MT22-PARTIEL 1 : Durée 1 heure
Seules 4 pages format A4 sont autorisées

Exercice 1 *Soit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. *Etudier la continuité de f au point $(0,0)$.*
2. *Soit la direction $\overrightarrow{d} = (d_1, d_2)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$ tel que $d_1^2 + d_2^2 = 1$. Calculer la dérivée de f dans la direction $\overrightarrow{d}$ au point $(0,0)$.*
3. *Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.*
4. *Les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont elles continues en $(0,0)$? Justifier*
5. *Peut-on conclure à la différentiabilité de f au point $(0,0)$? Justifier*
6. *La fonction $\varepsilon(x,y) = \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ admet-elle une limite lorsque $(x,y) \to (0,0)$.*
7. *En déduire si f est différentiable en $(0,0)$.*
8. *Retrouver le résultat de la question 4.*
9. *Déterminer les points critiques de f (c'est à dire les points (x^*, y^*) tels que $\overrightarrow{\nabla} f(x^*, y^*) = (0,0)$).*
10. *Les points $(x^*, y^*) \neq (0,0)$ sont-ils des extremums locaux ? Justifier.*
11. *Le point $(0,0)$ est-il un point critique ? Si oui est-il un maximum ? est-il un minimum ou ni l'un ni l'autre ?.*

Corrigé

1. *f est continue au point $(0,0)$ (pour le voir, il suffit de suivre la méthode proposée en TD (voir corrigé du TD1))*
2. *Il suffit de calculer la limite lorsque $\lambda \to 0$ de $\frac{f(\lambda d_1, \lambda d_2)}{\lambda}$ (il s'agit d'appliquer la définition). On trouve $d_1^2 d_2$.*
3. *$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ (cela correspond à $d_2 = 0$), $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ ($d_1 = 0$).*
4. *$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} - \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$ n'est pas continue en $(0,0)$ (montrer qu'elle n'a pas de limite). Pour $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ c'est la même chose.*
5. *f n'est pas différentiable (voir théorème du cours)*
6. *Cette fonction n'a pas de limite lorsque $(x,y) \to (0,0)$*
7. *f est donc non différentiable (voir définition)*
8. *Si les dérivées partielles premières étaient continues, f serait différentiable (théorème du cours).*
9. *L'ensemble des points critiques $\{(0,y), y \in \mathbb{R}\}$*
10. *un simple calcule montre que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,y) = \frac{2}{y}$ pour $y \neq 0$. $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,y) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(0,y) = 0$. Par le théorème de lagrange, on montre que $(0,y)$ pour $y \neq 0$ est un minimum. Il reste le cas $(0,0)$. En effet, $f(h,k) > f(0,0) = 0$ pour $k > 0$ et $f(h,k) < f(0,0) = 0$ pour $k < 0$. Il s'agit d'un point selle*

Exercice 2 *Soit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x,y) = y^3 + x + y$$

On considère la courbe de niveau 0

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$$

1. *Montrer qu'il existe un voisinage $U(0)$, un voisinage $V(0)$ et une unique fonction φ définie de $U(0)$ dans $V(0)$ telle que $\varphi(0) = 0$ et $f(x, \varphi(x)) = 0 \;\; \forall \;\; x \in U(0)$.*
2. *Montrer que $\varphi'(x) = \dfrac{-1}{3\varphi^2(x) + 1}$.*
3. *Calculer $\varphi'(0), \varphi''(0)$ et $\varphi^{(3)}(0)$.*
4. *Ecrire le développement limité à l'ordre 3 de φ au voisinage de 0.*
5. *En déduire l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage du point $(0,0)$.*
6. *On rappelle que le vecteur tangent à la courbe $\mathcal{C}$ en $(0,0)$ est donné par $\overrightarrow{T} = (1, \varphi'(0))$. Montrer que $\overrightarrow{\nabla} f(0,0)$ est orthogonal à la courbe $\mathcal{C}$ au point $(0,0)$. Faire un dessin.*
7. *Soit Δ la droite tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $(0,0)$. Montrer que*

$$M = (x,y) \in \Delta \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{\nabla} f(0,0) = 0$$

en déduire l'équation cartésienne de la droite Δ.

Corrigé

La démarche à suivre est la même que celle adoptée en TD1 (voir corrigé).