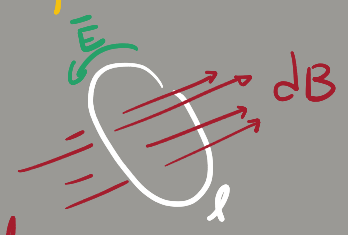
# Ecuaciones de Maxwell en forma integral

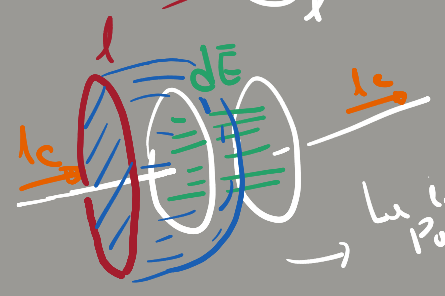
① $\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ flujo electrico en una superficie cerrada

② $\oint_S \bar{B}\cdot d\bar{a} = 0$ flujo magnético en una superficie cerrada

③ $\oint_l \bar{E}\cdot d\bar{s} = -\frac{d\Phi_{\bar{B}}}{dt}$ Inducción (faraday)




④ $\oint_l \bar{B}\cdot ds = \mu_0 I$ Ampere




La Id es una corrección para cumplir con el teorema de Stokes

↳ Maxwell define

$$I = i_c + \underbrace{\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}}_{\text{(Corriente de desplazamiento)}}$$

## Desarrllo de la forma diferencial

① $\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ $\boxed{Q = \int_V \rho\, dv}$ $\rho$: densidad volumetrica de carga

$$\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{a} = \underbrace{\int_V \nabla\cdot E\, dv = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, dv}_{\text{Mismo vol. de integración}}$$

① $\boxed{\nabla\cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$

**Teorema de Gauss**

$$\oint_S \bar{A}\cdot d\bar{a} = \int_V \bar{\nabla}\cdot\bar{A}\, dv$$

Vol. encerrado por S

relaciona lo macro (flujo), con lo micro (divergencia)

② $\oint_S \bar{B}\cdot d\bar{a} = \underbrace{\int_V \bar{\nabla}\cdot\bar{B}\, dv = 0}$

② $\boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0}$

③ $\oint_l \bar{E}\cdot d\bar{s} = -\frac{d\Phi_{\bar{B}}}{dt}$ $-\frac{d\Phi_{\bar{B}}}{dt}$ $\boxed{\Phi_B = \int_S \bar{B}\cdot d\bar{a}}$

③ $\oint_l \bar{E}\cdot d\bar{s} = \underbrace{\int_S (\bar{\nabla}\times\bar{E})\cdot d\bar{a} = \int_S -\frac{d}{dt}\bar{B}\cdot d\bar{a}}_{\text{Misma sup. de integración}}$

**Teorema de stokes**

$$\oint_l \bar{A}\cdot d\bar{s} = \int_S (\bar{\nabla}\times\bar{A})\cdot d\bar{a}$$

Cualquier superficie que este definida por la curva s

relaciona lo macro (circulación en l) con lo micro (Rotor en un da)

③ $\boxed{\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{d\bar{B}}{dt}}$

④ $\oint_L \bar{B}\cdot ds = \mu_0 I$

$$\boxed{I = \int_S \bar{J}\cdot d\bar{a}}$$

$$\oint_L \bar{B}\cdot ds = \underbrace{\int_S (\bar{\nabla}\times\bar{B})\cdot d\bar{s} = \int \mu_0 \bar{J}\cdot d\bar{a}}$$

$$\boxed{\bar{J} = \bar{J}_c + \varepsilon_0 \frac{d\bar{E}}{dt}}$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0 \bar{J}$$

④ $$\boxed{\bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0\left(\bar{J}_c + \varepsilon_0 \frac{d\bar{E}}{dt}\right)}$$

## Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial.

① $\nabla\cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

② $\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0$

③ $\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{d\bar{B}}{dt}$

④ $\bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0\left(\bar{J}_c + \varepsilon_0 \frac{d\bar{E}}{dt}\right)$

Si consideramos el vacio como medio, donde no hay cargas y por lo tanto $\rho = 0$ y $j_c = 0$. Estas ecuaciones se reducen a:

① $\nabla\cdot E = 0$

② $\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0$

③ $\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{d\bar{B}}{dt}$

④ $\bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\bar{E}}{dt}$

Skiling

$\nabla\times\mathbf{H} = \epsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$

$\nabla\times\mathbf{E} = -\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$

$\nabla\cdot\mathbf{H} = 0$

$\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$

$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \rightarrow H = \frac{B}{\mu}$

$\nabla\times B = \mu\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}$ ✓

$\nabla\times E = -\cancel{\mu}\frac{\partial B}{\cancel{\mu}\partial t}$ ✓

## Deducción de la ecuacion de onda

*(Por $\bar{E}$)

Partiendo de:

$$\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{d\bar{B}}{dt}$$

④ $\bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\bar{E}}{dt}$

$$\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{d}{dt}(\nabla\times\bar{B})$$

Buscamos una ecuación de forma:

Eq. de d'Alembert

$$\boxed{\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t} = v\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial^2 x}}$$

Un poquito de Magia

$$\boxed{\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\bar{A} = \bar{\nabla}\bar{\nabla}\cdot\bar{A} - \nabla^2 A}$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times E = -\frac{d}{dt}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{dE}{dt}\right)$$

## Ecuación de onda

$$\boxed{\nabla^2 \bar{E} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d^2\bar{E}}{d^2t}}$$

$$\frac{1}{c^2} = \mu_0\varepsilon_0 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

Descomponiendo en sus componentes obtenemos:

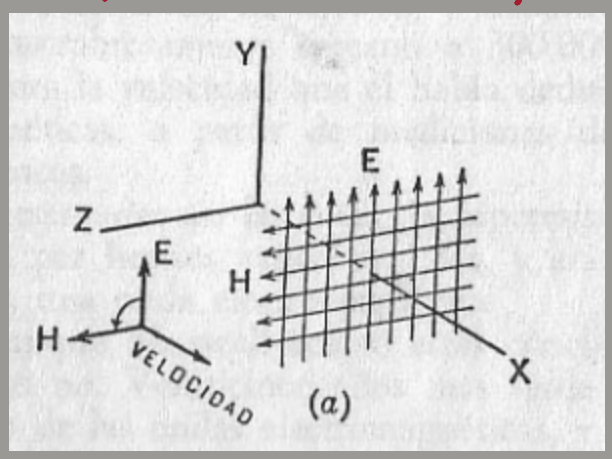
eje x: $\frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial^2 z} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$

eje y: $\frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial^2 z} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$

eje z: $\frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial^2 z} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$

Si consideramos una onda plana que se propaga en el eje x, con su campo eléctrico alineado con el eje y. entonces:

*Una onda plana puede ser el diferencial de una onda esferica.




$E_x = 0 \qquad E_z = 0$

$$\underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0}_{\text{E es uniforme en el plano de onda}}$$

La eq. de onda se reduce a $\Longrightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial^2 x} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial^2 t}$

La solución a esta eq. diferencial es cualquier funcion de la forma: $f(x-vt)$

Donde $v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ en el VACIO

Demostración

$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = f(x-vt)$

$\frac{\partial f}{\partial t} = -v\, f(x-vt)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 t} = v^2 f(x-vt)$

$f(x-vt) = \frac{1}{c^2} c^2 f(x-vt)$

Si consideramos una onda plana sinusoidal:

$$E_y = E_m \cos(\beta(vt - x))$$

ó, considerando $\beta v = w$

$$\boxed{E_y = E_m \cos(wt - \beta x)}$$

Donde:

$E_m$: Amplitud

$\beta$: Nro de onda (oscilaciones espaciales)

$w$: frecuencia angular

Se introduce el concepto de longitud de onda ($\lambda$) dado por:

"freq." espacial "Periodo" espacial

$\beta \longrightarrow \lambda$

Analogo al periodo

$$* \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi v}{w} = \frac{v}{f}$$

$\omega \longrightarrow T \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$

## Campo magnético de la onda

Conociendo el campo electrico de la onda podemos usar la tercera ecucuación para encontrar el campo magnético

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{d\bar{B}}{dt}$$

$$\nabla \times A = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Descomponiendo en en los ejes:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

Pero:

$E_x = 0 \quad \frac{\partial E}{\partial y} = 0$

$E_z = 0 \quad \frac{\partial E}{\partial z} = 0$

$$\longrightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$\beta v = \omega$

$v = \frac{\omega}{\beta}$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\beta E_m \operatorname{sen}(\omega t - \beta x)$$

Integrando respecto al tiempo:

$$B_z = \frac{\beta}{\omega} E_m \cos(\omega t - \beta x) = \frac{\beta}{\omega} E_y$$

$$\boxed{\frac{\omega}{\beta} = v}$$

Relución entre B y E

$$\boxed{B_z v = E_y}$$

Si buscamos la eq. de d'Alembert a travéz del campo $\bar{B}$:

$$\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\bar{E}}{dt}$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \bar{\nabla} \times \bar{E}$$

$$\bar{\nabla}^2 \bar{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{B}}{dt}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{B}_y}{\partial^2 x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial^2 t}$$

$$B_y = B_m \cos(\omega t - \beta x)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\bar{E}}{dt}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \beta \operatorname{sen}(\omega t - \beta x) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\bar{E}_z}{dt}$$

$$-\frac{\beta}{\omega} \cos(\omega t - \beta x) = c^{-2} E_z$$

$$-c^{-1} \cos(\omega t - \beta x) = c^{-2} E_z$$

$$E_z = -c B_y$$

## Poynting

Teniendo en cuenta la densidad de energia(u) de los campos electrico y magnético

Skilling

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$D = \varepsilon E$$

$$\frac{1}{2} \int \varepsilon E \cdot E \, dv$$

$$\frac{1}{2} \int \varepsilon |E|^2 \, dv$$

Energía eléctrica $= \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, d\mathcal{V}$

Energía magnética $= \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, d\mathcal{V}$

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon |E|^2$$ Sears V2 P.826

$$u_B = \frac{|B|^2}{2\mu}$$ Sears V2 P.1039

Energía total $= \frac{1}{2}\int (\mathbf{B}\cdot\mathbf{H} + \mathbf{D}\cdot\mathbf{E})\, d\mathcal{V}$

$$\frac{1}{2}\int \bar{B}\cdot\frac{\bar{B}}{\mu}\, dv$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\mu}|B|^2 dv$$

Las respectivas energías son:

$$U_E = \int_v u_E\, dv = \frac{1}{2}\int_v \varepsilon |\bar{E}|^2 dv$$

$$U_B = \int_v u_B\, dv = \frac{1}{2}\int_v \frac{|\bar{B}|^2}{\mu} dv$$

$\rightarrow$ La energía de la onda EM $\rightarrow$ $U = U_E + U_B = \frac{1}{2}\int \varepsilon |E|^2 + \frac{|B|^2}{\mu} dv$

$$(f\cdot g)' = f'g + fg'$$

$$(f\cdot f)' = f'f + ff' = 2f'f$$

El flujo saliente de potencia es:

Va hacia la menor energía, de la fuente al receptor

$$= -\frac{dU}{dt} = -\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int \varepsilon |E|^2 + \frac{|B|^2}{\mu} dv = -\frac{1}{2}\int_v \varepsilon \frac{d(\bar{E}\cdot\bar{E})}{dt} + \frac{1}{\mu}\frac{d}{dt}(\bar{B}\cdot\bar{B})\, dv =$$

③ $\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{d\bar{B}}{dt}$

④ $\bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\bar{E}}{dt}$

$$= -\int_v \varepsilon \bar{E}\cdot\frac{d\bar{E}}{dt} + \frac{1}{\mu}\bar{B}\cdot\frac{d\bar{B}}{dt}\, dv = \int_v \frac{1}{\mu}\bar{B}\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{E}) - \cancel{\varepsilon}\bar{E}\cdot\frac{(\bar{\nabla}\times\bar{B})}{\mu\cancel{\varepsilon}} =$$

Un poquito de magia

$$\bar{\nabla}\cdot(\bar{A}\times\bar{B}) = B\cdot(\nabla\times\bar{A}) - A(\bar{\nabla}\times\bar{B})$$

$$= \int_v \frac{1}{\mu}\nabla\cdot(\bar{E}\times\bar{B})\, dv \xrightarrow{\text{T. Gauss}} \oint_S \frac{1}{\mu}(\bar{E}\times\bar{B})\, da$$

Gauss

$$\oint_S B\cdot da = \int_V \nabla\cdot B\, dv$$

Finalmente:

$$\oint_S \bar{P}\, da = \oint_S \frac{1}{\mu}(\bar{E}\times\bar{B})\, da$$

Vector de Poynting

$$\boxed{\bar{P} = \frac{1}{\mu}(\bar{E}\times\bar{B})}$$

Indica el sentido de propagación de la energía