Introduction à l'UV

L'informatique en tant que discipline scientifique (1)

Dualité de l'Informatique

Un domaine technologique :

- La partie visible
- Une évolution rapide
  - De nouveaux matériels, dus aux progrès de la science
  - De nouveaux services, de nouvelles applications, dus à des avancées fondamentales

Une Science :

- Formalisation dans la première partie du 20ème siècle
- Relations privilégiées avec la logique, la linguistique et les mathématiques
- Des théories stables, formelles sur lesquelles les technologies sont fondées

☞ **Informatique théorique ou fondamentale**

L’informatique en tant que discipline scientifique (2)

Objectifs de l’Informatique Théorique

- Donner des fondements solides à l’informatique
- Permettre une meilleure définition des objets informatiques
  - structures de données
  - programmes
- Formaliser la notion d’algorithme
- Permettre la définition de langages de programmation
- Donner des outils pour analyser les programmes
  - terminaison
  - effectivité
  - efficacité
- Donner des fondements théoriques aux applications

L’informatique en tant que discipline scientifique (3)

Théorie des ensembles

Enjeux

Théorie nécessaire aux fondements des mathématiques

Un vocabulaire et des concepts utiles à l’informatique

- pour définir les relations et leurs propriétés
- pour clarifier les notions d’ordre, d’énumération
- pour définir certains concepts informatiques
- pour clarifier les propriétés et les limites des programmes

Quelques points abordés dans l’UV

- Définitions de base
- Relations, propriétés, opérations
- Ensembles finis, infinis, dénombrabilité
- Fonctions, ensembles-quotients
- Principes d’induction, définitions inductives

L’informatique en tant que discipline scientifique (4)

Logique (des propositions)

Enjeux

Un domaine au cœur de l’informatique théorique

- pour fonder la sémantique des programmes
- pour représenter et valider les raisonnements
- pour représenter des connaissances
- pour fonder la programmation déclarative…

Quelques points abordés dans l’UV

- Qu’est-ce que la Logique ?
- Le langage de la logique des propositions
- La représentation des connaissances
- Approches sémantiques et syntaxiques
- Des algorithmes

L’informatique en tant que discipline scientifique (5)

Théories fondamentales

Enjeux

Introduire des notions formelles utiles à la représentation

- des problèmes
- des langages
- des structures informatiques

La théorie des graphes

- Eléments de théorie des graphes
- Des problèmes classiques
- Problèmes de décision, de recherche

L’informatique en tant que discipline scientifique (6)

Capacités et limites d’un ordinateur

Enjeux

- Calculabilité :
  - Qu’est-ce qui est calculable avec une machine ?
  - L’arrêt d’un programme est-il décidable ?
- Complexité :
  - Quelle est la nature des problèmes à résoudre ?
  - Quelle est l’efficacité des méthodes adoptées ?

Quelques points abordés dans l’UV

- Machine de Türing
- Décidabilité
- Classification des problèmes
- Complexité des algorithmes

L’informatique en tant que discipline scientifique (7)

Automates

Machine lisant en entrée un mot qu’elle accepte ou rejette

Enjeux

- Quelles sont les langages que comprend une machine ?
- Quels sont les types de machine ?
- Traitement de Texte, Compilation, Vérification de Programme, Protocoles de Communication, ….

Quelques points abordés dans l’UV

- Automates finis
  - Définitions
  - Construction
- Langages rationnels
  - Opérations
  - Propriétés

L'informatique en tant que discipline scientifique (8)

La dualité de l'Informatique (bis)

De multiples disciplines et domaines d'application :

- Electronique → Calcul booléen
- Connaissances → Logique formelle
- Bases de données → Ensembles, Relations, Logique
- Réseaux → Théorie des graphes
- Algorithmique → Complexité
- Résolution de problèmes → Calculabilité
- Sécurité → Arithmétique
- Compilation → Théorie des langages Automates
- Programmation → Logique, λ-calcul
- Preuve de programme → Relations, Induction

………

Introduction à la théorie des ensembles

Plan

- **Généralités sur la notion d'ensembles**
  - Rôle de la théorie des ensembles
  - Définition naïve
  - Ensembles de base en informatique
- **Description d'un ensemble**
  - En extension, en compréhension
  - Problème lié à la définition intensionnelle
  - Paradoxe de Russell
  - Diagrammes de Venn et d'Euler
- **Sous-ensembles**
  - Inclusion, égalité
  - Disjonction
  - Ensemble des parties d'un ensemble
  - Quelques propriétés de P(.)
  - Partition d'un ensemble

Plan

- **Opérations sur les ensembles**
  - Intersection, union et somme disjointe
  - Différence symétrique et complémentation
  - Propriétés
  - Lois de Morgan
- **Produit cartésien de deux ensembles**
  - Définition
  - Propriétés du produit cartésien
  - Puissances d'un ensemble
- **Fonctions caractéristiques**
  - Définition
  - Propriétés

Rôle de la théorie des ensembles

Pour les mathématiques

Pour fonder les différentes branches des Mathématiques :

- Théorie naïve :
  - Le fondateur : Georg Cantor (1880)
- Axiomatisation de la théorie des ensembles
  - ZFC : Zermelo, Fraenkel, Skolem (1908-1920)

Pour l'informatique

- Pour donner un vocabulaire de base
- Pour définir rigoureusement des notions informatiques
- Pour décrire des opérations
- Pour décrire des données
- Pour analyser des programmes

Point de vue intuitif

Définition naïve

Un ensemble E est une collection d'objets :

- distincts
- bien déterminés
- définissant E sans ambiguïté.

Ces objets sont les éléments de l'ensemble.

Appartenance

La relation d'appartenance à un ensemble est notée $\in$:

- Si x est un élément de E, $x \in E$
- Si x n'est pas un élément de E : $x \notin E$

L'unique ensemble (ou ensemble vide) qui ne contient aucun élément est noté $\varnothing$ ou { }.

Exemples d'ensembles

En Mathématiques

- Ensemble des entiers naturels
- Ensemble des entiers relatifs
- Ensemble des nombres rationnels
- Ensemble des réels
- Ensemble des polygones

En informatique

- Le type booléen
- Le type caractère (char)
- Le type chaînes de caractères (string)
- Le type entier (integer)

En Sciences de la Nature

- Ensemble des quarks
- Ensemble des exo-planètes connues

Définition extensionnelle

Définition

Un ensemble est défini en extension quand on en dresse la liste (exhaustive) des éléments.

- ► Notation : {a ; b ; c}
- ► Représentation : diagramme de Venn

Propriétés

- Ordre d'énonciation des éléments sans importance
- Définition appropriée à des ensembles comportant peu d'éléments
- Les ensembles peuvent être hétérogènes
- Un ensemble peut être élément d'un autre ensemble

Question : que faire pour un grand nombre d'éléments ?

Définition intensionnelle

Définition en compréhension

Un ensemble est défini en compréhension si ses éléments sont caractérisés par une propriété que tous doivent vérifier

Notation : $E = \{x \,/\, P(x)\}$

Paradoxe de Russell

ATTENTION : une propriété ne suffit pas forcément pour définir un ensemble ! Par exemple, peut-on considérer l'ensemble E de tous les ensembles ?

Si oui, paradoxe de Russell : soit $A = \{X \in E \,/\, X \notin X\}$, qui conduit à une contradiction !

Par prudence, une parade : les éléments sont déjà définis dans un ensemble de référence U préalablement construit, appelé univers.

Dès lors : $E = \{x \in U \,/\, P(x)\}$

Décidabilité d'un ensemble

Ensemble décidable

Soit E un ensemble. E est décidable s'il existe un algorithme capable de calculer, quel que soit l'objet x, la valeur de vérité de la proposition « $x \in E$ » en un nombre fini d'étapes.

Exemples :

- l'ensemble des nombres premiers
- l'ensemble des formules bien formées de la logique des propositions

Ensemble semi-décidable

Soit E un ensemble. E est semi-décidable (ou récursivement énumérable) s'il existe un algorithme qui, pour tout $x \in E$, est capable de l'établir en un nombre fini d'étapes.

Exemple : l'ensemble des théorèmes du Calcul des Prédicats du Premier Ordre

Relations entre ensembles (rappels)

Inclusion

Un ensemble A est inclus dans un ensemble B si tout élément de A est un élément de B. On dit aussi que A est un sous-ensemble ou une partie de B.

Notation : $A \subset B$

Si de plus il existe un élément de B qui ne soit pas dans A, on dit que A est strictement inclus dans B.

Egalité

Deux ensembles A et B sont égaux si tout élément de A appartient à B et si tout élément de B appartient à A.

Notation : $A = B$

Propriété : $A = B$ ssi $(A \subset B$ et $B \subset A)$

Disjonction

Deux ensembles A et B sont disjoints s'il n'existe aucun élément qui soit commun à A et B.

Opérations ensemblistes (1)

Intersection

Soit E un ensemble, et A et B deux sous-ensembles de E. L'intersection de A et B notée $A \cap B$ est l'ensemble constitué par les éléments appartenant à la fois à A et à B.

Soit : $A \cap B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ et } x \in B\}$

Généralisation

Soit (A_i) une suite d'éléments indexés par $i \in I$, on définit :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \,/\, \forall i \in I,\ x \in A_i\}$$

Propriétés

- A et B sont disjoints ssi $A \cap B = \varnothing$.
- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$
- $A \cap E = A$ et $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap B = B \cap A$ (commutativité)
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (associativité)
- Si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$

Opérations ensemblistes (2)

Union

Soit E un ensemble, et A et B deux sous-ensembles de E. L'union de A et B notée $A \cup B$ est l'ensemble constitué par les éléments appartenant à A ou à B.

Soit : $A \cup B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Généralisation

Soit (A_i) une suite d'éléments indexés par $i \in I$, on définit :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \,/\, \exists i \in I \;\; x \in A_i\}$$

Propriétés

- $A \cup E = E$ et $A \cup \varnothing = A$
- $A \cup B = B \cup A$ (commutativité)
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativité)
- Si $A \subset B$ alors $A \cup B = B$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Opérations ensemblistes (3)

Différence

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On appelle différence de A et B l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B.

Soit : $A \setminus B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ et } x \notin B\}$

Complémentation

Soit $A \subset E$. On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

Soit : $C_E(A) = \{x \in E \,/\, x \notin A\}$ souvent noté $\overline{A}$

Propriétés de la complémentation

- $C_E(C_E(A)) = A$
- $C_E(E) = \varnothing$ et $C_E(\varnothing) = E$
- $C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B)$ (lois de Morgan)
- $C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$

Opérations ensemblistes (4)

Différence symétrique

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On appelle différence symétrique de A et B l'ensemble constitué des éléments de A qui n'appartiennent pas à B ou des éléments de B qui n'appartiennent pas à A

Soit : $A \Delta B = \{x \in E \,/\, (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A)\}$

Reformulation

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Alors :

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Ensemble des parties d'un ensemble

Définition

L'ensemble de tous les sous-ensembles ou parties d'un ensemble E est noté P(E).

Soit : $P(E) = \{X \,/\, X \subset E\}$

Quelques propriétés de P(E)

- $P(E) \neq \emptyset$
- $E \in P(E)$ et $\emptyset \in P(E)$
- $X \subset E$ ssi $X \in P(E)$
- $\{x\} \in P(E)$ ssi $x \in E$
- $P(E) = P(F)$ ssi $E = F$
- $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

  mais en général $P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B)$
- et enfin :

  E possédant n éléments, le nombre d'éléments de P(E) est égal à 2^n.

Partition

Définition

Soit E un ensemble non vide. On appelle partition de E une famille finie ou infinie de sous-ensembles de E vérifiant les propriétés suivantes :

- Aucun d'entre eux n'est vide,
- Ils sont disjoints deux à deux,
- Leur réunion est E lui-même.

► Une partition est donc un sous-ensemble de P(E).

Exemples

- Soit E = {1 ; 2 ; 3}. Alors les partitions de E sont :
  {{1 ; 2 ; 3} }
  { {1 ; 2} ; {3} }
  { {1 ; 3} ; {2} }
  { {2 ; 3} ; {1} }
  { {1} ; {2} ; {3} } ;
- Cas particuliers : E et { {x} / x $\in$ E } partitions de E.

Produit cartésien

Définition d'un couple

Un couple est une paire ordonnée d'éléments. Il peut être défini de façon ensembliste par : $(a,b) = \{ \{a\} ; \{a ; b\} \}$

Définition du produit cartésien

Le produit cartésien de deux ensembles A et B est l'ensemble des couples dont le premier élément appartient à A et dont le second élément appartient à B.

Soit : $A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$

Généralisation :

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{ (a_1,a_2,\ldots,a_n) \mid a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$

$A^n = \{ (a_1,a_2,\ldots,a_n) \mid \text{pour tout } i,\ a_i \in A\}$ $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ *n-uplet*

Exemples :

- $\{0 ; 1\} \times \{a ; b\} = \{ (0,a) ; (0,b) ; (1,a) ; (1,b) \}$
- $\{0,1\}^2 = \{ (0,0) ; (0,1) ; (1,0) ; (1,1) \}$

Fonction caractéristique

Définition

Parfois appelée fonction indicatrice.

Soit un univers U et E un sous-ensemble de U. On définit la fonction caractéristique de E, notée 1_E ou χ_E, l'application définie par :

1_E : E $\rightarrow$ {0 ; 1}

x $\mapsto$ 1 si $x \in E$

0 si $x \in E$

Propriétés

- $A \subset B \Leftrightarrow 1_A \leq 1_B$
- $1_{A \cap B} = \min\{1_A ; 1_B\} = 1_A \times 1_B$
- $1_{A \cup B} = \max\{1_A ; 1_B\} = 1_A + 1_B - 1_A \times 1_B$
- $1_{C_E(A)} = 1 - 1_A$

Relations

Plan

Relations et Informatique

De l'importance des relations en Informatique

Importance des relations :

- En logique
- En représentation des connaissances
- Pour la résolution de problèmes
- En structuration des données
- Pour l'exécution des tâches……

Importance de l'ordre en informatique :

- Comment mettre de l'ordre ?
- Comment donner du sens à cet ordre ?