Exercice 1.
Soit A un ABR et x un sommet de A. On appelle équilibre de x la quantité $eq(x) = h(A_g(x)) - h(A_d(x))$.

A. *Montrer que lors d'une rotation droite autour d'un sommet x, si l'on note y le fils gauche de x, eqx et eqy les équilibres de x et y avant rotation, alors après rotation les relations suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{aligned} eq(x) &= eqx - 1 - \max(0, eqy) \\ eq(y) &= eqy - 1 \text{ si } eq(x) \geq 0 \\ eq(y) &= eqx - 2 + \min(0, eqy) \text{ sinon} \end{aligned}$$

B. *En déduire une fonction Rot_d^{eq}, qui, à partir d'un arbre a, réalise une rotation droite autour de sa racine, met à jour l'équilibre de ses sommets et renvoie l'abre modifié.*

C. *Modifier cette fonction de sorte qu'elle mette à jour un paramètre entier appelé Δ, qui indique la valeur de la différence entre la hauteur du sous-arbre arpès la rotation et celle du sous-arbre avant cette rotation.*

D. *Ecrire une fonction similaire qui réalise une rotation gauche.*

E. *Ecrire une fonction similaire qui réalise une rotation gauche-droite.*

F. *Soit $A(x)$ un ABR de hauteur h tel que $|eq(x)| = 2$ et pour tout z différent de x appartenant à $A(x)$, on a $|eq(x)| \leq 1$. Ecrire une fonction $reequilibre\_avl(x : avl, \Delta : entier)$ qui retourne un ABR entièrement équilibré de hauteur $h + \Delta$.*

G. *Calculer la complexité de la fonction $reequilibre\_avl$.*

H. *Ecrire un algorithme $insere\_avl(x, a : avl, \Delta : entier)$ qui retourne l'AVL où x a été inséré ainsi que la variation Δ de la hauteur de l'arbre.*

I. *Monter que lors du premier appel à $insere\_avl$ qui lance un appel à la fonction $reequilibre\_avl$, la valeur retournée pour Δ est égale à 0. En déduire le nombre total d'appels à $reequilibre\_avl$ lors d'une insertion.*

J. *Analyser la complexité de cet algorithme.*