Relations

Exemples de relations

- Parallélisme
- Inclusion entre ensembles
- Attributs d'un objet
- Relations fonctionnelles
- Relation de filiation
- Relation de précédence
- Ordre alphabétique
- Relation d'égalité entre entiers
- Relations de comparaison entre réels
- Relation de divisibilité entre entiers naturels
- Relations géométriques
- Relations temporelles
- Spécification d'un match de L1…..

En fait, tout est relation !!!

Relations binaires

Définition et notations

Une relation binaire (ou graphe) $\mathcal{R}$ entre un ensemble A et un ensemble B est un sous-ensemble du produit cartésien A x B.
On note : $(a,b) \in \mathcal{R}$ ou $a \mathcal{R} b$ ou encore $\mathcal{R}(a,b)$

- Domaine de $\mathcal{R}$: $Dom(\mathcal{R}) = \{x \in A \,/\, \exists y \in B, (x,y) \in \mathcal{R}\}$
- Image de $\mathcal{R}$: $Im(\mathcal{R}) = \{y \in B \,/\, \exists x \in A, (x,y) \in \mathcal{R}\}$

Exemples de relations binaires

- Soit A = {Antoine ; Bernard ; Luc} et B = {Anne ; Brigitte ; Claire ; Eva}. Une relation binaire $\mathcal{R}$ est définie par : a $\mathcal{R}$ b ssi a est le mari de b.
  $\mathcal{R}$ = { (Antoine, Anne) ; (Bernard, Eva) ; (Luc, Brigitte) }
- Soit A = {a ; b ; c} et B = {p ; q}. Soit une relation $\mathcal{R}$ définie par : $\mathcal{R}$ = { (a, p) ; (b, p) ; (b, q) }.

Représentation des relations binaires (1)

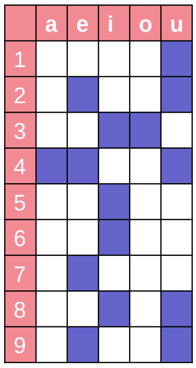
Représentation matricielle

Soient X et Y deux ensembles à m et n éléments respectivement, et $\mathcal{R} \subset X \times Y$. Matrice (r_{ij}) de taille m x n avec :

$r_{ij} = 1$ si $x_i \,\mathcal{R}\, y_j$ et $= 0$ sinon

Représentation par un diagramme cartésien

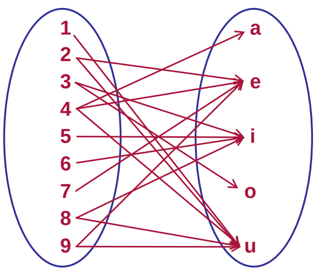
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Représentation des relations binaires (2)

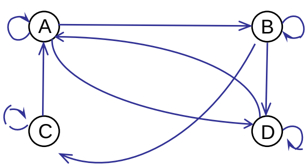
Représentation par un graphe sagittal bipartite

Pour chaque couple $(x,y) \in \mathcal{R}$, on trace une flèche allant de x vers y, donc de X vers Y $\rightarrow$ graphe partitionné en X et Y.



Représentation par un graphe sur un ensemble

E = {Anne ; Brigitte ; Claire ; Eva}.
$\mathcal{R} \subset E \times E$: x $\mathcal{R}$ y ssi x connaît y.



Propriétés des relations (1)

Réflexivité

Soit A un ensemble et soit $\mathcal{R} \subset A \times A$. On dit que $\mathcal{R}$ est réflexive ssi : $\forall x \in A, x \mathcal{R} x$

Soit A un ensemble et soit $\mathcal{R} \subset A \times A$. On dit que $\mathcal{R}$ est irréflexive ssi : $\forall x \in A$, non($x \mathcal{R} x$)

Exemples

- Soit $\mathcal{R} \subset \{1 ; 2 ; 3\} \times \{1 ; 2 ; 3\}$.
  $\mathcal{R}$ = { (1,1) ; (1,3) ; (2,2) ; (2,1) ; (3,3) } : réflexive.
- Soit $\mathcal{R}$ = { (1,1) ; (1,2) ; (2,1) } : non réflexive.

Propriétés des relations (2)

Symétrie

Soit A un ensemble et soit $\mathcal{R} \subset A \times A$. On dit que $\mathcal{R}$ est symétrique ssi : $\forall x,y \in A, x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$

Exemples

- Soit $\mathcal{R} \subset \{1 ; 2 ; 3\} \times \{1 ; 2 ; 3\}$, avec :
  $\mathcal{R}$ = { (1,1) ; (1,3) ; (3,1) ; (2,2) ; (2,3) ; (3,2) } : symétrique.
- $\mathcal{R}$ = { (1,1) ; (1,3) ; (2,2) ; (3,2) } : non symétrique.

Anti-symétrie

Soit A un ensemble et soit $\mathcal{R} \subset A \times A$. On dit que $\mathcal{R}$ est anti-symétrique ssi : $\forall x,y \in A, x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$

Propriétés des relations (3)

Transitivité

Soit A un ensemble et soit $\mathcal{R} \subset A \times A$. On dit que $\mathcal{R}$ est transitive ssi : $\forall x,y,z \in A$, $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$

Exemples

- Soit $\mathcal{R} \subset \{1 ; 2 ; 3\} \times \{1 ; 2 ; 3\}$.
  $\mathcal{R} = \{ (1,1) ; (1,2) ; (2,1) ; (2,2) ; (3,1) ; (3,2) \}$: transitive.
- $\mathcal{R} = \{ (1,1) ; (1,3) ; (2,2) ; (2,3) ; (3,2) \}$: non transitive.

Question

Est-ce qu'une relation transitive et symétrique est nécessairement réflexive ?

Opérations sur les relations (1)

Opérations classiques

Pour des relations appartenant à A x B, ce sont les opérations d'intersection, de réunion et de complémentation, comme pour tous les ensembles.

- ► L'intersection de deux relations d'équivalence est une relation d'équivalence

Composition des relations

Soient $\mathcal{R} \subset A \times B$ et $\mathcal{S} \subset B \times C$. La composée des relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ est : $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{ (a,c) \in A \times C \,/\, \exists b \in B, a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{S} c\}$

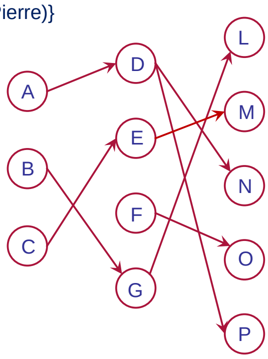
Propriétés de la composition

- ► Associative
- ► U-distributive : $(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{R} = (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}) \cup (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R})$
- ► L'inverse d'une relation $\mathcal{R}$ est la relation $\mathcal{R}^{-1}$ définie par :
  $\mathcal{R}^{-1} = \{ (b,a) \in B \times A \,/\, (a,b) \in A \times B\}$. On a : $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$.

Opérations sur les relations (2)

Composition : exemple

- Soit A = {Alain ; Bernard ; Christian} et B = {Danielle ; Eve ; Florence ; Gina}.
  Soit $\mathcal{R} \subset$ A x B définie par : a $\mathcal{R}$ b ssi a est le mari de b.
  $\mathcal{R}$ = {(Alain, Danielle) ; (Bernard, Gina) ; (Christian, Eve)}
- Soit C = {Laurent ; Marc ; Nadine ; Olga ; Pierre}.
  Soit $\mathcal{S} \subset$ B x C définie par : b $\mathcal{R}$ c ssi b est la mère de c.
  $\mathcal{S}$ = {(Danielle, Nadine) ; (Eve, Marc) ; (Florence, Olga) ; (Gina, Laurent) ; (Danielle, Pierre)}
- Dès lors :
  $\mathcal{S}$ o $\mathcal{R}$ =
  {(Alain, Nadine) ;
  (Alain, Pierre) ;
  (Bernard, Laurent) ;
  (Christian, Marc)}



Opérations sur les relations (3)

Clôture transitive

Définition

La clôture transitive de $\mathcal{R}$ est la relation $\mathcal{R}^*$ définie de la façon suivante : x $\mathcal{R}^*$ y si et seulement s'il existe un entier n > 0 et une suite finie $x_0 = x, x_1, x_2, \ldots, x_n = y$ de façon que $x_0 \mathcal{R} x_1$, $x_1 \mathcal{R} x_2, \ldots, x_{n-1} \mathcal{R} x_n$

Exemple

Soit la relation $\mathcal{R}$ dans un labyrinthe : « une case est immédiatement à côté d'une autre case ». Alors $\mathcal{R}^*$ est la relation : « il existe un chemin entre ces deux cases ».

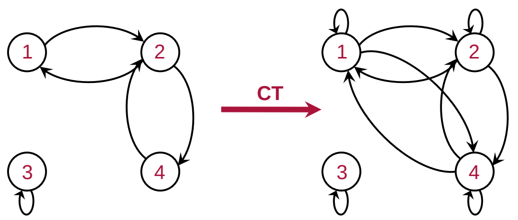
Opérations sur les relations (4)

Clôture transitive

Exemple

Soit E = {1 ; 2 ; 3 ; 4}, et la relation $\mathcal{R}$ sur E définie par :
x $\mathcal{R}$ y ssi x + y divisible par 3.

Représentation :



Relations d'équivalence (1)

Idée générale

Regrouper les éléments d'un ensemble par des propriétés mutuellement exclusives

Définition

Soit un ensemble A. $\mathcal{R} \subset$ A x A est une relation d'équivalence sur A ssi $\mathcal{R}$ est à la fois réflexive, symétrique et transitive.

- ► Notion fondamentale !
- ► Pour x $\mathcal{R}$ y, on dit alors que x est équivalent à y

Exemples

- La relation d'égalité
- La relation de parallélisme
- Les cohortes en démographie
- Et surtout…. la relation de congruence

Relations d'équivalence (2)

Classes d'équivalence

Soient un ensemble A et une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur A. Pour $x \in A$, la classe d'équivalence de x (modulo $\mathcal{R}$) est le sous-ensemble de A défini par : $C(x) = \{y \in A \,/\, x \,\mathcal{R}\, y\}$

- ► Tout élément de C(x) est un représentant de C(x)
- ► Tout élément de A appartient à une et une seule classe d'équivalence

Ensemble quotient

L'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ est l'ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$, noté $E / \mathcal{R}$.

- ► $E / \mathcal{R}$ est une partition de E
- ► Toute partition de E définit une relation d'équivalence dont les classes sont les éléments de la partition
- ► Exemple important : la construction de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Q}$.

Relations d'ordre (1)

Problématique en Informatique

La notion d'ordre intervient très souvent en informatique :

- Comment organiser de façon structurée un ensemble de données (arbres, graphes…)
- Comment gérer les récursions ?
- Comment séquencer, ordonnancer des tâches ?
- Comment parcourir un ensemble de données ?
- Comment optimiser, maximiser, … ?

Finalité en Informatique

- Définir l'ordre entre des données et les trier
- Prouver la terminaison d'un algorithme
- Optimiser
- Définir des modes de parcours, etc..

Relations d'ordre (2)

Notion d'ordre

Soit un ensemble A et une relation $\mathcal{R} \subset A \times A$. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur A ssi $\mathcal{R}$ est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive

- Un ensemble muni d'une relation d'ordre est un ensemble ordonné
- Si $\mathcal{R}$ est irréflexive, $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre strict

Exemples de relations d'ordre

- Exemple type : la relation $\leq$ sur les réels*
- La relation d'inclusion entre ensembles
- La relation de divisibilité sur les entiers non nuls
- La relation de descendance sur les arbres
- La relation de précédence pour les tâches
- La notion de tas binaire….

Relations d'ordre (4)

Ordre total ou partiel

Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble A est dite *totale* si tous les éléments sont comparables par $\mathcal{R}$, (ie) si

$\forall x,y \in A$, on a $x \mathcal{R} y$ ou $y \mathcal{R} x$

sinon $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre *partielle*.

- A est alors un ensemble totalement ou partiellement ordonné

Exemples

- Ordre total :
  - Relation $\leq$ sur les entiers
- Ordre partiel :
  - Inclusion sur les ensembles
  - Divisibilité sur les entiers
  - Succession de tâches

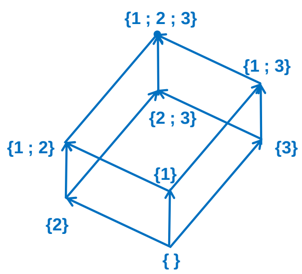
Relations d'ordre (5)

Diagramme de Hasse

Soit $\preccurlyeq$ une relation d'ordre partiel dans un ensemble A. Cet ordre peut être représenté par un diagramme de Hasse selon les principes suivants :

- Les éléments sont représentés par des sommets
- Si a $\preccurlyeq$ b on place b plus haut que a
- a et b sont joints par une arête si et seulement si a $\preccurlyeq$ b et $\nexists z \in A$, a $\preccurlyeq$ z et z $\preccurlyeq$ b

Exemple



Relations d'ordre (6)

Majoration et Minoration

Définitions

Soit un ensemble E ordonné par $\preccurlyeq$

- Soient x et y deux éléments de E. Si x $\preccurlyeq$ y, x est un minorant de y et y est un majorant de x.
- Un élément x de E est maximal (minimal) s'il ne possède pas d'autre majorant (resp. minorant) que lui-même
- Un élément x est le plus grand élément (le plus petit élément) de E si x est un majorant (resp. minorant) de tous les éléments de E

Propriétés

Soit A un ensemble ordonné fini.

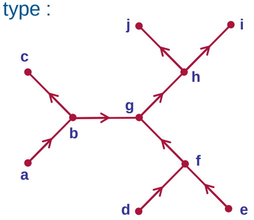
- Tout élément de A est majoré par au moins un élément maximal, et minoré par au moins un élément minimal
- Si A possède un plus grand élément, il est unique et c'est le seul élément maximal (idem pour le plus petit élément)

Relations d'ordre (7)

Majoration et Minoration

Exemples

- L'ensemble ℕ doté de ≤ n'admet pas de plus grand élément, mais admet 0 pour plus petit élément
-]0,1[doté de ≤ n'a ni plus grand, ni plus petit élément
- E : plus grand élément de P(E)
- ∅ : plus petit élément de P(E)
- Exemple type :



c, i, j maximaux

a, d, e minimaux

Pas de plus grand élément, ni de plus petit élément

Relations d'ordre (9)

Ensembles bien ordonnés

Définitions

Un ensemble ordonné (E,≼) est bien ordonné si toute partie non vide admet au moins un élément minimal.

- ► L'ordre ≼ est alors un bon ordre.
- ► Tout ensemble fini totalement ordonné est bien ordonné.

Exemples

- ► Ensembles bien ordonnés :
  - ℕ doté de la relation ≤
  - Le dictionnaire doté de la relation lexicographique
- ► Ensembles non bien ordonnés :
  - ℤ doté de la relation ≤
  - [0,1] doté de la relation ≤

Relations d’ordre (10)

Ensembles bien ordonnés : propriété équivalente

Ordre strict

Soit $(A,\preccurlyeq)$ un ensemble ordonné. On peut définir un ordre strict : $\forall(x,y) \in A \times A$, $x \prec y$ ssi $x \preccurlyeq y$ et $x \neq y$

Suite strictement décroissante

Soit $(A,\preccurlyeq)$ un ensemble ordonné. La suite infinie d’éléments de A $(x_0, x_1, x_2, \ldots.)$ est strictement décroissante si :

$\forall i \in \mathbb{N}\ \ x_{i+1} \prec x_i$

Théorème (admis)

$(A,\preccurlyeq)$ est bien ordonné ssi il n’existe pas dans A de suite infinie strictement décroissante

- Il existe une suite strictement décroissante dans $\mathbb{Z}$
- Cadre du raisonnement par induction

Treillis (1)

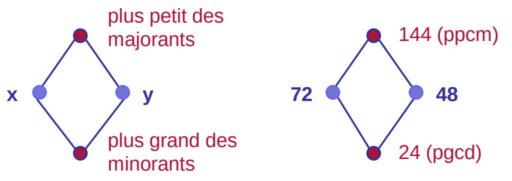
Treillis

Définitions

Un ensemble ordonné E est un treillis si toute paire d éléments x et y de E admet :

1. un plus petit majorant commun, notée Sup(x,y) ou $x \vee y$
2. un plus grand minorant commun, notée Inf(x,y) ou $x \wedge y$

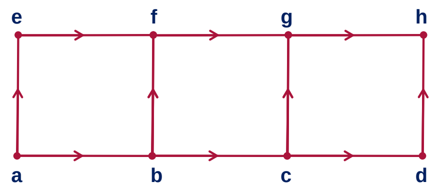
Exemple de treillis : $(\mathbb{N}^*, |)$



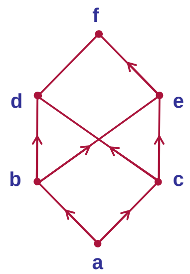
Treillis (2)

Exemples

Treillis



Pas un treillis



Relations n-aires (1)

Notion de relation n-aire

Soit n ensembles E_1, E_2, …, E_n. Une relation n-aire est un sous-ensemble du produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$.

Un élément est un n-uplet et n l'arité de la relation

Applications

- Programmation logique
- Bases de données
- Représentation des connaissances

Exemple

- Matchs de L1 :
  (OM, OGC Nice, Stade Vélodrome, 11/09)
  (PSG, OL, Parc des Princes, 15/10)
  (Bordeaux, AJ Auxerre, A. Deschamps, 03/12)….

Fonctions

:

Plan

- **Fonctions (Rappels)**
  - Notion de fonction
  - Notion d'application
- **Propriétés des fonctions**
  - Injection
  - Surjection
  - Bijection
  - Théorème de Cantor-Bernstein

Fonctions (rappels) (1)

Notion de fonction

Une fonction de E vers F est une relation de E x F telle que tout élément de E est en relation avec au plus un élément de F. On la note : $f : E \to F$

- Si x de E est en relation par f avec y de F, on note y=f(x) : y est image de x par f ou x est antécédent de y par f
- Domaine de définition D_f de la fonction f : ensemble des éléments x de E qui ont une image par f

Exemples

Soit $f \subset \{a ; b ; c\} \times \{1 ; 2 ; 3\}$

- f = {(a,1) ; (b,2)} est une fonction
  Df = {a ; b}
- f = {(a,1) ; (b,3) ; (a,2)} n'est pas une fonction

:

Fonctions (rappels) (2)

Notion d'application

Une application de E vers F est une relation de E vers F telle que tout élément de E est en relation avec un unique élément de F.

- Une application est une fonction de E vers F dont le domaine de définition est E.
- Image directe : $f(E) = \{f(x) / x \in E\}$
- Image réciproque : $f_{-1}(F) = \{x \in E / f(x) \in F\}$

Exemples

Soit $f \subset \{a ; b ; c\} \times \{1 ; 2 ; 3\}$

- f = {(a,1) ; (b,2) ; (c,1)} est une fonction
  $f(E) = \{1 ; 2\}$ et $f_{-1}(F) = \{a ; b ; c\}$
- f = {(a,1) ; (b,2)} n'est pas une application

Propriétés des fonctions (rappels)

Injection

Une application f de E vers F est injective ssi :

$\forall x,y \in E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

- Alternative : f est une injection si les images de deux éléments distincts sont distinctes

Surjection

Une application f de E vers F est surjective ssi :

$\forall y \in F\ \exists x \in E\ /\ f(x) = y$

Bijection

Une application f de E vers F est bijective ssi elle est à la fois injective et surjective

- Alternative : f est une bijection ssi $\forall y \in F\ \exists! x \in F\ /\ f(x) = y$

: