MT22-Fonctions de plusieurs variables et applications

Chapitre 8 : Théorèmes intégraux

ÉQUIPE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

UTC-UTT

Sommaire

Chapitre VIII
Théorèmes intégraux

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Théorème de Stokes-Ampère

Exercices :
Exercice A.1.1
Exercice A.1.2
Exercice A.1.3
Exercice A.1.4

Théorème VIII.0.1 *Soit S une surface de $\mathbb{R}^3$ orientée par le choix d'un champ de normales $\vec{n}$.*
Le bord de S est une courbe fermée Γ.
La courbe Γ et la surface S sont orientées de façon cohérente en utilisant la règle du tire-bouchon de Maxwell ou la règle du bonhomme d'Ampère.
$\vec{V}$ est un champ de vecteurs dont les composantes V_1, V_2, V_3 sont continument différentiables.
Alors le flux du rotationnel de $\vec{V}$ à travers la surface S est égal à la circulation de $\vec{V}$ le long de la courbe Γ, c'est à dire

$$\int\int_S \overrightarrow{rot}\,\vec{V}.\vec{n}d\sigma = \int_\Gamma V_1dx + V_2dy + V_3dz$$

Voir la démonstration de ce théorème en exercice.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Le théorème de Green-Riemann est un cas particulier du théorème de Stokes-Ampère. On peut démontrer cette proposition en exercice.

Théorème de Gauss-Ostrogradski

Exercices :
Exercice A.1.5
Exercice A.1.6
Exercice A.1.7
Exercice A.1.8

Théorème VIII.0.2 *Soit $\mathcal{V}$ un domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par une surface fermée S orientée vers l'extérieur de $\mathcal{V}$ et soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs dont la divergence est une fonction continue, alors l'intégrale de la divergence de $\vec{V}$ dans $\mathcal{V}$ est égale au flux de $\vec{V}$ à travers S, c'est à dire*

$$\iiint_{\mathcal{V}} div\, \vec{V} dxdydz = \iint_S \vec{V}.\vec{n}d\sigma.$$

On peut démontrer ce théorème dans le cas où $\operatorname{div} \vec{V}(M) = 0$.
On a vu dans le chapitre analyse vectorielle qu'alors $\vec{V}(M)$ dérive d'un potentiel vecteur $\vec{W}$ c'est à dire qu'il existe $\vec{W}$ vérifiant $\vec{V}(M) = \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{W}$. On a donc

$$\iint_S \vec{V}.\vec{n}d\sigma = \iint_S \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{W}.\vec{n}d\sigma.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Écrivons $S = S_1 \bigcup S_2$, soit Γ la frontière commune de S_1 et S_2 : voir figure VIII.1 et remarquer dans chacun des cas l'orientation du bord Γ.

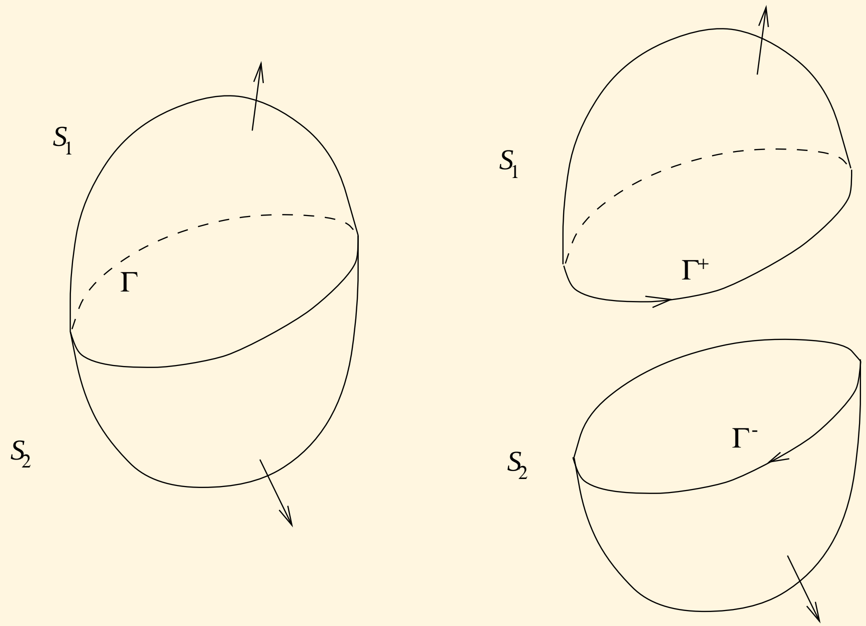


FIG. VIII.1:

Le Théorème de Stokes-Ampère permet d'écrire :

$$\iint_{S_1} \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{W}.\vec{n}d\sigma = \int_{\Gamma^+} \vec{W}d\vec{l}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$$\iint_{S_2} \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{W}.\vec{n}d\sigma = \int_{\Gamma^-} \vec{W}d\vec{l}$$

la somme de ces deux intégrales est donc nulle. On a donc bien dans ce cas :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{div}\,\vec{V}dxdydz = \iint_S \vec{V}.\vec{n}d\sigma = 0.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Application à l'hydrostatique

Exercices :
Exercice A.1.9
Exercice A.1.10

Si S est une surface plane d'aire A qui est soumise à une pression p constante, alors une force de pression constante $\vec{F}$ s'exerce sur S,

$$\vec{F} = pA\vec{n}^* \tag{VIII.1}$$

où $\vec{n}^*$ est le vecteur normal unitaire à S dirigé "dans le bon sens" (dans le sens de la pression).

Si maintenant la pression n'est pas constante, si la surface S n'est pas plane, on a

$$\vec{F} = \int\int_S p\vec{n}^* d\sigma$$

Vérifier que dans le cas particulier d'une surface plane et d'une pression constante, on retrouve l'expression VIII.1.

Soit un solide V limité par une surface S, complètement immergé dans un liquide de masse volumique ρ.

La surface du liquide est le plan $z = 0$, l'axe Oz est dirigé vers le haut.

La pression dans le liquide dépend de z par la relation

$$p(z) = p_0 - \rho g z,$$

p_0 est la pression atmosphérique à la surface du liquide, g est l'accélération de la pesanteur.

$\vec{n}$ représente le champ de normales unitaires à S dirigé vers l'extérieur de V, alors la force de pression exercée par le liquide sur le solide vaut

$$\vec{F} = \iint_S -p\vec{n}d\sigma$$

en effet la pression s'exerce vers l'intérieur de V (pression exercée par le liquide sur le solide).

On note F_1, F_2, F_3 les 3 composantes de $\vec{F}$:

$$\vec{F} = F_1\vec{\imath} + F_2\vec{\jmath} + F_3\vec{k}$$

$$F_1 = \vec{F}\cdot\vec{\imath}, \quad F_2 = \vec{F}\cdot\vec{\jmath}, \quad F_3 = \vec{F}\cdot\vec{k}$$

d'où :

$$F_1 = \iint_S -p\vec{\imath}\cdot\vec{n}d\sigma, \quad F_2 = \iint_S -p\vec{\jmath}\cdot\vec{n}d\sigma, \quad , F_3 = \iint_S -p\vec{k}\cdot\vec{n}d\sigma \qquad \text{(VIII.2)}$$

Appliquer le théorème de Gauss-Ostrogradsky aux intégrales VIII.2, en déduire que :

$$\vec{F} = \rho g \text{ vol } (V)\vec{k}$$

On retrouve la poussée d'Archimède bien connue : la force de pression $\vec{F}$ s'exerce verticalement "vers le haut" et sa norme est égale au poids du liquide déplacé.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices de cours

Exercice A.1.1 Ch8-Exercice1

On va démontrer le théorème de Stokes Ampère dans le cas où la surface S a une équation explicite : $z = \phi(x, y), (x, y) \in D$.

On note $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$.

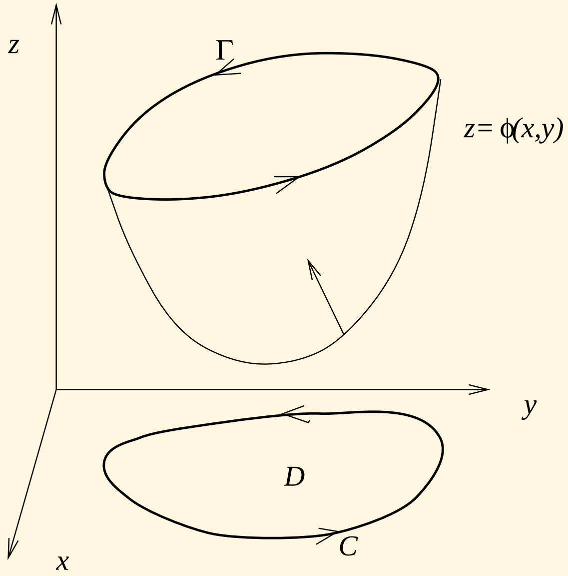


FIG. A.1.1:

Exercice A.1.1
Ch8-Exercice1

1. (a) Calculer $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}$.

   (b) On appelle C le bord de D orienté dans le sens trigonométrique, on suppose qu'une paramétrisation de C est

$$\begin{cases} x = a(t) \\ y = b(t) \end{cases} \quad t : t_0 \to t_1$$

   On choisit pour Γ l'orientation correspondant à l'orientation de C conformément à la figure A.1.1. Quelle est alors l'orientation de la surface ?

   (c) Donner l'expression du flux de $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}$ à travers S.

2. (a) Utiliser la paramétrisation de C pour en déduire une paramétrisation de Γ de la forme $\begin{cases} x = a(t) \\ y = b(t) \\ z = c(t) \end{cases}$. Donner l'expression de $c(t)$?

   (b) On note

$$\widetilde{V}_1(x,y) = V_1(x,y,\phi(x,y)), \widetilde{V}_2(x,y) = V_2(x,y,\phi(x,y))$$

   Montrer que

$$\int_\Gamma V_1 dx + V_2 dy$$
$$= \int_C \widetilde{V}_1 dx + \widetilde{V}_2 dy$$

Exercice A.1.1
Ch8-Exercice1

(c) Utiliser le théorème de Green-Riemann pour calculer $\int_C \widetilde{V}_1 dx + \widetilde{V}_2 dy$.

(d) En déduire :

$$\begin{aligned}\int_\Gamma V_1 dx + V_2 dy \quad = \quad & \iint_D \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y)\frac{\partial V_2}{\partial z}(x,y,\phi(x,y)) \\ & -\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y)\frac{\partial V_1}{\partial z}(x,y,\phi(x,y)) \\ & +\frac{\partial V_2}{\partial x}(x,y,\phi(x,y)) - \frac{\partial V_1}{\partial y}(x,y,\phi(x,y))dxdy\end{aligned} \tag{A.1.1}$$

(e) On note

$$P(x,y) = V_3(x,y,\phi(x,y))\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y), Q(x,y) = V_3(x,y,\phi(x,y))\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y).$$

Montrer que

$$\int_C P dx + Q dy = \int_\Gamma V_3 dz.$$

(f) Utiliser le théorème de Green-Riemann pour calculer $\int_C P dx + Q dy$.

(g) En déduire :

$$\begin{aligned}\int_\Gamma V_3 dz \quad = \quad & \iint_D -\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y)\frac{\partial V_3}{\partial y}(x,y,\phi(x,y)) \\ & +\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y)\frac{\partial V_3}{\partial x}(x,y,\phi(x,y))dxdy\end{aligned} \tag{A.1.2}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

3. Utiliser les équations A.1.1 et A.1.2 pour conclure :

$$\iint_S \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{V}.\vec{n}d\sigma = \int_\Gamma V_1dx + V_2dy + V_3dz$$

Solution

Exercice A.1.2 Ch8-Exercice2

On définit la surface S par $\{z = 0, (x, y) \in D\}$, on appelle Γ le bord de D orienté dans le sens trigonométrique.
On définit le champ de vecteurs $\vec{V} = (P(x, y), Q(x, y), 0)$.

1. Calculer $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}$.
2. Déterminer la normale unitaire à S dont l'orientation est cohérente avec l'orientation de Γ.
3. Calculer le flux du champ de vecteurs $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}$ à travers la surface S ainsi orientée.
4. Retrouver l'égalité de Green-Riemann :

$$\int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)dxdy = \int_\Gamma Pdx + Qdy$$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.3 Ch8-Exercice3

1. On définit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y^2 + (z-1)^2 = 1, z \geq 1, 0 \leq x \leq 1\}$.
   On oriente S par les normales qui font un angle aigu avec Oz. On appelle Γ le bord de S orienté de façon cohérente avec S.
   (a) Faire une figure représentant S et Γ, présicer sur la figure l'orientation de Γ.
   (b) Paramétrer Γ.
   (c) Calculer la circulation le long de Γ du champ de vecteurs
   $$\vec{U} = \left(\frac{z^2}{2}, \frac{x^2}{2}, \frac{y^2}{2}\right).$$
   Réponse : 1
   (d) Utiliser le théorème de Stokes-Ampère pour retrouver le résultat précédent.
2. On définit la surface S d'équation $z = x^2 + y^2, z \leq 1$. On oriente S par les normales qui font un angle aigu avec Oz. On appelle Γ le bord de S orienté de façon cohérente avec S.
   (a) Faire une figure représentant S et Γ, présicer sur la figure l'orientation de Γ.
   (b) Paramétrer Γ.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.3
Ch8-Exercice3

(c) Calculer la circulation le long de Γ du champ de vecteurs

$$\vec{U} = \left(\frac{z^2(y-1)}{2}, 1, xyz \right).$$

Réponse : $-\frac{\pi}{2}$

(d) Retrouver le résultat précédent en utilisant le théorème de Stokes-Ampère .

Solution

Exercice A.1.4 Ch8-Exercice4

$\mathcal{B}$ est la boule de centre O et de rayon R, S est la sphère de centre O et de rayon R orientée vers l'extérieur de $\mathcal{B}$.

$\vec{V} = (x, y, z)$.

1. Quel est le volume de $\mathcal{B}$? En déduire

$$\iiint_{\mathcal{B}} \mathrm{div}\, \vec{V} dxdydz$$

2. Quelle est l'aire de S ? En déduire

$$\iint_{S} \vec{V}.\vec{n} d\sigma$$

   Comparer.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.5 Ch8-Exercice5

Soit

$$\vec{V}(M) = \begin{pmatrix} V_1(x,y,z) \\ V_2(x,y,z) \\ V_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1(x,y,z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ V_2(x,y,z) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_3(x,y,z) \end{pmatrix}$$

On note $\vec{U}_3(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_3(x,y,z) \end{pmatrix}$

On suppose que $\mathcal{V} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x,y) \in D_3, \varepsilon(x,y) \leq z \leq \phi(x,y)\}$ conformément à la figure A.1.2.

1. (a) Calculer div $\vec{U}_3(M)$

   (b) Montrer que :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{U}_3(M) dxdydz = \iint_{D_3} V_3(x,y,\phi(x,y)) - V_3(x,y,\varepsilon(x,y))dxdy.$$

2. (a) On appelle S^+ la surface d'équation $\{z = \phi(x,y), (x,y) \in D_3\}$, on oriente cette surface "vers le haut".
   Calculer $\Phi_{S^+}(\vec{U}_3)$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

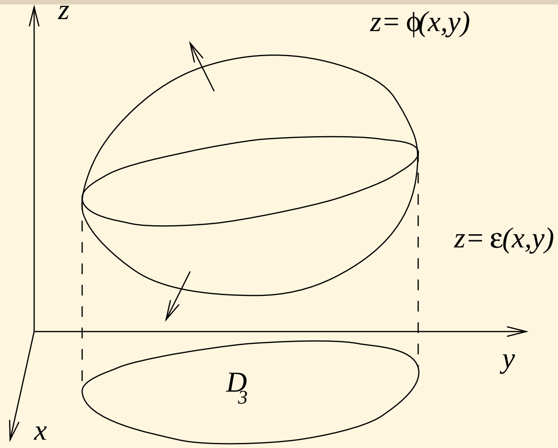


FIG. A.1.2:

(b) On appelle S^- la surface d'équation $\{z = \varepsilon(x,y), (x,y) \in D_3\}$, on oriente cette surface "vers le bas".
Calculer $\Phi_{S^-}(\vec{U_3})$.

(c) En déduire que

$$\iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{U_3} dxdydz = \Phi_S(\vec{U_3}).$$

3. Des calculs similaires pour V_2 et V_3 permettraient de terminer la démonstration du théorème de Gauss-Ostrogradski.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.6 Ch8-Exercice6

Soit $\mathcal{V}$ un volume de $\mathbb{R}^3$ dont la frontière est S. Ce volume contient des charges électriques dont la densité est σ. La quantité de charges contenues dans $\mathcal{V}$ est donc :

$$q = \iiint_{\mathcal{V}} \sigma(x,y,z)dxdydz$$

$\vec{E}$ est le champ électrique. La forme locale de la loi de Gauss est :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \epsilon_0 \text{ constante}$$

En déduire la loi de Gauss :

$$\iint_S \vec{E}.\vec{n}d\sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.7 Ch8-Exercice7

On définit le volume $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$,
Le champ de vecteurs $\vec{V} = (z, x, y)$.
Que vaut $\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{V} dxdydz$?
Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Gauss-Ostrogradski.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.8 Ch8-Exercice8

$\mathcal{V} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2 \leq z \leq 1\}$. On appelle S la surface qui limite $\mathcal{V}$. On oriente S vers l'extérieur de $\mathcal{V}$.

1. Faire une figure représentant $\mathcal{V}$ et les différentes parties de S.
2. Paramétrer chacune des parties de S et déterminer pour chacune d'elles les vecteurs normaux unitaires correctement orientés.
3. On définit $\vec{V} = (xz, z, -\frac{z^2}{2})$
   (a) Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}$ à travers S.
   (b) Calculer $\operatorname{div} \vec{V}$, comparer.
4. On définit $\vec{V} = (-xz, x, zx^2)$
   (a) Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}$ à travers S. Réponse : $-\frac{\pi}{4}$
   (b) Retrouver le résultat précédent en utilisant le théorème de Gauss-Ostrogradski.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.9 Ch8-Exercice9

S est une surface plane, $\vec{n}$ est un vecteur normal unitaire à S, p est la pression supposée constante. Donner l'expression de la force de pression

$$\vec{F} = \int\int_S p\vec{n}d\sigma$$

Solution

Exercice A.1.10 Ch8-Exercice10

L'espace est muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

S est une surface fermée qui limite un volume V, on note $\vec{n}$ le champ de vecteurs normaux unitaires dirigés vers l'extérieur de V.

La fonction p est définie par : $p(z) = p_0 - \rho g z, \;\; p_0, \rho, g$ sont des constantes.

On définit les champs de vecteurs $\vec{v}_1 = -p\vec{\imath}, \;\; \vec{v}_2 = -p\vec{\jmath}, \;\; \vec{v}_3 = -p\vec{k}$.

Utiliser le théorème de Gauss-Ostrogradski pour calculer :

$$\iint_S \vec{v}_1 \cdot \vec{n} d\sigma, \;\; \iint_S \vec{v}_2 \cdot \vec{n} d\sigma, \;\; \iint_S \vec{v}_3 \cdot \vec{n} d\sigma$$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exercices de TD

Exercice A.2.1 reprise d'exo du chapitre 7

1. On considère la surface $\mathcal{S}$ qui limite le volume

$$\mathcal{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad x - 2y + 2z \leq 0,\ x \geq 0,\ z \geq 0,\ y \leq 1\right\}$$

et orientée par la normale intérieure. On a déjà calculé que le flux à travers $\mathcal{S}$ du champ de vecteurs $\vec{V}(x^2+1, y^2, z^2)$ vaut -1. Retrouver ce résultat en utilisant un théorème intégral.

2. Soit Σ la sphère de centre 0 et de rayon R, orientée par la normale extérieure. On a déjà calculé que le flux à travers Σ du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,0)$ vaut $\frac{8\pi R^3}{3}$. Retrouver ce résultat en utilisant un théorème intégral.

3. Soit $\mathcal{C}$ le bord de la surface

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 = R^2,\ h_1 \leq z \leq h_2,\ y \geq 0\right\}$$

La circulation de $\vec{V}(-y,-z,-x)$ le long de cette courbe vaut $2R(h_2 - h_1)$. Retrouver ce résultat en utilisant un théorème intégral.

4. On considère la surface

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 = z,\ z + 2y \leq 3\right\}$$

et le champ de vecteurs $\vec{V}(1, \frac{x^3}{3}, 1)$. Calculer le flux de $\mathrm{rot}\vec{V}$ à travers Σ. Préciser sur une figure l'orientation choisie. Retrouver le résultat en utilisant un théorème intégral.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

5. On considère la surface

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad 1+\sqrt{x^2+y^2} = z,\ z \le 3,\ x \ge 0\right\}$$

et le champ de vecteurs $\vec{V}((z-1)^2, x, y)$. Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long du bord de Σ. Préciser sur une figure l'orientation choisie. Retrouver le résultat en utilisant un théorème intégral.

6. On considère le volume

$$\mathcal{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2\right\}$$

et le champ de vecteurs $\vec{V}(z,x,y)$. Calculer de 2 façons différentes $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\vec{V}\,dxdydz$.

7. On considère le volume (où $a > 0$)

$$\mathcal{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad 0 \le z \le \sqrt{a^2-x^2-y^2}\right\}$$

et le champ de vecteurs $\vec{V}(xz^2, -z^2, y^2z)$. Calculer de 2 façons différentes $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\vec{V}\,dxdydz$.

Exercice A.2.1
reprise d'exo du chapitre 7

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.2 TD8-Exercice2

1. On considère le bord $\mathcal{C}$ du domaine de $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{D} = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2; \quad (y^2+z^2) \leq 1,\ y \geq 0,\ \frac{-1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2} \right\}$$

   (a) Faire une figure.
   (b) Calculer l'aire de $\mathcal{D}$ à l'aide du théorème de Green-Riemann.

2. Soit Γ le bord de la surface

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2+y^2+z^2 = 1,\ \frac{-1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2},\ x \geq 0,\ y \geq 0 \right\}$$

   (a) i. Faire une figure.
   ii. Donner les composantes d'une normale unitaire à Σ.
   (b) Soit une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue.
   i. Exprimer l'intégrale de surface $\int\int_\Sigma f\, d\sigma$ à l'aide des coordonnées sphériques, puis à l'aide des coordonnées cartésiennes (y,z).
   ii. En déduire l'aire de Σ.
   (c) Soit le champ de vecteurs $\vec{V}(\frac{-z^2}{2}, xy, y)$.
   Calculer directement le flux de rot$\vec{V}$ à travers la surface Σ, puis retrouver ce résultat en utilisant un théorème intégral.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.3 TD8-Exercice3

1. On considère le bord $\mathcal{C}_1$ du domaine de $\mathbb{R}^2$

$$\Sigma_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad x \geq 0,\ -2 \leq y \leq 2,\ x + 2y \leq 6\right\}$$

   (a) Faire une figure.

   (b) En supposant que la densité surfacique est $\mu(x, y) = 1$, calculer le moment d'inertie de Σ_1 par rapport à l'axe Ox.

   (c) On oriente $\mathcal{C}_1$ dans le sens trigonométrique. Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_1} dx + xy^2 dy$. Retrouver ce résultat à l'aide du théorème de Green-Riemann.

2. On considère

$$\Sigma_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad y^2 + z^2 = 4,\ x \geq 0,\ z \geq 0,\ x + 2y \leq 6\right\}$$

   (a) Faire une figure représentant Σ_2 et sa projection sur le plan $z = 0$.

   (b) Donner les composantes de $\vec{n}_2$, normale unitaire à Σ_2. Préciser l'orientation choisie sur la figure.

   (c) Soit le champ de vecteurs $\vec{V}(1, zy, 0)$. Déterminer le flux de $\vec{V}$ à travers Σ_2.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.3
TD8-Exercice3

3. On considère le domaine de $\mathbb{R}^3$ suivant

$$\mathcal{V} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad y^2 + z^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ z \geq 0,\ x + 2y \leq 6\right\}$$

   Faire une figure et calculer l'intégrale $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{V}} z dx dy dz$.

4. On note Σ la surface limitant $\mathcal{V}$, orientée par la normale sortant de $\mathcal{V}$. On considère le champ de vecteurs $\vec{V}(1, zy, 0)$.
   (a) Calculer div$\vec{V}$ et calculer le flux de $\vec{V}$ à travers Σ à l'aide de théorèmes intégraux.
   (b) Décrire les différentes parties de Σ. Donner leurs normales unitaires respectives.
   (c) On définit

$$\Sigma_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0,\ x + 2y = 6\right\}$$

   Calculer le flux de $\vec{V}$ à travers Σ_3. Utiliser les questions précédentes pour retrouver ce résultat.

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Solution de l'exercice A.1.1

1. (a)

$$\overrightarrow{\textbf{rot}}\,\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

   (b) On utilise la règle du tire-bouchon de Maxwell pour montrer qu'alors la surface est orientée "vers le haut".

   (c) $\varepsilon = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}\Phi_S(\overrightarrow{\textbf{rot}}\,\vec{V}) = \iint_D \quad & -\tfrac{\partial \phi}{\partial x}(x,y)\left(\tfrac{\partial V_3}{\partial y}(x,y,\phi(x,y)) - \tfrac{\partial V_2}{\partial z}(x,y,\phi(x,y))\right) \\ & -\tfrac{\partial \phi}{\partial y}(x,y)\left(\tfrac{\partial V_1}{\partial z}(x,y,\phi(x,y)) - \tfrac{\partial V_3}{\partial x}(x,y,\phi(x,y))\right) \\ & +\tfrac{\partial V_2}{\partial x}(x,y,\phi(x,y)) - \tfrac{\partial V_1}{\partial y}(x,y,\phi(x,y)) \;\; dxdy\end{aligned} \tag{A.2.3}$$

2. (a)

$$\begin{cases} x = a(t) \\ y = b(t) \\ z = c(t) = \phi(a(t), b(t)) \end{cases} \qquad t : t_0 \to t_1.$$

   (b)

$$\int_\Gamma V_1 dx + V_2 dy = \int_{t_0}^{t_1} V_1(a(t), b(t), c(t))a'(t) + V_2(a(t), b(t), c(t))b'(t)dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} V_1(a(t), b(t), \phi(a(t), b(t)))a'(t) + V_2(a(t), b(t), \phi(a(t), b(t)))b'(t)dt.$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \widetilde{V}_1(a(t), b(t))a'(t) + \widetilde{V}_2(a(t), b(t))b'(t)dt$$

$$= \int_C \widetilde{V}_1 dx + \widetilde{V}_2 dy$$

(c)

$$\int_C \widetilde{V}_1 dx + \widetilde{V}_2 dy = \iint_D \frac{\partial \widetilde{V}_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial \widetilde{V}_1}{\partial y}(x, y).$$

On calcule les dérivées partielles de $\widetilde{V}_1$ et $\widetilde{V}_2$

$$\frac{\partial \widetilde{V}_2}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial V_2}{\partial x}(x, y, \phi(x, y)) + \frac{\partial V_2}{\partial z}(x, y, \phi(x, y))\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial \widetilde{V}_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial V_1}{\partial y}(x, y, \phi(x, y)) + \frac{\partial V_1}{\partial z}(x, y, \phi(x, y))\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y)$$

(d) Il suffit de recoller les morceaux.

(e)

$$\int_\Gamma V_3 dz = \int_{t_0}^{t_1} V_3(a(t), b(t), c(t))c'(t)dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} V_3(a(t), b(t), \phi(a(t), b(t)))\frac{\partial \phi}{\partial x}(a(t), b(t))a'(t) + V_3(a(t), b(t), \phi(a(t), b(t)))\frac{\partial \phi}{\partial y}(a(t), b(t))b'(t)dt.$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} P(a(t), b(t))a'(t) + Q(a(t), b(t))b'(t)dt$$

$$= \int_C P dx + Q dy$$

(f)
$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial V_3}{\partial x}(x,y,\phi(x,y))\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial V_3}{\partial y}(x,y,\phi(x,y))\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y)$$

d'où

$$\int_C Pdx + Qdy = \int\int_D \frac{\partial V_3}{\partial x}(x,y,\phi(x,y))\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial V_3}{\partial y}(x,y,\phi(x,y))\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y)$$

(g) On recolle les morceaux.

3. On a calculé le flux de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$ à travers S dans la première question, la deuxième question nous permet d'obtenir la circulation de $\vec{V}$ le long de Γ. On constate l'égalité.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.2

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{V} = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\right).$$

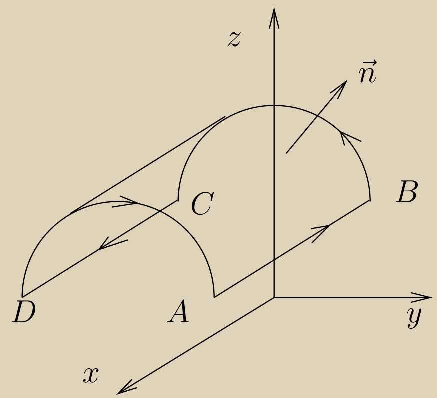
$$\vec{n} = (0, 0, 1).$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{V} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y).$$

$$\Phi_S(\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{V}) = \int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.3



1. (a)

   (b) Γ est constituée de quatre morceaux.

   Le segment AB est paramétré par :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \qquad t : 1 \to 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

   Le demi-cercle BC est paramétré par :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \cos\theta \qquad \theta : 0 \to \pi \\ z = 1 + \sin\theta \end{cases}$$

Le segment CD est paramétré par :

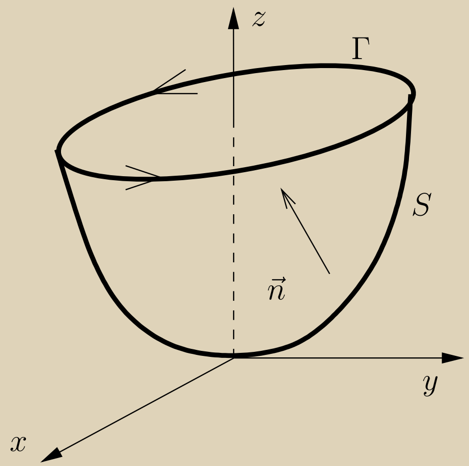
$$\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = -1 \qquad t : 0 \to 1 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

Le demi-cercle DA est paramétré par :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = \cos\theta \qquad\qquad \theta : \pi \to 0 \\ z = 1 + \sin\theta \end{array}\right.$$

(c) La circulation vaut $-\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} + 1$.

(d) On calcule $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U} = \vec{V}$,le flux de $\vec{V}$ a déjà été calculé dans le chapitre précédent, on peut reprendre le résultat.



2. (a)

   (b)

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \qquad t : 0 \rightarrow 2\pi \\ z = 1 \end{cases}$$

   (c) La circulation vaut :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(-\sin\theta)(\sin\theta - 1) + \cos\theta d\theta = -\frac{\pi}{2}$$

   Entraînez-vous à calculer les intégrales trigonométriques le plus rapidement possible.

   (d) On calcule $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U} = \vec{V}$, le flux de $\vec{V}$ a déjà été calculé dans le chapitre précédent, reprendre le résultat.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.4

$$\textbf{div}\ \vec{V} = 3, \quad \textbf{vol}\ (\mathcal{B}) = \frac{4\pi R^3}{3}\ \textbf{d'où}\ \iiint_{\mathcal{B}} \textbf{div}\ \vec{V} = 4\pi R^3$$

$$\vec{V}.\vec{n} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R} = R$$

$$\iint_S \vec{V}.\vec{n} d\sigma = R\ \textbf{aire}\ S = 4\pi R^3$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.5

1. (a) On a

$$\text{div}\, \vec{U}_3(M) = \frac{\partial V_3}{\partial z}(x, y, z).$$

(b) En utilisant l'expression de l'intégrale triple, on a :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial V_3}{\partial z}(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_3} V_3(x, y, \phi(x, y)) - V_3(x, y, \varepsilon(x, y)) dx dy.$$

2. (a) On utilise la proposition **??** pour montrer que

$$\Phi_{S^+}(\vec{U}_3) = \iint_{D_3} V_3(x, y, \phi(x, y)) dx dy$$

(b) On utilise la proposition **??** pour montrer que

$$\Phi_{S^-}(\vec{U}_3) = \iint_{D_3} -V_3(x, y, \varepsilon(x, y)) dx dy$$

(c) On en déduit que

$$\iiint_{\mathcal{V}} \text{div}\, \vec{U}_3 dx dy dz = \Phi_S(\vec{U}_3).$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.6

$$\iint_S \vec{E}.\vec{n}d\sigma = \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{div}\ \vec{E}dxdydz = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint_{\mathcal{V}} \sigma(x,y,z)dxdydz = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Retour à l'exercice ▲

div $\vec{V} = 0$, donc l'intégrale est nulle.

Retrouvons ce résultat en calculant le flux de $\vec{V}$ à travers la sphère S de centre O et de rayon R.

Une paramétrisation de S est :

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\cos\phi \\ y = R\sin\theta\cos\phi \\ z = R\sin\phi \end{cases}, \quad \begin{array}{l} 0 \leq \theta < 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \end{array}.$$

On a : $\sigma(\theta,\phi) = R^2\cos\phi$.

Un vecteur normal est $\vec{n} = (\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R})$

On a donc

$$\vec{V}.\vec{n} = \frac{xz + xy + zy}{R} = R(\cos\theta\sin\phi\cos\phi + \cos^2\phi\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\phi\sin\phi)$$

D'où :

$$\Phi_S(\vec{V}) = R^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}(\cos\theta\sin\phi\cos\phi + \cos^2\phi\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\phi\sin\phi)\cos\phi d\theta d\phi$$

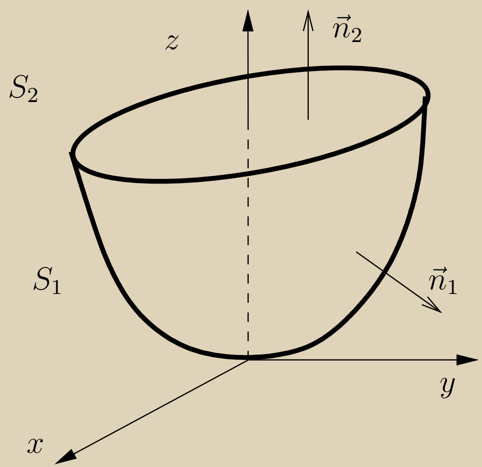
or

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta = \int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta = \int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta = 0,$$

on retrouve bien que le flux de $\vec{V}$ à travers S est nul.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.8



1. S se compose de 2 parties, un morceau de paraboloïde S_1 que l'on a déjà étudié dans le chapitre précédent et un disque S_2 qui se trouve dans le plan $z = 1$.
2. La normale à S_1 doit être dirigée vers le bas, la normale à S_2 doit être dirigée vers le haut.

$$\vec{n}_1 = \left(\begin{array}{c} \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \\ \frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \end{array} \right), \quad \vec{n}_2 = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right)$$

La paramétrisation de S_1 est :

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \quad (x, y) \in D \text{ où } D \text{ est le disque de centre } O \text{ et de rayon } 1$$

La paramétrisation de S_2 est :

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \quad (x, y) \in D \\ z = 1 \end{cases}$$

3. (a) Il faut calculer le flux à travers S_1 et S_2 correctement orientées.

$$\Phi_{S_2}(\vec{V}) = \iint_{S_2} \vec{V}.\vec{n}_2 d\sigma = -\frac{1}{2} \text{ aire } S_2 = -\frac{\pi}{2}$$

Pour le flux à travers S_1, on l'a déjà calculé dans le chapitre précédent. Est-ce la même orientation ?

   (b) Le flux est nul, c'est normal puisque $\text{div } \vec{V} = 0$.

4. (a)

$$\Phi_{S_1}(\vec{V}) = -\iint_D -2x(-x(x^2+y^2)) - 2xy + x^2(x^2+y^2)dxdy = -\iint_D 3x^2(x^2+y^2)dxdy = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Phi_{S_2}(\vec{V}) = +\iint_D x^2 dxdy = \frac{\pi}{4}.$$

On a calculé les deux intégrales sur D en utilisant les coordonnées polaires.

(b) $\text{div}\,\vec{V} = -z + x^2$

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{V}} \text{div}\,\vec{V} dxdydz &= \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{1} -z + x^2 dz \right) dxdy \\
&= \iint_D x^2 - x^2(x^2+y^2) + \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 dxdy - \frac{1}{2}\ \text{aire } D \\
&= -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

On a calculé cette intégrale en utilisant les coordonnées polaires.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.9

$\vec{n}$ **est un vecteur constant puisque** S **est plane, donc**

$$\vec{F} = p\left(\iint_S d\sigma\right)\vec{n} = pA\vec{n}$$

où A **est l'aire de** S.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.10

$$\mathbf{div}\ \vec{v}_1 = 0,\ \mathbf{div}\ \vec{v}_2 = 0,\ \mathbf{div}\ \vec{v}_3 = \rho g$$

Les deux premières intégrales sont donc nulles.

$$\int\!\!\int_S \vec{v}_3 \cdot \vec{n} d\sigma = \rho g \int\!\!\int\!\!\int_V dx dy dz = \rho g\ \mathbf{vol}\ (V)$$

Retour à l'exercice ▲