Chapitre 4 : Valeurs propres - Vecteurs propres

ÉQUIPE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

UTC

novembre 2010

Chapitre IV

Valeurs propres - Vecteurs propres

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

IV.1 Vecteurs propres - Valeurs propres

IV.1.1 Valeur et vecteur propres d'un endomorphisme

Exercices :
Exercice A.1.1
Exercice A.1.2

Exemples :
Exemple B.1.1

Soit E un espace vectoriel sur un corps K, muni d'une base $\mathcal{B}$ et f un endomorphisme de E. On se propose dans ce chapitre de chercher des bases de E dans lesquelles la matrice de f soit la plus simple possible (diagonale, triangulaire), on parlera alors de diagonalisation et trigonalisation. La notion de vecteur propre permettra d'atteindre ce but.
On considère un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E;E)$ où E est un espace vectoriel sur K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie.

Définition IV.1.1. *On dit que $\lambda \in K$ est une* **valeur propre** *de u s'il existe un vecteur $\vec{y} \in E$ non nul tel que*

$$u(\vec{y}) = \lambda \vec{y} \tag{IV.1.1}$$

et $\vec{y}$ est appelé un **vecteur propre** *de u associé à la valeur propre λ.*

Si $\vec{y} = \vec{0}$, la relation $u(\vec{y}) = \lambda\vec{y}$ est vraie pour tout $\lambda \in K$. En effet, on a pour tout λ, $u(\vec{0}) = \lambda\vec{0} (= \vec{0})$. Il est donc fondamental de préciser "$\vec{y}$ non nul" car sinon tout scalaire de K serait valeur propre.
Exemple : Soit $E = F_1 \oplus F_2$ et soit p la projection sur F_1 parallèlement à F_2, alors on a montré que

$$p(\vec{x}_1) = \vec{x}_1 \ \forall \vec{x}_1 \in F_1, \ \ p(\vec{x}_2) = \vec{0} \ \forall \vec{x}_2 \in F_2,$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

d'où
- 1 est valeur propre de p et tout vecteur de F_1 est un vecteur propre associé à cette valeur propre ;
- 0 est valeur propre de p et tout vecteur de F_2 est vecteur propre associé à cette valeur propre.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

IV.1.2 Valeur et vecteur propres d'une matrice

Exercices :
Exercice A.1.3
Exercice A.1.4

Exemples :
Exemple B.1.2

Définition IV.1.2. *On dit que* $\lambda \in K$ *est une* **valeur propre** *de* $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ *s'il existe un vecteur* $Y \in \mathcal{M}_{n,1}$ *,* $Y \neq 0$ *tel que*

$$AY = \lambda Y. \tag{IV.1.2}$$

Dans ce cas on dit que Y *est un* **vecteur propre** *associé à la valeur propre* λ *et que* (λ, Y) *est un couple propre de* A*.*

Montrer en exercice que si Y est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, si $\alpha \in K, \alpha \neq 0$, alors αY est également vecteur propre de A associé à la valeur propre λ : les vecteurs propres ne sont pas uniques.
Traitons un exemple : soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La condition (IV.1.2) s'écrit $y_1 = \lambda y_1,\ y_2 = \lambda y_2,\ 0 = \lambda y_3$.
On a donc deux familles de couples propres

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

- $\lambda_1 = 1$ et $Y_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$, où α et β sont des réels quelconques,
- $\lambda_2 = 0$ et $Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$, où γ est un réel quelconque.

On peut montrer en exercice que les résultats constatés sur l'exemple précédent se généralisent :
- Les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses termes diagonaux.
- A non inversible $\Longleftrightarrow$ 0 est valeur propre de A.

Comme c'est le cas depuis le début du cours $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. Si les termes de A sont réels, puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, on peut considérer $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et chercher alors les valeurs et vecteurs propres dans $\mathbb{R}$ ou considérer $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ et chercher alors les valeurs et vecteurs propres dans $\mathbb{C}$. Lorsque l'on ne précise pas, si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ on étudiera les valeurs et vecteurs propres réels de A.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

IV.1.3 Lien entre les valeurs propres d'une matrice et celles d'un endomorphisme

Cours :
Valeur et vecteur propres d'une matrice

La définition IV.1.2 permet de caractériser les valeurs propres de A indépendamment des valeurs propres d'une application linéaire, cependant,
- si la matrice A est associée à l'application linéaire u de E dans E lorsque E est muni d'une base $\mathcal{E}$,
- si $\vec{y}$ est un vecteur propre de u : $u(\vec{y}) = \lambda\vec{y}$ ($\vec{y} \neq \vec{0}$),
- si l'on note comme d'habitude Y le vecteur colonne des composantes de $\vec{y}$ dans la base $\mathcal{E}$,

alors on a : $AY = \lambda Y$ ($Y \neq 0$).
En effet AY est le vecteur colonne des composantes de $u(\vec{y})$, λY celui des composantes de $\lambda\vec{y}$.
On voit donc que les valeurs propres de A et celles de u sont les mêmes et que, si $\vec{y}$ est vecteur propre de u, alors Y est vecteur propre de A.

Si l'on reprend l'exemple du paragraphe référencé, le résultat était prévisible car
- si E est un espace vectoriel muni d'une base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$,
- si π est le plan vectoriel engendré par $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$,
- si D est la droite vectorielle engendrée par $\{\vec{e}_3\}$,

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

– si u est la projection sur π parallèlement à D,
alors la matrice de u est A.

Or, comme on l'a vu dans l'exercice A.1.2 les vecteurs du plan sont des vecteurs propres de u associés à la valeur propre 1, les vecteurs de la droite sont des vecteurs propres de u associés à la valeur propre 0. On retrouve bien les mêmes valeurs propres et la correspondance entre les vecteurs propres de A et u :

– à Y_1 correspond $\vec{y}_1 = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$; $\vec{y}_1$ est bien un vecteur du plan π,
– à Y_2 correspond $\vec{y}_2 = \gamma\vec{e}_3$; $\vec{y}_2$ est bien un vecteur de la droite D.

IV.1.4 Polynôme caractéristique

Exercices :
Exercice A.1.5

Cours :
Valeur et vecteur propres d'une matrice

On a vu dans l'exemple B.1.2 que le calcul des valeurs propres se fait en cherchant les valeurs de λ qui annulent le déterminant de la matrice $A - \lambda I$. D'une façon plus générale on peut définir :

Définition IV.1.3. *On appelle* **polynôme caractéristique** *de A le polynôme*

$$\Pi_A(s) = \det\,(sI - A).$$

Le polynôme caractéristique de A est de degré n et plus précisement il est de la forme :

$$\Pi_A(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n.$$

En effet $sI - A$ est la matrice

$$sI - A = \begin{pmatrix} s - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1i} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s - a_{22} & \ldots & -a_{2i} & \ldots & -a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \ldots & s - a_{ii} & \ldots & -a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & -a_{ni} & \ldots & s - a_{nn} \end{pmatrix}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

et donc il est clair que le terme de plus haut degré du déterminant de $sI - A$ est s^n. Par ailleurs

$$\alpha_n = \Pi_A(0) = \text{det}\ (-A) = (-1)^n \text{det}\ (A). \tag{IV.1.3}$$

Le calcul des valeurs propres se fait à l'aide de la proposition suivante :

Proposition IV.1.1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que λ soit valeur propre de A est qu'elle soit racine du polynôme caractéristique, c'est à dire :*

$$\text{det}\ (\lambda I - A) = 0. \tag{IV.1.4}$$

Démonstration – C'est immédiat, en effet si l'on reprend la relation (IV.1.2) on a :

$$\lambda \text{ est valeur propre de} A \iff \exists Y \neq 0 \mid (\lambda I - A)Y = 0$$

$$\iff \lambda I - A \text{ n'est pas inversible} \iff \text{det}\ (\lambda I - A) = 0.$$

En effet le système $(\lambda I - A)Y = 0$ a une solution non nulle (donc n'a pas de solution unique puisque 0 est toujours solution) si et seulement si la matrice du système n'est pas inversible.

Définition IV.1.4. *On appelle* **multiplicité** *de la valeur propre λ_i la multiplicité de la racine correspondante du polynôme caractéristique.*

Pratiquement :
Pour déterminer les valeurs propres d'une matrice, on calcule le polynôme caractéristique

$$\Pi_A(s) = \text{det}\ (sI - A).$$

Ses racines λ_i sont les valeurs propres de la matrice. Il est équivalent de chercher les racines du polynôme $\det(A - sI)$. Pourquoi ?
La recherche des vecteurs propres se fait en résolvant alors le système $AY_i = \lambda_i Y_i$:
Exemple : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

alors

$$sI - A = \begin{pmatrix} s-5 & -2 \\ -2 & s-2 \end{pmatrix}$$

donc
$\pi_A(s) = \det(sI - A) = (s-5)(s-2) - 4 = s^2 - 7s + 6 = (s-1)(s-6)$.
On obtient donc 2 valeurs propres réelles $\lambda = 1$ et $\lambda = 6$, on détermine les vecteurs propres associés :

- $\lambda = 1$,
$$\left\{ \begin{array}{l} (A - \lambda I)Y = 0 \\ Y \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4y_1 + 2y_2 = 0 \\ 2y_1 + y_2 = 0 \\ (y_1, y_2) \neq (0,0) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_2 = -2y_1 \\ (y_1, y_2) \neq (0,0) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \alpha \in \mathbb{R}^* \end{array} \right.$$
- $\lambda = 6$,
$$\left\{ \begin{array}{l} (A - \lambda I)Y = 0 \\ Y \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -y_1 + 2y_2 = 0 \\ 2y_1 - 4y_2 = 0 \\ (y_1, y_2) \neq (0,0) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 2y_2 \\ (y_1, y_2) \neq (0,0) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Y = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \alpha \in \mathbb{R}^* \end{array} \right.$$

On constate sur cet exemple toutes les propriétés qui ont été énoncées : π_A est un polynôme de degré 2, il existe toujours une infinité de vecteurs propres associés à une valeur propre donnée . Si votre calcul de vecteurs propres vous conduisait à la seule

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

solution $y_1 = y_2 = 0$, ce ne serait pas possible, vous auriez commis une erreur de calcul auparavant.

IV.1.5 Valeurs propres et matrices particulières

Exercices :
Exercice A.1.6
Exercice A.1.7
Exercice A.1.8

Proposition IV.1.2. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est une matrice triangulaire ses valeurs propres sont ses termes diagonaux.*

Cette propriété est à démontrer en exercice.

Proposition IV.1.3.

1. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, alors :*
   $\{\lambda$ *valeur propre de* $A\} \Longleftrightarrow \{\bar{\lambda}$ *valeur propre de* $\bar{A}\}$ *(avec la même multiplicité).*
2. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, alors :*
   $\{\lambda$ *valeur propre de* $A\} \Longleftrightarrow \{\bar{\lambda}$ *valeur propre de* $A\}$ *(avec la même multiplicité).*

Cette proposition est à démontrer en exercice.

Proposition IV.1.4. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, alors A et A^T ont les mêmes polynômes caractéristiques et donc les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration – Ces propriétés se vérifient facilement. Ainsi pour la première, puisque l'on a vu dans le chapitre sur les déterminants que $\det B = \det B^T$ pour toute matrice B, on a donc

$$\det(sI - A) = \det(sI - A)^T = \det(sI - A^T).$$

Les deux matrices A et A^T, ayant les mêmes polynômes caractéristiques, ont les mêmes valeurs propres.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

IV.1.6 Valeurs propres et matrices semblables

Exercices :
Exercice A.1.9

Il est préférable de commencer par traiter l'exercice avant de voir sa généralisation.

Proposition IV.1.5. *Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique et en particulier les mêmes valeurs propres.*

Démonstration – Si A et B sont des matrices semblables, alors il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$. Or

$$sI - B = sI - P^{-1}AP = sP^{-1}P - P^{-1}AP = P^{-1}(sI - A)P$$

et donc

$$\det(sI - B) = \det(P^{-1}(sI - A)P) = \det P^{-1} \det(sI - A) \det(P) = \det(sI - A),$$

c'est-à-dire $\Pi_A = \Pi_B$.
Attention ! Si A et B sont semblables elles ont bien les mêmes valeurs propres mais pas les mêmes vecteurs propres. En effet si (λ, Y) est un couple propre de A, on a

$$AY = \lambda Y \tag{IV.1.5}$$

or, comme $A = PBP^{-1}$, il résulte de (IV.1.5) que

$$PBP^{-1}Y = \lambda Y \tag{IV.1.6}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

soit en multipliant (IV.1.6) à gauche par P^{-1}, que

$$BP^{-1}Y = \lambda P^{-1}Y \tag{IV.1.7}$$

et donc que $Z = P^{-1}Y$ est vecteur propre de B associé à la valeur propre λ (ce qui, au passage, constitue une autre démonstration de la proposition précédente).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

IV.2 Matrices à coefficients complexes

IV.2.1 Existence et multiplicité des valeurs propres

Exercices :
Exercice A.1.10
Exercice A.1.11

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au cas le plus général des matrices à coefficients complexes. Le cas particulier des matrices à coefficients réels entre dans cette catégorie, car comme on l'a déja fait remarquer $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, par contre les valeurs propres et vecteurs propres de ces matrices ne sont pas forcément réels (revoir l'exemple B.1.2 de la rotation).
Les valeurs propres de la matrice A sont les racines du polynôme caractéristique de A.
Dans le cas où $K = \mathbb{C}$ l'existence et le nombre de valeurs propres d'une matrice résulte du théorème de d'Alembert, que vous avez vu en MT21 et dont nous rappelons l'énoncé :

Théorème de d'Alembert - *Un polynôme de degré n à coefficients réels ou complexes admet n racines dans $\mathbb{C}$, chacune de ces racines étant comptée avec sa multiplicité.*

Le théorème de d'Alembert implique que le polynôme $\Pi_A(s)$ peut s'écrire sous la forme

$$\Pi_A(s) = \prod_{i=1}^{p} (s - \lambda_i)^{r_i}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont les racines du polynôme caractéristique, avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$ et où r_i est, par définition, la multiplicité de la racine λ_i, ce qui implique que $\sum_{i=1}^{p} r_i = n$.

On a donc la proposition suivante :

Proposition IV.2.1. *Si A est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ qui admet p valeurs propres complexes distinctes notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, si l'on note r_i la multiplicité de λ_i, alors*

$$\sum_{i=1}^{p} r_i = n.$$

IV.2.2 Valeurs propres, trace et déterminant

Exercices :
Exercice A.1.12

On va maintenant introduire une autre façon d'énumérer les valeurs propres. Prenons un exemple, supposons que la matrice $A \in \mathcal{M}_{7,7}(\mathbb{C})$ admette 3 valeurs propres distinctes à savoir λ_1 valeur propre double, λ_2 valeur propre simple, λ_3 valeur propre de multiplicité 4. On a donc
$n = 7, p = 3, r_1 = 2, r_2 = 1, r_3 = 4$. On va définir

$$\mu_1 = \mu_2 = \lambda_1, \mu_3 = \lambda_2, \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = \mu_7 = \lambda_3.$$

On dira que $\{\mu_i, i = 1, \ldots, 7\}$ sont les 7 valeurs propres distinctes ou confondues de A.
On a bien sûr $\prod_{i=1}^{p}(s - \lambda_i)^{r_i} = \prod_{i=1}^{n}(s - \mu_i)$.
Avec la notation précédente la proposition IV.2.1 peut s'énoncer :
Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ admet n valeurs propres complexes $\{\mu_i, i = 1, \ldots, n\}$ distinctes ou confondues.

La relation entre les coefficients d'un polynôme et ses racines donne le résultat suivant :

Proposition IV.2.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ et soient $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ ses valeurs propres complexes (distinctes ou confondues), alors*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

– *la trace de A est égale à la somme de ses valeurs propres :*

$$\text{trace}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i,$$

– *le déterminant de A est égal au produit de ses valeurs propres :*

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i.$$

Démonstration – Le polynôme caractéristique s'écrit soit à partir de ses coefficients, soit à partir de ses racines $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, éventuellement confondues, ce qui donne :

$$\det(sI - A) = (s - \mu_1)(s - \mu_2)\ldots(s - \mu_n). \quad \text{(IV.2.1)}$$

Le coefficient de s^{n-1} dans le $\det(sI - A)$ est $-\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ car on peut voir que seul le produit des éléments de la diagonale de $sI - A$ donne un terme en s^{n-1}. D'autre part le coefficient de s^{n-1} du membre de droite est évidemment $-\sum_{i=1}^{n} \mu_i$.
Par ailleurs, on a vu dans l'équation (IV.1.3) que $\Pi_A(0) = (-1)^n \det(A)$ et d'autre part le second membre de (IV.2.1) donne $\Pi_A(0) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \mu_i$, ce qui démontre la deuxième propriété.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

IV.3 Sous-espace propre

IV.3.1 Définition du sous-espace propre

Exercices :
Exercice A.1.13
Exercice A.1.14

On a vu qu'à une valeur propre on peut associer une infinité de vecteurs propres. Ce résultat peut être précisé de la façon suivante :

Proposition IV.3.1. *Soit λ une valeur propre de A, si on note V_λ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{n1}$ défini par*

$$V_\lambda = \{Y \in \mathcal{M}_{n1} \mid AY = \lambda Y\},$$

alors V_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n1}$

On remarque que V_λ est composé des vecteurs propres associés à λ et du vecteur nul, d'où la définition suivante :

Définition IV.3.1. *Soit λ une valeur propre de A, on appelle* **sous-espace propre** *associé à λ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n1}$, noté V_λ, défini par :*

$$V_\lambda = \{Y \in \mathcal{M}_{n1} \mid AY = \lambda Y\} = \text{Ker } (A - \lambda I).$$

On aurait pu de façon analogue définir le sous-espace propre associé à la valeur propre λ d'un endomorphisme, on obtiendrait alors un sous-espace vectoriel de E.

Exemple : Soit la matrice $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de l'exercice A.1.5, alors on a

$$V_1 = \textbf{vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ et } V_2 = \textbf{vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

IV.3.2 Somme directe des sous espaces propres

Documents :
Document C.1.1

Proposition IV.3.2. *Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ p valeurs propres distinctes d'une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$ et soient $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_p\}$ p vecteurs propres associés ($AY_i = \lambda_i Y_i$), alors la famille $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_p\}$ est libre.*

Démonstration – Elle se fait par récurrence sur p.

- $r = 1$, il est évident que la famille $\{Y_1\}$ est libre puisque un vecteur propre est non nul par définition.
- Supposons la famille $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_{p-1}\}$ libre.
  Dans ce cas, on a montré dans le chapitre 1 que si $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_p\}$ est liée, alors Y_p est combinaison linéaire de $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_{p-1}\}$, il suffit donc de montrer que Y_p n'est pas combinaison linéaire de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{p-1}$ pour conclure que $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_p\}$ est libre.
  Raisonnons par l'absurde et supposons que

$$Y_p = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i Y_i$$

  alors en appliquant A, on obtient puisque les Y_i sont des vecteurs propres :

$$AY_p = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i AY_i \Longleftrightarrow \lambda_p \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i Y_i = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i \lambda_i Y_i \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_p) Y_i = 0.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Or la famille $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_{p-1}\}$ est libre donc

$$\alpha_i(\lambda_i - \lambda_p) = 0 \ \ \forall i = 1, \ldots, p-1.$$

Puisque les valeurs propres sont toutes distinctes, ces égalités ne peuvent être vérifiées que si $\alpha_i = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, p-1$. On obtient alors $Y_p = 0$, ce qui impossible puisque Y_p est un vecteur propre. La famille $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_p\}$ est donc libre.

Proposition IV.3.3. *Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres distinctes d'une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$ alors les sous-espaces vectoriels $\{V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \ldots, V_{\lambda_p}\}$ sont en somme directe.*

La démonstration de la proposition précédente est proposée en document.

IV.3.3 Multiplicité d'une valeur propre et dimension du sous espace propre

Exercices :
Exercice A.1.15

Documents :
Document C.1.2

Le résultat suivant, très important, est admis :

Proposition IV.3.4. *Si r_i est la multiplicité de λ_i et si d_i est la dimension de V_{λ_i}, alors*

$$d_i \leq r_i.$$

Vous pouvez lire la démonstration de cette proposition en document.

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dont 1 est, de manière évidente, valeur propre double, donc $r_1 = 2$.
Après calcul, les vecteurs du sous-espace propre V_1 sont

$$Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

donc le sous-espace propre est de dimension $d_1 = 1$, et $d_1 < r_1$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Par contre, la matrice identité

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a pour valeur propre 1 de multiplicité 2 et tout vecteur est vecteur propre ($IY = Y$!), donc la dimension du sous-espace propre est 2. Ici, on a donc $d_1 = r_1$.

IV.4 Réduction d'une matrice

IV.4.1 Définition de la diagonalisation

Exercices :
Exercice A.1.16

Définition IV.4.1. *On dit que la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est diagonalisable dans K s'il existe une matrice $D \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ diagonale et une matrice $P \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ ou ce qui est équivalent $D = P^{-1}AP$.*

Les matrices A et D étant semblables, elles ont les mêmes valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$: ce sont les éléments de la diagonale de D. D'autre part

$$D = P^{-1}AP \iff AP = PD,$$

ce qui est équivalent à (le montrer en exercice) $AY_i = \lambda_i Y_i$ (où $Y_1, \ldots, Y_n$ sont les colonnes de P). Donc la diagonale de D est constituée des valeurs propres de A et les colonnes de P sont les vecteurs propres correspondants.

Attention ! Une matrice peut être diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Par exemple si A est la matrice de la rotation d'angle $\theta \neq k\pi$ dans le plan, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, mais diagonalisable dans $\mathbb{C}$, puisque ses valeurs propres sont complexes non réelles et distinctes.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

IV.4.2 Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation

Documents :
Document C.1.3

Cours :
Diagonalisation - définition

Théorème IV.4.1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable dans K est qu'il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ constituée de vecteurs propres de A, c'est-à-dire une base $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ telle que $AY_i = \lambda_i Y_i$, $\lambda_i \in K$.*

Démonstration –
Dans toute cette démonstration les matrices ou vecteurs sont à coefficients dans K.
A est diagonalisable
$\Leftrightarrow$ il existe D diagonale, il existe P inversible qui vérifient $D = P^{-1}AP$
$\Leftrightarrow$ il existe D diagonale, il existe P inversible qui vérifient $PD = AP$
$\Leftrightarrow$ il existe une base $\{Y_1 \ldots Y_n\}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ dont les vecteurs vérifient $AY_i = \lambda_i Y_i$
$\Leftrightarrow$ il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ constituée de vecteurs propres de A.

Bien-sûr, dans la démonstration précédente, les Y_i sont les colonnes de P et les λ_i sont les termes diagonaux de D. On a déjà utilisé cette notation dans le paragraphe Diagonalisation-définition

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Théorème IV.4.2. *Une condition nécessaire et suffisante pour que $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ soit diagonalisable dans K est qu'elle admette p valeurs propres distinctes dans K vérifiant*

$$\sum_{i=1}^{p} r_i = n \textit{ et } d_i = r_i \ \forall 1 \leq i \leq p$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\sum_{i=1}^{p} d_i = n$$

(r_i est la multiplicité de λ, d_i est la dimension du sous-espace propre associé à λ_i).

On peut remarquer que si $K = \mathbb{C}$ la condition $\sum_{i=1}^{p} r_i = n$ est toujours vérifiée.

La démonstration de ce théorème est proposée en document.

Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

IV.4.3 Condition suffisante de diagonalisation

Exercices :
Exercice A.1.17

Proposition IV.4.1. *Une condition suffisante pour que la matrice A appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$ soit diagonalisable dans K, est qu'elle admette n valeurs propres dans K toutes distinctes.*

La démonstration est immédiate, dans ce cas on a en effet

$$\sum_{i=1}^{p} r_i = n \text{ et } d_i = r_i = 1,$$

on peut donc appliquer le théorème précédent.

Cette condition suffisante n'est absolument pas nécessaire. En effet la matrice identité I a pour unique valeur propre 1, de multiplicité n, et pourtant elle est diagonale (et donc diagonalisable !).

IV.4.4 Trigonalisation d'une matrice

Documents :	Cours :
Document C.1.4	Multiplicité d'une valeur propre et dimension du sous espace propre

Il est clair que toute matrice n'est pas diagonalisable.
Par exemple, si la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

était diagonalisable alors elle serait semblable à la matrice unité puisque ses valeurs propres sont les éléments de sa diagonale et on aurait $A = PIP^{-1} = I$!
Autre démonstration : rappelons que, dans le paragraphe référencé, on a montré, pour cette matrice, que $d_1 < r_1$ donc la condition nécessaire et suffisante de diagonalisation n'est pas vérifiée et la matrice A n'est pas diagonalisable !

Si on ne peut pas diagonaliser une matrice, on peut chercher une autre forme de matrice semblable, par exemple une matrice T triangulaire supérieure.
On rappelle que si T est une matrice triangulaire supérieure semblable à A, les valeurs propres de T donc de A sont les éléments de la diagonale de T.

Théorème IV.4.3. *Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) $T \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

La démonstration de ce théorème est donnée en document.

La trigonalisation (c'est à dire la mise sous forme triangulaire) d'une matrice A nécessite la connaissance de toutes les valeurs propres de A, ce qui est coûteux sur le plan numérique et c'est donc une opération que l'on évite de faire effectivement. Mais, sur le plan mathématique, cela est très important comme on le verra plus tard.

IV.4.5 Applications de la diagonalisation

Parmi les applications de la réduction de matrices, on peut en citer deux :
Calcul de la puissance d'une matrice
Soit $A \in M_{n,n}(K)$ supposée diagonalisable. Il existe alors une matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. On peut montrer facilement que

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

avec

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Résolution d'un système de suites récurrentes
Nous allons illustrer cela par l'exemple suivant :
Soient u_n et v_n deux suites réelles telles que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = a_{11}u_n + a_{12}v_n, n \in N \\ v_{n+1} = a_{21}u_n + a_{22}v_n, n \in N \end{cases}$$

On pose

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas le système précédent s'écrit :

$$X_{n+1} = AX_n$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$X_n = A^n X_0$$

IV.5 Compléments

IV.5.1 Théorème de Cayley-Hamilton

Exercices :
Exercice A.1.18
Exercice A.1.19

Préliminaire : Etant donné une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ on peut définir ses puissances successives A^2, A^3, $\ldots$ et donc associer à tout polynôme à coefficients dans K :

$$\pi(s) = s^n + c_1 s^{n-1} + c_2 s^{n-2} + \ldots + c_{n-1} s + c_n,$$

la matrice carrée

$$\pi(A) = A^n + c_1 A^{n-1} + c_2 A^{n-2} + \ldots + c_{n-1} A + c_n I.$$

On remarque que la matrice $\pi(A)$ commute avec A, puisque A commute avec A^k.

Théorème IV.5.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ et π_A son polynôme caractéristique noté :*

$$\pi_A(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$$

alors

$$\pi_A(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I = 0.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Remarque : Nous n'allons pas donner la démonstration générale de ce théorème, mais on peut remarquer qu'une des conséquences de ce théorème est que :

$$A^n = -\alpha_1 A^{n-1} - \ldots - \alpha_{n-1} A - \alpha_n I$$

et donc que A^k peut s'écrire comme une combinaison linéaire de I, A, ... A^{n-1}, dès que $k \geq n$.

Démonstration (cas A diagonalisable).- On suppose donc qu'il existe une base $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ constituée de vecteurs propres de A. Si l'on montre que pour $i = 1, \ldots, n$ on a :

$$(A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots \alpha_{n-1} A + \alpha_n I)Y_i = 0 \tag{IV.5.1}$$

alors l'exercice A.1.18 montre que $A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots \alpha_{n-1} A + \alpha_n I = 0$, ce qui établit le théorème.

Soit (λ_i, Y_i) un couple propre de A, on a donc pour tout $k = 1, 2, \ldots$

$$A^k Y_i = A^{k-1}(AY_i) = \lambda_i A^{k-1} Y_i = \lambda_i^2 A^{k-2} Y_i = \ldots = \lambda_i^k Y_i.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
& (A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots \alpha_{n-1} A + \alpha_n I)Y_i \\
= \quad & A^n Y_i + \alpha_1 A^{n-1} Y_i + \ldots \alpha_{n-1} A Y_i + \alpha_n Y_i \\
= \quad & \lambda_i^n Y_i + \alpha_1 \lambda_i^{n-1} Y_i + \ldots \alpha_{n-1} \lambda_i Y_i + \alpha_n Y_i \\
= \quad & (\lambda_i^n + \alpha_1 \lambda_i^{n-1} + \ldots \alpha_{n-1} \lambda_i + \alpha_n) Y_i \\
= \quad & \pi_A(\lambda_i) Y_i = 0
\end{aligned}$$

puisque λ_i est racine du polynôme caractéristique π_A, on vient donc d'établir la relation IV.5.1 et le théorème est démontré au moins dans ce cas particulier.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est

$$\pi_A(s) = (s-2)^2 + 1 = s^2 - 4s + 5.$$

Calculons A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a bien :

$$\pi_A(A) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Le théorème de Cayley-Hamilton permet aussi de calculer l'inverse d'une matrice. Dans l'exemple précédent, puisque

$$A^2 - 4A + 5I = 0,$$

alors

$$\frac{1}{5} A(-A + 4I) = I$$

et donc

$$A^{-1} = \frac{1}{5}(-A + 4I).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

IV.5.2 Formes de Jordan

Cours :
Trigonalisation d'une matrice

On a démontré dans le paragraphe référencé que toute matrice carrée A était semblable à une matrice triangulaire. En fait on peut même obtenir une forme triangulaire supérieure particulière appelée **forme de Jordan** de la matrice A.
On appelle **bloc de Jordan** associé à la valeur propre λ de A, une matrice carrée J_λ de la forme :

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

la matrice triangulaire supérieure J_λ (qui a une taille qui dépend de la valeur propre λ de A) est telle que :
– tous ses éléments diagonaux sont égaux et valent λ,
– seule la première "sur-diagonale" est non-nulle et ses éléments valent 1.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Il est alors possible de montrer que A est semblable à une matrice J de la forme :

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & J_{\lambda_m} \end{pmatrix}.$$

La matrice J est donc une matrice "diagonale par blocs" où les blocs de Jordan J_{λ_k} ont une taille que l'on peut déterminer théoriquement, les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ étant **distinctes ou non** (évidemment si v_k est la dimension de la matrice J_{λ_k}, on a $\sum_{k=1}^{m} v_k = n$). Cela veut dire qu'à une valeur propre on peut associer **plusieurs** blocs de Jordan de tailles diverses. Si la valeur λ est simple alors le bloc de Jordan associé est réduit à une matrice 1×1 qui est donc la valeur propre elle-même !

Exemple de forme de Jordan : $n = 14$, $m = 7$, avec 5 valeurs propres distinctes, λ_1 de multiplicité 4, λ_2 de multiplicité 5, λ_3 de multiplicité 2, λ_4 de multiplicité 2, λ_5 simple, on obtient alors la matrice suivante (noter qu'il y a des blocs d'ordre 1 même pour des

Formes de Jordan

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

valeurs propres multiples).

$$\begin{pmatrix}
\lambda_1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & & & & & & & & \\
\mathbf{0} & \lambda_1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & & & & & & & & & & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_1 & \mathbf{1} & & & & & & & & & & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_1 & & & & & & & & & & \\
 & & & & \lambda_2 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & & & & & & & \\
 & & & & \mathbf{0} & \lambda_2 & \mathbf{1} & & & & & & & \\
 & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_2 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \lambda_2 & \mathbf{1} & & & & & \\
 & & & & & & & \mathbf{0} & \lambda_2 & & & & & \\
 & & & & & & & & & \lambda_3 & \mathbf{1} & & & \\
 & & & & & & & & & \mathbf{0} & \lambda_3 & & & \\
 & & & & & & & & & & & \lambda_4 & & \\
 & & & & & & & & & & & & \lambda_4 & \\
 & & & & & & & & & & & & & \lambda_5
\end{pmatrix}$$

Pour plus de lisibilité, les termes nuls ne sont pas indiqués.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices du chapitre IV

Exercice A.1.1 Ch4-Exercice1

Quels sont les vecteurs propres de l'application identité ? Préciser les valeurs propres associées.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2 Ch4-Exercice2

On demande de répondre à cet exercice de façon intuitive , on verra plus loin comment l'aborder de façon plus systématique :

- Si u est la projection de l'espace sur un plan parallèlement à une droite, citer des vecteurs propres de u et les valeurs propres associées.
- Si u est la rotation du plan d'angle α :
  - quand $\alpha = \pi$, citer des vecteurs du plan qui soient vecteurs propres de u, préciser les valeurs propres associées,
  - quand $\alpha = \frac{\pi}{3}$, pouvez-vous citer des vecteurs du plan qui soient vecteurs propres de u ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.3 Ch4-Exercice3

Montrer que si Y, est vecteur propre de A, alors αY est vecteur propre de A (pour tout $\alpha \in K$ non nul).

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4 Ch4-Exercice4

1. Soit I la matrice identité de $\mathcal{M}_{n,n}$, déterminer ses vecteurs propres et ses valeurs propres.
2. – Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3.5 & 0 & 0 \\ 0 & 5.2 & 0 \\ 0 & 0 & 6.9 \end{pmatrix}.$$

   – Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice diagonale.
3. Montrer que : A non inversible $\Longleftrightarrow 0$ est valeur propre de A.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.5 Ch4-Exercice5

– Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres réels ($K = \mathbb{R}$) des matrices :
$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,
$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

– Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres complexes ($K = \mathbb{C}$) des matrices précédentes puis de la matrice :$A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i+1 & 2i \end{pmatrix}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.6 Ch4-Exercice6

Démontrer la propriété suivante : si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est une matrice triangulaire ses valeurs propres sont ses termes diagonaux.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.7 Ch4-Exercice7

Démontrer les propriétés suivantes : si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$:

1. $\{\lambda$ valeur propre de $A\} \Longleftrightarrow \{\bar{\lambda}$ valeur propre de $\bar{A}\}$ (avec la même multiplicité).
2. Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, alors :

$$\{\lambda \text{ valeur propre de } A\} \Longleftrightarrow \{\bar{\lambda} \text{ valeur propre de } A \text{ (avec la même multiplicité) }\}.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.8 Ch4-Exercice8

Les matrices A et A^T ont-elles les mêmes vecteurs propres ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.9 Ch4-Exercice9

Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. On peut vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. On définit $B = P^{-1}AP$, calculer B, ses valeurs propres et ses vecteurs propres, comparer avec ceux de A. Qu'en pensez-vous ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.10 Ch4-Exercice10

Vérifier sur les matrices de l'exercice A.1.5 que $\sum_{i=1}^{p} r_i = n$ (notations de la proposition IV.2.1).

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.11 Ch4-Exercice11

Pour chacune des affirmations suivantes répondre par VRAI ou FAUX en justifiant votre réponse à l'aide de démonstrations, d'exemples ou de contre-exemples selon le cas.

1. Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ admet 2 valeurs propres réelles.
2. Il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ qui admettent 2 valeurs propres réelles.
3. Il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$ qui admettent 2 valeurs propres réelles.
4. Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ admet 2 valeurs propres complexes distinctes ou non.
5. Il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ qui admettent 1 valeur propre réelle et 1 valeur propre complexe non réelle.
6. Il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ qui admettent 1 seule valeur propre réelle simple.
7. Il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ qui n'admettent pas de valeur propre réelle.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.12 Ch4-Exercice12

Vérifier sur les matrices de l'exercice A.1.5 que la trace d'une matrice est la somme de ses valeurs propres et que son déterminant est le produit de ses valeurs propres.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.13 Ch4-Exercice13

On définit : :

$$V_\lambda = \{Y \in \mathcal{M}_{n1} \mid AY = \lambda Y\}.$$

montrer que : V_λ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n1}$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.14 Ch4-Exercice14

Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Reprendre les calculs qui ont déja été faits dans le paragraphe "Valeur et vecteur propres d'une matrice" pour donner une base de V_0 et V_1.

retour au cours

Solution

Exercice A.1.15 Ch4-Exercice15

Reprendre les matrices de l'exercice A.1.5 dans le cas $K = \mathbb{C}$. Pour chacune d'elles, donner la multiplicité r_i de chacune de ses valeurs propres λ_i et préciser la dimension d_i du sous espace propre V_{λ_i}. Vérifier l'inégalité entre r_i et d_i.

retour au cours

Solution

Exercice A.1.16 Ch4-Exercice16

Montrer que si $A = PDP^{-1}$ où la matrice D est diagonale, alors les colonnes de P sont vecteurs propres de A, les éléments de la diagonale de D sont les valeurs propres de A.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.17 Ch4-Exercice17

Les matrices de l'exercice A.1.5 sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$?
Si oui, donner une matrice D diagonale et une matrice P régulière telle que $D = P^{-1}AP$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.18 Ch4-Exercice18

Soit $B \in \mathcal{M}_{n,n}$ et soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ (vecteur non nul), est-ce que $BX = 0 \Longrightarrow B = 0$?
Montrer que si $\{X_1, \ldots, X_n\}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}$, alors

$$BX_i = 0, \forall i = 1, \ldots, n \implies B = 0.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.19 Ch4-Exercice19

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ telle que

$$\pi_A(s) = s^n - 1$$

Donner A^{-1} en fonction de A.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exercices de TD

Exercice A.2.1 TD4-Exercice1

1. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres réels, puis complexes, des matrices :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer, suivant la valeur de a, les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice :

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -(4+a) & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de :

$$A_5 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

réponses :

1. (a) $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, $Y_0 = \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, Y_1 = \beta \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Y_2 = \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.1
TD4-Exercice1

(b) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$, $Y_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, Y_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

(c) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1 + j, \lambda_3 = -1 + j^2,$

$$Y_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, Y_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}, Y_3 = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}.$$

2. $\lambda = 1$.

– Si $a = 0$, $Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

– Si $a \neq 0$, $Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 3 Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.2 TD4-Exercice2

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & -\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

1. Quel est le polynôme caractéristique de la matrice A ?
2. Si λ est valeur propre de A, déterminer les vecteurs propres correspondants.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.3 TD4-Exercice3

- Si (λ, Y) est un couple propre de la matrice A, donner un couple propre de la matrice $A + \alpha I$.
- Si (λ, Y) est un couple propre de la matrice A, donner un couple propre de la matrice A^2.

Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.4 TD4-Exercice4

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

1. (a) Montrer que si $A^2 + I = 0$, alors A n'admet aucune valeur propre réelle.

   (b) Donner une matrice $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = -I$.

2. Montrer qu'il n'existe aucune matrice appartenant à $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I = 0$.

Question 1a Aide 1 Aide 2
Question 1b Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.5 TD4-Exercice5

1. Soient 2 matrices A et B appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$.
   (a) Montrer que si 0 est valeur propre de AB alors 0 est valeur propre de BA.
   (b) Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.
2. Soient 2 matrices A et B appartenant respectivement à $\mathcal{M}_{n,m}$ et $\mathcal{M}_{m,n}$. Soit λ une valeur propre non nulle de AB. On note V_λ le sous espace propre correspondant.
   (a) Montrer que λ est valeur propre de BA. On note W_λ le sous-espace propre correspondant.
   (b) Soit $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_p\}$ une base de V_λ, montrer que $\{BY_1, BY_2, \ldots, BY_p\}$ est une famille libre.
   (c) En déduire que $\dim V_\lambda \leq \dim W_\lambda$.
   (d) En déduire que $\dim V_\lambda = \dim W_\lambda$.
3. On définit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = XY^T$. Calculer X^TY. Calculer les valeurs et vecteurs propres de C. Les résultats obtenus dans cette question peuvent être généralisés, c'est ce que l'on verra à la question suivante.
4. Soient 2 vecteurs colonnes non nuls X et Y appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}$ avec $n > 1$.
   (a) Montrer que 0 est valeur propre de XY^T. Quelle est la dimension de V_0 ? En déduire une inégalité sur la multiplicité de la valeur propre 0.
   (b) On suppose que $X^TY \neq 0$, en déduire une autre valeur propre de XY^T.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

5. Soit A une matrice de rang 1 appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$ avec $n > 1$.
   (a) On suppose que la trace de A est différente de 0, déterminer toutes les valeurs propres de A et leur multiplicité.
   (b) On suppose que la trace de A est nulle. Quelles sont toutes les valeurs propres de A et leur multiplicité ?
   (c) A quelle condition la matrice A est-elle diagonalisable ?

Question 1a Aide 1 Aide 2
Question 1b Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2a Aide 1
Question 2b Aide 1 Aide 2
Question 2c Aide 1
Question 2d Aide 1
Question 3 Aide 1
Question 4a Aide 1 Aide 2
Question 4b Aide 1 Aide 2
Question 5a Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 5b Aide 1 Aide 2
Question 5c Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6 TD4-Exercice6

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et f l'application définie par $f(x) = Ax, x \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

1. Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de A. Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A. Donner la matrice $\hat{A}$ associée à f quand on choisit cette base.
   Réponse : $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -4, Y_1 = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, Y_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que si $A = P\hat{A}P^{-1}$, alors $A^n = P\hat{A}^nP^{-1}, (n \geq 0)$. Donner A^n en fonction de n.
   Réponse : $A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-4)^n + 2(-1)^n & -2(-4)^n + 2(-1)^n \\ -(-4)^n + (-1)^n & 2(-4)^n + (-1)^n \end{pmatrix}$.
3. La relation précédente est-elle encore valable pour $n = -1$?
4. On considère les suites réelles (v_n) et (w_n) définies par :
   $w_0 \in \mathbb{R}, v_0 \in \mathbb{R}, v_{n+1} = -2v_n + 2w_n, w_{n+1} = v_n - 3w_n$. Exprimer v_{n+1} et w_{n+1} à l'aide v_0, w_0 et n.
5. On considère la suite réelle (u_n) définie par
   $$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } u_{n+1} = \frac{-2u_n + 2}{u_n - 3}.$$
   Exprimer u_n en fonction de n et de u_0. (On écrira $u_n = \frac{v_n}{w_n}$).
   On suppose que u_n est défini pour tout n. La suite est-elle convergente ? Si oui, donner sa limite.
   Réponse : oui et si $u_0 = 2, \ell = 2$, si $u_0 \neq 2, \ell = -1$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6
TD4-Exercice6

Question 1	Aide 1	Aide 2	
Question 2	Aide 1		
Question 3	Aide 1		
Question 4	Aide 1	Aide 2	
Question 5	Aide 1	Aide 2	Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.7 TD4-Exercice7

1. Les matrices de l'exercice A.2.1 sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{C}$?
   réponse : A_1, A_2, A_3, A_5 : oui ; A_4 : non.
2. On définit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, pour quelles valeurs de a, b, c la matrice A est-elle diagonalisable ? Pour quelles valeurs de a, b, c la matrice A est-elle inversible ?
   réponse : A est inversible $\iff c \neq 0$, A est diagonalisable $\iff c \neq 1, a = 0$.
3. On définit $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & -a & 1 \\ 1-b & a & a-1 & -b \\ b & -a & 1-a & 1+b \\ 0 & a & a & 0 \end{pmatrix}$, pour quelles valeurs de a, b la matrice A est-elle diagonalisable ? Pour quelles valeurs de a, b la matrice A est-elle inversible ?
   réponse : A est diagonalisable $\iff a = b = 0$.

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1 Aide 2
Question 3 Aide 1 Aide 2 Aide 3

Exercice A.2.8 TD4-Exercice8

1. Sans calculs dire si la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ qui est diagonalisable et qui admet une valeur propre de multiplicité n, que vaut A ?

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.9 TD4-Exercice9

Soient 2 matrices A et B appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$, on suppose que AB=BA. Soit λ une valeur propre de A, on note V_λ le sous-espace propre associé.

1. Montrer que si $Y \in V_\lambda$ alors $BY \in V_\lambda$.
2. On suppose maintenant que λ est de multiplicité 1, en déduire que si Y est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ alors Y est vecteur propre de B.
3. On suppose que A admet n valeurs propres distinctes dans K. Montrer qu'alors A et B sont diagonalisables dans K.

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 3 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.10 TD4-Exercice10

Soit la matrice J appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$, $n \geq 2$, définie par :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

1. J est elle diagonalisable ?
2. Déterminer les valeurs propres de J, leur multiplicité et la dimension du sous-espace propre associé.

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.11 TD4-Exercice11

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer les valeurs propres de A et leur multiplicité. On ne demande pas de calculer les vecteurs propres maintenant.
   Réponse : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

   (b) Montrer que

$$\dim \text{Ker } (A - I) = 1, \dim \text{Ker } (A - 2I) = 1, \dim \text{Ker } (A - I)^2 = 2.$$

2. (a) Montrer dans le cas général que Ker $(A - I) \subset$ Ker $(A - I)^2$.

   (b) Montrer que dans le cas particulier ici, l'inclusion est stricte.
   On pourra donc en déduire qu'il existe z vérifiant :

$$\begin{cases} z \in \text{Ker } (A - I)^2 \\ z \notin \text{Ker } (A - I) \end{cases}$$

   (c) Montrer que

$$\begin{cases} z \in \text{Ker } (A - I)^2 \\ z \notin \text{Ker } (A - I) \end{cases} \Leftrightarrow (A - I)z = y_1 \text{ où } y_1 \text{ est un vecteur propre associé à } 1$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

3. Si y_1 est un vecteur propre de A associé à 1, si y_2 est un vecteur propre de A associé à 2, si z vérifie $(A-I)z = y_1$. Montrer que la famille $\{y_1, y_2, z\}$ est libre (penser à utiliser $A - I$).
4. On définit l'application linéaire u de $\mathcal{M}_{3,1}$ dans $\mathcal{M}_{3,1}$ par $u(x) = Ax$
   (a) Quelle est la matrice de u quand on munit $\mathcal{M}_{3,1}$ de la base canonique ?
   (b) Quelle est la matrice de u quand on choisit la base $\{y_2, y_1, z\}$?
   (c) En déduire que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = (y_2 y_1 z)$
   (d) Calculer y_1, y_2, z pour obtenir P.

   Une réponse possible :$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
5. Utilisez le théorème de CAYLEY-HAMILTON pour calculer A^4 et A^{-1} en fonction de A^2, A et I.

   Réponse : $A^4 = 11A^2 - 18A + 8I = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 15 & 12 & 4 \\ 15 & 11 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice A.2.11
TD4-Exercice11

Exercice A.2.11 TD4-Exercice11

Question 1b	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 2b	Aide 1	Aide 2	
Question 2c	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 3	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 4a	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 4b	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 4c	Aide 1		
Question 5	Aide 1	Aide 2	Aide 3

Annexe B
Exemples

B.1 Exemples du chapitre IV

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.1

Soit $u \in \mathcal{L}(E; E)$ non injective alors Ker $u \neq \{\vec{0}\}$. Il existe donc un vecteur $\vec{y}$ non nul tel que $u(\vec{y}) = \vec{0} = 0\vec{y}$. Donc 0 est valeur propre et tous les vecteurs non nuls du noyau sont vecteurs propres associés à la valeur propre nulle.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.2

Soit A la matrice de la rotation plane

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Pour que $(\lambda, Y) \in K \times \mathcal{M}_{n1}$ soit un couple propre, on doit avoir

$$\begin{cases} y_1 \cos\theta - y_2 \sin\theta & = \lambda y_1, \\ y_1 \sin\theta + y_2 \cos\theta & = \lambda y_2, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} y_1(\cos\theta - \lambda) - y_2 \sin\theta & = 0, \\ y_1 \sin\theta + y_2(\cos\theta - \lambda) & = 0, \end{cases}$$

Si le déterminant de ce système est non nul, la seule solution est $y_1 = y_2 = 0$, donc pour que ce système admette une solution non nulle, il faut que son déterminant soit nul, ce qui conduit à

$$(\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = 0$$

On va donc étudier deux cas $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$

– Si $K = \mathbb{R}$, on cherche λ dans $\mathbb{R}$ et dans ce cas si $sin\theta \neq 0$ il n'y a pas de valeurs propres réelles (donc pas de vecteurs propres réels). Si $\theta = 2k\pi$,$k \in \mathbb{Z}$, on obtient $\lambda = 1$, y_1, y_2 quelconques. Si $\theta = (2k+1)\pi$,$k \in \mathbb{Z}$, on obtient $\lambda = -1$, y_1, y_2 quelconques. On retrouve bien le résultat intuitif que l'on avait trouvé dans l'exercice A.1.2 :
  – si $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, il n'y pas de vecteurs propres réels,

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.2

- si $\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, la rotation est alors l'identité, donc tout vecteur non nul est propre et 1 est valeur propre,
- si $\theta = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, la rotation est alors la symétrie, donc tout vecteur non nul est propre et -1 est valeur propre.

– Si $K = \mathbb{C}$, on obtient 2 valeurs propres complexes possibles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \cos\theta + i\sin\theta \\ \lambda_2 = \cos\theta - i\sin\theta \end{array} \right. .$$

Les vecteurs propres correspondants sont :

- $\lambda_1 = e^{i\theta}$, $Y_1 = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $\gamma \in \mathbb{C}$,
- $\lambda_2 = e^{-i\theta}$, $Y_2 = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\gamma \in \mathbb{C}$.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe C
Documents

C.1 Documents du chapitre IV

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.1 Démonstration de la proposition sur la somme directe des sous espaces propres

Proposition - Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres distinctes d'une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$ alors les sous espaces vectoriels $\{V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \ldots, V_{\lambda_p}\}$ sont en somme directe.
Démonstration – On a vu, dans le chapitre 1, la propriété caractéristique d'une somme directe $H = E_1 \oplus E_2$ de deux sous-espaces vectoriels, à savoir que la décomposition d'un élément de H en la somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2 est unique. C'est cette propriété caractéristique qui se généralise au cas d'une somme directe de p sous-espaces vectoriels $H = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_p$, à savoir

$$H = E_1 \oplus \ldots \oplus E_p \Longleftrightarrow \{\forall \vec{y} \in H, \exists\,!\, \vec{y}_1 \in E_1, \ldots, \exists\,!\, \vec{y}_p \in E_p \mid \vec{y} = \vec{y}_1 + \ldots + \vec{y}_p\}\,.$$

Revenons à la démonstration de la proposition et posons $H = V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_p}$. Par définition de la somme de sous-espaces vectoriels, on a : $\forall Y \in H$ $\exists Y_1 \in V_{\lambda_1}$, ..., $\exists Y_p \in V_{\lambda_p}$ tels que $Y = Y_1 + \ldots + Y_p$. Il reste à démontrer l'unicité d'une telle décomposition. Supposons donc qu'il existe deux décompositions :

$$Y_1 + \ldots + Y_p = \hat{Y}_1 + \ldots + \hat{Y}_p \iff (Y_1 - \hat{Y}_1) + \ldots + (Y_p - \hat{Y}_p) = 0.$$

Or chacun des vecteurs $(Y_i - \hat{Y}_i)$ est un vecteur de V_{λ_i}, donc c'est le vecteur nul ou c'est un vecteur propre associé à λ_i. Si $Y_i \neq \hat{Y}_i$, on aurait donc une relation linéaire entre des vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes, ce qui est impossible puisque l'on a montré (proposition IV.3.2) qu'une telle famille était libre.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.2 Mutiplicité et dimension du sous espace propre

Proposition C.1.1. *Soit λ une valeur propre de A, on note r la multiplicité de λ et d la dimension de V_λ, alors $d \leq r$.*

Démonstration – Si la dimension de V_λ est d, il existe une base de V_λ $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_d\}$. On a bien sûr $AY_i = \lambda Y_i$.
On complète la famille libre $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_d\}$ de façon à obtenir une base de $\mathcal{M}_{n,1}$, $\hat{\mathcal{B}} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$.
On note u l'application linéaire de $\mathcal{M}_{n,1}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}$ définie par : $u(Y) = AY$.
La matrice de u quand on choisit la base canonique est A, la matrice de u quand on choisit la base $\hat{\mathcal{B}}$ est :

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 & \widetilde{C} \\ 0 & 0 & \lambda & \\ 0 & 0 & 0 & \widehat{C} \end{pmatrix}$$

En effet $AY_i = \lambda Y_i, \ \ \forall i, \ 1 \leq i \leq d$, on obtient ainsi les d premières colonnes de $\widehat{A}$, les matrices $\widetilde{C}$ et $\widehat{C}$ sont des matrices appartenant respectivement à $\mathcal{M}_{d,n-d}$ et $\mathcal{M}_{n-d,n-d}$.
A et $\widehat{A}$ sont semblables, elles ont donc le même polynôme caractéristique :

$$\pi_A(s) = \det\,(sI - \widehat{A}) = (s-\lambda)^d \det\,(sI - \hat{C})$$

On en déduit donc que la multiplicité de λ est supérieure ou ègale à d.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.3 Diagonalisation - condition nécessaire et suffisante

Théorème - Une condition nécessaire et suffisante pour que $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ soit diagonalisable est qu'elle admette p valeurs propres distinctes dans K vérifiant
$\sum_{i=1}^{p} r_i = n$ et $d_i = r_i, \forall i \; 1 \leq i \leq p$
(r_i : multiplicité de λ_i, d_i : dimension du sous-espace propre associé à λ_i).
Démonstration –
Il est facile de montrer que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{p} r_i = n \\ d_i = r_i, \; \forall i, \; 1 \leq i \leq p \end{array} \right. \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} d_i = n \Leftrightarrow V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots V_{\lambda_p} = \mathcal{M}_{n,1}$$

On doit donc montrer maintenant que :

$\mathcal{M}_{n,1} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots V_{\lambda_p} \Leftrightarrow$ il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}$ constituée de vecteurs propres de A.

Le théorème IV.4.1 permet ensuite de conclure que A est diagonalisable.
implication - Si $\mathcal{M}_{n,1} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots V_{\lambda_p}$ l'union des bases de tous les sous-espaces propres est donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}$, il existe donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}$ constituée de vecteurs propres de A.
réciproque - S' il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}$ constituée de vecteurs propres $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$, alors tout vecteur Y appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}$ est une combinaison linéaire des éléments de cette base et en regroupant la combinaison de vecteurs propres correspondant à une même valeur propre, il est facile de voir que $Y = Z_1 + \ldots + Z_p$,
c'est à dire que $Y \in V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_p}$.

Donc on a $\mathcal{M}_{n,1} = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_p}$

retour au cours

Document C.1.4 Trigonalisation

Théorème - Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) $T \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.
Démonstration – On va montrer, par exemple, que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure et pour cela on va raisonner par récurrence sur la dimension n de la matrice A.
- Tout d'abord si $n = 1$, le théorème est évident et pour comprendre l'idée de la démonstration, nous allons établir le résultat pour $n = 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$ et $(\lambda, Y) \in \mathbb{C} \times \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ un couple propre de A. Il existe donc un vecteur $Z \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ tel que $\{Y, Z\}$ forme une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$. Soit P la matrice dont les colonnes sont Y et Z (on a donc $P_1 = Y$, $P_2 = Z$) et soit $T = P^{-1}AP$, quelle est la première colonne de T ? On a

$$TI_1 = P^{-1}API_1 = P^{-1}AY = \lambda P^{-1}Y = \lambda P^{-1}P_1 = \lambda I_1,$$

donc T est de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{pmatrix}$$

ce qui démontre le résultat pour $n = 2$.
- Supposons le résultat vrai pour toute matrice d'ordre $n-1$ et montrons le pour $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Soit $(\lambda, Y) \in \mathbb{C} \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un couple propre de A et soient $Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$ des vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que la famille $\{Y, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n\}$ soit une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et Q la matrice constituée par ces vecteurs colonnes (on a donc en particulier $Q_1 = Y$). Par

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

le même raisonnement que précédemment on sait que $S = Q^{-1}AQ$ est de la forme

$$S = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \dots & & \hat{S} & \\ 0 & & & \end{array}\right),$$

où $\hat{S} \in \mathcal{M}_{n-1,n-1}(\mathbb{C})$. Il résulte alors de l'hypothèse de récurrence qu'il existe une matrice $\hat{P} \in \mathcal{M}_{n-1,n-1}(\mathbb{C})$, régulière, telle que $\hat{T} = \hat{P}^{-1}\hat{S}\hat{P}$ soit triangulaire supérieure. Soit alors P la matrice de la forme suivante (matrice régulière) dont l'inverse est de la forme :

$$P = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \dots & & \hat{P} & \\ 0 & & & \end{array}\right), \qquad P^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \dots & & \hat{P}^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

La matrice $T = P^{-1}SP$ prend alors la forme

$$T = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \dots & & \hat{P}^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \dots & & \hat{S} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \dots & & \hat{P} & \\ 0 & & & \end{array}\right),$$

soit

$$T = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \dots & & \hat{P}^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \dots & & \hat{S}\hat{P} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \dots & & \hat{P}^{-1}\hat{S}\hat{P} & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

On a donc

$$T = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \dots & & \hat{T} & \\ 0 & & & \end{array}\right),$$

qui est bien triangulaire supérieure puisque $\hat{T}$ l'est. On a donc montré l'existence d'une matrice T triangulaire supérieure telle que

$$T = P^{-1}SP = P^{-1}Q^{-1}AQP = (QP)^{-1}A(QP)$$

ce qui achève la démonstration.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

T

V

Solution de l'exercice A.1.1

Tous les vecteurs, sauf le vecteur nul, sont vecteurs propres de l'identité, la valeur propre associée est 1.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.2

- Pour la projection, les vecteurs non nuls du plan sont des vecteurs propres associés à la valeur propre 1, les vecteurs non nuls de la droite sont des vecteurs propres associés à la valeur propre 0.
- Pour la rotation si :
  - $\alpha = \pi$, la rotation est alors une symétrie, tout vecteur non nul du plan est vecteur propre associé à la valeur propre -1.
  - $\alpha = \frac{\pi}{3}$, on ne peut citer aucun vecteur propre.

Retour à l'exercice ▲

$\alpha Y \neq 0$,
$A(\alpha Y) = \alpha(AY) = \alpha\lambda Y = \lambda(\alpha Y)$,
donc αY est vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.4

1. Tout vecteur non nul Y est vecteur propre de I car $IY = Y$: la valeur propre associée est 1.
2. – Si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $AY = \begin{pmatrix} 3.5y_1 \\ 5.2y_2 \\ 6.9y_3 \end{pmatrix} = \lambda Y \Longleftrightarrow \begin{cases} 3.5y_1 = \lambda y_1 \\ 5.2y_2 = \lambda y_2 \\ 6.9y_3 = \lambda y_3 \end{cases}$.

   Ce système admet comme solutions :

   – $\lambda = 3.5, y_2 = 0, y_3 = 0, y_1$ quelconque non nul (pour que $Y \neq 0$) : $Y = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   – $\lambda = 5.2, y_1 = 0, y_3 = 0, y_2$ quelconque non nul (pour que $Y \neq 0$) : $Y = y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   – $\lambda = 6.9, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3$ quelconque non nul (pour que $Y \neq 0$) : $Y = y_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   – Ce résultat se généraliserait au cas d'une matrice diagonale quelconque : $\lambda = a_{ii}$ est valeur propre, les vecteurs propres associés sont proportionnels à la i-ème colonne de I. On a en effet d'après les propriétés du produit matriciel :
   $AI = A \Rightarrow AI_i = A_i = a_{ii}I_i$
   donc
   $A(\alpha I_i) = \alpha AI_i = \alpha a_{ii}I_i = a_{ii}(\alpha I_i)$
   On a donc un couple propre $(a_{ii}, \alpha I_i)$.
   On retrouve sur ces exemples très simples que si Y est vecteur propre associé à λ alors αY est également vecteur propre associé à λ.
3. A non inversible $\Leftrightarrow \exists Y \neq 0\ ,\ AY = 0$,
   en effet le système $AY = 0$ admet toujours la solution nulle, et ce système admet une solution non nulle (c'est à dire n'admet pas de solution unique) si et seulement si A n'est pas inversible. On a donc :

A **non inversible** $\Leftrightarrow 0$ **est valeur propre de** A

Retour à l'exercice ▲

Pour A_1 :

$\pi_A(s) = (s+1)(s+2) - 2 = s^2 + 3s = s(s+3)$:
2 valeurs propres simples 0 et -3.
Recherche des vecteurs propres :
- $\lambda = 0$,
  $(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow -y_1 + 2y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 2y_2 \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$.
- $\lambda = -3$,
  $(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow 2y_1 + 2y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = -y_2 \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Il était prévisible que 0 était valeur propre de cette matrice. En effet puisque ses 2 colonnes sont proportionnelles, elle n'est pas inversible, donc 0 est valeur propre.

Pour A_2 :

$\pi_A(s) = (s+1)(s+2) - 2 = s^2 + 3s = s(s+3)$,
on obtient le même polynôme caractéristique que pour la matrice A_1. Ce résultat est général : les matrices sont transposées l'une de l'autre.
Recherche des vecteurs propres :
- $\lambda = 0$,
  $(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow -y_1 + y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2 \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$.
- $\lambda = -3$,
  $(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow 2y_1 + y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2 = -2y_1 \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$.

On remarque en revanche que les vecteurs propres ne sont pas les mêmes que pour la matrice A_1.

Si on cherche les valeurs et vecteurs propres complexes de A_1 et A_2 on obtient bien sûr les mêmes valeurs propres (réelles donc complexes), quant aux vecteurs propres ils appartiennent maintenant à $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ donc on choisit les coefficients α complexes.

Pour la matrice suivante tourner la page.

Pour A_3 :
$\pi_A(s) = (s-1)^2 + 1$:
il n'existe pas de valeurs propres réelles.

Si on cherche les valeurs propres complexes, on obtient 2 valeurs propres complexes $1+i$ et $1-i$ (on peut remarquer que ces valeurs propres sont conjuguées : ce résultat est général, on le démontrera ultérieurement).
Recherche des vecteurs propres :

- $\lambda = 1+i$,
  $(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow -iy_1 - y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2 = -iy_1 \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{C}$.
- $\lambda = 1-i$,
  $(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow -iy_1 + y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2 = iy_1 \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{C}$.

Pour la matrice suivante tourner la page.

Pour A_4 :
$\pi_A(s) = s(s-2)+1 = s^2-2s+1 = (s-1)^2$:
on a une valeur propre double $\lambda = 1$
Recherche des vecteurs propres :

– $\lambda = 1$,

$$(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow -y_1 - y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = -y_2 \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\ .$$

Si on cherche les valeurs et vecteurs propres complexes de A_4 on obtient bien sûr la même valeur propre (réelle donc complexe), quant aux vecteurs propres ils appartiennent maintenant à $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ donc on choisit les coefficients α complexes.

Pour la matrice suivante tourner la page.

Pour A_5 :
$\pi_A(s) = (s-1)^2(s-2)$:
$\lambda = 1$ est valeur propre double, $\lambda = 2$ est valeur propre simple.
Recherche des vecteurs propres :

- $\lambda = 1$,
  $(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow y_3 = 0 \Leftrightarrow$
  $$Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} .$$
- $\lambda = 2$,
  $$(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} -y_1 + y_3 & = 0 \\ -y_2 & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -y_1 = y_3 \\ y_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$
  $$Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Pour A_6 :
$\pi_A(s) = (s-1)^2(s-2)$,
$\lambda = 1$ est valeur propre double, $\lambda = 2$ est valeur propre simple.
Recherche des vecteurs propres :

- $\lambda = 1$,
  $$(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} .$$
- $\lambda = 2$,
  $$(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} -y_1 + y_2 = 0 \\ y_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$Y = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si on cherche les valeurs et vecteurs propres complexes de A_5 et A_6 on obtient bien sûr les mêmes valeurs propres (réelles donc complexes), quant aux vecteurs propres ils appartiennent maintenant à $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ donc on choisit les coefficients α et β complexes.

Pour la matrice suivante tourner la page.

Pour A_7 :
$\pi_A(s) = (s-1)(s-2)(s+1)$,
1, 2, -1 sont valeurs propres simples.
Recherche des vecteurs propres :

- $\lambda = 1$,

$$(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} y_2 + y_3 = 0 \\ y_2 + 3y_3 = 0 \\ y_3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y_3 = 0 \\ y_2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

- $\lambda = 2$,

$$(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} -y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1 = y_2 \\ y_3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

- $\lambda = -1$,

$$(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ 3y_2 + 3y_3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = -y_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$Y = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

On démontrera plus tard la propriété que l'on vient de constater sur les matrices A_5, A_6, A_7 : à savoir les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments de sa diagonale.
Si on cherche les valeurs et vecteurs propres complexes de A_7 on obtient bien sûr les mêmes valeurs propres (réelles donc complexes), quant aux vecteurs propres ils appartiennent maintenant à $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ donc on choisit les coefficients α complexes.

Pour la matrice suivante tourner la page.

Pour A_8,
$\pi_A(s) = (s-1)(s-2i) - (i+1) = s^2 + s(-1-2i) + i - 1 = (s-i-1)(s-i)$
on obtient 2 valeurs propres complexes $1+i$ et i .
Recherche des vecteurs propres :

- $\lambda = 1+i$,
  $(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow -iy_1 + y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2 = iy_1 \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{C}$.
- $\lambda = i$,
  $(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow (1-i)y_1 + y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2 = (i-1)y_1 \Leftrightarrow$
  $Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i-1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{C}$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.6

Si A est triangulaire, il en est de même pour $sI - A$ donc det $(sI - A)$ est le produit des termes diagonaux c'est à dire :

$$\pi_A(s) = \prod_{k=1}^{n} (s - a_{kk}),$$

d'où les racines évidentes.

Retour à l'exercice ▲

1.
$$\pi_A(s) = \det\,(sI - A) = \overline{\det\,(\bar{s}I - \bar{A})} = \overline{\pi_{\bar{A}}(\bar{s})}.$$

On en déduit donc la propriété suivante :
λ valeur propre de $A \Leftrightarrow \pi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \pi_{\bar{A}}(\bar{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \bar{\lambda}$ valeur propre de $\bar{A}$

2. On utilise la question précédente : si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, alors $A = \bar{A}$ donc si λ est valeur propre de A, $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de A (on a constaté cette propriété pour la matrice A_3 de l'exercice A.1.5)

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.8

Les matrices A et A^T n'ont pas les mêmes vecteurs propres, voir les matrices A_1 et A_2 de l'exercice A.1.5.

Retour à l'exercice ▲

On obtient :

$$B = \begin{pmatrix} 33 & 72 \\ -12 & -26 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6,$$

$$Y_1 = \alpha \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}, Y_2 = \alpha \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

On avait déja calculé les valeurs et vecteurs propres de la matrice A dans le paragraphe "Polynôme caractéristique" . A et B ont les mêmes valeurs propres 1 et 6. Les vecteurs propres de A étaient :

$$X_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, X_2 = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres de A et B ne sont pas les mêmes, mais on a les relations

$$Y_1 = P^{-1} X_1 \;,\; Y_2 = P^{-1} X_2$$

Retour à l'exercice ▲

Dans cet exercice on fait référence aux matrices de l'exercice A.1.5.

1. FAUX : voir la matrice A_3.
2. VRAI : prendre par exemple la matrice A_1.
3. VRAI : on peut prendre comme précédemment la matrice A_1, ou si l'on cherche une matrice à coefficients complexes non réels, on peut prendre $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1-i & -i \\ i & 1+i \end{pmatrix}$.
4. VRAI : $A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{22}(\mathbb{C})$ (voir le paragraphe "Valeurs propres - existence et multiplicité").
5. FAUX : une matrice $A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ admet 2 valeurs propres complexes (éventuellement confondues, éventuellement réelles), mais si $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, sont valeurs propres de A , $\bar{\lambda}_2$ est également valeur propre de A, or comme λ_2 n'est pas réelle, $\bar{\lambda}_2$ n'est pas réelle donc différente de λ_1, de plus $\bar{\lambda}_2 \neq \lambda_2$, on aurait donc une matrice ($\in \mathcal{M}_{22}$) avec 3 valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_2$ ce qui est impossible.
6. FAUX : si $A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$, alors $A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{C})$ donc A admet 2 valeurs propres complexes, or A a une seule valeur propre réelle simple, donc la 2e valeur propre serait non réelle et on serait ramené à 5).
7. FAUX Les valeurs propres complexes non réelles vont par 2 (les 2 complexes conjugués) et 3 n'est pas un multiple de 2 !

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.12

– **trace**$A_1 = -3 = 0 + (-3)$, **det** $A_1 = 0 = 0 \times (-3)$, **idem pour** A_2,
– **trace**$A_3 = 2 = (1 + i) + (1 - i)$, **det** $A_3 = 2 = (1 + i) \times (1 - i)$,
– **trace**$A_4 = 2 = 1 + 1$, **det** $A_4 = 1 = 1 \times 1$,
– **trace**$A_5 = 4 = 1 + 1 + 2$, **det** $A_5 = 2 = 1 \times 1 \times 2$, **idem pour** A_6,
– **trace**$A_7 = 2 = 1 + 2 + (-1)$, **det** $A_7 = -2 = 1 \times 2 \times (-1)$,
– **trace**$A_8 = 2i + 1 = (1 + i) + i$, **det** $A_8 = i - 1 = (1 + i) \times i$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.13

On montre que :
$V_\lambda \neq \emptyset$ **car** $0 \in V_\lambda$,
V_λ **est stable :** Y_1 **et** $Y_2 \in V_\lambda \Longrightarrow \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 \in V_\lambda$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.14

Une base de V_0 est $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, V_0 est de dimension 1.

Une base de V_1 est $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, V_1 est de dimension 2.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.15

1. pour $\lambda = 0, r = 1, d = 1$; pour $\lambda = -3, r = 1, d = 1$
2. pour $\lambda = 0, r = 1, d = 1$; pour $\lambda = -3, r = 1, d = 1$
3. pour $\lambda = 1 + i, r = 1, d = 1$; pour $\lambda = 1 - i, r = 1, d = 1$
4. pour $\lambda = 1, r = 2, d = 1$
5. pour $\lambda = 1, r = 2, d = 2$; pour $\lambda = 2, r = 1, d = 1$
6. pour $\lambda = 1, r = 2, d = 1$; pour $\lambda = 2, r = 1, d = 1$
7. pour $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$ ou $\lambda = -1, r = 1, d = 1$
8. pour $\lambda = 1 + i, r = 1, d = 1$; pour $\lambda = i, r = 1, d = 1$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.16

$$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow AP = PD \Leftrightarrow AP_i = PD_i = d_{ii}P_i :$$

ce que l'on vient d'écrire découle uniquement des propriétés du produit matriciel, on a bien sûr utilisé de plus le fait que D est diagonale.
On obtient donc que P_i est vecteur propre de A associé à la valeur propre d_{ii}.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.17

– Les matrices A_1, A_2, A_7 sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$ donc dans $\mathbb{C}$ puisqu'elles admettent n valeurs propres distinctes, on a

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, D_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme on l'a vu une matrice P possible est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres, donc par exemple :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, P_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

– La matrice A_3 n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, mais diagonalisable dans $\mathbb{C}$ (ses valeurs propres sont distinctes)

$$D_3 = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}.$$

– Les matrices A_4, A_6 ne sont pas diagonalisables (ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$) car la valeur propre 1 a pour multiplicité 2, la dimension de V_1 est égal à 1 donc $d < r$.

– La matrice A_5 est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ car

$$r_1 = d_1 = 2, r_2 = d_2 = 1, \sum_{k=1}^{2} r_k = 3.$$

$$D_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.18

Soit
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$
on a $BX = 0$ et pourtant $B \neq 0$ et $X \neq 0$.
En revanche si $BX_i = 0$ pour tous les vecteurs X_i d'une base $\mathcal{E}$ de $\mathcal{M}_{n,1}$, on obtient que $BX = 0$ pour tout vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}$ (il suffit de décomposer X sur la base $\mathcal{E}$).
Ensuite, si on choisit successivement pour X les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}$, on obtient que toutes les colonnes de B sont nulles, donc B est nulle.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.19

$A^n - I = 0$ donc $AA^{n-1} = I$, l'inverse de A est A^{n-1}.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Polynôme caractéristique".

Retour à l'exercice ▲

Quand une valeur propre est réelle, quelle est la différence entre chercher les vecteurs propres réels et chercher les vecteurs propres complexes ?

Retour à l'exercice ▲

Pour la matrice A_3, penser à utiliser j, racine cubique de l'unité.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Polynôme caractéristique".

Retour à l'exercice ▲

On obtient

$$\pi_A(s) = (s-1)^4$$

Chercher les vecteurs propres.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.1

- Si $a = 0$, les composantes x_1, x_2, x_3, x_4 des vecteurs propres doivent vérifier :

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$

  Attention, la famille génératrice que vous avez obtenue pour V_1 n'est pas forcément la même que celle proposée dans la solution.
  Comment savoir dans ce cas si votre solution est correcte ?
- Si $a \neq 0$, les composantes x_1, x_2, x_3, x_4 des vecteurs propres doivent vérifier :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_2 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.1

Voir le paragraphe "Polynôme caractéristique".

Retour à l'exercice ▲

Revoir l'exercice du chapitre précédent sur les déterminants des matrices triangulaires par blocs.

Retour à l'exercice ▲

Chercher à déterminer les vecteurs propres écrits par blocs.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Polynôme caractéristique".

Retour à l'exercice ▲

Si $A \in \mathcal{M}_{nn}$, on note $p_n(s) = \det(sI - A)$.
Trouver une relation de récurrence entre p_n et p_{n-1}.

Retour à l'exercice ▲

On obtient

$$p_n(s) = sp_{n-1}(s) + \alpha_n.$$

Calculez $p_1, p_2, ...$ pour établir l'expression, que vous démontrerez ensuite par récurrence.

Retour à l'exercice ▲

On démontre par récurrence que : $p_n(s) = \alpha_n + \alpha_{n-1}s + \ldots + \alpha_k s^{n-k} + \ldots + s^n$.

Retour à l'exercice ▲

Résoudre $AY = \lambda Y$**, puis préciser** $Y \neq 0$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.2

Montrer que l'on peut exprimer $y_2, y_3, \ldots, y_n$ en fonction de y_1. Penser à vérifier la dernière équation.

Retour à l'exercice ▲

En déduire que

$$Y = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \dots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}. \textbf{ avec } y_1 \neq 0.$$

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Valeur et vecteur propres d'une matrice".

Retour à l'exercice ▲

Que vaut $(A + \alpha I)Y$, A^2Y **?**

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1a, Exercice A.2.4

On suppose que :

$$\begin{aligned} AY &= \lambda Y \\ Y &\neq 0 \end{aligned}$$

et on montre que $\lambda^2 = -1$

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1a, Exercice A.2.4

Utilisez l'exercice A.2.3et n'oubliez pas que $Y \neq 0$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1b, Exercice A.2.4

La matrice doit avoir une trace nulle, pourquoi ?
Le déterminant de la matrice vaut 1, pourquoi ?

Retour à l'exercice ▲

Utiliser 1(a) : les valeurs propres sont i et $-i$ donc la trace est nulle et on peut choisir les termes diagonaux nuls.
D'autre part, le déterminant vaut 1.
On peut donc choisir :

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -1/a & 0 \end{pmatrix}$$

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Valeurs propres et matrices particulières".

Retour à l'exercice ▲

Est-il possible qu'une matrice de $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ n'admette aucune valeur propre réelle ?
Voir l'exercice A.1.11.
On rappelle de plus que si $P \Rightarrow Q$, alors $nonQ \Rightarrow nonP$.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Polynôme caractéristique".

Retour à l'exercice ▲

Utiliser le déterminant d'un produit de matrices.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Valeur et vecteur propres d'une matrice".
On se place dans la cas d'une valeur propre non nulle (pourquoi ?).

Retour à l'exercice ▲

On suppose que (λ, Y) ($\lambda \neq 0$) est un couple propre de AB, écrire ce que cela signifie.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1b, Exercice A.2.5

Montrer que BY est vecteur propre de BA. Ne pas oublier de vérifier que $BY \neq 0$.

Retour à l'exercice ▲

On peut utiliser la question 1(b).

Retour à l'exercice ▲

Revoir la définition d'une famille libre.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2b, Exercice A.2.5

$X = 0 \Rightarrow AX = 0.$

Retour à l'exercice ▲

Revoir le chapitre 1.
Quelle inégalité existe entre le cardinal d'une famille libre et dimension d'un sous-espace vectoriel ?

Retour à l'exercice ▲

A et B jouent des rôles similaires.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Polynôme caractéristique".

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 4a, Exercice A.2.5

Revoir l'un des derniers exercices du chapitre 2 sur le rang d'une matrice XY^T.

Retour à l'exercice ▲

Utiliser la relation entre le nombre de colonnes, la dimension du noyau, le rang de A ...

Retour à l'exercice ▲

Utiliser le résultat de la question 2.

Retour à l'exercice ▲

Le scalaire $X^T Y$ est valeur propre de la matrice XY^T.
Faites bien la différence entre scalaire et matrice.

Retour à l'exercice ▲

Comme précédemment le rang de A permet d'obtenir la dimension de Ker A.

Retour à l'exercice ▲

On en déduit que $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_{n-1} = 0$,
c'est à dire que 0 est valeur propre de multiplicité supérieure ou égale à $n-1$.
Que vaut μ_n ?

Retour à l'exercice ▲

On utilise la trace de A et on obtient que

$$\mu_n = \textbf{trace}\ A.$$

Retour à l'exercice ▲

0 est valeur propre de multiplicité supérieure ou égale à $n-1$, pourquoi ?
Est-il possible qu'il existe une valeur propre non nulle ?

Retour à l'exercice ▲

N'oubliez pas que la trace de A est nulle.
Montrez que 0 est valeur propre de multiplicité n.

Retour à l'exercice ▲

Etudier les cas trace $A = 0$ et trace $A \neq 0$.
Reprendre les questions (a) et (b).

Retour à l'exercice ▲

Si y est vecteur propre de f que vaut $f(y)$?

Retour à l'exercice ▲

On a bien sûr $\hat{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

On pourrait retrouver ce résultat par le calcul $\hat{A} = P^{-1}AP$, avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Retour à l'exercice ▲

Que vaut D^n quand D est une matrice diagonale ?

Retour à l'exercice ▲

Pour savoir si B est l'inverse de A, il suffit de calculer le produit AB.
La réponse est oui, la relation précédente est encore valable pour $n = -1$.
Dans le cas particulier ici, rappeler l'expression de l'inverse d'une matrice à 2 lignes et 2 colonnes.

Retour à l'exercice ▲

Représenter matriciellement la relation de récurrence.

Retour à l'exercice ▲

Ecrire $\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ **et itérer cette relation.**

Retour à l'exercice ▲

Montrer que si $u_n = \frac{v_n}{w_n}$, avec v_n et w_n qui vérifient les relations de la question précédente, alors

$$u_{n+1} = \frac{-2u_n + 2}{u_n - 3}$$

On choisit $v_0 = u_0$, $w_0 = 1$.

Retour à l'exercice ▲

Utiliser la question précédente pour en déduire v_n et w_n donc u_n.

Retour à l'exercice ▲

On obtient

$$u_n = \frac{(u_0 - 2) + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n (u_0 + 1)}{(2 - u_0) + \left(\frac{1}{4}\right)^n (u_0 + 1)}$$

En déduire la limite de u_n.
Vous avez déjà étudié ces suites en MT21, les valeurs 2 et -1 sont les points fixes de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{-2x + 2}{x - 3}$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.7

Voir le paragraphe "Diagonalisation - condition nécessaire et suffisante" (le deuxième théorème).

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.7

Voir les paragraphes "Diagonalisation - condition suffisante" et "Diagonalisation - condition nécessaire et suffisante" (le deuxième théorème).

Retour à l'exercice ▲

Calculer les sous-espaces propres et comparer la multiplicité des valeurs propres à la dimension des sous-espaces propres.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Diagonalisation - condition nécessaire et suffisante".

Retour à l'exercice ▲

Calculer toutes les valeurs propres et les sous-espaces propres correspondants et raisonner cas par cas.

Retour à l'exercice ▲

Par exemple pour $\lambda = 0$ (valeur propre double) on montre que pour $a \neq 0$ le sous-espace propre est de dimension 1, donc A n'est pas diagonalisable...

Retour à l'exercice ▲

La réponse a été donnée dans le cours.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.8

Voir le paragraphe "Trigonalisation d'une matrice".

Retour à l'exercice ▲

$A = \lambda I$. Pourquoi ?

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Sous-espace propre - définition".

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Multiplicité d'une valeur propre et dimension du sous espace propre".

Retour à l'exercice ▲

Quelle est la dimension de V_λ ?

Retour à l'exercice ▲

La famille $\{Y, BY\}$ est-elle liée ?

Retour à l'exercice ▲

Est-ce que A est diagonalisable ?

Retour à l'exercice ▲

Lorsque A est diagonalisable, que peut-on dire sur les vecteurs propres de A ?

Retour à l'exercice ▲

Utiliser 2. pour conclure quant aux vecteurs propres de B.

Retour à l'exercice ▲

En déduire que B est diagonalisable.

Retour à l'exercice ▲

Revoir l'exercice A.2.8 et raisonner par l'absurde.

Retour à l'exercice ▲

λ est une valeur propre de multiplicité n.
Calculer les vecteurs propres et montrer que le sous-espace propre est de dimension 1.

Retour à l'exercice ▲

Penser au rang

Retour à l'exercice ▲

Calculer les matrices $(A - I), (A - 2I), (A - I)^2$, leur rang se calcule facilement.

Retour à l'exercice ▲

pour chacune des matrices la dimension du noyau plus le rang vaut 3, d'où le résultat.

Retour à l'exercice ▲

on a vu dans le chapitre 2 que

$$\mathbf{Ker}\ (A - I) \subset \mathbf{Ker}\ (A - I)^2.$$

Redémontrez cette inclusion.

Retour à l'exercice ▲

les dimensions de Ker $(A - I)$ et Ker $(A - I)^2$, sont différentes, donc l'inclusion est stricte.

Retour à l'exercice ▲

Que signifie y_1 est vecteur propre de A associé à la valeur propre 1 ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2c, Exercice A.2.11

On a

$$(A - I)((A - I)z) = 0, \quad (A - I)z \neq 0.$$

Retour à l'exercice ▲

On a bien

$$A((A-I)z) = (A-I)z, \quad (A-I)z \neq 0.$$

Ce qui permet de conclure.

Retour à l'exercice ▲

Ecrire $a_1y_1 + a_2y_2 + az = 0$

Retour à l'exercice ▲

Si $a_1y_1 + a_2y_2 + az = 0$ **alors** $(A - I)(a_1y_1 + a_2y_2 + az) = 0$.
Que vaut $Ay_1,\ \ Ay_2,\ \ (A-I)z$ **?**

Retour à l'exercice ▲

$(A - I)(a_1 y_1 + a_2 y_2 + az)$ est une combinaison linéaire nulle des vecteurs y_1, y_2 qui sont linéairement indépendants : pourquoi ?
En déduire que a_2, a donc a_1 sont nuls.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 4a, Exercice A.2.11

Calculer $u(e_1)$.
Quelles sont ses composantes sur la base $\{e_1, e_2, e_3\}$?

Retour à l'exercice ▲

Revoir le produit matriciel dans le chapitre 2.

$$u(e_1) = Ae_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3.$$

On obtient ainsi la première colonne de la matrice.

Retour à l'exercice ▲

On détermine les autres colonnes et on trouve finalement que la matrice associée à u quand on choisit la base canonique est A.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 4b, Exercice A.2.11

Que vaut Ay_1, Ay_2, Az **?**

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 4b, Exercice A.2.11

$Ay_1 = y_1, \quad Ay_2 = 2y_2, \quad Az = z + y_1$ **d'où la matrice.**

Retour à l'exercice ▲

la matrice est : $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Retour à l'exercice ▲

c'est évident, A et T sont les matrices de u quand on choisit sur $\mathcal{M}_{2,1}$ 2 s differentes

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Cayley-Hamilton".

Retour à l'exercice ▲

Procéder comme dans l'exemple du paragraphe.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 5, Exercice A.2.11

A partir de l'équation du polynôme caractéristique, calculer A^3 en fonction de A^2, A et I, puis multiplier le tout par A et réutiliser la même équation pour obtenir A^4 en fonction de A^2, A et I.

Retour à l'exercice ▲