MT23-Algèbre linéaire

Chapitre 3 : Déterminants

ÉQUIPE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

UTC

janvier 2011

Chapitre III
Déterminants

III.1 Définition des déterminants, propriétés et calcul 3
III.2 Autres propriétés et utilisation des déterminants 22
III.3 Systèmes linéaires 32

III.1 Définition des déterminants, propriétés et calcul

III.1.1 Définition du déterminant par récurrence 4
III.1.2 Déterminant d'une famille de vecteurs 6
III.1.3 Le déterminant et les formes multilinéaires 8
III.1.4 Propriétés du déterminant liées aux colonnes adjacentes . . 10
III.1.5 Propriétés du déterminant liées aux colonnes 12
III.1.6 Groupe des permutations 14
III.1.7 Définition du déterminant par les permutations 16
III.1.8 Propriétés du déterminant liées aux lignes 18
III.1.9 Calcul pratique des déterminants 20

III.1.1 Définition du déterminant par récurrence

Exercices :
Exercice A.1.1
Exercice A.1.2

Comme vous allez le comprendre dès la définition, la notion de déterminant ne peut être introduite que pour les matrices carrées.

Définition III.1.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, on définit par récurrence une application :*

$$\begin{array}{rccc} \det : & \mathcal{M}_{n,n} & \longrightarrow & K \\ & A & \longrightarrow & \det A \end{array}$$

de la manière suivante :

- *si $n = 1$, $A = (a)$ et on pose $\det A = a$,*
- *si $n > 1$, notons $A_{|i,j|}$ la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i^e ligne et la j^e colonne, on pose alors*
$$\det A = a_{11}\det A_{|1,1|} + \ldots + (-1)^{k+1} a_{1k}\det A_{|1,k|} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n}\det A_{|1,n|}. \quad \text{(III.1.1)}$$

Le scalaire $\det A$ *est dit* **déterminant** *de A et on le note habituellement :*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Le déterminant d'un matrice quelconque A appartenant à $\mathcal{M}_{22}$ est donc

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Le déterminant d'un matrice quelconque A appartenant à $\mathcal{M}_{33}$ est donc

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

ce qui donne

$$\text{dét } A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Proposition III.1.1. *La définition permet d'obtenir immédiatement les propriétés suivantes :*

1. *Le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure est égal au produit des termes diagonaux.*
2. *Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des termes diagonaux. En particulier le déterminant de la matrice identité est égal à* 1.
3. *Si* $\overline{A}$ *est la matrice dont les termes sont les conjugués de ceux de* A *alors*

$$\det \overline{A} = \overline{\det A}.$$

Démontrer cette proposition en exercice.

Définition du déterminant par récurrence

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.1.2 Déterminant d'une famille de vecteurs

Exercices :
Exercice A.1.3
Exercice A.1.4

Exemples :
Exemple B.1.1

Définition III.1.2. *Soient*
– *E un K-espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{E}$ dite de référence,*
– *$\vec{x}_1$,...,$\vec{x}_n$ n vecteurs de E.*
On note $X_1, ..., X_n$ les vecteurs de $\mathcal{M}_{n1}$ qui contiennent les composantes respectives des vecteurs $\vec{x}_1$,...,$\vec{x}_n$ dans la base $\mathcal{E}$, et on définit la matrice X dont les colonnes sont les vecteurs $X_1, ..., X_n$.
Alors, par définition,

$$\det(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = \det X.$$

Comme on le voit dans la définition, le déterminant d'une famille de vecteurs dépend de la base de référence.
Dans la suite, toutes les propriétés des déterminants obtenues à l'aide des colonnes X_i de X, pourront être énoncées à l'aide des $\vec{x}_i$ et réciproquement.

Cas particulier : Si E est le plan vectoriel muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, on définit $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2, \vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$, alors :

$$\det(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Dans ce cas $\det(\vec{x}, \vec{y})$ représente l'aire (algébrique) du parallélogramme construit sur $\vec{x}$ et $\vec{y}$.
Le signe est
- positif si l'angle orienté $(\vec{x}, \vec{y})$ est tel que $0 \leq (\vec{x}, \vec{y}) \leq \pi \pmod{2\pi}$,
- négatif si l'angle orienté $(\vec{x}, \vec{y})$ est tel que $\pi \leq (\vec{x}, \vec{y}) \leq 2\pi \pmod{2\pi}$.

Le déterminant de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ s'interprète géométriquement comme le produit mixte de ces vecteurs (voir l'exemple).

III.1.3 Le déterminant et les formes multilinéaires

Exercices :
Exercice A.1.5
Exercice A.1.6
Exercice A.1.7

La propriété de multilinéarité du déterminant par rapport aux colonnes de la matrice est donnée dans le théorème suivant :

Théorème III.1.1. *Le déterminant est une fonction linéaire de chaque colonne, donc une* **application multi-linéaire** *de l'ensemble des colonnes, c'est à dire*

$$\det(A_1,\ldots,A_{k-1},\lambda A_k,A_{k+1},\ldots,A_n)=\lambda\det(A_1,\ldots,A_{k-1},A_k,A_{k+1},\ldots,A_n) \quad \text{(III.1.2)}$$

$$\begin{aligned}\det(A_1,\ldots,A_{k-1},B+C,A_{k+1},\ldots,A_n) &= \det(A_1,\ldots,A_{k-1},B,A_{k+1},\ldots,A_n)\\ &+ \det(A_1,\ldots,A_{k-1},C,A_{k+1},\ldots,A_n).\end{aligned} \quad \text{(III.1.3)}$$

($\lambda\in K$, B et C appartiennent à $\mathcal{M}_{n1}$).

Démonstration.– Avant de commencer la démonstration reprenez l'exercice A.1.1 où vous verrez une illustration de ces propriétés.
La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de la matrice :
– Pour $n=1$, c'est évident.
– Supposons la propriété vraie à l'ordre $n-1$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

– Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$; montrons la linéarité par rapport à la k^e colonne. Nous allons détailler les calculs pour (III.1.2).
Posons $\tilde{A} = (A_1, \ldots, A_{k-1}, \lambda A_k, A_{k+1}, \ldots, A_n)$ alors (III.1.1) donne

$$\det \tilde{A} = \sum_{j \neq k} (-1)^{1+j} a_{1j} \det \tilde{A}_{|1,j|} + (-1)^{1+k} \tilde{a}_{1k} \det A_{|1,k|}. \tag{III.1.4}$$

En effet $\tilde{a}_{1j} = a_{1j}$ pour $j \neq k$ et $\tilde{A}_{|1,k|} = A_{|1,k|}$.
Pour $j \neq k$, la matrice $\tilde{A}_{|1,j|} \in \mathcal{M}_{n-1,n-1}$ donc, par hypothèse de récurrence, on a

$$\det \tilde{A}_{|1,j|} = \lambda \det A_{|1,j|} \tag{III.1.5}$$

d'autre part $\tilde{a}_{1k} = \lambda a_{1k}$. Il s'ensuit que $\det \tilde{A} = \lambda \det A$.

Démontrer la deuxième égalité en exercice.

Des conséquences immédiates du théorème à montrer en exercice sont :

Proposition III.1.2.

– *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,n}, \lambda \in K$, *alors* $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
– *Si une colonne de* A *est nulle, alors* $\det A = 0$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.1.4 Propriétés du déterminant liées aux colonnes adjacentes

Exercices :
Exercice A.1.8

Proposition III.1.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, alors on a les propriétés suivantes :*

(i) Si deux colonnes adjacentes sont égales, le déterminant est nul.

(ii) Si on échange entre elles deux colonnes adjacentes de la matrice, le déterminant change de signe.

Démonstration–

(i) Raisonnons par récurrence :
- Pour $n = 2$, c'est évident.
- Supposons la propriété vraie pour $n - 1$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ telle que $A_k = A_{k+1}$. Si l'on considère les termes $a_{1j}\det A_{|1,j|}$ de $\det A$ et que l'on considère $j \neq k$ et $j \neq k+1$, alors $\det A_{|1,j|} = 0$ par hypothèse de récurrence. Il reste donc

$$\det A = (-1)^{k+1} a_{1k} \det A_{|1,k|} + (-1)^{k+2} a_{1,k+1} \det A_{|1,k+1|}$$

les deux quantités de droite se compensent puisque les colonnes A_k et A_{k+1} sont identiques, donc $\det A = 0$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

(ii) Considérons

$$0 = \det (A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + A_{k+1}, A_k + A_{k+1}, \ldots, A_n)$$

et utilisons la multi-linéarité du déterminant (deux des termes sur les quatre sont nuls par l'égalité de 2 colonnes) on a

$$\det (A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_n) = -\det (A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, A_k, \ldots, A_n).$$

La permutation des colonnes va nous permettre de définir les déterminants à partir des permutations. Supposons que dans une matrice $A = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ on permute les colonnes pour obtenir la matrice $\tilde{A} = (A_2, A_4, A_1, A_3)$, alors on peut passer de $\tilde{A}$ à A en permutant successivement deux colonnes et on peut le faire systématiquement en commençant à mettre A_1 en position 1, etc.

$$\tilde{A} = (A_2, A_4, A_1, A_3) \rightarrow (A_2, A_1, A_4, A_3) \rightarrow (A_1, A_2, A_4, A_3) \rightarrow (A_1, A_2, A_3, A_4) = A.$$

L'opération qui consiste à échanger entre elles deux colonnes en laissant fixes les autres est appelée "**transposition de colonnes**" et à chaque transposition le déterminant change de signe.

Propriétés du déterminant liées aux colonnes adjacentes

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.1.5 Propriétés du déterminant liées aux colonnes

Exercices :
Exercice A.1.9
Exercice A.1.10

Théorème III.1.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, alors on a les propriétés suivantes :*

(i) Si deux colonnes sont égales, le déterminant est nul.

(ii) Si on échange entre elles deux colonnes de la matrice, le déterminant change de signe.

Démonstration–

(i) Supposons que deux colonnes soient égales, alors par des permutations de deux colonnes successives, on peut les amener adjacentes. Ces permutations ne font que changer le signe du déterminant, et comme à la fin celui-ci vaut zéro (2 colonnes adjacentes égales), on a bien det $A = 0$.

(ii) De même que dans la démonstration de la proposition III.1.3 (ii), on a grâce à (i)

$$0 = \det\left(A_1, \ldots, A_i + A_k, \ldots, A_k + A_i, \ldots, A_n\right)$$

et en utilisant la multi-linéarité

$$0 = \det\left(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_k, \ldots, A_n\right) + \det\left(A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_i, \ldots, A_n\right).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Théorème III.1.3. *Le déterminant d'une matrice ne change pas si à une colonne on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes.*

Démonstration.– Ajoutons par exemple à la j^e colonne une combinaison linéaire des autres colonnes alors par multilinéarité du déterminant on a

$$\det\left(A_1, \ldots, A_{j-1}, A_j + \sum_{k \neq j} \alpha_k A_k, A_{j+1}, \ldots, A_n\right) =$$
$$\det\,(A_1, \ldots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \ldots, A_n) + \sum_{k \neq j} \alpha_k \det\,(A_1, \ldots, A_{j-1}, A_k, A_{j+1}, \ldots, A_n)$$

Or ce deuxième terme est nul puisque toutes les matrices $A_1, \ldots, A_{j-1}, A_k, A_{j+1}, \ldots, A_n$ ont deux colonnes identiques, d'où

$$\det\left(A_1, \ldots, A_{j-1}, A_j + \sum_{k \neq j} \alpha_k A_k, A_{j+1}, \ldots, A_n\right) = \det A.$$

III.1.6 Groupe des permutations

Exercices :
Exercice A.1.11
Exercice A.1.12
Exercice A.1.13

Documents :
Document C.1.1

La définition du déterminant que nous avons vue est très utile pour leur calcul. Nous allons voir maintenant une autre définition équivalente qui va nous permettre de démontrer de nouvelles propriétés qui seront à nouveau très utiles pour le calcul des déterminants.
La notion de permutation a été introduite dans le premier TD, en particulier vous avez écrit la table correspondant à la composition des permutations de $\{1,2,3\}$ et remarqué que cette composition n'était pas commutative. Nous rappelons la définition.

Définition III.1.3. *Soit* $\mathcal{I}_n = \{1,2,\ldots,n\}$, *on appelle* **permutation** *une application bijective de* $\mathcal{I}_n$ *sur lui-même. L'ensemble* $\mathcal{S}_n$ *des permutations constitue un groupe non commutatif, pour la loi de composition des applications (une permutation, étant bijective, est évidemment inversible). Ce groupe comprend* $n\,!$ *éléments.*

Définition III.1.4. *On appelle* **transposition** *une permutation qui laisse invariants tous les éléments de* $\mathcal{I}_n$ *sauf deux.*

Donc si τ est une transposition il existe deux entiers i et j, $i \neq j$, tels que $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$, $\tau(k) = k$ pour tout $k \in \mathcal{I}_n$, $k \neq i, j$.

Proposition III.1.4. *Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, alors*
- *σ peut s'écrire, de façon non nécessairement unique, comme composée de transpositions,*
- *quelle que soit la factorisation de σ comme composée de transpositions, le nombre de transpositions est*
  - *ou bien toujours pair,*
  - *ou bien toujours impair.*

  Par conséquent le nombre $\epsilon(\sigma) = (-1)^p$ (p étant le nombre de transpositions) est indépendant de la factorisation et ce nombre est appelé **signature** *de σ.*

Ces propositions seront démontrées en document, mais avant d'en lire la démonstration nous vous conseillons de les vérifier en exercice.

Corollaire On a alors immédiatement les résultats suivants :

1. Si τ est une transposition, $\epsilon(\tau) = -1$.
2. $\epsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \epsilon(\sigma_1)\epsilon(\sigma_2),\ \forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_n$.
3. $\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma),\ \forall \sigma \in \mathcal{S}_n$.
4. $\det\left(A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(n)}\right) = \epsilon(\sigma)\det\left(A_1, \ldots, A_n\right)$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.1.7 Définition du déterminant par les permutations

Exercices :	Documents :
Exercice A.1.14	Document C.1.2

Le déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_{33}$ s'écrit

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \epsilon(\sigma)\; a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3}.$$

Vérifier cette égalité en exercice. Ce résultat peut se démontrer d'une manière qui se généraliserait (voir la démonstration en document).
La proposition suivante généralise le résultat précédent. Elle peut être considérée comme la définition du déterminant, et dans ce cas on déduit de cette définition la récurrence qui nous a servi de définition au début de ce chapitre.

Proposition III.1.5. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, on a alors*

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma)\; a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(j)j} \dots a_{\sigma(n)n}. \tag{III.1.6}$$

Il faut bien remarquer que chaque terme de la somme (III.1.6) est obtenu en prenant le produit de n éléments de la matrice A choisis en ne prenant qu'un élément par ligne et par colonne (ce produit étant multiplié par ± 1 suivant le cas). Par ailleurs la somme (III.1.6) comprend $n!$ termes ce qui correspond au nombre d'éléments de $\mathcal{S}_n$. Le calcul d'un déterminant par la formule (III.1.6) devient "explosif" quand n croit, par exemple pour $n = 5$, le calcul nécessite 119 additions et 480 multiplications. Pour $n = 10$ le calcul nécessite de l'ordre de 4×10^7 opérations ! Heureusement, il existe des méthodes moins coûteuses pour calculer un déterminant.

III.1.8 Propriétés du déterminant liées aux lignes

Documents :
Document C.1.3

Cours :
Déterminant-définition par récurrence

Définition III.1.5. *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, on appelle* **transposée** *de A la matrice notée A^T appartenant à $\mathcal{M}_{n,m}$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A, on a donc*

$$(A^T)_{ij} = a_{ji} \quad i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n.$$

La définition des déterminants à l'aide des permutations a pour but principal de démontrer le résultat fondamental suivant (démonstration en document) :

Théorème III.1.4. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, alors* $\det A = \det A^T$.

Ce résultat essentiel nous permet d'obtenir, à partir des lignes, les propriétés que nous avons démontrées sur le déterminant à partir des colonnes de la matrice.

Théorème III.1.5. *Le déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. *le déterminant est une fonction multilinéaire de chacune des lignes,*
2. *si une matrice a deux lignes égales, le déterminant est nul,*
3. *si l'on échange deux lignes de A, le déterminant change de signe,*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

4. *le déterminant d'une matrice ne change pas si à une ligne, on ajoute une combinaison linéaire des autres lignes.*

Démonstration – Il suffit d'appliquer les théorèmes III.1.1, III.1.2 et III.1.3 à A^T.
On peut également démontrer le résultat suivant :

Proposition III.1.6. *Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses termes diagonaux.*

Démonstration – En effet, ce résultat a été démontré pour les matrices triangulaires inférieures voir le paragraphe référencé. Si la matrice A est triangulaire supérieure, alors A^T est triangulaire inférieure, donc $\det A^T = \prod_{i=1}^n (A^T)_{ii} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$, on obtient donc le résultat.

III.1.9 Calcul pratique des déterminants

Exercices :
Exercice A.1.15
Exercice A.1.16

Exemples :
Exemple B.1.2

Documents :
Document C.1.4

On a donné une définition du déterminant qui permet de le calculer en "développant" suivant la première ligne. Or on vient de montrer que si l'on échange des lignes on ne fait que changer le signe du déterminant et si l'on transpose on ne change pas le déterminant. On peut donc développer indifféremment suivant une ligne ou une colonne quelconque.

Définition III.1.6. *On appelle* **cofacteur** *de l'élément* a_{ij} *le scalaire*

$$\mathit{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \det A_{|i,j|}.$$

Théorème III.1.6. *On a les formules suivantes :*
(i) développement suivant la i^e *ligne*

$$\det A = a_{i1}\, \mathit{cof}(a_{i1}) + a_{i2}\, \mathit{cof}(a_{i2}) + \ldots + a_{in}\, \mathit{cof}(a_{in}). \tag{III.1.7}$$

(ii) développement suivant la j^e *colonne*

$$\det A = a_{1j}\, \mathit{cof}(a_{1j}) + a_{2j}\, \mathit{cof}(a_{2j}) + \ldots + a_{nj}\, \mathit{cof}(a_{nj}). \tag{III.1.8}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

La démonstration est donnée en document.

Pour simplifier les calculs des déterminants on essaye donc de construire une matrice qui a le même déterminant que A et qui possède une ligne qui contient "beaucoup" de termes nuls. En effet si $a_{ij} = 0$, il est inutile de calculer le cofacteur correspondant, ce qui est un gain de temps appréciable.

III.2 Autres propriétés et utilisation des déterminants

III.2.1 Déterminant d'un produit de matrices 23
III.2.2 Déterminant d'une base de vecteurs 24
III.2.3 Déterminant et matrice inversible 26
III.2.4 Déterminant d'un endomorphisme 28
III.2.5 Rang d'une matrice 30

III.2.1 Déterminant d'un produit de matrices

Exercices :
Exercice A.1.17

Documents :
Document C.1.5

Théorème III.2.1. *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}$ *alors* $\det B\,A = \det B \det A$.

Démonstration – On va effectuer la démonstration dans le cas $n = 3$. Si $C = BA$ alors $C_1 = BA_1 = \sum_{i=1}^{3} a_{i1}B_i, C_2 = BA_2 = \sum_{j=1}^{3} a_{j2}B_j, C_3 = BA_3 = \sum_{k=1}^{3} a_{k3}B_k$.
Or un calcul semblable a déjà été fait dans l'exercice A.1.9, on reprend ce calcul succinctement :

$$\det(C_1, C_2, C_3) = \sum_{i=1}^{3} a_{i1} \sum_{j=1}^{3} a_{j2} \sum_{k=1}^{3} a_{k3} \det(B_i, B_j, B_k).$$

Or dét(B_i, B_j, B_k) est nul si deux colonnes sont égales et change de signe si l'on permute deux colonnes, ce qui permet d'écrire (après quelques calculs)

$$\det(C_1, C_2, C_3) = \det A \det(B_1, B_2, B_3).$$

La démonstration dans le cas général est donnée en document.

III.2.2 Déterminant d'une base de vecteurs

Exercices :
Exercice A.1.18
Exercice A.1.19

Le théorème suivant est tellement important qu'il justifie par lui-même l'introduction de la notion de déterminant.

Théorème III.2.2. *Soit E un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{E}$ de référence, soient $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$, n vecteurs de E alors on a l'équivalence suivante :*

$$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\} \textit{ forment une base de } E \iff \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \neq 0.$$

Démonstration – Tout d'abord remarquons que $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ constitue une famille de n vecteurs dans un espace de dimension n , ce sera donc une base si et seulement si cette famille est libre.
On notera comme d'habitude A la matrice constituée des composantes des vecteurs $\vec{a_i}$ dans la base $\mathcal{E}$. On a bien sûr $\det A = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ n'est pas une base : c'est donc une famille liée et il existe k tel que

$$\vec{a_k} = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \alpha_i \vec{a_i}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Alors, par linéarité du déterminant par rapport à la colonne k, on a

$$\det A = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \alpha_i \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \vec{a}_i, \vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n).$$

Un des "$\vec{a}_i$" étant en position k, l'autre en position i, et puisque les déterminants de droite ont tous deux colonnes égales, $\det A = 0$.

On vient donc de montrer que

$$\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n) \neq 0 \Longrightarrow \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\} \text{ forment une base de } E$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\mathcal{E}' = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ est une base de E, alors A est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$. Or toute matrice de passage est inversible, donc il existe A^{-1} telle que $A^{-1}A = I$ et donc $\det A^{-1} \det A = 1$, ce qui implique bien $\det A \neq 0$.

Proposition III.2.1. *Avec les mêmes hypothèses et notations que dans le théorème III.2.2, on a*

$$\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n) = 0 \Leftrightarrow \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\} \textit{ est une famille liée.}$$

Montrer ce résultat en exercice.

Déterminant d'une base de vecteurs

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.2.3 Déterminant et matrice inversible

Exercices :
Exercice A.1.20
Exercice A.1.21

Le théorème suivant est l'un des plus utilisés de l'algèbre linéaire :

Théorème III.2.3.

$$A \textit{ est inversible } \iff \det A \neq 0.$$

Démonstration – Soit $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ la base canonique de K^n choisie comme base de référence, on définit les vecteurs $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ de K^n par

$$\vec{a}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\vec{e}_j.$$

Alors par définition $\det A = \det(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n)$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\det A \neq 0 &\iff \det(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n) \neq 0 \\
&\iff \{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\} \text{ est une base de } K^n \\
&\iff A \text{ est inversible}
\end{aligned}$$

On a utilisé un résultat démontré dans le chapitre 2 sur les matrices de passage.

Théorème III.2.4. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est inversible alors* $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Démonstration – Si A est inversible alors, par définition, A^{-1} existe et d'après le théorème III.2.1 précédent on a

$$1 = \det I = \det A^{-1}A = \det A^{-1} \det A.$$

Le théorème précédent permet d'obtenir une caractérisation plus simple de l'inversibilité d'une matrice que la définition. En effet on a le résultat suivant :

Proposition III.2.2. *A est inversible s'il existe une matrice B telle que $AB = I$ ou telle que $BA = I$. La matrice B est alors l'inverse de A.*

Démonstration – La définition dit que A est inversible s'il existe une matrice B telle que $AB = I$ et $BA = I$, montrons qu'il suffit d'une des égalités. En effet on obtient alors $\det A \det B = 1$ donc $\det A$ est différent de 0, donc A est inversible. Si on appelle A^{-1} son inverse en multipliant l'égalité $AB = I$ par A^{-1} à gauche on obtient que $B = A^{-1}$.

III.2.4 Déterminant d'un endomorphisme

Exercices :
Exercice A.1.22

Proposition III.2.3. *Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant.*

Démonstration – Par définition, si $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}$ sont semblables, il existe une matrice inversible P telle que

$$B = P^{-1} A\, P$$

et donc

$$\det B = \det\,(P^{-1} A\, P) = \det P^{-1} \det A \det P = \frac{1}{\det P} \det A \det P = \det A.$$

Une conséquence immédiate de ce résultat est qu'il est possible de définir le déterminant d'un endomorphisme u de E, en effet si on choisit une base de E, on peut associer à u une matrice carrée A, on peut alors définir $\det u = \det A$. Le résultat est en effet indépendant de la base choisie, le choix d'une autre base aurait donné une matrice A' semblable à A donc de même déterminant.

Définition III.2.1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E; E)$, où E est de dimension finie, on appelle* **déterminant de u** *le déterminant de toute matrice représentant u dans une base arbitraire.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Par exemple, calculons le déterminant de la rotation r du plan d'angle θ. La matrice de la rotation dans la base orthonormée directe $\{\vec{i},\vec{j}\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathbf{det}\, r = \mathbf{det}\, A = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.2.5 Rang d'une matrice

Exercices :
Exercice A.1.23

Documents :
Document C.1.6

Définition III.2.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, on appelle* **matrice extraite** *de A une matrice obtenue en sélectionnant des lignes et des colonnes de A. On peut donc se définir une matrice extraite par deux ensembles d'indices*

$$I = \{i_1, i_2, \dots, i_p\} \subset \{1, 2, \dots, m\}, J = \{j_1, j_2, \dots, j_q\} \subset \{1, 2, \dots, n\},$$

les éléments de la matrice extraite $\hat{A} \in \mathcal{M}_{p,q}$ sont alors $\hat{a}_{kl} = a_{i_k, j_l}$.

Par exemple si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 8 & -1 & 6 \\ 7 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \; I = \{1,3\} \text{ et } J = \{2,3,5\} \quad \text{alors} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notation. En relation avec cette notion de matrice extraite on peut définir une matrice par "blocs", par exemple

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

où $A_{ij} \in \mathcal{M}_{m_i, n_j}$, on a donc $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ avec $m = m_1 + m_2$ et $n = n_1 + n_2$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Théorème III.2.5. *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ alors le rang de A est le plus grand entier r tel qu'il existe une matrice carrée inversible $\hat{A} \in \mathcal{M}_{r,r}$ extraite de A.*

Pour prouver ce théorème, on démontre un résultat préliminaire qui est, lui aussi, important :

Proposition III.2.4. *Soit E un espace vectoriel de dimension n muni d'une base.*
Soit $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r)$ une famille de r vecteurs de E avec $r \leq n$. On note X_i le vecteur colonne constitué des composantes de $\vec{x}_i$, $X = (X_1, \ldots, X_r)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,r}(K)$. Alors la famille $\mathcal{X}$ est libre si et seulement si il existe une matrice carrée $r \times r$ extraite de X qui est inversible.

Les démonstrations de la proposition et du théorème précédent se trouvent dans le document.
Le théorème III.2.5 sert rarement à déterminer le rang d'une matrice en revanche si on connaît le rang r de A on sait qu'il est possible d'extraire de A une matrice $r \times r$ inversible. Ce théorème sert aussi à démontrer la proposition qui avait déjà été énoncée dans le chapitre précédent :

Proposition III.2.5. *On a* rang $(A) =$ rang (A^T).

Démonstration – Si $\hat{A}$ est une matrice carrée inversible extraite de A alors $\hat{A}^T$ est une matrice carrée inversible extraite de A^T et donc le résultat est une conséquence du théorème précédent.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.3 Systèmes linéaires

III.3.1 Existence de la solution d'un système de matrice carrée . . . 33
III.3.2 Résolution de Ax=b par la méthode de Cramer 34
III.3.3 Système linéaire : notation et exemple 36
III.3.4 Résolution d'un système linéaire homogène 38
III.3.5 Existence des solutions d'un système linéaire inhomogène . . 41
III.3.6 Résolution d'un système linéaire inhomogène 42
III.3.7 Calcul pratique de l'inverse d'une matrice 44
III.3.8 Calcul théorique de l'inverse de A 46

III.3.1 Existence de la solution d'un système de matrice carrée

Notation – Depuis le début de ce cours on parle de l'isomorphisme entre K^n et $\mathcal{M}_{n1}(K)$ qui à $\vec{x}$ associe le vecteur colonne X constitué des composantes de $\vec{x}$. Dans la suite on notera, assez souvent, x ce vecteur colonne.

Théorème III.3.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}$, le système $Ax = b$ admet une solution si et seulement si $b \in \text{Im } A$*

Démonstration – La démonstration est immédiate à partir de la définition de Im A.

Théorème III.3.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}$, $b \in \mathcal{M}_{n1}$, le système $Ax = b$ admet une solution unique si et seulement si* $\det A \neq 0$

Démonstration – Si $\det A \neq 0$, A est inversible. On constate alors que $x = A^{-1}b$ est l'unique solution de $Ax = b$.
Réciproquement, si $\det A = 0$, A n'est pas inversible, donc Ker A n'est pas réduit à 0, donc il existe un x^* non nul vérifiant $Ax^* = 0$, donc le système $Ax = b$ ne peut admettre une solution unique puisque, si x est solution, $x + x^*$ est une autre solution.

En résumé, si A est carrée :
- si $\det A \neq 0$, pour tout b le système $Ax = b$ admet une solution unique.
- si $\det A = 0$,
  - si $b \in \text{Im } A$, le système $Ax = b$ admet une infinité de solutions,
  - si $b \notin \text{Im } A$, le système $Ax = b$ n'admet pas de solution.

III.3.2 Résolution de Ax=b par la méthode de Cramer

Exercices :
Exercice A.1.24

Théorème III.3.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ une matrice (non nécessairement inversible, mais carrée), b et $x \in \mathcal{M}_{n1}$ tels que $Ax = b$.*
Alors, pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$, on a la **formule de Cramer** *:*

$$\text{det}\ (A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, b, A_{i+1}, \ldots, A_n) = x_i \text{det}\ A. \tag{III.3.1}$$

Démonstration – Le membre de gauche de (III.3.1) (que l'on note Δ_i) peut s'écrire puisque $Ax = b$,

$$\Delta_i = \text{det}\ \left(A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, \sum_{k=1}^{n} x_k A_k, A_{i+1}, \ldots, A_n \right)$$

ce qui, grâce à la multi-linéarité, se met sous la forme

$$\Delta_i = \sum_{k=1}^{n} x_k\ \text{dét}\ (A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_k, A_{i+1}, \ldots, A_n), \tag{III.3.2}$$

mais dans la somme (III.3.2) les termes correspondant à $k \neq i$ sont nuls (car il y a alors deux vecteurs égaux) et il reste donc

$$\Delta_i = x_i\ \text{dét}\ (A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n) = x_i \text{det}\ A,$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

d'où le théorème.

La solution "théorique" de $Ax = b$ est obtenue par les formules dites de Cramer. En fait on ne procède jamais comme cela du point de vue numérique. On utilise une méthode d'élimination (par exemple la méthode de Gauss) qui conduit à un nombre beaucoup plus faible de calculs (se rappeler le nombre d'opérations nécessaires pour évaluer un déterminant !). De plus la méthode de Gauss se généralise aux systèmes dont la matrice n'est pas carrée

Comme on l'a vu, la formule (III.3.1) est vraie même si $\det A = 0$, évidemment, dans ce cas on ne peut pas déterminer x_i par la formule (III.3.1) ! Sinon on a la proposition suivante :

Proposition III.3.1. *Si $A \in \mathcal{M}_{nn}$ et $\det A \neq 0$, on obtient la solution de $Ax = b$ par les formules de Cramer*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\det A}$$

avec $\Delta_i = \textit{dét}\ (A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, b, A_{i+1}, \ldots, A_n)\,.$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.3.3 Système linéaire : notation et exemple

Exercices :
Exercice A.1.25

On veut résoudre un système linéaire de n équations à p inconnues : $Ax = b$
- $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ est la matrice du système,
- $b \in \mathcal{M}_{n,1}$ est le second membre,
- $x \in \mathcal{M}_{p,1}$ est le vecteur inconnu.

Dans le cas où $b = 0$, on dit que le système est **homogène**.
On suppose que le rang de A est r. Dans le cas particulier où $n = p = r$, on a un système de Cramer, ici on se place dans le cas général.
Puisque le rang de A est r il est possible d'extraire de A une matrice carrée à r lignes et r colonnes inversible, on va supposer que la matrice A^* constituée des r premières colonnes et des r premières lignes de A est inversible. Si ce n'était pas le cas il suffirait d'échanger les lignes de A donc l'ordre des équations et d'échanger les colonnes de A donc l'ordre des inconnues.
On définit $\hat{A}$ la matrice constituée des r premières lignes de A. De même on note x^* le vecteur constitué des r premières composantes de x et $\hat{b}$ le vecteur des r premières composantes de b. Avec les hypothèses précédentes on sait que le déterminant de A^* est non nul.

Introduisons un exemple qui nous servira par la suite :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On a, dans ce cas particulier, $n = 4, p = 3, r = 2$. Le vérifier en exercice.
On a de plus :

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \hat{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1, \end{pmatrix}, x^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.3.4 Résolution d'un système linéaire homogène

Exercices :
Exercice A.1.26
Exercice A.1.27

Cours :
Système linéaire - notation et exemple

On rappelle que l'ensemble des solutions de $Ax = 0$ s'appelle noyau de A et se note Ker A, revoir la définition au chapitre 2.
On reprend les notations et l'exemple introduit dans le paragraphe référencé. Avant de poursuivre montrer, en exercice, le résultat technique qui sera utile par la suite :

$$\hat{A}x = \sum_{j=1}^{p} x_j \hat{A}_j = A^* x^* + \sum_{j=r+1}^{p} x_j \hat{A}_j. \tag{III.3.3}$$

Montrons maintenant que l'on a l'équivalence suivante :

$$Ax = 0 \Longleftrightarrow \hat{A}x = 0.$$

Le premier système est un système de n équations, le deuxième est un sous-système de r équations. Dans l'exemple :

$$Ax = 0 \text{ signifie } \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & & +3x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & = 0 \end{cases}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$$\hat{A}x = 0 \text{ signifie } \left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 0 \end{array} \right.$$

Bien sûr si $Ax = 0$ alors $\hat{A}x = 0$, la réciproque provient de la propriété de rang, on voit sur l'exemple que la troisième équation est égale à 2 fois la première moins la deuxième, ce n'est pas un hasard, en effet A est de rang 2, sa troisième ligne est une combinaison linéaire de ses deux premières lignes, donc la troisième équation est inutile, il en est de même pour la quatrième.
L'équation III.3.3 donne alors :

$$Ax = 0 \Longleftrightarrow \hat{A}x = 0 \Longleftrightarrow A^* x^* = -\sum_{j=r+1}^{p} x_j \hat{A}_j.$$

Le dernier système est un système de Cramer car A^* est inversible, on obtient x^* en fonction des x_j de droite (on retrouve bien les $p-r$ degrés de liberté qui étaient prédits par la dimension de Ker A).

La résolution pratique utilise la méthode d'élimination de Gauss pour résoudre $Ax = 0$. On va traiter maintenant en détail l'exemple :

$$\left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & & +3x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \\ & +x_2 & -2x_3 & = 0 \\ & -x_2 & +2x_3 & = 0 \\ & -x_2 & +2x_3 & = 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \\ & +x_2 & -2x_3 & = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_2 & = 2x_3 \\ x_1 & = -3x_3 \end{array} \right. \Longleftrightarrow x = x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On a donc obtenu l'ensemble des vecteurs de Ker A, on voit que la dimension de Ker A est 1, donc on obtient le rang de A à savoir $(3-1)$. En fait c'est de cette façon que très souvent on détermine le rang de A.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.3.5 Existence des solutions d'un système linéaire inhomogène

On veut résoudre $Ax = b$ avec $b \neq 0$. Cette fois il n'y a plus de solution évidente et il est possible qu'il n'existe aucune solution. Mais on peut remarquer que, dans tous les cas, l'ensemble des solutions ne sera pas un espace vectoriel.
Donnons une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution.

Proposition III.3.2. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ est une matrice de rang r, si les r premières colonnes de A forment une famille libre, alors $Ax = b$ a une solution si et seulement si b appartient au sous espace engendré par les r premières colonnes de A.*

Démonstration – La démonstration est immédiate :

$$Ax = b \iff b \in \textbf{vect} \ < A_1, A_2, \ldots, A_p > \iff b \in \textbf{vect} \ < A_1, A_2, \ldots, A_r >,$$

en effet les colonnes $A_{r+1}, \ldots, A_p$ sont combinaisons linéaires des r premières colonnes d'après la propriété du rang.

III.3.6 Résolution d'un système linéaire inhomogène

Exercices :
Exercice A.1.28
Exercice A.1.29

Cours :
Système linéaire - notation et exemple

On reprend les notations et l'exemple introduit dans le paragraphe référencé.
On a alors :

$$Ax = b \iff \begin{cases} \hat{A}x = \hat{b} \\ x \text{ vérifie les } (n-r) \text{ dernières équations} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} A^* x^* = \hat{b} - \displaystyle\sum_{j=r+1}^{p} x_j \hat{A}_j \\ x \text{ vérifie les } (n-r) \text{ dernières équations} \end{cases}$$

On détermine donc x^* en fonction des x_j en résolvant le système de Cramer, puis on vérifie si cette solution satisfait les dernières équations.

La résolution pratique utilise la méthode d'élimination de Gauss pour résoudre $Ax = b$, reprenons l'exemple :

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = -1 \\ x_1 & & +3x_3 & = 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ & +x_2 & -2x_3 & = -2 \\ & -x_2 & +2x_3 & = 2 \\ & -x_2 & +2x_3 & = 2 \end{cases}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ & +x_2 & -2x_3 & = -2 \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_2 & = 2x_3 - 2 \\ x_1 & = -3x_3 + 3 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow x = \begin{pmatrix} -3x_3 + 3 \\ 2x_3 - 2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \quad \Longleftrightarrow \quad x = x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve donc les solutions du système $Ax = b$ en sommant les solutions du système homogène et une solution particulière du système non homogène.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

III.3.7 Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

Exercices :
Exercice A.1.30

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, inversible, dont on va noter, un instant, $\tilde{A}$ la matrice inverse, on a donc

$$\tilde{A}\,A = A\,\tilde{A} = I. \tag{III.3.4}$$

Ce changement de notation sert simplement à pouvoir noter $(\tilde{a}_{ij})$ les éléments de A^{-1} et à noter $\tilde{A}_j$ les colonnes de A^{-1} !
Comme on l'a vu dans le paragraphe précédent, on peut écrire (III.3.4) comme un système d'équations linéaires dans lequel les inconnues sont les colonnes de $\tilde{A}$:

$$A\,\tilde{A}_j = I_j \quad \text{pour } j = 1, 2, \ldots, n. \tag{III.3.5}$$

De fait quand on veut calculer numériquement l'inverse d'une matrice, on procède souvent de cette façon. On commence par écrire un programme de résolution de système linéaire, puis on utilise ce programme pour calculer les colonnes de A^{-1} en résolvant (III.3.5) ce qui correspond à n résolutions d'un système dont la matrice A est toujours la même, seuls les seconds membres varient.
Pour le calcul " à la main " de l'inverse d'une matrice A, on résout le système $AX = Y$ qui est équivalent à $X = A^{-1}Y$, par identification on obtient A^{-1}. Par exemple si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

on obtient après résolution :

$$\left\{\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = y_1 \\ x_1 & +x_2 & & = y_2 \\ & x_2 & +x_3 & = y_3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x_1 = & y_1 & & -y_3 \\ x_2 = & -y_1 & +y_2 & +y_3 \\ x_3 = & y_1 & -y_2 & \end{array}\right.$$

Ce qui permet d'obtenir :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

III.3.8 Calcul théorique de l'inverse de A

Exercices :
Exercice A.1.31

On a vu que le calcul de l'inverse se ramène à la résolution de

$$A\,\tilde{A}_j = I_j \quad \text{pour } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Les formules de Cramer nous donnent immédiatement la solution de ces systèmes puisqu'il résulte de (III.3.1) que

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{1}{\det A}\det\,(A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, I_j, A_{i+1}, \ldots, A_n)\,, \tag{III.3.6}$$

et le déterminant du membre de droite de (III.3.6) peut être obtenu en développant suivant la $i^{\text{ème}}$ colonne, soit

$$\det\,(A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, I_j, A_{i+1}, \ldots, A_n) = (-1)^{i+j}\det A_{|j,i|}.$$

Finalement, avec la définition III.1.6, on a le résultat

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{cof}(a_{ji}). \tag{III.3.7}$$

Définition III.3.1. *On appelle* **co-matrice** *de A et on note $co(A)$ la matrice des cofacteurs de A*

$$co(A)_{ij} = \mathrm{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j}\det A_{|i,j|}.$$

Théorème III.3.4. *L'inverse de A est donnée par*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(co(A)\right)^T . \tag{III.3.8}$$

Comme pour les systèmes linéaires, les formules de Cramer ne sont pas utilisées pour calculer numériquement l'inverse, on leur préfère des méthodes plus économiques (voir calcul numérique de l'inverse de A). En revanche les formules de Cramer sont utilisées pour le calcul formel. Vous reverrez tout cela plus tard.

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices du chapitre III 50
A.2 Exercices de TD 82

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.1 Exercices du chapitre III

A.1.1 Ch3-Exercice1 51
A.1.2 Ch3-Exercice2 52
A.1.3 Ch3-Exercice3 53
A.1.4 Ch3-Exercice4 54
A.1.5 Ch3-Exercice5 55
A.1.6 Ch3-Exercice6 56
A.1.7 Ch3-Exercice7 57
A.1.8 Ch3-Exercice8 58
A.1.9 Ch3-Exercice9 59
A.1.10 Ch3-Exercice10 60
A.1.11 Ch3-Exercice11 61
A.1.12 Ch3-Exercice12 62
A.1.13 Ch3-Exercice13 63
A.1.14 Ch3-Exercice14 64
A.1.15 Ch3-Exercice15 65
A.1.16 Ch3-Exercice16 66
A.1.17 Ch3-Exercice17 67
A.1.18 Ch3-Exercice18 68
A.1.19 Ch3-Exercice19 69
A.1.20 Ch3-Exercice20 70
A.1.21 Ch3-Exercice21 71
A.1.22 Ch3-Exercice22 72

A.1.23 Ch3-Exercice23 73
A.1.24 Ch3-Exercice24 74
A.1.25 Ch3-Exercice25 75
A.1.26 Ch3-Exercice26 76
A.1.27 Ch3-Exercice27 77
A.1.28 Ch3-Exercice28 78
A.1.29 Ch3-Exercice29 79
A.1.30 Ch3-Exercice30 80
A.1.31 Ch3-Exercice31 81

Exercice A.1.1 Ch3-Exercice1

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3a & c \\ 3b & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3\lambda \\ 0 & 1 & 2\lambda \\ 4 & 1 & 2\lambda \end{vmatrix}.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2 Ch3-Exercice2

1. – Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ triangulaire inférieure ($a_{ij} = 0$ pour $i < j$), en utilisant la définition du déterminant montrer que dét $A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.
   – En déduire que :
     – pour les matrices diagonales ($a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$) on a aussi dét$A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$,
     – la matrice identité a pour déterminant det $I = 1$.
2. Si $\overline{A}$ est la matrice dont les termes sont les conjugués de ceux de A alors det $\overline{A} = \overline{\det A}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.3 Ch3-Exercice3

Si $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}\}$ sont les vecteurs de la base $\mathcal{E}$ de référence, montrer que det $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}) = 1$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4 Ch3-Exercice4

1. L'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 est muni de la base canonique $\{p_0, p_1, p_2\}$ considérée comme base de référence, on définit les polynômes p, q, r par

$$p(t) = 3t^2 + 6t + 4,\ q(t) = t^2 + 2t - 1,\ r(t) = -t^2 + 4t + 2,$$

   calculer det (p, q, r).

2. On choisit maintenant comme base de référence la base $\{p_0, q_1, p_2\}$, avec $q_1(t) = 2t - 1$, calculer det (p, q, r).

retour au cours

Solution

Exercice A.1.5 Ch3-Exercice5

Démontrer, à partir de la définition du déterminant par récurrence, l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}\det(A_1,\dots,A_{k-1},B+C,A_{k+1},\dots,A_n) = \; & \det(A_1,\dots,A_{k-1},B,A_{k+1},\dots,A_n) + \\ & \det(A_1,\dots,A_{k-1},C,A_{k+1},\dots,A_n).\end{aligned}$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.6 Ch3-Exercice6

Montrer que si A a une colonne nulle, alors $\det A = 0$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.7 Ch3-Exercice7

Démontrer la proposition suivante : Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}, \lambda \in K$ alors $(\det \lambda A) = \lambda^n \det A$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.8 Ch3-Exercice8

Reprendre les exemples de l'exercice A.1.1 et illustrer les résultats du paragraphe "Déterminant et colonnes adjacentes".

retour au cours

Exercice A.1.9 Ch3-Exercice9

Soit C une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{33}$, on note $d = \det(C)$. Exprimer à l'aide de d les déterminants suivants :
$\det(C_1C_3C_2), \det(C_3C_2C_1), \det(C_2C_1C_3), \det(C_2C_3C_1), \det(C_3C_1C_2)$.

retour au cours

Solution

Exercice A.1.10 Ch3-Exercice10

Soient C et B deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_{33}$. On suppose que

$C_1 = \sum_{i=1}^{3} \gamma_{i1} B_i, \quad C_2 = \sum_{j=1}^{3} \gamma_{j2} B_j, \quad C_3 = \sum_{k=1}^{3} \gamma_{k3} B_k$

on note $d = \det B$

1. Déterminer $\det(B_1 B_2 C_3)$ et $\det(B_1 B_3 C_3)$ en fonction de d.
2. En déduire $\det(B_1 C_2 C_3)$ en fonction de d.
3. Calculer de façon similaire $\det(B_2 C_2 C_3)$ et $\det(B_3 C_2 C_3)$.
4. En déduire que $\det(C_1 C_2 C_3) = \lambda \det(B_1 B_2 B_3)$ où λ est un coefficient à déterminer.
5. Lorsque $B = I$, quels sont les termes de la matrice C ? Vérifier que le résultat trouvé précédemment est correct .

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.11 Ch3-Exercice11

Soit τ une transposition, montrer que $\tau^{-1} = \tau$.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.12 Ch3-Exercice12

1. Montrer que 3 des 6 permutations de $\mathcal{S}_3$ sont des transpositions, on notera ces transpositions $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.
2. On note $\sigma_0, \sigma_4, \sigma_5$ les 3 autres permutations. Montrer pour chacune d'elles qu'elle peut s'écrire comme composée de transpositions et ceci de plusieurs manières différentes : trouver à chaque fois au moins deux décompositions.
3. Quelle est la signature de chacune des permutations ?
4. Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}$, on définit les matrices B et C par

$$B = (A_{\sigma_2(1)}, A_{\sigma_2(2)}, A_{\sigma_2(3)}),\ C = (A_{\sigma_4(1)}, A_{\sigma_4(2)}, A_{\sigma_4(3)}).$$

Exprimer $\det B, \det C$ à l'aide de $\det A$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.13 Ch3-Exercice13

Dans le cas particulier $n = 3$, vérifier les propriétés suivantes :

1. Si τ est une transposition, $\epsilon(\tau) = -1$.
2. $\epsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \epsilon(\sigma_1)\epsilon(\sigma_2), \ \forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_n$.
3. $\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma), \ \forall \sigma \in \mathcal{S}_n$.
4. $\det \left(A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(n)}\right) = \epsilon(\sigma) \det \left(A_1, \ldots, A_n\right)$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.14 Ch3-Exercice14

Soit $A \in \mathcal{M}_{33}$, vérifier que l'on a :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(j)j} \ldots a_{\sigma(n)n}$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.15 Ch3-Exercice15

Calculer les déterminants suivants : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.16 Ch3-Exercice16

1. On peut calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ en effectuant les étapes :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -12.$$

   Pour chacune des étapes précédentes citer la règle permettant d'obtenir l'égalité.

2. Calculer les déterminants suivants : $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.17 Ch3-Exercice17

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,n}$, montrer que $\det A\,B = \det B\,A$. Donner un exemple dans lequel $AB \neq BA$ et calculer les déterminants de AB et BA.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.18 Ch3-Exercice18

Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$:
{(4,0,4), (2,1,1), (3,2,2) }, { (1,1,1), (2,3,1), (0,1,-1)} ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.19 Ch3-Exercice19

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base de référence, et soit $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$ une famille de vecteurs de E, montrer que

$$\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n) = 0 \Leftrightarrow \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\} \text{ est une famille liée.}$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.20 Ch3-Exercice20

Les matrices $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ sont-elles inversibles ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.21 Ch3-Exercice21

Utiliser le déterminant pour montrer que le produit de deux matrices inversibles est une matrice inversible. Si l'une des deux matrices n'est pas inversible, que peut-on dire du produit ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.22 Ch3-Exercice22

Donner le déterminant de la rotation dans l'espace d'angle θ d'axe Oy.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.23 Ch3-Exercice23

1. Est-ce-que la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ $\{(1,3,5,1),(2,2,6,-2),(1,2,4,0)\}$ est libre ?
2. Quel est le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} ?$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.24 Ch3-Exercice24

Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{llll} 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = 3 \\ -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & = -4 \\ 2x_1 & +5x_2 & +10x_3 & = -1 \end{array}\right.$$

en utilisant les formules de Cramer puis la méthode de Gauss.
Est-il possible de résoudre par les formules de Cramer le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{llll} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 1 \\ 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = -2 \\ x_1 & +4x_2 & +7x_3 & = 5 \end{array}\right. ?$$

Si non, utiliser la méthode de Gauss pour le résoudre.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.25 Ch3-Exercice25

Montrer que le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ est $r = 2$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.26 Ch3-Exercice26

Quelle est la dimension de Ker A dans le cas de la matrice de l'exercice A.1.25

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.27 Ch3-Exercice27

Avec les notations du paragraphe "Système linéaire - notation et exemple". montrer que :

$$\hat{A}x = \sum_{j=1}^{p} x_j \hat{A}_j = A^* x^* + \sum_{j=r+1}^{p} x_j \hat{A}_j.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.28 Ch3-Exercice28

On définit : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Résoudre $Ax = b$ en utilisant la résolution théorique exposée dans le paragraphe "Système linéaire inhomogène - résolution". On explicitera en particulier les matrices $\hat{A}$, A^* .

Mêmes questions avec pour second membre $b' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.29 Ch3-Exercice29

Utiliser la méthode d'élimination de Gauss pour résoudre $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.30 Ch3-Exercice30

Utiliser la résolution d'un système linéaire pour obtenir la première colonne de l'inverse de la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Comment obtiendrait-on la 2e puis la 3e colonne, est-il nécessaire de refaire tous les calculs ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.31 Ch3-Exercice31

Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ en utilisant les co-facteurs.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exercices de TD

A.2.1 TD3-Exercice 1 83
A.2.2 TD3-Exercice 2 84
A.2.3 TD3-Exercice 3 85
A.2.4 TD3-Exercice 4 86
A.2.5 TD3-Exercice 5 88
A.2.6 TD3-Exercice 6 89
A.2.7 TD3-Exercice 7 90
A.2.8 TD3-Exercice 8 92
A.2.9 TD3-Exercice 9 93
A.2.10 TD3-Exercice 10 94
A.2.11 TD3-Exercice 11 95
A.2.12 TD3-Exercice 12 96
A.2.13 TD3-Exercice 13 97
A.2.14 TD3-Exercice 14 98
A.2.15 TD3-Exercice 15 99
A.2.16 TD3-Exercice 16 100

Exercice A.2.1 TD3-Exercice 1

Calculer les déterminants suivants : $\begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix}$, $\qquad \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix}$

(réponses : $1 + a^2 + b^2 + c^2$, $\qquad a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd$).

Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.2 TD3-Exercice 2

Soit E un espace vectoriel sur K de dimension 2 muni de la base de référence $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Soient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ 2 vecteurs de E, soient x_1, x_2, y_1 et y_2 quatre scalaires de K, donner une expression de dét$(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2, y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2)$ en fonction de det $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ Vérifier le résultat dans le cas $\vec{u}_1 = \vec{e}_1, \vec{u}_2 = \vec{e}_2$.

Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.3 TD3-Exercice 3

Montrer sans les calculer que les déterminants suivants sont nuls :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}.$$

Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.4 TD3-Exercice 4

Soit $A \in \mathcal{M}_{n+m\ n+m}(K), M \in \mathcal{M}_{mm}(K), N \in \mathcal{M}_{nn}(K), B \in \mathcal{M}_{mn}(K)$. 0_{nm} représente la matrice nulle appartenant à $\mathcal{M}_{nm}(K)$, I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_{nn}(K)$

1. On suppose que la matrice A se décompose par blocs de la façon suivante : $A = \begin{pmatrix} I_n & 0_{nm} \\ B & M \end{pmatrix}$
   Montrer que $\det A = \det M$.
2. On suppose que $A = \begin{pmatrix} I_n & 0_{nm} \\ 0_{mn} & M \end{pmatrix}$ et que M est inversible, vérifier que
   $A^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & 0_{nm} \\ 0_{mn} & M^{-1} \end{pmatrix}$.
3. On suppose que $A = \begin{pmatrix} N & 0_{nm} \\ B & I_m \end{pmatrix}$. Montrer que $\det A = \det N$.
4. On suppose que $A = \begin{pmatrix} N & 0_{nm} \\ B & M \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que si $\det M = 0$ alors $\det A = 0$. Montrer que si $\det N = 0$ alors $\det A = 0$.
   (b) Ecrire A comme un produit nous permettant de déduire que $\det A = \det M \det N$.
5. Que vaut le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} N & C \\ 0_{mn} & M \end{pmatrix}$ où $C \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$?
6. On suppose que N et M sont inversibles, que vaut l'inverse de $\begin{pmatrix} N & 0_{nm} \\ 0_{mn} & M \end{pmatrix}$?

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.4
TD3-Exercice 4

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1 Aide 2
Question 3 Aide 1
Question 4 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4
Question 5 Aide 1
Question 6 Aide 1
corrigé de l'exercice Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.5 TD3-Exercice 5

Montrer que si $p = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4$ avec $a_4 \neq 0$, alors les polynômes

$$\{p, p', p'', p^{(3)}, p^{(4)}\}$$

forment une base de $\mathcal{P}_4$. Ce résultat pourrait se généraliser à un degré quelconque.

Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6 TD3-Exercice 6

1. Calculer les déterminants suivants : $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & b \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & b & a & 1 \end{vmatrix}$
   (réponses : $a(b-a)(c-b)(d-c), 2(a-1)^2(b-1)$).
2. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \\ b & a & d & c \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   Calculer det M, puis le produit AM et en déduire det A.
   (réponses : det $M = 16$,
   det $A = -(a+b+c+d)(a+b-(c+d))(a+d-(c+b))(a+c-(b+d))$).

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.7 TD3-Exercice 7

1. Les vecteurs suivants : $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ sont-ils linéairement indépendants ? Discuter suivant les valeurs de a, b, c, x.
   Réponse :

   – si $ab + bc + ca \neq 0$, les vecteurs forment une famille libre pour $x \neq \frac{abc}{ab+bc+ca}$;
   – si $ab + bc + ca = 0$ et $abc \neq 0$, la famille est toujours libre ;
   – si $ab + bc + ca = 0$ et $abc = 0$, la famille est toujours liée.

   Même question pour les vecteurs : $\begin{pmatrix} x \\ a \\ b \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ x \\ x \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ x \\ x \\ a \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} x \\ b \\ a \\ x \end{pmatrix}$.
   (réponse : si $a = b$ les vecteurs sont liés $\forall x$, si $a \neq b$ les vecteurs sont liés pour $x = \frac{a+b}{2}$ ou $x = -\frac{a+b}{2}$).
2. On définit $p_1(t) = \alpha + t + t^2,\ p_2(t) = 1 + \beta t,\ p_3(t) = 1 + t + \beta t^2$.
   Les polynômes p_1, p_2, p_3 forment-ils une base de $\mathcal{P}_2$? Discuter suivant les valeurs de α et β.
   (réponse : si $1 - 2\beta + \alpha\beta^2 \neq 0$ c'est une base, sinon ce n'en est pas une).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.7
TD3-Exercice 7

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2

Exercice A.2.8 TD3-Exercice 8

Une matrice carrée M est antisymétrique si et seulement si $M^T = -M$.
Montrez que si n, le nombre de lignes, est impair, alors $\det M = 0$.

Aide 1

Exercice A.2.9 TD3-Exercice 9

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}), b \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, on cherche x tel que $Ax = b$. Pour cela on utilise la méthode d'élimination de Gauss, qui est définie par :

- à l'étape j pour $j = 1, \ldots, n-1$ on construit un système d'équations équivalent de la façon suivante :
  - Pour $i = j+1, \ldots, n$ on remplace la i^e équation par (i^e équation) + α_i(j^e équation) de façon à éliminer la j^e variable dans la (i^e équation)
- On résout le système triangulaire obtenu à l'étape $n-1$.

On veut résoudre le système : $\left\{\begin{array}{rrrl} -x_1 & +2x_2 & -\ \ x_3 & =-5 \\ x_1 & -4x_2 & +2x_3 & =7 \\ -2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & =0 \end{array}\right.$

1. Quelle est la matrice A du système ?
2. Utiliser la méthode de Gauss pour résoudre ce système. A chaque étape, préciser quelle est la matrice du nouveau système, (réponse : (3, 1, 4)).
3. Montrer (sans les calculer) que les déterminants de toutes ces matrices sont égaux.
4. En déduire sans calcul (ou presque !) la valeur de det A. (réponse : 2).

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1
Question 3 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 4 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.10 TD3-Exercice 10

Déterminer l'équation de la parabole qui passe par les points
$A = (-1, 2), B = (1, -4)$ et $C = (2, 8)$
(réponse : $y = 5x^2 - 3x - 6$).

Aide 1 Aide 2 Aide 3

Exercice A.2.11 TD3-Exercice 11

On définit le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 + & x_2 + & (1-2\alpha)x_3 & = & 2(1+\alpha) \\ (1+\alpha)x_1 - & (1+\alpha)x_2 + & (2+\alpha)x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - & 2\alpha x_2 + & 3x_3 & = & 2(1+\alpha) \end{array}\right.$$

1. (a) Appliquer la méthode de Gauss pour obtenir un système triangulaire équivalent.

   (b) Que vaut $\det A$ (réponse : $-4\alpha(1+\alpha)(1-\alpha)$).

2. Résoudre le système dans le cas $\det A \neq 0$ (réponse : $x_1 = \frac{1}{2(\alpha-1)}, x_2 = \frac{3+2\alpha}{2(1-\alpha)}, x_3 = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$).

3. Etudier les cas où $\det A = 0$. En particulier préciser si les solutions constituent un espace vectoriel.

4. Résoudre le système en utilisant les formules de Cramer.

Question 1a Aide 1
Question 1b Aide 1
Question 2 Aide 1
Question 3 Aide 1 Aide 2
Question 4 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.12 TD3-Exercice 12

On considère 1, j et j^2,les racines cubiques de l'unité ($j^3 = 1$).

1. Calculer l'inverse de la matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$.
2. Soient les complexes b_1, b_2, b_3. On définit le système $\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = b_1 \\ x_1 + \ jx_2 + j^2x_3 = b_2 \\ x_1 + j^2x_2 + \ jx_3 = b_3 \end{cases}$
   (a) Résoudre le système en utilisant les formules de Cramer,
   (réponse : $x_1 = \frac{b_1+b_2+b_3}{3}$, $x_2 = \frac{b_1+b_2j^2+b_3j}{3}$, $x_3 = \frac{b_1+b_2j+b_3j^2}{3}$).
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que x_1, x_2, x_3 soient réels
   (réponse : $b_1 \in \mathbb{R}, b_2$ et b_3 conjugués).
3. Retrouver à partir de la question précédente l'expression de U^{-1}.

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2a Aide 1
Question 2b Aide 1
Question 3 Aide 1

Exercice A.2.13 TD3-Exercice 13

Pour chacune des matrices suivantes, résolvez le système $y = Ax$ lorsque la solution est unique. En déduire A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_2 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

réponses : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$

Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.14 TD3-Exercice 14

Déterminer selon les valeurs des réels α et β le rang de la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ \beta & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Exercice A.2.15 TD3-Exercice 15

Montrer en utilisant les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ que le rang de AB n'est pas toujours égal au rang de BA.

Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.16 TD3-Exercice 16

1. On définit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 8 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

   (a) Déterminer toutes les solutions de $Ax = 0$. Quelle est la dimension de Ker A ? Que vaut le rang de A ?

   (b) Déterminer toutes les solutions de $Ax = b$ où $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Comparer avec ce qui a été trouvé à la question précédente.

   (c) Déterminer toutes les solutions de $Ax = b$ où $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. Mêmes questions avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ puis $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Mêmes questions avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

4. Mêmes questions avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ puis $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

réponses :

1. $x = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 4/11 \\ -1/11 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$, pas de solution.

2. $x = 0$, $x = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, pas de solution.

3. $x = \alpha \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 2b_1 - b_2 + 3b_3 \\ b_3 \\ 0 \\ -b_1 + b_2 - 2b_3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

4. $x = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, pas de solution.

Question 1a Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4
Question 1b Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 1c Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 3 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 4 Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe B
Exemples

B.1 Exemples du chapitre III 103

B.1 Exemples du chapitre III

B.1.1 104
B.1.2 105

Exemple B.1.1

On se place dans l'espace géométrique habituel muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et on définit
$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$,
$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$,
$\vec{z} = z_1\vec{e}_1 + z_2\vec{e}_2 + z_3\vec{e}_3$.
Alors

$$\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1.$$

Là encore il y a une interprétation géométrique simple, $\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ représente la mesure (algébrique) du volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$. Le déterminant de $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ apparaît en effet comme le produit mixte (vu en MT22) des vecteurs $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et le signe dépend, comme on le sait, du fait que le trièdre $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est direct ou non.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.2

Si l'on reprend le calcul déja effectué en exercice du déterminant $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, on obtient en remplacant la dernière ligne par la dernière ligne moins la première que

$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ puis en développant par rapport à la première colonne :

$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$ ce qui finalement vaut 4.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe C
Documents

C.1 Documents du chapitre III 107

C.1 Documents du chapitre III

C.1.1 Décomposition des permutations en transpositions 108
C.1.2 Calcul des déterminants par les permutations 111
C.1.3 Déterminant de la matrice transposée 113
C.1.4 Développement du déterminant suivant une ligne ou une colonne 115
C.1.5 Déterminant d'un produit de matrices 117
C.1.6 Calcul du rang d'une matrice 120

Document C.1.1 Décomposition des permutations en transpositions

Proposition C.1.1. *Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, alors*

- *σ peut s'écrire, de façon non nécessairement unique, comme composée de transpositions,*
- *quelle que soit la factorisation de σ comme composée de transpositions, le nombre de transpositions est ou bien toujours pair, ou bien toujours impair.*
  Par conséquent le nombre

  $$\epsilon(\sigma) = (-1)^p \quad (p \text{ étant le nombre de transpositions}) \tag{C.1.1}$$

  est indépendant de la factorisation et ce nombre est appelé **signature** *de σ.*

Démonstration –

- On raisonne par récurrence sur n.
  - Tout d'abord les 2 éléments de $\mathcal{S}_2$ sont la transposition $\tau : (1,2) \mapsto (2,1)$ et l'identité qui peut s'écrire $i = \tau \circ \tau$.
  - Supposons donc que le résultat est vrai pour $n - 1 \geq 2$. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et notons $k = \sigma(n)$. Deux cas sont possibles :
    (i) $k = n$ et σ, restreinte à $\mathcal{I}_{n-1}$ est une permutation de $\mathcal{I}_{n-1}$ puisque elle laisse invariant n. Par hypothèse de récurrence on peut écrire σ comme un produit de transpositions de $\mathcal{I}_{n-1}$, transpositions que l'on peut étendre à $\mathcal{I}_n$ en supposant qu'elles laissent toutes invariant n.
    (ii) $k \neq n$ et définissons la transposition τ telle que $\tau(k) = n$, $\tau(n) = k$. Alors la permutation $\tau \circ \sigma$ est telle que $\tau \circ \sigma(n) = n$ et l'on est ramené au cas précédent pour la permutation $\tau \circ \sigma$ qui s'écrit donc comme une composée de transpositions :

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$\tau \circ \sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_r$ et comme $\tau = \tau^{-1}$, on a $\sigma = \tau \circ \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_r$, ce qui achève la démonstration.

– Le théorème III.1.2 (ii) dit que si l'on échange deux colonnes le déterminant change de signe. Ceci donne que si τ est une transposition alors

$$\det\left(\vec{a}_{\tau(1)}, \ldots, \vec{a}_{\tau(k)}, \ldots, \vec{a}_{\tau(n)}\right) = -\text{dét}\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_n\right). \quad \text{(C.1.2)}$$

Soit maintenant σ une permutation et considérons une factorisation de σ :

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_p.$$

Soit $(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de K^n et posons

$$\Delta = \det\left(\vec{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{e}_{\sigma(n)}\right)$$

alors

$$\Delta = \det\left(\vec{e}_{\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_p(1)}, \ldots, \vec{e}_{\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_p(n)}\right)$$

et en utilisant (C.1.2)

$$\Delta = -\det\left(\vec{e}_{\tau_2 \circ \ldots \circ \tau_p(1)}, \ldots, \vec{e}_{\tau_2 \circ \ldots \circ \tau_p(n)}\right)$$

d'où en itérant

$$\Delta = (-1)^p \det\left(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\right).$$

Si on utilisait une autre factorisation de σ en q transpositions, on aurait aussi

$$\Delta = (-1)^q$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

ce qui montre que $\epsilon(\sigma) = (-1)^p$ ne dépend pas de la factorisation de la permutation en transpositions et on a donc

$$\det\left(\vec{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{e}_{\sigma(n)}\right) = \epsilon(\sigma)\det\left(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\right). \tag{C.1.3}$$

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.2 Calcul des déterminants par les permutations

Démontrons le résultat suivant :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \epsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3}.$$

On peut donner une démonstration du résultat précédent qui se généraliserait facilement à une dimension quelconque. Calculons le déterminant de $A \in \mathcal{M}_{3,3}$ en utilisant la multi-linéarité par rapport aux colonnes de A.

On note $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

alors

$$\det A = \det\ (A_1, A_2, A_3) = \det\ \left(\sum_{i=1}^{3} a_{i1} E_i, \sum_{j=1}^{3} a_{j2} E_j, \sum_{k=1}^{3} a_{k3} E_k \right)$$

$$\det A = \sum_{i,j,k=1}^{3} a_{i1} a_{j2} a_{k3} \det\ (E_i, E_j, E_k)$$

et lorsque deux des trois indices sont égaux on a $\det\ (E_i, E_j, E_k) = 0$, il ne reste donc que les termes correspondant à des indices (i, j, k) tous différents avec $\{i, j, k\}$ variant de 1 à 3, c'est à dire correspondant à toutes les permutations de $\{1, 2, 3\}$.

Posons donc

$$i = \sigma(1),\ j = \sigma(2),\ k = \sigma(3) \quad \text{où } \sigma \in \mathcal{S}_3$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

alors

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} \det \left(E_{\sigma(1)}, E_{\sigma(2)}, E_{\sigma(3)}\right)$$

et d'après (C.1.3)

$$\det \left(E_{\sigma(1)}, E_{\sigma(2)}, E_{\sigma(3)}\right) = \epsilon(\sigma) \det \left(E_1, E_2, E_3\right) = \epsilon(\sigma)$$

d'où

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \epsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3}.$$

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.3 Déterminant de la matrice transposée

Proposition C.1.2. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,n}$*, alors* $\det A = \det A^T$.

Démonstration – Notons un instant $\tilde{a}_{ij}$ les éléments de A^T (on a donc $\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$), dans ces conditions

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma)\ \tilde{a}_{\sigma(1)1}\tilde{a}_{\sigma(2)2} \ldots \tilde{a}_{\sigma(j)j} \ldots \tilde{a}_{\sigma(n)n}, \tag{C.1.4}$$

en introduisant pour chaque σ la permutation réciproque σ^{-1}, on peut récrire (C.1.4) sous la forme

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma)\ \tilde{a}_{\sigma(1)\sigma^{-1}(\sigma(1))}\tilde{a}_{\sigma(2)\sigma^{-1}(\sigma(2))} \ldots \tilde{a}_{\sigma(j)\sigma^{-1}(\sigma(j))} \ldots \tilde{a}_{\sigma(n)\sigma^{-1}(\sigma(n))}. \tag{C.1.5}$$

Comme σ est une bijection de $\mathcal{I}_n$ sur lui-même, on peut, en changeant l'ordre des facteurs de chaque produit de (C.1.5), récrire de nouveau (C.1.4) sous la forme

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma)\ \tilde{a}_{1\sigma^{-1}(1)}\tilde{a}_{2\sigma^{-1}(2)} \ldots \tilde{a}_{j\sigma^{-1}(j)} \ldots \tilde{a}_{n\sigma^{-1}(n)}. \tag{C.1.6}$$

Quand σ parcourt $\mathcal{S}_n$, σ^{-1} parcourt également $\mathcal{S}_n$ et $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma^{-1})$, on peut donc récrire (C.1.6) sous la forme

$$\begin{aligned} \det A^T &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma)\ \tilde{a}_{1\sigma(1)}\tilde{a}_{2\sigma(2)} \ldots \tilde{a}_{j\sigma(j)} \ldots \tilde{a}_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(j)j} \ldots a_{\sigma(n)n} = \det A \end{aligned}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

d'où le résultat.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.4 Développement du déterminant suivant une ligne ou une colonne

Théorème C.1.1. *On a les formules suivantes :*
(i) Développement suivant la i^e ligne

$$\det A = a_{i1}\mathbf{cof}(a_{i1}) + a_{i2}\mathbf{cof}(a_{i2}) + \ldots + a_{in}\mathbf{cof}(a_{in}). \tag{C.1.7}$$

(ii) Développement suivant la j^e colonne

$$\det A = a_{1j}\mathbf{cof}(a_{1j}) + a_{2j}\mathbf{cof}(a_{2j}) + \ldots + a_{nj}\mathbf{cof}(a_{nj}). \tag{C.1.8}$$

Démonstration – Il suffit de démontrer (C.1.7), la formule (C.1.8) s'obtenant en remplaçant A par A^T. Soit la matrice B obtenue à partir de A en permutant la 1^e et la i^e ligne (dét $B = -\det A$). Développons alors B suivant sa première ligne (définition du déterminant)

$$\det B = b_{11}\mathbf{cof}(b_{11}) + b_{12}\mathbf{cof}(b_{12}) + \ldots + b_{1n}\mathbf{cof}(b_{1n})$$

soit

$$\det B = a_{i1}\mathbf{cof}(b_{11}) + a_{i2}\mathbf{cof}(b_{12}) + \ldots + a_{in}\mathbf{cof}(b_{1n}). \tag{C.1.9}$$

Si l'on considère $B_{|1,k|}$ obtenu en supprimant la 1^e ligne et la k^e colonne de B on a

$$B_{|1,k|} = \begin{pmatrix} a_{21} & \ldots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{11} & \ldots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow (i-1)^e \text{ ligne.} \\ \\ \\ \end{array}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Si l'on fait remonter la $(i-1)^e$ ligne en 1^e ligne, c'est à dire que l'on effectue $(i-2)$ échanges de lignes, on obtient la matrice $A_{|i,k|}$ et donc

$$\det B_{|1,k|} = (-1)^{i-2} \det A_{|i,k|}$$

et en passant aux cofacteurs

$$\mathrm{cof}(b_{1k}) = (-1)^{k+1} \det B_{|1,k|} = (-1)^{k+1+i-2} \det A_{|i,k|}$$

et comme $\mathrm{cof}(a_{ik}) = (-1)^{k+i} \det A_{|i,k|}$, on a

$$\mathrm{cof}(b_{1k}) = -\mathrm{cof}(a_{ik}).$$

En remplaçant dans (C.1.9) on obtient :

$$\det B = -\left(a_{i1}\mathrm{cof}(a_{i1}) + a_{i2}\mathrm{cof}(a_{i2}) + \ldots + a_{in}\mathrm{cof}(a_{in})\right)$$

et comme $\det B = -\det A$, on obtient (C.1.7).

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.5 Déterminant d'un produit de matrices

Théorème C.1.2. *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}$ *alors* $\det B\,A = \det B \det A$.

Démonstration – Soit $C = BA$, en utilisant les notations matricielles, on peut écrire le déterminant de C sous la forme

$$\det C = \det\ (C_1, C_2, \ldots, C_j, \ldots, C_n)\,. \tag{C.1.10}$$

Par ailleurs, par définition du produit de deux matrices, on peut écrire

$$C_1 = B\,A_1$$

relation qui exprime le fait que la 1^e colonne de C s'obtient en multipliant B par la 1^e colonne de A. Cette dernière formule peut s'écrire encore sous la forme

$$C_1 = \sum_{k=1}^{n} a_{k1} B_k. \tag{C.1.11}$$

Reportons (C.1.11) dans le déterminant (C.1.10), on obtient

$$\det C = \det\ \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k1} B_k, C_2, \ldots, C_j, \ldots, C_n \right)$$

et par linéarité par rapport à la 1^e colonne

$$\det C = \sum_{k=1}^{n} a_{k1} \det\ (B_k, C_2, \ldots, C_j, \ldots, C_n)\,.$$

Pour avoir une notation dépendant du numéro de la colonne, on appelle l'indice k_1 soit

$$\det C = \sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1,1} \det\ (B_{k_1}, C_2, \ldots, C_j, \ldots, C_n)\,.$$

Ce qui a été fait sur la première colonne de C peut être fait sur la seconde ce qui donne

$$C_2 = \sum_{k_2=1}^{n} a_{k_2,2} B_{k_2},$$

et donc

$$\det C = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} a_{k_1,1} a_{k_2,2} \det\ (B_{k_1}, B_{k_2}, \ldots, C_j, \ldots, C_n)\,, \tag{C.1.12}$$

mais comme det $(B_{k_1}, B_{k_2}, \ldots, C_j, \ldots, C_n)$ est nul dès que $k_1 = k_2$, on peut récrire (C.1.12) sous la forme

$$\det C = \sum_{k_1 \neq k_2} a_{k_1,1} a_{k_2,2} \det\ (B_{k_1}, B_{k_2}, \ldots, C_j, \ldots, C_n)\,.$$

En continuant sur toutes les colonnes on obtient la formule

$$\det C = \sum_{k_1 \neq k_2 \neq \ldots \neq k_n} a_{k_1,1} a_{k_2,2} \ldots a_{k_n,n} \det\ (B_{k_1}, B_{k_2}, \ldots, B_{k_n})\,. \tag{C.1.13}$$

Comme les $k_1, k_2, \ldots, k_n$ doivent être à chaque fois tous différents, la somme (C.1.13) se fait sur toutes les permutations de $\mathcal{S}_n$. On peut donc récrire (C.1.13) sous la forme

$$\det C = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n} \det\ \left(B_{\sigma(1)}, B_{\sigma(2)}, \ldots, B_{\sigma(n)}\right)\,. \tag{C.1.14}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Or d'après (C.1.3), on a

$$\det \left(B_{\sigma(1)}, B_{\sigma(2)}, \ldots, B_{\sigma(n)}\right) = \epsilon(\sigma)\det \left(B_1, B_2, \ldots, B_n\right)$$

et donc, en reportant cette relation dans (C.1.14), on obtient

$$\begin{aligned}
\det C &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n} \epsilon(\sigma) \det B \\
&= \det B \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n} \\
&= \det B \det A,
\end{aligned}$$

d'après la définition du déterminant de A.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.6 Calcul du rang d'une matrice

Proposition C.1.3. *Soit E un espace vectoriel de dimension m muni d'une base $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_m\}$. Soit $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r)$ une famille de r vecteurs de E avec $r \leq m$. On note X_i le vecteur colonne constitué des composantes de $\vec{x}_i$, $X = (X_1, \ldots, X_r)$ la matrice de $\mathcal{M}_{m,r}$. Alors la famille $\mathcal{X}$ est libre si et seulement si il existe une matrice carrée $r \times r$ extraite de X qui est inversible.*

Démonstration – Le résultat étant évident si $r = m$, on suppose donc que $r < m$.
Condition suffisante. Soit $\tilde{X} \in \mathcal{M}_{r,r}$ une matrice extraite de X régulière.
On va raisonner par l'absurde : supposons que $\mathcal{X}$ soit liée, alors il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ non tous nuls, tels que

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \vec{x}_i = 0$$

donc :

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i X_i = 0. \tag{C.1.15}$$

Mais si l'on restreint (C.1.15) à $\tilde{X}$, on peut écrire également que

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \tilde{X}_i = 0,$$

ce qui montre que $\det \tilde{X} = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Condition nécessaire. Supposons donc que $\mathcal{X}$ soit libre, puisque $\mathcal{E}$ est une base de E, $\mathcal{X} \cup \mathcal{E}$ est une famille génératrice de E, en utilisant le théorème de la base incomplète, on peut compléter $\mathcal{X}$ par une famille $\mathcal{Y}$ de $(m-r)$ vecteurs de $\mathcal{E}$ notés $(\vec{e}_{i_k})_{k=1,\dots,m-r}$ afin d'obtenir une base de E
La matrice Z des vecteurs colonnes constitués des composantes de $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ sur la base $\mathcal{E}$ est inversible puisque $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ est une base.
D'autre part Z est de la forme $Z = (X\ Y)$ (notation par blocs : $X \in \mathcal{M}_{m,r}$, $Y \in \mathcal{M}_{m,m-r}$, $Z \in \mathcal{M}_{m,m}$, où Y a, par exemple, la forme suivante :

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

chaque colonne et chaque ligne de Y n'a qu'un seul élément non nul qui vaut 1.
Il existe alors une permutation des lignes de Z (donc de Y en particulier) telle que la matrice $\hat{Z}$ ainsi obtenue soit de la forme suivante :

$$\hat{Z} = \left(\begin{array}{c|c} \hat{X} & \begin{array}{c} 0 \\ I \end{array} \end{array} \right)$$

matrice (écrite sous forme de trois blocs) dans laquelle $\hat{X}$ est la matrice déduite de X par permutation des lignes, la permutation des lignes ayant eu pour objet de faire apparaître la matrice identité I de $\mathcal{M}_{m-rm-r}$ comme bloc inférieur droit dans $\hat{Z}$. Soit $[\hat{X}]_r$ la matrice carrée $r \times r$ composée des r premières lignes de $\hat{X}$, alors il est immédiat de voir

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

(en développant suivant la dernière colonne de $\hat{Z}$, puis en procédant par récurrence) que

$$\det \hat{Z} = \det [\hat{X}]_r.$$

Comme Z est une matrice carrée régulière on a $\det Z \neq 0$ et donc comme

$$\det [\hat{X}]_r = \det \hat{Z} = \pm \det Z$$

ceci montre que $\det [\hat{X}]_r \neq 0$. Comme $[\hat{X}]_r$ est une matrice extraite de $\hat{X}$, donc de X, la proposition est démontrée.

Théorème C.1.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ alors le rang de A est le plus grand entier r tel qu'il existe une matrice carrée inversible $\hat{A} \in \mathcal{M}_{r,r}$ extraite de A.*

Démonstration – Soit r le rang de A et s le plus grand entier tel qu'il existe une matrice carrée régulière d'ordre s extraite de A. Soit $\hat{A} \in \mathcal{M}_{s,s}$ une telle matrice obtenue par la sélection des lignes et des colonnes suivantes :

$$I = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\} \subset \{1, 2, \ldots, m\}, J = \{j_1, j_2, \ldots, j_s\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}.$$

D'après la proposition précédente, le système des s vecteurs colonnes $\{A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_s}\}$ est libre et donc la dimension r de l'espace engendré par les colonnes de A est au moins s, on a donc

$$s \leq r. \tag{C.1.16}$$

Réciproquement si rang $(A) = r$, il existe une famille de r colonnes linéairement indépendantes

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$\{A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_r}\}$ et donc, toujours d'après la proposition précédente, il existe une matrice carrée d'ordre r extraite de la matrice $(A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_r})$ qui est régulière et donc, d'après la définition de s on a

$$r \leq s. \tag{C.1.17}$$

De (C.1.16) et (C.1.17) on tire $r = s$ et le théorème est démontré.

retour au cours

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

C

Cramer - solution d'un système linéaire **34**

D

Déterminant d'un endomorphisme **28**
Déterminant d'une famille de vecteurs .. **6**
Déterminant et base **24**
Déterminant et colonnes **12**
Déterminant et colonnes adjacentes **10**
Déterminant et inversibilité **26**
Déterminant et lignes **18**
Déterminant et produit **23**
Déterminant-définition par récurrence .. **4**, 18
Déterminants - calcul pratique **20**
Déterminants - définition par les permutations **16**

F

Formes multilinéaires **8**

I

Inverse d'une matrice-calcul numérique **44**
Inverse de A par Cramer **46**

P

Permutations, transpositions **14**

R

Rang **30**

S

Système linéaire - existence de la solution **33**

Système linéaire - notation et exemple **36**, 38, 42

Système linéaire homogène - résolution **38**

Système linéaire inhomogène - existence des solutions **41**

Système linéaire inhomogène - résolution **42**

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Solution de l'exercice A.1.1

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc;$$

$$\begin{vmatrix} 3a & c \\ 3b & d \end{vmatrix} = 3(ad - bc);$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 4 \times 3 \times 5;$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3\lambda \\ 0 & 1 & 2\lambda \\ 4 & 1 & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.2

Dans l'exercice précédent on a vu que le déterminant de $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ était égal $4 * 3 * 5$. Le résultat se généralise très facilement à une matrice triangulaire inférieure quelconque (on peut faire un raisonnement par récurrence). Evidemment on en déduit les résultats sur les matrices diagonales et sur la matrice identité.
Il est évident en utilisant la définition que $\det \overline{A} = \overline{\det A}$. On utilise en particulier les propriétés bien connues sur les complexes conjugués à savoir, le conjugué d'une somme est la somme des conjugués, le conjugué d'un produit est le produit des conjugués.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.3

$$\mathbf{det}\,(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n) = \mathbf{det}\; I = 1$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.4

1.

$$\textbf{det}\,(p,q,r) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -42$$

2. Après identification on obtient les composantes de p, q, r sur la base $\{p_0, q_1, p_2\}$.

$$p = 3p_2 + 3q_1 + 7p_0,\ q = p_2 + q_1,\ r = -p_2 + 2q_1 + 4p_0$$

$$\textbf{det}\,(p,q,r) = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -21$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.5

La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de la matrice :

- pour $n = 1$, c'est évident,
- supposons la propriété vraie à l'ordre $n - 1$,

soit $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_n, B, C \in \mathcal{M}_{n,1}$; on note

$$\tilde{A} = (A_1, \ldots, A_{k-1}, B + C, A_{k+1}, \ldots, A_n),$$

$$\tilde{B} = (A_1, \ldots, A_{k-1}, B, A_{k+1}, \ldots, A_n),$$

$$\tilde{C} = (A_1, \ldots, A_{k-1}, C, A_{k+1}, \ldots, A_n)$$

La définition du déterminant donne :

$$\det \tilde{A} = \sum_{j \neq k} (-1)^{1+j} a_{1j} \det \tilde{A}_{|1,j|} + (-1)^{1+k}(b_1 + c_1) \det \tilde{A}_{|1,k|}.$$

En effet $\tilde{a}_{1j} = a_{1j}$ pour $j \neq k$ et $\tilde{a}_{1k} = b_1 + c_1$.
Pour $j \neq k$, la matrice $\tilde{A}_{|1,j|} \in \mathcal{M}_{n-1,n-1}$ donc, par hypothèse de récurrence, on a

$$\det \tilde{A}_{|1,j|} = \det \tilde{B}_{|1,j|} + \det \tilde{C}_{|1,j|}.$$

De plus

$$\det \tilde{B} = \sum_{j \neq k} (-1)^{1+j} a_{1j} \det \tilde{B}_{|1,j|} + (-1)^{1+k} b_1 \det \tilde{B}_{|1,k|}.$$

$$\det \tilde{C} = \sum_{j \neq k} (-1)^{1+j} a_{1j} \det \tilde{C}_{|1,j|} + (-1)^{1+k} c_1 \det \tilde{C}_{|1,k|}.$$

Il suffit maintenant de remarquer que les matrices $\tilde{A}_{|1,k|}, \tilde{B}_{|1,k|}, \tilde{C}_{|1,k|}$ sont identiques donc elles ont le même déterminant. On obtient alors le résultat :

$$\det \tilde{A} = \det \tilde{B} + \det \tilde{C}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.6

Si la colonne A_k de A est nulle, si on note B la matrice dont les colonnes sont $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}, -A_k, A_{k+1}, \ldots, A_n$, on a $\det B = -\det A$ à cause de la linéarité, d'autre part $A = B$ donc $\det A = \det B$ donc $\det A = -\det A$ donc $\det A = 0$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.7

$\mathbf{det}\,(\lambda A) = \mathbf{det}\,(\lambda A_1 \lambda A_2 \ldots \lambda A_n) = \lambda \mathbf{det}\,(A_1 \lambda A_2 \ldots \lambda A_n) = \lambda^2 \mathbf{det}\,(A_1 A_2 \lambda A_3 \ldots \lambda A_n) = \lambda^n \mathbf{det}\,(A_1 A_2 A_3 \ldots A_n) = \lambda^n \mathbf{det}\,(A)$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.9

det $(C_1C_3C_2) =$ **det** $(C_3C_2C_1) =$ **det** $(C_2C_1C_3) = -d$ **(un échange).**
det $(C_2C_3C_1) = -$**det** $(C_2C_1C_3) = d$ **(2 échanges)**
de même det $(C_3C_1C_2) = d$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.10

1. $$\det{}(B_1B_2C_3) = \sum_{k=1}^{3}\gamma_{k3}\det{}(B_1B_2B_k) = \gamma_{33}d,$$
$$\det{}(B_1B_3C_3) = \gamma_{23}\det{}(B_1,B_3B_2) = -\gamma_{23}d.$$
2. $\det{}(B_1C_2C_3) = \gamma_{22}\det{}(B_1B_2C_3) + \gamma_{32}\det{}(B_1B_3C_3) = (\gamma_{22}\gamma_{33} - \gamma_{32}\gamma_{23})d$
3. $\det{}(B_2C_2C_3) = (\gamma_{32}\gamma_{13} - \gamma_{12}\gamma_{33})d$, $\det{}(B_3C_2C_3) = (\gamma_{12}\gamma_{23} - \gamma_{22}\gamma_{13})d$
4. $\det{}(C_1C_2C_3) = \gamma_{11}\det{}(B_1C_2C_3) + \gamma_{21}\det{}(B_2C_2C_3) + \gamma_{31}\det{}(B_3C_2C_3) = \lambda d$ avec
$\lambda = \gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33} - \gamma_{11}\gamma_{32}\gamma_{23} + \gamma_{21}\gamma_{32}\gamma_{13} - \gamma_{21}\gamma_{12}\gamma_{33} + \gamma_{31}\gamma_{12}\gamma_{23} - \gamma_{31}\gamma_{22}\gamma_{13}$
5. Si $B = I$, $d = 1$ on a donc det $C = \lambda$.

   dans ce cas les termes de la matrice C sont alors les γ_{ij}, on a donc det $C = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix}$.

   On retrouve bien det $C = \lambda$.

Retour à l'exercice ▲

1. $\sigma_1 : (1,2,3) \mapsto (1,3,2), \sigma_2 : (1,2,3) \mapsto (3,2,1), \sigma_3 : (1,2,3) \mapsto (2,1,3)$ sont des transpositions.
2. $\sigma_0 : (1,2,3) \mapsto (1,2,3), \sigma_0 = \sigma_2 \circ \sigma_2 = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$, entre autres !
   $\sigma_4 : (1,2,3) \mapsto (2,3,1), \sigma_4 = \sigma_2 \circ \sigma_3 = \sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_1 \circ \sigma_3 \circ \sigma_3 \circ \sigma_2 \ldots$ etc.
   $\sigma_5 : (1,2,3) \mapsto (3,1,2), \sigma_5 = \sigma_3 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_1 \circ \sigma_3 \ldots$ etc.
3. $\mathcal{E}(\sigma_1) = \mathcal{E}(\sigma_2) = \mathcal{E}(\sigma_3) = -1, \mathcal{E}(\sigma_0) = \mathcal{E}(\sigma_4) = \mathcal{E}(\sigma_5) = 1$
4. $B = (A_3 A_2 A_1)\ ,\ C = (A_2 A_3 A_1)$
   det $B = -$det $(A_1 A_2 A_3) = -$det A
   det $C = -$det $B =$ det A

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.13

Reprenez la table écrite dans le TD1, les résultats de l'exercice précédent et vérifiez que :

$$\epsilon(\tau) = -1;$$

$$\epsilon(\sigma_i \circ \sigma_j) = \epsilon(\sigma_i)\epsilon(\sigma_j);$$

$$\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma);$$

$$\textbf{det}\,(A_{\sigma_i(1)}, A_{\sigma_i(2)}, A_{\sigma_i(3)}) = \epsilon(\sigma_i)\textbf{det}\,A \textbf{ pour } i = 2, 4$$

.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.14

Le déterminant de A est égal à :

$$\underbrace{a_{11}a_{22}a_{33}}_{a_{\sigma_0(1)1}a_{\sigma_0(2)2}a_{\sigma_0(3)3}} \quad \underbrace{-\,a_{11}a_{32}a_{23}}_{-a_{\sigma_1(1)1}a_{\sigma_1(2)2}a_{\sigma_1(3)3}} \quad \underbrace{+\,a_{21}a_{32}a_{13}}_{+a_{\sigma_4(1)1}\ldots} \quad \underbrace{-\,a_{21}a_{12}a_{33}}_{-a_{\sigma_3(1)1}\ldots} \quad \underbrace{+\,a_{31}a_{12}a_{23}}_{+a_{\sigma_5(1)1}\ldots} \quad \underbrace{-\,a_{31}a_{22}a_{13}}_{-a_{\sigma_2(1)1}\ldots}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.15

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -32;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 15.$$

Pour le premier déterminant on a développé suivant la 2e colonne, pour le deuxième déterminant on a développé selon la 3e ligne.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.16

1. – 1e étape : $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$: c'est à dire , on remplace la 1e colonne par (la 1e + la 2e +la 3e).
   – 2e étape : On factorise 6 dans la 1e colonne.
   – 3e étape : $L_2 \to L_2 - L_1$: on remplace la 2e ligne par (la 2e - la 1e).
   – 4e étape : On développe suivant la 2e ligne.
   – 5e étape : On calcule le déterminant 2×2
2. – $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3$
   On a effectué $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ puis le développement par rapport à la 1e colonne.
   – $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 1$
   On a effectué $L_4 \to L_4 - L_3, L_3 \to L_3 - L_2, L_2 \to L_2 - L_1$.
   Puis on a développé selon la 1e colonne.
   Puis on a effectué $L_3 \to L_3 - L_2, L_2 \to L_2 - L_1$.
   Puis on a développé selon la 1e colonne.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.17

$\det AB = \det BA = \det A \det B.$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.18

On a vu dans l'exercice A.1.1 que $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ donc la famille est libre.

Pour la deuxième famille on trouve que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ donc cette famille est liée

(on a utilisé la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

Retour à l'exercice ▲

D'après le théorème III.2.2, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

$$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\} \text{ forment une base de } E \Longleftrightarrow \det\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\right) \neq 0.$$

Donc leurs négations sont équivalentes aussi :

$$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\} \text{ n'est pas une base de } E \Longleftrightarrow \det\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\right) = 0.$$

Or, dans un espace de dimension n, une famille de n vecteurs qui n'est pas une base est une famille liée, d'où le résultat.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.20

La première matrice est inversible car son déterminant vaut 4 donc il est différent de 0, la deuxième n'est pas inversible car son déterminant est nul.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.21

Si A et B sont inversibles, alors det $A \neq 0$ et det $B \neq 0$ donc det $AB \neq 0$: AB est inversible.
Si l'une des matrices n'est pas inversible son déterminant est nul, donc le produit des déterminants est nul, donc le déterminant du produit AB est nul, donc AB n'est pas inversible.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.22

La matrice de la rotation est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},$$

son déterminant est égal à 1.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.23

1. On peut utiliser la proposition du paragraphe "Rang ". On calcule les 4 déterminants 3×3 extraits de la matrice $(X_1X_2X_3)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 5 & 6 & 4\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}$.

   Ils sont tous nuls :
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 5 & 6 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1\\ 5 & 6 & 4\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2\\ 5 & 6 & 4\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=0$$
   donc la famille n'est pas libre. Ce résultat aurait été obtenu (avec moins de calculs) en écrivant le système :
$$\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\alpha_3\vec{x}_3=\vec{0}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{llll}\alpha_1 & +2\alpha_2 & +\alpha_3 & =0\\ 3\alpha_1 & +2\alpha_2 & +2\alpha_3 & =0\\ 5\alpha_1 & +6\alpha_2 & +4\alpha_3 & =0\\ \alpha_1 & -2\alpha_2 & & =0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{llll}\alpha_1 & +2\alpha_2 & +\alpha_3 & =0\\ \alpha_1 & -2\alpha_2 & & =0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}\alpha_1 & =2\alpha_2\\ \alpha_3 & =-4\alpha_2\end{array}\right.$$
2. On voit que $(X_1X_2X_3)=A^T$ donc ces 2 matrices ont le même rang, or le rang de X est strictement inférieur à 3 d'après la question précédente. de plus on constate immédiatement que $\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}\neq 0$ donc le rang de X (donc de A) est égal à 2.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.24

– Avec les formules de Cramer on obtient :
  det $A = 4, \triangle_1 = 8, \triangle_2 = 4, \triangle_3 = -4$, d'où $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1$
  Par la méthode d'élimination de gauss décrite en TD on obtient :
  $$\left\{\begin{array}{cccc} 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = 3 \\ -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & = -4 \\ 2x_1 & +5x_2 & +10x_3 & = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = 3 \\ & x_2 & +2x_3 & = -1 \\ & 2x_2 & +6x_3 & = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = 3 \\ & x_2 & +2x_3 & = -1 \\ & & +2x_3 & = -2 \end{array}\right.$$
  Ce qui donne $x_3 = -1, x_2 = 1, x_1 = 2$
– On obtient det $A = 0$ ce qui ne permet pas d'utiliser les formules de Cramer, du moins pour le système de 3 équations (on pourrait résoudre les 2 premières par les formules de Cramer en considérant par exemple x_3 comme un paramètre au second membre, on obtiendrait x_1 et x_2 en fonction de x_3 et il faudrait vérifier si les solutions trouvées vérifient la 3e équation)
  Par la méthode d'élimination de Gauss on obtient :
  $$\left\{\begin{array}{cccc} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & = -2 \\ x_1 & +4x_2 & +7x_3 & = 5 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 1 \\ & -2x_2 & -4x_3 & = -4 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x_2 & = & -2x_3 + 2 \\ x_1 & = & x_3 - 3 \end{array}\right. ,$$
  ce qui est plus simple !

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.25

On peut montrer que les 4 matrices 3×3 extraites ne sont pas inversibles ou montrer que les 3 colonnes sont liées : on en déduit que le rang de A est inférieur strictement à 3. On voit immédiatement que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, on en déduit que le rang de A est supérieur ou égal à 2. D'où $r = 2$

Retour à l'exercice ▲

La dimension du noyau de A est égale à $3 - r = 1$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.27

Revoir les définitions de $\hat{A}, A^*, x^*$ et vérifier que $\sum_{j=1}^{p} x_j \hat{A}_j = A^* x^*$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.28

On résout $A^*x^* = \hat{b} - \sum_{j=r+1}^{p} x_j \hat{A}_j$, c'est à dire, $\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & +x_2 & = & 1 & -x_3 \\ x_1 & +2x_2 & = & -1 & x_3 \end{array}\right.$

On obtient

$$\left\{\begin{array}{cccc} x_2 & = & 2x_3 & -2 \\ x_1 & = & -3x_3 & +3 \end{array}\right.$$

Il reste à vérifier si ces expressions vérifient les 2 dernières équations. La réponse est oui avec b, non avec b', donc le système $Ax = b'$ n'a pas de solution.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.29

On voit après la première étape de la méthode de Gauss que l'on obtient 2 équations incompatibles, à savoir $-x_2 + 2x_3 = 2$ et $-x_2 + 2x_3 = 3$. Le système n'a pas de solution.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.30

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & +3x_2 & +7x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ & x_2 & +3x_3 & = & -2 \\ & +2x_2 & +5x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ & x_2 & +3x_3 & = & -2 \\ & & -x_3 & = & 5 \end{array}\right. .$$

.On a donc : $x_1 = -1, x_2 = 13, x_3 = -5$
Pour obtenir la 2e colonne il suffit de changer le second membre, on prend I_2, pour la 3e on prend I_3, tous les calculs ne sont pas à refaire, les coefficients de x_1, x_2, x_3 au cours des étapes restent les mêmes.

Retour à l'exercice ▲

On obtient après calcul : $A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -11 & 10 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.1

Voir le paragraphe "Déterminant-définition par récurrence".

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Formes multilinéaires"

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.2

Dans le cas $\vec{u}_1 = \vec{e}_1, \vec{u}_2 = \vec{e}_2$, on retrouve $x_1 y_2 - x_2 y_1$.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Déterminant et colonnes".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.3

Essayer de construire des matrices qui ont le même déterminant que A.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Exercice A.2.3

Si une colonne est nulle, si 2 colonnes sont égales . . ..

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Exercice A.2.3

Pour la 3e matrice, on peut remarquer que toutes ses colonnes peuvent s'exprimer à l'aide de 3 vecteurs colonnes que l'on déterminera.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Déterminant-définition par récurrence".

Retour à l'exercice ▲

Il est facile de vérifier qu'une matrice est l'inverse d'une autre.

Retour à l'exercice ▲

Effectuer le produit : à cette occasion se familiariser avec la multiplication par blocs.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Déterminant et colonnes".

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 4, Exercice A.2.4

Voir le paragraphe "Déterminant et base".

Retour à l'exercice ▲

Si det $M = 0$, que dire sur les colonnes de M ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 4, Exercice A.2.4

Montrer que les colonnes de A sont liées.

Retour à l'exercice ▲

Si det $N = 0$, que dire des lignes de N ?

Retour à l'exercice ▲

Ecrire A^T : bien noter la taille des blocs.

Retour à l'exercice ▲

Un peu de perspicacité ! Essayer de construire l'inverse.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.4

1. Démontrons ce résultat par récurrence. Pour $n = 1$ on a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1m} \\ B & M \end{pmatrix}$ d'où, en calculant le déterminant par rapport à la première ligne, nous obtenons :

$$\det A = \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^{j+1} a_{1j} \det A_{|1,j|} = \det A_{|1,1|} = \det M.$$

Supposons que $\det A = \det M$ pour $n \geq 1$ et considérons $A' = \begin{pmatrix} I_{n+1} & 0_{n+1m} \\ B & M \end{pmatrix}$ où $B \in \mathcal{M}_{mn+1}$. En dévelop-pant le déterminant de A' par rapport à la première ligne nous obtenons :

$$\det A' = \sum_{j=1}^{n+1+m} (-1)^{j+1} a_{1j} \det A'_{|1,j|} = \det A'_{|1,1|} = \det \begin{pmatrix} I_n & 0_{nm} \\ \tilde{B} & M \end{pmatrix} = \det M,$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence pour la dernière égalité ($\tilde{B} = (B_2 \dots B_n) \in \mathcal{M}_{mn}$) . D'où le résultat par récurrence.

2. On pose $C = \begin{pmatrix} I_n & 0_{nm} \\ 0_{mn} & M^{-1} \end{pmatrix}$. Les blocs de A et C ayant des dimensions compatibles il est facile de voir que $AC = \begin{pmatrix} I_n^2 + 0_{nm}0_{mn} & I_n 0_{nm} + 0_{nm} M^{-1} \\ BI_n + M0_{mn} & B0_{nm} + MM^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_{nm} \\ B & I_m \end{pmatrix} = I_{n+m}$, donc $C = A^{-1}$.

3. On procède comme au **1** mais en développant le calcul du déterminant par rapport à la dernière colonne :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n+m} (-1)^{n+m+j} a_{jn+m} \det A_{|j,n+m|} = \det A_{|n+m,n+m|}.$$

4. (a) Si $\det M = 0$ alors $\operatorname{Ker} M \neq \{0\}$, d'où l'existence d'un $Y \in \mathcal{M}_{m1}$ non nul tel que $MY = 0$.
Soit $X = \begin{pmatrix} 0_{n1} \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m1}$ alors $X \neq 0$ et $AX = \begin{pmatrix} N0_{n1} + 0_{nm}Y \\ B0_{n1} + MY \end{pmatrix} = 0_{n+m1}$, donc $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$ soit $\det A = 0$. De même si $\det N = 0$, alors $\det N^T = 0$ il existe un $Y \neq 0$ dans $\mathcal{M}_{n1}$ tel que $N^TY = 0$.
Soit $X = \begin{pmatrix} Y \\ 0_{m1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m1}$ alors $X \neq 0$ et $A^TX = \begin{pmatrix} N^TY + B^T0_{m1} \\ 0_{mn}Y + M^T0_{m1} \end{pmatrix} = 0_{n+m1}$, donc $\operatorname{Ker} A^T \neq \{0\}$ soit $\det A^T = \det A = 0$.

(b) $A = \begin{pmatrix} N & 0_{nm} \\ B & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0_{nm} \\ 0_{mn} & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & 0_{nm} \\ B & M \end{pmatrix}$ donc

$$\det A = \det \begin{pmatrix} N & 0_{nm} \\ B & I_m \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} I_n & 0_{nm} \\ 0_{mn} & M \end{pmatrix} = \det N \times \det M \quad \text{(d'après } \mathbf{1} \text{ et } \mathbf{3}\text{)}.$$

5. $A^T = \begin{pmatrix} N^T & 0_{nm} \\ C^T & M^T \end{pmatrix}$ donc $\det A^T = \det N^T \det M^T$ (d'après **4. (b)**) soit encore $\det A = \det N \det M$.

6. Notons tout d'abord que si N et M sont inversibles alors il en va de même pour A puisque $\det A = \det N \det M \neq 0$. Pour $B = \begin{pmatrix} N^{-1} & 0_{nm} \\ 0_{mn} & M^{-1} \end{pmatrix}$ nous obtenons :

$$AB = \begin{pmatrix} NN^{-1} + 0_{nm}0_{mn} & N0_{nm} + 0_{nm}M^{-1} \\ 0_{mn}N^{-1} + M0_{mn} & 0_{mn}0_{nm} + MM^{-1} \end{pmatrix} = I_{n+m},$$

soit $B = A^{-1}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.5

Bien sûr on aurait pu traiter cet exercice à l'issue du chapitre 1.
On aurait alors montré que la famille $\{p, p', p'', p^{(3)}, p^{(4)}\}$ est libre , puisque la dimension de $\mathcal{P}_4$ est 5, on aurait conclu que $\{p, p', p'', p^{(3)}, p^{(4)}\}$ est une base de $\mathcal{P}_4$.
Trouver maintenant une autre démonstration en utilisant les déterminants.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Déterminant et base".

Retour à l'exercice ▲

Que vaut le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 2a_2 & 6a_3 & 24a_4 \\ a_1 & 2a_2 & 6a_3 & 24a_4 & 0 \\ a_2 & 3a_3 & 12a_4 & 0 & 0 \\ a_3 & 4a_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

Retour à l'exercice ▲

Vous pouvez bien sûr utiliser le paragraphe "Déterminant-définition par récurrence", mais il est plus rapide de construire des matrices plus simples qui ont le même déterminant que A.
Voir le paragraphe "Déterminants - calcul pratique".

Retour à l'exercice ▲

Revoir par exemple les calculs effectués dans l'exercice A.1.15

Retour à l'exercice ▲

Calculer AM.
Montrer que chacune des colonnes de AM est proportionnelle à la colonne correspondante de M.
Que vaut

$$\det\left(\alpha_1 M_1\ \alpha_2 M_2\ \alpha_3 M_3\ \alpha_4 M_4\right)?$$

Retour à l'exercice ▲

$$\mathbf{det}\ (\alpha_1 M_1\ \alpha_2 M_2\ \alpha_3 M_3\ \alpha_4 M_4) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \mathbf{det}\ M.$$

Pourquoi ?

Retour à l'exercice ▲

Si on montre que

$$\det AM = \alpha \det M,$$

peut-on en déduire la valeur de $\det A$?

Retour à l'exercice ▲

Si $\det AM = \alpha \det M$, et si $\det M \neq 0$, on en déduit que $\det A = \alpha$.
La valeur exacte de $\det M$ est donc peu importante, ce qui est indispensable par contre c'est que $\det M$ ne soit pas nul.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Déterminant et base".

Retour à l'exercice ▲

Calculer le déterminant de la façon la plus économique possible.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Déterminant et base".

Retour à l'exercice ▲

Il suffit de calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Pourquoi ?

Retour à l'exercice ▲

Que vaut $\det(-M)$ **?**

Retour à l'exercice ▲

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.9

La méthode de Gauss telle qu'elle est présentée ici peut être programmée. Respectez l'algorithme proposé.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Déterminant et colonnes".

Retour à l'exercice ▲

Comment construit-on la nouvelle matrice ?

Retour à l'exercice ▲

Quelle est l'expression des lignes de la nouvelle matrice (en fonction des anciennes) ?

Retour à l'exercice ▲

La matrice du dernier système obtenu par Gauss est triangulaire, son déterminant est donc immédiat à calculer.

Retour à l'exercice ▲

Poser le problème.

Retour à l'exercice ▲

On cherche l'équation sous la forme $y = p(x) = ax^2 + bx + c$.
Les coefficients a, b, c doivent vérifier

$$p(-1) = 2, p(1) = -4, p(2) = 8$$

Résoudre le système obtenu.

Retour à l'exercice ▲

On a :

$$\begin{cases} a - b + c & = & 2 \\ a + b + c & = & -4 \\ 4a + 2b + c & = & 8 \end{cases}$$

Retour à l'exercice ▲

On obtient le système :

$$\left(\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +(1-2\alpha)x_3 & = 2(1+\alpha) \\ & -2(1+\alpha)x_2 & +(1+2\alpha+2\alpha^2)x_3 & = -2(1+\alpha)^2 \\ & & 2\alpha(1-\alpha)x_3 & = 2(1+\alpha)\alpha \end{array}\right)$$

Retour à l'exercice ▲

Revoir la question 4 de l'exercice A.2.9

Retour à l'exercice ▲

On résout le système triangulaire équivalent à $Ax = b$.
Bien sûr, on résout la troisième équation, puis la deuxième, puis la première.

Retour à l'exercice ▲

Ecrire les systèmes particuliers obtenus quand det $A = 0$ et discuter.

Retour à l'exercice ▲

Avant d'avoir résolu le système est-il possible de prévoir si l'ensemble des solutions de $Ax = b$ est un espace vectoriel ?

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Cramer - solution d'un système linéaire".

Retour à l'exercice ▲

Est-il possible d'utiliser Cramer pour résoudre $Ax = b$ lorsque $\det A = 0$?

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Inverse de A par Cramer".

Retour à l'exercice ▲

Localiser $1, j$ et j^2 sur un cercle trigonométrique et en donner la partie réelle et la partie imaginaire. Se rappeler les propriétés des racines cubiques de l'unité :

$$j^3 = 1,\ 1 + j + j^2 = 0,\ j^2 = \bar{j} = j^{-1}.$$

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Cramer - solution d'un système linéaire".

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2b, Exercice A.2.12

Pour trouver une condition nécessaire et suffisante pour que x_1, x_2, x_3 soient réels, raisonner par équivalence. Ne pas oublier que la somme de réels est réelle,...

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.12

$Ax = b \Longleftrightarrow x = A^{-1}b.$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.13

Pour la première matrice, le système admet une solution unique si et seulement si les coefficients a_i sont non nuls.
Cette solution est

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 = \frac{y_n}{a_n} \\ x_2 = \frac{y_{n-1}}{a_{n-1}} \\ \dots \\ x_n = \frac{y_1}{a_1} \end{array}\right.$$

D'où A^{-1}.
Pour la deuxième matrice, le système $Ax = y$ admet toujours une solution unique. Cette solution est :

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 = y_1 - y_2 \\ \dots \\ x_{n-1} = y_{n-1} - y_n \\ x_n = y_n \end{array}\right.$$

D'où A^{-1}.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.14

Voir le paragraphe "Rang ".
Pourquoi peut-on dire (quasiment sans calculs) que $2 \leq r \leq 3$?

Retour à l'exercice ▲

Calculer le déterminant d'une matrice 3×3 extraite.
Si ce déterminant est nul, peut-on conclure ?
Si ce déterminant n'est pas nul, peut-on conclure ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Exercice A.2.14

"Explorer" toutes les matrices tant que l'on n'a pas pu conclure.

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Exercice A.2.14

On aurait pu avoir une autre approche dès le début et chercher la dimension de Ker A.

Retour à l'exercice ▲

Caculer AB et BA.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.15

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quel est le rang de ces matrices ?

Retour à l'exercice ▲

On résout $Ax = 0$ par la méthode de Gauss, voir l'exercice A.2.9

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1a, Exercice A.2.16

$$x \in \mathbf{Ker}\ A \Leftrightarrow x = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Quelle est la dimension de Ker A ?

Retour à l'exercice ▲

La dimension de Ker A vaut 1, en déduire le rang de A : voir le chapitre 2.

Retour à l'exercice ▲

$\mathbf{rang}\ A = 3 - 1 = 2.$

Retour à l'exercice ▲

Résoudre $Ax = b$ par la méthode de Gauss.

Retour à l'exercice ▲

On obtient

$$x = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} \\ \frac{-1}{11} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Est-ce plausible ?

Retour à l'exercice ▲

$\begin{pmatrix} \frac{4}{11} \\ \frac{-1}{11} \\ 0 \end{pmatrix}$ est une solution particulière x_p, on retrouve que $x - x_p \in$ Ker A .

Attention vos calculs ne vous ont peut être pas conduit à la même solution particulière, mais dans tous les cas votre solution x doit s'écrire $x_p + x_0$ où x_p est une solution particulière du système $Ax = b$ et où x_0 appartient à Ker A.

Retour à l'exercice ▲

Résoudre $Ax = b$ par la méthode de Gauss.

Retour à l'exercice ▲

Montrer qu'il n'existe pas de solution.
On en déduit que $b \notin \mathrm{Im}\, A$.

Retour à l'exercice ▲

Utiliser la même démarche que dans la question 1). On trouve que le rang de A vaut 3.

Retour à l'exercice ▲

Avant d'aborder les questions (b) et (c), on peut prévoir que $Ax = b$ a une solution unique ou aucune solution (il n'y aura pas une infinité de solutions). Pourquoi ?

Retour à l'exercice ▲

Montrer que, ici, si $Ax = b$ admet au moins une solution cette solution est forcément unique. Pour cela on suppose qu'il existe 2 solutions et on montre que ce sont les mêmes en utilisant ce que l'on vient de montrer sur Ker A.
Pour résoudre effectivement, on utilise la méthode de Gauss.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.16

Utiliser la même démarche que dans la question 1). On trouve que le rang de A vaut 3.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3, Exercice A.2.16

Avant d'aborder les questions (b) et (c), on peut prévoir que le système $Ax = b$ aura toujours une infinité de solutions (pour tout b). Pourquoi ?

Retour à l'exercice ▲

Le rang de A vaut 3 , donc Im $A = \mathcal{M}_{31}$, donc la famille $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{31}$, donc tout vecteur b se décompose en

$$b = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4$$

En déduire que le système $Ax = b$ admet pour solution $x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$

Pour résoudre effectivement, utiliser la méthode de Gauss.

Retour à l'exercice ▲

Utiliser la même démarche que dans la question 1). On trouve que le rang de A vaut 2.

Retour à l'exercice ▲

Avant d'aborder les questions (b) et (c), on peut prévoir que $Ax = b$ a une infinité de solutions ou aucune solution (il n'y aura pas de solution unique). Pourquoi ?

Retour à l'exercice ▲

Si $b \in \text{Im } A$, il y a une infinité de solutions (car Ker A est de dimension 2).
Si $b \notin \text{Im } A$, il n'y a pas de solutions.
Pour résoudre effectivement, on utilise la méthode de Gauss.

Retour à l'exercice ▲