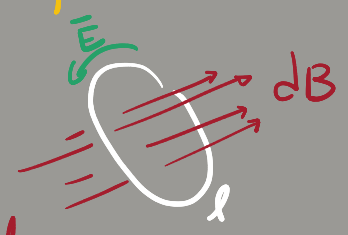
Ecuaciones de Maxwell en forma integral

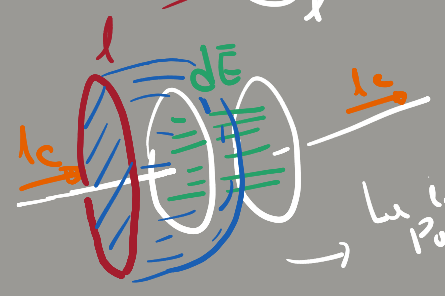
① $\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ flujo electrico en una superficie cerrada

② $\oint_S \bar{B}\cdot d\bar{a} = 0$ flujo magnético en una superficie cerrada

③ $\oint_l \bar{E}\cdot d\bar{s} = -\frac{d\Phi_{\bar{B}}}{dt}$ Inducción (faraday)



④ $\oint_l \bar{B}\cdot ds = \mu_0 I$ Ampere



La Id es una corrección para cumplir con el teorema de Stokes

↳ Maxwell define

$$I = i_c + \underbrace{\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}}_{\text{(Corriente de desplazamiento)}}$$

Desarrllo de la forma diferencial

① $\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ $\boxed{Q = \int_V \rho\, dv}$ ρ: densidad volumetrica de carga

$$\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{a} = \underbrace{\int_V \nabla\cdot E\, dv = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, dv}_{\text{Mismo vol. de integración}}$$

① $\boxed{\nabla\cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$

Teorema de Gauss

$$\oint_S \bar{A}\cdot d\bar{a} = \int_V \bar{\nabla}\cdot\bar{A}\, dv$$

Vol. encerrado por S

relaciona lo macro (flujo), con lo micro (divergencia)

② $\oint_S \bar{B}\cdot d\bar{a} = \underbrace{\int_V \bar{\nabla}\cdot\bar{B}\, dv = 0}$

② $\boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0}$

③ $\oint_l \bar{E}\cdot d\bar{s} = -\frac{d\Phi_{\bar{B}}}{dt}$ $-\frac{d\Phi_{\bar{B}}}{dt}$ $\boxed{\Phi_B = \int_S \bar{B}\cdot d\bar{a}}$

③ $\oint_l \bar{E}\cdot d\bar{s} = \underbrace{\int_S (\bar{\nabla}\times\bar{E})\cdot d\bar{a} = \int_S -\frac{d}{dt}\bar{B}\cdot d\bar{a}}_{\text{Misma sup. de integración}}$

Teorema de stokes

$$\oint_l \bar{A}\cdot d\bar{s} = \int_S (\bar{\nabla}\times\bar{A})\cdot d\bar{a}$$

Cualquier superficie que este definida por la curva s

relaciona lo macro (circulación en l) con lo micro (Rotor en un da)

③ $\boxed{\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{d\bar{B}}{dt}}$

④ $\oint_L \bar{B}\cdot ds = \mu_0 I$

$$\boxed{I = \int_S \bar{J}\cdot d\bar{a}}$$

$$\oint_L \bar{B}\cdot ds = \underbrace{\int_S (\bar{\nabla}\times\bar{B})\cdot d\bar{s} = \int \mu_0 \bar{J}\cdot d\bar{a}}$$

$$\boxed{\bar{J} = \bar{J}_c + \varepsilon_0 \frac{d\bar{E}}{dt}}$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0 \bar{J}$$

④ $$\boxed{\bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0\left(\bar{J}_c + \varepsilon_0 \frac{d\bar{E}}{dt}\right)}$$

Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial.

① $\nabla\cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

② $\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0$

③ $\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{d\bar{B}}{dt}$

④ $\bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0\left(\bar{J}_c + \varepsilon_0 \frac{d\bar{E}}{dt}\right)$

Si consideramos el vacio como medio, donde no hay cargas y por lo tanto $\rho = 0$ y $j_c = 0$. Estas ecuaciones se reducen a:

① $\nabla\cdot E = 0$

② $\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0$

③ $\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{d\bar{B}}{dt}$

④ $\bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\bar{E}}{dt}$

Skiling

$\nabla\times\mathbf{H} = \epsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$

$\nabla\times\mathbf{E} = -\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$

$\nabla\cdot\mathbf{H} = 0$

$\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$

$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \rightarrow H = \frac{B}{\mu}$

$\nabla\times B = \mu\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}$ ✓

$\nabla\times E = -\cancel{\mu}\frac{\partial B}{\cancel{\mu}\partial t}$ ✓

Deducción de la ecuacion de onda

*(Por $\bar{E}$)

Partiendo de:

$$\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{d\bar{B}}{dt}$$

④ $\bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\bar{E}}{dt}$

$$\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{d}{dt}(\nabla\times\bar{B})$$

Buscamos una ecuación de forma:

Eq. de d'Alembert

$$\boxed{\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t} = v\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial^2 x}}$$

Un poquito de Magia

$$\boxed{\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\bar{A} = \bar{\nabla}\bar{\nabla}\cdot\bar{A} - \nabla^2 A}$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times E = -\frac{d}{dt}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{dE}{dt}\right)$$

Ecuación de onda

$$\boxed{\nabla^2 \bar{E} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d^2\bar{E}}{d^2t}}$$

$$\frac{1}{c^2} = \mu_0\varepsilon_0 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

Descomponiendo en sus componentes obtenemos:

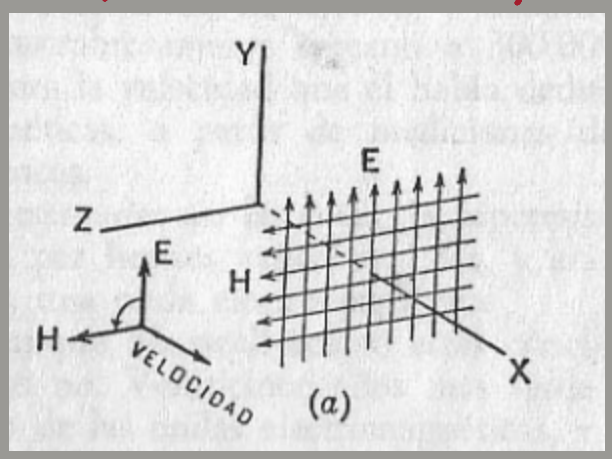
eje x: $\frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 z} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 t}$

eje y: $\frac{\partial^2 E_y}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial^2 z} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial^2 t}$

eje z: $\frac{\partial^2 E_z}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial^2 z} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial^2 t}$

Si consideramos una onda plana que se propaga en el eje x, con su campo eléctrico alineado con el eje y. entonces:

*Una onda plana puede ser el diferencial de una onda esferica.



$E_x = 0 \qquad E_z = 0$

$$\underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0}_{\text{E es uniforme en el plano de onda}}$$

La eq. de onda se reduce a $\Longrightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial^2 x} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial^2 t}$

La solución a esta eq. diferencial es cualquier funcion de la forma: $f(x-vt)$

Donde $v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ en el VACIO

Demostración

$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = f(x-vt)$

$\frac{\partial f}{\partial t} = -v\, f(x-vt)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 t} = v^2 f(x-vt)$

$f(x-vt) = \frac{1}{c^2} c^2 f(x-vt)$

Si consideramos una onda plana sinusoidal:

$$E_y = E_m \cos(\beta(vt - x))$$

ó, considerando $\beta v = w$

$$\boxed{E_y = E_m \cos(wt - \beta x)}$$

Donde:
E_m: Amplitud
β: Nro de onda (oscilaciones espaciales)
w: frecuencia angular

Se introduce el concepto de longitud de onda (λ) dado por:

"freq." espacial "Periodo" espacial

$\beta \longrightarrow \lambda$

Analogo al periodo

$$* \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi v}{w} = \frac{v}{f}$$

$\omega \longrightarrow T \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$

Campo magnético de la onda

Conociendo el campo electrico de la onda podemos usar la tercera ecucuación para encontrar el campo magnético

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{d\bar{B}}{dt}$$

$$\nabla \times A = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Descomponiendo en en los ejes:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

Pero:

$E_x = 0 \quad \frac{\partial E}{\partial y} = 0$

$E_z = 0 \quad \frac{\partial E}{\partial z} = 0$

$$\longrightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$\beta v = \omega$

$v = \frac{\omega}{\beta}$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\beta E_m \operatorname{sen}(\omega t - \beta x)$$

Integrando respecto al tiempo:

$$B_z = \frac{\beta}{\omega} E_m \cos(\omega t - \beta x) = \frac{\beta}{\omega} E_y$$

$$\boxed{\frac{\omega}{\beta} = v}$$

Relución entre B y E

$$\boxed{B_z v = E_y}$$

Si buscamos la eq. de d'Alembert a travéz del campo $\bar{B}$:

$$\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\bar{E}}{dt}$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \bar{\nabla} \times \bar{E}$$

$$\bar{\nabla}^2 \bar{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{B}}{dt}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{B}_y}{\partial^2 x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial^2 t}$$

$$B_y = B_m \cos(\omega t - \beta x)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\bar{E}}{dt}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \beta \operatorname{sen}(\omega t - \beta x) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\bar{E}_z}{dt}$$

$$-\frac{\beta}{\omega} \cos(\omega t - \beta x) = c^{-2} E_z$$

$$-c^{-1} \cos(\omega t - \beta x) = c^{-2} E_z$$

$$E_z = -c B_y$$

Poynting

Teniendo en cuenta la densidad de energia(u) de los campos electrico y magnético

Skilling

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$D = \varepsilon E$$

$$\frac{1}{2} \int \varepsilon E \cdot E \, dv$$

$$\frac{1}{2} \int \varepsilon |E|^2 \, dv$$

Energía eléctrica $= \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, d\mathcal{V}$

Energía magnética $= \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, d\mathcal{V}$

$$N_E = \frac{1}{2}\varepsilon |E|^2$$ Sears V2 P.826

$$N_B = \frac{|B|^2}{2\mu}$$ Sears V2 P.1039

Energía total $= \frac{1}{2}\int (\mathbf{B}\cdot\mathbf{H} + \mathbf{D}\cdot\mathbf{E})\, d\mathcal{V}$

$$\frac{1}{2}\int \bar{B}\cdot\frac{\bar{B}}{\mu}\, dv$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\mu}|B|^2 dv$$

Las respectivas energías son:

$$U_E = \int_V N_E\, dv = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon |\bar{E}|^2 dv$$

$$U_B = \int_V N_B\, dv = \frac{1}{2}\int_V \frac{|\bar{B}|^2}{\mu} dv$$

→ La energía de la onda EM →

$$U = U_E + U_B = \frac{1}{2}\int \varepsilon |E|^2 + \frac{|B|^2}{\mu}\, dv$$

$$(f\cdot g)' = f'g + fg'$$

$$(f\cdot f)' = f'f + ff' = 2f'f$$

El flujo saliente de potencia es:

Va hacia la menor energía, de la fuente al receptor

$$= -\frac{dU}{dt} = -\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int \varepsilon |E|^2 + \frac{|B|^2}{\mu}\, dv = -\frac{1}{2}\int_V \varepsilon \frac{d(\bar{E}\cdot\bar{E})}{dt} + \frac{1}{\mu}\frac{d}{dt}(\bar{B}\cdot\bar{B})\, dv =$$

③ $\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{d\bar{B}}{dt}$

④ $\bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\bar{E}}{dt}$

$$= -\int_V \varepsilon\, \bar{E}\cdot\frac{d\bar{E}}{dt} + \frac{1}{\mu}\bar{B}\cdot\frac{d\bar{B}}{dt}\, dv = \int_V \frac{1}{\mu}\bar{B}\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{E}) - \cancel{\varepsilon}\,\bar{E}\cdot\frac{(\bar{\nabla}\times\bar{B})}{\mu\cancel{\varepsilon}} =$$

$$= \int_V \frac{1}{\mu}\nabla\cdot(\bar{E}\times\bar{B})\, dv \xrightarrow{\text{T. Gauss}} \oint_S \frac{1}{\mu}(\bar{E}\times\bar{B})\, da$$

Un poquito de magia

$$\bar{\nabla}\cdot(\bar{A}\times\bar{B}) = B\cdot(\nabla\times\bar{A}) - A(\bar{\nabla}\times\bar{B})$$

Gauss

$$\oint_S B\cdot da = \int_V \nabla\cdot B\, dv$$

Finalmente:

$$\oint_S \bar{P}\, da = \oint_S \frac{1}{\mu}(\bar{E}\times\bar{B})\, da$$

Vector de Poynting

$$\boxed{\bar{P} = \frac{1}{\mu}(\bar{E}\times\bar{B})}$$

Indica el sentido de propagación de la energía

Relatividad especial

Surge del análisis de las consecuencias físicas de la ausencia de un sistema universal de referencia. (No existe el éter)

funciona solo para sistemas de referencia inerciales (No acelerados)

Postulados

* Las ecuaciones que describen leyes físicas tienen la misma forma en todos los sistemas de referencia (Inerciales)

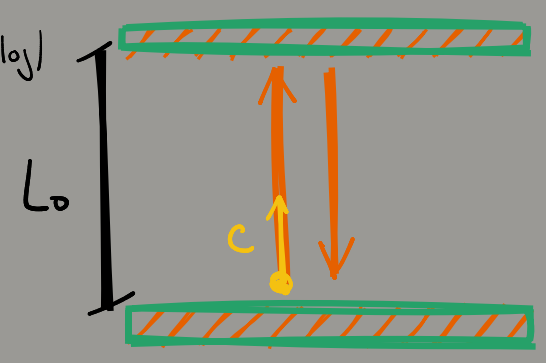
* La velocidad de la luz en el vacío tiene el mismo valor para todos los observadores. Sin importar su estado de movimiento.

Dilatación del tiempo

Consideramos un reloj simple que mide el tiempo que tarda un pulso de luz en ir y volver entre dos espejos.

Para el observador en reposo (respecto al reloj)

$$t_0 = \frac{2L_0}{c} \quad \text{(tiempo propio)}$$



Para el observador en movimiento (respecto al reloj)

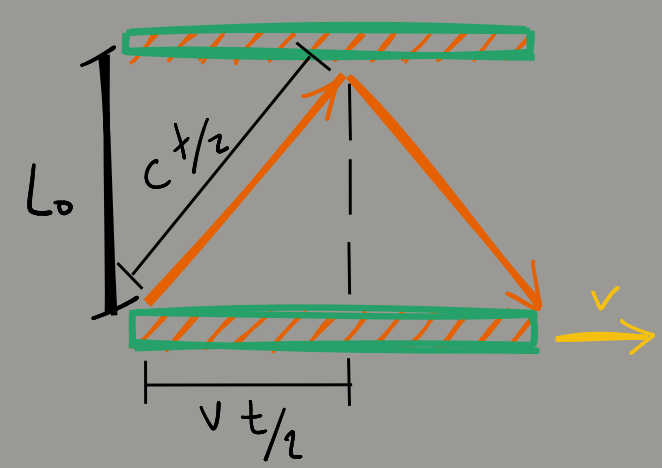
$$(c\tfrac{t}{2})^2 = (v\tfrac{t}{2})^2 + L_0^2$$

$$(ct)^2 = (vt)^2 + 2^2 L_0^2$$

$$t^2(c^2 - v^2) = 2^2 L_0^2$$

$$t = \frac{2L_0}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

$$t = \frac{2L_0}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Longrightarrow t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



Si definimos:

$$\boxed{\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}}$$

tiempo relativo

$$\boxed{t = \gamma t_0}$$

Contracción de la longitud

* Ocurre solo en la dirección del desplazamiento.

Si orientamos el reloj del punto anterior en forma paralela al desplazamiento

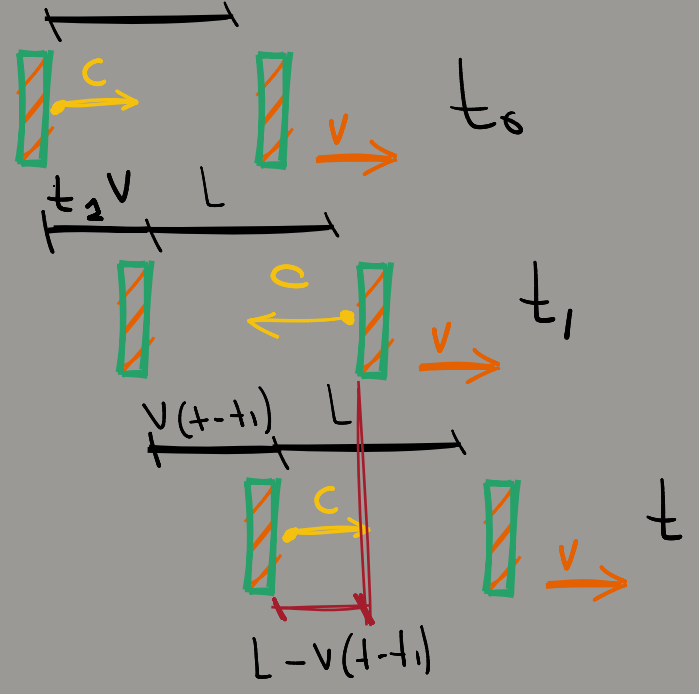
Para el observador en movimiento

L

en t_1 la luz recorre una distancia

$$ct_1 = L + t_1 v$$

$$t_1 = \frac{t}{c-v}$$



en $t-t_1$ la luz recorre:

$$c(t-t_1) = L - v(t-t_1)$$

Despejando t:

$$ct - ct_1 = L - vt + vt_1$$

$$t(c+v) = L + t_1(c+v)$$

$$t = \frac{L}{c+v} + t_1$$

$$t = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v}$$

$$t = \frac{2L}{c^2 - v^2} =$$

Pero, anteriormente definimos que $t = \frac{2L_0}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ y por el primer postulado ambas ecuaciones deben ser equivalentes.

$$\frac{2L}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{2L_0}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$L = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, L_0$$

Longitud relativa

$$\boxed{L = \frac{L_0}{\gamma}}$$

* Otra interpretación

Si un observador O' se desplaza de a a b a una velocidad v en un intervalo t_0

recorre una distancia $L = t_0 v$

mientras que el observador estacionario O ve a O' desplazarse de a a b en un tiempo $t = t_0 \gamma$, recorriendo, desde su perspectiva una longitud $L_0^* = tv$. Está claro que para el observador en movimiento la longitud fué menor, por lo que el las longitudes se contraen desde su perspectiva.

*Se define L_0 (Long. Propia) a la que mide el observador estacionario

Juntando las 3 expresiones obtenidas:

$$L_0 = tv$$

$$L_0 = \gamma t_0 v$$

$$L_0 = \gamma L$$

$$\boxed{L = \frac{L_0}{\gamma}}$$

Esta relación nos da una intuición de como el tiempo y el espacio estan intrinsecamente relacionados

Transformaciones de Lorentz

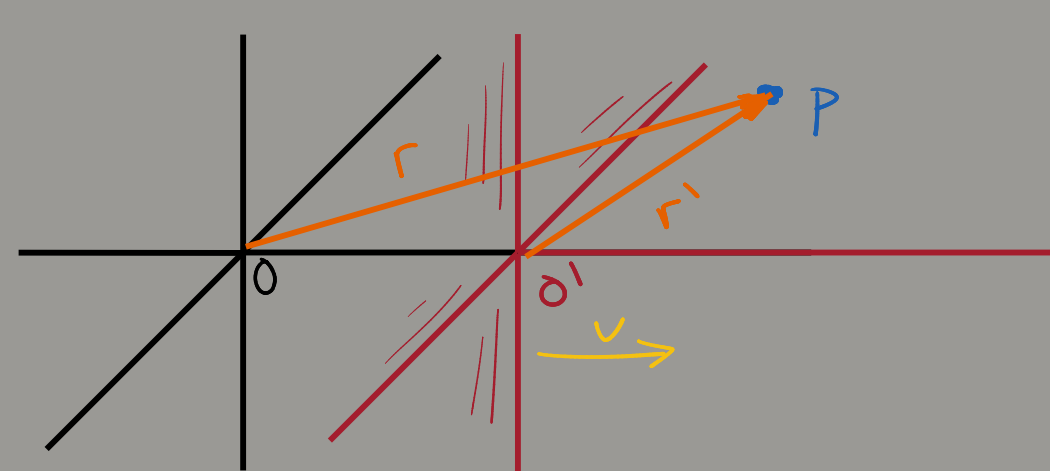
Partiendo de las trasformaciones galileanas para sistemas de referencia con movimiento relativo en el sentido del eje x.
el sistema de referencia O tiene coordenadas x, y, z, t mientras que O' x', y', z', t'

$O \rightarrow O'$

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

$O' \rightarrow O$

$$\begin{cases} x = x' + vt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$



Esta trasformación es valida para velocidades $v <<< c$

donde los fenomenos relativistas son despreciables.

Para buscar sulur esta transformación supondremos un factor de proporcionalidad K, que para $v \ll c$ $K \to 1$

$$\boxed{x' = K(x - vt)} \qquad \boxed{x = K(x' + vt')}$$

Las componentes y y z permanecen $y = y'$ $z = z'$

Para obtener la relación entre t y t' reemplazamos x' en x

$$x = K^2(x - vt) + Kvt'$$

$$t' = \frac{x - K^2(x - vt)}{Kv}$$

$$t' = \frac{x}{Kv} - \frac{K^2 x}{Kv} + \frac{K^{\cancel{2}}\cancel{v}t}{\cancel{K}\cancel{v}}$$

$$\boxed{t' = Kt + x\left(\frac{1 - K^2}{Kv}\right)}$$

Para calcular el valor de K tomamos en cuenta el segundo postulado. Para que este se cumpla si en el instante en que O y O' están superpuestos se emite un haz de luz, ambos sistemas deben ver la misma velocidad de la luz. por lo que describiran la posición del haz como

$$\boxed{x = ct} \quad y \quad \boxed{x' = ct'}$$

respectivamente.

Ahora, sustituyendo x' y t' en esta expresión

$$K(x - vt) = c\left(Kt + x\left(\frac{1 - K^2}{Kv}\right)\right)$$

y despejando x

$$Kx - Kvt = cKt + cx\left(\frac{1 - K^2}{Kv}\right)$$

$$Kx - cx\left(\frac{1 - K^2}{Kv}\right) = cKt + vKt$$

$$x = \frac{ckt + vkt}{k - c\left(\frac{1-k^2}{kv}\right)}$$

$$x = ct\left(\frac{k + v/c\,k}{k - c\left(\frac{1-k^2}{kv}\right)}\right)$$

Por analogía con: $\boxed{x = ct}$

$$\frac{k + v/c\,k}{k - c\left(\frac{1-k^2}{kv}\right)} = 1$$

$$\frac{\cancel{k}(1 + v/c)}{\cancel{k}\left(1 - \frac{c}{k^2 v} + \frac{c}{v}\right)} = 1$$

$$\cancel{1} + v/c = \cancel{1} - \frac{c}{k^2 v} + \frac{c}{v}$$

$$v/c - c/v = -\frac{c}{k^2 v}$$

$$k^2 v = -\frac{c}{v/c - c/v}$$

$$\frac{v}{c} - \frac{c}{v} = \frac{v^2 - c^2}{cv}$$

$$k^2 \cancel{v} = \frac{c^2 \cancel{v}}{-(v^2 - c^2)}$$

$$k^2 = \frac{\cancel{c^2}}{\cancel{c^2}(1 - v^2/c^2)}$$

$$x' = \gamma(x - vt) \leftarrow \boxed{k = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma}$$

$\boxed{x' = ct'}$ $\boxed{x = ct}$ $\rightarrow t = \frac{x}{c}$

$$t' = \frac{x'}{c} = \gamma\left(\frac{x}{c} - \frac{vt}{c}\right) = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

finalmente:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \end{aligned}}$$

transformación de Lorentz

$$\boxed{\begin{aligned} z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{aligned}}$$

Otra forma de llegar

Partimos de:

$$\boxed{x' = k(x - vt)} \qquad \boxed{x = k(x' + vt')}$$

reemplazamos

$$\boxed{x = ct} \quad y \quad \boxed{x' = ct'}$$

$$ct' = k(ct - vt) \qquad ct = k(ct' + vt')$$

$$ct' = kt(c - v) \qquad ct = kt'(c + v)$$

$$\boxed{t' = \frac{kt(c-v)}{c}} \rightarrow \quad c\cancel{t} = \frac{k^2\cancel{t}(c-v)(c+v)}{c}$$

$$k^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2}$$

$$\boxed{k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma}$$