

Nom :

Signature :

Prénom :

*Répondre sur ce document, en ne reportant que les grandes lignes du raisonnement et les résultats (faire d'abord les calculs au brouillon). La qualité de la présentation sera prise en compte dans la notation. Aucune copie supplémentaire ne sera acceptée. Aucun document, à l'exception du recueil de tables, n'est autorisé. Les calculatrices sont autorisées à condition qu'elles ne contiennent aucune information relative au cours de sy02.*

## Exercice 1

On dispose d'un échantillon i.i.d  $(X_1, \dots, X_n)$  de v.a. parente  $X$  dont la fonction de densité vérifie

$$f_\lambda(x) = \lambda x \exp\left(-\frac{\lambda x^2}{2}\right) 1_{[0, +\infty[}(x).$$

1. Montrer qu'il existe un estimateur efficace  $T$  de  $\frac{1}{\lambda}$  ?

2. Donner son espérance et sa variance.

3 En déduire la borne de Fréchet  $B_F\left(\frac{1}{\lambda}\right)$  et l'information de Fisher  $I_n(\lambda)$ .

4. Quel est l'estimateur  $\hat{\lambda}_{MV}$  du maximum de vraisemblance de  $\lambda$  ?

5. En déduire une fonction asymptotiquement pivotale pour  $\lambda$  et un intervalle de confiance bilatéral approché sur  $\lambda$  au niveau de confiance  $1 - \alpha$ .

*Fonction asymptotiquement pivotale :*

*Intervalle de confiance :*

## Exercice 2

On dispose d'un échantillon de taille  $n=10$  de v.a. parente  $X$  normale de moyenne 0 et de variance  $\sigma^2$  inconnue. On notera dans tout ce problème  $T$  la statistique  $\sum_{i=1}^n X_i^2$ .

On veut effectuer le test suivant :

$$\begin{aligned} H_0 : \sigma^2 &= \sigma_0^2 \quad (= 1) \\ H_1 : \sigma^2 &= \sigma_1^2 \quad (= 2). \end{aligned}$$

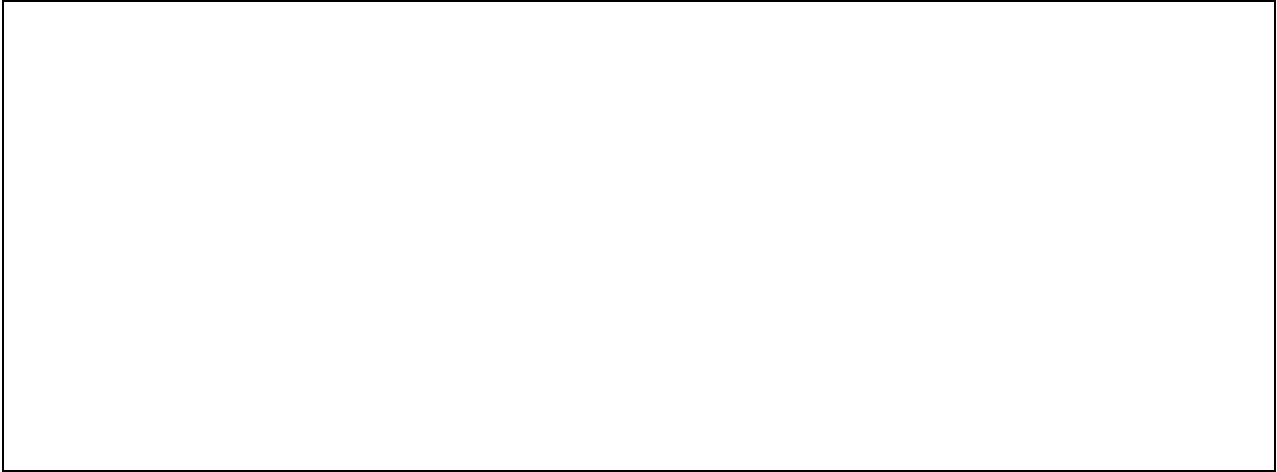
1. Déterminer la région critique optimale pour  $\alpha^* = 0.05$ .

2. Calculer la puissance du test.

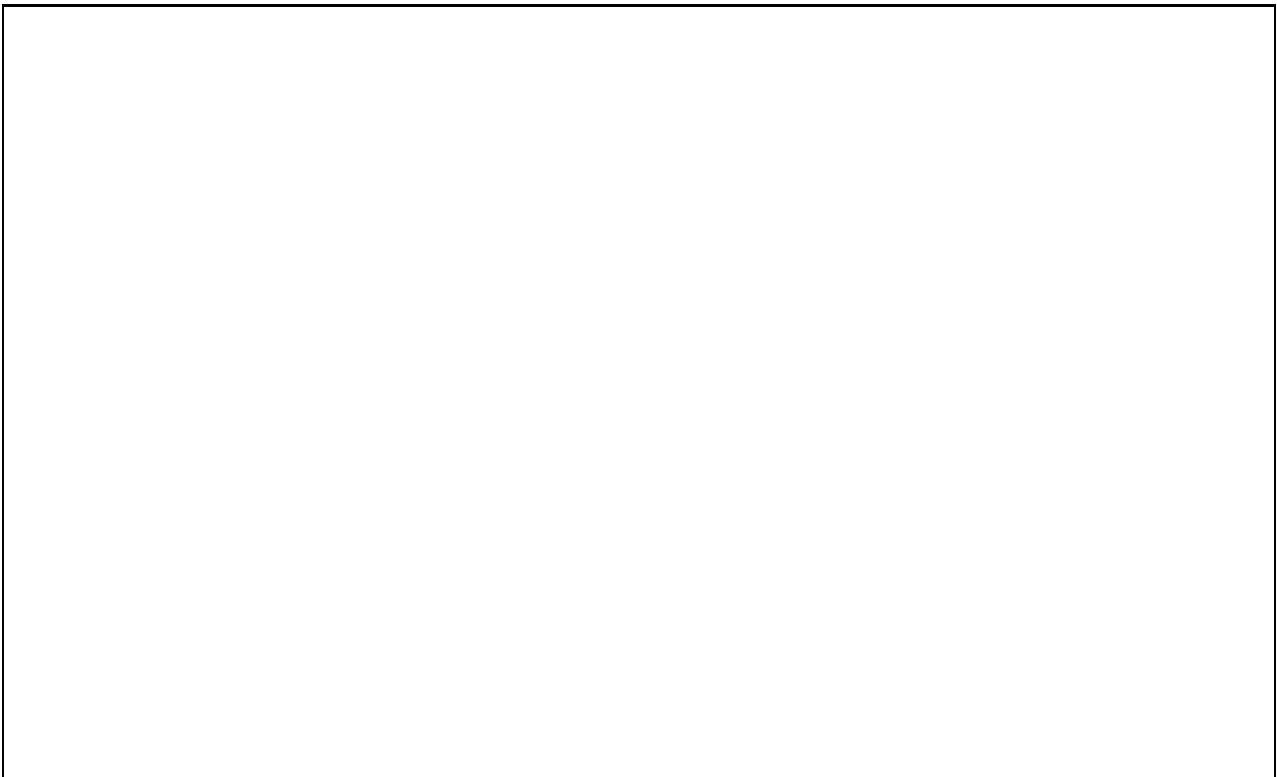
On veut maintenant effectuer le test suivant :

$$\begin{aligned}H_0 : \sigma^2 &= \sigma_0^2 \quad (= 1) \\H_1 : \sigma^2 &> \sigma_0^2.\end{aligned}$$

- 3.** Déterminer la région critique du test UPP pour  $\alpha^* = 0.05$ .



- 4.** Calculer la puissance du test pour les valeurs  $\sigma^2 = 1, 2, 3, 4, 5$  (approximativement) et tracer la courbe de puissance.



### Exercice 3

On désire savoir si, chez les individus qui consomment régulièrement de l'huile d'olive, le risque cardio-vasculaire est diminué. On utilise pour cela le logarithme du dosage en d-dimères. Sur un échantillon de 9 individus consommant de l'huile d'arachide, on a observé une moyenne empirique  $\bar{x}$  de -0.78, avec une variance empirique corrigée  $s_X^{*2}$  de 0.0729. Sur un échantillon de 13 individus consommant de l'huile d'olive, on a observé une moyenne empirique  $\bar{y}$  de -0.97, avec une variance empirique corrigée  $s_Y^{*2}$  de 0.1024. On admettra que les 2 populations suivent des distributions normales.

1. Tester l'hypothèse d'égalité des variances pour  $\alpha^* = 0.05$ .

2. Quel test proposez-vous pour décider si l'huile d'olive abaisse significativement le risque cardio-vasculaire, c'est-à-dire le dosage en d-dimères ? Quelle est votre conclusion ? On prendra  $\alpha^* = 0.05$ .

## Exercice 4

Le centre de transfusion sanguine de Pau a observé la répartition suivante sur 5000 donneurs.

	<i>Groupe</i>			
<i>Facteur</i>	<i>O</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>AB</i>
<i>Rhesus+</i>	2291	1631	282	79
<i>Rhesus-</i>	325	332	48	12

Peut-on considérer, au niveau de signification de 5 %, que le groupe sanguin et le rhésus sont indépendants ?

## Exercice 5

On considère la réalisation suivante d'un échantillon iid de v.a. parente  $X$  :

9.1   7.4   17.2   10.7   15.5

Peut-on admettre au niveau  $\alpha^* = 0.05$  que  $X$  suit une loi normale d'espérance 10 et de variance 4 ? (On utilisera un test de Kolmogorov-Smirnov.)