Final SY02 Automne 2008

Nom :	**Signature :**
Prénom :	

Répondre sur ce document, en ne reportant que les grandes lignes du raisonnement et les résultats (faire d'abord les calculs au brouillon). La qualité de la présentation sera prise en compte dans la notation. Aucune copie supplémentaire ne sera acceptée. Aucun document n'est autorisé, à l'exception du recueil de tables. Les calculettes sont autorisées à condition qu'elles ne contiennent aucune information relative au cours de sy02.

Exercice 1 (6 points)

On cherche à comparer la durée de vie de deux types de pneu A et B. On dispose pour cela d'un échantillon de 41 durées de vie en milliers de km pour le type A et de 21 durées de vie pour le type B. Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

	n	$\sum x_i$	$\sum x_i^2$
A	41	1840	82996
B	21	828	32752

On admettra que les 2 populations suivent les distributions normales $\mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A^2)$ et $\mathcal{N}(\mu_B, \sigma_B^2)$ et dans tout cet exercice, on prendra comme niveau de signification des différents tests la valeur $\alpha^* = 0.05$.

1. Donner les estimations sans biais de μ_A, μ_B, σ_A^2 et σ_B^2.

2. Montrer que l'on peut admettre l'hypothèse d'égalité des variances des 2 populations.

3. En déduire une estimation sans biais de la variance commune σ^2.

4. Tester l'égalité des moyennes μ_A et μ_B.

Exercice 2 (5 points)

On considère la réalisation suivante d'un échantillon iid de v.a. parente X :

$$59 \quad 44 \quad 75 \quad 37 \quad 3$$

Peut-on admettre au niveau $\alpha^* = 0.05$ que X suit une loi normale d'espérance 50 et de variance 100 ? (On utilisera un test de Kolmogorov-Smirnov.)

Exercice 3 (9 points)

On considère dans ce problème une variable aléatoire X de fonction de densité

$$f(x) = \frac{\lambda^4}{6} x^3 e^{-\lambda x} 1_{[0,+\infty[}(x)$$

avec $\lambda > 0$. On dispose d'un échantillon i.i.d $(X_1, \ldots, X_n)$ de v.a. parente X.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre λ, que l'on notera $\hat{\lambda}$.

2. Déterminer l'information de Fisher associée au paramètre λ. En supposant n grand, en déduire la loi approchée de l'estimateur $\hat{\lambda}$.

3. On considère le problème de test suivant :

$$\begin{array}{llll} H_0 : & \lambda & = & \lambda_0 \\ H_1 : & \lambda & = & \lambda_1 \quad (\lambda_1 > \lambda_0). \end{array}$$

3.1 En utilisant le théorème de Neyman-Pearson, montrer que le test optimal pour ce problème s'exprime en fonction de la statistique $\hat{\lambda}$. Donner la forme de la région critique de ce test.

3.2 En supposant n grand, déterminer l'expression littérale de la région critique exprimée en fonction de $\hat{\lambda}$, λ_0, n et du niveau de signification α^*.

3.3 Déterminer l'expression littérale de la puissance du test en fonction de λ_0, λ_1, n et de α^*.

3.4 Déterminer l'expression littérale, en fonction de λ_0, λ_1, α^* et β^*, de la taille minimale de l'échantillon permettant d'obtenir une puissance au moins égale à $1 - \beta^*$.

4 On considère cette fois les hypothèses

$$\begin{array}{llll} H_0: & \lambda & = & \lambda_0 \\ H_1: & \lambda & \neq & \lambda_0. \end{array}$$

Existe-t-il un test UPP pour ce problème ?