SV1 Chap 2 Corr TD

A10 7

Ex N°2 (supplémentaire) :

1. $Z=k/X=n$ correspond à k camions provenant de Belgique arrivant au péage sachant que n camions sont observés au péage.

Les provenances des camions étant indépendantes,

$$Z/X=n \sim \mathcal{B}(n,p), \quad p=1/3.$$

$$\mathbb{P}(Z=k/X=n) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$$

2). $$\mathbb{P}(Z=k) = \sum_{l \geq k} \mathbb{P}(Z=k \cap X=l) \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$= \sum_{l\geq k} \mathbb{P}(Z=k/X=l)\,.\,\mathbb{P}(X=l)$$

$$= \sum_{l\geq k} C_l^k \, p^k (1-p)^{l-k} \, e^{-\lambda} \frac{\lambda^l}{l!}$$

$$= \frac{p^k}{k!} \underbrace{\sum_{l\geq k} \frac{\{\lambda(1-p)\}^{l-k}}{(l-k)!} e^{-\lambda(1-p)}}_{=1} \cdot e^{-\lambda p} \lambda^k$$

$$= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \Rightarrow Z \sim \mathcal{P}(\lambda p)$$

3. $(X-Z) \sim \mathcal{P}(\lambda(1-p))$ (argument similaire).

$\forall k, \forall l \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(\{Z=k\} \cap \{X-Z=l\}) = \mathbb{P}(Z=k/X=l+k)\,.\,\mathbb{P}(X=l+k)$$

$$= \frac{1}{k!}(\lambda p)^k e^{-p\lambda} \cdot \frac{1}{l!}(\lambda(1-p))^l e^{-\lambda(1-p)}$$

$\lambda = p\lambda + (1-p)\lambda$

$$= \mathbb{P}(Z=k)\,.\,\mathbb{P}(X-Z=l) \Rightarrow \text{indépendance.}$$