SY01: Corrigé de quelques exercices du chapitre 3

Exercice 20

(a) Fait en cours;

(b) Nous savons déjà que la propriété est vérifiée aux rangs 1 et 2. On suppose maintenant qu'elle est vérifiée au rang n: On note pour tout n, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et on suppose que S_n admet pour densité

$$f_{S_n}(x) = \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x),$$

c'est à dire que $S_n \sim Er(n, \lambda)$. Alors, on regarde $S_{n+1} = Sn + X_{n+1}$. Comme S_n et X_{n+1} sont indépendanes, la densité de S_{n+1} s'écrit donc pour tout x

$$\begin{aligned} f_{S_{n+1}}(x) &= f_{X_{n+1}} * f_{S_n}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_{X_{n+1}}(x_y) f_{S_n}(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda e^{-\lambda(x-y)}\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x-y)\frac{(\lambda y)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(y)\, dy, \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Or, pour tout y,

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x-y)\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq y \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc, l'intégrale précédente égale:

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \lambda e^{-\lambda(x-y)}\frac{(\lambda y)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{[0,x]}(y)\, dy & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Finalement, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_{S_{n+1}}(x) &= \left(\int_0^x \lambda e^{-\lambda(x-y)}\frac{(\lambda y)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda e^{-\lambda y}\, dy\right).\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x) \\ &= \left(\int_0^x \lambda e^{-\lambda x}\frac{(\lambda y)^{n-1}}{(n-1)!}\, dy\right).\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x) \\ &= \lambda e^{-\lambda x}\left(\int_0^x \frac{(\lambda y)^{n-1}}{(n-1)!}\, dy\right).\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x) \\ &= \lambda e^{-\lambda x}\left[\frac{(\lambda y)^n}{n!}\right]_0^x .\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x) \\ &= \lambda e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^n}{n!}\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x), \end{aligned}$$

et donc l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $n+1$. Elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Soit Y, indépendante des X_i et de loi $Geo(p)$. On s'intéresse à $Z = \sum_{i=1}^{Y} X_i$, qui consiste en une somme d'un nombre *aléatoire* de variables aléatoires X_i. Donc, p.s., Z s'écrit comme une somme de v.a. abs. continues, donc elle est abs. continue elle-même. Regardons sa fonction de répartition. Tout d'abord, Z est clairement p.s. positive en tant que somme p.s. de v.a. p.s. positives. Donc $F_Z(x) = 0$ pour tout $x < 0$. Ensuite, pour tout $x \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
F_Z(x) &= \mathbf{P}\left[Z \leq x\right] \\
&= \mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^{Y} X_i \leq x\right] \\
&= \mathbf{P}\left[\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left(\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x\right\} \cap \{Y = n\}\right)\right] \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x\right] \mathbf{P}\left[Y = n\right],
\end{aligned}
$$

d'après l'indépendance de Y avec les X_i. Remarquez la technique, très classique, employée ici: l'évènement dont on cherche la proba dépend de Y et des X_i, et on veut trier les problèmes: alors on "neutralise" l'aléa de Y en partitionnant l'événement sur toutes les valeurs possibles de Y. Ensuite, il n'y a plus qu'à utiliser l'indépendance avec les X_i. Fianelement, on a donc

$$F_Z(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} F_{S_n}(x) \mathbf{P}\left[Y = n\right].$$

Pour trouver la valeur de la densité de Z en x, il n'y a qu'à dériver F_Z en ce point! On a donc

$$
\begin{aligned}
f_Z(x) &= F'_Z(x) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} F'_{S_n}(x) \mathbf{P}\left[Y = n\right] \quad \text{en dérivant sous le signe somme} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_{S_n}(x) \mathbf{P}\left[Y = n\right] \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x)(1-p)^{n-1} p \\
&= \lambda p e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x) \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{((\lambda x)(1-p))^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \lambda p e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x) \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{((\lambda x)(1-p))^{k}}{(k)!} \quad \text{en posant } k = n-1 \\
&= \lambda p e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x) e^{\lambda x(1-p)} \quad \text{par définition de l'exponentielle en tant que série entière} \\
&= \lambda p e^{-\lambda p x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x).
\end{aligned}
$$

Autrement dit, Z suit la loi $\varepsilon(\lambda p)$. Impressionnant, n'est-il pas?

(d) En particulier, on retrouve que

$$\mathbf{E}\left[Z\right] = \frac{1}{p\lambda} = \mathbf{E}\left[Y\right] \mathbf{E}\left[X_1\right] \text{ et } Var[Z] = \frac{1}{(p\lambda)^2},$$

ce qui se comprend aisément: l'espérance de Z est le nombre moyen de fois que l'on somme (i.e. $\mathbf{E}\left[Y\right]$) fois la valeur moyenne de ce que l'on somme (i.e. $\mathbf{E}\left[X_1\right]$).

Exercice 10

(a) La valeur de la résistance équivalente aux deux mises en série est la somme des deux. Notons R_1, la valeur de la première (issue de la première machine) et R_2, la valeur de la seconde (seconde machine). La resistance équivalente a pour valeur $R = R_1 + R_2$.

Comme R_1 et R_2 sont indépendantes et de loi Gaussienne, leur somme suit une loi Gaussienne. Plus précisément, on a

$$R \sim \mathcal{N}(100+200;16+9) = \mathcal{N}(300;25)$$

.

(b) On cherche la probabilité suivante: $\mathbf{P}[R \in [290,305]]$. On va la retrouver en se ramenant à la loi centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, dont on connait la table de la fonction de répartition. On a

$$\mathbf{P}[R \in [290,305]] = \mathbf{P}[-10 \le R-300 \le 5] = \mathbf{P}\left[-2 \le \frac{R-300}{5} \le 1\right].$$

Or, on sait (c'est dans le cours) que la v.a. $U = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$ dès que $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Donc, ici, $U = \frac{R-300}{5} \sim \mathcal{N}(0,1)$. On cherche donc en fait $\mathbf{P}[-2 \le U \le 1]$, où $U \sim \mathcal{N}(0,1)$. Cette probabilité égale formellement $F_U(1) - F_U(-2)$. Pour déterminer sa valeur, on regarde la table de la f.d.r. de la $\mathcal{N}(0;1)$, qui donne des valeurs de $F_U(x)$ pour différentes valeurs de x. Or, ne figurent sur la table que des valeurs de x positives, ce qui pose problème pour -2! Pour contourner cette difficulté, il suffit de remarquer que, par parité de la densité de $\mathcal{N}(0,1)$, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et donc $F_U(-2) = 1 - F_U(2)$! En fait ceci est vrai pour tout x: $F_U(-x) = 1 - F_U(x)$.

Finalement, on a donc

$$\mathbf{P}[R \in [290,305]] = F_U(1) - (1 - F_U(2)) = F_U(1) + F_U(2) - 1 = 0,8413 + 0,9772 - 1 = 0,8185,$$

où l'on a lu les valeurs de $F_U(1)$ et $F_U(2)$ sur la table.

Exercice 22

On va mofifier légèrement la question en demandant quelle est la probabilité que $\mathbf{P}[m-2\sigma \le X \le m+2\sigma]$. Ceci a plus de sens: c'est la probabilité que la v.a. X se trouve a une distance de sa moyenne, inférieure à 2 fois son écart-type (on rappelle que l'écart type est donné par $\sigma = \sqrt{Var[X]}$, et donne l'écart moyen à la moyenne). On appelle souvent cet intervalle, un intervalle de confiance (cette probabilité est très grande pour de nombreuses loi usuelles). On a toujours, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebitcheff,

$$\mathbf{P}[m-2\sigma \le X \le m+2\sigma] = 1 - \mathbf{P}[\mid X-m \mid > 2\sigma] \ge 1 - \frac{Var[X]}{4\sigma^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{4\sigma^2} = \frac{3}{4}.$$

Exercice 13

Comme Z s'écrit comme X ou $-X$, Z est clairement une v.a. absolument continue (en fait, si $Z = XY$ où X est abs. continue, Y est discrète et X et Y sont indépendantes, Z est forcément absolument continue). Nous allons commencer par remarquer le lemme suivant:

Lemma 0.1 (Lemme)**.** *Si U est une v.a. de densité f_U paire, alors U et $V = -U$ ont même loi*

Preuve. Pour toute Φ mesurable telle que l'espérance existe, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\Phi(V)\right] &= \mathbf{E}\left[\Psi(U)\right] \quad \text{où } \Psi(x)=\Phi(-x) \text{ pour tout } x, \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(u) f_U(u)\, du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(-u) f_U(u)\, du \\
&= -\int_{+\infty}^{-\infty} \Phi(v) f_U(-v)\, dv \quad \text{en faisant le changement de variable } v=-u, \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(v) f_U(-v)\, dv \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(v) f_U(v)\, dv \quad \text{d'après la parité de } f_U, \\
&= \mathbf{E}\left[\Phi(U)\right].
\end{aligned}$$

Donc, $\mathbf{E}\left[\Phi(V)\right] = \mathbf{E}\left[\Phi(U)\right]$ pour toute fonction mesurable telle que les espérances existens. D'après la caractérisation vue en cours (l'*équivalence* entre X de densité f_X et $\mathbf{E}\left[\Phi(X)\right] = \int \Phi(x) f_X(x)\, dx$ pour toute v.a. abs. continue X), on en déduit donc que U et V ont même densité, et donc même loi. □

Au passage, on a vu le résultat très intéressant suivant: si U et V sont deux v.a. telles que $\mathbf{E}\left[\Phi(U)\right] = \mathbf{E}\left[Phi(V)\right]$ pour toute Φ mesurable telle que les espérances existent, alors U et V ont même loi!

Revenons à notre problème. La densité de X est paire, donc X et $-X$ ont même loi. Par ailleurs, pour toute Φ mesurable telle que les espérances existent,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\Phi(Z)\right] &= \mathbf{E}\left[\Phi(X)\mathbf{1}_{\{1\}}(Y)\right] + \mathbf{E}\left[\Phi(-X)\mathbf{1}_{\{-1\}}(Y)\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\Phi(X)\right]\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\{1\}}(Y)\right] + \mathbf{E}\left[\Phi(-X)\right]\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\{-1\}}(Y)\right] \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y, \\
&= \mathbf{E}\left[\Phi(X)\right]\mathbf{P}\left[Y=1\right] + \mathbf{E}\left[\Phi(-X)\right]\mathbf{P}\left[Y=-1\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\Phi(X)\right] p + \mathbf{E}\left[\Phi(-X)\right](1-p) \\
&= \mathbf{E}\left[\Phi(X)\right] p + \mathbf{E}\left[\Phi(X)\right](1-p) \quad \text{puisque } X \text{ et } -X \text{ ont même loi (Lemme précédent)}, \\
&= \mathbf{E}\left[\Phi(X)\right].
\end{aligned}$$

Donc, d'après la remarque faite après le Lemme, Z et X ont la même loi.

Supposons $p \neq \frac{1}{2}$ (le cas $\frac{1}{2}$ est un peu plus fastidieux). Alors, X et Z ne sont pas indépendantes puisque par exemple

$$\mathbf{P}\left[\{X \geq 0\} \cap \{Z \geq 0\}\right] = \mathbf{P}\left[Z \geq 0 \mid X \geq 0\right]\mathbf{P}\left[X \geq 0\right] = \mathbf{P}\left[Y=1\right]\mathbf{P}\left[X \geq 0\right] = \frac{p}{2},$$

où l'on a utilisé la parité de f_X pour voir que $\mathbf{P}\left[X \geq 0\right] = \frac{1}{2}$ (0 est donc la médiane de la loi de X). En revanche,

$$\mathbf{P}\left[X \geq 0\right]\mathbf{P}\left[Z \geq 0\right] = \left(\mathbf{P}\left[X \geq 0\right]\right)^2 = \frac{1}{4} \neq \frac{p}{2}.$$

Ceci montre bien que X et Z ne sont pas indépendants.

Exercice 23

Soit $X = e^{m+\theta}$, où $\theta \sim \mathcal{N}(0;1)$.

(1) Nous allons déterminer la densité f_X par identification. Pour toute fonction measurable positive Φ telle que l'espérance existe, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\Phi(X)\right] &= \mathbf{E}\left[\Phi\left(e^{m+\theta}\right)\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\Psi(\theta)\right], \text{ où } \Psi \text{ définie pour tout } x \text{ par } \Psi(x) = e^{m+x} \text{ est une fonction mesurable positive} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Psi(t) e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \text{ par définition,} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(e^{m+t}\right) e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.
\end{aligned}$$

On fait dans l'intégrale précédente le changement de variable $u = e^{m+t}$, ce qui implique que u varie sur $\mathbb{R}+^*$, que $t = \ln u - m$ et donc $dt = \frac{du}{u}$. Donc,

$$\mathbf{E}\left[\Phi(X)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}+} \Phi(u) \frac{e^{-\frac{(\ln u - m)^2}{2}}}{u}\, du.$$

Comme l'espérance précédente égale $\int_{\mathbb{R}} Phi(u) f_X(u)\, du$ par définition, on retrouve par identification la densité de X: pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$f_X(u) = \frac{e^{-\frac{(\ln u - m)^2}{2}}}{u} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^*}(u).$$

(2) Long. On retrouve les résultats dans la partie suivante.

(3) On cherche la transformée de Laplace de $Y = m + \theta$. En remarquant que $Y \sim \mathcal{N}(m, 1)$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
M_Y(t) &= \mathbf{E}\left[e^{tY}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ty} e^{-\frac{(y-m)^2}{2}}\, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y-m)^2 - 2ty}{2}}\, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y-(m+t))^2 - 2tm - t^2}{2}}\, dy, \text{ donnant la décomposition canonique du carré précédent} \\
&= e^{tm + \frac{t^2}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-(m+t))^2}{2}}\, dy \right).
\end{aligned}$$

Alors, on remarque que l'intégrale entre parenthèses n'est autre que l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de la densité de la loi $\mathcal{N}(m+t, 1)$. Celle-ci vaut donc 1! Finalement, on a $M_Y(t) = e^{tm + \frac{t^2}{2}}$. Cette technique est à retenir: pour calculer une intégrale (par ex. une espérance), on fait apparaître une constante fois l'intégrale sur $\mathbb{R}$ d'une densité connue. Celle-ci vaut 1.

On peut donc retrouver l'espérance de X en voyant que

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}\left[e^Y\right] = M_Y(1) = e^{m+\frac{1}{2}}.$$

De même, le moment d'ordre 2 égale

$$\mathbf{E}\left[X^2\right] = \mathbf{E}\left[e^{2Y}\right] = M_Y(2) = e^{2m+2}.$$