/0\le x\le 2 \wedge 0\le y\le 2\}$ por medio de las integrales sucesivas.

$$\iint_R (x^2+y^2)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^2 (x^2+y^2)dy=\int_0^2 dx\left|x^2y+\frac{y^3}{3}\right|_0^2=\int_0^2\left[\left(x^2.2+\frac{2^3}{3}\right)-(0+0)\right]dx$$

$$=\int_0^2\left(2x^2+\frac{8}{3}\right)dx=\left|\frac{2x^3}{3}+\frac{8x}{3}\right|_0^2=\left(\frac{16}{3}+\frac{16}{3}\right)-(0+0)=\frac{32}{3}$$

$$\boxed{\iint_R (x^2+y^2)dxdy=\frac{32}{3}}$$

Si comparamos este resultado $\iint_R (x^2+y^2)dxdy=\frac{32}{3}\cong 10{,}66....$, con los obtenidos en el ejemplo anterior podemos comprobar que nos acercamos cada vez más al valor exacto de la Integral Doble cuando tomamos una cantidad mayor de subrectángulos.

En este ejemplo la función es $f(x,y)=x^2+y^2\ge 0$ en todo el rectángulo, por lo tanto la Integral Doble nos representa el volumen del cuerpo comprendido entre el paraboloide $z=x^2+y^2$ y el rectángulo $R=\{(x,y)/0\le x\le 2 \wedge 0\le y\le 2\}$

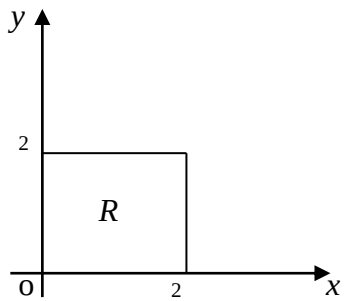


Figura 4a

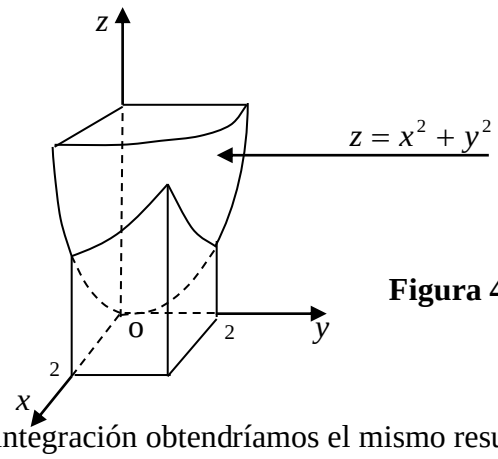


Figura 4b

Si resolviéramos la integral pero cambiando el orden de integración obtendríamos el mismo resultado:

$$\iint_R (x^2+y^2)dxdy=\int_0^2 dy\int_0^2 (x^2+y^2)dx=\frac{32}{3}$$

Ejemplo 3:

Resolvamos Integral Doble $\iint_R (y-6x)dxdy$, siendo $R=\{(x,y)/1\le x\le 3 \wedge 0\le y\le 4\}$

$$\iint_R (y-6x)dxdy=\int_0^4 dy\int_1^3 (y-6x)dx=\int_0^4 dy\left|xy-3x^2\right|_1^3=\int_0^4[(3y-27)-(y-3)]dy$$

$$=\int_0^4(2y-24)dy=\left|y^2-24y\right|_0^4=(16-96)=-80$$

El resultado negativo de la integral se debe a que la función integrada es negativa en el Dominio *R*, por lo tanto la integral no representa un volumen.

Veamos ahora como resolver Integrales Dobles en Dominios que no son rectangulares, sino que tienen una forma más general.

INTEGRALES DOBLES EN DOMINIOS GENERALES

Es común que debamos integrar no solo sobre dominios que son rectangulares, sino también sobre otros dominios *D* que tienen una forma más general.
Utilizaremos lo aprendido para resolver este tipo de Integrales Dobles.
Sea tener que resolver la Integral Doble de la función $f(x, y)$ extendida sobre el dominio *D* de la Figura 5, tomamos un rectángulo *R* que contenga a este dominio y consideramos definida en este rectángulo la función $g(x, y)$ tal que:

$g(x, y) = f(x, y)$ dentro del dominio *D*

$g(x, y) = 0$ dentro del rectángulo *R*, pero fuera del dominio *D*

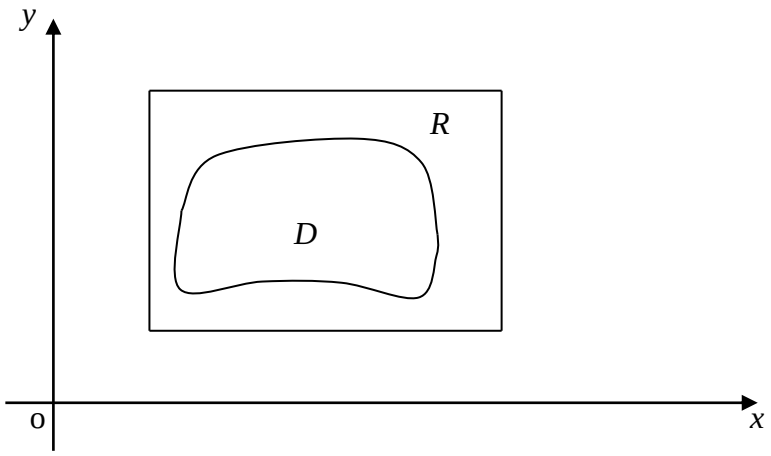


Figura 5

Dado que $g(x, y) = 0$ fuera del dominio *D* podemos plantear la siguiente igualdad:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_R g(x, y)dxdy$$

Si se cumple que $f(x, y) \geq 0$ en todo el dominio *D* entonces esta integral nos da el volumen del cuerpo definido entre la superficie $z = f(x, y)$ y el dominio *D*.

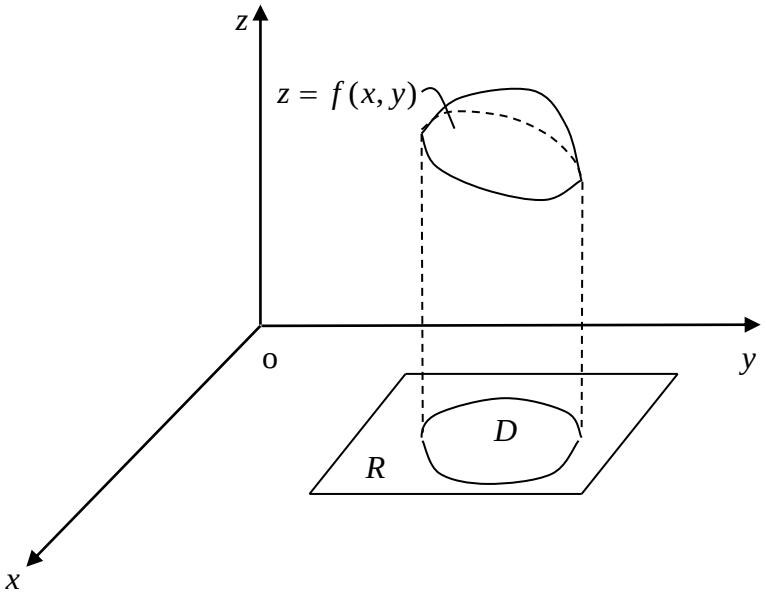


Figura 6

Supongamos un dominio *D* como el de la figura:

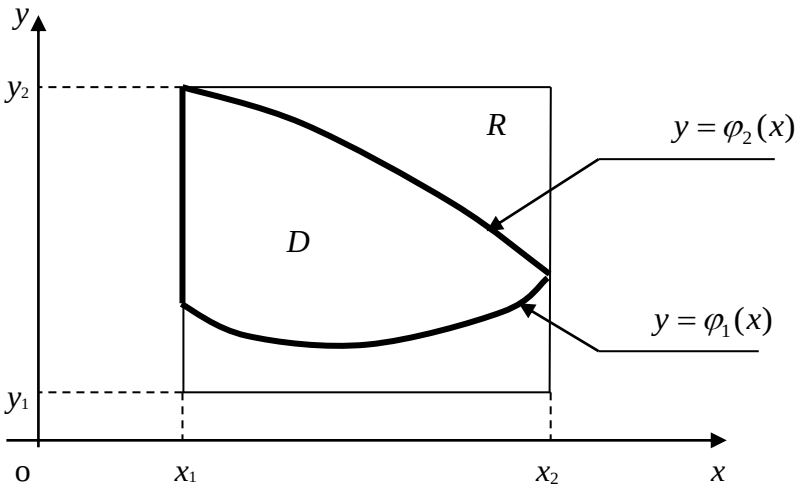


Figura 7

La Integral Dobles extendida en el rectángulo R se resuelve:

$$\iint_R g(x,y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} g(x,y)dy$$

Pero fuera del dominio *D* es decir para $y < \varphi_1(x)$ y para $y > \varphi_2(x)$ la función es $g(x,y) = 0$, y dentro del dominio es $g(x,y) = f(x,y)$ por lo tanto:

$$\iint_R g(x,y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} g(x,y)dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

Y entonces si la función $f(x,y)$ es continua en el dominio *D* la Integral Doble resulta:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy}$$

Ahora si el Dominio resulta de la forma indicada en el siguiente gráfico, razonando de la misma manera podremos deducir que la integral se resuelve así:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx}$$

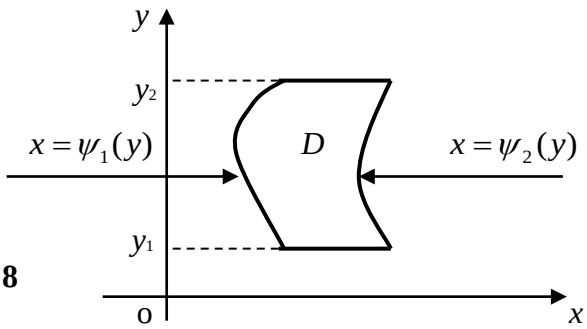


Figura 8

Si la función $f(x,y)$ es continua en el dominio de integración, cualquiera sea el orden de integración obtendremos el mismo resultado.

Ejemplo 4:
Calcular $\iint_D (2x+3y)dxdy$ siendo D la figura limitada por la recta $y=x$ y la parábola $y=x^2$

Para poder determinar el orden de integración y los respectivos límites es imprescindible dibujar el dominio de integración.

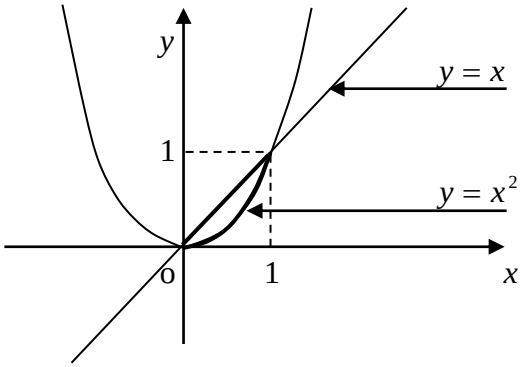


Figura 9

$$\iint_D (2x+3y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (2x+3y)dy = \int_0^1 dx \left| 2xy + \frac{3y^2}{2} \right|_{x^2}^{x} = \int_0^1 \left[\left(2x^2 + \frac{3x^2}{2} \right) - \left(2x^3 + \frac{3x^4}{2} \right) \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{7x^2}{2} - 2x^3 - \frac{3x^4}{2} \right) dx = \left| \frac{7x^3}{6} - \frac{2x^4}{4} - \frac{3x^5}{10} \right|_0^1 = \frac{7}{6} - \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{35-15-9}{30} = \frac{11}{30}$$

$$\boxed{\iint_D (2x+3y)dxdy = \frac{11}{30}}$$

También podríamos haber tomado el otro orden de integración obteniendo el mismo resultado (aunque el desarrollo resulta un poco más complicado):

$$\iint_D (2x+3y)dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} (2x+3y)dx = \frac{11}{30}$$

Propiedades de las Integrales Dobles

1- La Integral Doble de la suma de dos funciones, extendida en un dominio *D*, es igual a la suma de las Integrales Dobles extendidas en dicho dominio de cada una de las dos funciones.

$$\iint_D [f_1(x,y) + f_2(x,y)]dxdy = \iint_D f_1(x,y)dxdy + \iint_D f_2(x,y)dxdy$$

2- El factor constante se puede extraer fuera del signo de Integral Doble.

$$\iint_D c.f(x,y)dxdy = c.\iint_D f(x,y)dxdy \qquad c = \text{constante}$$

3- Si el dominio *D* está dividido en dos dominios parciales D_1 y D_2, sin poseer puntos interiores comunes y $f(x,y)$ es continua en todos los puntos del dominio *D* entonces:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

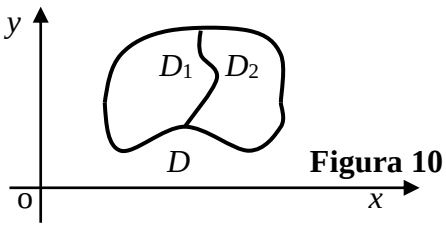


Figura 10

Esta propiedad es válida también para un mayor número de divisiones del dominio.

4- Si $f_1(x,y) \geq f_2(x,y)$ en todos los puntos del dominio *D*, tendremos que:

$$\iint_D f_1(x,y)dxdy \geq \iint_D f_2(x,y)dxdy$$

5- Si $f(x,y)=1$ en todo el dominio *D*, entonces la Integral Doble de la función $f(x,y)$ extendida en el dominio D nos da el área de dicho dominio.

$A_D = \iint_D 1dxdy$ siendo A_D el Área del dominio *D* $\boxed{A_D = \iint_D dxdy}$

Demostración

Demostremos esta propiedad. Sea *D* el dominio indicado en la figura, calculemos la Integral Doble enunciada:

$$\iint_D 1dxdy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} 1.dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \left| y \right|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\right].dx$$

Recordemos que esta última es la Integral Definida, estudiada en Análisis Matemático I, que nos permite calcular el área de la figura; con lo que queda demostrada la propiedad.

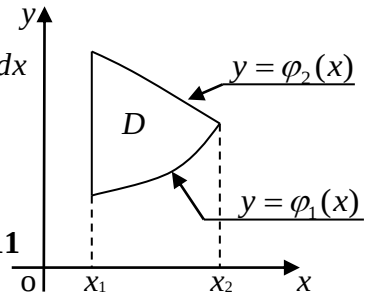


Figura 11

6- Si C_1 y C_2 son dos constantes tal que $C_1 \leq f(x,y) \leq C_2$ en todo el dominio *D*, entonces se cumple que:

$C_1.A_D \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq C_2.A_D$ siendo A_D el Área del dominio *D*

Ejemplo 5:

Calcular el área de la figura indicada en el gráfico siguiente:

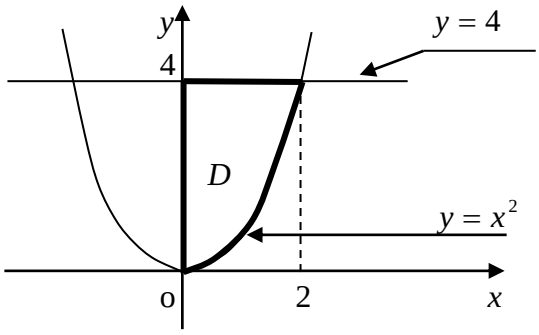


Figura 12

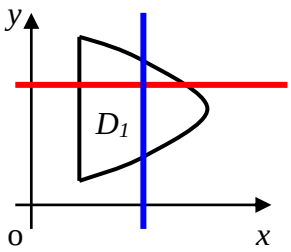
$$A_D = \iint_D dxdy = \int_0^2 dx \int_{x^2}^4 dy = \int_0^2 dx \left| y \right|_{x^2}^4 = \int_0^2 \left(4 - x^2\right)dx = \left| 4x - \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - 0 = \frac{16}{3}$$

$$\boxed{A_D = \frac{16}{3}}$$

Dominio Regular

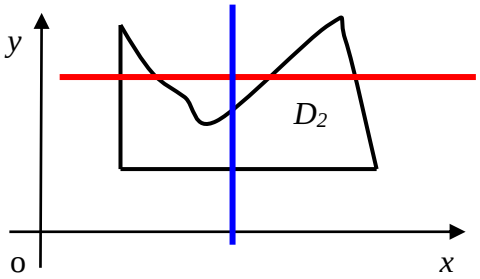
"Un ***Dominio es Regular en la dirección del eje x****, si toda recta paralela a dicho eje y que pasa por un punto interior del dominio, corta a su frontera en solo dos puntos".*
De igual manera: *"Un* ***Dominio es Regular en la dirección del eje y****, si toda recta paralela a dicho eje y que pasa por un punto interior del dominio, corta a su frontera en solo dos puntos".*
Si el dominio es regular en la dirección de los dos ejes coordenados, se dice simplemente que el ***Dominio es Regular.***

Ejemplo 6:



D_1: Dominio Regular

Figura 13



D_2: Dominio Regular en la dirección del eje "y".
No es regular en la dirección del eje "x".

Si el dominio de integración nos es regular ni en la dirección del eje "*x*", ni en la dirección del eje "*y*", entonces para poder integrar se lo debe dividir en Subdominios Regulares, aplicando la propiedad nº 3.

Igualmente, si alguno de los límites de integración no puede ser expresado con una sola expresión algebraica, también se debe subdividir el dominio para poder integrar.
Por ejemplo:

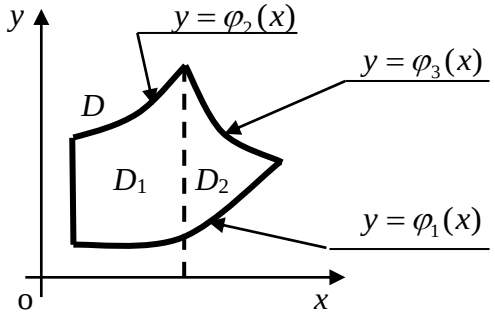


Figura 14

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

Cálculo de Volumen en el Espacio con Integrales Dobles

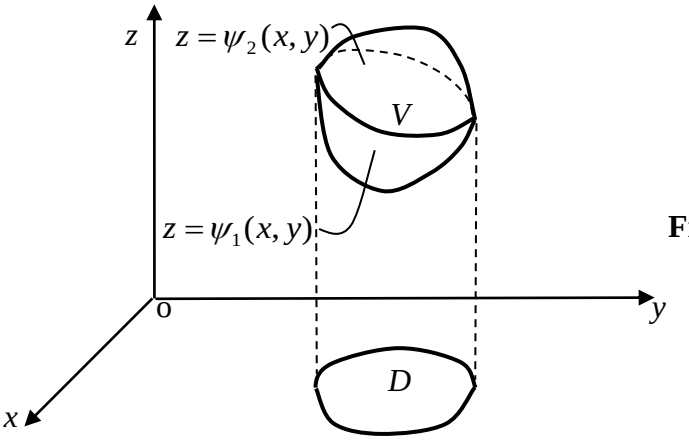


Figura 15

El cuerpo cuyo volumen deseamos calcular está limitado superiormente por la superficie $z=\psi_2(x,y)$ e inferiormente por la superficie $z=\psi_1(x,y)$, y la proyección de ambas superficies sobre el plano 0*xy* es el dominio *D*.

El volumen de este cuerpo es igual a la diferencia entre dos cilindroides:

El primero de ellos tiene como base inferior a *D* y base superior a la superficie $z=\psi_2(x,y)$.

Y el segundo la misma base y a $z=\psi_1(x,y)$ como base superior.

Por lo tanto el volumen buscado es igual a la diferencia entre las siguientes Integrales Dobles:

$$V=\iint_D \psi_2(x,y)dxdy-\iint_D \psi_1(x,y)dxdy \qquad \text{ó}$$

$$\boxed{V=\iint_D \left[\psi_2(x,y)-\psi_1(x,y)\right]dxdy}$$

Ejemplo 7:

Calcular mediante Integrales Dobles el volumen del cuerpo definido en el primer octante y limitado por los planos $y=1-x$, $z=2-x$, $z=1$.

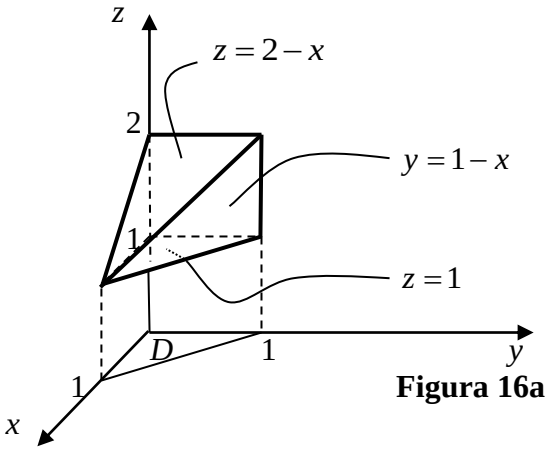


Figura 16a

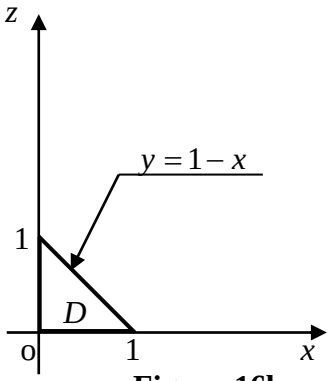


Figura 16b

$$V=\iint_D \left[\psi_2(x,y)-\psi_1(x,y)\right]dxdy=\iint_D \left[(2-x)-1\right]dxdy=\iint_D (1-x)\,dxdy$$

$$V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x)\,dy=\int_0^1 dx\left|(1-x)y\right|_0^{1-x}=\int_0^1 (1-x).(1-x)dx=\int_0^1 \left(1-2x+x^2\right)dx$$

$$V=\left|x-x^2+\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\left(1-1+\frac{1}{3}\right)-0=\frac{1}{3} \qquad \boxed{V=\frac{1}{3}}$$

Otras aplicaciones de Integrales Dobles

Masa, Momentos Estáticos y Momentos de Inercia de las Láminas

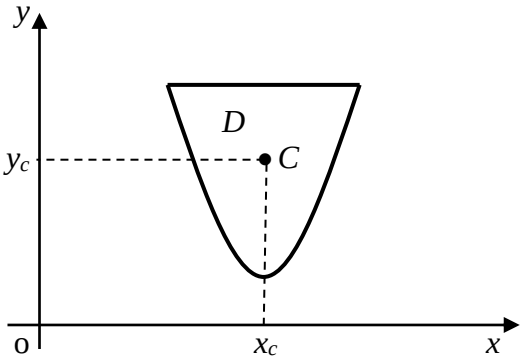


Figura 17

Supongamos que cierta materia está distribuida en el dominio *D* de modo que cada unidad de área de *D* contiene una cantidad determinada de ésta. Esto se refiere a la distribución de la masa, aunque nuestro razonamiento sigue en vigencia cuando nos referimos a la distribución de carga eléctrica, cantidad de calor, etc.

Si llamamos $\rho(x, y)$ a la **Densidad Superficial** de una lámina que ocupa el dominio *D*, entonces:

La Masa de la Lámina (cantidad total de materia en la lámina) es

$$M = \iint_D \rho(x, y)dxdy$$

El Momento Estático de la Lámina respecto al eje 0*x* es

$$M_x = \iint_D y\rho(x, y)dxdy$$

El Momento Estático de la Lámina respecto al eje 0*y* es

$$M_y = \iint_D x\rho(x, y)dxdy$$

Si la Lámina es homogénea resulta $\rho(x, y) = \text{cte}$.

Las Coordenadas del Centro de Gravedad de la Lámina son $x_c = \dfrac{M_y}{M}$ y $y_c = \dfrac{M_x}{M}$

Siendo $C(x_c, y_c)$ el Centro de Gravedad de la Lámina, *M* su Masa y M_x, M_y sus Momentos Estáticos con respecto a los Ejes Coordenados.

Si consideramos $\rho(x, y) = 1$ obtendremos las Coordenadas del Centro Geométrico del Dominio.

El Momento de Inercia de la Lámina respecto al eje 0*x* es

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x, y)dxdy$$

El Momento de Inercia de la Lámina respecto al eje 0*y* es

$$I_y = \iint_D x^2\rho(x, y)dxdy$$

El Momento de Inercia de la Lámina respecto al Origen de Coordenadas es

$$I_0 = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)\rho(x, y)dxdy = I_x + I_y$$

CÁLCULO DE ÁREAS DE SUPERFICIES

Consideremos la superficie $z = f(x, y)$ definida en el dominio rectangular D limitado por la curva cerrada L. Calcularemos el área A_S de la superficie $z = f(x, y)$ limitada por la curva cerrada λ. Siendo la proyección de λ sobre el plano $0xy$ la curva L.

Consideremos a la función $z = f(x, y)$ continua y con derivadas parciales también continuas en el dominio mencionado.

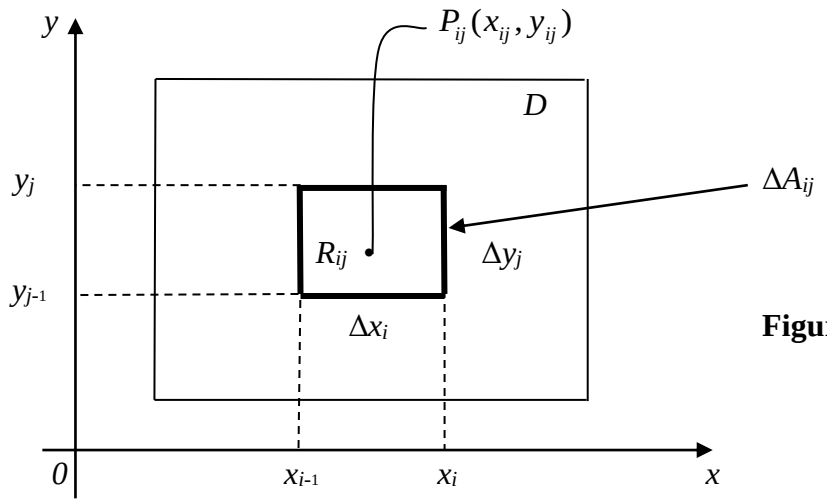


Figura 18a

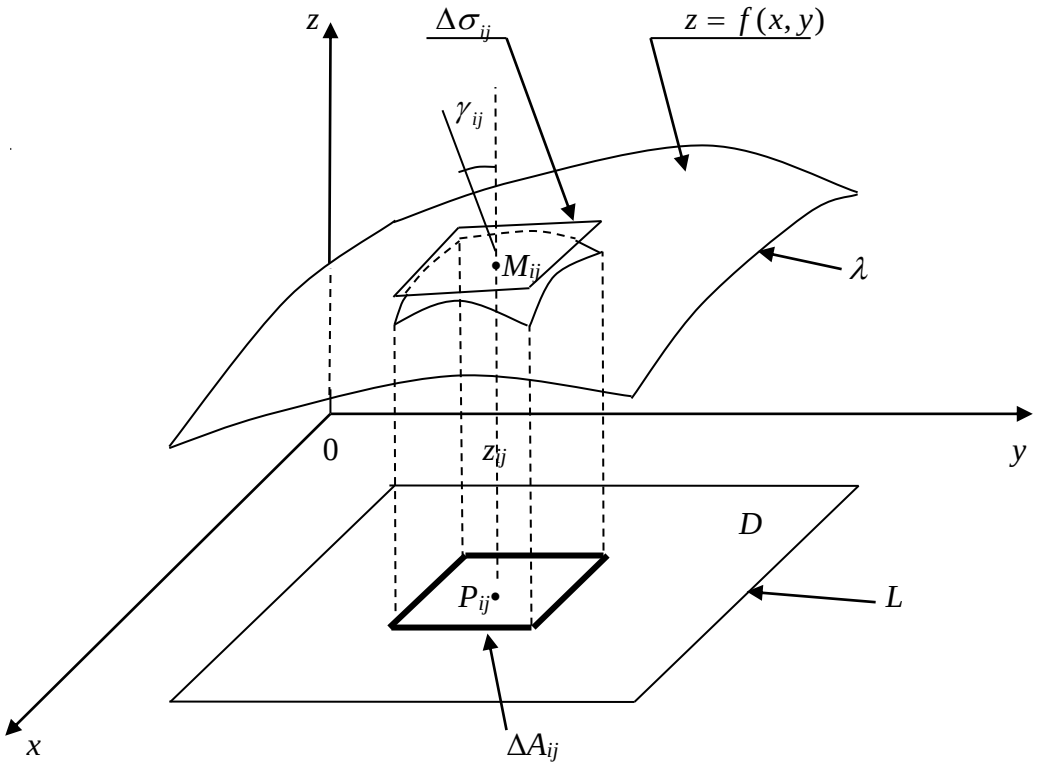


Figura 18b

Dividamos a D en subdominios y sea R_{ij} el rectángulo de área $\Delta A_{ij} = \Delta x_i . \Delta y_j$ y elijamos el punto $P_{ij}(x_{ij}, y_{ij})$ interior al rectángulo. A este punto le corresponde el punto $M_{ij}(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ de la superficie, por este punto tracemos el plano tangente a la superficie, cuya ecuación es:

$$z - z_{ij} = \frac{\partial f(x_{ij}, y_{ij})}{\partial x}\left(x - x_{ij}\right) + \frac{\partial f(x_{ij}, y_{ij})}{\partial y}\left(y - y_{ij}\right)$$

Tomemos sobre este plano el rectángulo de área $\Delta\sigma_{ij}$ tal que proyectado sobre el plano 0*xy* resulte el rectángulo R_{ij} de área ΔA_{ij}. Consideremos la suma de todos los rectángulos parciales:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_{ij}$$

Definamos como "$\text{máx}\Delta\sigma$" al área del mayor de todos los rectángulos $\Delta\sigma_{ij}$ de la subdivisión de la superficie $z = f(x, y)$.

El límite de esta suma para cuando $\begin{cases} n \to \infty \\ m \to \infty \end{cases}$ es decir para cuando $\text{máx}\Delta\sigma \to 0$ es el área de la superficie que estamos buscando:

$$A_S = \lim_{\text{máx}\Delta\sigma \to 0} \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_{ij}$$

Si llamamos γ_{ij} al ángulo formado por el Plano Tangente y el plano 0*xy* tendremos:

$$\Delta A_{ij} = \Delta\sigma_{ij}\cos\gamma_{ij} \qquad \text{ó} \qquad \Delta\sigma_{ij} = \frac{\Delta A_{ij}}{\cos\gamma_{ij}}$$

El ángulo γ_{ij} es también el Ángulo Director formado por la Recta Normal a la superficie en el punto M_{ij} con el eje 0*z*. Por ello en virtud de la ecuación del Plano Tangente, podemos escribir:

$$\cos\gamma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{\partial f(x_{ij}, y_{ij})}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x_{ij}, y_{ij})}{\partial y}\right]^2 + 1}}$$

Por lo tanto resulta:

$$\Delta\sigma_{ij} = \sqrt{\left[\frac{\partial f(x_{ij}, y_{ij})}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x_{ij}, y_{ij})}{\partial y}\right]^2 + 1} \cdot \Delta A_{ij}$$

Y reemplazando en la expresión de A_S será:

$$A_S = \lim_{\text{máx}\Delta A \to 0} \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left[\frac{\partial f(x_{ij}, y_{ij})}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x_{ij}, y_{ij})}{\partial y}\right]^2 + 1} \cdot \Delta A_{ij}$$

El límite de esta suma es por definición la siguiente Integral Doble:

$$\boxed{A_S = \iint_D \sqrt{\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]^2 + 1}\ .dxdy}$$ ó

$$\boxed{A_S = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\ .dxdy}$$

Esta Integral Doble nos permite calcular el área de la superficie dada por la ecuación $z = f(x,y)$ comprendida en el dominio *D*.

Si la ecuación de la superficie está dada de la forma:

$x = g(y,z)$ ó de la forma $y = h(x,z)$

Las Integrales para calcular el área A_S serán respectivamente:

$$\boxed{A_S = \iint_{D'} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}\ .dydz}$$

$$\boxed{A_S = \iint_{D''} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}\ .dxdz}$$

Siendo D' y D'' los dominios de los planos $0yz$ y $0xz$ respectivamente, sobre los que se proyecta la superficie dada.

Ejemplo 8:
Hallar el área de la parte de la superficie del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ comprendida en el primer octante y limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

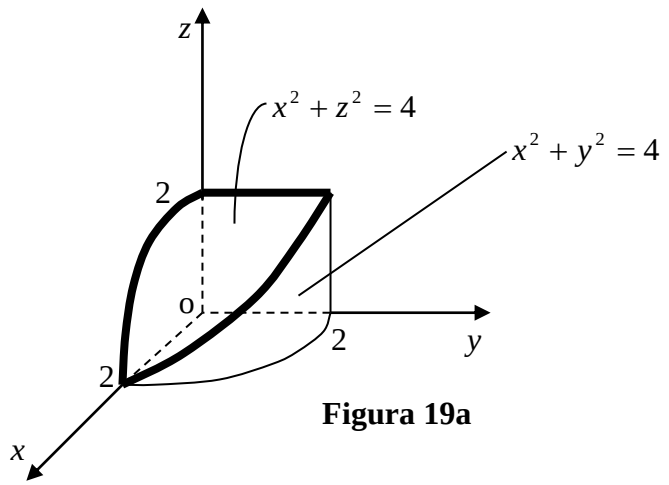


Figura 19a

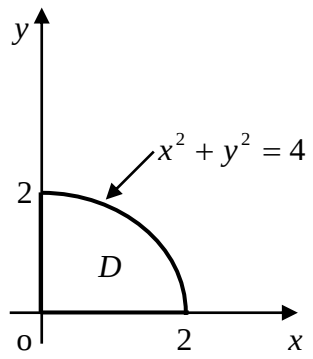


Figura 19b

La ecuación de la superficie es $x^2 + z^2 = 4$ ó $z = \sqrt{4 - x^2}$ por lo tanto su Derivadas Parciales son:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Ahora calculemos el área solicitada:

$$A_S = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\ .dxdy = \iint_D \sqrt{\frac{x^2}{4-x^2} + 1}\ .dxdy = \iint_D \sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\ .dxdy$$

$$A_S = \iint_D \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dy = \int_0^2 dx \left| \frac{2y}{\sqrt{4-x^2}} \right|_0^{\sqrt{4-x^2}} = \int_0^2 2dx = \left|2x\right|_0^2 = 4$$

$$\boxed{A_S = 4}$$

También se podría haber elegido proyectar sobre el plano 0*yz*:

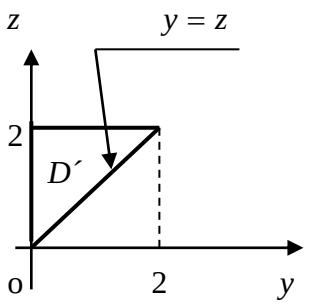


Figura 20

La ecuación de la superficie es $x^2 + z^2 = 4$ ó $x = \sqrt{4-z^2}$

$$A_S = \iint_{D'} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}\ .dydz = \iint_{D'} \sqrt{\frac{z^2}{4-z^2} + 1}\ .dydz = \iint_{D'} \sqrt{\frac{4}{4-z^2}}\ .dydz$$

$$A_S = \iint_{D'} \frac{2}{\sqrt{4-z^2}} dydz = \int_0^2 dz \int_0^z \frac{2}{\sqrt{4-z^2}} dy = \int_0^2 dz \left| \frac{2y}{\sqrt{4-z^2}} \right|_0^z = \int_0^2 \left(\frac{2z}{\sqrt{4-z^2}} \right) dz = \left| -2\sqrt{4-z^2} \right|_0^2 = 4$$

$$\boxed{A_S = 4}$$

INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES

El cálculo de una integral se puede simplificar mediante un conveniente cambio de variables. Hay integrales dobles en las que su cálculo en coordenadas rectangulares es más bien complicado y que sin embargo se pueden resolver más fácilmente en coordenadas polares.

Recordemos que las coordenadas rectangulares se relacionan con las coordenadas polares por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\text{sen}\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le r \le \infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}$$

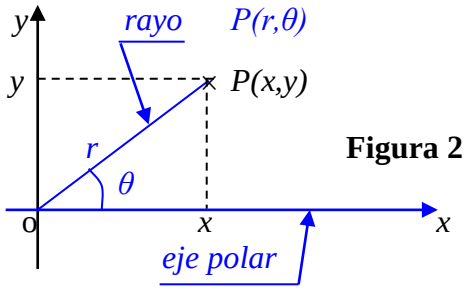


Figura 21

Calculemos la $\iint_R f(x,y)dA$ donde R es el **rectángulo polar** $R = \{(r,\theta) / a \le r \le b \wedge \alpha \le \theta \le \beta\}$ indicado en la siguiente figura:

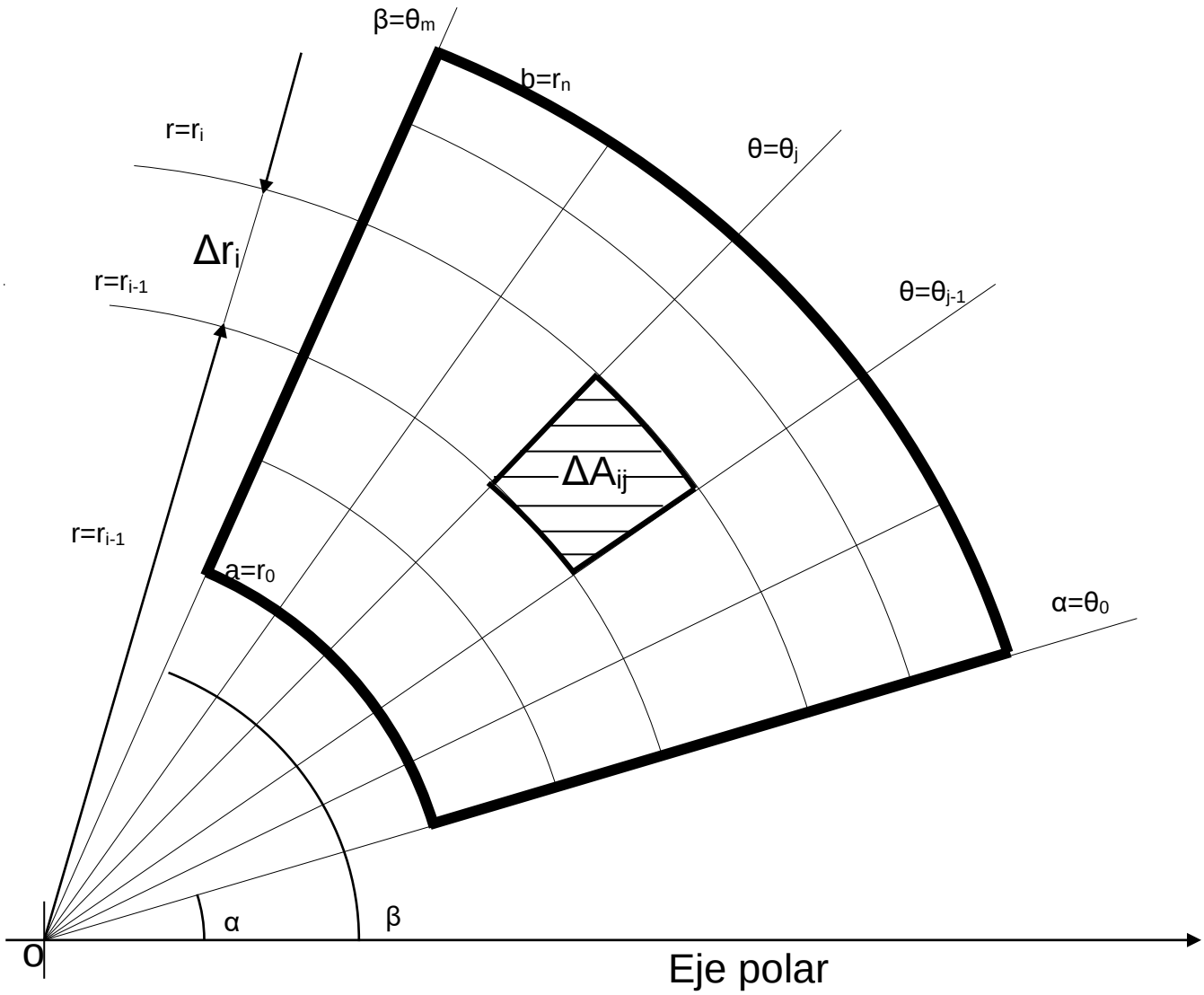


Figura 22

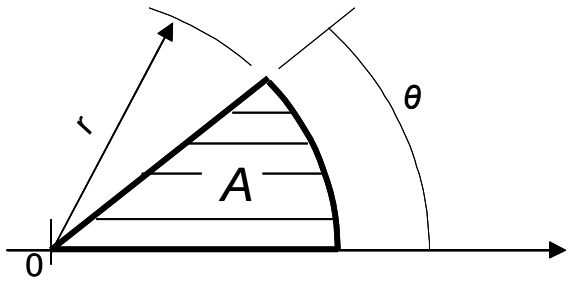
Dividamos al intervalo $[a,b]$ en "n" partes por los puntos $r_0 = a, r_1, r_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, r_n = b$

y al intervalo $[\alpha,\beta]$ en "m" partes por los puntos $\theta_0 = \alpha, \theta_1, \theta_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \theta_m = \beta$

Tomemos un dominio parcial ΔA_{ij} limitado por:

$$r = r_{i-1} \qquad r = r_i$$
$$\theta = \theta_{j-1} \qquad \theta = \theta_j$$

Recordemos que el área de un sector circular de radio "r" y ángulo "θ" es:



$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

Figura 23

Calculemos el área del dominio ΔA_{ij}:

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta_j - \frac{1}{2} r_{i-1}^2 \Delta\theta_j \qquad \text{siendo} \qquad \Delta\theta_j = \theta_j - \theta_{j-1}$$

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2}\left[r_i^2 - r_{i-1}^2\right]\Delta\theta_j = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\Delta\theta_j \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1}) = r_{ij} \\ r_i - r_{i-1} = \Delta r_i \end{cases}$$

$$\Delta A_{ij} = r_{ij}\Delta r_i \Delta\theta_j \qquad \begin{array}{l} r_{i-1} \le r_{ij} \le r_i \\ \theta_{j-1} \le \theta_{ij} \le \theta_j \end{array}$$

Donde (r_{ij}, θ_{ij}) son las coordenadas polares de un punto interior del dominio parcial ΔA_{ij} y por lo tanto $(r_{ij}\cos\theta_{ij}, r_{ij}\text{sen}\theta_{ij})$ son las coordenadas rectangulares de dicho punto. Escribamos la Doble Suma de Riemann:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(r_{ij}\cos\theta_{ij}, r_{ij}\text{sen}\theta_{ij}) r_{ij}\Delta r_i \Delta\theta_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} g(r_{ij}, \theta_{ij}) r_{ij}\Delta r_i \Delta\theta_j$$

Definamos como "$\text{máx}\Delta A$" al área del mayor de todos los subrectángulos polares de la subdivisión de R.

Tomemos límite para cuando $\begin{cases} n \to \infty \\ m \to \infty \end{cases}$ es decir para cuando $\text{máx}\Delta A \to 0$

$$\lim_{\text{máx}\Delta A\to 0}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_{ij},y_{ij})\Delta A_{ij} = \iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(r\cos\theta, r\text{sen}\theta)r\Delta r\Delta\theta = \iint_R g(r,\theta)rdrd\theta$$

En resumen, la Integral Doble de la función $f(x,y)$ dada en coordenadas rectangulares y definida en un rectángulo polar R (como el de la Figura 22) también puede calcularse en coordenadas polares de acuerdo a lo siguiente:

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_R f(r\cos\theta, r\text{sen}\theta)rdrd\theta = \iint_R g(r,\theta)rdrd\theta = \int_\alpha^\beta d\theta\int_a^b g(r,\theta)rdr$$

Lo demostrado es válido también para dominios de forma mas complicadas. Por ejemplo sea la función $z = f(x,y)$ definida en el dominio *D* indicado en la Figura 24:

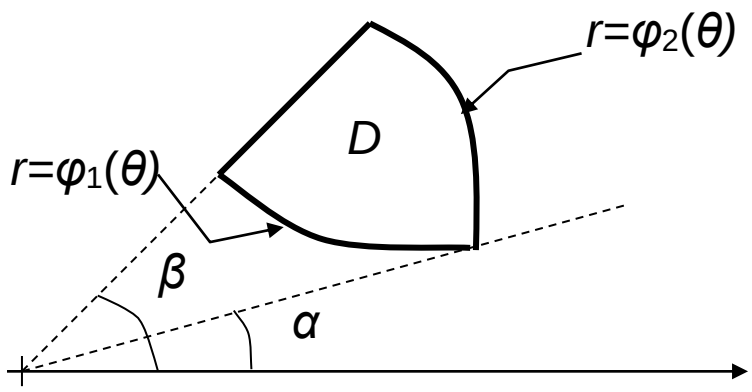


Figura 24

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\text{sen}\theta)rdrd\theta = \iint_D g(r,\theta)rdrd\theta = \int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} g(r,\theta)rdr$$

O si la forma del dominio lo permite se puede integrar primero con respecto a "θ" y luego respecto a "*r*", por ejemplo:

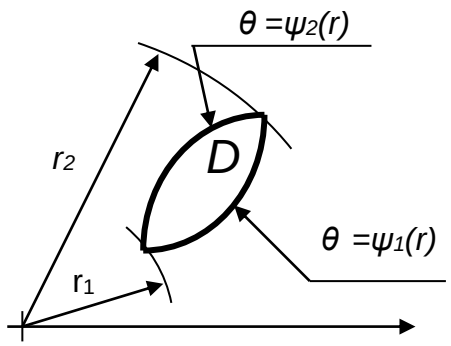


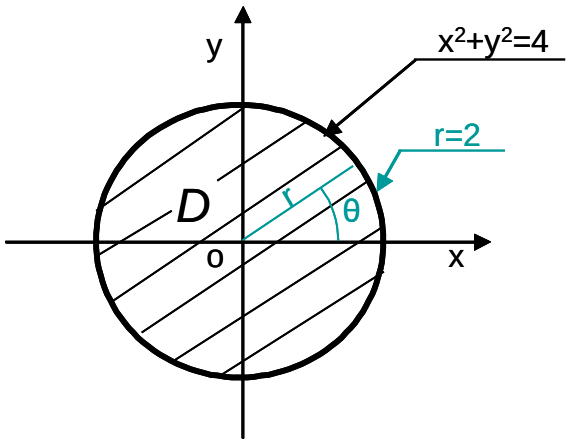
Figura 25

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\text{sen}\theta)rdrd\theta = \iint_D g(r,\theta)rdrd\theta = \int_{r_1}^{r_2} r.dr\int_{\psi_1(r)}^{\psi_2(r)} g(r,\theta)d\theta$$

Ejemplo 9:

Resolver la integral $\iint_D (2-x)dxdy$, siendo D el círculo de radio $r=2$ y centro en el origen de coordenadas.

Si intentamos resolver esta integral en Coordenadas Cartesianas nos resultará imposible, pero si lo podemos hacer en Coordenadas Polares.



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\text{sen}\theta \end{cases}$$

Figura 26

Dominio de integración:

En Coordenadas Cartesianas $\quad x^2 + y^2 = 4$

En Coordenadas Polares

$$\begin{cases} (r\cos\theta)^2 + (r\text{sen}\theta)^2 = 4 \\ r^2\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\theta = 4 \\ r^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) = 4 \\ r^2 = 4 \\ r = 2 \end{cases}$$

Función a integrar:

En Coordenadas Cartesianas $\quad f(x,y) = 2 - x$

En Coordenadas Polares $\quad g(r,\theta) = 2 - r.\cos\theta$

$$\iint_D (2-x)dxdy = \iint_D (2-r\cos\theta)rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (2r - r^2\cos\theta)dr = \int_0^{2\pi} d\theta \left| r^2 - \frac{r^3}{3}\cos\theta \right|_0^2 =$$

$$= \int_0^{2\pi} (4 - \frac{8}{3}\cos\theta)d\theta = \left| 4\theta - \frac{8}{3}\text{sen}\theta \right|_0^{2\pi} = (8\pi - \frac{8}{3}\text{sen}2\pi) - (0 - \frac{8}{3}\text{sen}0) = 8\pi$$

$$\boxed{\iint_D (2-x)dxdy = 8\pi}$$

CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES DOBLES

Recordemos que cuando se nos complicaba la resolución de integrales definidas de funciones de una sola variable, podíamos simplificarla mediante un conveniente cambio de variables:

Siendo $x = \varphi(t)$, $x_1 = \varphi(t_1)$, $x_2 = \varphi(t_2)$.

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Ya vimos que en algunos casos podemos facilitar la resolución de una Integral Doble convirtiéndola a coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\text{sen}\theta \end{cases} \qquad \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\text{sen}\theta)rdrd\theta$$

Veamos ahora como realizar un cambio más general de variables en Integrales Dobles.

Consideremos que *x* e *y* son funciones de otras variables *u* y *v*:

$$\begin{cases} x = g_1(u,v) \\ y = g_2(u,v) \end{cases} \qquad (1)$$

Y sean g_1 y g_2 funciones continuas y con derivadas parciales de primer orden también continuas. Consideremos el dominio D limitado por la curva cerrada L.

Por la funciones g_1 y g_2, a cada par de valores *u* y *v* le corresponde un solo par de valores *x* e *y*. Y supongamos que si damos valores a *x* e *y* estas funciones nos permiten calcular los valores correspondientes de *u* y *v*.

De lo expuesto deducimos que a cada punto $P(x,y)$ del plano $0xy$ le corresponde un punto $M(u,v)$ del plano $0uv$ por intermedio de las funciones g_1 y g_2.
Estableciéndose una correspondencia biunívoca (ó uno a uno) entre los puntos de ambos dominios.

A cada punto *P* de la curva cerrada *L* que limita el Dominio *D* en el plano 0*xy*, le corresponderá en el plano 0*uv* un punto *M* de la curva cerrada L_1 que limita al Dominio *E*.

Al punto $M_1(u_0,v_0)$ del plano $0uv$ le corresponde el punto $P_1(x_0,y_0)$ $\begin{cases} x_0 = g_1(u_0,v_0) \\ y_0 = g_2(u_0,v_0) \end{cases}$ en el plano 0*xy*.

Dividamos el Dominio *E* mediante rectas paralelas a los ejes coordenados, a cada una de estas rectas le corresponden ciertas curvas en el plano *0xy*.

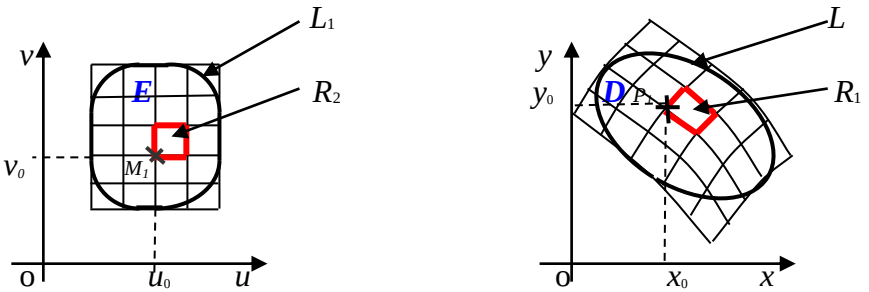


Figura 27

Consideremos el rectángulo R_2 en el plano $0uv$ cuyos lados miden Δu y Δv, su área es $\Delta A_2 = \Delta u \Delta v$. Y su imagen en el dominio D es la figura R_1, cuya área llamaremos ΔA.

En general las áreas de R_1 y R_2 son distintas.

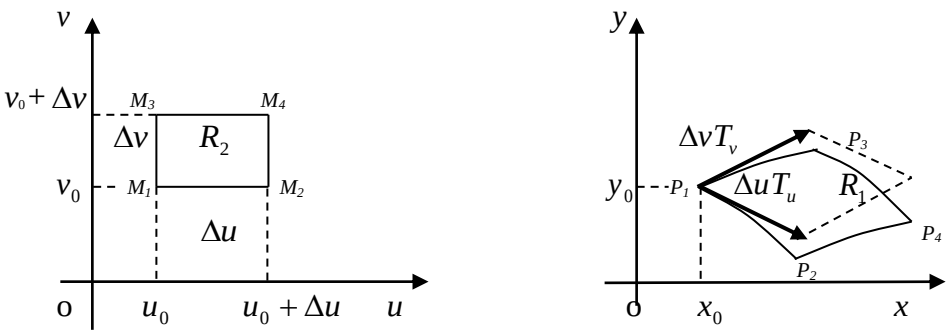


Figura 28

Sea una función $z = f(x, y)$ definida en el Dominio *D*, le corresponde un mismo valor de la función $z = g(u, v)$ en el Dominio *E*. Siendo $f[g_1(u,v); g_2(u,v)] = g(u,v)$.

Por lo tanto se verifica que:

$$\sum \sum f(x,y)\Delta A = \sum \sum f[g_1(u,v); g_2(u,v)\Delta A] = \sum \sum g(u,v)\Delta A$$

Calculemos el área ΔA de R_1. Para ello consideremos que las curvas $\widehat{P_1P_2}$, $\widehat{P_3P_4}$, $\widehat{P_1P_3}$ y $\widehat{P_2P_4}$ son paralelas por pares.

La ecuación del lado inferior del rectángulo R_2 es la recta $v = v_0$. Y su imagen es la curva $\widehat{P_1P_2}$ dada por:

$$\begin{cases} x = g_1(u, v_0) \\ y = g_2(u, v_0) \end{cases} \qquad \text{o en forma vectorial} \qquad g_1(u, v_0)i + g_2(u, v_0)j$$

El vector tangente a esta curva en el punto $P_1(x_0, y_0)$ es:

$$T_u = \frac{\partial g_1(u_0, v_0)}{\partial u} i + \frac{\partial g_2(u_0, v_0)}{\partial u} j = \frac{\partial x}{\partial u} i + \frac{\partial y}{\partial u} j$$

Y de forma similar, la ecuación del lado izquierdo del rectángulo R_2 es la recta $u = u_0$. Y su imagen es la curva $\widehat{P_1P_3}$ dada por:

$$\begin{cases} x = g_1(u_0, v) \\ y = g_2(u_0, v) \end{cases} \qquad \text{o en forma vectorial} \qquad g_1(u_0, v)i + g_2(u_0, v)j$$

Y el vector tangente a esta curva en el punto $P_1(x_0, y_0)$ es:

$$T_v = \frac{\partial g_1(u_0, v_0)}{\partial v} i + \frac{\partial g_2(u_0, v_0)}{\partial v} j = \frac{\partial x}{\partial v} i + \frac{\partial y}{\partial v} j$$

Podemos aproximar la figura R_1 mediante el paralelogramo cuyos lados son $\Delta u T_u$ y $\Delta v T_v$.

De esta manera el área del cuadrilátero R_1 se puede calcular en forma aproximada mediante el siguiente producto vectorial:

$$\Delta A \cong \left|\Delta u T_u \times \Delta v T_v\right| = \left|T_u \times T_v\right| \Delta u \Delta v$$

El producto vectorial se toma en valor absoluto, pues estamos calculando un área.

$$T_u \times T_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot k = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \right) \cdot k \qquad \text{por lo tanto}$$

$$\left|T_u \times T_v\right| = \left| \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \right| \qquad \Delta A \cong \left| \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \right| \Delta u \Delta v$$

Introduzcamos la designación

$$\boldsymbol{J}\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad \Rightarrow \qquad T_u \times T_v = \boldsymbol{J}\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$$

Este determinante recibe el nombre de **Jacobiano de la Transformación.**

Finalmente el área de R_1 resulta: $\Delta A \cong \left| \boldsymbol{J}\left(\frac{x,y}{u,v}\right) \right| \Delta u \Delta v$

Si aplicamos esta igualdad al cálculo de las integrales dobles tendremos:

$$\sum \sum f(x,y)\Delta A \cong \sum \sum f\left[g_1(u,v); g_2(u,v)\right] \left| \boldsymbol{J}\left(\frac{x,y}{u,v}\right) \right| \Delta u \Delta v = \sum \sum g(u,v) \left| \boldsymbol{J}\left(\frac{x,y}{u,v}\right) \right| \Delta u \Delta v$$

Y tomando límite para cuando $\text{máx}\Delta A \to 0$ obtendremos:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f\left[g_1(u,v), g_2(u,v)\right] \left| \boldsymbol{J}\left(\frac{x,y}{u,v}\right) \right| dudv = \iint_E g(u,v) \left| \boldsymbol{J}\left(\frac{x,y}{u,v}\right) \right| dudv}$$

Las Integrales Dobles en Coordenadas polares son un caso particular de Cambio de Variables en Integrales Dobles. Recordemos que la transformación está dada por:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\left|\boldsymbol{J}\left(\frac{x,y}{r,\theta}\right)\right| drd\theta$$

Y el Jacobiano de la Transformación resulta:

$$\boldsymbol{J}\left(\frac{x,y}{r,\theta}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}^2\,\theta = r(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta) = r$$

$$\boxed{\boldsymbol{J}\left(\frac{x,y}{r,\theta}\right) = r}$$

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)rdrd\theta}$$

INTEGRALES TRIPLES

El concepto de Integrales Dobles puede ser ampliado a Integrales Triples adaptando lo definido para funciones de dos variables a funciones de tres variables independientes.

Consideremos la función $u = f(x, y, z)$, continua en el Dominio con forma de paralelepípedo rectángulo $E = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$ indicado en la figura 29:

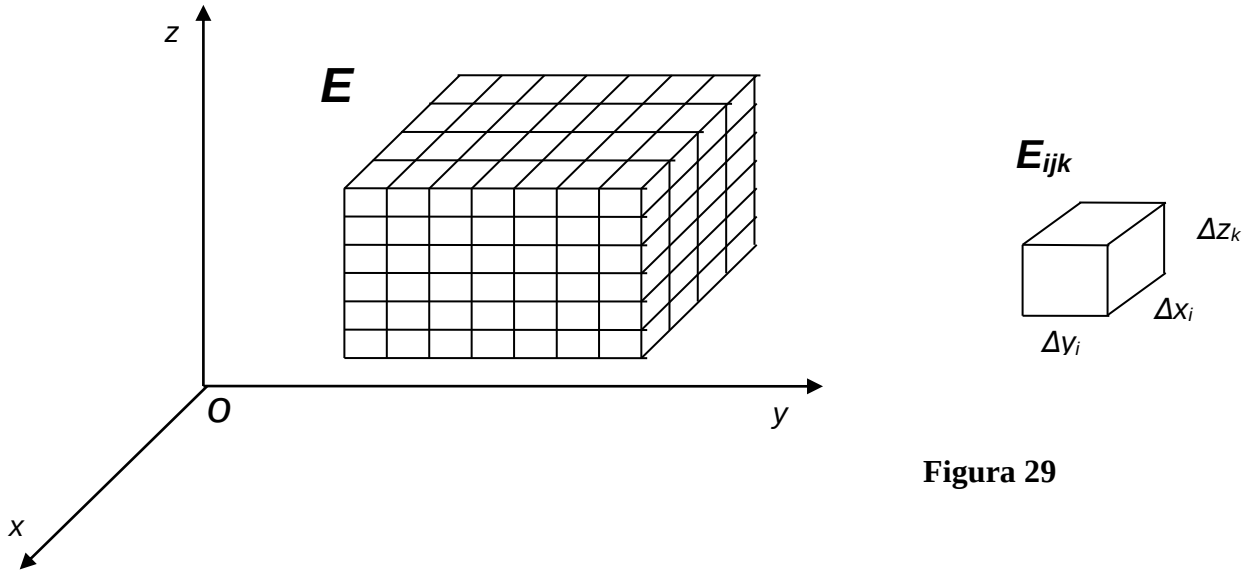


Figura 29

Dividimos al intervalo $[a,b]$ en "n" partes por los puntos $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n = b$
al intervalo $[c,d]$ en "m" partes por los puntos $y_0 = c, y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_m = d$
y al intervalo $[p,q]$ en "l" partes por los puntos $z_0 = p, z_1, z_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, z_l = q$

Consideremos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ y $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$

El volumen del subdominio E_{ijk} será: $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$

Elegimos un punto $M_{ijk}(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$ interior al subdominio E_{ijk} y formemos la siguiente suma (**Suma Triple de Riemann**):

$$\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})\Delta V_{ijk}$$

Definimos como "$\text{máx}\Delta V$" al volumen del mayor de todos los subdominios de la división de E.
Es decir que si E_{ijk} es el subdominio de mayor volumen entonces $\text{máx}\Delta V = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$.

El límite de la Suma Triple de Riemann para cuando $\begin{cases} n \to \infty \\ m \to \infty \\ l \to \infty \end{cases}$ es decir para cuando $\text{máx}\Delta V \to 0$

es la Integral Triple de la función $f(x, y, z)$ en el Dominio E:

$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \lim_{\text{máx}\Delta V \to 0} \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})\Delta V_{ijk}$$

Si este límite existe decimos que la función $f(x, y, z)$ es **integrable**.

"*E*" es el Dominio de Integración.
Teniendo en cuenta que $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ la Integral Triple también se expresa:

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iiint_E f(x,y,z)dxdydz$$

Si consideramos como ejemplo que la función $f(x,y,z)$ nos representa la Densidad de distribución de cierta materia dentro del recinto *E* entonces la Integral Triple nos da la masa total de la sustancia contenida en *E*.

Tal como precedimos en Integrales Dobles, también las Integrales Triples pueden ser resueltas mediante Integrales Iteradas:

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left\{ \int_c^d \left[\int_p^q f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_p^q f(x,y,z)dz$$

Esta expresión indica que primero debemos integral con respecto a "z", considerando a "*x* e *y*" constantes [obteniendo como resultado de esta integral una función $F(x,y)$]; luego de ello nos queda planteada una Integral Doble definida en el Dominio rectangular $R = [a,b] \times [c,d]$. Luego se integra con respecto a "*y*", considerando a "*x*" constante y finalmente se integra con respecto a "*x*".

Al igual que en Integrales Dobles se puede cambiar el orden de integración, obteniendo el mismo resultado.

Para resolver Integrales Triples definidas en dominios de formas más complejas procedemos de la misma manera que en Integrales Dobles:

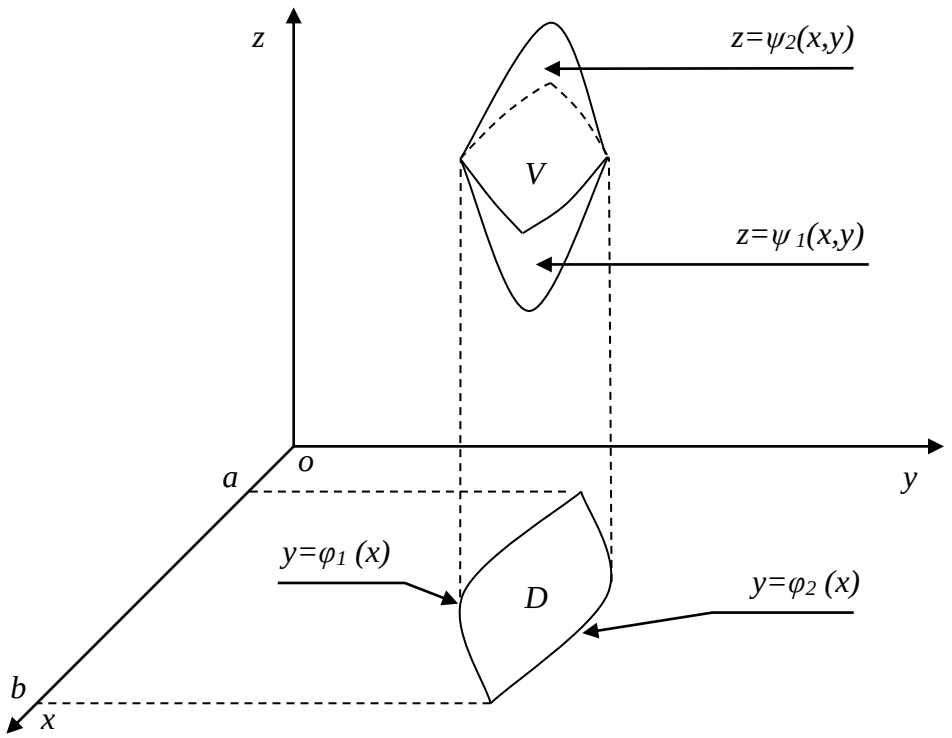


Figura 30

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Ejemplo 10:
Calcular la Integral triple de la función $f(x,y,z)=x^2y^2z$ en el Dominio V definido en el Primer Octante y limitado por los planos $x=3$ e $y+z=1$.

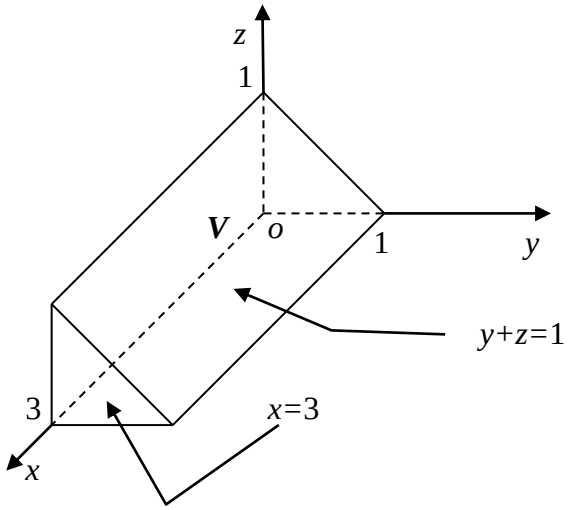


Figura 31

$$\iiint_V x^2y^2z\,dxdydz=\int_0^3 dx\int_0^1 dy\int_0^{1-y} x^2y^2z\,dz=\int_0^3 dx\int_0^1 dy\left|\frac{x^2y^2z^2}{2}\right|_0^{1-y}=\int_0^3 dx\int_0^1\left(\frac{x^2y^2}{2}-x^2y^3+\frac{x^2y^4}{2}\right)dy=$$

$$=\int_0^3 dx\left|\frac{x^2y^3}{6}-\frac{x^2y^4}{4}+\frac{x^2y^5}{10}\right|_0^1=\int_0^3\frac{x^2}{60}dx=\left|\frac{x^3}{180}\right|_0^3=\frac{3}{20}$$

$$\boxed{\iiint_V x^2y^2z\,dxdydz=\frac{3}{20}}$$

También podríamos haber integrado tomando otro orden de integración y hubiésemos obtenido el mismo resultado, por ejemplo:

$$\iiint_V x^2y^2z\,dxdydz=\int_0^1 dz\int_0^{1-z} dy\int_0^3 x^2y^2z\,dx=\frac{3}{20}$$

Propiedades de las Integrales Triples

1. La Integral Triple de la suma de dos funciones, extendida en un dominio V, es igual a la suma de las Integrales Triples extendidas en dicho dominio de cada una de las dos funciones.

$$\iiint_V\left[f_1(x,y,z)+f_2(x,y,z)\right]dxdydz=\iiint_V f_1(x,y,z)dxdydz+\iiint_V f_2(x,y,z)dxdydz$$

2. El factor constante se puede extraer fuera del signo de Integral Triple.

$$\iiint_V c.f(x,y,z)dxdydz=c.\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \qquad c=\text{constante}$$

3. Si el dominio V está dividido en dos dominios parciales V_1 y V_2, sin poseer puntos interiores comunes y $f(x,y,z)$ es continua en todos los puntos del dominio V entonces:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{V_1} f(x,y,z)dxdydz+\iiint_{V_2} f(x,y,z)dxdydz$$

Esta propiedad es válida también para un mayor número de divisiones del dominio.
Igual que en Integrales Dobles si alguno de los límites de integración no puede ser dado con una sola expresión algebraica se debe subdividir el dominio aplicando esta propiedad.

4. Si $f_1(x,y,z) \geq f_2(x,y,z)$ en todos los puntos del dominio *V*, tendremos que:

$$\iiint_V f_1(x,y,z)dxdydz \geq \iiint_V f_2(x,y,z)dxdydz$$

5. La Integral Triple de la función $f(x,y,z)=1$ extendida en el dominio *V* nos da el volumen de dicho dominio.

$V = \iiint_V 1.dxdydz$ siendo *V* el volumen del dominio *V*

Demostración
Demostremos esta propiedad. Sea *V* el dominio indicado en la **Figura 30**, calculemos la Integral Triple enunciada:

$$\iiint_V dxdydz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \left| z \right|_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\psi_2(x,y) - \psi_1(x,y)\right] dy$$

Recordemos que esta última es la Integral Doble que nos permite calcular el volumen de de un cuerpo en el espacio, con lo que queda demostrada la propiedad.

6. Si C_1 y C_2 son dos constantes tal que $C_1 \leq f(x,y,z) \leq C_2$ en todo el dominio *V*, entonces se cumple que:

$C_1.V \leq \iiint_V f(x,y,z)dxdydz \leq C_2.V$ siendo *V* el volumen del dominio *V*.

Ejemplo 11:
Calcular el volumen del tetraedro comprendido entre los planos coordenados y el plano $6x+3y+z=6$

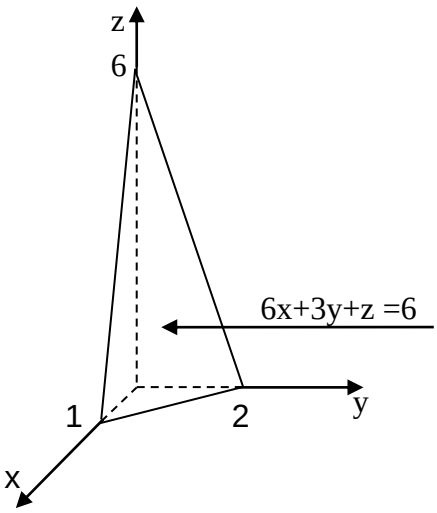


Figura 32

$$V = \iiint_V dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy \int_0^{6-6x-3y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy \left| z \right|_o^{6-6x-3y} = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (6-6x-3y)dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left| 6y - 6xy - \frac{3y^2}{2} \right|_0^{2-2x} = \int_0^1 (6x^2 - 12x + 6)dx = \left| 2x^3 - 6x^2 + 6x \right|_0^1 = 2$$

$$\boxed{V = \iiint_V dxdydz = 2}$$

Otras aplicaciones de Integrales Triples

Masa, Momentos Estáticos y Momentos de Inercia de un Cuerpo

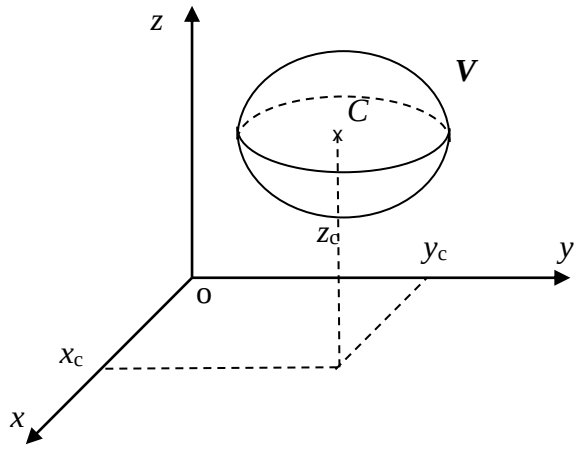


Figura 33

Si llamamos $\rho(x, y, z)$ a la **Densidad** de un Cuerpo que ocupa el dominio *V*, entonces:

La Masa del Cuerpo es

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z)dxdydz$$

Si bien nos hemos referido a la Masa de un Cuerpo, este razonamiento sigue vigente si nos referimos a distribución de Carga Eléctrica, Cantidad de Calor, etc..

El Momento Estático del Cuerpo respecto al plano 0*yz* es

$$M_{yz} = \iiint_V x.\rho(x, y, z)dxdydz$$

El Momento Estático del Cuerpo respecto al plano 0*xz* es

$$M_{xz} = \iiint_V y.\rho(x, y, z)dxdydz$$

El Momento Estático del Cuerpo respecto al plano 0*xy* es

$$M_{xy} = \iiint_V z.\rho(x, y, z)dxdydz$$

Si el Cuerpo es homogéneo resulta $\rho(x, y, z) = \text{cte}$.

Las Coordenadas del Centro de Gravedad del Cuerpo son

$$x_c = \frac{M_{yz}}{M} \quad ; \quad y_c = \frac{M_{xz}}{M} \quad \text{y} \quad z_c = \frac{M_{xy}}{M}$$

Siendo $C(x_c, y_c, z_c)$ el Centro de Gravedad del Cuerpo, *M* su Masa y M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} sus Momentos Estáticos con respecto a los Planos Coordenados.

Si consideramos $\rho(x, y, z) = 1$ obtendremos las Coordenadas del Centro Geométrico del Cuerpo.

El Momento de Inercia del Cuerpo respecto al eje 0*x* es

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz$$

El Momento de Inercia del Cuerpo respecto al eje 0*y* es

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz$$

El Momento de Inercia del Cuerpo respecto al eje 0*z* es

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dxdydz$$

Ejemplo 12:
Hallar la Masa, las coordenadas del Centro de Gravedad y los Momentos de Inercia respecto a los ejes coordenados del Cuerpo con forma de paralelepípedo indicado en la **Figura 34**, si su Densidad responde a la función $\rho(x, y, z) = xyz$.

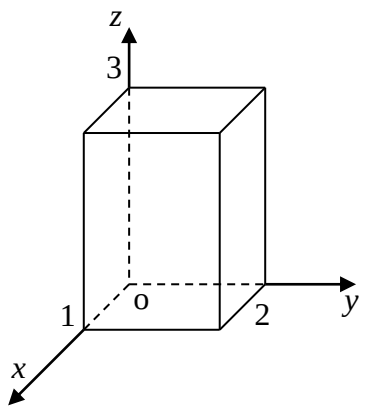


Figura 34

Calculamos primero la Masa del Cuerpo:

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z)dxdydz = \iiint_V xyzdxdydz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 xyzdz = \frac{9}{2}$$

Para calcular las coordenadas del Centro de gravedad del Cuerpo necesitamos determinar los Momentos estáticos del Cuerpo respecto a los planos coordenados:

$$M_{yz} = \iiint_V x.\rho(x, y, z)dxdydz = \iiint_V x^2 yzdxdydz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 x^2 yzdxdydz = 3$$

$$M_{xz} = \iiint_V y.\rho(x, y, z)dxdydz = \iiint_V xy^2 zdxdydz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 xy^2 zdxdydz = 6$$

$$M_{xy} = \iiint_V z.\rho(x, y, z)dxdydz = \iiint_V xyz^2 dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 xyz^2 dxdydz = \frac{9}{2}$$

Por lo tanto las coordenadas del Centro de Gravedad del Cuerpo son:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{3}{9/2} = \frac{2}{3}$$

$$y_c = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{6}{9/2} = \frac{4}{3}$$

$$z_c = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{9}{9/2} = 2$$

Y los Momentos de Inercia del Cuerpo respecto a los ejes coordenados resultan:

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz = \iiint_V (y^2 + z^2)xyzdxdydz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 (xy^3z + xyz^3)dz = \frac{117}{4}$$

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz = \iiint_V (x^2 + z^2)xyzdxdydz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 (x^3yz + xyz^3)dz = \frac{45}{2}$$

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)dxdydz = \iiint_V (x^2 + y^2)xyzdxdydz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 (x^3yz + xy^3z)dz = \frac{45}{4}$$

Finalmente resulta:

La **Masa** del Cuerpo: $\boxed{M = \frac{9}{2}}$

Los **Momentos Estáticos** del Cuerpo respecto a los planos coordenados:

$$\boxed{\begin{aligned} M_{yz} &= 3 \\ M_{xz} &= 6 \\ M_{xy} &= 9 \end{aligned}}$$

Las coordenadas del **Centro de Gravedad** del Cuerpo:

$$\boxed{\begin{aligned} x_c &= \frac{2}{3} \\ y_c &= \frac{4}{3} \\ z_c &= 2 \end{aligned}}$$

Los **Momentos de Inercia** respecto a los ejes coordenados:

$$\boxed{\begin{aligned} I_x &= \frac{117}{4} \\ I_y &= \frac{45}{2} \\ I_z &= \frac{45}{4} \end{aligned}}$$

CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES TRIPLES

El Cambio de Variables en Integrales Triples se realiza de forma similar que en Integrales Dobles. Consideremos que *x, y, z* son funciones de otras variables *u, v, w*:

$$\begin{cases} x = g_1(u,v,w) \\ y = g_2(u,v,w) \\ z = g_3(u,v,w) \end{cases}$$

Y sean estas funciones continuas y con derivadas parciales de primer orden también continuas.

Por intermedio de estas funciones establecemos una correspondencia biunívoca entre los puntos del dominio *E* del espacio $0uvw$ y los puntos del dominio *V* del espacio $0xyz$:

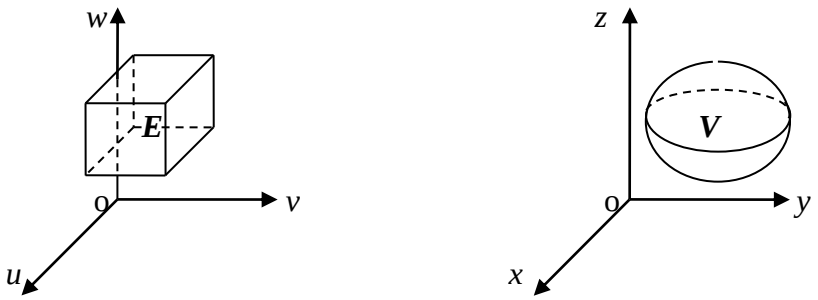


Figura 35

El Jacobiano de la Transformación es:

$$J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Y el Cambio de Variables en Integrales Triples resulta:

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_E f\left[g_1(u,v,w), g_2(u,v,w), g_3(u,v,w)\right] \left| J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right)\right| dudvdw}$$

Nótese que el Jacobiano de la Transformación se debe tomar en valor absoluto.

INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

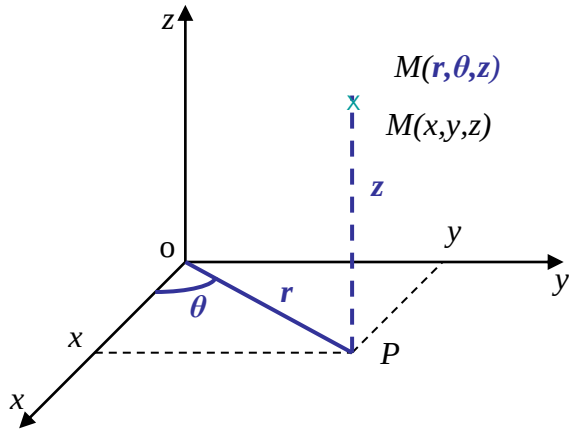


Figura 36

En Coordenadas Cilíndricas la posición de un punto *M* en el espacio se determina por "***r* , *θ* , *z*".**

"***r* , *θ***" son la Coordenadas Polares de la proyección del punto *M* sobre el plano 0*xy*

"***z***" es la distancia del punto al plano 0*xy*.

"***z***" es positiva si el punto *M* está sobre el plano 0*xy* y es negativa cuando está debajo del mismo.

Por lo tanto resulta:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \le r \le \infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ -\infty \le z \le \infty \end{cases}$$

Entonces para transformar una Integral Triple dada en Coordenadas Rectangulares en otra dada en Coordenadas Cilíndricas procedemos así:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)\left|J\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,z}\right)\right| drd\theta dz = \iiint_V g(r,\theta,z)\left|J\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,z}\right)\right| drd\theta dz$$

Resolvamos el Jacobiano de la Transformación:

$$J\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,z}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Y finalmente resulta:

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V g(r,\theta,z)\, r\, drd\theta\, dz}$$

Ejemplo 13:

Calcular en Coordenadas Cilíndricas la Integral $\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz$ siendo V el cuerpo definido en el primer octante y limitado por la superficie $x^2+y^2=4$ y el plano $z=4$.

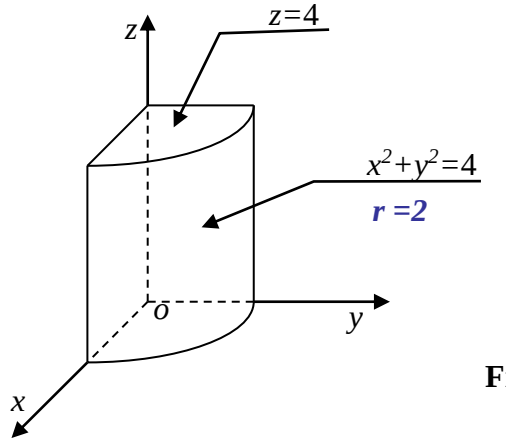


Figura 37

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V g(r,\theta,z)\, r\, drd\theta\, dz$$

$$f(x,y,z) = x^2+y^2$$

$$g(r,\theta,z) = (r\cos\theta)^2 + (r\text{sen}\theta)^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\theta = r^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) = r^2$$

$$\boxed{g(r,\theta,z) = r^2}$$

Dominio V de integración:

En Coordenadas Rectangulares: $x^2+y^2=4$ y $z=4$

En Coordenadas Cilíndricas:

$$(r\cos\theta)^2 + (r\text{sen}\theta)^2 = 4$$
$$r^2\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\theta = 4$$
$$r^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) = 4$$
$$r^2 = 4$$
$$\boxed{r = 2 \quad \text{y} \quad z = 4}$$

$$\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz = \iiint_V r^2 r dr d\theta dz = \iiint_V r^3 dr d\theta dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 dr \int_0^4 r^3 dz =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 dr \left| r^3 z \right|_0^4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 4r^3 dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left| r^4 \right|_0^2 =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16 d\theta = \left| 16\theta \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8\pi$$

$$\boxed{\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz = 8\pi}$$

INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS ESFÉRICAS

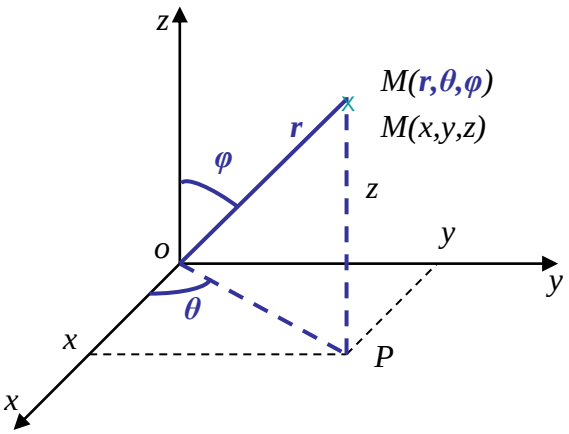


Figura 38

En Coordenadas Esféricas la posición de un punto *M* en el espacio se determina por "***r* , *θ* , *φ***".

De la figura podemos deducir la relación entre las Coordenadas Rectangulares y la Coordenadas Esféricas:

$$\begin{cases} x = r\,\text{sen}\varphi\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\varphi\,\text{sen}\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \le r \le \infty \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Entonces para transformar una Integral Triple dada en Coordenadas Rectangulares en otra dada en Coordenadas Esféricas procedemos así:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V f(r\,\text{sen}\varphi\cos\theta, r\,\text{sen}\varphi\,\text{sen}\theta, r\cos\varphi)\left|J\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\varphi}\right)\right| drd\theta d\varphi =$$

$$= \iiint_V g(r,\theta,\varphi)\left|J\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\varphi}\right)\right| drd\theta d\varphi$$

Resolvamos el Jacobiano de la Transformación:

$$\left|J\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\varphi}\right)\right| = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \text{sen}\varphi\cos\theta & -r\,\text{sen}\varphi\,\text{sen}\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \text{sen}\varphi\,\text{sen}\theta & r\,\text{sen}\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\,\text{sen}\theta \\ \cos\varphi & 0 & -r\,\text{sen}\varphi \end{matrix}\right\| = r^2\text{sen}\varphi$$

Y finalmente resulta:

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V g(r,\theta,\varphi)\, r^2\text{sen}\varphi\, drd\theta\, d\varphi}$$

Ejemplo 14:
Calcular en Coordenadas Esféricas el volumen de una esfera de radio R.

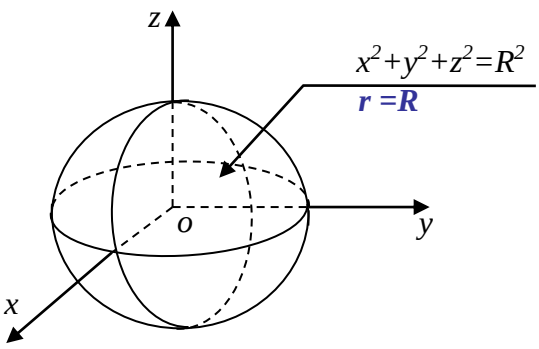


Figura 39

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V g(r,\theta,\varphi)\, r^2 \text{sen}\varphi\, dr d\theta\, d\varphi$$

Como tenemos que calcular el volumen de un cuerpo con Integrales triles resulta:

$$f(x,y,z)=1$$

$$\boxed{g(r,\theta,\varphi)=1}$$

$$\iiint_V dxdydz = \iiint_V r^2 \text{sen}\varphi\, dr d\theta\, d\varphi$$

Dominio V de integración:

En Coordenadas Rectangulares $\quad x^2+y^2+z^2=R^2$

En Coordenadas Cilíndricas: $\quad (r\text{sen}\varphi\cos\theta)^2+(r\text{sen}\varphi\text{sen}\theta)^2+(r\cos\varphi)^2=R^2$

$$r^2\text{sen}^2\varphi\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\varphi\text{sen}^2\theta + r^2\cos^2\varphi = R^2$$

$$r^2[\text{sen}^2\varphi(\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta)+\cos^2\varphi]=R^2$$

$$r^2=R^2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{r=R}$$

$$\iiint_V dxdydz = \iiint_V r^2\text{sen}\varphi dr d\theta\, d\varphi = \int_0^R dr\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} r^2\text{sen}\varphi\, d\varphi =$$

$$= \int_0^R dr\int_0^{2\pi} d\theta \Big| -r^2\cos\varphi\Big|_0^{\pi} = \int_0^R dr\int_0^{2\pi} 2r^2 d\theta =$$

$$= \int_0^R dr \Big| 2r^2\theta\Big|_0^{2\pi} = \int_0^R 4\pi\, r^2 dr = \left|\frac{4\pi\, r^3}{3}\right|_0^R = \frac{4\pi\, R^3}{3}$$

$$\boxed{\iiint_V dxdydz = \frac{4\pi\, R^3}{3}}$$

CAPÍTULO 6

INTEGRALES CULVILÍNEAS

INTEGRALES CURVILÍNEAS

El concepto de Integral Curvilínea se puede obtener a partir de generalizar la Integral Simple reemplazando el intervalo de integración (definido sobre un eje) por una curva plana (en R^2) o por una curva alabeada (en R^3).

Sea un Campo Vectorial F definido a lo largo de una curva plana L indicada en la figura.

$$F(x,y) = P(x,y)i + Q(x,y)j$$

Para facilitar la comprensión del concepto de Integral Curvilínea la asociaremos al cálculo de trabajo. Consideremos que F es una fuerza aplicada sobre un punto $M(x,y)$ que se desplaza a lo largo de la curva L y que dicha fuerza varía en magnitud y dirección a medida que el punto M se desplaza, es decir:

$$F = F(M)$$

Calcularemos el trabajo T que realiza la fuerza F al desplazarse el punto M desde A hasta B.

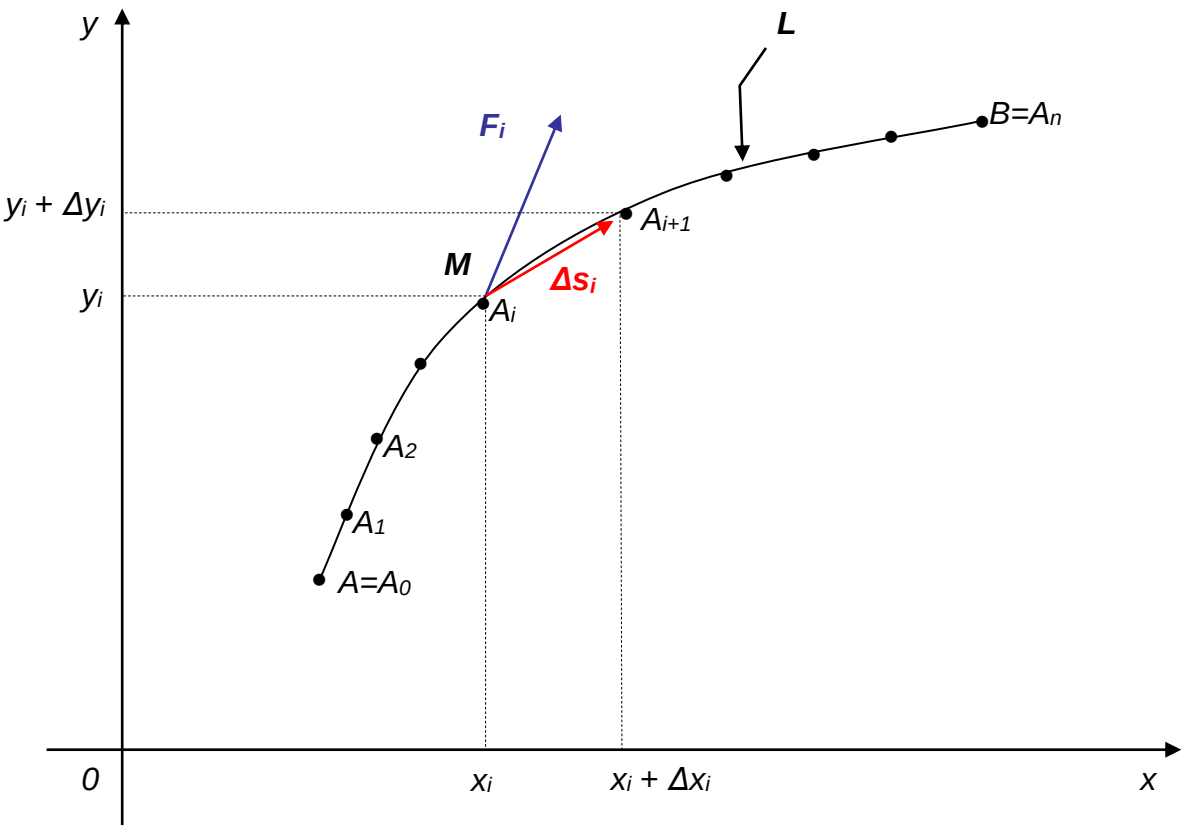


Figura 1

Dividamos a la curva L en "n" subarcos por los puntos $A_0 = A, A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots\ldots A_n = B$. Siendo la "$\text{máx}\Delta S$"la longitud del subarco más largo de la subdivisión..

El trabajo que realiza la fuerza F a lo largo del arco $\overset{\frown}{A_i A_{i+1}}$ es aproximadamente:

$$T_i \cong F_i \Delta s_i$$

Siendo F_i el valor de la fuerza F en el punto A_i, y Δs_i el vector $\overline{A_i A_{i+1}}$.

$$\Delta s_i = \Delta x_i i + \Delta y_i j$$
$$T_i \cong F_i \Delta s_i = P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i$$

Y el trabajo total T de la fuerza F a lo largo de la curva L es aproximadamente:

$$T \cong \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i\right]$$

El Trabajo T de la fuerza F a lo largo de la curva L entre los puntos A y B está dado por el límite de esta suma para cuando $n \to \infty$ es decir $\text{máx}\Delta S \to 0$

$$T = \lim_{\text{máx}\Delta S \to 0} \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta s_i = \lim_{\text{máx}\Delta S \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i\right]$$

Si F es una función continua, este límite existe y recibe el nombre de Integral Curvilínea de F a lo largo de la curva L.

$$\int_L F ds = \lim_{\text{máx}\Delta S \to 0} \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta s_i \qquad \text{ó}$$

$$\int_L \left[P(x, y)dx + Q(x, y)dy\right] = \lim_{\text{máx}\Delta S \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i\right]$$

También se la suele indicar:

$$\int_{(A)}^{(B)} \left[P(x, y)dx + Q(x, y)dy\right]$$

(A) y (B) son las coordenadas de los extremos de la curva L.

Para simplificar la escritura también se suelen obviar los corchetes expresándolas así:

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{(A)}^{(B)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

El ejemplo del Trabajo T de una fuerza es un caso particular de Integrales Curvilíneas. En general $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ se consideran como funciones de dos variables independientes definidas en un cierto dominio D que contiene a la curva L.

<u>Propiedades</u>

Definamos dos propiedades de las Integrales Curvilíneas:

1- Al cambiar el sentido de integración cambia el signo de la Integral Curvilínea. Pues al invertir el sentido de integración cambia el signo del vector Δs y por lo tanto cambia el signo de sus proyecciones Δx y Δy.

$$\int_{(A)}^{(B)} P dx + Q dy = -\int_{(B)}^{(A)} P dx + Q dy$$

2- Si dividimos a la curva L por algún punto intermedio C, entonces:

$$\int_{(A)}^{(B)} Pdx + Qdy = \int_{(A)}^{(C)} Pdx + Qdy + \int_{(C)}^{(B)} Pdx + Qdy$$

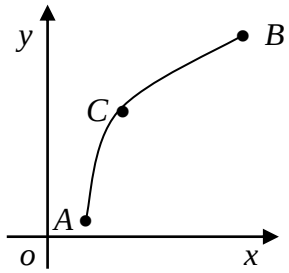


Figura 2

Esta propiedad es válida para un mayor número de divisiones.

Lo definido para la Integral Curvilínea es válido también cuando la curva L es cerrada, en estos casos se la suele indicar:

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad \text{ó} \qquad \oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

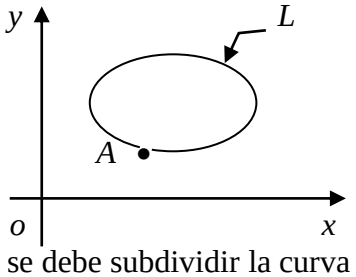


Figura 3

El origen y el extremo de la curva coinciden, por lo tanto para integrar se debe subdividir la curva y además se debe indicar el sentido de integración.

Llamaremos sentido positivo al sentido antihorario, y sentido negativo al sentido horario. Cuando no se indique el sentido consideraremos el antihorario.

<u>Cálculo de la Integral Curvilínea</u>

Es evidente que el valor de la Integral Curvilínea depende, en general, de la curva *L*. Si la ecuación de la curva es conocida y tiene la forma $y = f(x)$ o $x = g(y)$ o la forma paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$, entonces por sustitución se puede reducir la Integral Curvilínea a una Integral Definida de una sola variable.

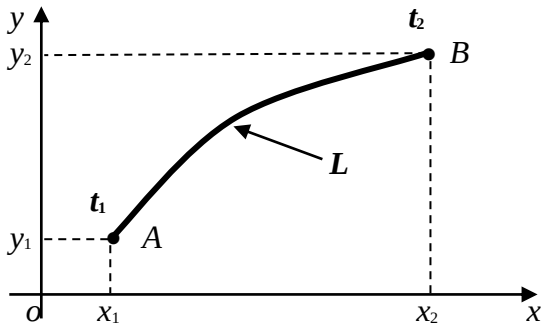


Figura 4

- Si la curva *L* está dada de la forma $y = f(x)$, por lo tanto $dy = f'(x).dx$, realizamos la sustitución:

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_1}^{x_2} \{P[x, f(x)] + Q[x, f(x)]f'(x)\}dx$$

- Si la curva *L* está dada de la forma $x = g(y)$, por lo tanto $dx = g'(y).dy$, realizamos la sustitución:

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{y_1}^{y_2} \{P[g(y),y]g'(y) + Q[g(y),y]\}dy$$

- Si la curva L está dada por la Función Vectorial $r(t) = [f(t), g(t)] = f(t)i + g(t)j$

o en su forma paramétrica $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, por lo tanto $\begin{cases} dx = f'(t)dt \\ dy = g'(t)dt \end{cases}$, sustituimos

$$\int_{(A)}^{(B)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_1}^{t_2} \{P[f(t), g(t)]\, f'(t) + Q[f(t), g(t)]\, g'(t)\}\, dt$$

Ejemplo 1:

Calcular la integral curvilínea $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x + y^2)dx + 2xydy$ a lo largo de la parábola $y = x^2$.

La ecuación de la curva L es $y = x^2$, entonces resulta $dy = 2.x.dx$, sustituimos en la integral:

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x + y^2)dx + 2xydy = \int_0^1 (x + x^4)dx + 2xx^2 2xdx = \int_0^1 (x + 5x^4)dx = \left| \frac{x^2}{2} + x^5 \right|_0^1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

Ejemplo 2:

Calcular $\int_L \frac{1}{2} ydx + x^2 dy$ siendo L el segmento de recta de $(2,0)$ a $(3,6)$.

La recta que para por los dos puntos citados es $y - 0 = \frac{6-0}{3-2}(x-2) \quad \Rightarrow \quad y = 6.x - 12$

Por lo tanto resulta $dy = 6.dx$, sustituimos en la integral:

$$\int_L \tfrac{1}{2} ydx + x^2 dy = \int_2^3 \tfrac{1}{2}(6x - 12)dx + x^2 6dx = \int_2^3 (3x^2 + 6x - 6)dx = \left| x^3 + 3x^2 - 6x \right|_2^3 =$$
$$= (27 + 27 - 18) - (8 + 12 - 12) = 36 - 8 = 28$$

Ejemplo 3:

Calcular $\int_L ydx + xdy$ siendo L el arco de parábola $x = 9 - y^2$ desde $(0,3)$ a $(5,2)$.

La curva L está dada por la ecuación $x = 9 - y^2$ por lo tanto resulta $dx = -2y.dy$, sustituimos en la integral:

$$\int_L ydx + xdy = \int_3^2 y(-2)ydy + (9 - y^2)dy = \int_3^2 (9 - 3y^2)dy = \left| 9y - y^3 \right|_3^2 = (18 - 8) - (27 - 27) = 10$$

Ejemplo 4:

Calcular $\int_L ydx + x^2 dy$ siendo L el segmento de recta $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 6t \end{cases}$ para $0 \le t \le 1$.

Entonces resulta: $dx = dt$ y $dy = 6.dt$, sustituimos en la integral:

$$\int_L ydx + x^2 dy = \int_0^1 6ydt + (t+2)^2 6dt = \int_0^1 (6t^2 + 30t + 24)dt = \left| 2t^3 + 15t^2 + 24t \right|_0^1 = 41$$

ÁREA DE UN DOMINIO LIMITADO POR UNA CURVA CERRADA

Consideremos el Dominio D limitado por la curva cerrada L indicado en la Figura 5

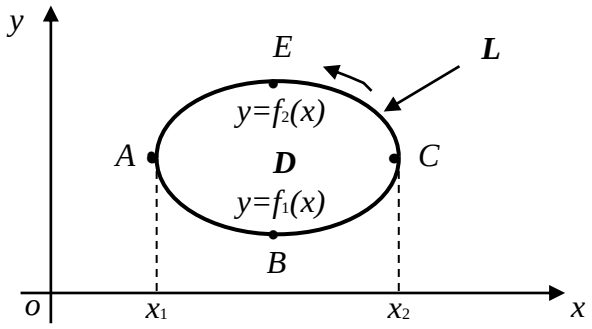


Figura 5

Recordemos que el área del Dominio D se calcula:

$$A = \iint_D dxdy = \int_{x_1}^{x_2} \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx = \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f_2(x)dx}_{(a)} - \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f_1(x)dx}_{(b)} \qquad (1)$$

(a) Esta integral se puede considerar como una Integral Curvilínea a lo largo del arco de curva $\overline{AEC}$ cuya ecuación es $y = f_2(x)$

$$\int_{x_1}^{x_2} f_2(x)dx = \int_{\overline{AEC}} ydx = -\int_{\overline{CEA}} ydx$$

Obtenemos esta última integral al invertir el sentido de integración.

(b) Esta integral se puede considerar como una Integral Curvilínea a lo largo del arco de curva $\overline{ABC}$ cuya ecuación es $y = f_1(x)$

$$\int_{x_1}^{x_2} f_1(x)dx = \int_{\overline{ABC}} ydx$$

Reemplazamos en la (1) lo obtenido en (a) y (b) y tenemos:

$$A = -\int_{\overline{CEA}} ydx - \int_{\overline{ABC}} ydx = -\left(\int_{\overline{CEA}} ydx + \int_{\overline{ABC}} ydx \right)$$

$$\boxed{A = -\int_L ydx} \qquad (2)$$

Nótese que se integró en el sentido contrario a las agujas del reloj (antihorario).

Procediendo de manera similar podemos demostrar que también el área de un dominio D se puede calcular:

$$\boxed{A = \int_L xdy} \qquad (3)$$

La fórmula más frecuentemente utilizada para el cálculo del área de un dominio limitado por una curva cerrada el la semisuma de las dos expresiones anteriores:

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \int_L (-y)dx + xdy} \qquad (4)$$

Ejemplo 5:

Calcular el área de la figura comprendida entre las curvas $x^2 - 4y = 0$ y $4x - y^2 = 0$.

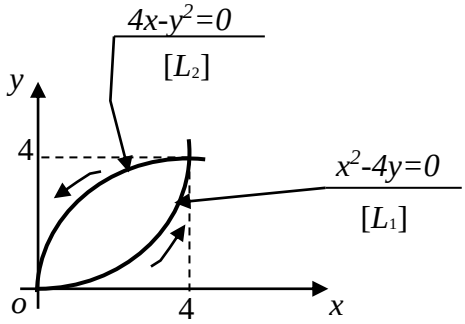


Figura 6

$$A = \frac{1}{2}\int_L (-y)dx + xdy = \frac{1}{2}\int_{L_1} (-y)dx + xdy + \frac{1}{2}\int_{L_2} (-y)dx + xdy$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^4 \left(-\frac{x^2}{4} + x\cdot\frac{x}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_4^0 \left(-y\cdot\frac{y}{2} + \frac{y^2}{4}\right)dy$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{x^2}{4}dx + \frac{1}{2}\int_4^0 \left(-\frac{y^2}{4}\right)dy = \frac{1}{2}\left|\frac{x^3}{12}\right|_0^4 + \frac{1}{2}\left|-\frac{y^3}{12}\right|_4^0 = \frac{8}{3} + \frac{8}{3}$$

$$\boxed{A = \frac{16}{3}}$$

FÓRMULA DE GREEN

Esta fórmula establece la relación existente entre la Integral Doble extendida en un dominio *D* y la Integral Curvilínea a lo largo de la frontera *L* de dicho dominio.

Sea el dominio *D* indicado en la **Figura 5** y consideremos definidas en él a las funciones $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ continuas y sus Derivadas Parciales también continuas en este dominio.

Resolvamos la siguiente Integral Doble:

$$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \left|P(x,y)\right|_{f_1(x)}^{f_2(x)}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \{P[x, f_2(x)] - P[x, f_1(x)]\}\, dx$$

$$= \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} P[x, f_2(x)]\, dx}_{(a)} - \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} P[x, f_1(x)]\, dx}_{(b)} \qquad (5)$$

(a) Esta integral se puede considerar como una Integral Curvilínea a lo largo del arco de curva $\overline{AEC}$ cuya ecuación es $y = f_2(x)$

$$\int_{x_1}^{x_2} P[x, f_2(x)]\, dx = \int_{\overline{AEC}} P(x,y)dx = -\int_{\overline{CEA}} P(x,y)dx$$

Obtenemos esta última integral al invertir el sentido de integración.

(b) Esta integral se puede considerar como una Integral Curvilínea a lo largo del arco de curva $\overline{ABC}$ cuya ecuación es $y = f_1(x)$

$$\int_{x_1}^{x_2} P[x, f_1(x)]dx = \int_{\overline{ABC}} P(x,y)dx$$

Reemplazamos en la (1) lo obtenido en (a) y (b) y tenemos:

$$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy = -\int_{\overline{CEA}} P(x,y)dx - \int_{\overline{ABC}} P(x,y)dx = -\left[\int_{\overline{CEA}} P(x,y)dx + \int_{\overline{ABC}} P(x,y)dx\right]$$

$$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy = -\int_L P(x,y)dx \qquad \text{ó}$$

$$\boxed{-\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy = \int_L P(x,y)dx} \qquad (6)$$

Si planteamos ahora la Integral Doble $\iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dxdy$ y procedemos de forma similar, podemos demostrar que:

$$\boxed{\iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dxdy = \int_L Q(x,y)dy} \qquad (7)$$

Sumando miembro a miembro las expresiones (6) y (7) obtendremos la Fórmula de Green:

$$\boxed{\iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy} \qquad (8)$$

o simplemente:

$$\boxed{\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_L Pdx + Qdy} \qquad \textbf{Fórmula de Green} \qquad (8)$$

Nótese que se integró en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Si se integra en el sentido horario, la Fórmula de Green resulta:

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dxdy = \int_L Pdx + Qdy \qquad \text{Fórmula de Green} \qquad (9)$$

(Integrando en el sentido horario)

Ejemplo 6:

Utilizando la Fórmula de Green calcular la Integral Curvilínea $\int_L x^2 ydx + ydy$ a lo largo de la curva cerrada L formada por $y^2 = x$ y $y = x$.

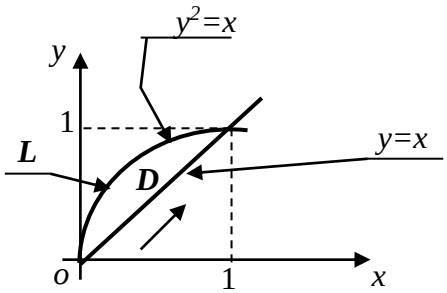


Figura 7

$$P = x^2 y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = x^2$$

$$Q = y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\int_L x^2 ydx + ydy = \iint_D (-x^2)dxdy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} (-x^2)dx = \int_0^1 dy \left| -\frac{x^3}{3} \right|_{y^2}^{y} = \int_0^1 \left(-\frac{y^3}{3} + \frac{y^6}{3} \right) dy =$$

$$= \left| -\frac{y^4}{12} + \frac{y^7}{21} \right| = -\frac{1}{12} + \frac{1}{21} = -\frac{3}{84}$$

$$\boxed{\int_L x^2 ydx + ydy = -\frac{1}{28}}$$

CONDICIÓN PARA QUE UNA INTEGRAL CURVILÍNEA NO DEPENDA DE LA TRAYECTORIA DE INTEGRACIÓN

Analicemos la Integral Curvilínea

$$\int_{(A)}^{(B)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (10)$$

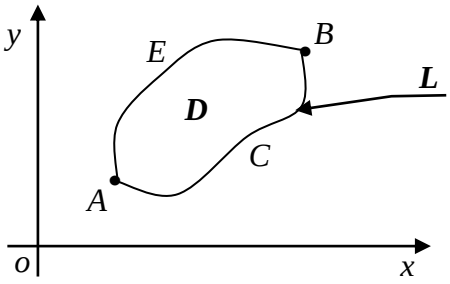


Figura 8

Y sean $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ funciones continuas y con derivadas también continuas en el dominio arbitrario *D*.
Si consideramos que la integral (10) no depende de la Trayectoria de Integración (sino que solo depende de los extremos de la trayectoria) entonces se cumple que:

$$\int_{\overline{ACB}} Pdx + Qdy = \int_{\overline{AEB}} Pdx + Qdy \qquad \text{ó}$$

$$\int_{\overline{ACB}} Pdx + Qdy - \int_{\overline{AEB}} Pdx + Qdy = 0$$

Cambiamos el sentido de integración de la segunda integral

$$\int_{\overline{ACB}} Pdx + Qdy + \int_{\overline{BEA}} Pdx + Qdy = 0$$

Entonces la Integral Curvilínea a lo largo de un contorno cerrado arbitrario *L* es igual a cero:

$$\int_L Pdx + Qdy = 0 \qquad (11)$$

Por lo tanto si la Integral Curvilínea es independiente de la Trayectoria de Integración, entonces esta Integral Curvilínea a lo largo de un contorno cerrado cualquiera es igual a cero.
El razonamiento recíproco también se cumple: si una Integral Curvilínea a lo largo de un contorno cerrado es nula entonces esta integral es independiente de la Trayectoria de Integración.

Veamos ahora que condiciones deben satisfacer las funciones $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ para que la Integral Curvilínea (11) sea nula. Para ello recordemos la Fórmula de Green correspondiente a la trayectoria dada:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_L Pdx + Qdy$$

Si la Integral Curvilínea del segundo miembro es nula, también lo será la Integral Doble del primero y para que ello ocurra se debe cumplir que:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}} \qquad (12)$$

Esta es la condición necesaria y suficiente para que la Integral Curvilínea (10) sea independiente de la Trayectoria de Integración.

Ejemplo 7:

La Integral Curvilínea $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x+y^2)dx+2xydy$ es Independiente de la Trayectoria de Integración, pues:

$$\left.\begin{array}{lll} P = x+y^2 & \therefore & \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y \\ \\ Q = 2xy & \therefore & \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Esta Integral Curvilínea ya fue resuelta en el Ejemplo 1 a lo largo de la trayectoria $y = x^2$ y el resultado fue:

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x+y^2)dx+2xydy = \frac{3}{2}$$

Significa que cualquiera sea la Trayectoria de Integración que elijamos para integrar entre los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$, siempre obtendremos ese mismo resultado.

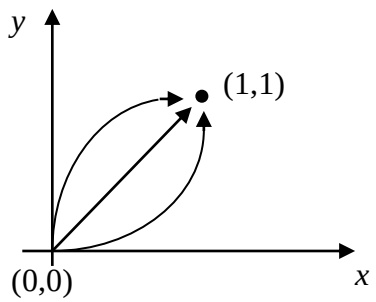


Figura 9

INTEGRAL CURVILÍNEA DE LA FUNCIÓN *f(x,y)*

Sea la función $f(x,y)$ definida a lo largo de la curva L.

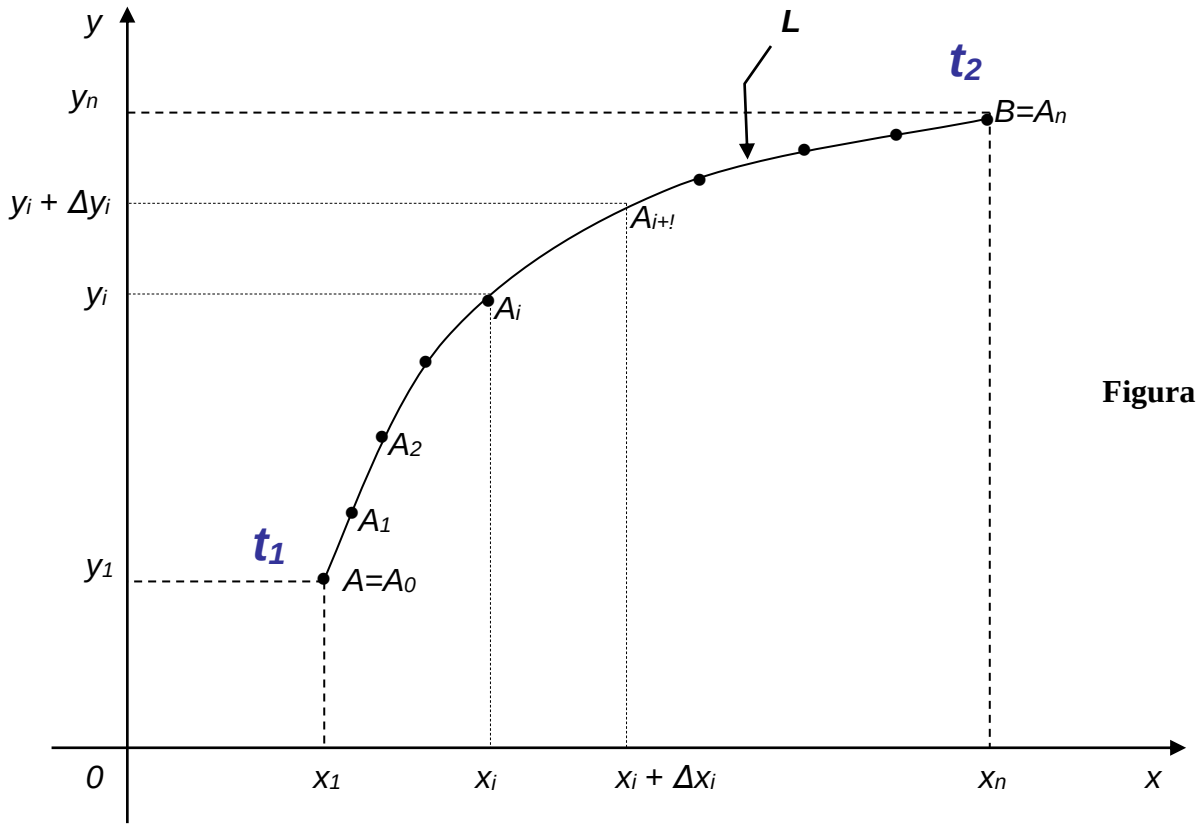


Figura 10

Definimos la Integral Curvilínea de la función $f(x,y)$ a lo largo de la curva L de la siguiente manera:

$$\int_L f(x,y)ds = \lim_{\text{máx}\Delta S \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$$

Donde Δs_i es la longitud del subarco $\widehat{A_i A_{i+1}}$ y ds es un diferencial de arco.

Recordemos que si una curva está dada de forma Paramétrica $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ y éstas son funciones continuas y con derivadas también continuas entonces la longitud de un arco ds es:

$$ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,.dt$$

Y la Integral Curvilínea se calcula:

$$\boxed{\int_L f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\;dt}$$

Una interpretación gráfica de esta Integral Curvilínea es que nos da el área de la lámina perpendicular al plano 0*xy* cuya base es la curva *L*. Ver la **Figura 11**

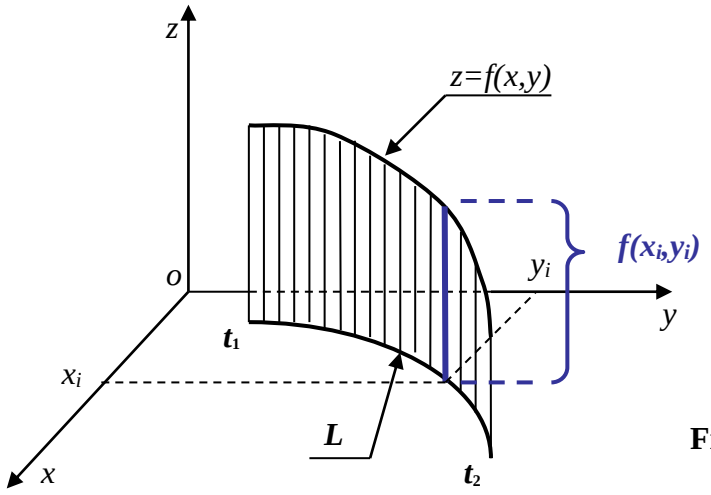


Figura 11

Si la curva *L* está dada de la forma $y = g(x)$ la longitud del diferencial de arco es:

$$ds = \sqrt{1+[g'(x)]^2}\ .dx$$

Y la Integral Curvilínea se calcula:

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{x_1}^{x_n} f[x,g(x)]\sqrt{1+[g'(x)]^2}\ dx$$

También podemos considerar la Integral Curvilínea de la Función $f(x,y,z)$ a lo largo de la curva

alabeada *L* $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}$

$$\int_L f(x,y,z)ds = \int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\omega'(t)]^2}\ dt$$

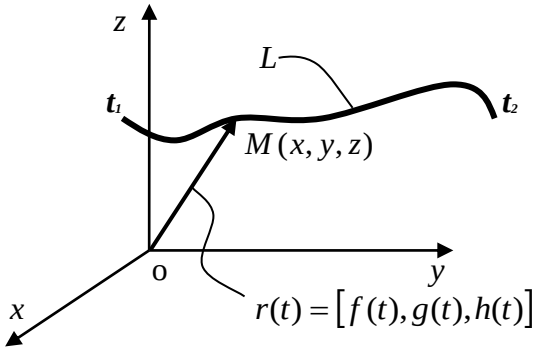
INTEGRAL CURVILÍNEA EN EL ESPACIO

Sea el Campo Vectorial $F(x,y,z) = P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k$

y L una curva alabeada dada por la Función Vectorial $r(t) = [f(t), g(t), h(t)] = f(t)i + g(t)j + h(t)k$

o en su forma paramétrica $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$

continua en un intervalo $t_1 \le t \ge t_2$



Entonces la Integral Curvilínea del Campo Vectorial $F(x,y,z)$ a lo largo de la curva alabeada L se resuelve así:

$$\int_L F(x,y,z)ds = \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \{P[f(t),g(t),h(t)]f'(t) + Q[f(t),g(t),h(t)]g'(t) + R[f(t),g(t),h(t)]h'(t)\}dt$$

Ejemplo 8:

Calcular la Integral del Campo Vectorial $F(x,y,z) = [xyz, 2x+y, 2yz^2]$, a lo largo de la recta dada por la Función Vectorial $r(t) = [4t, 2t-4, t]$, en el intervalo $1 \le t \ge 2$.

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_L xyzdx + (2x+y)dy + 2yz^2\ dz$$

$$\begin{cases} f(t) = 4t & \rightarrow & f'(t) = 4 \\ g(t) = 2t-4 & \rightarrow & g'(t) = 2 \\ h(t) = t & \rightarrow & h'(t) = 1 \end{cases}$$

$$\int_L xyzdx + (2x+y)dy + 2yz^2\ dz = \int_1^2 \{4t.(2t-4).t.4 + [8t + (2t-4)].2 + 2.(2t-4).t^2\}dt =$$
$$= \int_1^2 (36t^3 - 72t^2 + 20t - 8)dt = \left|9t^4 - 24t^3 + 10t^2 - 8t\right|_1^2 = -11$$

FUNCIÓN POTENCIAL Y CAMPO VECTORIAL CONSERVATIVO

Si un Campo Vectorial $F = P(x,y)\,i + Q(x,y)\,j$ es el Gradiente de alguna Función $u(x,y)$ entonces es un **Campo Vectorial Conservativo** y a la Función se le llama **Función Potencial** de F .
Es decir que dados:

$$\left.\begin{array}{l}\text{El Campo Vectorial } F \\ \\ \text{Función} \quad u(x,y)\end{array}\right\} \quad \text{si} \qquad F = \text{grad}\, u \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} F = \text{Campo Vectorial Conservativo} \\ \\ u = \text{Función Potencial}\end{array}\right.$$

De acuerdo a lo definido, si F es el Gradiente de una función $u(x,y)$ tenemos:

$$F = P(x,y)\,i + Q(x,y)\,j = \text{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\,i + \frac{\partial u}{\partial y}\,j$$

Entonces:

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad\qquad Q = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Si derivamos la primera igualdad con respecto a "*y*" y a la segunda igualdad la derivamos con respecto a "*x*" obtenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \qquad\qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Si las derivadas segundas son continuas, se verifica que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Entonces podemos afirmar que si $F = P(x,y)\,i + Q(x,y)\,j$ es un **Campo Vectorial Conservativo** entonces se verifica que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

La inversa de esta afirmación se cumple solo si F es un Campo Vectorial Conservativo definido sobre una región simplemente conexa *D*.

Entonces finalmente podemos definir que si $F = P(x,y)\,i + Q(x,y)\,j$ es un Campo Vectorial definido en una Región Simplemente Conexa *D*, con $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ continuas y sus derivadas parciales también continuas, si se verifica que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ en toda la región entonces *F* es un **Campo Vectorial Conservativo.**

Desde el punto de vista físico podemos decir que un Campo Vectorial es Conservativo si el trabajo realizado a lo largo de una trayectoria cerrada es igual a cero.

Nota:
Si $F = P(x,y)\,i + Q(x,y)\,j$ es el gradiente de la función $u(x,y)$, también podemos comprobar que la expresión $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ es el Diferencial Total de la función $u(x,y)$.
Es decir :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Diferencia de Potencial

Si $u(x,y)$ es la Función Potencial del Campo Vectorial Conservativo $F = P(x,y)\,i + Q(x,y)\,j$ entonces la Integral Curvilínea $\int_{(A)}^{(B)} Pdx + Qdy$ mide la Diferencia de Potencial entre los puntos *A* y *B*.

Para demostrarlo recordemos que si $u(x,y)$ es la Función Potencial de *F* entonces $P = \frac{\partial u}{\partial x}$ y $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, en cuyo caso la expresión $Pdx + Qdy$ es el Diferencial Total de la función $u(x,y)$, es decir:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = Pdx + Qdy$$

y la Integral Curvilínea planteada resulta:

$$\int_{(A)}^{(B)} Pdx + Qdy = \int_{(A)}^{(B)} du$$

Ahora escribamos la ecuación paramétrica de la trayectoria *L* que une los puntos *A* y *B* $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

Entonces $u(x,y) = u\left[f(t), g(t)\right] = u(t)$ y su Diferencial Total es $du = u'dt = \frac{du}{dt}dt$

Y finalmente la Integral Curvilínea resulta:

$$\int_{(A)}^{(B)} Pdx + Qdy = \int_{(A)}^{(B)} du = \int_{(A)}^{(B)} \frac{du}{dt}dt = \left|u\right|_{(A)}^{(B)} = u(B) - u(A)$$

La Integral Curvilínea no depende de la Trayectoria de Integración *L*, solo depende de los extremos *A* y *B*.

Obtención de la Función Potencial

Dado un Campo Vectorial Conservativo $F = P(x,y)\,i + Q(x,y)\,j$ veamos cómo podemos obtener la Función Potencial correspondiente.

Como F es un Campo Vectorial Conservativo, se verifica que $\frac{\partial u}{\partial x} = P$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$.

Entonces podemos obtener $u(x,y)$ integrando a P con respecto a *x*, o integrando a Q con respecto a *y*, indistintamente. Hagámoslo integrando a P con respecto a *x*:

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y) \qquad (12)$$

Estamos integrando con respecto a *x* a una derivada parcial $\left(\frac{\partial u}{\partial x} = P\right)$, por lo tanto debemos expresar la constante de integración como una función de *y*.

$u(x,y)$ es la Función Potencial buscada, solo nos resta obtener el valor de $\varphi(y)$ y para ello derivamos la (12) respecto de *y*.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial\left(\int Pdx\right)}{\partial y} + \varphi'(y)$$

Pero sabemos que $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$

$$\frac{\partial\left(\int Pdx\right)}{\partial y} + \varphi'(y) = Q$$

Despejamos $\varphi'(y)$

$$\varphi'(y) = Q - \frac{\partial\left(\int Pdx\right)}{\partial y}$$

Finalmente integramos $\varphi'(y)$ y reemplazamos lo obtenido en la (12).

Ejemplo:

Sea $F(x,y) = (x + y^2)\,i + 2xy\,j$, primero verifiquemos que sea un gradiente:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$$

Entonces la expresión $(x + y^2)dx + 2xydy$ es el Diferencial Total de la función $u(x,y)$, es decir:

$$du = (x + y^2)dx + 2xydy$$

Obtengamos ahora la Función Potencial $u(x,y)$

$$u(x,y) = \int (x + y^2)dx + \varphi(y)$$

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy^2 + \varphi(y)$$

Derivamos respecto a *y* e igualamos a Q

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + \varphi'(y) = Q = 2xy$$ Despejamos $\varphi'(y)$

$$\varphi'(y) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(y) = C$$ Finalmente obtenemos:

$$\boxed{u(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy^2 + C}$$

Veamos otra manera de obtener la Función Potencial (que nos será de utilidad para trabajar en R^3 más adelante):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \qquad \Rightarrow \qquad u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y) \qquad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \qquad \Rightarrow \qquad u(x,y) = \int Q(x,y)dy + \psi(x) \qquad (13)$$

Las expresiones (12) y (13) deben ser iguales, entonces al compararlas obtenemos el valor de $u(x,y)$.

Resolvamos el mismo ejemplo anterior de esta forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + y^2 \qquad \Rightarrow \qquad u(x,y) = \int (x + y^2)dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + xy^2 + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy \qquad \Rightarrow \qquad u(x,y) = \int 2xydy + \psi(x) = xy^2 + \psi(x)$$

Para que ambas expresiones sean iguales debe ser:

$$\varphi(y) = C \qquad \text{y} \qquad \psi(x) = \frac{x^2}{2} + C$$ entonces finalmente resulta:

$$\boxed{u(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy^2 + C}$$

Ya estudiamos el concepto de Campo Vectorial Conservativo en R^2, veámoslo ahora en R^3.

Un Campo Vectorial $F(x,y,z) = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\;j + R(x,y,z)\,k$ es un **Campo Vectorial Conservativo** si F es el **Gradiente** de algún Campo Escalar $u(x,y,z)$, y a éste se le llama **Función Potencial** de F:

Es decir que dados:

$$\left.\begin{array}{l}\text{El Campo Vectorial } F \\ \\ \text{El Campo Escalar } \quad u(x,y,z)\end{array}\right\} \text{ si } \qquad F = \text{grad}\, u \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F = \text{Campo Vectorial Conservativo} \\ \\ u = \text{Función Potencial}\end{array}\right.$$

De acuerdo a lo definido, si F es el Gradiente de $u(x,y,z)$ tenemos:

$$F = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\;j + R(x,y,z)\,k = \text{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\,i + \frac{\partial u}{\partial y}\,j + \frac{\partial u}{\partial z}\,k$$

Entonces:

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad\qquad Q = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad\qquad R = \frac{\partial u}{\partial z}$$

Para que un Campo Vectorial sea Conservativo se debe verificar que:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \qquad\qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Estas condiciones serán demostradas en el Capítulo siguiente al estudiar Campo Vectorial Irrotacional.

Nota:
Si $F = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\;j + R(x,y,z)\,\mathrm{k}$ es el gradiente del Campo Escalar $u(x,y,z)$, también podemos comprobar que la expresión $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ es el Diferencial Total de $u(x,y,z)$.
Es decir :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Obtención de la Función Potencial

Dado un Campo Vectorial Conservativo $F = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\;j + R(x,y,z)\,k$ veamos cómo podemos obtener la Función Potencial correspondiente.
Como F es un Campo Vectorial Conservativo, se verifica que $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$ y $\frac{\partial u}{\partial z} = R$.

Entonces podemos obtener $u(x,y,z)$ integrando a P con respecto a *x*, integrando a Q con respecto a *y* e integrando a R respecto a *z*.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y,z) \qquad \Rightarrow \qquad u(x,y,z) = \int P(x,y,z)dx + \varphi(y,z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y,z) \qquad \Rightarrow \qquad u(x,y,z) = \int Q(x,y,z)dy + \psi(x,z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = R(x,y,z) \qquad \Rightarrow \qquad u(x,y,z) = \int R(x,y,z)dx + \phi(x,y)$$

Las tres expresiones deben ser iguales, entonces al compararlas obtenemos el valor de $u(x,y,z)$.

<u>Ejemplo</u>:
Sea $F(x,y,z) = (yz^2 + 3x^2z)\,i + xz^2\,j + (2xyz + x^3)\,k$, primero verifiquemos que se cumplan las condiciones:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 2xz \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 2yz + 3x^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = z^2$$

Entonces la expresión $(yz^2 + 3x^2z)dx + xz^2dy + (2xyz + x^3)dz$ es el Diferencial Total de la función $u(x,y,z)$, es decir:

$$du = (yz^2 + 3x^2z)\,dx + xz^2dy + (2xyz + x^3)dz$$

Obtengamos ahora la Función Potencial $u(x,y,z)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz^2 + 3x^2z \qquad \Rightarrow \qquad u(x,y,z) = \int (yz^2 + 3x^2z)dx + \varphi(y,z) = xyz^2 + x^3z + \varphi(y,z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xz^2 \qquad \Rightarrow \qquad u(x,y,z) = \int xz^2dy + \psi(x,z) = xyz^2 + \psi(x,z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2xyz + x^3 \qquad \Rightarrow \qquad u(x,y,z) = \int (2xyz + x^3)dx + \phi(x,y) = xyz^2 + x^3z + \phi(x,y)$$

Para que las tres expresiones sean iguales debe ser:

$\varphi(y,z) = C$, $\psi(x,z) = x^3z + C$ y $\phi(x,y) = C$ entonces finalmente resulta:

$$u(x,y,z) = xyz^2 + x^3z + C$$

CAPÍTULO 7

INTEGRALES DE SUPERFICIE

OPERADOR DE HAMILTON

El Operador de Hamilton u **Operador Nabla** es un vector simbólico que no representa por si mismo ninguna cantidad vectorial, sino que indica operaciones de derivación que se deben efectuar con la función que se escribe a continuación del símbolo.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \qquad \nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x} ; \frac{\partial}{\partial y} ; \frac{\partial}{\partial z} \right]$$

GRADIENTE

Ya estudiamos Gradiente de una función en el Capítulo nº 2, recordemos algunos de sus conceptos.

Sea el Campo Escalar $u = f(x, y, z)$ definido en cierta región del espacio. El conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $f(x, y, z) = C$ es una **superficie de nivel**, puesto que en cada uno de sus puntos, la función u tiene el mismo valor constante C.

Recordemos que en cada punto donde está definido un Campo Escalar $u = f(x, y, z)$ se determina un vector llamado **Gradiente** que está dirigido según la normal a la **superficie de nivel** e indica la dirección en la cual la Derivada Direccional es máxima:

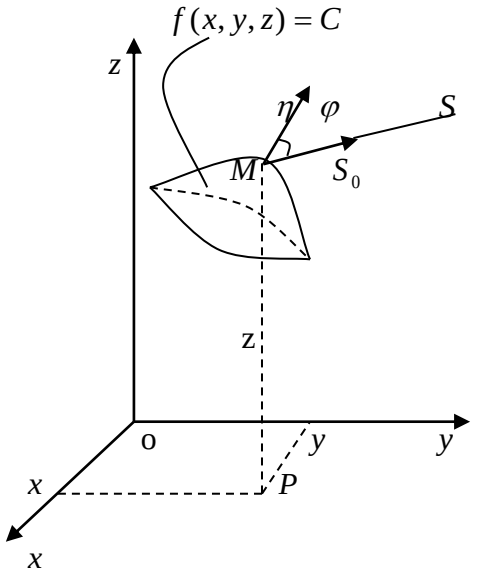
$$\text{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k \qquad \text{grad}u = \left[\frac{\partial u}{\partial x} ; \frac{\partial u}{\partial y} ; \frac{\partial u}{\partial z} \right]$$

Al multiplicar el Operador Nabla por una función escalar obtenemos su gradiente.

$$\nabla . u = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) . u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k$$

Es decir que también podemos expresar el Gradiente de una función de la siguiente manera:

$$\boxed{\text{grad}\, u = \nabla . u}$$



Recordemos que la derivada de $u = f(x, y, z)$ en el punto $M(x, y, z)$ en la dirección S es:

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma$$

α, β, γ son los ángulos directores de la dirección S.

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \nabla u . S_0$$

S_0 es el vector unitario en la dirección S.

El máximo valor de esta derivada es en la dirección de la normal a la superficie de nivel en este punto. Si llamamos η al versor que señala esa dirección resultará:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u.\eta = |\nabla u|.|\eta| \cos\varphi = |\nabla u|$$

Siendo: $|\eta| = 1$, $\varphi = 0$ y $\cos\varphi = 1$

Por lo tanto el valor máximo de la derivada de la función $u = f(x, y, z)$ en el punto $M(x, y, z)$ en la dirección de η es igual a:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = |\nabla u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

Ejemplo:

Dada la función $u = 3xy + z^2$. ¿Cuál es la mayor rapidez de crecimiento de esta función en el punto $M(2,0,4)$? (es decir ¿cuál es el valor máximo de la derivada en ese punto?).

Calculamos su gradiente:

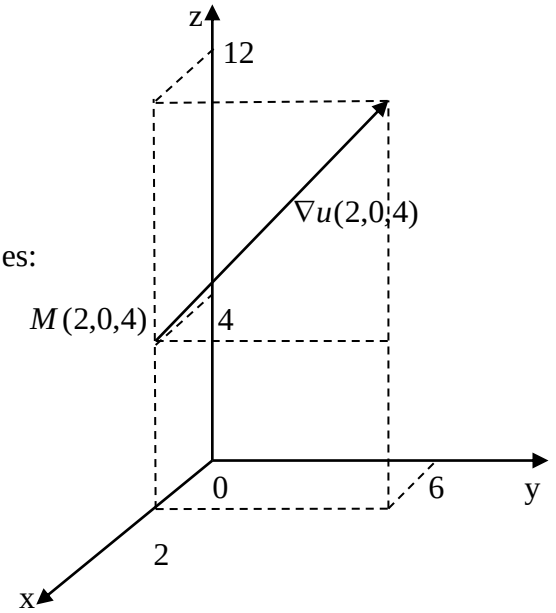
$$\nabla u = 3yi + 3xj + 2zk$$

Determinamos el gradiente en el punto $M(2,0,4)$:

$$\nabla u(2,0,4) = 6j + 8k$$

El valor máxima de la derivada en el punto $M(2,0,4)$ es:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = |\nabla u(2,0,4)| = \sqrt{0^2 + 6^2 + 8^2} = 10$$



Respuesta:

En el punto $M(2,0,4)$ la derivada de la función $u = 3xy + z^2$ tiene su valor máximo $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 10$ y es en la dirección del vector $\nabla u(2,0,4) = 6j + 8k$

DIVERGENCIA

Dado el Campo Vectorial $F = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\,j + R(x,y,z)\,k$ su **Divergencia** es una magnitud escalar igual a:

$$\boxed{\text{div}F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}}$$

Es decir que la $divF$ es un Campo Escalar que también podemos expresar como el producto escalar entre el vector simbólico ∇ y el vector F :

$$\nabla.F = \left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right).(Pi + Qj + Rk)$$

$$\nabla.F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\text{div}F = \nabla.F$$

Si bien esta definición puede aparentar ser rebuscada desde el punto de vista matemático, surge del estudio de la Física.
Si algún ente físico se genera en el interior de cierta región del campo o es absorbido por esa región, la $\text{div}F$ nos da la proporción por unidad de volumen en que el ente físico circula por un punto.
Si F representa la velocidad de un fluido, la $\text{div}F$ en un punto indica la proporción en que el fluido es introducido o sustraído del punto y por lo tanto mide la potencia de la fuente o sumidero existente en ese punto.
Si F representa la corriente de calor y $\text{div}F$ es positiva en un punto, entonces existe una fuente de calor localizada en ese punto o cierta cantidad de calor debe salir del punto haciendo que la temperatura en el punto decrezca.

Ejemplo:
Calculemos la divergencia de $F = x^3yzi + 3y^2j + 5yz^2k$ en el punto $M(2,1,3)$

$P = x^3yz$ $\qquad$ $Q = 3y^2$ $\qquad$ $R = 5yz^2$

$\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2yz$ $\qquad$ $\frac{\partial Q}{\partial y} = 6y$ $\qquad$ $\frac{\partial R}{\partial z} = 10yz$

$$\text{div}F = 3x^2yz + 6y + 10yz$$

y en el punto $M(2,1,3)$ resulta:

$$\text{div}F = 36 + 6 + 30$$

$$\text{div}F = 72$$

ROTOR

Dado el Campo Vectorial $F = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\,j + R(x,y,z)\,k$ su **Rotor** es un vector igual a:

$$\boxed{\text{rot}F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k}$$

Es decir que $rotF$ es un Campo Vectorial que también podemos expresar como el productor vectorial entre el vector simbólico ∇ y el vector F :

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) \times \left(Pi + Qj + Rk\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k$$

$$\text{rot}F = \nabla \times F$$

El $\text{rot}F$, al igual que $\text{div}F$, surge en forma natural en el estudio de problemas físicos.

El Rotor de un vector da la medida de la velocidad angular en cada punto del Campo Vectorial.

Si F representa la velocidad en cada punto de un fluido incompresible y considerando en un instante dado una pequeña esfera del fluido cuyo centro es el punto M ; en un instante posterior la esfera pudo haberse trasladado a otra posición, pudo haber sufrido deformaciones o **pudo haber girado** alrededor de un determinado eje, el $\text{rot}F$ da la medida de este último tipo de movimiento.

Ejemplo:
Calculemos el rotor de $F = x^3 yzi + 3y^2 j + 5yz^2 k$ en el punto $M(2,1,3)$

$P = x^3 yz$ $\qquad$ $Q = 3y^2$ $\qquad$ $R = 5yz^2$

$\frac{\partial P}{\partial y} = x^3 z$ $\qquad$ $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial R}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial P}{\partial z} = x^3 y$ $\qquad$ $\frac{\partial Q}{\partial z} = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial R}{\partial y} = 5z^2$

$$\text{rot}F = \left(5z^2 - 0\right) i + \left(x^3 y - 0\right) j + \left(0 - x^3 z\right) k$$

$$\text{rot}F = 5z^2 i + x^3 yj - x^3 zk$$

y en el punto $M(2,1,3)$:

$$\boxed{\text{rot}F = 45i + 8j - 24k}$$

CAMPO VECTORIAL IRROTACIONAL, CAMPO VECTORIAL SOLENOIDAL Y ECUACIÓN DE LAPLACE

Examinemos algunas fórmulas que son de importancia en la Hidrodinámica, en la Teoría de la Elasticidad y en la Electrodinámica:

Campo Vectorial Irrotacional

Sea el Campo Vectorial $F(x,y,z) = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\;j + R(x,y,z)\,k$ cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales de segundo orden continuas, si su rotor es el vector nulo, el Campo Vectorial se llama Irrotacional.

$\text{rot}F = \nabla \times F = 0$	$\Rightarrow$	F es un **Campo Vectorial Irrotacional**

$$\text{rot}F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k = 0$$

Para ello se deben verificar las igualdades:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Demostremos que ello ocurre cuando el Campo Vectorial F es el gradiente de un Campo Escalar $u(x,y,z)$, es decir, cuando el Campo Vectorial F es Conservativo.

En efecto, si F es un Campo Vectorial Conservativo, entonces:

$$F(x,y,z) = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\;j + R(x,y,z)\,k = \text{grad}\,u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k$$

$$\text{rot}F = \text{rot}(\text{grad}u) = \nabla \times \nabla . u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}\right) i + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right) j + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right) k$$

Y por la igualdad de las derivadas mixtas de segundo orden continuas obtenemos:

$$\text{rot}F = \text{rot}(\text{grad}u) = \nabla \times \nabla . u = 0$$

(es lógico, pues el producto vectorial de un vector por si mismo es nulo).

En resumen si $\text{rot}F = 0$ **el Campo Vectorial** F **se llama IRROTACIONAL.**

Y todo Campo Vectorial Conservativo es irrotacional.

Campo Vectorial Solenoidal

Sea el Campo Vectorial $F(x,y,z) = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\;j + R(x,y,z)$ cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales de segundo orden continuas, si su divergencia es nula, el Campo Vectorial se llama Solenoidal.

$$\text{div}F = \nabla.F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F \text{ es un } \textbf{Campo Vectorial Solenoidal}$$

Demostremos que esto ocurre cuando el Campo Vectorial F es el rotor de algún vector (que llamaremos A).

$$A(x,y,z) = A_1(x,y,z)\,i + A_2(x,y,z)\;j + A_3(x,y,z)\,k$$

$$F = \text{rot}A = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)k$$

$$\text{div}F = div(\text{rot}A) = \left(\frac{\partial^2 A_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y \partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z \partial y}\right)$$

Y por la igualdad de las derivadas mixtas de segundo orden continuas obtenemos:

$$\text{div}F = \text{div}(\text{rot}A) = \nabla.(\nabla \times A) = 0$$

(También podemos deducirlo analizando que el vector $\nabla \times A$ es un vector normal a ∇ y el producto escalar entre dos vectores perpendiculares es igual a cero).

En resumen si $\text{div}F = 0$ **el Campo Vectorial** F **se llama SOLENOIDAL.**

Y esto ocurre cuando F **es el rotor de algún vector.**

Ecuación de Laplace

Dado el Campo Escalar $u(x,y,z)$ su Gradiente es:

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k \qquad \text{y}$$

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \text{ó}$$

$$\nabla . \nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Esta expresión es muy común y se la expresa:

$$\nabla . \nabla u = \nabla^2 u = \Delta u$$

Y al operador correspondiente se lo denomina **Operador de Laplace:**

$$\boxed{\nabla . \nabla = \nabla^2 = \Delta}$$

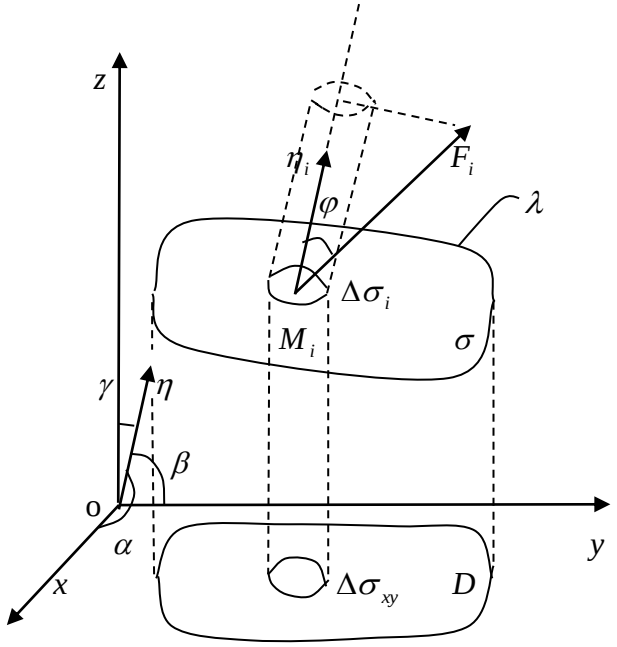
$$\boxed{\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}} \qquad \textbf{Operador de Laplace.}$$

Y cuando resulta

$$\nabla^2 u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$ se la denomina **Ecuación de Laplace.**

La función $u(x,y,z)$ que satisface esta ecuación se llama **Función Armónica.**

INTEGRAL DE SUPERFICIE



Consideremos en el espacio la superficie σ limitada por la curva cerrada λ. Supongamos que en el punto M la dirección positiva de la normal a la superficie está dada por el versor $\eta(M)$ y que en cada punto está definido el vector:

$$F = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\,j + R(x,y,z)\,k$$

$$\eta = \cos\alpha.i + \cos\beta.j + \cos\gamma.k$$

Dividimos a la superficie en áreas elementales $\Delta\sigma_i$ y tomamos la suma:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[F(M_i).\eta(M_i)\right].\Delta\sigma_i$$

Donde $F(M_i)$ es el valor del vector en el punto M_i y $\eta(M_i)$ es la normal a la superficie en ese punto.
El límite de esta suma cuando $n \to \infty$ es decir cuando $\text{máx}\Delta\sigma_i \to 0$ se llama **Integral de Superficie**:

$$\iint_\sigma F.\eta.d\sigma = \lim_{\text{máx}\Delta\sigma\to 0}\sum_{i=1}^{n} F_i.\eta_i.\Delta\sigma_i$$

Siendo "$\text{máx}\Delta\sigma$" el área de la mayor de todas las áreas elementales en que está dividida la superficie "σ".
$F.\eta$ es el producto escalar entre dos vectores, por lo tanto

$$F_i.\eta_i.\Delta\sigma_i = |F_i|.\Delta\sigma_i.\cos\varphi$$

Este producto es igual al volumen del cilindro de base $\Delta\sigma_i$ y altura $|F_i|.\cos\varphi$
Si F es la velocidad de un líquido, este producto es la cantidad de líquido que pasa por $\Delta\sigma_i$ en la unidad de tiempo, en la dirección η_i. Y la Integral de Superficie da la cantidad total de líquido que pasa por la superficie en la dirección positiva de η en la unidad de tiempo.

$$\boxed{\iint_\sigma F.\eta.d\sigma = \iint_\sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma}$$

El cálculo de la Integral de Superficie se reduce al cálculo de una integral doble en un dominio plano.
Supongamos que σ está dada por la ecuación $z = f(x,y)$ y es tal que toda paralela al eje $0z$ la corta en un solo punto (en caso contrario se debe subdividir la superficie y calcular la integral de cada parte por separado). Los cosenos directores de la normal son:

$$\cos\alpha = \frac{-\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

$$\cos\beta = \frac{-\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

$$\Delta\sigma.\cos\gamma = \Delta\sigma_{xy}$$

$$d\sigma.\cos\gamma = d\sigma_{xy} = dx.dy$$

$$d\sigma = \frac{dxdy}{\cos\gamma}$$

$$\iint_\sigma F.\eta.d\sigma = \iint_\sigma \left[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right]d\sigma$$

$$= \iint_D \{P[x,y,f(x,y)]\cos\alpha + Q[x,y,f(x,y)]\cos\beta + R[x,y,f(x,y)]\cos\gamma\}\frac{dxdy}{\cos\gamma}$$

$$= \iint_D \left\{-\frac{\partial z}{\partial x}P[x,y,f(x,y)] - \frac{\partial z}{\partial y}Q[x,y,f(x,y)] + R[x,y,f(x,y)]\right\}dxdy$$

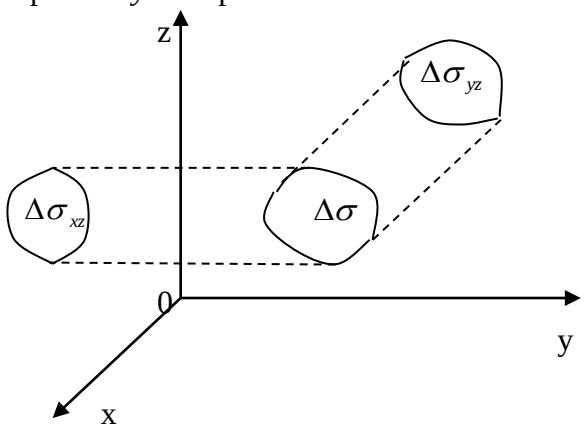
Es decir:

$$\boxed{\iint_\sigma F.\eta.d\sigma = \iint_D \left(-\frac{\partial z}{\partial x}P - \frac{\partial z}{\partial y}Q + R\right)dxdy}$$ donde P, Q y R están evaluados en $[x, y, f(x,y)]$

De manera similar se puede proceder si la superficie σ está dada de la forma $x = g(y,z)$ o $y = h(x,z)$, proyectando sobre el plano $0xz$ o el plano $0yz$ respectivamente:

$$\Delta\sigma.\cos\alpha = \Delta\sigma_{yz}$$

$$\Delta\sigma.\cos\beta = \Delta\sigma_{xz}$$

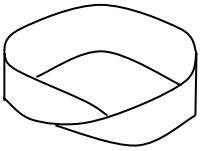


Aclaración sobre una superficie orientada

En cada punto de una superficie cerrada se pueden determinar dos versores normales a la misma:

- Uno exterior, positivo o hacia afuera y
- Otro interior, negativo o hacia adentro.

Entonces podemos establecer que por ejemplo la cara exterior de una esfera es positiva y la interior negativa, es decir que la normal positiva de una superficie determina la cara positiva de la misma.
En superficies abiertas no es tan fácil de definirlo. Un ejemplo de superficie **no** orientable es la cinta de Möbius



Una superficie es orientable si es posible elegir un versor normal η en cada punto de manera que η varíe de manera continua sobre σ . La elección dada de η le da a σ una orientación. Existen dos orientaciones posibles para cualquier superficie orientable.
Es importante que antes de calcular una integral de superficie, se establezca previamente cual es la cara exterior o positiva de la superficie y cual la interior o negativa.

Ejemplo:

Calcular el flujo del vector $F = 6z.i + 3.j + 3y.k$ a través del plano $2x + 4y + z = 8$ ubicado en el primer octante.

La superficie σ es: $z = 8 - 2x - 4y \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -2 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -4 \end{cases}$

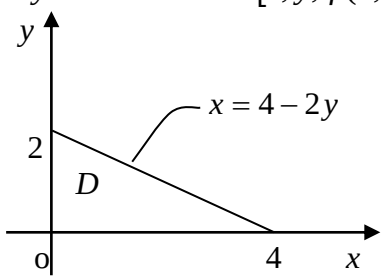
Y el vector F es:

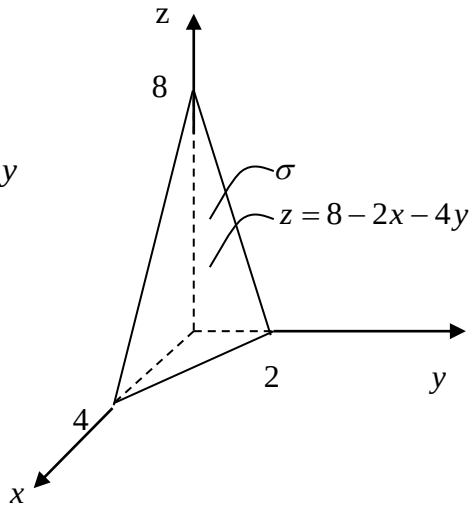
$F = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\,j + R(x,y,z)\,k = 6zi + 3j + 3yk$

$P(x,y,z) = 6z \quad \Rightarrow \quad P[x, y, f(x,y)] = 48 - 12x - 24y$

$Q(x,y,z) = 3 \quad \Rightarrow \quad Q[x, y, f(x,y)] = 3$

$R(x,y,z) = 3y \quad \Rightarrow \quad R[x, y, f(x,y)] = 3y$





$$\iint_\sigma F.\eta.d\sigma = \iint_D \left\{ -\frac{\partial z}{\partial x} P[x, y, f(x,y)] - \frac{\partial z}{\partial y} Q[x, y, f(x,y)] + R[x, y, f(x,y)] \right\} dxdy$$

$$\iint_\sigma F.\eta.d\sigma = \iint_D \left[-(-2)(48 - 12x - 24y) - (-4).3 + 3y \right] dxdy$$

$$= \iint_D \left(96 - 24x - 48y + 12 + 3y\right) dxdy$$

$$= \int_0^2 dy \int_0^{4-2y} (108 - 24x - 45y)\, dx = \int_0^2 dy \left| 108x - \frac{24x^2}{2} - 45yx \right|_0^{4-2y} =$$

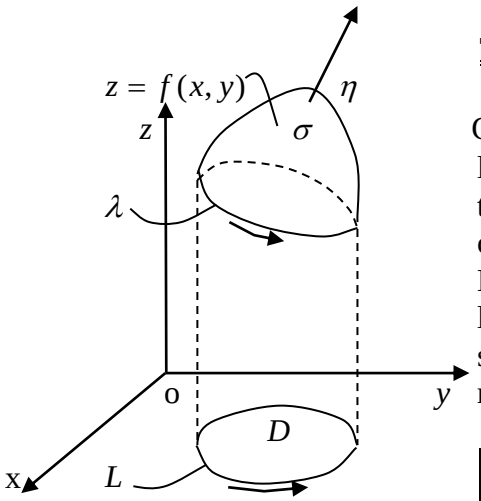
$$= \int_0^2 \left[108(4-2y) - 12(4-2y)^2 - 45y(4-2y) \right] dy =$$

$$= \int_0^2 \left(432 - 216y - 192 + 192y - 48y^2 - 180y + 90y^2\right) dy =$$

$$= \int_0^2 \left(240 - 204y + 42y^2\right) dy = \left| 240y - \frac{204y^2}{2} + \frac{42y^3}{3} \right|_0^2 =$$

$$= 240 \times 2 - \frac{204 \times 2}{2} + \frac{42 \times 2^3}{3} = 480 - 408 + 112 = 184$$

$$\boxed{\iint_\sigma F.\eta.d\sigma = 184}$$



TEOREMA DE STOKE

Consideremos que σ es una superficie orientada que está limitada por la curva λ y que F es un campo vectorial que tiene derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a σ.
Este teorema establece la relación entre la Integral Curvilínea a lo largo de la curva λ y la Integral de Superficie sobre la superficie σ cuya frontera es la curva λ, de la siguiente manera:

$$\boxed{\iint_\sigma \text{rot}F.\eta.d\sigma = \int_\lambda F.ds}$$ ó

$$\boxed{\iint_\sigma \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] d\sigma = \int_\lambda P\,dx + Q\,dy + R\,dz}$$

El **Teorema de Stoke** puede considerarse como una versión en el espacio del **Teorema de Green**. Para establecer las orientaciones de la superficie y de la curva, consideramos que:

La dirección positiva del versor normal η forma con el eje $0z$ un ángulo agudo y que el sentido de recorrido de λ es tal que si un observador mira desde el extremo de η, ve el recorrido a lo largo de λ en el sentido antihorario.

Demostración

Supongamos que σ está dada por la ecuación $z = f(x, y)$ y es tal que toda recta paralela al eje $0z$ que la atraviesa, la corta en un solo punto. Y la proyección de esta superficie sobre el plano $0xy$ es el dominio D.

Consideremos que $z = f(x, y)$ es continua y tiene derivadas de hasta segundo orden también continuas.

Resolveremos las integrales del teorema por separado.

Recordemos que:

$$F = P(x, y, z)\,i + Q(x, y, z)\,j + R(x, y, z)\,k$$

$$\text{rot}F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)k$$

$$\iint_\sigma F.\eta.d\sigma = \iint_D \left(-\frac{\partial z}{\partial x}P - \frac{\partial z}{\partial y}Q + R\right)dxdy$$ donde P, Q y R están evaluados en $[x, y, f(x, y)]$

Comencemos resolviendo la **Integral de Superficie**:

$$\iint_{\sigma} \text{rot}F.\eta.d\sigma = \iint_{D}\left[-\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)-\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]dxdy \qquad \textbf{(1)}$$

donde P, Q y R están evaluados en $[x, y, f(x,y)]$

Ahora resolvamos la **Integral Curvilínea**:

$$\int_{\lambda} F.ds = \int_{\lambda} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

La curva λ está dada por la función $z = f(x,y)$, donde *x* e *y* son las coordenadas de los puntos de la curva *L* que es la proyección de λ sobre el plano *0xy*. Por lo tanto tendremos que:

$$z = f(x,y) \qquad \Rightarrow \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$\int_{\lambda} F.ds = \int_{L} P[x,y,f(x,y)]\,dx + Q[x,y,f(x,y)]\,dy + R[x,y,f(x,y)]\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)$$

Reordenando términos y sacando factor común *dx* y *dy* obtendremos:

$$\int_{\lambda} F.ds = \int_{L}\left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy$$

El segundo miembro es una Integral Curvilínea a lo largo de la curva *L* y las funciones P, Q y R están evaluados en $[x, y, f(x,y)]$.

Si al segundo miembro la aplicamos el Teorema de Green, obtendremos:

$$\int_{\lambda} F.ds = \iint_{D}\left[\frac{\partial\left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}\right]dxdy \qquad \textbf{(2)}$$

Calculamos estas derivadas parciales como funciones compuestas, teniendo en cuenta que P, Q y R son funciones de x, y, z y que $z = f(x,y)$:

$$\frac{\partial\left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dx}}_{=1} + \frac{\partial Q}{\partial y}\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{=0} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dx}}_{=1} + \frac{\partial R}{\partial y}\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{=0} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y} + R\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + R\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial\left(P+R\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial x}\overbrace{\frac{dx}{dy}}^{=0}+\frac{\partial P}{\partial y}\overbrace{\frac{dy}{dy}}^{=1}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\left(\frac{\partial R}{\partial x}\overbrace{\frac{dx}{dy}}^{=0}+\frac{\partial R}{\partial y}\overbrace{\frac{dy}{dy}}^{=1}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+R\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

$$=\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+R\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

Al restar estas derivadas en la expresión **(2)** se anulan los dos últimos términos de cada una de ellas y queda:

$$\int_\lambda F.ds=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\right)dxdy$$

Reordenamos los términos:

$$\int_\lambda F.ds=\iint_D\left[-\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)-\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]dxdy \qquad \textbf{(3)}$$

Si comparamos las expresiones **(1)** y **(3)** queda demostrado que:

$$\boxed{\iint_\sigma \mathrm{rot}F.\eta.d\sigma=\int_\lambda F.ds}$$

----------o----------

Si la superficie σ es un plano paralelo al plano $0xy$ resultará $\Delta z=0$ y obtendremos la **Fórmula de Green** como caso particular de la **Fórmula de Stoke**.

----------o----------

Tal como lo demostramos para el plano, ahora en el espacio, si se cumple que:

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0 \qquad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$$

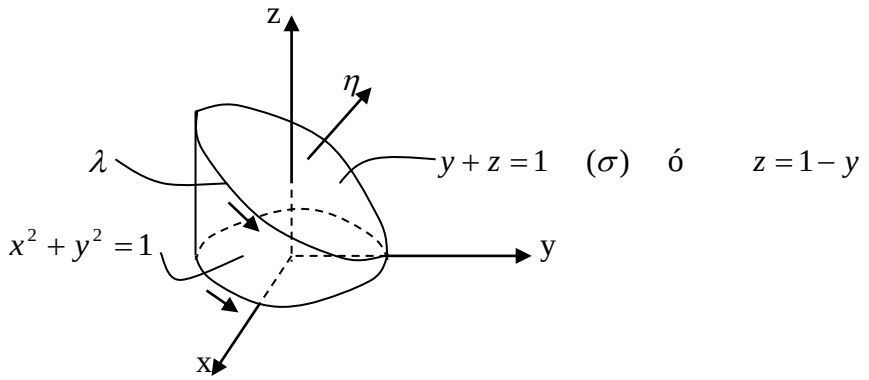
entonces resulta:

$$\int_\lambda F.ds=\int_\lambda P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$$

y en este caso la **Integral Curvilínea** no depende de la forma de la curva de integración.

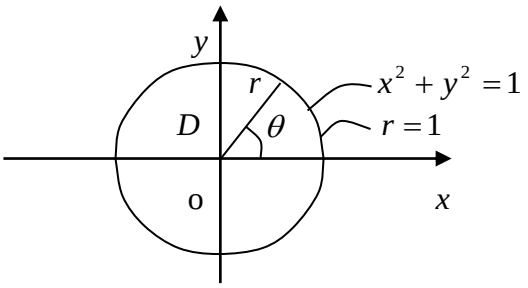
Ejemplo:

Calcular $\int_{\lambda} F.ds$ siendo $F(x,y,z) = (3-y).i + (x^2+1).j + 2z^3.k$ y λ es la curva dada por la intersección del plano $y+z=1$ con el cilindro $x^2+y^2=1$.



La superficie σ está dada por $y+z=1$ y la orientamos hacia arriba, entonces λ tiene orientación positiva.
La proyección de σ sobre el plano $0xy$ es el círculo $x^2+y^2 \le 1$ (dominio D).
La curva λ es una elipse y resultaría difícil calcular la integral curvilínea, pero apliquemos la **Fórmula de Stoke**:

$$\int_{\lambda} F.ds = \iint_{\sigma} \text{rot}F.\eta.d\sigma$$



$$\text{rot}F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (3-y) & (x^2+1) & 2z^3 \end{vmatrix} = (2x+1).k$$

$$\int_{\lambda} F.ds = \iint_{\sigma} \text{rot}F.\eta.d\sigma = \iint_{D} \left[-\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right].dx.dy$$

$$\int_{\lambda} F.ds = \iint_{\sigma} \text{rot}F.\eta.d\sigma = \iint_{D} (2x+1)\cdot dx.dy = \iint_{D} (2r\cos\theta + 1).r.dr.d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2r^2\cos\theta + r).dr =$$

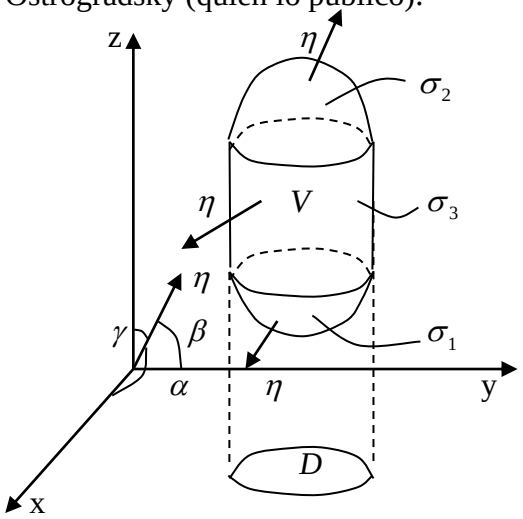
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \left| \frac{2r^3}{3}\cdot\cos\theta + \frac{r^2}{2} \right|_0^1 = \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3}\cdot\cos\theta\,\frac{1}{2}\right).d\theta = \left| \frac{2}{3}\cdot sen\theta + \frac{\theta}{2} \right|_0^{2\pi} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\cdot sen2\pi + \frac{2\pi}{2}\right) - \left(\frac{2}{3}\cdot sen0 + 0\right) = \pi$$

$$\boxed{\int_{\lambda} F.ds = \pi}$$

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

También conocido como Teorema de Riemann (quien descubrió este teorema) o como Teorema de Ostrogradsky (quien lo publicó).



Sea V un volumen definido en R^3, limitado por una superficie cerrada σ, que puede ser proyectada sobre los tres planos coordenados. Y sea F un campo vectorial continuo y con derivadas también continuas en una región que contiene a V.

Entonces:

$$\boxed{\iiint_V \operatorname{div}F.dv = \iint_\sigma F.\eta.d\sigma}$$

Es decir que la Integral Triple extendida en el dominio V de la Divergencia del campo vectorial F es igual al flujo de F a través de la superficie cerrada σ que limita a este dominio.

Demostración

Recordemos que:

$$F = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\,j + R(x,y,z)\,k$$

$$\eta = \cos\alpha.i + \cos\beta.j + \cos\gamma.k$$

$$\operatorname{div}F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Por lo tanto resulta:

$$\boxed{\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv = \iint_\sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma}$$

Podemos demostrar separadamente las tres expresiones:

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\, dv = \iint_\sigma P\cos\alpha\, d\sigma \qquad \textbf{(1)}$$

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\, dv = \iint_\sigma Q\cos\beta\, d\sigma \qquad \textbf{(2)}$$

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dv = \iint_\sigma R\cos\gamma\, d\sigma \qquad \textbf{(3)}$$

Demostremos la igualdad **(3)**:

V está limitada por la superficie σ y sea su proyección sobre el plano $0xy$ el dominio D.
Consideremos que se puede dividir σ en σ_1, σ_2 y σ_3.
σ_1 está dado por $z = f_1(x,y)$, σ_2 por $z = f_2(x,y)$, y σ_3 es una superficie cilíndrica de generatrices paralelas al eje $0z$.
Resolvamos la integral del primer miembro de la igualdad **(3)**:

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dv = \iint_D \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\, dz \right] dxdy = \iint_D \{R[x,y,f_2(x,y)] - R[x,y,f_1(x,y)]\}\, dxdy$$

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dv = \iint_D R[x,y,f_2(x,y)]\, dxdy - \iint_D R[x,y,f_1(x,y)]\, dxdy \qquad \textbf{(4)}$$

Resolvamos ahora la integral del segundo miembro de la igualdad **(3)**:

$$\iint_\sigma R\cos\gamma\, d\sigma = \iint_{\sigma_1} R(x,y,z)\cos\gamma\, d\sigma + \iint_{\sigma_2} R(x,y,z)\cos\gamma\, d\sigma + \iint_{\sigma_3} R(x,y,z)\cos\gamma\, d\sigma$$

Si consideramos las normales exteriores a la superficie σ resulta:

$\cos\gamma < 0$ en σ_1
$\cos\gamma > 0$ en σ_2
$\cos\gamma = 0$ en σ_3

Recordemos que:

$\cos\gamma.\Delta\sigma = \Delta\sigma_{xy}$ ó
$\cos\gamma.d\sigma = dx\, dy$

$$\iint_\sigma R\cos\gamma\, d\sigma = -\iint_D R[x,y,f_1(x,y)]\, dxdy + \iint_D R[x,y,f_2(x,y)]\, dxdy + 0$$

$$\iint_\sigma R\cos\gamma\, d\sigma = \iint_D R[x,y,f_2(x,y)]\, dxdy - \iint_D R[x,y,f_1(x,y)]\, dxdy \qquad \textbf{(5)}$$

Si comparamos las expresiones **(4)** y **(5)** podemos comprobar que queda demostrada la igualdad **(3)**.
De modo similar se pueden demostrar las igualdades **(1)** y **(2)**, con lo que finalmente queda demostrado el **Teorema de la Divergencia.**

----------o----------

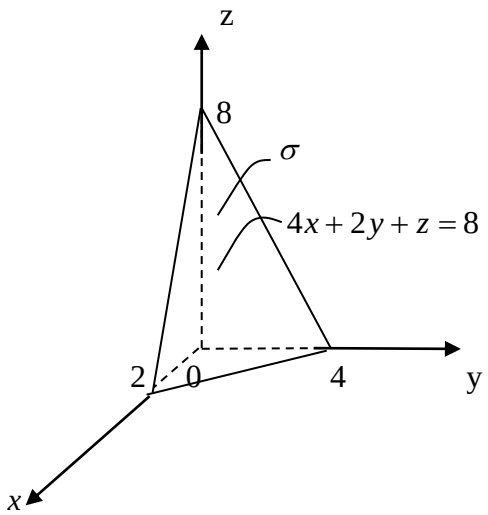
Si F representa la velocidad de un líquido que corre a través del dominio V, la Integral da la cantidad de líquido que sale de V a través de σ en la unidad de tiempo (o que entra si la Integral es negativa).
Si $\operatorname{div} F \equiv 0$, la Integral también será nula o sea que la cantidad de líquido que sale (o entra) a través de σ es igual a cero. O más precisamente la cantidad de líquido que sale es igual a la que entra en el dominio.

----------o----------

Ejemplo:

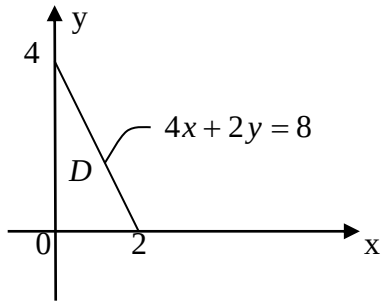
Aplicando el Teorema de la Divergencia calcular el flujo de $F = 2xi + yj + 3zk$ a través del volumen V definido en el 1º octante y limitado por el plano $4x + 2y + z = 8$.

$$\iiint_V \text{div}F.dv = \iint_\sigma F.\eta.d\sigma$$



$$\text{div}F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\text{div}F = 2 + 1 + 3 = 6$$



$$\iint_\sigma F.\eta.d\sigma = \iiint_V \text{div}F.dv = \iiint_V 6dv = 6\int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dy \int_0^{8-4x-2y} dz =$$

$$= 6\int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dy \left|z\right|_0^{8-4x-2y} = 6\int_0^2 dx \int_0^{4-2x} (8 - 4x - 2y)dy =$$

$$= 6\int_0^2 dx \left|8y - 4xy - y^2\right|_0^{4-2x} = 6\int_0^2 \left[8(4-2x) - 4x(4-2x) - (4-2x)^2\right]dx =$$

$$= 6\int_0^2 \left(32 - 16x - 16x + 8x^2 - 16 + 16x - 4x^2\right)dx =$$

$$= 6\int_0^2 \left(16 - 16x + 4x^2\right)dx = 6\left|16x - \frac{16x^2}{2} + \frac{4x^3}{3}\right|_0^2 =$$

$$= 6\left(32 - 32 + \frac{32}{3}\right) = 6 \cdot \frac{32}{3} = 64$$

$$\boxed{\iint_\sigma F.\eta.d\sigma = 64}$$

CAPÍTULO 8

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

ECUACIONES DIFERENCIALES

Recibe el nombre de Ecuación Diferencial toda ecuación que establece una relación entre la variable independiente x, la función buscada $y = f(x)$ y sus derivadas $y', y'', \ldots\ldots\ldots, y^{[n]}$.

$$F(x, y, y', y'', \ldots\ldots\ldots\ldots y^{[n]}) = 0$$

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$$

Ejemplos:

$$y'' + 2.y'.y^3 + x^4 = 0$$

$$(y''')^2 + y'.x^3 + y^3 - 2 = 0$$

Si la función buscada es de una sola variable independiente, como la indicada precedentemente es una **Ecuación Diferencial Ordinaria.**

Si la función buscada es de dos o más variables independientes, se llama **Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales:**

$$F(x, y, z, u, \frac{\partial u}{dx}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots) = 0$$

Comenzaremos estudiando las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Definamos:

El **Orden** de una Ecuación Diferencial es el de la derivada superior que interviene en la ecuación.

El **Grado** de una Ecuación Diferencial está dado por el exponente al que está elevada la derivada de mayor orden.

Ejemplos:

$y'' + 2y'y^3 + x^4 = 0$ Es una Ecuación Diferencial de segundo orden y de primer grado.

$(y''')^2 + y'x^3 + y^3 - 2 = 0$ Es una Ecuación Diferencial de tercer orden y de segundo grado.

Se llama **Solución o Integral** de la Ecuación Diferencial a toda función $y = f(x)$ que introducida en la ecuación, la transforma en una identidad. Si la Solución está dada en forma implícita, $\varphi(x, y) = 0$, generalmente se llama Integral.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Estas Ecuaciones Diferenciales son de la forma:

$$F(x, y, y') = 0$$

Se llama **Solución General** de una Ecuación Diferencial de Primer Orden a la función:

$$y = f(x, C)$$

que satisface a la Ecuación Diferencial para cualquier valor de C. Siendo C una constante arbitraria.

Si se fija una Condición Inicial $y = y_0$ para $x = x_0$, se puede encontrar un valor de $C = C_0$, tal que la función:

$$y = f(x, C_0)$$

satisfaga la Condición Inicial dada. Esta última se llama **Solución Particular**.

Desde el punto de vista geométrico, la Solución General representa una familia de curvas en el plano de coordenadas. Estas curvas se llaman **Curvas Integrales** de la Ecuación Diferencial dada.

Cada Solución Particular está representada por una curva de esta familia.

Ejemplo:

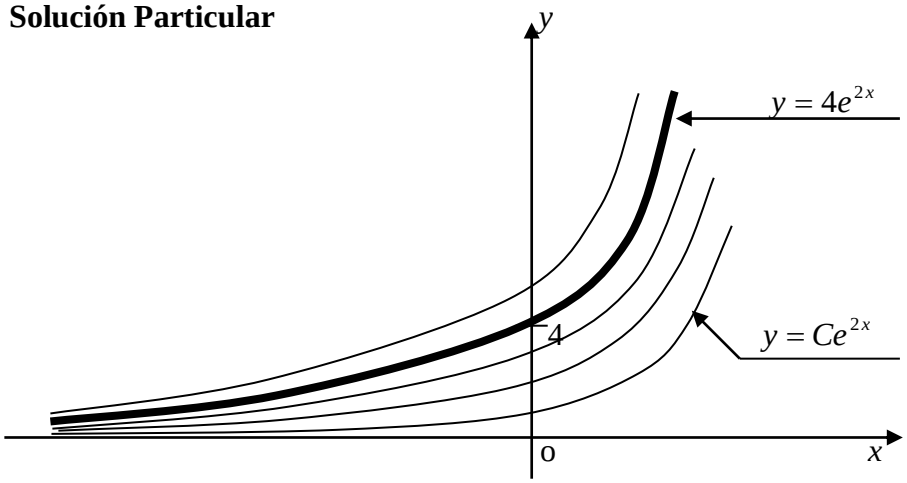
Dada la Ecuación Diferencial de Primer Orden $y' = 2y$, la expresión $y = Ce^{2x}$ es una Solución para cualquier valor de C, siendo ésta una constante arbitraria cuyo valor queda determinado si se da una "Condición Inicial".

Por ejemplo si fijamos que $y_0 = 4$ para $x_0 = 0$ resultará:

$$y = Ce^{2x} \qquad \Rightarrow \qquad 4 = Ce^0 \qquad \Rightarrow \qquad C = 4 \qquad \therefore$$

$\boxed{y = Ce^{2x}}$ **Solución General**

$\boxed{y = 4e^{2x}}$ **Solución Particular**



ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN CON VARIABLES SEPARABLES

Las Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden con Variables Separables son aquellas que pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\boxed{f(x)dx + g(y)dy = 0}$$

Esta Ecuación puede considerarse como la suma de dos diferenciales. Integrando el primer término respecto a "x" y el segundo respecto a "y" obtendremos la Solución General:

$$\boxed{\int f(x)dx + \int g(y)dy = 0}$$

Ejemplo:

Sea la Ecuación Diferencial: $x + yy' = 0$

Es una Ecuación Diferencial de Primer Orden con Variables Separables, pues la podemos expresar así:

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad xdx + ydy = 0$$

Integramos y obtenemos la Solución General:

$$\int xdx + \int ydy = 0$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$$

Dada la forma del primer miembro, el segundo siempre será positivo, y podemos considerar:

$$2.C_1 = C^2$$

Con lo que resultará:

$\boxed{x^2 + y^2 = C^2}$ **Solución General**

Corresponde a una familia de circunferencias concéntricas e radio C y centro en el origen de coordenadas.

Fijando una Condición Inicial, por ejemplo $y(4) = 3$, podemos obtener la Solución Particular correspondiente:

$$4^2 + 3^2 = C_0^2 \qquad \Rightarrow \qquad C_0 = 5$$

$\boxed{x^2 + y^2 = 25}$ **Solución Particular**

Esta Solución Particular corresponde a una circunferencia con centro en el origen de coordenadas de radio igual a 5.

ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS DE PRIMER ORDEN

Antes de comenzar recordemos que una función $f(x,y)$ se llama homogénea de grado "n" respecto de las variables x e y, si para todo λ se cumple que:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$$

Por ejemplo la función $f(x,y)=(x+y)^3$ es una función homogénea de tercer grado respecto de las variables *x* e *y* pues:

$$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x+\lambda y)^3=\lambda^3(x+y)^3=\lambda^3 f(x,y)$$

Y la función $f(x,y)=\dfrac{3xy^2-y^3}{2x^3}$ es una función homogénea de grado cero respecto de las variables *x* e *y* pues:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{3\lambda x(\lambda y)^2-(\lambda y)^3}{2(\lambda x)^3}=\frac{\lambda^3(3xy^2-y^3)}{\lambda^3x^3}=\lambda^o f(x,y)=f(x,y)$$

Ahora definamos que la siguiente Ecuación Diferencial:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=f(x,y)} \qquad (1)$$

Será una Ecuación Diferencial Homogénea de Primer Orden si la función $f(x,y)$ es una función homogénea de grado cero respecto de las variables x e y, es decir si:

$$\boxed{f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)} \qquad (2)$$

Por ejemplo: $$\frac{dy}{dx}=\frac{3xy^2-y^3}{2x^3}$$

<u>Otra forma de definirlas</u>:

La Ecuación Diferencial $M(x,y).dx+N(x,y).dy=0$

Será una Ecuación Diferencial Homogénea de Primer Orden si las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado respecto de las variables x e y. Pues resultará:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

Y la razón de dos funciones homogéneas de un mismo grado es una función homogénea de grado cero.

Por ejemplo: $(y^3-3xy^2)dx+2x^3dy=0$

<u>Solución de una Ecuación Diferencial Homogénea de Primer Orden</u>

Partiendo de la hipótesis de que:

$$f(x,y)=f(\lambda x,\lambda y)$$

Y considerando $\lambda=\dfrac{1}{x}$ obtendremos:

$$f(x,y)=f(1,\frac{y}{x})$$

La Ecuación Diferencial (1) toma la forma:

$$\frac{dy}{dx}=f(1,\frac{y}{x}) \qquad (3)$$

Considerando ahora: $\dfrac{y}{x}=u$ o sea $y=u.x$

Derivamos: $$\frac{dy}{dx}=u+\frac{du}{dx}x$$

Reemplazamos en la expresión (3) y obtenemos:

$$u+\frac{du}{dx}x=f(1,u) \qquad (4)$$

Ésta resulta ser una Ecuación Diferencial de Primer Orden con Variables Separables:

$$\frac{du}{f(1,u)-u}=\frac{dx}{x} \qquad (5)$$

Integramos: $$\int\frac{du}{f(1,u)-u}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\boxed{\int\frac{du}{f(1,u)-u}=\ln x+C}$$

Luego de integrar, se sustituye u por su igualdad $\frac{y}{x}$ y se obtiene la **Solución General** de la Ecuación Diferencial Homogénea de Primer Orden planteada.

Ejemplo:

Resolver la siguiente Ecuación Diferencial: $2y^2-x^2y'-2xyy'=0$.

Reordenamos los términos: $$\frac{dy}{dx}=\frac{2y^2}{x^2+2xy} \qquad (1)$$

Comprobamos si es una Ecuación Diferencial Homogénea de Primer Orden:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{2(\lambda y)^2}{(\lambda x)^2+2\lambda x\lambda y}=\frac{\lambda^2 2y^2}{\lambda^2(x^2+2xy)}=\frac{2y^2}{x^2+2xy}=f(x,y)$$

Hemos comprobado que es una Ec. Dif. Homogénea, hallemos ahora la Solución General, partiendo de la hipótesis:

$$f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y) \qquad (2)$$

Hacemos: $\lambda=\frac{1}{x}$

$$f(1,\frac{y}{x})=\frac{2(\frac{1}{x}y)^2}{(\frac{1}{x}x)^2+2\frac{1}{x}x\frac{1}{x}y}=\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+2\frac{y}{x}} \qquad \therefore$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+2\frac{y}{x}} \qquad (3)$$

Hacemos el cambio de variables:

$$\begin{cases} \boxed{\frac{y}{x}=u} \quad \Rightarrow \quad y=u.x \\ \frac{dy}{dx}=u+\frac{du}{dx}x \\ f(1,u)=\frac{2u^2}{1+2u} \end{cases}$$

Reemplazamos en (3) y obtenemos:

$$u+\frac{du}{dx}x=\frac{2u^2}{1+2u} \qquad (4)$$

Ésta resulta ser una Ecuación Diferencial de Primer Orden con Variables Separables, separamos las variables:

$$\frac{du}{dx}x=\frac{2u^2}{1+2u}-u=\frac{2u^2-u-2u^2}{1+2u}=-\frac{u}{1+2u}$$

$$\left(-\frac{1+2.u}{u}\right)du=\frac{dx}{x}$$

$$\left(-\frac{1}{u}-2\right)du=\frac{dx}{x} \qquad (5)$$

Integramos:

$$\int\left(-\frac{1}{u}-2\right)du=\int\frac{dx}{x}$$

$-\ln u-2u=\ln x+C_1$ Para obtener la Solución General reemplazamos $\boxed{\frac{y}{x}=u}$

$$-\ln\frac{y}{x}-2\frac{y}{x}=\ln x+C_1$$

$$-\ln y+\ln x-2\frac{y}{x}=\ln x+C_1$$

$-\ln y-2\frac{y}{x}=C_1$ o haciendo $-C_1=C$

$$-\ln y-2\frac{y}{x}=-C$$

$\boxed{\ln y+2\frac{y}{x}=C}$ **Solución General**

Obtengamos una Solución Particular estableciendo como Condición Inicial $y_0=1$ para $x_0=1$:

$\ln 1+2\frac{1}{1}=C_0 \quad\Rightarrow\quad C_0=2$

$\boxed{\ln y+2\frac{y}{x}=2}$ **Solución Particular**

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN

La Ecuación Diferencial que es lineal respecto a la función desconocida (y) y su derivada (y'), recibe el nombre de Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden, y tiene la forma:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)} \qquad (1)$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones de "x" o constantes.

Para resolver este tipo de ecuaciones daremos a la Solución la forma de un producto de dos funciones de "x", de esta forma transformamos la Ecuación Diferencial Lineal en dos Ecuaciones Diferenciales con Variables Separables. Proponemos como Solución de la Ecuación (1), la siguiente:

$$\boxed{y=u(x).v(x)} \qquad (2)$$

Derivamos:

$$\frac{dy}{dx}=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}$$

Sustituimos lo obtenido en la Ecuación Diferencial (1):

$$u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}+Puv=Q$$

$$u.\left(\frac{dv}{dx}+P.v\right)+v.\frac{du}{dx}=Q \qquad (3)$$

Elijamos un valor de v conveniente de modo que resulte:

$$\frac{dv}{dx}+Pv=0$$

Ésta es una Ecuación Diferencial de Primer Orden con Variables Separables, separamos las variables:

$$\frac{dv}{v} = -Pdx$$

Integrando obtenemos:

$$\int \frac{dv}{v} = -\int Pdx$$

$$\ln v = -\int P.dx + C_1$$

Como solo necesitamos un valor de v, consideramos $C_1 = 0$:

$\ln v = -\int Pdx$ Por definición de Logaritmo resulta:

$$\boxed{v = e^{-\int P.dx}} \qquad (4)$$

Reemplazamos este valor de v en la expresión (3) y recordando que el paréntesis de la misma es igual a cero, será:

$$e^{-\int P.dx} \frac{du}{dx} = Q$$

Ésta es otra Ecuación Diferencial de Primer Orden con Variables Separables, separamos las variables:

$$\frac{du}{dx} = e^{\int P.dx} Q$$

Integramos:

$$\boxed{u = \int e^{\int P.dx} Qdx + C} \qquad (5)$$

Reemplazando en la expresión (2) los valores de u y v obtenidos en (5) y (4) respectivamente, tendremos la Solución General de la Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden (1) planteada:

$$\boxed{y = e^{-\int P(x).dx}\left[\int e^{\int P(x).dx} Q(x)dx + C\right]}$$ **<u>Solución General</u>**

<u>Ejemplo</u>:

Hallar la Solución de la siguiente Ecuación Diferencial $y' + 3x^2 y = 6x^2$ (1)

Proponemos una Solución de la forma: $y = u(x).v(x)$ (2)

Derivamos: $\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$

Sustituimos lo obtenido en la Ecuación Diferencial (1):

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} + 3x^2 uv = 6x^2$$

$$u\left(\frac{dv}{dx} + 3x^2 v\right) + v \cdot \frac{du}{dx} = 6x^2 \qquad (3)$$

Elijamos un valor de v conveniente de modo que resulte:

$$\frac{dv}{dx} + 3x^2 v = 0$$

Ésta es una Ecuación Diferencial de Primer Orden con Variables Separables, separamos las variables:

$\frac{dv}{v} = -3x^2 dx$ integramos $\int \frac{dv}{v} = -\int 3x^2 dx$ y obtenemos:

$$\ln v = -x^3 + C_1$$

Como solo necesitamos un valor de v, consideramos $C_1 = 0$:

$\ln v = -x^3$ Por definición de Logaritmo resulta:

$$\boxed{v = e^{-x^3}} \qquad (4)$$

Reemplazamos este valor de v en la expresión (3) y recordando que el paréntesis de la misma es igual a cero, será:

$$e^{-x^3}\frac{du}{dx}=6x^2$$

Ésta es otra Ecuación Diferencial de Primer Orden con Variables Separables, separamos las variables:

$$\frac{du}{dx}=6x^2e^{x^3}$$

Integramos:

$$u=\int 6x^2e^{x^3}dx+C$$

$$\boxed{u=2e^{x^3}+C} \qquad (5)$$

Reemplazando en la expresión (2) los valores de u y v obtenidos en (5) y (4) respectivamente, tendremos la Solución General de la Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden (1) planteada:

$$y=\left(2e^{x^3}+C\right)e^{-x^3} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{y=2+Ce^{-x^3}} \qquad \textbf{Solución General}$$

Fijemos la siguiente Condición Inicial $y(0)=5$, y obtengamos la Solución Particular correspondiente:

$$5=2+C_0e^0$$

$$C_0=3 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{y=2+3e^{-x^3}} \qquad \textbf{Solución Particular}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE BERNOULLI

Son de la forma:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n} \qquad (1)$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones de "x" o constantes.

$n\neq 0$ y $n\neq 1$ (en caso contrario resultaría ser una Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden).

Toda Ecuación Diferencial de Bernoulli puede reducirse a una Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden mediante la siguiente transformación:

- Multiplicamos ambos miembros de la Ecuación (1) por $\boxed{(1-n)y^{-n}}$

$$(1-n)y^{-n}\cdot\frac{dy}{dx}+(1-n)P(x)y^{1-n}=(1-n)Q(x) \qquad (2)$$

- Realizamos el siguiente cambio de variables: $\boxed{z=y^{1-n}}$

  Derivamos: $\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\cdot\frac{dy}{dx}$

- Reemplazamos en la (2) y obtendremos Una Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden:

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x) \qquad (3)$$

- Considerando:

  $(1-n)P(x)=P_1(x)$

  $(1-n)Q(x)=Q_1(x)$ obtendremos: $\boxed{\frac{dz}{dx}+P_1(x)z=Q_1(x)}$ (4)

- Ésta es una Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden cuya Solución General, tal como vimos, es de la forma:

$$\boxed{z=e^{-\int P_1(x).dx}\left[\int e^{\int P_1(x).dx}Q_1(x)dx+C\right]} \qquad \textbf{Solución General}$$

Finalmente, luego de integrar, sustituimos a z por su igualdad $\boxed{z = y^{1-n}}$, y obtendremos la Solución General de la Ecuación Diferencial de Bernoulli planteada.

Ejemplo:

Hallar la Solución de la siguiente Ecuación Diferencial de Bernoulli:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = y^3 \qquad (1) \qquad \text{es decir que} \qquad \begin{cases} P(x) = 2 \\ Q(x) = 1 \\ n = 3 \qquad \Rightarrow \qquad 1 - n = -2 \end{cases}$$

Transformamos esta Ecuación Diferencial de Bernoulli en una Ecuación Diferencial Lineal:

- Multiplicamos ambos miembros de la Ecuación (1) por $\boxed{-2y^{-3}}$

$$-2y^{-3} \cdot \frac{dy}{dx} + \left(-2y^{-3}\right)2y = -2y^{-3}y^3$$

$$-2y^{-3} \cdot \frac{dy}{dx} - 4y^{-2} = -2 \qquad (2)$$

- Realizamos el siguiente cambio de variables: $\boxed{z = y^{-2}}$

  Derivamos: $\dfrac{dz}{dx} = -2y^{-3} \cdot \dfrac{dy}{dx}$

- Reemplazamos en la (2) y obtendremos Una Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden:

$$\boxed{\frac{dz}{dx} - 4z = -2} \qquad (4)$$

- Ésta es una Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden cuya Solución General podemos obtener proponiendo una Solución de la forma:

$$\boxed{z = u(x)v(x)} \qquad (5)$$

Derivamos:

$$\frac{dz}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

Sustituimos lo obtenido en la Ecuación Diferencial (4):

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} - 4uv = -2$$

$$u\left(\frac{dv}{dx} - 4v\right) + v \cdot \frac{du}{dx} = -2 \qquad (6)$$

Elijamos un valor de v conveniente de modo que resulte:

$$\frac{dv}{dx} - 4v = 0$$

Ésta es una Ecuación Diferencial de Primer Orden con Variables Separables, separamos las variables:

$\dfrac{dv}{v} = 4dx$ integramos $\displaystyle\int \frac{dv}{v} = \int 4dx$ y obtenemos:

$\ln v = 4x + C_1$ como solo necesitamos un valor de "v" consideramos $C_1 = 0$

y por definición de Logaritmo resulta:

$$\boxed{v = e^{4x}} \qquad (7)$$

Reemplazamos este valor de v en la expresión (6) y recordando que el paréntesis de la misma es igual a cero, será:

$$e^{4x} \cdot \frac{du}{dx} = -2$$

Ésta es otra Ecuación Diferencial de Primer Orden con Variables Separables, separamos las variables:

$$\frac{du}{dx} = -2e^{-4x}$$

Integramos y obtenemos:

$$u = \int (-2)e^{-4x} dx + C$$

$$\boxed{u = \frac{1}{2}e^{-4x} + C} \qquad (8)$$

Reemplazando en la expresión (5) los valores de u y v obtenidos en (8) y (7) respectivamente, tendremos la Solución de la Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden (4) planteada:

$$z = \left(\frac{1}{2}e^{-4x} + C\right)e^{4x} \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{1}{2} + Ce^{4x}$$

- Ahora sustituimos a z por su igualdad $\boxed{z = y^{-2}}$, y obtenemos la Solución General de la Ecuación Diferencial de Bernoulli (1) planteada:

$$\boxed{y^{-2} = \frac{1}{2} + Ce^{4x}} \qquad \text{o} \qquad y = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} + Ce^{4x}}} \qquad \textbf{Solución General}$$

- Fijemos como Condición Inicial $y_0 = 0$ para $x_0 = 0$ y hallemos la Solución Particular correspondiente:

$$0 = \frac{1}{2} + C_0 e^0 \qquad \Rightarrow \qquad C_0 = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{y^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{4x}} \qquad \text{o} \qquad y = \sqrt{\frac{2}{1 - e^{4x}}} \qquad \textbf{Solución Particular}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS (O TOTALES)

Las Ecuaciones Diferenciales de la forma:

$$\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0} \qquad (1)$$

Son Ecuaciones Diferenciales Totales o Exactas si $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son funciones continuas y derivables que verifican la igualdad:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}} \qquad (2)$$

Demostraremos que si se cumple la igualdad (2), el primer miembro de la Ecuación (1) es el Diferencial Total de una función $u(x,y)$, es decir que la Ecuación (1) es de la forma:

$$du(x,y) = 0$$

Y su Solución General será: $u(x,y) = C$

Recordar que ya estudiamos este problema en el Capítulo 6 – Integrales Curvilíneas (Obtención de la Función Potencial)

Para demostrarlo supongamos que la Ecuación (1) es el Diferencial Total de cierta función $u(x,y)$, es decir:

$$P(x,y).dx + Q(x,y).dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy$$

Por lo tanto:

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad\qquad Q = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Si derivamos la primera igualdad con respecto a "y" y la segunda respecto a "x" obtendremos:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \qquad\qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

Por lo tanto si las segundas derivadas son continuas, tendremos:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Por lo tanto la igualdad (2) es condición necesaria y suficiente para que el primer miembro de la Ecuación (1) sea un Diferencial Total.

La Solución General de la Ecuación Diferencial Total (1) se puede obtener a partir de cualquiera de las dos formas siguientes:

1º) <u>Obtención de la Solución General a partir de la expresión</u>:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)}$$

Integramos: $$u = \int P dx + \varphi(y) \qquad (3)$$

De esta expresión tenemos que hallar el valor de $\varphi(y)$, para lo cual derivamos respecto a "y":

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial\left(\int P dx\right)}{\partial y} + \varphi'(y)$$

Pero sabemos que $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$, entonces reemplazamos:

$$\frac{\partial\left(\int P dx\right)}{\partial y} + \varphi'(y) = Q$$

$$\varphi'(y) = Q - \frac{\partial\left(\int P dx\right)}{\partial y}$$

Integramos: $$\varphi(y) = \int\left[Q - \frac{\partial\left(\int P dx\right)}{\partial y}\right]dy + C_1$$

A este valor de $\varphi(y)$ obtenido se lo reemplaza en la expresión (3) y se obtiene la Solución General.

$$u(x,y) = \int P dx + \int\left[Q - \frac{\partial\left(\int P dx\right)}{\partial y}\right]dy + C_1$$

$$\boxed{\int P dx + \int\left[Q - \frac{\partial\left(\int P dx\right)}{\partial y}\right]dy = C}$$ **<u>Solución General</u>**

2º) <u>Obtención de la Solución General a partir de la expresión</u>:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)}$$

Integramos: $$u = \int Q dy + \psi(x) \qquad (4)$$

De esta expresión tenemos que hallar el valor de $\psi(x)$, para lo cual derivamos respecto a "x":

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial\left(\int Q dy\right)}{\partial x} + \psi'(x)$$

Pero sabemos que $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$, entonces reemplazamos:

$$\frac{\partial\left(\int Q.dy\right)}{\partial x} + \psi'(x) = P$$

$$\psi'(x) = P - \frac{\partial\left(\int Q dy\right)}{\partial x}$$

Integramos: $$\psi(x) = \int \left[P - \frac{\partial\left(\int Q dy\right)}{\partial x} \right] dx + C_2$$

A este valor de $\psi(x)$ obtenido se lo reemplaza en la expresión (4) y se obtiene la Solución General.

$$u(x, y) = \int Q dy + \int \left[P - \frac{\partial\left(\int Q dy\right)}{\partial x} \right] dx + C_2$$

$$\boxed{\int Q dy + \int \left[P - \frac{\partial\left(\int Q dy\right)}{\partial x} \right] dx = C}$$ **<u>Solución General</u>**

<u>Ejemplo</u>:
Determinar la Solución de la siguiente Ecuación Diferencial:

$$-\frac{y^3}{x^2} dx + \left(\frac{3y^2}{x} + 3 \right) dy = 0 \qquad (1)$$

Primero verificamos si es una Ecuación Diferencial Total o Exacta:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{3y^2}{x^2} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{3y^2}{x^2}$$

Se cumple que $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (2)$$

Por lo tanto es una Ecuación Diferencial Total o Exacta.

Determinemos la Solución General a partir de la expresión:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y^3}{x^2}}$$

Integramos: $$u = \frac{y^3}{x} + \varphi(y) \qquad (3)$$

Para determinar el valor de $\varphi(y)$, derivamos ahora con respecto a "y":

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3y^2}{x} + \varphi'(y)$$

Pero sabemos que Pero sabemos que $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$, es decir $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3y^2}{x} + 3$ entonces reemplazamos:

$$\frac{3y^2}{x} + \varphi'(y) = \frac{3y^2}{x} + 3 \qquad \therefore$$

$$\varphi'(y) = 3$$

Integramos: $\varphi(y) = 3y + C_1$

Reemplazamos este valor de $\varphi(y)$ en la (3):

$$u = \frac{y^3}{x} + 3y + C_1 \qquad \text{ó}$$

$$\boxed{\frac{y^3}{x} + 3y = C} \qquad \textbf{Solución General}$$

Obtengamos una Solución Particular considerando la siguiente Condición Inicial: $y_0 = 1$ para $x_0 = -1$

Reemplazamos en la Solución General y tenemos:

$$-1 + 3 = C_0 \qquad \Rightarrow \qquad C_0 = 2$$

$$\boxed{\frac{y^3}{x} + 3y = 2} \qquad \textbf{Solución Particular}$$

Nota:

También podríamos haber obtenido la Solución General a partir de la expresión:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)}$$

Integramos: $u = \frac{y^3}{x} + 3y + \psi(x)$ (4)

Para determinar el valor de $\psi(x)$, derivamos ahora con respecto a "x":

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y^3}{x^2} + \psi'(x)$$

Pero sabemos que Pero sabemos que $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$, es decir $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y^3}{x^2}$ entonces reemplazamos:

$$-\frac{y^3}{x^2} + \psi'(x) = -\frac{y^3}{x^2} \qquad \therefore$$

$$\psi'(x) = 0$$

Integramos: $\psi(x) = C_2$

Reemplazamos este valor de $\psi(x)$ en la (4):

$$u = \frac{y^3}{x} + 3y + C_2 \qquad \text{ó}$$

$$\boxed{\frac{y^3}{x} + 3y = C} \qquad \textbf{Solución General}$$

SOLUCIONES SINGULARES

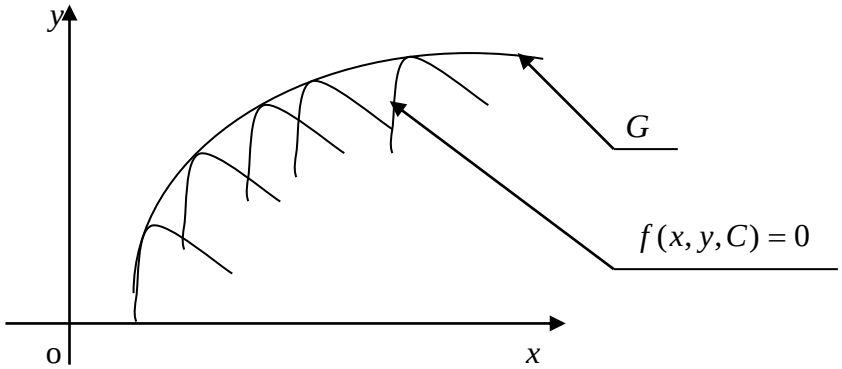
Una Ecuación Diferencial puede tener Soluciones que no se deducen dándoles valores a las Constantes Arbitrarias de las Soluciones Generales. Estas Soluciones, si existen, reciben el nombre de **Soluciones Singulares.** Describamos un caso de Soluciones Singulares:
Consideremos la Ecuación Diferencial:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad (1)$$

Cuya Solución General es la familia de curvas:

$$f(x, y, C) = 0 \qquad (2)$$

Recordemos que si una curva G es envolvente de una familia de curvas, entonces cada una de estas curvas es tangente a G.



Si suponemos que la familia de curvas (2) tiene una envolvente y puesto que en cada punto (x, y) la pendiente de la envolvente es igual a la de la curva que es tangente en ese punto, deducimos que la envolvente satisface también a la Ecuación Diferencial (1).
En general la envolvente no pertenece a la familia definida por (2) y no se la puede obtener dándole valores a la constante C de la misma. Es por lo tanto una Solución Singular de la Ecuación Diferencial.
La ecuación de la envolvente (si existe), se encuentra eliminando la constante C entre las ecuaciones:

$$\begin{cases} f(x, y, C) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial C} = 0 \end{cases}$$

Ejemplo:
Hallar la Solución Singular de la siguiente Ecuación Diferencial:

$$y^2 + y^2 (y')^2 = 4 \qquad (1)$$

Primero determinamos la Solución General. Es una Ecuación Diferencial con Variables Separables.
Separamos las variables:

$$y^2 (y')^2 = 4 - y^2$$

$$(y')^2 = \frac{4 - y^2}{y^2}$$

$$y' = \frac{\pm\sqrt{4 - y^2}}{y} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{4 - y^2}}{y}$$

$$\frac{y}{\pm\sqrt{4 - y^2}} \cdot dy = dx$$

Integramos: $\pm\sqrt{4 - y^2} + C = x$ y reordenando términos obtenemos:

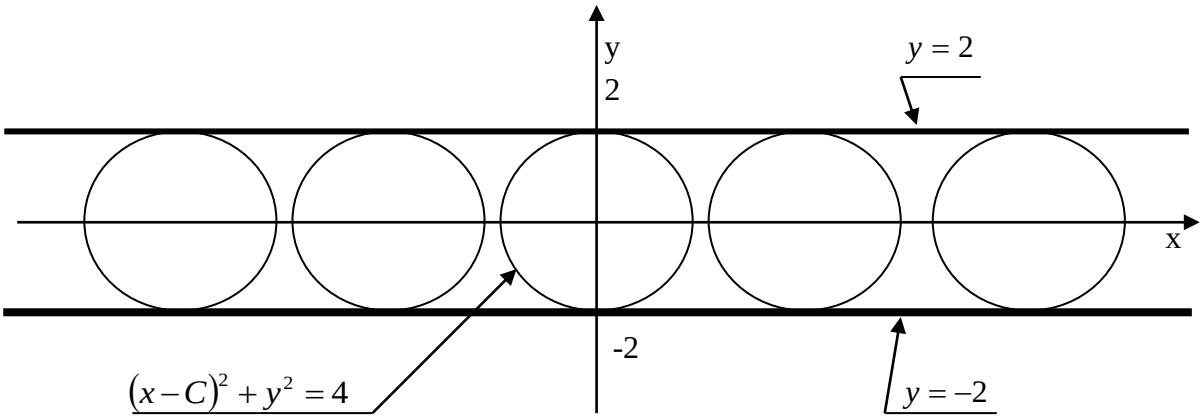
$$\boxed{(x - C)^2 + y^2 = 4} \qquad \textbf{Solución General} \qquad (2)$$

Esta Solución General es una familia de circunferencias de radio $R = 2$ y centro sobre el eje de las abscisas.

$$\begin{cases} f(x,y,C) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial C} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-C)^2 + y^2 = 4 \\ -2x + 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y = \pm 2$$

Que son dos rectas envolventes a la familia de circunferencias y como satisfacen a la Ecuación Diferencial (1) son Soluciones Singulares.

$\boxed{y = 2}$ e $\boxed{y = -2}$ **Soluciones Singulares**



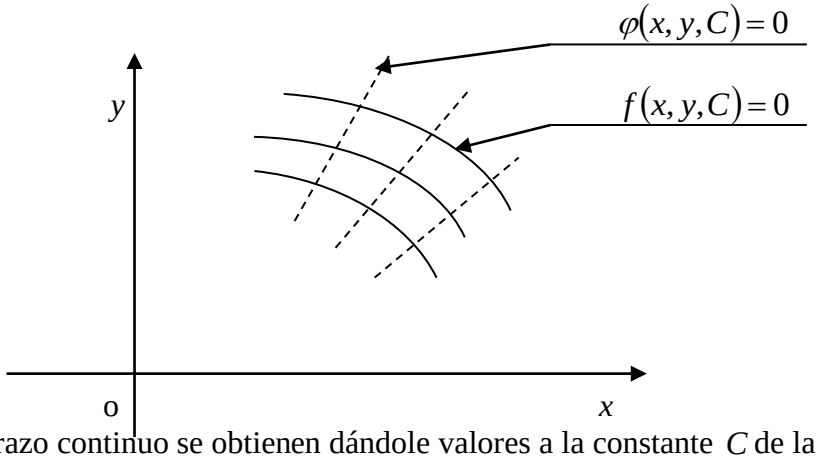
TRAYECTORIAS ORTOGONALES

Dada la familia de curvas:

$$f(x,y,C) = 0 \qquad (1)$$

Las líneas que cortan a las curvas de la familia dada, formando ángulo recto, se llaman **Trayectorias Ortogonales.**

En diversas investigaciones prácticas es necesario determinar Trayectorias Ortogonales de alguna familia de curvas.



En el gráfico las curvas de trazo continuo se obtienen dándole valores a la constante C de la función (1).

Obtengamos la Ecuación Diferencial de esta familia de curvas eliminando C entre la función (1) y su derivada:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (2)$$

Y sea la Ecuación Diferencial resultante:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad (3)$$

Donde $\frac{dy}{dx}$ es el coeficiente angular de la tangente a una curva de la familia en un punto dado.

Por definición la familia de curvas ortogonales corta a las curvas de la familia dada formando ángulos rectos, por lo tanto la pendiente en cada punto de una curva de la familia ortogonal es inversa y de signo contrario que la pendiente de las curvas de la familia dada.

Es decir que la Ecuación Diferencial de la Trayectorias Ortogonales será:

$$F\left(x, y, -\frac{dx}{dy}\right) = 0 \qquad (4)$$

Que es una Ecuación Diferencial de Primer Orden y su Solución General es de la forma:

$$\varphi(x, y, C) = 0 \qquad (5)$$

<u>Ejemplo</u>:

Determinar las Trayectorias Ortogonales de la familia de circunferencias concéntricas:

$$x^2 + y^2 = C^2 \qquad (1)$$

Para obtener la Ecuación Diferencial de esta familia de curvas, derivemos:

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \qquad (3)$$

La Ecuación Diferencial de la familia de curvas ortogonales es:

$$2x - 2y \cdot \frac{dx}{dy} = 0 \qquad (4)$$

Obtengamos ahora la Solución General de esta Ecuación Diferencial. Es una Ecuación Diferencial de Primer Orden con Variables Separables. Separemos las variables:

$$2x = 2y \cdot \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Integramos: $\ln y = \ln x + \ln C \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln Cx$

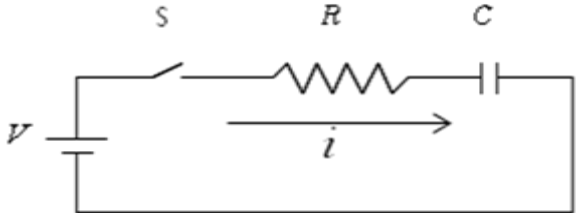
Y finalmente la familia de Trayectorias Ortogonales finalmente resulta:

$$\boxed{y = Cx} \qquad (5)$$

APLICACIONES

Veamos algunos problemas prácticos de aplicación de las Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden:

Ejemplo 1:
En el siguiente circuito *RC* con una fuente de alimentación de corriente continua (*V* = constante) determinemos la corriente *i(t)* en el intervalo *t* [0,∞]. En el instante *t*=0 se cierra el interruptor S (consideremos que en *t*=0 el capacitor está descargado).



De acuerdo con la ley de Kirchhoff de las tensiones, la tensión aplicada *V* es igual a la suma de las caídas de tensión v_R y v_C a través de la resistencia *R* y el capacitor *C* respectivamente:

$$V = v_R + v_C$$

$$V = iR + \frac{1}{C}\int i dt$$

Para eliminar la integral, derivamos en ambos miembros de la igualdad con respecto a *t*, y reordenando los términos obtenemos la siguiente Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden:

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i = 0$$

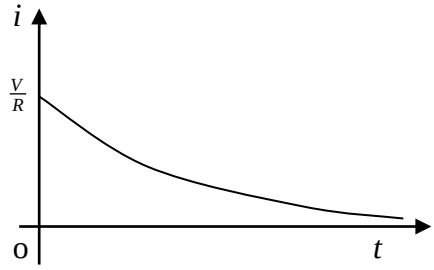
Si resolvemos esta ecuación obtendremos su Solución General:

$$\boxed{i = Ke^{-\frac{1}{RC}t}}$$

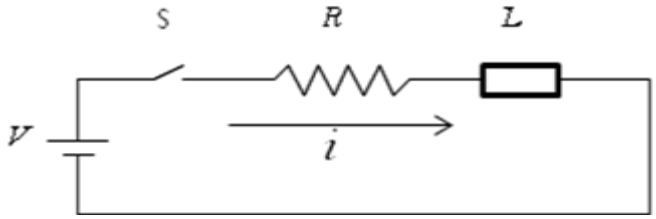
Donde *K* es la constante de integración. Determinemos su valor.
Como consideramos que en el instante *t=0* el capacitor estaba descargado, entonces para *t=0* resulta $i_0 = \frac{V}{R}$, entonces reemplazando estos valores en la Solución General obtendremos $K = \frac{V}{R}$.
Finalmente la Solución Particular correspondiente resulta:

$$\boxed{i = \frac{V}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}}$$

Se puede observar que al ser negativo el exponente de *e*, a medida que transcurre el tiempo $e^{-\frac{1}{RC}t}$ se hace cada vez más pequeño.



Ejemplo 2:
Determinemos ahora *i(t)* a partir del instante *t*=0 en el que se cierra el interruptor S en el siguiente circuito *RL*.



De acuerdo con la ley de Kirchhoff de las tensiones, la tensión aplicada *V* es igual a la suma de las caídas de tensión v_R y v_L a través de la resistencia *R* y el inductor *L* respectivamente:

$$V = v_R + v_L$$

$$V = iR + L\frac{di}{dt}$$

Reordenando los términos obtenemos la siguiente Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}$$

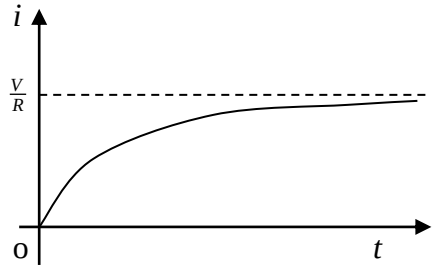
Si resolvemos esta ecuación obtendremos su Solución General:

$$\boxed{i = \frac{V}{R} + Ke^{-\frac{R}{L}t}}$$

Donde *K* es la constante de integración. Determinemos su valor, para ello aceptemos sin demostrar que en el instante *t*=0 resulta $i_0 = 0$, entonces reemplazando estos valores en la Solución General obtendremos $K = -\frac{V}{R}$.
Finalmente la Solución Particular correspondiente resulta:

$$\boxed{i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t}} \quad \text{ó} \quad \boxed{i = \frac{V}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right]}$$

Al ser negativo el exponente de *e*, a medida que transcurre el tiempo $e^{-\frac{R}{L}t}$ se hace cada vez más pequeño.



Ejemplo 3:

Ley de Newton del enfriamiento o calentamiento

Esta ley indica que la variación de la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la temperatura ambiente.

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)} \qquad \begin{cases} T(t)\text{: Temperatura del objeto cuando } T>0 \\ T_a \text{ : Temperatura ambiente} \\ K \text{ : Constante de proporcionalidad} \end{cases}$$

Ésta es una Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden y Con Variables Separables a la vez. Resolvámosla como Ecuación Diferencial con Variables Separables:

$$\frac{dT}{T - T_a} = kdt \qquad \text{integramos:}$$

$$\int \frac{dT}{T - T_a} = \int kdt$$

$$\ln(T - T_a) = kt + C_1 \qquad \text{y por definición de logaritmo resulta}$$

$$T - T_a = e^{kt + C_1}$$

$$\boxed{T = Ce^{kt} + T_a} \qquad \text{Solución General}$$

Supongamos como ejemplo que un horno está a 210 ºC en el instante en que se lo apaga y que 5 minutos después su temperatura disminuyó a 180 ºC. Deseamos determinar cuánto demorará en enfriarse a la temperatura ambiente (T_a = 25 ºC), entonces tendremos:

$$T = Ce^{kt} + 25$$

Determinemos el valor de la constante C para la condición inicial (T_o=*210 ºC* en el instante t_o=*0*):

$$210 = C_0 e^0 + 25 \qquad \Rightarrow \qquad C_0 = 185$$

La Solución Particular resulta:

$$T = 185e^{kt} + 25$$

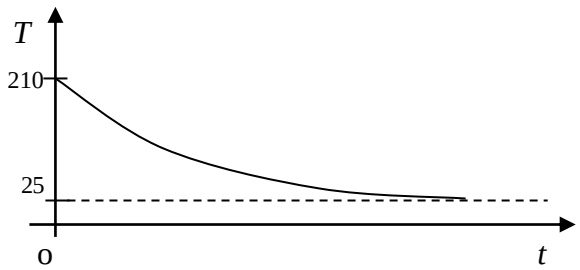
Obtengamos ahora el valor de la constante de proporcionalidad k en base al dato de que transcurridos 5 minutos la temperatura del horno bajó a 180 ºC:

$$180 = 185e^{5k} + 25 \qquad \Rightarrow \qquad e^{5k} = \frac{180 - 25}{185} \qquad \Rightarrow \qquad \ln\frac{155}{185} = 5k$$

$$k = -0.0353861$$

Finalmente obtenemos:

$$\boxed{T = 185e^{-0.0353861t} + 25}$$



Podemos deducir que nunca llegará a la temperatura ambiente. Pero podemos comprobar que pasadas unas dos horas la temperatura llega 27,6 ºC y transcurridas unas tres horas prácticamente la temperatura del horno llega a la temperatura ambiente (T_a = 25 ºC).

$$T(180') = 185e^{-0.0353861x180} + 25 = 25.3\,^{o}C$$

Ejemplo 4:
Un pueblo tiene en la actualidad 1000 habitantes y su población ha venido creciendo a razón de 10 % cada 5 años. Deseamos determinar: A) ¿Qué cantidad de habitantes tendrá dentro de 20 años?, B) ¿Cuántos años tardará en duplicarse la población?

La población crece en forma proporcional a la cantidad de habitantes, por lo tanto resulta:

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad \begin{cases} y : \text{cantidad de habitantes} \\ k : \text{constante de proporcionalidad} \end{cases}$$

Es una Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden y con Variables Separables a la vez, si la resolvemos como Ecuación Diferencial con Variables Separables tendremos:

$$\frac{dy}{y} = kdt \qquad \text{integramos:} \qquad \ln y = k\,t + C_1$$

$$\boxed{y = Ce^{k\,t}} \qquad \text{Solución General}$$

Obtengamos el valor de la constante de integración C a partir de la condición inicial (y_o = 1000 para t_o=0):

$$1000 = C_0 e^0 \qquad \Rightarrow \qquad C_0 = 1000$$

Tenemos la Solución Particular:

$$y = 1000e^{k\,t}$$

Determinemos ahora el valor de la constante de proporcionalidad k basándonos en el dato de que la población crece a razón de 10 % cada 5 años (es decir que dentro de 5 años habrá 1100 habitantes):

$$1100 = 1000e^{5k} \qquad \Rightarrow \qquad e^{5k} = \frac{1100}{1000} \qquad \Rightarrow \qquad \ln\frac{1100}{1000} = 5k$$

$$k = 0.019062$$

Finalmente obtenemos:

$$\boxed{y = 1000e^{0,019062\,t}}$$

A) ¿Qué cantidad de habitantes tendrá dentro de 20 años?

$$y = 1000e^{0,019062x20} = 1464$$

Dentro de 20 años la población será de 1464 habitantes.

B) ¿Cuántos años tardará en duplicarse la población?

$$2000 = 1000e^{0,019062\,t} \qquad \Rightarrow \qquad e^{0,019062\,t} = \frac{2000}{1000} \qquad \Rightarrow \qquad \ln\frac{2000}{1000} = 0.019062t$$

$$t = 36,3$$

En aproximadamente 36 años se duplicará la población.

EJERCICIOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Hallar las Soluciones Generales y/o Particulares de las siguientes Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden:

Nº	Ecuación Diferencial	Condición Inicial
1	$y^2 \cos 2x = y'$	$y_0 = 1$ para $x_0 = \pi$
2	$2yy' sen y^2 + x^2 = 0$	$y_0 = 0$ para $x_0 = 3$
3	$2x^3 dy - 2x^2 y dx + y^3 dx = 0$	$y(1) = 2$
4	$(x+y)y' + y = 0$	$y(-2) = 3$
5	$xy' + y - 2x = 0$	$y(2) = 4$
6	$y' + \frac{x}{1-x^2} y = -x$	$y_0 = 0$ para $x_0 = 0$
7	$y' + xy - x^3 y^3 = 0$	$y_0 = 4$ para $x_0 = 0$
9	$y' + y = xy^3$	
10	$y' + \frac{y}{x} - x^2 y^6 = 0$	
11	$y' - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} = 0$	
12	$xy' + y = y^2 \ln x$	$y_0 = 1$ para $x_0 = 1$
13	$x' + x - yx^3 = 0$	
14	$(1-x^2)y' - xy = xy^2$	
15	$\frac{dx}{x.y^2} + \left(\frac{1}{y} - \frac{2.\ln x}{y^3}\right)dy = 0$	$y_0 = 1$ para $x_0 = 1$
16	$2x \cos x^2 dx - \frac{3}{x-3y} dy + \frac{1}{x-3y} dx = 0$	$y_0 = -\frac{1}{3}$ para $x_0 = 0$

Soluciones:

Nº	Solución General	Solución Particular
1	$\frac{1}{2}sen2x+\frac{1}{y}=C$	$\frac{1}{2}sen2x+\frac{1}{y}=1$
2	$\frac{x^3}{3}-\cos y^2=C$	$\frac{x^3}{3}-\cos y^2=8$
3	$\frac{x^2}{y^2}-\ln x=C$	$\frac{x^2}{y^2}-\ln x=\frac{1}{4}$
4	$2xy+y^2=C$	$2xy+y^2=-3$
5	$y=x+\frac{C}{x}$	$y=x+\frac{4}{x}$
6	$y=\left(1-x^2\right)+C\sqrt{1-x^2}$	$y=\left(1-x^2\right)-\sqrt{1-x^2}$
7	$y=\left(x^2+1-Ce^{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$y=\left(x^2+1-\frac{1}{2}e^{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$
9	$y=\sqrt{\frac{1}{x+\frac{1}{2}+Ce^{2x}}}$	
10	$y=\sqrt[5]{\frac{1}{\frac{5}{2}x^3+Cx^5}}$	
11	$x=y\ln Cx$	
12	$y^{-1}=1+\ln x+Cx$	$y^{-1}=1+\ln x$
13	$x^{-2}=y+\frac{1}{2}+Ce^{2y}$	
14	$y=\frac{1}{C\sqrt{1-x^2}-1}$	
15	$\frac{\ln x}{y^2}+\ln y=C$	$\frac{\ln x}{y^2}+\ln y=0$
16	$senx^2+\ln(x-3y)=C$	$senx^2+\ln(x-3y)=0$

CAPÍTULO 9

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Recordemos que una Ecuación Diferencial de enésimo orden es de la forma:

$$F(x, y, y', y'', \ldots\ldots\ldots\ldots, y^{[n]}) = 0$$

La **Solución General** de estas ecuaciones es de la forma:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots C_n)$$

que depende de "n" constantes arbitrarias.

Si se dan condiciones iniciales se puede obtener la **Solución Particular** correspondiente.

Veremos a continuación distintos métodos para resolver Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden Superior.

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ENÉSIMO ORDEN

Una Ecuación Diferencial es Lineal si es de 1º grado respecto a la función desconocida "y" y sus derivadas (es decir que el exponente de $y^{[n]}, y^{[n-1]}, \ldots\ldots\ldots, y'', y', y$ es igual a uno):

$$a_0 y^{[n]} + a_1 y^{[n-1]} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

Donde $a_0, a_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, a_n$, $f(x)$ son funciones de "x" o constantes y $a_0 \neq 0$.

$f(x)$ recibe el nombre de **segundo miembro** de la ecuación diferencial.

Para simplificar el desarrollo, consideraremos $a_0 = 1$, en caso de no serlo, dividiremos a ambos miembros por a_0.

Si $f(x) \neq 0$ la Ecuación Diferencial Lineal se llama **<u>no Homogénea</u>** ó con segundo miembro.

$$y^{[n]} + a_1 y^{[n-1]} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (1)$$

Si $f(x) = 0$ la Ecuación Diferencial Lineal se llama **<u>Homogénea</u>** ó sin segundo miembro.

$$y^{[n]} + a_1 y^{[n-1]} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (2)$$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS DE SEGUNDO ORDEN

Son de la forma:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (3)$$

Definamos algunas propiedades de la Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas, que utilizaremos como base para determinar su Solución General.

1- *"Si y_1 e y_2 son Soluciones Particulares de la Ecuación Diferencial Lineal Homogénea de 2º Orden (3), y C_1 y C_2 constantes, entonces $C_1 y_1 + C_2 y_2$ también lo será".*

Demostración:
Si y_1 es solución de la ecuación (3) entonces $y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0$
Si y_2 es solución de la ecuación (3) entonces $y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0$
Consideremos ahora $y_3 = C_1 y_1 + C_2 y_2$ entonces $y_3' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$ e $y_3'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2''$
Para que y_3 sea solución de la ec. (3) debe ser $y_3'' + a_1 y_3' + a_2 y_3 = 0$
Reemplazamos $(C_1 y_1'' + C_2 y_2'') + a_1 (C_1 y_1' + C_2 y_2') + a_2 (C_1 y_1 + C_2 y_2) = 0$
Reordenamos términos $(C_1 y_1'' + a_1 C_1 y_1' + a_2 C_1 y_1) + (C_2 y_2'' + a_1 C_2 y_2' + a_2 C_2 y_2) = 0$
Sacamos factor común C_1 y C_2 $C_1 (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + C_2 (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = 0$

Y como por definición y_1 e y_2 son dos Soluciones Particulares de la Ecuación Diferencial (3), ambos términos resultan igual a cero, con lo que queda demostrada la propiedad.

2- **Funciones Linealmente Independientes:**

- Dos funciones y_1 e y_2 son linealmente dependientes en un intervalo dado si su cociente es constante, es decir si $\frac{y_1}{y_2} = constante.$
- Dos funciones y_1 e y_2 son linealmente independientes si $\frac{y_1}{y_2} \neq constante.$
- Dos funciones no pueden ser linealmente independientes si una de ellas es nula.
- Aunque siempre podemos recurrir a esta definición para definir funciones linealmente independientes, también se puede establecer si dos funciones son linealmente independientes mediante el siguiente determinante:
- Definamos como Determinante de Wronski o simplemente Wronskiano de las funciones y_1 e y_2 al determinante:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

- Si las funciones y_1 e y_2 son linealmente dependientes en un intervalo dado, entonces su Wronskiano se anula en dicho intervalo.

  En efecto si y_1 e y_2 son linealmente dependientes, entonces $y_2 = Cy_1$ $[C = \text{constante}]$, por lo tanto $y_2' = Cy_1'$, resultando el Wronsquiano:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & Cy_1 \\ y'_1 & Cy_1' \end{vmatrix} = C.\begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0$$

$$W(y_1, y_2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y_1 \text{ e } y_2 \textit{ son Linealmente Dependientes}$$

- Se puede demostrar que *si dos funciones* y_1 e y_2 *son Soluciones Particulares Linealmente Independientes de la Ecuación Diferencial (3), entonces W no se anula en ningún punto, es decir:*

$$W(y_1, y_2) \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad y_1 \text{ e } y_2 \textit{ son Linealmente Independientes}$$

  Esto se verifica también para *"n"* funciones que son Soluciones Particulares Linealmente Independientes de una Ecuación Diferencial Lineal Homogénea de Orden *"n"*.

$$W(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{[n-1]} & y_2^{[n-1]} & \cdots & y_n^{[n-1]} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n \textit{ son Linealmente Independientes}$$

3- Y finalmente: ***"Si*** y_1 ***e*** y_2 ***son Soluciones Particulares Linealmente Independientes de la Ecuación Diferencial (3), entonces su <u>Solución General</u> será:***

$$\boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2}$$

Siendo C_1 *y* C_2 *dos constantes arbitrarias".*

En generales no es fácil determinar las soluciones de las Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de Segundo Orden cuando los coeficientes son variables, pero sí lo es cuando los coeficientes a_1 y a_2 son constantes y es lo que estudiaremos a continuación:

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

Son de la forma:

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (4)$$

donde p y q son números constantes reales.

Para obtener la Solución General de estas Ecuaciones Diferenciales es suficiente con encontrar dos Soluciones Particulares Linealmente Independientes. Demos a una Solución Particular la forma:

$\boxed{y = e^{kx}}$ donde "k" es una constante. Entonces derivándola dos veces tendremos:

$y' = ke^{kx}$ $\qquad$ $y'' = k^2 e^{kx}$

Reemplazamos en la expresión de la Ecuación Diferencial (4):

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$$
$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

Como siempre es $e^{k.x} \neq 0$, entonces para que $y = e^{kx}$ sea solución de la Ecuación Diferencial (4) deberá ser:

$$\boxed{k^2 + pk + q = 0} \qquad (5)$$

Si "k" satisface a la ecuación (5) entonces $y = e^{kx}$ será solución de la Ecuación Diferencial (4).
La ecuación (5) recibe el nombre de **ECUACIÓN CARACTERÍSTICA**. Ésta es una ecuación de segundo grado que tiene dos raíces, que llamaremos k_1 y k_2:

$$k_{1-2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Pueden presentarse tres casos, que k_1 y k_2 sean dos Raíces Reales y Distintas, dos Raíces Reales e Iguales, ó dos Raíces Complejas Conjugadas. Analicemos cada uno de ellos:

1- **Dos Raíces Reales y Distintas** $\qquad (p^2 - 4q > 0)$

Es decir $k_1 \neq k_2$

En este caso tendremos dos Soluciones Particulares:

$y_1 = e^{k_1 x}$ $\qquad$ $y_2 = e^{k_2 x}$

Estas dos soluciones resultan ser Linealmente Independientes, pues:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = k_2 e^{k_1 x} e^{k_2 x} - k_1 e^{k_1 x} e^{k_2 x} = (k_2 - k_1) e^{k_1 x} e^{k_2 x} \neq 0$$

Por lo tanto en este caso la Solución General de la Ecuación Diferencial (4) será de la forma:

$$\boxed{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}$$

Ejemplo 1:
Resolvamos la siguiente Ecuación Diferencial $y'' - 4y' + 3y = 0$

Su Ecuación Característica es: $k^2 - 4k + 3 = 0$

Sus raíces son: $k_{1-2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.3}}{2} = \begin{cases} k_1 = 3 \\ k_2 = 1 \end{cases}$

Y como son dos raíces reales y distintas:

$$\boxed{y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{x}} \qquad \textbf{Solución General}$$

Si se fijan condiciones iniciales, se puede determinar la Solución Particular correspondiente. Por ejemplo: $y_0 = 6$ e $y'_0 = 10$ para $x_0 = 0$

Trabajamos con la Solución General y su derivada:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{x} \\ y' = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} 6 = C_1 + C_2 \\ 10 = 3C_1 + C_2 \end{cases}$$

De este sistema de dos Ecuaciones Lineales con dos incógnitas, obtenemos los valores de:

$C_1 = 2$ y $C_2 = 4$

Y finalmente la Solución Particular resulta ser:

$$\boxed{y = 2e^{3x} + 4e^{x}} \qquad \textbf{Solución Particular}$$

2- **<u>Dos Raíces Reales e Iguales</u>** $(p^2 - 4q = 0)$

Es decir $k_1 = k_2 = k = -\dfrac{p}{2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{2k + p = 0}$

En el caso de ser Dos Raíces Reales e Iguales, además de $k^2 + pk + q = 0$ también $2k + p = 0$.

Al ser Dos Raíces Reales e Iguales tenemos una sola Solución Particular: $y_1 = e^{kx}$

Demostremos que en este caso también es solución de la Ec. Dif. (4) la expresión: $y_2 = xe^{kx}$

Derivemos dos veces a y_2: $\begin{cases} y'_2 = e^{kx} + kxe^{kx} \\ y''_2 = 2ke^{kx} + k^2 xe^{kx} \end{cases}$

Para que y_2 sea solución de la Ecuación Diferencial (4) debe resultar:

$$y''_2 + py'_2 + qy_2 = 0$$

Reemplazamos en esta última los valores de y_2 y sus derivadas:

$$2ke^{kx} + k^2xe^{kx} + p(e^{kx} + kxe^{kx}) + qxe^{kx} = 0$$

Reordenamos los términos y obtenemos:

$$xe^{kx}(k^2 + pk + q) + e^{kx}(2k + p) = 0$$

Como vimos, cuando son Dos Raíces Reales e Iguales, los dos paréntesis de la última expresión resultan iguales a cero, por lo que queda demostrado que y_2 también es solución de la Ecuación Diferencial (4). Y como y_1 e y_2 resultan ser Linealmente Independientes:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & e^{kx} + kxe^{kx} \end{vmatrix} = e^{2kx} + kxe^{2kx} - kxe^{2kx} = e^{2kx} \neq 0$$

Entonces la Solución General será:

$$\boxed{y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}} \qquad \text{ó} \qquad \boxed{y = (C_1 + C_2x)e^{kx}}$$

<u>Ejemplo 2</u>:
Sea la Ecuación Diferencial Lineal Homogénea de 2º Orden con coeficientes constantes:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Su Ecuación Característica es: $k^2 - 2k + 1 = 0$

Sus raíces son: $k_{1-2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1}}{2} = 1$

$$\boxed{k_1 = k_2 = k = 1}$$

Y como son Dos Raíces Reales e Iguales: $\boxed{y = (C_1 + C_2x)e^x}$ **Solución General**

Fijemos como condición inicial $y(0) = 2$ e $y'(0) = 5$, y obtengamos la Solución Particular correspondiente. Para ello trabajamos con la Solución General y su derivada:

$$\begin{cases} y = C_1.e^x + C_2xe^x \\ y = C_1e^x + C_2e^x + C_2xe^x \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 = C_1 \\ 5 = C_1 + C_2 \end{cases}$$

De este sistema de dos Ecuaciones Lineales con dos incógnitas obtenemos los valores de :

$C_1 = 2$ y $C_2 = 3$

Y finalmente la Solución Particular resulta ser:

$\boxed{y = (2 + 3x)e^x}$ **Solución Particular**

3- **Dos Raíces Complejas Conjugadas** $(p^2 - 4q < 0)$

Es decir: $k_1 = \alpha + i\beta$ $\quad k_2 = \alpha - i\beta$

Las dos Soluciones Particulares son: $y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}$ $\quad y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$

Que son Linealmente Independientes, pues:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{(\alpha+i\beta)x} & e^{(\alpha-i\beta)x} \\ (\alpha+i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x} & (\alpha-i\beta)e^{(\alpha-i\beta)x} \end{vmatrix} = (\alpha - i\beta)e^{2\alpha x} - (\alpha + i\beta)e^{2\alpha x} = -i2\beta\, e^{2\alpha x} \neq 0$$

Y la Solución General es: $y = c_1.e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2.e^{(\alpha-i\beta)x}$

En la práctica se prefiere trabajar con funciones reales y no con exponenciales complejas. Con este fin aplicamos la Fórmula de Euler:

$$e^{\pm i\beta x} = \cos\beta x \pm i\,\mathrm{sen}\beta x$$

Expresamos la Solución General así: $y = c_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + c_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x})$

Aplicamos la Fórmula de Euler: $y = e^{\alpha x}\left[c_1(\cos\beta x + i\,\mathrm{sen}\beta x) + c_2(\cos\beta x - i\,\mathrm{sen}\beta x)\right]$

Reordenamos términos: $y = e^{\alpha x}\left[(c_1 + c_2)\cos\beta x + i(c_1 - c_2)\mathrm{sen}\beta x\right]$

Y considerando: $C_1 = c_1 + c_2$ y $C_2 = i(c_1 - c_2)$

La Solución finalmente se expresa: $\boxed{y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \mathrm{sen}\beta x)}$ **Solución General**

Ésta nos proporciona las soluciones (reales o complejas) de la Ecuación Diferencial. Las soluciones son reales cuando C_1 y C_2 son reales.

Ejemplo 3: Determinemos la solución de la siguiente Ecuación Diferencial:

$$y'' - 2y' + 2.y = 0$$

La Ecuación Característica es: $k^2 - 2k + 2 = 0$

Sus raíces son: $k_{1-2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.2}}{2} = 1 \pm i$ $\quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$

Su Solución General resulta: $\boxed{y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \mathrm{sen}x)}$ **Solución General**

Fijemos como condición inicial $y_0 = 4$ e $y'_0 = 1$ para $x_0 = 0$, y obtengamos la Solución Particular correspondiente. Para ello trabajamos con la Solución General y su derivada:

$$\begin{cases} y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x) \\ y' = e^x (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x) + e^x (-C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x) \end{cases} \qquad \begin{cases} 4 = C_1 \\ 1 = C_1 + C_2 \end{cases}$$

De este sistema de dos Ecuaciones Lineales con dos incógnitas obtenemos los valores de:

$C_1 = 4$ y $C_2 = -3$

Y finalmente la Solución Particular resulta ser:

$$\boxed{y = e^x (4 \cos x - 3 \operatorname{sen} x)}$$ **Solución Particular**

Ejercicios

Hallar las Soluciones Generales y Particulares de las siguientes Ecuaciones Diferenciales Homogéneas de Segundo Orden con Coeficientes Constantes:

1	$y'' - y = 0$	Condición inicial: $y_0 = 2$ e $y'_0 = 6$ para $x_0 = 0$
2	$4y'' - 5y' - 6y = 0$	Condición inicial: $y_0 = 5$ e $y'_0 = -1$ para $x_0 = 0$
3	$y'' - 2y' + 5y = 0$	Condición inicial: $y(0) = 0$ e $y'(0) = 6$
4	$y'' + y = 0$	Condición inicial: $y(\frac{\pi}{2}) = 3$ e $y'(\frac{\pi}{2}) = -2$
5	$y'' + 4y' + 4y = 0$	Condición inicial: $y(0) = 4$ e $y'(0) = 1$
6	$y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$	Condición inicial: $y_0 = 6$ e $y'_0 = 2$ para $x_0 = 0$

Soluciones:

Nº	Solución General	Solución Particular
1	$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$	$y = 4e^x - 2e^{-x}$
2	$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{3}{4}x}$	$y = e^{2.x} + 4e^{-\frac{3}{4}x}$
3	$y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \text{sen} 2x)$	$y = 3e^x \text{sen} 2x$
4	$y = C_1 \cos x + C_2 \text{sen} x$	$y = 2\cos x + 3\text{sen} x$
5	$y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$	$y = (4 + 9x)e^{-2x}$
6	$y = (C_1 + C_2 x)e^{\frac{x}{2}}$	$y = (6 - x)e^{\frac{x}{2}}$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS DE ENÉSIMO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

Son de la forma:

$$y^{[n]} + a_1 y^{[n-1]} + \dots\dots\dots\dots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (6)$$

Donde $a_0, a_1, \dots\dots\dots\dots, a_n$ son constantes reales.

Todo lo estudiado para las Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de Segundo Orden con Coeficientes Constantes puede ser ampliado a las Ecuaciones de Enésimo Orden:

*"Si $y_1, y_2, \dots\dots\dots\dots, y_n$ son Soluciones Particulares de la Ecuación Diferencial (6), decimos que son Linealmente Independientes si ninguna de ellas puede ser representada como combinación lineal de las otras. Es decir si **no** pueden ser representadas de la forma:*

$$y_n = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots\dots\dots\dots + A_{n-1} y_{n-1}$$

donde $A_1, A_2, \dots\dots\dots\dots, A_{n-1}$ son constantes, de las cuales por lo menos una no es igual a cero."

O también recurriendo al Wronsquiano, podemos definir que si $y_1, y_2, \dots\dots\dots\dots, y_n$ son Soluciones Particulares Linealmente Independientes se verifica que:

$$W(y_1, y_2, \dots\dots\dots\dots, y_n) \neq 0$$

Si $y_1, y_2, \dots\dots\dots\dots, y_n$ son Soluciones Particulares Linealmente Independientes de la Ecuación Diferencial (6), entonces su Solución General es de la forma:

$$\boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots\dots\dots\dots + C_n y_n} \qquad \textbf{Solución General}$$

donde $C_1, C_2, \dots\dots\dots\dots, C_n$ son constantes arbitrarias.

La Solución General se determina del mismo modo que en el caso de Ecuaciones de Segundo Orden:

1- Se forma la **Ecuación Característica** en base a la Ecuación Diferencial (6) planteada:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots\dots\dots\dots + a_{n-2} k^2 + a_{n-1} k + a_n = 0 \quad \textbf{Ecuación Característica}$$

2- Se determinan las "**n**" raíces de la Ecuación Característica $k_1, k_2, \dots\dots\dots\dots, k_n$

3- Según el tipo de raíces será la forma de la Solución General, de acuerdo a las siguientes consideraciones:

a- A toda Raíz Real Simple "k" le corresponde una Solución Particular: $y = e^{k.x}$

b- A todo par de Raíces Complejas Conjugadas $k = \alpha \pm i\beta$
le corresponden dos Soluciones Particulares: $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ $\quad y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$

c- A toda Raíz Real "k" de multiplicidad "m" le
corresponden "m" Soluciones Particulares: $e^{kx},\ xe^{kx},\ x^2e^{kx},\ldots\ldots\ldots\ldots,\ x^{m-1}e^{kx}$

d- A todo par de Raíces Complejas Conjugadas de
multiplicidad "u" le corresponden "2u"
Soluciones Particulares: $e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,\ldots\ldots\ldots,\ x^{u-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$
$e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ldots\ldots\ldots,\ x^{u-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$

De lo expuesto podemos comprobar que resolver una Ecuación Diferencial Lineal Homogénea de Enésimo Orden con Coeficientes Constantes, consiste en resolver la Ecuación Característica correspondiente.

Ejemplos: Determinar la Solución General de las siguientes Ecuaciones Diferenciales

1- $y^{[6]} + 2y^{[5]} + y^{[4]} = 0$ la Ecuación Característica es
$k^6 + 2k^5 + k^4 = 0$ calculamos sus raíces
$k^4(k^2 + 2k + 1) = 0$ $\quad k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$
$k_5 = k_6 = -1$

$$\boxed{y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5e^{-x} + C_6xe^{-x}}$$ **Solución General**

2- $y''' - 3y'' + 3y' = 0$ la Ecuación Característica es
$k^3 - 3k^2 + 3k = 0$ calculamos sus raíces
$k(k^2 - 3k + 3) = 0$ $\quad k_1 = 0$
$k_{2-3} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\boxed{y = C_1 + C_2e^{\frac{3}{2}x}\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_3e^{\frac{3}{2}x}\operatorname{sen}\tfrac{\sqrt{3}}{2}x} \quad \text{ó} \quad \boxed{y = C_1 + e^{\frac{3}{2}x}(C_2\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\operatorname{sen}\tfrac{\sqrt{3}}{2}x)}$$
Solución General

3- $y''' - 8y = 0$ la Ecuación Característica es
$k^3 - 8 = 0$ calculamos sus raíces
$k = \sqrt[3]{8} = 2 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 2$
$\dfrac{k^3 - 8}{k - 2} = k^2 + 2k + 4 \quad \Rightarrow \quad k^3 - 8 = (k^2 + 2k + 4)(k - 2) = 0$
$k^2 + 2k + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{2-3} = -1 \pm \sqrt{3}.i$

$$\boxed{y = C_1.e^{2x} + C_2e^{-x}\cos\sqrt{3}x + C_3e^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{3}x} \quad \text{ó} \quad \boxed{y = C_1e^{2x} + e^{-x}(C_2\cos\sqrt{3}x + C_3\operatorname{sen}\sqrt{3}x)}$$
Solución General

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGÉNEAS DE SEGUNDO ORDEN

Son de la forma:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \qquad (7)$$

Su Solución General se puede expresar como:

$$y = y_h + y_p \qquad (8)$$

Donde y_p es una Solución Particular cualquiera de la Ecuación Diferencial Lineal no Homogénea (7) e y_h es la Solución General de la Ecuación Diferencial Lineal Homogénea Auxiliar:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (9)$$

Para demostrarlo derivemos dos veces la (8) y luego la introducimos en la Ecuación no Homogénea (7):

$$y = y_h + y_p \qquad y' = y'_h + y'_p \qquad y'' = y''_h + y''_p$$

$$(y''_h + y''_p) + a_1(y'_h + y'_p) + a_2(y_h + y_p) = f(x) \qquad \text{reordenamos términos:}$$

$$(y''_h + a_1 y'_h + a_2 y_h) + (y''_p + a_1 y'_p + a_2 y_p) = f(x)$$

Como y_p es Solución Particular de la Ecuación Diferencial (7), entonces el segundo paréntesis es igual a $f(x)$ y como y_h es Solución de la Ecuación Homogénea Auxiliar (9) el primer paréntesis es igual a cero, con lo que queda demostrado que $y = y_h + y_p$ es Solución de la Ecuación Diferencial Lineal no Homogénea (7).

Ya sabemos calcular la Solución y_h de la Ecuación Homogénea Auxiliar (9):

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Donde y_1 e y_2 son dos Soluciones Particulares Linealmente Independientes y C_1 y C_2 son dos constantes arbitrarias.

Por lo que la Solución General (8) de la Ecuación Diferencial Lineal no Homogénea (7) resulta:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p$$

Solo nos resta obtener la Solución Particular y_p.

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGÉNEAS DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (10)$$

donde p y q son números reales. Su Solución General, como vimos, es de la forma:

$$y = y_h + y_p$$

Existen dos métodos para obtener la Solución Particular y_p:

- **El Método de los Coeficientes Indeterminados**: Es un método muy simple, pero es válido solo para un número restringido de funciones $f(x)$.
- **El Método de la Variación de los Parámetros** (ó de la Variación de las Constantes Arbitrarias): Es más difícil de aplicar en la práctica, pero válido para cualquier función $f(x)$.

Método de los Coeficientes Indeterminados

Sea la Ecuación Diferencial Lineal no Homogénea de Segundo Orden con Coeficientes Constantes:

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (10)$$

Este método se aplica cuando $f(x)$ tiene la forma de un polinomio, o una exponencial, o seno, o coseno, o una combinación de ellos.

Si $f(x)$ tiene una de estas formas, entonces es razonable pensar que existe una Solución Particular y_p de esa misma forma.

Por ejemplo si $f(x)$ es un polinomio, podemos considerar que y_p es igual a un polinomio del mismo grado y si lo sustituimos en la Ecuación Diferencial (10), obtendremos polinomios del mismo grado en ambos miembros de la igualdad. Solo restaría obtener los valores de los coeficientes de y_p.

Por lo tanto las consideraciones a realizar para obtener la Solución Particular y_p depende de la forma del segundo miembro $f(x)$:

1. **<u>El segundo miembro de la Ecuación Diferencial (10) es un polinomio de enésimo grado</u>** $f(x) = P_n(x)$

   Entonces la Solución Particular y_p buscada es un polinomio del mismo grado:

   $$y_p = U_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots\dots\dots\dots + A_{n-1}x + A_n$$

   Debiendo determinarse los coeficientes $A_0, A_1, \dots\dots\dots\dots A_n$.

   <u>Ejemplo</u>: Resolvamos la siguiente Ecuación Diferencial
   $y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 2x$
   Su Solución General es de la forma: $y = y_h + y_p$

   Obtengamos primero la Solución General y_h de la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar:

   $y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 0$ su Ecuación Característica es:

   $k^2 - \frac{1}{2}k - \frac{1}{2} = 0$ calculamos sus raíces $k_{1-2} = \dfrac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 - 4(-\frac{1}{2})}}{2} =$ $k_1 = 1$, $k_2 = -\frac{1}{2}$

   La Solución y_h resulta: $\boxed{y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}}$

   Obtengamos ahora la Solución Particular y_p de la Ecuación Diferencial no Homogénea planteada:
   El segundo miembro es de la forma $f(x) = 2x$, es un polinomio de primer grado, entonces proponemos una Solución Particular de la misma forma:

$$y_p = Ax + B$$

Debemos calcular los coeficientes A y B. Para ello derivamos dos veces y_p, y la introducimos en la Ecuación Diferencial no Homogénea planteada:

$y_p = A.x + B$ $\qquad$ $y'_p = A$ $\qquad$ $y'' = 0$

$0 - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}(Ax + B) = 2x$ reordenamos términos:

$(-\frac{1}{2}A)x + (-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) = 2x$ igualamos los coeficientes de las potencias de igual grado:

$$-\tfrac{1}{2}A = 2 \quad \Rightarrow \quad A = -4 \qquad \begin{cases} A = -4 \\ B = 4 \end{cases}$$

$$-\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B = 0 \quad \Rightarrow \quad -\tfrac{1}{2}(-4) - \tfrac{1}{2}B = 0 \quad \Rightarrow$$

La Solución Particular y_p resulta: $\boxed{y_p = -4x + 4}$

Y finalmente la Solución General de la Ecuación Diferencial no Homogénea planteada es:

$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} - 4x + 4}$ **Solución General**

Determinemos una Solución Particular estableciendo como Condición Inicial:
$y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$
Trabajamos con la Solución General y su derivada:

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} - 4x + 4 \\ y' = C_1 e^x - \frac{1}{2}C_2 e^{-\frac{1}{2}x} - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = C_1 e^0 + C_2 e^0 + 4 \\ 3 = C_1 e^0 - \frac{1}{2}C_2 e^0 - 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 + C_2 = -2 \\ C_1 - \frac{1}{2}C_2 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = 4 \\ C_2 = -6 \end{cases}$$

La Solución Particular es: $\boxed{y = 4e^x - 6e^{-\frac{1}{2}x} - 4x + 4}$ **Solución Particular**

2. **<u>El segundo miembro de la Ecuación Diferencial (10) es de la forma</u>:**
$f(x) = Ce^{\alpha x}$ $\qquad$ (C y α constantes)

Entonces la Solución Particular y_p buscada es de la misma forma (pues las derivadas de $e^{\alpha x}$ son múltiplos de $e^{\alpha x}$):
$y_p = Ae^{\alpha x}$ $\qquad$ Solo debemos determinar el coeficiente A.

<u>Ejemplo</u>: Resolvamos las siguiente Ecuación Diferencial
$y'' - y = 9e^{2x}$

Su Solución General es de la forma: $\qquad y = y_h + y_p$

Primero obtenemos la Solución General y_h de la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar, para ello planteamos su Ecuación Característica y obtenemos las raíces correspondientes:

$y'' - y = 0$

$k^2 - 1 = 0$ sus raíces son $k_1 = 1$ y $k_2 = -1$ $\Rightarrow$ $\boxed{y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}}$

Para la Solución Particular y_p proponemos la forma:

$y_p = Ae^{2x}$ derivamos dos veces: $y'_p = 2Ae^{2x}$ $y''_p = 4Ae^{2x}$

Sustituimos en la Ecuación Diferencial planteada y calculamos el coeficiente A:

$$4Ae^{2x} - Ae^{2x} = 9e^{2x}$$
$$(4A - A)e^{2x} = 9e^{2x}$$
$$3A = 9 \quad \Rightarrow \quad A = 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_p = 3e^{2x}}$$

Y finalmente la **Solución General** de la Ecuación Diferencial planteada resulta:

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 3e^{2x}}$$

3. **<u>El segundo miembro de la Ecuación Diferencial (10) es de la forma</u>:**
$f(x) = C\cos\alpha x$ ó $f(x) = C\,\mathrm{sen}\,\alpha x$ ó $f(x) = C\cos\alpha x + D\,\mathrm{sen}\,\alpha x$
(C , D y α constantes)

En este caso proponemos una Solución Particular y_p de la forma:

$y_p = A\cos\alpha x + B\,\mathrm{sen}\,\alpha x$

Ello es debido a las reglas de derivación de las funciones seno y coseno.

Debemos determinar los coeficientes A y B.

<u>Ejemplo</u>: Obtengamos la Solución General de la siguiente Ecuación Diferencial
$y'' + 4y' + 4y = 5\,\mathrm{sen}\,x$ Su Solución General es de la forma: $y = y_h + y_p$

Calculamos primero y_h, planteamos la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar:

$y'' + 4y' + 4y = 0$ su Ecuación Característica es:

$k^2 + 4k + 4 = 0$ sus raíces son $k_1 = k_2 = -2$ $\Rightarrow$ $\boxed{y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}}$

Proponemos ahora una Solución Particular de la forma:

$y_p = A\cos x + B\,\mathrm{sen}\,x$ derivamos dos veces: $y'_p = -A\,\mathrm{sen}\,x + B\cos x$

$y''_p = -A\cos x - B\,\mathrm{sen}\,x$

Sustituimos en la Ecuación Diferencial planteada:

$$(-A\cos x - B\,\mathrm{sen}\,x) + 4(-A\,\mathrm{sen}\,x + B\cos x) + 4(A\cos x + B\,\mathrm{sen}\,x) = 5\,\mathrm{sen}\,x$$
$$(3A + 4B)\cos x + (-4A + 3B)\,\mathrm{sen}\,x = 5\,\mathrm{sen}\,x$$

Por lo tanto: $\begin{cases} 3A+4B=0 \\ -4A+3B=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{4}{5} \\ B=\frac{3}{5} \end{cases}$

La Solución Particular resulta: $\boxed{y_p=-\frac{4}{5}\cos x+\frac{3}{5}\operatorname{sen} x}$

Y la **Solución General** de la Ecuación Diferencial planteada es:

$$\boxed{y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}-\frac{4}{5}\cos x+\frac{3}{5}\operatorname{sen} x}$$

4. **<u>El segundo miembro de la Ecuación Diferencial (10) es de la forma de un producto de funciones del tipo estudiado en los puntos anteriores</u>.**

Se propone una Solución Particular y_p con la forma de un producto de funciones del mismo tipo.

<u>Ejemplo 1</u>:
Si la Ecuación Diferencial a resolver es de la forma: $y''+4y'+4y=32xe^{2x}$
Se propone una Solución Particular: $y_p=(Ax+B)e^{2x}$

<u>Ejemplo 2</u>:
Si la Ecuación Diferencial a resolver es de la forma: $y''-y=2x\cos 5x$
Se propone una Solución Particular: $y_p=(Ax+B)\cos 5x+(Cx+D)\operatorname{sen} 5x$

<u>Ejemplo 3</u>:
Si la Ecuación Diferencial a resolver es de la forma: $y''-\frac{1}{2}y'-\frac{1}{2}y=4e^{3x}\operatorname{sen} 2x$
Se propone una Solución Particular: $y_p=Ae^{3x}\cos 2x+Be^{3x}\operatorname{sen} 2x$

5. **<u>El segundo miembro de la Ecuación Diferencial (10) es de la forma de una suma de funciones del tipo estudiado en los puntos anteriores</u>.**

Se propone una Solución Particular y_p con la forma de una suma de funciones del mismo tipo.

<u>Ejemplo 1</u>:
Si la Ecuación Diferencial a resolver es de la forma: $y''+4y'+4y=2e^{4x}-5\operatorname{sen} 2x$
Se propone una Solución Particular: $y_p=Ae^{4x}+B\cos 2x+C\operatorname{sen} 2x$

<u>Ejemplo 2</u>:
Si la Ecuación Diferencial a resolver es de la forma: $y''-y=4x^2-2+6e^{-2x}$
Se propone una Solución Particular: $y_p=Ax^2+Bx+C+De^{-2x}$

<u>Ejemplo 3</u>:
Si la Ecuación Diferencial a resolver es de la forma: $y''-\frac{1}{2}y'-\frac{1}{2}y=3x+5+2\cos x$
Se propone una Solución Particular: $y_p=Ax+B+C\cos x+D\operatorname{sen} x$

6. **<u>A veces la Solución Particular a proponer resulta ser una Solución de Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar y por lo tanto no puede ser Solución de la Ecuación Diferencial no Homogénea planteada</u>.**
En estos casos se multiplica la Solución Particular y_p propuesta por "x" ó por "x^2" si es necesario.

<u>Ejemplo 1</u>: Obtengamos la Solución General de la siguiente Ecuación Diferencial:
$y'' + 7y' = e^{-7x}$
Su Solución General es de la forma: $y = y_h + y_p$
Primero obtenemos la Solución General y_h de la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar, para ello planteamos su Ecuación Característica y obtenemos las raíces correspondientes:
$y'' + 7y' = 0$
$k^2 + 7k = 0$ sus raíces son $k_1 = 0$ y $k_2 = -7$ $\Rightarrow$ $\boxed{y_h = C_1 + C_2 e^{-7x}}$

Dado que el segundo miembro de la Ecuación Diferencial planteada es $f(x) = e^{-7x}$
Normalmente propondríamos una Solución Particular de la forma: $y_p = Ae^{-7x}$
Pero al observar y_h, se comprueba que es una de las Soluciones de la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar ($C_2 e^{-7x}$), entonces debemos buscar una Solución Particular de la forma:
$y_p = Axe^{-7x}$
Debemos calcular el coeficiente A. Para ello derivamos dos veces y_p, y sustituimos esos valores en la Ecuación Diferencial planteada:
$y_p = Axe^{-7x}$ $\quad y'_p = Ae^{-7x} - 7Axe^{-7x}$ $\quad y''_p = -14Ae^{-7x} + 49Axe^{-7x}$

$(-14Ae^{-7x} + 49Axe^{-7x}) + 7(Ae^{-7x} - 7Axe^{-7x}) = e^{-7x}$
$-7Ae^{-7x} = e^{-7x}$ $\Rightarrow$ $A = -\frac{1}{7}$
La Solución Particular resulta: $\boxed{y_p = -\frac{1}{7}xe^{-7x}}$

Y finalmente la **Solución General** es: $\boxed{y = C_1 + C_2 e^{-7x} - \frac{1}{7}xe^{-7x}}$

<u>Ejemplo 2</u>: Resolvamos la siguiente Ecuación Diferencial:
$y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$
Su Solución General es de la forma: $y = y_h + y_p$
Primero obtenemos la Solución General y_h de la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar, para ello planteamos su Ecuación Característica y obtenemos las raíces correspondientes:
$y'' - 10y' + 25y = 0$
$k^2 - 10k + 25 = 0$ sus raíces son $k_1 = k_2 = 5$ $\Rightarrow$ $\boxed{y_h = C_1 e^{5x} + C_2 xe^{5x}}$

Dado que el segundo miembro de la Ecuación Diferencial planteada es $f(x) = e^{5x}$
Normalmente propondríamos una Solución Particular de la forma: $y_p = Ae^{5x}$
Pero al observar y_h, se comprueba que es una de las Soluciones de la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar ($C_1 e^{5x}$), y si multiplicáramos por "x" sería $y_p = Axe^{5x}$ que también es

una Solución de la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar (C_2xe^{5x}), entonces debemos buscar una Solución Particular de la forma: $y_p = Ax^2e^{5x}$

Debemos calcular el coeficiente A. Para ello derivamos dos veces y_p, y sustituimos esos valores en la Ecuación Diferencial planteada:

$$y_p = Ax^2e^{5x}$$
$$y'_p = 2Ax.e^{5x} + 5Ax^2e^{5x}$$
$$y''_p = 2Ae^{5x} + 20Axe^{5x} + 25Ax^2e^{5x}$$

$$(2Ae^{5x} + 20Axe^{5x} + 25Ax^2e^{5x}) - 10(2Axe^{5x} + 5Ax^2e^{5x}) + 25Ax^2e^{5x} = e^{5x}$$
$$2Ae^{5x} = e^{5x}$$
$$A = \tfrac{1}{2}$$

La Solución Particular resul $\boxed{y_p = \tfrac{1}{2}x^2e^{5x}}$

Y finalmente la **Solución General** es: $\boxed{y = C_1e^{5x} + C_2xe^{5x} + \tfrac{1}{2}x^2e^{5x}}$

<u>Ejemplo 3</u>: Obtengamos la Solución General de la siguiente Ecuación Diferencial:

$$y'' + 2y' = 8$$

Su Solución General es de la forma: $y = y_h + y_p$

Primero obtenemos la Solución General y_h de la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar, para ello planteamos su Ecuación Característica y obtenemos las raíces correspondientes:

$$y'' + 2y' = 0$$

$k^2 + 2k = 0$ sus raíces son $k_1 = 0$ y $k_2 = -2$ $\Rightarrow$ $\boxed{y_h = C_1 + C_2e^{-2x}}$

Dado que el segundo miembro de la Ecuación Diferencial planteada es $f(x) = 8$

Normalmente propondríamos una Solución Particular de la forma: $y_p = A$

Pero al observar y_h, se comprueba que es una de las Soluciones de la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar (C_1), entonces debemos buscar una Solución Particular de la forma:

$$y_p = Ax$$

Debemos calcular el coeficiente A. Para ello derivamos dos veces y_p, y sustituimos esos valores en la Ecuación Diferencial planteada:

$y_p = Ax$ $\quad y'_p = A$ $\quad y''_p = 0$

$0 + 2A = 8$ $\quad \Rightarrow \quad$ $A = 4$

La Solución Particular resulta: $\boxed{y_p = 4x}$

Y finalmente la **Solución General** es: $\boxed{y = C_1 + C_2e^{-2x} + 4x}$

<u>NOTA</u>:

No se puede dar una regla que abarque todos los casos posibles. Pero recordemos que la Solución Particular a proponer tiene siempre la misma forma que el segundo miembro de la Ecuación Diferencial Lineal no Homogénea, excepto en el caso de superposición de raíces, en que se debe multiplicar por "*x*" o por "*x*²" según se produzcan una o dos soluciones repetidas.

Método de la Variación de los Parámetros

Sea la Ecuación Diferencial Lineal no Homogénea de Segundo Orden con Coeficientes Constantes:

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (10)$$

cuya Solución General sabemos que se puede expresar: $y = y_h + y_p$

y supongamos que ya hemos resuelto la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar:

$$y'' + py' + qy = 0$$

y su Solución General es de la forma: $\boxed{y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2}$ (11)

donde y_1 e y_2 son dos Soluciones Particulares Linealmente Independientes de la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar y C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

Este método consiste en buscar una Solución Particular y_p que tenga la forma de la Solución General y_h de la Ecuación Diferencial Auxiliar pero considerando las <u>constantes (ó parámetros)</u> C_1 y C_2 como funciones $u(x)$ y $v(x)$ respectivamente. Es decir buscamos una Solución Particular de la forma:

$$\boxed{y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2} \qquad (12)$$

Nuestra tarea ahora es determinar las funciones $u(x)$ y $v(x)$, para ello derivamos y_p y reagrupamos términos:

$$y'_p = (u'y_1 + v'y_2) + (uy'_1 + vy'_2)$$

Dado que hemos introducido dos funciones arbitrarias $u(x)$ y $v(x)$, necesitamos dos ecuaciones para determinarlas. Las podemos establecer fijando dos condiciones:

1- ***Que y_p sea Solución de la Ecuación Lineal no Homogénea (10).***
2- ***Y fijemos la otra condición de manera que se nos simplifique el cálculo:*** $\boxed{u'y_1 + v'y_2 = 0}$

Entonces y'_p nos queda: $y'_p = uy'_1 + vy'_2$

Derivamos nuevamente: $y''_p = u'y'_1 + v'y'_2 + uy''_1 + vy''_2$

Dado que hemos establecido como condición que y_p sea Solución de la Ecuación Diferencial (10), sustituimos en ella los valores de y_p y sus derivadas:

$$(u'y'_1 + v'y'_2 + uy''_1 + vy''_2) + p(uy'_1 + vy'_2) + q(uy_1 + vy_2) = f(x)$$

Reordenamos términos sacando factor común u y v:

$$u(y''_1 + py'_1 + qy_1) + v(y''_2 + py'_2 + qy_2) + (u'y'_1 + v'y'_2) = f(x)$$

Como y_1 e y_2 son dos Soluciones Particulares Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar, los dos primeros paréntesis resultan iguales a cero. Entonces la última ecuación queda:

$$\boxed{u'y'_1 + v'y'_2 = f(x)}$$

Entre esta última y la segunda condición reunimos las dos ecuaciones que necesitamos, aunque sea para obtener las derivadas $u'(x)$ y $v'(x)$:

$$\begin{cases} u'y_1 + v'y_2 = 0 \\ u'y'_1 + v'y'_2 = f(x) \end{cases} \qquad (13)$$

Éste es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas u' y v':

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = -\frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} \qquad (14)$$

$$v' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} \qquad (15)$$

Este sistema de ecuaciones admite solución única dado que su determinante principal no se anula dado que es el Wronsquiano de las funciones y_1 e y_2 que son linealmente independientes $[W(y_1, y_2) \neq 0]$.
Integramos los valores de $u'(x)$ y $v'(x)$ obtenidos:

$$u = \int u'(x)dx + k_1$$
$$v = \int v'(x)dx + k_2$$

Como solo necesitamos una Solución Particular y_p, consideramos $k_1 = k_2 = 0$.
Y finalmente reemplazando en la expresión (12) los valores de $u(x)$ y $v(x)$ obtenidos, tendremos la Solución Particular y_p buscada.

Resumen

Debido a que el desarrollo anterior es bastante extenso y complicado, para resolver una Ecuación Diferencial Lineal no Homogénea de Segundo Orden con Coeficientes Constantes, es aconsejable utilizar el sistema de ecuaciones (13) ó directamente las expresiones (14) y (15).

Por lo tanto para resolver la Ecuación Diferencial: $y'' + py' + qy = f(x)$ (10)
cuya Solución General sabemos que es de la forma: $y = y_h + y_p$

Primero obtenemos la Solución General de la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar:

$$\boxed{y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2} \qquad (11)$$

Luego planteamos la Solución Particular: $y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2$ (12)

Determinamos $u'(x)$ y $v'(x)$, resolviendo el sistema de ecuaciones (13):

$$\begin{cases} u'y_1 + v'y_2 = 0 \\ u'y_1' + v'y_2' = f(x) \end{cases} \qquad (13)$$

$$u' = -\frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} \qquad (14)$$

$$v' = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} \qquad (15)$$

y luego integramos los valores de $u'(x)$ y $v'(x)$ obtenidos y los reemplazamos en la (12).

Ejemplo:

Resolvamos la Ecuación Diferencial $y'' + 7y' = e^{7x}$ (10)

La Solución General es: $\boxed{y = y_h + y_p}$

1- Calculamos y_h. La Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar es: $y'' + 7y' = 0$

La Ecuación Característica es $k^2 + 7k = 0$ y sus raíces son: $k_1 = 0$ $k_2 = -7$

Entonces resulta: $y_1 = e^{0x} = 1$ y $y_2 = e^{-7x}$

Y la Solución General de la Ec. Dif. Homogénea Auxiliar es: $\boxed{y_h = C_1 + C_2 e^{-7x}}$ (11)

2- Calculamos ahora y_p: $y_p = u + ve^{-7x}$ (12)

Planteamos las ecuaciones (14) y (15) para determinar los valores de u' y v':

$$\begin{cases} y_1 = 1 & \Rightarrow \quad y_1' = 0 \\ y_2 = e^{-7x} & \Rightarrow \quad y_2' = -7e^{-7x} \end{cases} \qquad \begin{cases} u' = -\dfrac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} = -\dfrac{e^{-7x}e^{7x}}{\begin{vmatrix} 1 & e^{-7x} \\ 0 & -7e^{-7x} \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{7}e^{7x} & (14) \\ v' = \dfrac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} = -\dfrac{e^{7x}}{\begin{vmatrix} 1 & e^{-7x} \\ 0 & -7e^{-7x} \end{vmatrix}} = -\dfrac{1}{7}e^{14x} & (15) \end{cases}$$

Lo resolvemos y obtenemos:

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{7}e^{7x} \\ v' = -\frac{1}{7}e^{14x} \end{cases} \quad \text{integramos:} \quad \begin{cases} u = \int \frac{1}{7}e^{7x}dx + k_1 = \frac{1}{49}e^{7x} + k_1 \\ v = -\int \frac{1}{7}e^{14x}dx + k_2 = -\frac{1}{98}e^{14x} + k_2 \end{cases}$$

Consideramos $k_1 = k_2 = 0$ y resulta: $u = \frac{1}{49}e^{7x}$ y $v = -\frac{1}{98}e^{14x}$

Reemplazamos en la (12), obteniendo: $y_p = \frac{1}{49}e^{7x} - \frac{1}{98}e^{14x}e^{-7x} = \frac{1}{49}e^{7x} - \frac{1}{98}e^{7x}$

$$\boxed{y_p = \tfrac{1}{98}e^{7x}}$$

Y finalmente la Solución General $y = y_h + y_p$ resulta:

$$\boxed{y = C_1 + C_2 e^{-7x} + \tfrac{1}{98}e^{7x}} \qquad \textbf{Solución General}$$

Fijemos como Condición Inicial $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$ y obtengamos la Solución Particular de la Ecuación Diferencial (10) planteada. Trabajamos con la Solución General y su derivada:

$$\begin{cases} y = C_1 + C_2 e^{-7x} + \frac{1}{98}e^{7x} \\ y' = -7C_2 e^{-7x} + \frac{1}{14}e^{7x} \end{cases}$$

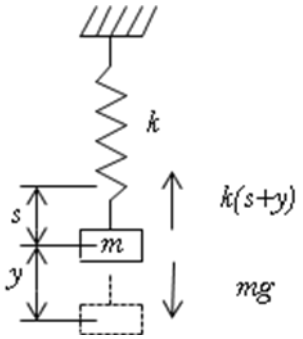
$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 + \frac{1}{98} \\ 2 = -7C_2 + \frac{1}{14} \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{97}{98} \\ -7C_2 = \frac{27}{14} \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = \frac{62}{49} \\ C_2 = -\frac{27}{98} \end{cases}$$

$$\boxed{y = \tfrac{62}{49} - \tfrac{27}{98}e^{-7x} + \tfrac{1}{98}e^{7x}} \quad \textbf{Solución Particular}$$

APLICACIONES

Veamos algunos problemas prácticos de aplicación de las Ecuaciones Diferenciales Lineales de Segundo Orden con Coeficientes Constantes:

Ejemplo 1:
Movimiento libre no amortiguado.



Supongamos que se desea establecer la posición del extremo de un resorte en cada instante *t*, se acepta que el resorte oscila en el vacío de modo que no corresponde consideración acerca de amortiguamiento producido por resistencia del medio.
Si una masa *m* se aplica en el extremo del resorte produce una elongación *S*, que de acuerdo con la ley de Hooke, es proporcional a la fuerza de restitución del resorte $F = k.s$, siendo *k* la constante de proporcionalidad del resorte. Esta fuerza es opuesta a la dirección de alargamiento.
Al estar unida la masa *m* al resorte se produce una elongación *S* del mismo y se llega a una posición de equilibrio en la que su peso $P = m.g$ está equilibrado por la fuerza de restitución $F = k.s$.
Entonces:

$$m.g = k.s$$

Si en un instante posterior *t* se aplica una fuerza adicional se produce un alargamiento *"y"*, si después esa fuerza adicional se suprime el resorte retrocederá oscilando.
El problema consiste, entonces, en determinar la posición del extremo del resorte en cada instante siguiente *t*.
Las fuerzas que actúan sobre la masa *m* son la fuerza $P = m.g$ que obra hacia abajo, sentido que se toma como positivo al considerar el desplazamiento *"y"*, y la fuerza de restitución del resorte F_1 que actúa en sentido opuesto a la fuerza de gravedad. Por consiguiente según la segunda ley de Newton tenemos:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = m.g - F_1$$

Puesto que F_1 es la fuerza de restitución del resorte cuando la elongación es $s + y$, la ley de Hooke establece que $F_1 = k(s + y)$ es decir:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = m.g - k(s + y)$$

Pero $m.g = k.s$, por consiguiente la ecuación se convierte en:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$$

Haciendo $\frac{k}{m} = a^2$ la ecuación se reduce a:

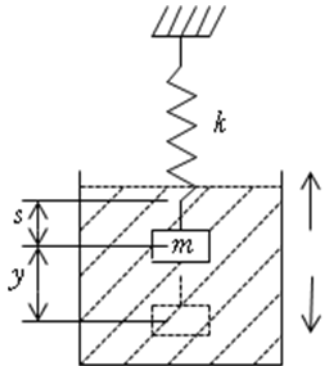
$$\frac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0$$

Es una Ecuación Diferencial Lineal Homogénea de Segundo Orden con Coeficientes Constantes cuya Solución General es:

$$\boxed{y = C_1 \cos at + C_2 \operatorname{sen} at}$$

La solución pone en evidencia que el resorte vibra con un movimiento armónico simple cuyo período es $T = \frac{2\pi}{a}$ y la frecuencia $f = \frac{1}{T} = \frac{a}{2\pi}$.
El período depende de la dureza del resorte, como podía esperarse, cuando más duro es el resorte, mayor es la frecuencia de vibración.

Ejemplo 2:
Movimiento libre amortiguado.



Supongamos ahora que el resorte del ejemplo mecánico anterior se halla colocado en un medio resistente en el cual la fuerza amortiguadora es proporcional a la velocidad.
Puesto que el medio resistente se opone al desplazamiento, la fuerza amortiguadora $\beta \frac{dy}{dt}$ actúa en sentido opuesto al del desplazamiento de la masa *m*.
La ecuación de las fuerzas resulta en tal caso:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = m.g - k(s+y) - \beta\frac{dy}{dt}$$

Pero $m.g = k.s$, por consiguiente la ecuación se convierte en:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - \beta\frac{dy}{dt}$$

Reordenamos los términos obtenemos:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}y = 0$$

Haciendo $\frac{k}{m} = a^2$, y $\frac{\beta}{m} = 2b$ la ecuación se reduce a:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2b\frac{dy}{dt} + a^2y = 0$$

Es una Ecuación Diferencial Lineal Homogénea de Segundo Orden con Coeficientes Constantes.
Resolvamos esta ecuación, para ello planteamos su Ecuación Característica:

$$k^2 + 2bk + a^2 = 0$$

Esta letra *k* es la que se utilizó en el desarrollo teórico para identificar la constante de la Ecuación Característica, no tiene nada que ver con la constante *k* del resorte.
Obtengamos sus raíces:

$$k_{1-2} = \frac{-2\mathrm{b} \pm \sqrt{(2b)^2 - 4a^2}}{2} = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}$$

Analicemos las soluciones generales correspondientes a los tres casos que se pueden presentar:

Dos raíces reales y distintas $b^2 - a^2 > 0$ $\boxed{y = C_1 e^{-b+\sqrt{b^2-a^2}t} + C_2 e^{-b-\sqrt{b^2-a^2}t}}$

También la podemos expresar así: $\boxed{y = e^{-bt}\left(C_1 e^{\sqrt{b^2-a^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{b^2-a^2}\,t}\right)}$

Aquí el coeficiente de amortiguación β es grande en comparación con la constante del resorte y decimos que el sistema está **sobreamortiguado**. Resulta un movimiento suave y no oscilatorio.

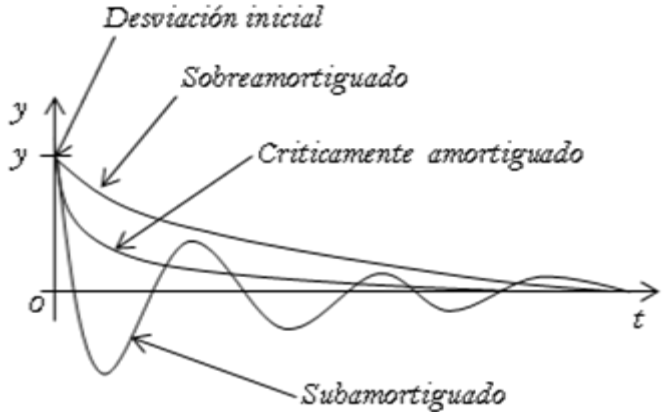
Dos raíces reales e iguales $b^2 - a^2 = 0$ $\boxed{y = e^{-bt}\left(C_1 + C_2 t\right)}$

El sistema es **críticamente amortiguado**. Una disminución pequeña de la fuerza de amortiguamiento originaría un movimiento oscilatorio.

Dos raíces complejas conjugadas $b^2 - a^2 < 0$ $\boxed{y = e^{-bt}\left(C_1 \cos\sqrt{b^2-a^2}\,t + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{b^2-a^2}\,t\right)}$

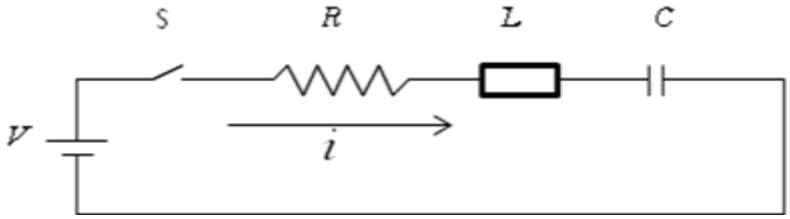
El sistema es **subamortiguado**. El coeficiente de amortiguamiento es pequeño en comparación con la constante del resorte.

Cada solución contiene el **factor de amortiguamiento** e^{-bt} $(b > 0)$, por lo que el desplazamiento de la masa se vuelve insignificante cuando el tiempo es grande.



Ejemplo 3:

En el siguiente circuito *RLC* con una fuente de corriente continua (*V* = constante) determinemos la corriente *i(t)* en el intervalo *t [0,∞]*. En el instante *t=0* se cierra el interruptor S.



De acuerdo con la ley de Kirchhoff de las tensiones, la tensión aplicada *V* es igual a la suma de las caídas de tensión v_R , v_L y v_C a través de la resistencia *R*, la inductancia *L* y el capacitor C respectivamente:

$$V = v_R + v_L + v_C$$

$$V = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt$$

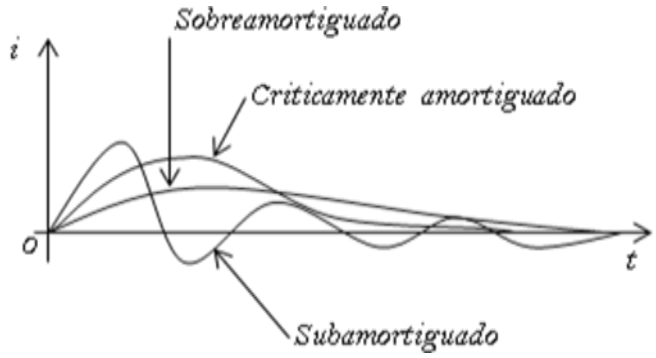
Para eliminar la integral, derivamos en ambos miembros de la igualdad con respecto a *t*, y reordenando los términos obtenemos la siguiente Ecuación Diferencial Lineal Homogénea de Segundo Orden con Coeficientes Constantes:

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{1}{LC}i=0$$

Haciendo $\frac{R}{L}=a^2$, y $\frac{1}{LC}=2b$ la ecuación se reduce a:

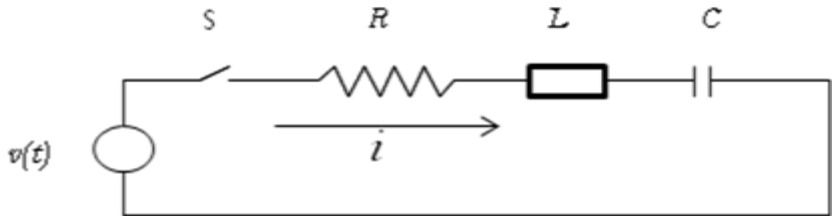
$$\frac{d^2y}{dt^2}+2b\frac{dy}{dt}+a^2y=0$$

Podemos comprobar que es la misma Ecuación Diferencial Lineal Homogénea de Segundo Orden con Coeficientes Constantes del Movimiento libre amortiguado estudiado en el ejemplo anterior.
Ambos sistemas tienen las mismas soluciones.
Al comparar ambos sistemas vemos que la masa correspondo a la inductancia *L*, β a la resistencia eléctrica *R* y la constante *k* del resorte corresponde a $\frac{1}{C}$.
El circuito puede resultar **sobreamotiguado, críticamente amortiguado o subamortiguado.**



Cuando *R=0*, se dice que el circuito es no amortiguado, y las vibraciones eléctricas no tienden a cero cuando aumenta el tiempo, la respuesta del circuito es **armónica simple**.

Ejemplo 4:
Consideremos ahora el siguiente circuito *RLC* donde la fuente de alimentación no es de corriente continua por ejemplo [$v(t)=V_{máx}\text{sen}\omega t$].



De acuerdo con la ley de Kirchhoff de las tensiones, la tensión aplicada *v(t)* es igual a la suma de las caídas de tensión v_R , v_L y v_C a través de la resistencia *R*, la inductancia *L* y el capacitor C respectivamente:

$$v(t)=v_R+v_L+v_C$$

$$v(t)=iR+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int idt$$

Para eliminar la integral, derivamos en ambos miembros de la igualdad con respecto a *t*, y reordenando los términos obtenemos la siguiente Ecuación Diferencial Lineal No Homogénea de Segundo Orden con Coeficientes Constantes:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{LC}i=\frac{dv}{dt}$$

EJERCICIOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES NO HOMOGÉNEAS DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

Hallar las Soluciones Generales y Particulares de las siguientes Ecuaciones Diferenciales:

Nº	ECUACIÓN DIFERENCIAL	CONDICIONES INICIALES
1	$y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 2xe^{2x}$	$y_0 = 2$ e $y'_0 = 1$ para $x_0 = 0$
2	$y'' - 2y' + 5y = 5\operatorname{sen} x$	$y_0 = 1$ e $y'_0 = 2$ para $x_0 = 0$
3	$y'' + 3y = 3$	$y_0 = 4$ e $y'_0 = -1$ para $x_0 = 0$
4	$y'' - 7y = (x-1)^2$	$y_0 = -\frac{9}{49}$ e $y'_0 = \frac{9}{7}$ para $x_0 = 0$
5	$y'' + 7y' = e^{7x}$	$y_0 = 3$ e $y'_0 = 1$ para $x_0 = 0$
6	$y'' + 7y' = e^{-7x}$	$y_0 = \frac{99}{98}$ e $y'_0 = \frac{97}{98}$ para $x_0 = 0$
7	$y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$	
8	$y'' + 16y = \cos 5x$	
9	$y'' + 16y = \operatorname{sen} 5x$	
10	$y'' + 3y = 3\cos 4x - 2\operatorname{sen} 4x$	
11	$y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x}$	
12	$y'' + 2y' = -2$	
13	$y'' + 25y = 7\cos 2x$	$y_0 = 1$ e $y'_0 = 10$ para $x_0 = 0$
14	$y'' + 4y' + 4y = 32xe^{2x}$	$y_0 = 1$ e $y'_0 = 2$ para $x_0 = 0$
15	$y'' - y = 4x^2 - 2 + 6e^{-2x}$	$y_0 = 1$ e $y'_0 = -1$ para $x_0 = 0$

Soluciones:

Nº	SOLUCIÓN GENERAL	SOLUCIÓN PARTICULAR
1	$y = C_1e^x + C_2e^{-\frac{x}{2}} + e^{2x}(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25})$	$y = \frac{8}{3}e^x + \frac{34}{75}e^{-\frac{x}{2}} + e^{2x}(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25})$
2	$y = C_1e^{2x}\cos 2x + C_2e^{2x}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\cos x + \operatorname{sen} x$	$y = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x + \frac{1}{4}e^{2x}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\cos x + \operatorname{sen} x$
3	$y = C_1\cos\sqrt{3}x + C_2\operatorname{sen}\sqrt{3}x + 1$	$y = 3\cos\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\sqrt{3}x + 1$
4	$y = C_1e^{\sqrt{7}x} + C_2e^{-\sqrt{7}x} - \frac{1}{7}x^2 + \frac{2}{7}x - \frac{9}{49}$	$y = \frac{\sqrt{7}}{14}e^{\sqrt{7}x} - \frac{\sqrt{7}}{14}e^{-\sqrt{7}x} - \frac{1}{7}x^2 + \frac{2}{7}x - \frac{9}{49}$
5	$y = C_1 + C_2e^{-7x} + \frac{1}{98}e^{7x}$	$y = e^{-7x} + \frac{1}{98}e^{7x}$
6	$y = C_1 + C_2e^{-7x} - \frac{1}{7}e^{7x}$	$y = -\frac{27}{49} - \frac{22}{49}e^{-7x} - \frac{1}{7}e^{7x}$
7	$y = C_1e^{5x} + C_2xe^{5x} + \frac{1}{2}x^2e^{5x}$	
8	$y = C_1\cos 4x + C_2\operatorname{sen} 4x - \frac{1}{9}\cos 5x$	
9	$y = C_1\cos 4x + C_2\operatorname{sen} 4x - \frac{1}{9}\operatorname{sen} 5x$	
10	$y = C_1\cos\sqrt{3}x + C_2\operatorname{sen}\sqrt{3}x - \frac{3}{13}\cos 4x + \frac{2}{13}\operatorname{sen} 4x$	
11	$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + 2x^2e^{2x}$	
12	$y = C_1 + C_2e^{-2x} - x$	
13	$y = C_1\cos 5x + C_2\operatorname{sen} 5x + \frac{1}{3}\cos 2x$	$y = \frac{2}{3}\cos 5x + 2\operatorname{sen} 5x + \frac{1}{3}\cos 2x$
14	$y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + e^{2x}(2x-1)$	$y = 2e^{-2x} + 6xe^{-2x} + e^{2x}(2x-1)$
15	$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 4x^2 - 6 + 2e^{-2x}$	$y = 4e^x + e^{-x} - 4x^2 - 6 + 2e^{-2x}$

CAPÍTULO 10

SERIES DE FOURIER

SERIES DE FOURIER

Por medio de las Series de Fourier se puede representar una función como una serie cuyos términos son constantes multiplicadas por funciones seno y/o coseno de diferentes frecuencias.
Originalmente Fourier al estudiar la Ecuación de Propagación de Calor en un Vástago Uniforme (representada por una Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales) y buscando una función que represente la temperatura del vástago en un instante de tiempo dado y en una sección determinada del mismo, propuso una solución con la forma de este tipo de series.

Introducción

- $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_n, \ldots\ldots\ldots\ldots$ es una **sucesión** infinita de números si se conoce la ley que permite calcular cualquier término a_n para un "n" dado**.**

- $a_1 + a_2 + \ldots\ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots\ldots\ldots$ es una **serie numérica** si $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_n, \ldots\ldots\ldots\ldots$ es una sucesión infinita de números.

- Dada $S_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots\ldots + a_n$ $\quad$ S_n se llama enésima suma parcial de la serie**.**

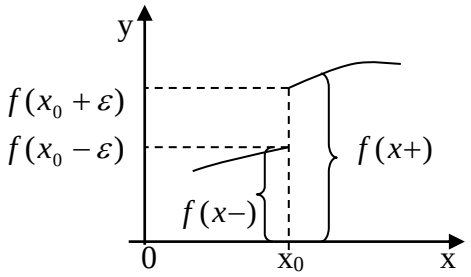
- La serie **converge** si: $\quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$

- La serie **diverge** si: $\quad S_n \to \infty \quad$ para $\quad n \to \infty$

- La función $f(x)$ es periódica de período "a" si: $f(x) = f(x+a)$

- Una función $f(x)$ tiene una **discontinuidad ordinaria ó finita ó de 1º especie** en x_0 si tiene los límites izquierdo y derecho finitos y distintos:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(x_0+\varepsilon) \neq \lim_{\varepsilon\to 0} f(x_0-\varepsilon)$$



geométricamente, en x_0 la función tiene un **salto** finito.

Condiciones de Dirichlet

Una función $f(x)$ satisface estas condiciones en el intervalo $(-\pi, \pi)$ si en este intervalo la función:

1- está uniformemente acotada, es decir si $|f(x)| \leq M$ para $-\pi < x < \pi$ y siendo M una constante.
2- no tiene más que un número finito de discontinuidades y estos son ordinarios o de 1º especie.
3- no tiene más que un número finito de extremos relativos.

Serie de Fourier

Toda función periódica $f(x)$ de período 2π que satisfaga las condiciones de Dirichlet en el intervalo $(-\pi, \pi)$, se puede desarrollar en serie trigonométrica llamada Serie de Fourier. En cualquier punto **x** de este intervalo en que $f(x)$ sea continua resulta:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n.\cos nx + b_n.\operatorname{sen} nx\right)} \qquad \text{ó} \qquad (1)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1.\cos x + b_1.\operatorname{sen} x + a_2.\cos 2x + b_2.\operatorname{sen} 2x + \ldots\ldots\ldots.$$

$a_0, a_n, b_n \quad (n = 1,2,3,.....)$ son los coeficientes de la serie y están expresados por las formulas:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx} \tag{2}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos nx dx} \tag{3}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\operatorname{sen} nx dx} \tag{4}$$

Si la función periódica $f(x)$ de período 2π cumple con las condiciones de Dirichlet en el intervalo $(-\pi, \pi)$, entonces la serie trigonométrica converge en todos sus puntos.
En los puntos de continuidad de la función, la suma de la serie es igual al valor de la función $f(x)$ y en los puntos de discontinuidad de la función, la suma de la serie es igual a la media aritmética de los límites derecho e izquierdo de la función $\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$
Debido a que cada término de la Serie de Fourier es una función periódica de período 2π, cuando se trata de representar funciones **no periódicas**, ello se podrá hacer estudiándolas en un intervalo de amplitud 2π y definiéndola fuera del intervalo como periódica.

Por medio de la Serie de Taylor es posible representar la función $f(x)$ como una serie de potencias de x, pero exige que $f(x)$ sea continua e infinitamente derivable. En cambio por medio de la **Serie de Fourier** se representa a $f(x)$ como una **Serie Trigonométrica** y es aplicable a un grupo de funciones mucho más amplio. Son de amplia aplicación en problemas de mecánica y física. Por ejemplo en las vibraciones sonoras y mecánicas, la propagación de corrientes eléctricas y ondas telegráficas, conducción de calor, etc..

<u>Determinación de los coeficientes de la Serie</u>
Determinemos los valores de los coeficientes a_0, a_n, b_n enunciados en (2), (3) y (4) respectivamente.

- Recordemos la resolución de las siguientes integrales, que nos servirán de referencia para el cálculo de los coeficientes de la serie:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx.\cos kx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx.\operatorname{sen} kx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx.\cos kx dx = 0 \qquad \text{para} \quad n \neq k$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx.\cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi \qquad \text{para} \quad n = k$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx.\operatorname{sen} kx dx = 0 \qquad \text{para} \quad n \neq k$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx.\operatorname{sen} kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 nx dx = \pi \qquad \text{para} \quad n = k$$

Para resolverlas aplicamos:

$$\cos\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\text{sen}\alpha.\text{sen}\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\text{sen}\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\text{sen}(\alpha+\beta)+\text{sen}(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2\alpha\right)$$

$$\text{sen}^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2\alpha\right)$$

1- <u>Cálculo del coeficiente</u> a_0

Para calcular el coeficiente a_0 integramos ambos miembros de la igualdad (1) dentro de los límites de $-\pi$ a π. La integral de la función del primer miembro es igual a la suma de las integrales de los términos de la serie:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n.\cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n.\text{sen}nx dx\right)$$

Resolvamos por separado cada una de las integrales del segundo miembro:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx = \left|\frac{a_0}{2}x\right|_{-\pi}^{\pi} = \pi.a_0\\
&\int_{-\pi}^{\pi} a_n.\cos nx dx = \left|\frac{a_n.\text{sen}nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0\\
&\int_{-\pi}^{\pi} b_n.\text{sen}nx dx = \left|-\frac{b_n.\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0
\end{aligned}\right\}\qquad
\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi.a_0\\
&\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx}
\end{aligned}\qquad (2)$$

2- <u>Cálculo del coeficiente</u> a_n

Multiplicamos ambos miembros de la (1) por $\cos kx$

$$f(x).\cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n.\cos nx.\cos kx + b_n.\text{sen}nx.\cos kx\right)$$

Integramos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n.\cos nx.\cos kx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n.\text{sen}nx.\cos kx dx\right)$$

De acuerdo a lo visto, se anulan todas las integrales del 2º miembro, excepto la que corresponde al término con coeficiente a_n (o sea cuando $n = k$), por lo tanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos nx dx = a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx.\cos nx dx = a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx = \pi.a_n \qquad \text{despejamos } a_n$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos nx dx} \qquad (3)$$

3- Cálculo de los coeficientes b_n

Multiplicamos ambos miembros de la (1) por $senkx$ e integramos entre $-\pi$ y π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\text{sen}kxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\text{sen}kxdx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n.\cos nx.\text{sen}kxdx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n.\text{sen}nx.\text{sen}kxdx\right)$$

Todas las integrales del 2º miembro se anulan, excepto la que corresponde al término con coeficiente b_n (o sea cuando $n = k$), por lo tanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\text{sen}nxdx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}nx.\text{sen}nxdx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2 nxdx = \pi.b_n$$ despejamos b_n

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\text{sen}nxdx} \qquad (4)$$

Ejemplo 1: Desarrollar la función $f(x) = x$ en Serie de Fourier, en el intervalo $-\pi < x \le \pi$ determinemos los coeficientes de la serie:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\left|\frac{x^2}{2}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x.\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\left|\frac{x.\text{sen}nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen}nxdx\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x.\text{sen}nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\left|-\frac{x.\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx\right) = -\frac{2}{n}\cos n\pi = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

Para calcular a_n y b_n se integró por partes $\left(\int udv = u.v - \int vdu\right)$ y además recordar que $\cos\pi = \cos(-\pi) = -1$; $\cos n\pi = 1$ para n par y $\cos n\pi = -1$ para n impar.

Y la serie será:

$$f(x) = x = \frac{2}{1}\text{sen}x - \frac{2}{2}\text{sen}2x + \frac{2}{3}\text{sen}3x - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\text{sen}nx + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\boxed{x = 2\left(\text{sen}x - \frac{1}{2}\text{sen}2x + \frac{1}{3}\text{sen}3x - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\text{sen}nx + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right)}$$

En este caso la serie tiene solamente términos en **seno**. Como veremos más adelante ello se debe a que $f(x) = x$ es una función **impar**, es decir que $f(-x) = -f(x)$.

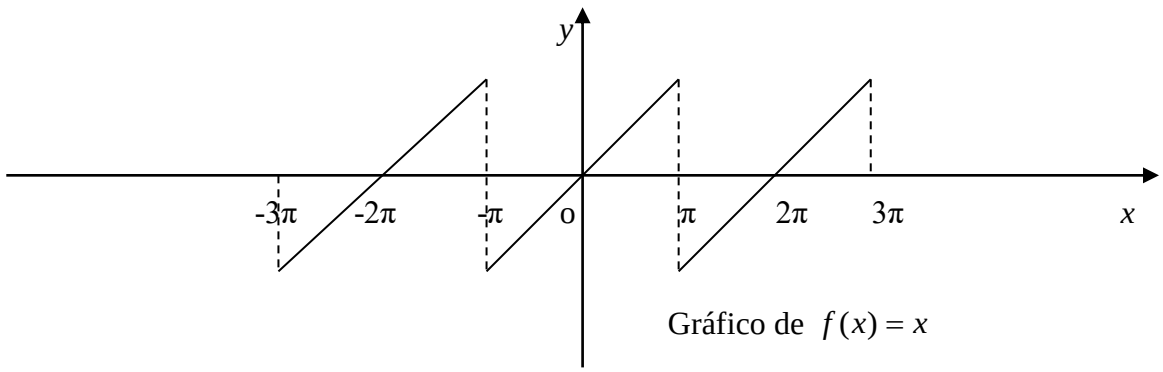
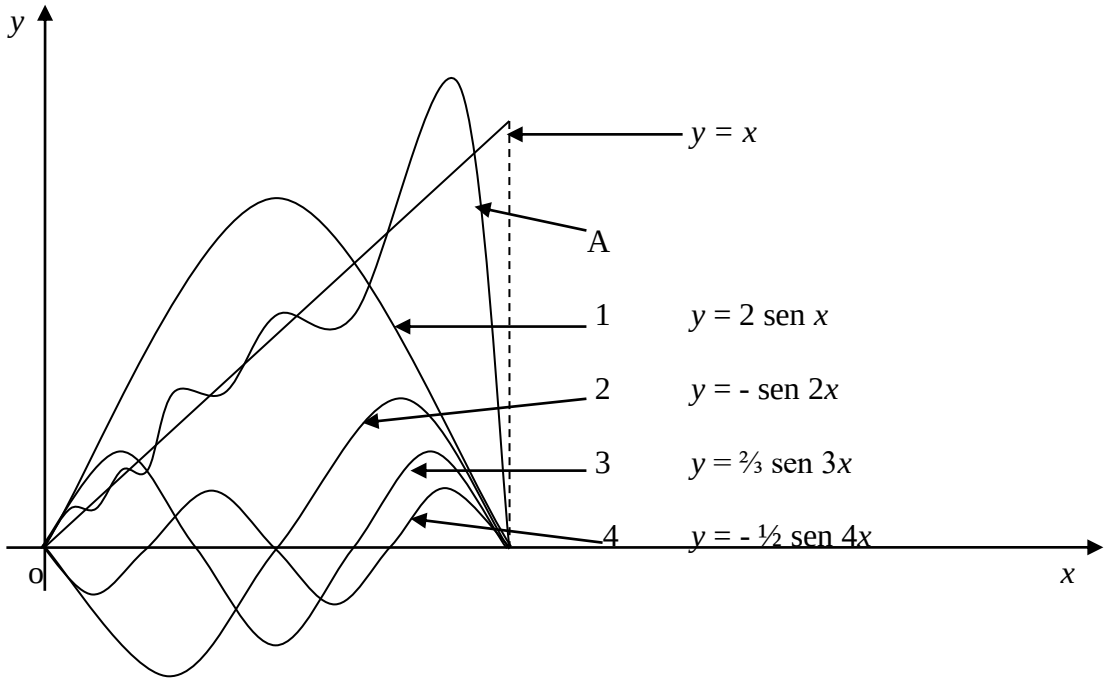


Gráfico de $f(x) = x$



En la figura anterior representamos las curvas 1, 2, 3, 4 que son los 4 primeros términos de la serie, en el período $(0,\pi)$. Por composición se obtiene la curva A:

y = 2 sen x - sen 2x + ⅔ sen 3x - ½ sen 4x (A)

Aumentando el número de términos, las curvas obtenidas se aproximan cada vez más a la recta $y = x$, para todo valor de "x" comprendido entre $-\pi < x < \pi$, pero no así para $x = \pm\pi$. Pues en cada punto de discontinuidad la suma de la serie es igual a la media aritmética de los límites izquierdo y derecho de la función (que en este ejercicio es cero).

<u>Series de seno y coseno</u>

Recordemos que si $f(x)$ es una función **par** resulta $[f(-x) = f(x)]$, entonces:

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx$ en la primera integral del 2º miembro realizamos un cambio de variable $x = -x$ es decir $dx = -dx$ y luego invertimos los límites y resulta:

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{0}^{\pi} f(-x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = \int_{0}^{\pi} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx$ y finalmente para $f(x)$ **par**:

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx}$$

Y si la función $f(x)$ es **impar** resulta $[f(-x) = -f(x)]$, entonces:

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0}$$

Demostremos esta igualdad:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = \int_{0}^{\pi} f(-x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = -\int_{0}^{\pi} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = 0$$

La función **seno** es **impar** pues $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\alpha$

La función **coseno** es **par** pues $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

Analicemos los coeficientes de la Serie de Fourier para las funciones pares e impares:

f (x) función impar

Entonces $f(x).\cos nx$ es **impar** y $f(x)\operatorname{sen} nx$ es **par**, calculemos los coeficientes de la serie:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\operatorname{sen} nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x).\operatorname{sen} nx dx$$

Por lo tanto si $f(x)$ es una función **impar** la Serie de Fourier contiene solamente términos en **seno**.

f (x) función par

Entonces $f(x).\cos nx$ es **par** y $f(x).\operatorname{sen} nx$ es **impar**, y los coeficientes de la serie resultan:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x).\cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\operatorname{sen} nx dx = 0$$

Es decir que si $f(x)$ es una función **par** la Serie de Fourier contiene solamente términos en **coseno**.
Estas fórmulas obtenidas permiten simplificar los cálculos de los coeficientes de la Serie de Fourier, cuando la función dada es par o impar. Pero tener presente que **no** todas las funciones periódicas son pares o impares. En el ejercicio anterior donde la función $f(x) = x$ en impar, la serie resultó con términos en senos solamente.

SERIE DE FOURIER PARA FUNCIONES DE PERÍODO 2ℓ

Consideremos a $f(x)$ como una función periódica de período 2ℓ, distinto de 2π.

Si sustituimos a la variable "x" por $x = \frac{\ell}{\pi}t$ la nueva función $f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right)$ es una función de la variable "t", periódica, de período 2π.Podemos desarrollarla en Serie de Fourier en el intervalo $-\pi \le t \le \pi$:

$$f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n.\cos nt + b_n.\operatorname{sen} nt\right)$$ cuyos coeficientes son:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{\ell}{\pi}t)dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{\ell}{\pi}t).\cos nt dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{\ell}{\pi}t).\operatorname{sen} nt dt$$

Volvemos ahora a la variable "x", realizando el cambio de variable: $\begin{cases} t = \frac{\pi}{\ell}x \\ dt = \frac{\pi}{\ell}dx \end{cases}$

$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n.\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n.\text{sen}\frac{n\pi}{\ell}x\right)} \qquad (5)$$

y sus coeficientes resultan:

$$\boxed{a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx} \qquad (6)$$

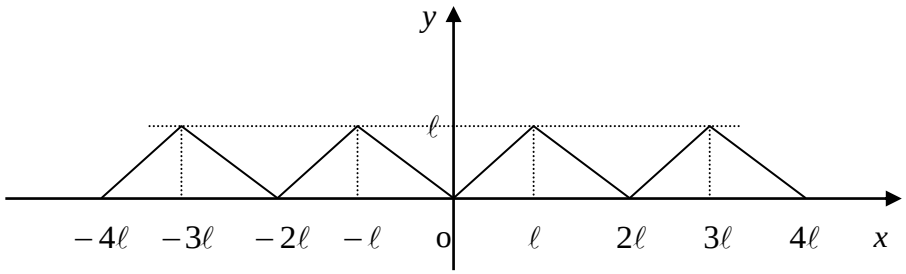
$$\boxed{a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x).\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx} \qquad (7)$$

$$\boxed{b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x).\text{sen}\frac{n\pi}{\ell}xdx} \qquad (8)$$

Los nuevos límites de las integrales se obtienen así:

Para $t=\pi$ resulta $x=\frac{\ell}{\pi}t=\frac{\ell}{\pi}\pi=\ell$ y para $t=-\pi$ resulta $x=\frac{\ell}{\pi}t=\frac{\ell}{\pi}(-\pi)=-\ell$

<u>Ejemplo 2</u>: Desarrollar en Serie de Fourier la función periódica de período 2ℓ , definida en el segmento $[-\ell,\ell]$ por la igualdad $f(x)=|x|$



Como vemos la función planteada es par, por lo tanto los coeficientes serán:

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}xdx=\frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell}xdx=\frac{2}{\ell}\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^{\ell}=\frac{2}{\ell}\frac{\ell^2}{2}=\ell$$

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}x.\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx=\frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell}x.\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx=\frac{2}{\ell}\left(\left|\frac{x\ell}{n\pi}\text{sen}\frac{n\pi}{\ell}x\right|_0^{\ell}-\int_0^{\ell}\frac{\ell}{n\pi}\text{sen}\frac{n\pi}{\ell}xdx\right)=$$

$$a_n=\frac{2}{\ell}\left|\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{\ell}x\right|_0^{\ell}=\frac{2\ell}{n^2\pi^2}\cos n\pi-\frac{2\ell}{n^2\pi^2}\cos 0=\begin{cases}=0 & n=par\\ =-\dfrac{4\ell}{n^2\pi^2} & n=impar\end{cases}$$

$$b_n=0$$

La serie será:

$$\boxed{|x|=\frac{\ell}{2}-\frac{4\ell}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{\ell}x-\frac{4\ell}{3^2\pi^2}\cos\frac{3\pi}{\ell}x-\frac{4\ell}{5^2\pi^2}\cos\frac{5\pi}{\ell}x-\ldots\ldots\ldots\ldots-\frac{4\ell}{(2n+1)^2\pi^2}\cos\frac{(2n+1)}{\ell}x-\ldots\ldots\ldots}$$

FORMA EXPONENCIAL DE LA SERIE DE FOURIER

La Serie de Fourier:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n.\cos nx+b_n.\operatorname{sen}nx\right)=\frac{a_0}{2}+a_1.\cos x+b_1.\operatorname{sen}x+a_2.\cos 2x+b_2.\operatorname{sen}2x+\dots\dots\dots. \qquad (1)$$

Cuyos coeficientes se calculan:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \qquad (2)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x).\cos nxdx \qquad (3)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x).\operatorname{sen}nxdx \qquad (4)$$

Puede ser expresada utilizando las Fórmulas de Euler:

$$\begin{cases} e^{iu}=\cos u+i\operatorname{sen}u \\ e^{-iu}=\cos u-i\operatorname{sen}u \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{e^{iu}+e^{-iu}}{2}=\cos u \\ \dfrac{e^{iu}-e^{-iu}}{2}=i\operatorname{sen}u \end{cases}$$

En cuyo caso la Serie de Fourier resulta:

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}c_n.e^{inx}} \qquad (9)$$

y los coeficientes c_n se calculan mediante la integral:

$$\boxed{c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x).e^{-inx}dx} \qquad (10)$$

n toma todos los valores negativos y positivos, incluido el cero.

Demostremos ahora la equivalencia entre las expresiones (1) y (9). Para ello sustituimos en (10) a e^{-inx} por su igualdad según Euler:

◦Para $n>0$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left(\cos nx-i\operatorname{sen}nx\right)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx-\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\operatorname{sen}nxdx$$

$$c_n=\frac{a_n}{2}-i\frac{b_n}{2}$$

◦Para $n<0$ operando de forma similar se obtiene:

$c_{-n}=\dfrac{a_n}{2}+i\dfrac{b_n}{2}$ de donde deducimos que $c_0=\dfrac{a_0}{2}$

La fórmula (9) se puede expresar:

$$f(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n.e^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}.e^{-inx}$$

Reemplacemos ahora en esta expresión los valores de c_0 , c_n y c_{-n} obtenidos:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2}-i\frac{b_n}{2}\right).e^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2}+i\frac{b_n}{2}\right).e^{-inx}$$

reordenando términos:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}-i\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}$$

y recordando las Fórmulas de Euler, reemplazamos:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx-i\sum_{n=1}^{\infty}b_n i\operatorname{sen}nx$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\operatorname{sen}nx\right)$$

Con lo que queda demostrada la equivalencia entre las expresiones (1) y (9).

RESUMEN

Serie de Fourier

Toda función periódica $f(x)$ de período 2π que satisfaga las condiciones de Dirichlet en el intervalo $(-\pi,\pi)$, se puede desarrollar en serie trigonométrica llamada Serie de Fourier. En cualquier punto **x** de este intervalo en que $f(x)$ sea continua resulta:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n.\cos nx+b_n.\operatorname{sen}nx\right) \qquad \text{ó}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1.\cos x+b_1.\operatorname{sen}x+a_2.\cos 2x+b_2.\operatorname{sen}2x+\dots\dots\dots.$$

a_0,a_n,b_n $(n=1,2,3,\dots\dots\dots\dots)$ son los coeficientes de la serie y están expresados por las formulas:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x).\cos nx dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x).\operatorname{sen}nx dx$$

Series de seno y coseno

f (x) función impar

En este caso los coeficientes resultan:

$$a_0=0$$

$$a_n=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x).\operatorname{sen}nx dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x).\operatorname{sen}nx dx$$

Por lo tanto si $f(x)$ es una función **impar** la Serie de Fourier contiene solamente términos en **seno**.

f (x) función par

Entonces los coeficientes de la serie resultan:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x).\cos nx dx$$

$$b_n = 0$$

Es decir que si $f(x)$ es una función **par** la Serie de Fourier contiene solamente términos en **coseno**.

Serie de Fourier para funciones de período 2 ℓ

Consideremos a $f(x)$ como una función periódica de período 2 ℓ, distinto de 2 π, la correspondiente Serie de Fourier resulta:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n.\cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n.\text{sen}\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$ y sus coeficientes son:

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x).\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x).\text{sen}\frac{n\pi}{\ell}xdx$$

Forma exponencial de la Serie de Fourier

La Serie de Fourier también puede se expresada en forma exponencial:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n.e^{inx}$$ y los coeficientes c_n se calculan mediante la integral:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).e^{-inx}dx$$

n toma todos los valores negativos y positivos, incluido el cero.

CAPÍTULO 11

ECUACIONES DIFERENCIALES CON DERIVADAS PARCIALES

ECUACIONES DIFERENCIALES CON DERIVADAS PARCIALES

Son aquellas ecuaciones que contienen una función de varias variables independientes y algunas de sus derivadas parciales.

Por ejemplo en el caso de una función de dos variables independientes una Ecuación Diferencial con Derivadas Parciales de Primer Orden es de la forma:

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

Y una Ecuación Diferencial con Derivadas Parciales de Segundo Orden es de la forma:

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$$

Resolver estas Ecuaciones Diferenciales representa mayores dificultades que resolver las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, pues la Solución General de éstas contiene constantes arbitrarias, en cambio en el caso de las Ecuaciones Diferenciales con Derivadas Parciales aparecen **funciones arbitrarias**.

No siempre es posible obtener la Solución General de las Ecuaciones Diferenciales con Derivadas Parciales.

Ejemplos:

Veamos algunos ejemplos simples para confirmar lo afirmado. Dadas las siguientes Ecuaciones Diferenciales:

1- $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ su solución es de la forma $z = \varphi(y)$ donde $\varphi(y)$ es una función arbitraria.

Al integrar con respecto a *"x"* nos garantiza que " φ" no es función de *"x"* pero puede serlo de *"y"*.

2- $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ su solución es de la forma $z = \psi(x)$ donde $\psi(x)$ es una función arbitraria.

3- $\frac{\partial z}{\partial y} = x$ su solución es de la forma $z = \frac{x^2}{2} + \varphi(y)$ donde $\varphi(y)$ es una función arbitraria.

4- $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = o$ su solución es de la forma $z = \psi(x) + \varphi(y)$

Estudiaremos a continuación algunos casos de Ecuaciones Diferenciales con Derivadas Parciales Lineales que son muy importantes en el estudio de la Física.

ECUACIÓN DE LAS ONDAS (D´ALEMBERT)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Esta ecuación es del tipo **hiperbólico** y corresponde al caso de las vibraciones transversales de una cuerda, oscilaciones eléctricas en un conductor, vibraciones longitudinales de un vástago, oscilaciones de un gas, etc.

La función buscada es de dos variables independientes $u(x,t)$ y "c^2" es una constante.

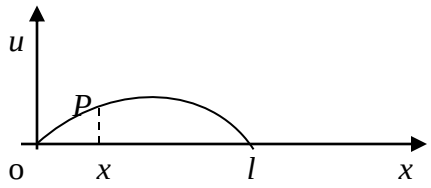
En el caso de funciones de tres variables independientes, la Ecuación de las Ondas resulta:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Analicemos el caso de la vibración transversal de una cuerda elástica.

Vibración transversal de una cuerda elástica

Como cuerda entendemos un hilo o alambre flexible y elástico. Consideramos una cuerda elástica de longitud *"l"* extendida entre dos puntos del eje *0x*, que se la aparta de su posición de equilibrio haciéndola tomar la forma de cierta curva $y = f(x)$ y en el instante $t = 0$ se la deja en libertad y comienza a oscilar.



El problema consiste en determinar la posición de cada punto *P* de la cuerda en cada instante $t > 0$.

Si analizamos pequeñas desviaciones de los puntos de la cuerda podemos despreciar los desplazamientos de *P* en la dirección del eje *0x*, es decir que podemos considerar que el movimiento de los puntos es en la dirección del eje *0u* y en un mismo plano.

En base a ello la oscilación de la cuerda se puede describir por una función $u(x,t)$ que da la posición de un punto *P* (situado a una distancia *"x"* del origen) en cada instante $t > 0$.

Para simplificar el desarrollo se desprecian las fuerzas de amortiguamiento (resistencia del aire y peso de la cuerda) y se supone que la tensión (*T*) de la cuerda siempre actúa tangencialmente a la cuerda y que la densidad (ρ) de la cuerda es constante.

Con estas consideraciones y partiendo de la Segunda Ley de Newton $(F = m.a)$, se obtiene la Ecuación Diferencial con Derivadas Parciales Lineal Homogénea con Coeficientes Constantes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Donde "c^2" es una constante que depende de la tensión (*T*) a la que está sometida la cuerda y de su densidad (ρ).

Para la determinación completa del movimiento de la cuerda la ecuación hallada es insuficiente.

La función buscada $u(x,t)$ debe satisfacer además las condiciones de contorno (o de frontera) que indican lo que sucede en los extremos de la cuerda (x=0 y x=l) y a las condiciones iniciales que describen el estado de la cuerda en $t = 0$.

Si por ejemplo consideramos fijos los extremos, entonces para $x = 0$ y $x = l$ y para cualquier valor de *"t"* se verifica:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases}$$ Que son las condiciones de contorno (o de frontera).

En el momento inicial $t = 0$ la cuerda tiene una forma dada en el plano $0xu$ entonces:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x) \end{cases}$$ Estas son las condiciones iniciales.

(Como caso particular se puede considerar que la cuerda se deja en libertad en la posición $u(x,0) = f(x)$ sin imprimirle ninguna velocidad inicial, es decir $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$. O directamente considerar $u(x,0) = 0$ y $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$ en cuyo caso resulta $u(x,t) = 0$ para cualquier *"x"* y la cuerda está en reposo).

<u>Solución de la Ecuación por el Método de la Separación de Variables (Método de Fourier)</u>

Se pretende hallar la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \textbf{(1)}$$

De manera que satisfaga las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x) \end{cases} \qquad \textbf{(3)}$$

Para hallar la solución de esta Ecuación Diferencial Lineal Homogénea con Derivadas Parciales buscamos en un principio soluciones particulares de **(1)** que satisfagan las condiciones de contorno **(2)** en forma de un producto de dos funciones $X(x)$ y $T(t)$ de una sola variable independiente cada una:

$$u(x,t) = X(x).T(t) \qquad \textbf{(4)}$$

Derivemos dos veces "u" respecto a "t" y "x" y reemplacemos en la **(1)**:

$$X.T'' = c^2.X''.T$$ es decir:

$$\frac{T''}{c^2.T} = \frac{X''}{X}$$

Como el primer miembro no depende de "x" y el segundo no depende de "t", la igualdad anterior solo se verifica cuando ambos miembros no dependan ni de "x" ni de "t", es decir que sean iguales a una constante, que llamaremos $-\lambda^2$.

$$\frac{T''}{c^2.T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

Podemos obtener las siguientes ecuaciones:

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

$$T'' + c^2\lambda^2 T = 0$$

Éstas son dos Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de Segundo Orden con Coeficientes Constantes y sus raíces son imaginarias, en consecuencia sus Soluciones Generales son de la forma:

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\,\text{sen}\,\lambda x \qquad \textbf{(5)}$$

$$T(t) = C\cos c\lambda t + D\,\text{sen}\,c\,\lambda t \qquad \textbf{(6)}$$

Donde *A*, *B*, *C* y *D* son constantes arbitrarias.

Para determinar *A* y *B* aplicamos a la **(5)** las condiciones de contorno **(2)**:

$$X(0) = A + B.0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = 0$$

$$X(l) = A\cos\lambda l + B\,\text{sen}\,\lambda l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B\,\text{sen}\,\lambda l = 0$$

Debiendo ser $B \neq 0$ puesto que en caso contrario sería $X(x) = 0$ es decir $u(x,t) = 0$ (cuerda en reposo) lo que contradice la hipótesis, entonces debe verificarse que:

$$\text{sen}\,\lambda l = 0$$

Lo que exige que:

$$\lambda = \frac{n\pi}{l} \qquad \text{con} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

$$\lambda = \frac{\pi}{l}\ ,\ \frac{2\pi}{l}\ ,\ \frac{3\pi}{l}\ , \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,\ \frac{n\pi}{l}$$

Los valores de **λ** se llaman **valores propios** del problema de contorno, y las correspondientes **funciones propias** son:

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{l}x\ ,\ \text{sen}\,\frac{2\pi}{l}x\ ,\ \text{sen}\,\frac{3\pi}{l}x\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,\ \text{sen}\,\frac{n\pi}{l}x$$

Reemplazando estos valores obtenidos en la Solución General **(5)** tendremos:

$$X(x) = B\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{l}x \qquad \textbf{(7)}$$

Conociendo **λ** reemplazamos su valor en la Solución General **(6)** y obtenemos

$$T(t) = C\cos\frac{cn\pi}{l}t + D\,\mathrm{sen}\frac{cn\pi}{l}t \qquad \textbf{(8)}$$

Introducimos las expresiones **(7)** y **(8)** en la **(4)** y obtenemos la Solución de la Ecuación **(1)** que satisface las condiciones de contorno **(2)**:

$$u_n(x,t) = \mathrm{sen}\frac{n\pi}{l}x\left(C_n\cos\frac{cn\pi}{l}t + D_n\,\mathrm{sen}\frac{cn\pi}{l}t\right)$$

Para $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Para cada valor de *"n"* corresponden valores distintos de *C* y *D*, por eso los llamamos C_n y D_n (*B* está incluida en ellas).

Como la Ecuación **(1)** es lineal y homogénea, la suma de las soluciones también es solución, por ello

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{cn\pi}{l}t + D_n\,\mathrm{sen}\frac{cn\pi}{l}t\right)\mathrm{sen}\frac{n\pi}{l}x \qquad \textbf{(9)}$$

Es la Solución de la Ecuación Diferencial **(1)** que satisface las condiciones de contorno **(2)**.

La determinación de C_n y D_n se hace teniendo en cuenta las condiciones iniciales **(3)**. Para ello tomamos la **(9)** y su derivada respecto de *"t"*:

$$\begin{cases} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{cn\pi}{l}t + D_n\,\mathrm{sen}\frac{cn\pi}{l}t\right)\mathrm{sen}\frac{n\pi}{l}x \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{cn\pi}{l}\mathrm{D_n}\,\mathrm{sen}\frac{n\pi}{l}x \end{cases}$$

Y de acuerdo a las condiciones iniciales, para $t = 0$ resulta:

$$\begin{cases} u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}C_n\,\mathrm{sen}\frac{n\pi}{l}x = f(x) \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{cn\pi}{l}\mathrm{D_n}\,\mathrm{sen}\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x) \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}C_n\,\mathrm{sen}\frac{n\pi}{l}x \\ \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{cn\pi}{l}\mathrm{D_n}\,\mathrm{sen}\frac{n\pi}{l}x \end{cases}$$

Para determinar los coeficientes C_n y D_n hay que desarrollar en Serie de Fourier de senos las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ [Si estas funciones son tales que pueden ser desarrolladas en Serie de Fourier en el intervalo $(0, l)$, ver Capítulo 10]. Y de acuerdo con las fórmulas ya conocidas, podemos determinar los coeficientes:

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,\mathrm{sen}\frac{n\pi}{l}x\,dx \qquad \textbf{(10)}$$

$$\frac{cn\pi}{l}D_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\,\mathrm{sen}\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$D_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^l \varphi(x)\,\mathrm{sen}\frac{n\pi}{l}x\,dx \qquad \textbf{(11)}$$

ECUACIONES DE CONDUCCIÓN DE CALOR O ECUACIÓN DE FOURIER

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Esta ecuación es de tipo parabólico y corresponde a procesos de propagación de calor, filtración de líquidos y gas en un medio poroso (filtraciones de petróleo y gas en areniscos subterráneos), algunos problemas de la teoría de probabilidades, etc.

La función buscada es de dos variables independientes $u(x,t)$ y " c^2 " es una constante.

En el caso de funciones de tres variables independientes $u(x,y,t)$, la Ecuación de Conducción de Calor es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

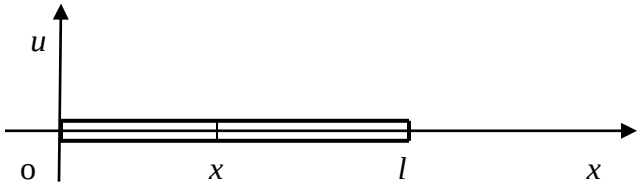
Y en el caso de funciones de cuatro variables independientes $u(x,y,z,t)$ la ecuación correspondiente es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Estudiemos el caso de la propagación de calor en un vástago.

Ecuación de la Propagación de Calor en un Vástago

Analizaremos la propagación de calor en un vástago o un alambre homogéneo y recto, cuya longitud (l) es mucho mayor que su sección transversal, que su superficie lateral no disipa calor y que la temperatura es constante en todos los puntos de su sección transversal.



Consideramos el vástago ubicado sobre el eje *"x"* y sea $u(x,t)$ la temperatura en la sección del vástago de abscisa *"x"* en el instante *"t"*.

La Ecuación Diferencial con Derivadas Parciales que permite determinar esta temperatura es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Donde "c^2" es una constante que depende del coeficiente de conductividad térmica (k), la densidad (ρ) y de la capacidad calórica del material del vástago (μ) (o calor específico).

Esta ecuación de calor, junto con ciertas condiciones iniciales y de frontera, nos determina de manera única la distribución de la temperatura en todo el vástago, en cualquier instante $t > 0$. estas condiciones pueden ser:

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

$$u(0,t) = \psi_1(t)$$

$$u(l,t) = \psi_2(t)$$

La primera indica que en el instante inicial, las deferentes secciones del vástago tienen una temperatura $\varphi(x)$, y las dos últimas indican que en los extremos del vástago sus temperaturas son $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ respectivamente.

<u>Solución de la Ecuación por el Método de la Separación de Variables</u>

Determinaremos la solución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \textbf{(12)}$$

Que satisfaga las condiciones

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad \text{para} \quad 0 \le x \le l \qquad \textbf{(13)}$$

$$\left.\begin{array}{l} u(0,t) = 0 \\ \\ u(l,t) = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{para} \quad t \ge 0 \qquad \textbf{(14)}$$

Es decir que consideraremos que los extremos del vástago son mantenidos a temperatura cero durante todo el tiempo.

Buscamos una Solución Particular de la ecuación **(12)** que satisfaga las condiciones **(13)** y **(14)** en forma de un producto de dos funciones $X(x)$ y $T(t)$ de una sola variable independiente cada una:

$$u(x,t) = X(x).T(t) \qquad \textbf{(15)}$$

Derivemos "u" una vez respecto a "t" y dos veces respecto a "x" y reemplacemos en la **(12)**:

$$X.T' = c^2.X''.T \qquad \text{es decir:}$$

$$\frac{T'}{c^2.T} = \frac{X''}{X}$$

Como el primer miembro no depende de "x" y el segundo no depende de "t", la igualdad anterior solo se verifica cuando ambos miembros no dependan ni de "x" ni de "t", es decir que sean iguales a una constante, que llamaremos $-\lambda^2$.

$$\frac{T'}{c^2.T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

Podemos obtener las siguientes ecuaciones:

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \qquad \textbf{(16)}$$

$$T' + c^2\lambda^2 T = 0 \qquad \textbf{(17)}$$

La **(16)** es una Ecuación Diferencial Lineal Homogénea de Segundo Orden con Coeficientes Constantes con raíces imaginarias y la **(17)** es una Ecuación Diferencial Lineal Homogénea de Primer Orden. Y sus respectivas Soluciones Generales son:

$$X = A\cos\lambda x + B\,\text{sen}\,\lambda x \qquad \textbf{(18)}$$

$$T = Ce^{-c^2\lambda^2 t} \qquad \textbf{(19)}$$

Donde *A*, *B* y *C* son constantes arbitrarias. Para determinar *A* y *B* aplicamos a la **(18)** las condiciones **(14)**.

$$X(0) = A + B.0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = 0$$

$$X(l) = A\cos\lambda l + B\,\text{sen}\,\lambda l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B\,\text{sen}\,\lambda l = 0$$

Debiendo ser $B \neq 0$ puesto que en caso contrario sería $X(x) = 0$ es decir $u(x,t) = 0$ lo que contradice la hipótesis, entonces debe verificarse que:

$$\text{sen}\,\lambda l = 0$$

Lo que exige que:

$$\lambda = \frac{n\pi}{l} \qquad \text{con} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda = \frac{\pi}{l}\ ,\ \frac{2\pi}{l}\ ,\ \frac{3\pi}{l}\ , \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,\ \frac{n\pi}{l}$$

Los valores de **λ** se llaman **valores propios** del problema de contorno, y las correspondientes **funciones propias** son:

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{l}x\ ,\ \text{sen}\,\frac{2\pi}{l}x\ ,\ \text{sen}\,\frac{3\pi}{l}x\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,\ \text{sen}\,\frac{n\pi}{l}x$$

Reemplazando estos valores obtenidos en la Solución General **(18)** tendremos:

$$X(x) = B\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{l}x \qquad \textbf{(20)}$$

Conociendo **λ** reemplazamos su valor en la Solución General **(19)** y obtenemos

$$T(t) = Ce^{-\frac{c^2n^2\pi^2t}{l^2}} \qquad \textbf{(21)}$$

Reemplazamos en la **(20)** valores de *X* y *T* obtenidos en **(20)** y **(21)** respectivamente:

$$u_n(x,t) = D_n e^{-\frac{c^2n^2\pi^2t}{l^2}} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x \qquad \textbf{(22)}$$

Para $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Las constantes *B* y *C* están unificadas en D_n. Para cada valor de *"n"* corresponde un valor distinto de *D* por eso la llamamos D_n.

La **(22)** satisface la Ecuación de Calor en el intervalo $0 < x < l$ y las condiciones de contorno $u(0,t) = 0$ y $u(l,t) = 0$, pero no satisface la condición inicial **(13)** pues para $t = 0$ debería ser

$$u_n(x,0) = D_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x)$$

Solo la satisface si $\varphi(x)$ tiene forma de un múltiplo de la función **seno**. En consecuencia debemos buscar una solución con la forma de la suma de todas las soluciones anteriores:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\frac{c^2n^2\pi^2t}{l^2}} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x \qquad \textbf{(23)}$$

Ahora comprobamos que ésta sí satisface también la condición inicial:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x)$$

Éste es un desarrollo en Serie de Fourier de la función $\varphi(x)$ en el intercalo $0 < x < l$. Entonces podemos calcular su coeficiente D_n así:

$$D_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x\, dx \qquad \textbf{(24)}$$

Entonces:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x\, dx\right] e^{-\frac{c^2n^2\pi^2t}{l^2}} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x \qquad \textbf{(25)}$$

Ésta satisface todas las condiciones del problema y por lo tanto es la solución buscada.

ECUACIÓN DE LAPLACE

Recordemos que en la expresión:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \text{ó} \qquad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$\Delta = \nabla^2$ recibe el nombre de Laplaciano u Operador de Laplace y cuando resulta $\Delta u = \nabla^2 u = 0$ se la denomina **Ecuación de Laplace**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Esta ecuación es de tipo elíptico y corresponde a problemas sobre campos eléctricos y magnéticos, sobre el estado térmico estacionario, problemas de la hidrodinámica, de fusión, etc.

La función *"u"* que satisface esta ecuación en cierta región, se llama Función Armónica en esa región.

Por ejemplo: $z = 3y^2 - 4x^2$ y $z = x^2 + xy$

Son Funciones Armónicas en todo en plano $0xy$.

A la Ecuación de Laplace también se la conoce como Ecuación del Estado Estacionario del Calor.

Estado estacionario de la temperatura de un cuerpo

Recordemos la Ecuación de Conducción de Calor en el espacio de tres o dos dimensiones

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \qquad \text{ó} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Es decir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u$$

Si el proceso es estacionario, es decir la temperatura no depende del tiempo y solo depende de las coordenadas de los puntos del cuerpo, la ecuación es independiente de *"t"*; por lo tanto resulta

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Y la Ecuación de Calor se transforma en la Ecuación de Laplace: $\nabla^2 u = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

En los problemas en que interviene la Ecuación de Laplace no hay condiciones iniciales. Pero si se pueden resolver problemas de funciones sujetas a ciertas condiciones de frontera. El problema de determinar una Función Armónica conociendo su valor de frontera se llama Problema de Dirichlet.

Para simplificar el desarrollo trabajaremos en 2 dimensiones. La dificultad en estos problemas depende en general de que tan complicado en la región, y resultan más accesibles cuando dicha región posee cierto tipo de simetría.

Solución del Problema de Dirichlet para un círculo

Resolvamos el Problema de Dirichlet para un círculo de radio R con centro en el origen.

En coordenadas polares el problema es:

$$\nabla^2 u(r,\theta) = 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{para} \qquad 0 \le r < R \qquad -\pi \le \theta \le \pi \qquad \textbf{(26)}$$

Y en la frontera del círculo la función toma el valor $f(\theta)$:

$$u(R,\theta) = f(\theta) \qquad \text{para} \qquad -\pi \le \theta \le \pi \qquad \textbf{(27)}$$

La Ecuación de Laplace en coordenadas polares resulta:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \qquad \textbf{(28)}$$

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \qquad \textbf{(29)}$$

Busquemos una solución por el Método de Separación de Variables:

$$u(r,\theta) = \boldsymbol{R}(r).\boldsymbol{\Theta}(\theta) \qquad \textbf{(30)}$$

Que para simplificar la escritura expresaremos simplemente:

$$u = \boldsymbol{R}.\boldsymbol{\Theta}$$

Derivemos dos veces a *"u"* respecto a *"r"* y *"θ"* y reemplacemos en la Ecuación de Laplace **(29)**:

$$r^2\boldsymbol{R}''\boldsymbol{\Theta} + r\boldsymbol{R}'\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{\Theta}'' = 0 \qquad \textbf{(31)} \qquad \text{es decir:}$$

$$\frac{\boldsymbol{\Theta}''}{\boldsymbol{\Theta}} = -\frac{r^2\boldsymbol{R}''+r\boldsymbol{R}'}{\boldsymbol{R}} \qquad \textbf{(32)}$$

Como el primer miembro no depende de *"r"* y el segundo no depende de *"θ"* la igualdad anterior solo se verifica cuando ambos miembros no dependen ni de *"r"* ni de *"θ"*, es decir que sean iguales a una constante que llamaremos $-\boldsymbol{\lambda^2}$.

$$\frac{\boldsymbol{\Theta}''}{\boldsymbol{\Theta}} = -\frac{r^2\boldsymbol{R}''+r\boldsymbol{R}'}{\boldsymbol{R}} = -\lambda^2 \qquad \textbf{(33)}$$

Podemos obtener las siguientes ecuaciones:

$$\boldsymbol{\Theta}'' + \lambda^2 \boldsymbol{\Theta} = 0 \qquad \textbf{(34)}$$

$$r^2 \boldsymbol{R}'' + r\boldsymbol{R}' - \lambda^2 \boldsymbol{R} = 0 \qquad \textbf{(35)}$$

La Solución General de la ecuación **(34) es:**

$$\boldsymbol{\Theta} = A \cos \lambda\theta + B \operatorname{sen} \lambda\theta \qquad \textbf{(36)}$$

Busquemos ahora una solución de la **(35)** de la forma $\boldsymbol{R} = r^{\propto}$, derivemos dos veces y reemplacemos en la **(35)**:

$$r^2 \propto (\propto -1) r^{\propto -2} + r \propto r^{\propto -1} - \lambda^2 r^{\propto} = 0$$ resolviendo obtenemos:

$$\propto^2 - \lambda^2 = 0$$

De aquí obtenemos dos Soluciones Particulares Linealmente Independientes r^{λ} y $r^{-\lambda}$ y por lo tanto la Solución General de la ecuación **(35)** resulta:

$$\boldsymbol{R} = Cr^{\lambda} + Dr^{-\lambda} \qquad \textbf{(37)}$$

Y reemplazando en la **(30)** lo que hemos obtenido en **(36)** y **(37)** tendremos:

$$\boldsymbol{u}_{\lambda} = (A_{\lambda} \cos \lambda\theta + B_{\lambda} \operatorname{sen} \lambda\theta)\,(C_{\lambda} r^{\lambda} + D_{\lambda} r^{-\lambda}) \qquad \textbf{(38)}$$

Ésta es la solución de la ecuación **(29)** para todos los valores de $\boldsymbol{\lambda \neq 0}$.

Cuando es $\boldsymbol{\lambda = 0}$ las ecuaciones **(34)** y **(35)** resultan:

$$\boldsymbol{\Theta}'' = 0$$

$$r\boldsymbol{R}'' + \boldsymbol{R}' = 0$$

Y en este caso la Solución de la ecuación **(29)** resulta:

$$\boldsymbol{u}_0 = (A_0 + B_0\theta)(C_0 + D_0 lnr) \qquad \textbf{(39)}$$

Para los puntos (r, θ) y $(r, \theta + 2\pi)$ corresponde un mismo valor de la solución, pues estamos analizando un mismo punto del círculo, entonces la solución debe ser periódica de período 2π. Por lo tanto debe ser $B_0 = 0$.

Además la solución debe ser continua y finita en todos los puntos del círculo, y para que sea finita en el centro del círculo ($r = 0$), debe ser $D_0 = 0$ en la **(39)** y $D_{\lambda} = 0$ en la **(38)**.

Por lo expresado la solución **(39)** queda $u_0 = A_0 C_0$ y la designaremos así:

$$u_0 = \frac{a_0}{2} \qquad \textbf{(40)}$$

Y la **(38)** resulta: $\boldsymbol{u}_{\lambda} = (A_{\lambda} \cos \lambda\theta + B_{\lambda} \operatorname{sen} \lambda\theta)\, C_{\lambda} r^{\lambda} = (A_{\lambda} C_{\lambda} \cos \lambda\theta + B_{\lambda} C_{\lambda} \operatorname{sen} \lambda\theta)\, r^{\lambda}$ y la designamos:

$$\boldsymbol{u}_\lambda = (a_\lambda \cos \lambda\theta + b_\lambda \operatorname{sen} \lambda\theta)\, r^\lambda \qquad \textbf{(41)}$$

Busquemos nuestra solución como la suma de las soluciones anteriores. Esta suma debe ser periódica y para que ello ocurra λ debe tomar valores enteros. Solo consideraremos valores positivos de λ pues los valores negativos no aportan nuevas soluciones particulares.

$$\lambda = 1, 2, 3, \dots\dots\dots\dots\dots\dots, n\ , \dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)\, r^n \qquad \textbf{(42)}$$

Para satisfacer la condición en la frontera $(r = R)$ debemos elegir los coeficientes de manera que resulte:

$$u(r,\theta) = f(\boldsymbol{\theta}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)\, R^n$$

$$u(r,\theta) = f(\boldsymbol{\theta}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} (a_n R_n \cos n\theta + b_n R_n \operatorname{sen} n\theta) \qquad \textbf{(43)}$$

Esta expresión es el desarrollo de Fourier de $f(\theta)$ en el período $[-\pi, \pi]$. Y los coeficientes deben determinarse de la forma:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt\, dt$$

La serie **(42)** con los coeficientes calculados de la forma anterior es la solución de nuestro problama:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\pi}} \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \left(\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{R}}\right)^{\boldsymbol{n}} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt \cos n\theta + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt\, dt \operatorname{sen} n\theta\right]$$

También se la puede expresar:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\pi}} \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \left(\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{R}}\right)^{\boldsymbol{n}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n(t-\theta)\, dt \qquad \text{ó}$$

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{R}}\right)^{\boldsymbol{n}} \cos n(t-\theta)\right] f(t)dt \qquad \textbf{(44)}$$