MT23-Algèbre linéaire

Chapitre 2 : Applications linéaires et matrices

ÉQUIPE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

UTC

octobre 2009

Chapitre II
Applications linéaires et matrices

II.1 Applications linéaires

II.1.1 Application linéaire - définition

Exercices :
Exercice A.1.1

Dans tout ce chapitre E, F, G désigneront des espaces vectoriels (en général de dimensions finies) sur un même corps K.

Définition II.1.1. *On appelle* **application linéaire** $u : E \to F$*, une application possédant les propriétés suivantes :*
- $u(\vec{x} + \vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y}) \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$,
- $u(\lambda \vec{x}) = \lambda u(\vec{x}) \qquad \forall \vec{x} \in E, \lambda \in K$.

On notera $\mathcal{L}(E;F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

L'application nulle qui à tout $\vec{x}$ associe le vecteur nul est bien sûr linéaire.
L'image par u du vecteur nul de E est toujours le vecteur nul de F : il suffit de choisir $\lambda = 0$ et l'on a $u(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.
L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe e^x n'est pas linéaire, par contre l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $3x$ est linéaire.

L'ensemble $\mathcal{L}(E;F)$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur K. En effet on peut définir la somme de deux applications u et v de $\mathcal{L}(E;F)$ par

$$(u + v)(\vec{x}) = u(\vec{x}) + v(\vec{x}),$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

ce qui confère à $\mathcal{L}(E;F)$ une structure de groupe pour l'addition (l'élément neutre étant l'application linéaire identiquement nulle). Par ailleurs on peut définir la multiplication de u par un scalaire λ par

$$(\lambda u)(\vec{x}) = \lambda u(\vec{x}), \lambda \in K.$$

Ces lois vérifient les axiomes des espaces vectoriels, on parlera donc, dans la suite, de **l'espace vectoriel des applications linéaires**.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.1.2 Noyau et image d'une application linéaire

Exercices :
Exercice A.1.2
Exercice A.1.3

Définition II.1.2. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E;F)$*,*

– *on appelle* **noyau** *de* u *le sous-espace vectoriel de* E *noté* Ker u *tel que*

$$\text{Ker } u = \{\vec{x} \in E | u(\vec{x}) = \vec{0}\},$$

– *on appelle* **image** *de* u *le sous-espace vectoriel de* F *noté* Im u *tel que*

$$\text{Im } u = \{\vec{y} \in F | \exists \vec{x} \in E \textit{ avec } \vec{y} = u(\vec{x})\}.$$

Par exemple, si u est définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par $u(\vec{x}) = x_1 + 3x_2 + 5x_3$ alors Ker u est le plan d'équation $x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0$ et Im $u = \mathbb{R}$.
Dans la définition précédente il faut vérifier que le noyau ou l'image de u sont bien des sous-espaces vectoriels. Vérifions le, par exemple, pour l'image de u. Tout d'abord, Im u est non vide puisque $\vec{0}_F$ appartient à Im u. D'autre part, si $\vec{y}$ et $\vec{y'}$ appartiennent à Im u alors, par définition, il existe $\vec{x}$ et $\vec{x'}$ dans E tels que

$$\vec{y} = u(\vec{x}),\ \vec{y'} = u(\vec{x'}).$$

Donc, en utilisant la linéarité de u, on a

$$\vec{y} + \vec{y'} = u(\vec{x}) + u(\vec{x'}) = u(\vec{x} + \vec{x'}) \Rightarrow \vec{y} + \vec{y'} \in \text{Im } u$$
$$\lambda\vec{y} = \lambda u(\vec{x}) = u(\lambda\vec{x}) \Rightarrow \lambda\vec{y} \in \text{Im } u, \qquad (\lambda \in K, \text{quelconque})$$

Montrez en exercice que Ker u est un sous-espace vectoriel de E.

II.1.3 Image d'une famille liée, image d'une famille génératrice de E

Exercices :
Exercice A.1.4

Théorème II.1.1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$, alors on a les propriétés suivantes :*
– *l'image par u de toute famille liée de E est une famille liée de F,*
– *l'image par u de toute famille génératrice de E est une famille génératrice de* $\operatorname{Im} u$.

La démonstration de ce théorème est à faire en exercice.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.1.4 Projection

Exercices :
Exercice A.1.5
Exercice A.1.6

Définition II.1.3. *Soit un espace vectoriel E, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 \oplus F_2$, on appelle* **projection** *ou encore* **projecteur** *sur F_1 parallèlement à F_2 l'application u de E dans E définie par :*

$$u(\vec{x}) = \vec{x}_1 \text{ si } \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \text{ où } \vec{x}_1 \in F_1, \vec{x}_2 \in F_2.$$

Cette définition a bien un sens puisque l'on a montré au chapitre 1 (paragraphe : "sous espaces supplémentaires") que la décomposition $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ est unique.

Bien sûr la projection sur un plan π parallèlement à une droite D telle que vous la connaissez déjà est une projection au sens de la définition précédente On démontre en exercice que la projection est une application linéaire dont le noyau est F_2 et l'image est F_1.

II.1.5 Composition de deux applications linéaires

Exercices :
Exercice A.1.7

Documents :
Document C.1.1

Définition II.1.4. (Composition de deux applications linéaires)
Soient $v \in \mathcal{L}(E;F)$ *et* $u \in \mathcal{L}(F;G)$ *deux applications linéaires, la composée* $u \circ v$ *de* u *et* v *est l'application linéaire définie par*

$$u \circ v : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ \vec{x} & \longmapsto & u[v(\vec{x})] \end{array} \right.$$

et on a le diagramme suivant (bien noter l'ordre dans lequel sont écrits u *et* v*) :*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{v} F \xrightarrow{u} & G \\ & & \\ E & \xrightarrow{\quad w = u \circ v \quad} & G \end{array} \right.$$

On vérifie en exercice que l'application $u \circ v$ est linéaire.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.1.6 Détermination d'une application linéaire

Exercices :
Exercice A.1.8

A partir de maintenant, les espaces vectoriels considérés seront de dimension finie.

Vous pouvez traiter l'exercice avant de lire sa généralisation :

Proposition II.1.1. *Soient $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E;F)$, alors u est entièrement définie par la famille de vecteurs $\{u(\vec{e}_j)\}_{j=1,\ldots,n}$.*

Démonstration – Soit $\vec{x} \in E$, alors il se décompose de manière unique sur $\mathcal{E}$:

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j \qquad \text{(II.1.1)}$$

et, comme u est linéaire, on a

$$u(\vec{x}) = u\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} u(x_j \vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j u(\vec{e}_j) \qquad \text{(II.1.2)}$$

ce qui démontre la proposition.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Proposition II.1.2. *Soient* $u \in \mathcal{L}(E;F)$,$\vec{x} \in E$
$\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ *une base de* E , $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_m\}$ *une base de* F.
Si on connait les composantes de $\vec{x}$ *et des vecteurs* $u(\vec{e}_j)$ *:*
$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j \quad , \quad u(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{f}_i,\ ,\ j = 1, \ldots, n.$
Si on pose $\vec{y} = u(\vec{x})$ *alors*

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{m} y_i \vec{f}_i \quad \textit{avec} \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, i = 1, \ldots, m.$$

Démonstration – On a

$$u(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j u(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} \left(x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{f}_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \vec{f}_i$$

Cette proposition va être à la base du formalisme matriciel qui sera introduit dans le paragraphe sur les matrices.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.1.7 Caractérisation de injective

Exercices :
Exercice A.1.9

Théorème II.1.2. *Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$, alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est injective,*

(ii) $\text{Ker } u = \{\vec{0}\}$,

Démonstration –
(i)⇒(ii) Supposons que u est injective.
Soit $\vec{x} \in \text{Ker } u$, donc $u(\vec{x}) = \vec{0}$.
Or, puisque u est linéaire, $u(\vec{0}) = \vec{0}$
d'où $\vec{x} = \vec{0}$ par injectivité.
On vient donc de montrer que $\text{Ker } u = \{\vec{0}\}$.

(ii)⇒(i) Soient $\vec{x}$ et $\vec{x'}$ deux vecteurs de E tels que $u(\vec{x}) = u(\vec{x'})$, alors par linéarité on a $u(\vec{x} - \vec{x'}) = \vec{0}$ et comme $\text{Ker } u = \{\vec{0}\}$, $\vec{x} - \vec{x'} = \vec{0}$, d'où u est injective.

Proposition II.1.3. *Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$ une application injective, alors l'image par u d'une famille libre de E est une famille libre de F.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration – Soit $\mathcal{L} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ une famille libre de E, pour montrer que la famille $\{u(\vec{x}_1), u(\vec{x}_2), \ldots, u(\vec{x}_n)\}$ est libre, on étudie la relation

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(\vec{x}_i) = \vec{0}.$$

Par linéarité, on obtient

$$u\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i\right) = \vec{0}.$$

Puisque u est injective, $\mathrm{Ker}\ u = \{\vec{0}\}$. Cette dernière relation entraine

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0},$$

ce qui implique $\alpha_i = 0$, $\forall i$, puisque $\mathcal{L}$ est une famille libre. Ceci montre que la famille $u(\mathcal{L})$ est libre.

Caractérisation de injective

II.1.8 Caractérisation de surjective, bijective

Exercices :
Exercice A.1.10

Théorème II.1.3. *Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$, alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(j) *u est surjective,*

(jj) $\operatorname{Im} u = F$*,*

Démonstration – Dire que u est surjective c'est, par *définition*, dire que $\operatorname{Im} u = F$ (la linéarité ne joue aucun rôle ici !).

Proposition II.1.4. *Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$, une application surjective, alors l'image par u d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.*

Démonstration – On a montré dans le théorème II.1.1 que l'image par u d'une famille génératrice de E était une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$.
Quand u est surjective on a $\operatorname{Im} u = F$.
Ce qui termine la démonstration.

Proposition II.1.5. *Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$, une application surjective, alors l'image par u d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Proposition II.1.6. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*
- *(i) u est bijective,*
- *(ii)* Ker $u = \{\vec{0}\}$ *et* Im $u = F$*,*
- *(iii) l'image par u d'une base de E est une base de F.*

Démonstration – $(i) \iff (ii)$ découle immédiatement des théorèmes II.1.2 et II.1.3. Montrer en exercice que $(i) \iff (iii)$.

II.1.9 Isomorphismes

Exercices :
Exercice A.1.11

Définition II.1.5. *Un peu de vocabulaire :*

– **Homomorphisme** *: une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est un homomorphisme.*
– **Endomorphisme** *: une application linéaire d'un espace vectoriel E dans le même espace vectoriel E est un endomorphisme de E.*
  Dans ce cas $\mathcal{L}(E, E)$ est souvent noté plus simplement $\mathcal{L}(E)$.
– **Isomorphisme** *: une application linéaire bijective d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est un isomorphisme.*
  On dit que deux espaces vectoriels E et F sont **isomorphes** *s'il existe un isomorphisme u de E dans F.*
  Si E et F sont isomorphes, cela signifie qu'il existe au moins un isomorphisme entre E et F, mais bien-sûr toute application linéaire entre **E** *et* **F** *n'est pas un isomorphisme.*
– **Automorphisme** *: une application linéaire bijective d'un espace vectoriel E dans le même espace vectoriel E est un automorphisme.*

Proposition II.1.7. *E et F sont isomorphes $\Leftrightarrow \dim E = \dim F$.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration – Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si l'application u est un isomorphisme, elle est bijective donc d'après la proposition II.1.6 l'image par u d'une base de E est une base de F, ces bases ont donc le même nombre d'éléments, d'où l'égalité des dimensions de E et F. La réciproque est proposée en exercice, voir l'énoncé.

Une application u est bijective de E dans F si et seulement si elle admet une application réciproque u^{-1} définie de F dans E. Un isomorphisme admet donc une application réciproque. On a de plus :

Proposition II.1.8. *Si u est un isomorphisme alors u^{-1} est un isomorphisme.*

Démonstration – u^{-1} est bijective puisqu'elle est inversible, il suffit donc de montrer sa linéarité. Soient $\vec{y}_1$ et $\vec{y}_2$ deux vecteurs de F, posons

$$\vec{x} = u^{-1}(\vec{y}_1) + u^{-1}(\vec{y}_2) \text{ et } \vec{z} = u^{-1}(\vec{y}_1 + \vec{y}_2),$$

alors la linéarité de u implique que

$$u(\vec{x}) = u(\vec{z})(= \vec{y}_1 + \vec{y}_2)$$

et l'injectivité de u donne

$$\vec{x} = \vec{z} \Leftrightarrow u^{-1}(\vec{y}_1) + u^{-1}(\vec{y}_2) = u^{-1}(\vec{y}_1 + \vec{y}_2).$$

On démontrerait de manière analogue que

$$u^{-1}(\lambda\vec{y}) = \lambda u^{-1}(\vec{y})$$

ce qui terminerait de démontrer que u^{-1} est linéaire.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.1.10 Isomorphisme entre E et K^n

Exercices :
Exercice A.1.12

Un isomorphisme utilisé couramment est le suivant : soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, alors pour tout $\vec{x} \in E$ on peut écrire

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j$$

et on peut associer à $\vec{x} \in E$ le vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de K^n correspondant aux composantes de $\vec{x}$ sur $\mathcal{E}$.
Attention - La correspondance entre $\vec{x} \in E$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$ dépend de la base choisie.

Théorème II.1.4. *L'application*

$$\vec{x} \in E \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$$

est un isomorphisme de E sur K^n.

Comme tout $\vec{x} \in E$ admet une décomposition unique sur la base $\mathcal{E}$ l'application $\vec{x} \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est bien définie. Démontrer en exercice qu'elle est linéaire et bijective.
Ce qui vient d'être dit nous permettra, dans la suite, de raisonner le plus souvent sur $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) puisque tout espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n est isomorphe à $\mathbb{R}^n$. Cela permettra de faire des calculs explicites sur les vecteurs et les applications linéaires.

II.1.11 Formes linéaires

Si vous découvrez ce chapitre pour la première fois, vous pouvez dans un premier temps ne pas étudier cette partie sur les formes linéaires.
Le cas particulier où $F = K$, considéré comme un espace vectoriel sur lui-même, est suffisamment important pour avoir droit à une terminologie spéciale.

Définition II.1.6. *On appelle* **forme linéaire** *sur E une application linéaire de E dans K, c'est donc un élément de $\mathcal{L}(E;K)$ en considérant K comme un espace vectoriel sur lui-même.*

Par exemple :
1) L'application $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(\vec{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n, \qquad (a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ donnés dans } \mathbb{R})$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.
2) Soit $\mathcal{C}(0,1)$ l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur l'intervalle fermé $[0,1]$ dont on note f les éléments. L'application $u : \mathcal{C}(0,1) \to \mathbb{R}$ par

$$u(f) = \int_0^1 f(t)dt$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{C}(0,1)$.

Théorème II.1.5. *Soit E muni d'une base $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, et soit u une forme linéaire sur E, alors il existe n éléments de K, notés $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ représentant u, c'est à dire que $\forall x \in E$ on peut écrire*

$$u(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i \text{ avec } \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration – Cela résulte de la proposition II.1.1 et de la proposition II.1.2 en posant $u_k = u(\vec{e}_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

II.2 Matrices

II.2.1 Matrices-définitions

Exercices :
Exercice A.1.13
Exercice A.1.14
Exercice A.1.15
Exercice A.1.16

Exemples :
Exemple B.1.1

Définition II.2.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels munis, respectivement, des bases $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ et $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_m\}$ et $u \in \mathcal{L}(E;F)$. On appelle* **matrice** *de u dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ le tableau A de scalaires à m lignes et n colonnes dont la j^e colonne est composée des composantes de $u(\vec{e}_j)$ dans la base $\mathcal{F}$. Ainsi pour $j = 1, 2, \ldots, n$ on peut écrire*

$$u(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{f}_i.$$

La matrice A ainsi définie est explicitée par la figure suivante :

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} u(\vec{e}_1) & u(\vec{e}_2) & \ldots & u(\vec{e}_j) & \ldots & u(\vec{e}_n) \end{array} & \\ \left(\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{array}\right) & \begin{array}{c} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \ldots \\ \vec{f}_i \\ \ldots \\ \vec{f}_m \end{array} \end{array}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On appellera $\mathcal{M}_{mn}(K)$ l'ensemble des matrices à coefficients dans K possédant m lignes et n colonnes. Plus simplement lorsque aucune ambigüité ne sera possible on notera cet ensemble $\mathcal{M}_{mn}$

Définition II.2.2.

- *Si $m = n$, la matrice A est dite* **carrée**.
- *Si $m = 1$,on dit que A est une* **matrice ligne** *ou encore un* **vecteur ligne**.
- *Si $n = 1$, on dit que A est une* **matrice colonne** *ou encore un* **vecteur colonne**.
- *Si $m = n$ et si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, on dit que A est* **diagonale**.
- *Si $m = n$ et si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et $a_{ii} = 1$, A s'appelle la* **matrice identité**.
- *Si $m = n$ et si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$, on dit que A est* **triangulaire inférieure**.
- *Si $m = n$ et si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$, on dit que A est* **triangulaire supérieure**.

Définition II.2.3. *Dans le cas d'une matrice carrée $\in \mathcal{M}_{nn}$, on définit la* trace *de A par :*

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Dans le plan E, on peut écrire la matrice d'une rotation d'angle θ en prenant un repère orthonormé. On pose $F = E, \mathcal{F} = \mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. On a alors :

$$u(\vec{e}_1) = cos\theta\vec{e}_1 + sin\theta\vec{e}_2,\ u(\vec{e}_2) = -sin\theta\vec{e}_1 + cos\theta\vec{e}_2$$

ce qui donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}.$$

Matrices-définitions

On vient de voir qu'une matrice est construite de manière naturelle à partir d'une application linéaire. On ne peut donc rien faire de raisonnable sur les matrices si on ne fait pas référence aux applications linéaires qu'elles représentent. On peut remarquer qu'étant donné une matrice quelconque, on peut toujours la considérer comme la matrice d'une certaine application linéaire qui est définie a posteriori de la manière suivante :

Soit A une matrice à m lignes et n colonnes, on prend $E = K^n, F = K^m$, munis des bases canoniques $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$:

- $\vec{e}_j = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$
  avec l'élément 1 de K en j^e position, $j = 1, \ldots, n$,
- $\vec{f}_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, \ldots, 0)$
  avec l'élément 1 de K en i^e position, $i = 1, \ldots, m$.

Alors A représente l'application $u \in \mathcal{L}(E; F)$ définie par

$$u(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{f}_i, \; j = 1, \ldots, n.$$

Ceci définit bien u de manière unique d'après la proposition II.1.1.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2.2 Notations

1. Soit E un espace vectoriel de dimension n sur K, muni d'une base $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ <u>fixée</u>. Soit $\vec{x} \in E$, on a bien sûr $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j$ où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les composantes de $\vec{x}$ sur la base $\mathcal{E}$. On a déjà vu que à $\vec{x} \in E$ correspond de manière bijective un élément de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de K^n. On peut aussi associer à $\vec{x}$ de manière bijective un vecteur colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ou un vecteur ligne $(x_1 x_2 \ldots x_n)$.

   Par la suite on notera X le vecteur colonne, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, bien sûr ce vecteur X dépend de la base $\mathcal{E}$ choisie.

2. Etant donné une matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}$, par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{23}(\mathbb{R}),$$

   on note

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}, A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{M}_{21},$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Notations

A_j représente la j^e colonne de A.
On note

$$\underline{A}_1 = (3,2,4), \underline{A}_2 = (5,6,7), \underline{A}_1, \underline{A}_2 \in \mathcal{M}_{13},$$

$\underline{A}_i$ représente la i^e ligne de A.

3. Soit E un espace vectoriel de dimension n sur K, muni d'une base $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ et soit p vecteurs $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p$ de E, on décidera de noter x_{ij} la i^e composante du j^e vecteur.
   Prenons par exemple $E = \mathbb{R}^2$ muni de la base canonique et soit $\vec{x}_1 = (1,5)$, $\vec{x}_2 = (2,6)$, $\vec{x}_3 = (4,7)$, alors $x_{11} = 1$, $x_{21} = 5$, $x_{12} = 2$, $x_{22} = 6$, etc. Bien sûr, dans le cas où l'on a un seul vecteur $\vec{x}$ l'indice j est superflu et on note x_i la i^e composante de $\vec{x}$ comme on l'a toujours fait.

4. Quand on compare ce qui a été dit dans les trois remarques précédentes, on constate une certaine cohérence. Reprenons l'exemple de la troisième remarque : conformément à la première remarque,
   – à $\vec{x}_1$ on peut associer la matrice colonne $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$,
   – à $\vec{x}_2$ on peut associer $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et
   – à $\vec{x}_3$ on peut associer $X_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

   Conformément à la deuxième remarque on peut définir la matrice

$$X = (X_1\ X_2\ X_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

et bien sûr, en reprenant la notation matricielle, on obtient par exemple que $x_{21} = 5$, tout ceci est donc bien cohérent !!!

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2.3 Espace vectoriel des matrices

Exercices :
Exercice A.1.17

L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{mn}$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur K (on va reprendre ce qui a été fait sur les applications linéaires) en munissant $\mathcal{M}_{mn}$ des deux lois appelées somme de deux matrices et produit d'une matrice par un scalaire.

Définition II.2.4. Somme de deux matrices -
Soient $A, B \in \mathcal{M}_{mn}$, on appelle **somme** *de A et B la matrice $C \in \mathcal{M}_{mn}$ dont les coefficients sont*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n. \tag{II.2.1}$$

Si A (resp. B) est la matrice d'une application linéaire u (resp. v) de E dans F alors la matrice $A + B$ est la matrice de l'application linéaire $u + v$.

Définition II.2.5. Produit d'une matrice par un scalaire -
Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}$ et $\lambda \in K$, on appelle **produit** *de A par λ la matrice $C \in \mathcal{M}_{mn}$ dont les coefficients sont*

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}, \qquad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n. \tag{II.2.2}$$

Si A est la matrice d'une application linéaire u de E dans F alors la matrice λA est la matrice de l'application linéaire λu.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{mn}$ a pour dimension $m \times n$, démontrer ce résultat en exercice.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2.4 Produit de deux matrices

Exercices :
Exercice A.1.18
Exercice A.1.19

Définition II.2.6. Produit de deux matrices -
Soit $v \in \mathcal{L}(E;F)$ et $u \in \mathcal{L}(F;G)$, on pose $w = u \circ v$, on a donc $w \in \mathcal{L}(E;G)$. Soit A la matrice de u dans les bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ et B la matrice de v dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$. Alors, on définit le **produit** *des matrices A et B par la matrice $C = AB$ qui représente l'application linéaire w dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G}$.*

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\quad v \quad} & F & \xrightarrow{\quad u \quad} & G \\ \mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\} & B & \mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n\} & A & \mathcal{G} = \{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_q\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\qquad\qquad w = u \circ v \qquad\qquad} & G \\ \mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\} & C = AB & \mathcal{G} = \{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_q\} \end{array}$$

Proposition II.2.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_{qn}$ et $B \in \mathcal{M}_{np}$, le produit de deux matrices A et B est la matrice $C \in \mathcal{M}_{qp}$ dont les éléments sont définis par*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{\mathbf{n}} a_{ik} b_{kj}, \qquad i = 1, \ldots, q, j = 1, \ldots, p. \tag{II.2.3}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration – Il suffit de calculer $w(\vec{e}_j)$ de deux manières différentes. D'une part, par définition de C :

$$w(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{q} c_{ij}\vec{g}_i. \tag{II.2.4}$$

D'autre part, on a $w(\vec{e}_j) = u(v(\vec{e}_j))$, ce qui peut se calculer à l'aide des matrices A et B. Tout d'abord, par définition de B, on a

$$v(\vec{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\vec{f}_k, \tag{II.2.5}$$

d'où

$$u(v(\vec{e}_j)) = u\left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}\vec{f}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}u(\vec{f}_k). \tag{II.2.6}$$

Puis, par définition de A, on a

$$u(\vec{f}_k) = \sum_{i=1}^{q} a_{ik}\vec{g}_i, \tag{II.2.7}$$

en combinant (II.2.6) et (II.2.7) on obtient

$$u(v(\vec{e}_j)) = \sum_{k=1}^{n}\left(b_{kj}\sum_{i=1}^{q} a_{ik}\vec{g}_i\right) = \sum_{i=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)\vec{g}_i. \tag{II.2.8}$$

En comparant la composante sur $\vec{g}_i$ des expressions (II.2.4) et (II.2.8) on obtient la formule (II.2.3) de la définition.

Produit de deux matrices

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Compte-tenu des notations matricielles déjà introduites on peut dire que l'élément c_{ij} de la matrice AB s'obtient en faisant le "produit" de la i^e ligne de A par la j^e colonne de B.

Proposition II.2.2.
– *Soit* $A \in \mathcal{M}_{mn}$*,* $B \in \mathcal{M}_{np}$*,* $C \in \mathcal{M}_{pq}$*, alors le produit est* **associatif***, c'est-à-dire*

$$A(BC) = (AB)C.$$

– *Soit* $A \in \mathcal{M}_{qn}$*,*$D \in \mathcal{M}_{qn}$*,* $B \in \mathcal{M}\ _{np}$*,* $C \in \mathcal{M}_{np}$*, alors le produit est* **distributif par rapport à la somme***, c'est-à-dire* $A(B+C) = AB + AC$ *et*

$$(A+D)B = AB + DB.$$

Démonstration – Ces propriétés découlent immédiatement des propriétés similaires sur la composition des applications.

Attention ! On remarque donc que le produit de A par B n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B !
D'autre part en général on a $AB \neq BA$, même si le produit BA existe ! Cette non-commutativité du produit de matrices provient de la non-commutativité de la composition des applications (même si elles sont linéaires).
Le produit de 2 matrices est dit ligne par colonne car en effet le coefficient c_{ij} est obtenu en effectuant le produit de la i^e ligne de A par la j^e colonne de B : $c_{ij} = \underline{A}_i B_j$

Produit de deux matrices

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2.5 Calcul explicite de l'image d'un vecteur

Exercices :
Exercice A.1.20

L'intérêt des matrices réside dans le fait qu'on peut déterminer par le calcul l'image $u(\vec{x})$ dès qu'on connait les composantes de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{E}$. Si on pose $\vec{y} = u(\vec{x})$ on peut écrire comme on l'a déjà annoncé dans la proposition II.1.2

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, i = 1, \ldots, m \tag{II.2.9}$$

dans laquelle
- $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_m)$ représentent respectivement les composantes de $\vec{x}$, $\vec{y}$ dans les bases respectives de E et F
- $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ représente la matrice de u dans ces mêmes bases.

Cette relation s'écrit sous la forme d'un produit matriciel

$$Y = AX, \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

La i^e composante de ce produit AX s'obtient donc en prenant le produit de la i^e ligne de A par la colonne X. AX représente donc les composantes de $u(\vec{x})$ dans la base de F.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2.6 Inverse d'une matrice carrée

Exercices :
Exercice A.1.21

Définition II.2.7. *Soit A une matrice carrée.*
On dit que A est **inversible***, ou* **régulière***, s'il existe une matrice notée A^{-1} qui vérifie $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.*
A^{-1} est appelée la matrice **inverse** *de A.*

Remarques :
1) Soit A une matrice carrée, s'il existe une matrice B telle que $AB = I$ (resp. $BA = I$), on montrera ultérieurement que la matrice A est alors inversible et que $B = A^{-1}$.
2) Le produit de deux matrices carrées inversibles de même dimension est inversible et on a :
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$
3) Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension. On les munit de bases. Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$ bijective et A la matrice associée à u dans les bases précédentes, alors la matrice associée à u^{-1} (par rapport aux mêmes bases de E et F) est la matrice A^{-1}.

Le point 2 est à démontrer en exercice.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2.7 Transposée d'une matrice

Exercices :
Exercice A.1.22

Définition II.2.8. *Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}$, on appelle* **transposée** *de A la matrice notée A^T appartenant à $\mathcal{M}_{nm}$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes, on a donc*

$$(A^T)_{ij} = a_{ji},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.$$

En utilisant les notations habituelles pour les lignes et les colonnes de A, on a les égalités suivantes :

$$(A_i)^T = \underline{A^T}_i.$$

Si X et Y appartiennent à $\mathcal{M}_{m1}$ alors $X^TY = Y^TX$ est un scalaire de K et plus précisément on a : $X^TY = Y^TX = \sum_{i=1}^m x_i y_i$.

Proposition II.2.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}$, $C \in \mathcal{M}_{mn}$ et $B \in \mathcal{M}_{np}$ alors*

1. $\left(A^T\right)^T = A$
2. $(A + C)^T = A^T + C^T$
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Démonstration – On peut démontrer très facilement les propriétés 1, 2 et 3.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

4. $((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}$.

$(B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk}$.

Ce qui termine la démonstration.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2.8 Changement de base-matrice de passage

Exercices :
Exercice A.1.23

Définition II.2.9. *Soit $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ et $\mathcal{E}' = \{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \dots, \vec{e'}_n\}$ deux bases de E, on appelle* **matrice de passage** *de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$ la matrice P définie par :*

$$P = \begin{array}{c c}
\begin{array}{ccccc} \vec{e'}_1 & \dots & \vec{e'}_j & \dots & \vec{e'}_n \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
p_{11} & \dots & p_{1j} & \dots & p_{1n} \\
\vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
p_{i1} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{in} \\
\vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
p_{n1} & \dots & p_{nj} & \dots & p_{nn}
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_i \\ \dots \\ \vec{e}_n \end{array}
\end{array}$$

qui est donc obtenue en mettant en colonnes les composantes, dans "l'ancienne base" $\mathcal{E}$ des vecteurs de la "nouvelle base" $\mathcal{E}'$.

On peut considérer la matrice P comme la matrice de l'application identité i_E, écrite dans les bases $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}$ $\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i_E} & E \\ \mathcal{E}' & P & \mathcal{E} \end{array}$.

En effet, par définition de la matrice d'une application linéaire, on a

$$\vec{e'}_j = i_E(\vec{e'}_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\vec{e}_i. \tag{II.2.10}$$

Proposition II.2.4. *La matrice P de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$ est inversible et son inverse P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{E}'$ à $\mathcal{E}$.*

Démonstration – La matrice P est associée à l'application i_E lorsque l'on munit E de la base $\mathcal{E}'$ au départ et de la base $\mathcal{E}$ à l'arrivée. Or l'application i_E est bijective, donc P est inversible.
P^{-1} est alors associée à l'application réciproque. Cette application réciproque est i_E lorsque l'on munit E de la base $\mathcal{E}$ au départ et de la base $\mathcal{E}'$ à l'arrivée. P^{-1} est donc la matrice de passage de la base $\mathcal{E}'$ à la base $\mathcal{E}$.

Proposition II.2.5. *Soit $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ une base de E, soit $Q \in \mathcal{M}_{nn}$ une matrice dont les termes sont notés q_{ij}.*
Soient les vecteurs définis par

$$\vec{e'}_j = \sum_{i=1}^{n} q_{ij}\vec{e}_i,$$

alors

$$\{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_n\} \text{ est une base de } E \iff Q \text{ est inversible.}$$

Démonstration –
Si $\mathcal{E}' = \{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_n\}$ est une base de E, alors Q est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$, donc Q est inversible.
Montrons la réciproque : il suffit de montrer que la famille $\{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_n\}$ est libre puisque la dimension de E est n.

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e'}_j = \vec{0} \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} q_{ij} \vec{e}_i = \vec{0} \\
&\Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_j \right) \vec{e}_i = \vec{0} \text{ en changeant l'ordre des sommes} \\
&\Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_j = 0, \forall i \text{ car } \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\} \text{ est une base de} E \\
&\Longleftrightarrow \quad QX = 0 \text{ si l'on note } X \text{ le vecteur colonne de composantes } x_j \\
&\Longleftrightarrow \quad X = 0 \text{ car } Q \text{ est inversible} \\
&\Longleftrightarrow \quad x_j = 0 \ \forall j
\end{aligned}
$$

II.2.9 Changement de base et composantes

Exercices :
Exercice A.1.24

Proposition II.2.6. - Transformation des composantes par changement de base -
Soit $\vec{x} \in E$ et soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ les composantes de $\vec{x}$ dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, alors on a

$$X = PX' \text{ ou encore } X' = P^{-1}X \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Démonstration – En effet on a

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i, \vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x'_j \vec{e'}_j \tag{II.2.11}$$

d'où, par définition de la matrice P donnée par (II.2.10)

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} \vec{e}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \right) \vec{e}_i. \tag{II.2.12}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Si on compare alors (II.2.11) et (II.2.12), la décomposition sur une base étant unique, on a

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j. \tag{II.2.13}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2.10 Changement de base et matrices

Exercices :
Exercice A.1.25

Soit A la matrice de $u \in \mathcal{L}(E;E)$ dans la base $\mathcal{E}$, si on considère une nouvelle base $\mathcal{E}'$, quelle relation y a-il entre A', matrice de u dans la base $\mathcal{E}'$ et la matrice A ? La réponse est donnée dans le théorème suivant :

Théorème II.2.1. - Transformation des matrices par changement de base
Soit $u \in \mathcal{L}(E;E)$, A et A' les matrices représentant u dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, alors si P est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$, on a la relation $A' = P^{-1}AP$.

Démonstration – On introduit le diagramme suivant, dans lequel on introduit la matrice de passage P

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{i_E} & E & \xrightarrow{u} & E & \xrightarrow{i_E} & E \\ \mathcal{E}' & P & \mathcal{E} & A & \mathcal{E} & P^{-1} & \mathcal{E}' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\qquad\qquad u \qquad\qquad} & E \\ \mathcal{E}' & A' & \mathcal{E}' \end{array}$$

Compte-tenu des notations déjà introduites on peut écrire directement

$$u = i_E \circ u \circ i_E, \text{ soit } A' = P^{-1}AP. \tag{II.2.14}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On aurait pu démontrer ce résultat de manière différente si l'on note $\vec{y} = u(\vec{x})$, X, Y, X', Y' étant les vecteurs colonnes habituels, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y = AX \\ Y = PY' \\ X = PX' \end{array} \right. \Rightarrow PY' = APX' \Rightarrow Y' = P^{-1}APX' \Rightarrow A' = P^{-1}AP.$$

On pourrait plus généralement considérer $u \in \mathcal{L}(E; F)$ et, avec des notations évidentes, changer de base pour E et F. Alors on peut montrer, de la même manière, en appelant Q la matrice de passage de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}'$ que $A' = Q^{-1}AP$. Le diagramme correspondant s'écrit

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{i_E} & E & \xrightarrow{u} & F & \xrightarrow{i_F} & F \\ \mathcal{E}' & P & \mathcal{E} & A & \mathcal{F} & Q^{-1} & \mathcal{F}' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\qquad\qquad u \qquad\qquad} & F \\ \mathcal{E}' & A' & \mathcal{F}' \end{array}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2.11 Matrices semblables

Définition II.2.10. *Si il existe P inversible telle que $A' = P^{-1}AP$, A et A' sont dites* **semblables**.

Bien sûr les matrices associées a la même application linéaire $u \in \mathcal{L}(E;E)$, sont semblables.
On peut démontrer que :
- Si A et B sont semblables, alors A^T et B^T sont semblables.
- Si A et B sont semblables et si B et C sont semblables, alors A et C sont semblables.
- Si A et B sont semblables, leurs traces sont égales.

II.2.12 Rang

Exercices :
Exercice A.1.26
Exercice A.1.27

Définition II.2.11. *Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$, on appelle* **rang** *de u et on note* rang (u) *la dimension de* Im u*.*

Il résulte immédiatement de cette définition que rang $(u) \leq \dim F$ avec égalité si u est surjective. Par ailleurs, puisque l'image d'une base de E est une famille génératrice de Im u, on a rang $(u) \leq \dim E$.

Définition II.2.12. *Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}$, on appellera* Im A *le sous-espace vectoriel constitué des vecteurs colonnes qui s'écrivent $Y = AX$:*

$$\mathrm{Im}\ A = \{Y \in \mathcal{M}_{m1} | Y = AX,\ \textit{avec}\ X \in \mathcal{M}_{n1}\ \textit{quelconque}\}$$

Proposition II.2.7. *Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}$,* Im A *est le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de A, c'est-à-dire :*

$$\mathrm{Im}\ A = \mathrm{vect}\langle A_1, \ldots, A_n \rangle.$$

Démontrer cette proposition en exercice.

Définition II.2.13. *Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}$, on appelle rang de A et on note* rang (A)*, la dimension du sous-espace vectoriel* Im A*.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Rang

Proposition II.2.8. *Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$ et A une matrice représentant u (dans des bases arbitraires de E et F), alors* $\text{rang}\,(u) = \text{rang}\,(A)$.

Démonstration – On choisit $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ une base de E, on choisit $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m$ une base de F, il existe un isomorphisme de F sur $\mathcal{M}_{m1}$ qui à tout vecteur $\vec{y}$ de F associe le vecteur colonne Y de $\mathcal{M}_{m1}$ constitué de ses composantes. En particulier cet isomorphisme associe à $u(\vec{e}_i)$ le vecteur colonne A_i par définition même de la matrice A. Or Im u est le sous espace vectoriel de F engendré par $\{u(\vec{e}_1), \ldots, u(\vec{e}_n)\}$. Donc Im u est isomorphe au sous espace vectoriel de F engendré par A_1, …, A_n. Donc ils ont même dimension.

Proposition II.2.9.

1. *Si A et A' sont semblables ,alors elles ont le même rang.*
2. *A et A^T ont le même rang.*

Démonstration – La première partie découle immédiatement de la proposition précédente. La deuxième partie sera démontrée dans un chapitre suivant. Mais une conséquence immédiate de cette proposition est que le rang de A est la dimension du sous-espace de $\mathcal{M}_{1n}$ engendré par les lignes de A.

Calcul pratique

Il résulte de la définition II.2.13 et de la proposition précédente que le calcul pratique du rang d'une matrice se ramène au calcul du nombre maximal de colonnes linéairement indépendantes ou du nombre maximal de lignes linéairement indépendantes suivant que l'un se calcule plus facilement que l'autre.
On peut aussi déduire le rang d'une matrice à partir du rang de l'application linéaire u associée, si celui-ci est connu.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On verra dans le chapitre sur les déterminants une autre façon de calculer le rang d'une matrice.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2.13 Rang et dimension du noyau d'une application linéaire

Exercices :
Exercice A.1.28

Théorème II.2.2. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E;F)$*, alors* $\dim\,[\mathrm{Ker}\,u] + \mathrm{rang}\,u = \dim E$.

Démonstration – Soit $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_q\}$ une base de Ker u, on peut compléter cette base par une famille $\mathcal{B}'$ telle que

$$\mathcal{B} \cup \mathcal{B}' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_q, \vec{e}_{q+1}, \ldots, \vec{e}_n\}$$

constitue une base de E.
On va montrer que $u(\mathcal{B}')$ constitue une base de Im u.
Soit $\vec{y} \in$ Im u, alors il existe $\vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = u(\vec{x})$ avec $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$. on a donc
$\vec{y} = u(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(\vec{e}_i) = \sum_{i=q+1}^{n} x_i u(\vec{e}_i)$ donc $u(\mathcal{B}')$ est une famille génératrice de Im u.
D'autre part, si l'on a

$$\sum_{i=q+1}^{n} \alpha_i u(\vec{e}_i) = \vec{0}.$$

Cette relation implique

$$u\left(\sum_{i=q+1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i\right) = \vec{0},$$

soit

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$$\sum_{i=q+1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i \in \text{Ker } u$$

d'où, puisque $\mathcal{B}$ est une base de Ker u,

$$\sum_{i=q+1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{q} \beta_i \vec{e}_i$$

et donc $\alpha_i = 0$ pour $i = q+1, \ldots, n$ puisque $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_q, \vec{e}_{q+1}, \ldots, \vec{e}_n\}$ étant une base de E, elle est libre. On en déduit donc que $u(\mathcal{B}')$ est libre. On en conclut que $u(\mathcal{B}')$ est une base de Im u, d'où :

$$\text{rang } (u) = \dim [\text{Im } u] = \text{card}(\mathcal{B}') = \dim E - \dim [\text{Ker } u].$$

Du théorème précédent découle le résultat très important suivant :

Proposition II.2.10. *Soit $u \in \mathcal{L}(E; F)$, E et F étant deux espaces vectoriels de même dimension. Alors les propositions suivantes sont équivalentes*
- *(i) u injective,*
- *(ii) u surjective,*
- *(iii) u bijective.*

Démonstration – Il suffit de montrer que (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

$$\begin{aligned} u \text{ injective} \Leftrightarrow \text{Ker } u = \{\vec{0}\} &\Leftrightarrow \dim [\text{Im } u] = \dim E \text{ (théorème II.2.2)} \\ &\Leftrightarrow \dim F = \dim [\text{Im } u] \text{ } (\dim E = \dim F \text{ par hypothèse}) \\ &\Leftrightarrow F = \text{Im } u \text{ (puisque Im } u \text{ est un sous-espace vectoriel de } F) \\ &\Leftrightarrow u \text{ surjective.} \end{aligned}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2.14 Noyau d'une matrice

Exercices :
Exercice A.1.29
Exercice A.1.30

Les résultats que l'on a cités pour les applications linéaires peuvent être énoncés pour les matrices. En effet on a déjà défini Im A, on peut définir le noyau Ker A d'une matrice A de la façon suivante :

Définition II.2.14. *Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}$, on appelle noyau de A le sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n1}$ noté* Ker A*, défini par :*

$$\text{Ker } A = \{X \in \mathcal{M}_{n1}, AX = 0\}.$$

On a le résultat suivant :

Théorème II.2.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}$, alors* $\dim\,[\text{Ker } A] + \dim\,[\text{Im } A] = n$.

Pour démontrer ce théorème il suffit de définir l'application linéaire u de $\mathcal{M}_{n1}$ dans $\mathcal{M}_{m1}$ par $u(X) = AX$ on a alors Ker u = Ker A, Im u = Im A, de plus $\dim \mathcal{M}_{n1} = n$ et le théorème II.2.2 permet donc de déduire le résultat.
On peut énoncer un autre résultat important :

Proposition II.2.11. *Si A est une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_{nn}$, on a les équivalences suivantes :*

$$A \text{ inversible } \Longleftrightarrow \text{Ker } A = \{0\} \Longleftrightarrow \text{rang } A = n$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration – L'application linéaire u définie précédemment est un endomorphisme car $m = n$, on constate que la matrice de u dans la base canonique est A, on a donc les équivalences suivantes :

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow u \text{ inversible } \Leftrightarrow u \text{ bijective } \Leftrightarrow u \text{ injective}$$

$$\Leftrightarrow \text{Ker } u = \{0\} \Leftrightarrow \text{Ker } A = \{0\}$$

On a utilisé en particulier la proposition II.2.10. On utilise ensuite le thérorème II.2.3 pour démontrer que

$$\text{Ker } A = \{0\} \Leftrightarrow \dim\,[\text{Ker } A] = 0 \Leftrightarrow \dim\,[\text{Im } A] = n \Leftrightarrow \text{rang } A = n$$

Ce qui termine la démonstration.
On verra une autre propriété caractéristique des matrices inversibles dans le chapitre sur les déterminants.

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices du chapitre II

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.1 Ch2-Exercice1

Les applications suivantes sont-elles linéaires ? :

1. L'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $u(x) = \cos x$.

2. L'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $u(x) = \alpha x + \beta$, $(\alpha, \beta$ donnés dans $\mathbb{R})$; discuter suivant les valeurs de α et β.

3. L'application $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donnée par

$$u(\vec{x}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n,\ (a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ donnés dans } \mathbb{R}).$$

4. La projection d'un vecteur de l'espace sur un plan Π parallèlement à une droite Δ donnée.

5. Soit $\mathcal{P}_k$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus k, dont on note les éléments P.
   On définit $u : \mathcal{P}_k \to \mathcal{P}_{k-1}$ par $u(P) = P'$, (P' est la dérivée de P).

6. L'application $u : \mathcal{P}_k \to \mathcal{P}_{2k}$ définie par $u(P) = P^2$.

7. Soit $\mathcal{C}(0,1)$ l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur l'intervalle fermé $[0,1]$, dont on note ϕ les éléments. On définit alors $u : \mathcal{C}(0,1) \to \mathbb{R}$ par $u(\phi) = \int_0^1 \phi(t)dt$.

retour au cours

Solution

Exercice A.1.1
Ch2-Exercice1

Exercice A.1.2 Ch2-Exercice2

Montrer que Ker u est un sous-espace vectoriel de E

retour au cours

Exercice A.1.3 Ch2-Exercice3

On reprend les applications de l'exercice A.1.1, lorsque ces applications sont linéaires déterminer leur noyau et leur image

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4 Ch2-Exercice4

Démontrer le théorème suivant : Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$, alors on a les propriétés suivantes :

- l'image par u de toute famille liée de E est une famille liée de F,
- l'image par u de toute famille génératrice de E est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, u$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.5 Ch2-Exercice5

Soit un espace vectoriel E, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 \oplus F_2$, on appelle **projection** ou encore **projecteur** sur F_1 parallèlement à F_2 l'application u de E dans E définie par :

$$u(\vec{x}) = \vec{x}_1 \text{ si } \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \text{ où } \vec{x}_1 \in F_1, \vec{x}_2 \in F_2.$$

Montrer que la projection ainsi définie est une application linéaire. Déterminer son noyau et son image.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.6 Ch2-Exercice6

Montrer que si u est une projection alors u=$u \circ u$. On démontrera la réciproque de cette propriété en TD.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.7 Ch2-Exercice7

Vérifier que $w = u \circ v$ est bien un élément de $\mathcal{L}(E;G)$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.8 Ch2-Exercice8

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 , $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ une base de E, soit F un espace vectoriel de dimension 2 , $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E; F)$. On sait que $u(\vec{e}_1) = \vec{f}_1 + \vec{f}_2, u(\vec{e}_2) = \vec{f}_1 - \vec{f}_2, u(\vec{e}_3) = \vec{f}_1 - 2\vec{f}_2$.
Calculer l'expression de $u(\vec{x})$ pour $\vec{x}$ quelconque de E

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.9 Ch2-Exercice9

1. On suppose que l'application $u \in \mathcal{L}(E;F)$ est injective.
   (a) Montrer que si la famille $\{u(\vec{x}_1), \dots, u(\vec{x}_p)\}$ est liée alors la famille $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)\}$ est liée.
   (b) Montrer que l'image d'une base de E est une base de Im u.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$, E de type fini, montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) u est injective,
   (ii) il existe une base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ de E telle que $\{u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n)\}$ soit libre.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.10 Ch2-Exercice10

Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$, on définit les propositions suivantes :
- (i) u est bijective,
- (ii) l'image par u d'une base de E est une base de F.

Montrer que $(i) \Longleftrightarrow (ii)$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.11 Ch2-Exercice11

Soient E et F deux espaces de même dimension n, soient $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ et $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n\}$ des bases de E et F, on définit une application linéaire u de la manière suivante

$$u(\vec{e}_i) = \vec{f}_i.$$

Montrer qu'alors u est bijective de E sur F.

retour au cours

Solution

Exercice A.1.12 Ch2-Exercice12

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, alors pour tout $\vec{x} \in E$ on peut écrire

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j$$

et on peut associer à $\vec{x} \in E$ le vecteur $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de K^n correspondant aux composantes de $\vec{x}$ sur $\mathcal{E}$.
Montrer que l'application $\vec{x} \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n) : E \to K^n$ ainsi définie est un isomorphisme de E sur K^n.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.13 Ch2-Exercice13

Montrer que la matrice de l'application $i_E : E \mapsto E$ est la matrice identité I lorsque l'on munit l'espace E de la base $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.14 Ch2-Exercice14

On suppose E=F = $\mathcal{P}_2$, on munit $\mathcal{P}_2$ de la base canonique $\{1, X, X^2\}$, on définit u telle que $u(p) = p'$. Déterminer alors la matrice de u.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.15 Ch2-Exercice15

Soit la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, u est l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice est A lorsque l'on munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ de leurs bases canoniques. Que vaut $u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), \ldots, u(\vec{e}_n)$? En déduire $u(\vec{x})$ pour $\vec{x} = (1, -1, 2)$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.16 Ch2-Exercice16

Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par
$u(\vec{x}) = (x_1 - x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 2x_2 - x_4, x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4)$,
déterminer la matrice A associée à u lorsque l'on munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ des bases canoniques.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.17 Ch2-Exercice17

1. Démontrer que $\mathcal{M}_{mn}$ est un espace vectoriel, en particulier quel est l'élément neutre pour l'addition ? Quel est l'opposé de A ?
2. Déterminer une base de $\mathcal{M}_{mn}$. Quelle est la dimension de $\mathcal{M}_{mn}$?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.18 Ch2-Exercice18

Calculer le produit AB (et BA lorsque cela est possible) dans les cas suivants :

– $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

– $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.19 Ch2-Exercice19

On définit les matrices $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $D' = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer BD', DB . Que se passe-t-il quand on multiplie une matrice à droite par une matrice diagonale ? quand on multiplie une matrice à gauche par une matrice diagonale ? Enoncer des résultats généraux.
2. Par quelle matrice L doit-on multiplier B à gauche pour que $LB = \underline{B}_2$? Par quelle matrice C doit-on multiplier B à droite pour que $BC = B_1$?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.20 Ch2-Exercice20

Reprendre l'exercice A.1.15. Que vaut X? Calculer AX et comparer avec ce qui a été trouvé alors.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.21 Ch2-Exercice21

Démontrer que le produit de deux matrices carrées inversibles de même dimension est inversible et on a
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.22 Ch2-Exercice22

Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Expliciter $\underline{B_1}$, $\underline{B_2}$, $\underline{B_3}$, B_1, B_2, $\underline{B^T}_1$, $\underline{B^T}_2$, $(B^T)_1$, $(B^T)_2$, $(B^T)_3$, $(\underline{B_1})^T$, $(\underline{B_2})^T$, $(\underline{B_3})^T$,$(B_1)^T$, $(B_2)^T$. Vérifier sur cet exemple que : $(B_i)^T$=$\underline{B^T}_i$. Bien sûr ces résultats se généralisent à une matrice B quelconque.

retour au cours

Solution

Exercice A.1.23 Ch2-Exercice23

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. On définit les vecteurs $\vec{e'}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e'}_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

- Montrer que $\mathcal{E}' = \{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2\}$ forme une base de E.
- Que vaut P matrice de passage de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$?

retour au cours

Solution

Exercice A.1.24 Ch2-Exercice24

Reprendre l'exercice A.1.23

- Exprimer $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ en fonction de $\vec{e'}_1$ et $\vec{e'}_2$.
- Si x_1 et x_2 sont les composantes du vecteur $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{E}$, en déduire x'_1 et x'_2 ses composantes dans la base $\mathcal{E}'$.
- Vérifier que $X = PX'$.
- Que vaut P^{-1} matrice de passage de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}$? Effectuer le produit PP^{-1}.

retour au cours

Solution

Exercice A.1.25 Ch2-Exercice25

On reprend les données de l'exercice A.1.23. On définit $u \in \mathcal{L}(E; E)$ par
$u(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, u(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$

- Quelle est la matrice A de u dans la base $\mathcal{E}$?
- Exprimer $u(\vec{e'}_1)$, $u(\vec{e'}_2)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.
- En déduire $u(\vec{e'}_1)$,$u(\vec{e'}_2)$ en fonction de $\vec{e'}_1$ et $\vec{e'}_2$.
- En déduire A'.
- Calculer $P^{-1}AP$.

retour au cours

Solution

Exercice A.1.26 Ch2-Exercice26

Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}$, montrer que Im A est un sous espace vectoriel. Montrer plus précisément que Im A = vect $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.27 Ch2-Exercice27

Déterminer le rang des matrices A suivantes :

- Si $E = E_1 \oplus E_2$, A est la matrice de la projection sur E_1 parallèlement à E_2.
- A est la matrice de la rotation dans le plan.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.28 Ch2-Exercice28

On définit les 5 propositions :
a) f est injective.
b) f est surjective.
c) f est bijective.
d) f n'est pas injective.
e) f n'est pas surjective.

Dans chacun des cas suivants, énoncer parmi les 5 propositions lesquelles sont exactes (sans hypothèse supplémentaire)

1. f est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$
2. f est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$
3. f est linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$
4. f est linéaire injective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$
5. f est linéaire injective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$
6. f est linéaire surjective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$
7. f est linéaire surjective de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^5$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.29 Ch2-Exercice29

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_{np}$, Ker A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p1}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.30 Ch2-Exercice30

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

retour au cours

Solution

A.2 Exercices de TD

Exercice A.2.1 TD2-Exercice 1

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1 + x_2, -x_1 - x_2) \end{array}$

   (a) Montrer que f est une application linéaire.

   (b) Déterminer Ker f et Im f,
   (réponse : Ker $f = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2, x_1 = -x_2\}$, Im $f = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2, y_1 = -y_2\}$).

   (c) Calculer $f \circ f$. Le résultat était-il prévisible ?

2. E, F, G étant des espaces vectoriels, soit $f \in \mathcal{L}(E, F), g \in \mathcal{L}(F, G)$, montrer que :

   $g \circ f = 0 \Longleftrightarrow$ Im $f \subset$ Ker g

Question 1a Aide 1
Question 1b Aide 1
Question 1c Aide 1
Question 2 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.2 TD2-Exercice 2

Soit f : $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) & \mapsto & (x_1 - x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 2x_3 - x_4, x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4) \end{array}$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer une base de Ker f, (réponse : $\{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$).
3. Déterminer une base de Im f, (réponse : $\{(1, 1, 1), (-1, 0, 1)\}$).
4. Vérifier que dim Ker f + dim Im $f = 4$.

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 3 Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.3 TD2-Exercice 3

1. E est un espace vectoriel, soit $u \in \mathcal{L}(E,E)$, on note $u \circ u = u^2$, montrer que :
   (a) Ker $u \subset$ Ker u^2.
   (b) Im $u^2 \subset$ Im u.
   (c) Ker $u =$ Ker $u^2 \iff$ Im $u \cap$ Ker $u = \{\vec{0}\}$.
   (d) Im $u =$ Im $u^2 \iff E =$ Im $u +$ Ker u.
2. Soit E un espace vectoriel On appelle *projecteur* tout élément $p \in \mathcal{L}(E,E)$ tel que $p \circ p = p$.
   (a) Montrer que si p est un projecteur alors $E =$ Ker $p \oplus$ Im p.
   (b) Donner la décomposition unique de $\vec{x} \in E$.
   (c) En déduire que p est la projection sur Im p, parallèlement à Ker p

Question 1a	Aide 1	Aide 2	
Question 1b	Aide 1	Aide 2	
Question 1c	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 1d	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 2a	Aide 1	Aide 2	
Question 2b	Aide 1		
Question 2c	Aide 1		

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.4 TD2-Exercice 4

1. Soit P_n l'espace vectoriel des polynômes p de degré inférieur ou égal à n.
   Soit $u \in \mathcal{L}(P_n, P_{n-1})$ définie par : $u(p) = p'$ dérivée de p.
   Donner une base $\{\ldots, p_i, \ldots\}$ de P_n.
   Calculer $\{\ldots, u(p_i), \ldots\}$ et montrer qu'elle est génératrice de P_{n-1}.
2. De façon plus générale, on suppose que $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
   (a) Montrer que l'image d'une famille génératrice de E est génératrice de $\operatorname{Im} u$.
   (b) Si $\{u(\vec{x}_1), \ldots, u(\vec{x}_p)\}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$ peut-on dire que $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$ est une famille génératrice de E ? Si oui le démontrer, si non donner une condition supplémentaire sur u pour que la réponse soit oui.
   (c) L'image par u d'une famille génératrice de E est-elle génératrice de F ?

Question 1 Aide 1
Question 2a Aide 1
Question 2b Aide 1 Aide 2
Question 2c Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.5 TD2-Exercice 5

Soit $u \in \mathcal{L}(E, E)$, $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ des éléments de E. On définit les propositions suivantes
P_1 : $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ est libre.
P_2 : $\{u(\vec{x}_1), \ldots, u(\vec{x}_n)\}$ est libre.

1. Démontrer une implication correcte entre P_1 et P_2
2. A quelle condition sur u a-t-on équivalence entre P_1 et P_2 ?

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1 Aide 2

Exercice A.2.6 TD2-Exercice 6

1. On définit les fonctions p_0, p_1, p_2, f_3, f_4 par
$$\forall t \in \mathbb{R} \;\; p_0(t) = 1, p_1(t) = t, p_2(t) = t^2, f_3(t) = e^t, f_4(t) = te^t.$$
Soit la famille $\mathcal{F} = \{p_0, p_1, p_2, f_3, f_4\}$. Montrer que cette famille est libre.
2. Soit $\mathcal{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2 à coefficients réels et soit F l'espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{F}$.
On définit u par $\qquad u(p) = f_3 p' + p \qquad$ où p' est la dérivée de p.
   (a) Montrer que u est linéaire de $\mathcal{P}_2$ dans F.
   (b) u est-elle injective ?
   (c) Donner une base de Im u,(réponse : $\{p_0, p_1 + f_3, p_2 + 2f_4\}$ est une base de Im u).
3. Donner la matrice A représentant u (préciser les bases choisies pour $\mathcal{P}_2$ et F),
réponse : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Etudier l'injectivité de u à l'aide de la matrice A.

Sommaire
Concepts
Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6
TD2-Exercice 6

Question 1	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 2b	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 2c	Aide 1	Aide 2	
Question 3	Aide 1	Aide 2	
Question 4	Aide 1	Aide 2	Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.7 TD2-Exercice 7

Soit $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_n$. On note p' la dérivée de p .
On définit u par $(u(p))(t) = p(t+1) - p(t) - p'(t)$

1. Montrer que u est linéaire de $\mathcal{P}_n$ dans $\mathcal{P}_{n-2}$.
2. On choisit $n = 4$. Donner la matrice A de u par rapport aux bases $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_{n-2}$,

   réponse : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2

Exercice A.2.8 TD2-Exercice 8

1. On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
   On note E le sous ensemble de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ composé des matrices M qui peuvent s'écrire :
   M=$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & 0 & -a \end{pmatrix}$ a et b étant 2 réels
   Est-ce que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$? Si oui, donner une base de E et sa dimension,(réponse : dimension 2).
2. On se place maintenant dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
   Questions : Pour chaque ensemble E défini ci-dessous, on montrera que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, on donnera une base de E et sa dimension.
   (a) On appelle *trace* d'une matrice carrée, la somme des termes de la diagonale principale. On note $\mathcal{T}_n$ le sous-ensemble des matrices de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ ayant une trace nulle. Répondez aux *questions* pour $\mathcal{T}_n$,
   (réponse :la dimension vaut $n^2 - 1$).
   (b) Une matrice est dite *triangulaire supérieure* (resp. *inférieure*) si tous les termes au dessous (resp. au dessus) de la diagonale sont nuls. On note $\mathcal{S}_n$ (resp. $\mathcal{I}_n$) l'ensemble des matrices triangulaire supérieures (resp. inférieures) de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Répondez aux *questions* pour $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{I}_n$,(réponse : la dimension vaut $\frac{n(n+1)}{2}$).
   (c) Soit $\mathcal{D}_n = \mathcal{S}_n \cap \mathcal{I}_n$ l'ensemble des matrices diagonales. Répondez aux *questions* pour $\mathcal{D}_n$,(réponse :la dimension vaut n).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.8
TD2-Exercice 8

(d) Une matrice A est dite *symétrique* si, $\forall i,j \in [1..n]$, $a_{ij} = a_{ji}$.
Elle est dite antisymétrique si, $\forall i,j \in [1..n]$, $a_{ij} = -a_{ji}$.
On note $\mathcal{Y}_n$ (resp. $\mathcal{A}_n$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques). Répondez aux *questions* pour $\mathcal{Y}_n$ et $\mathcal{A}_n$, (réponse : les dimension respectives sont $\frac{n(n+1)}{2}$, $\frac{n(n-1)}{2}$).

(e) Montrez que $\mathcal{M}_{n,n} = \mathcal{Y}_n \oplus \mathcal{A}_n$.

Question 1	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 2a	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 2b	Aide 1		
Question 2c	Aide 1		
Question 2d	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 2e	Aide 1	Aide 2	

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.9 TD2-Exercice 9

Soit A une matrice donnée de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et u_A l'application de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ définie par :

$$u_A(X) = XA - AX.$$

1. Montrez que u_A est linéaire pour toute matrice A.
2. On prend $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Donnez une base de Ker u_A. En déduire sa dimension.

   Réponse : base de Ker u_A est $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, la dimension est 2.
3. On prend A de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

   Déterminer a et b tels que $AX = XA$, $\forall X \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1 Aide 2
Question 3 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.10 TD2-Exercice 10

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. Comparer les traces de AB et BA.
2. Vérifier ce résultat en explicitant AB et BA quand $m = 1$.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.11 TD2-Exercice 11

1. Soient A et B des matrices de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, calculer $(A+B)^2$.
   On note $I = A^0$ la matrice identité de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. A quelle condition est-il possible d'utiliser la formule du binome pour calculer $(A+B)^n$?
2. On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Calculer J^2 et montrer que $A^n = 3^n I + a_n J$.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.12 TD2-Exercice 12

Soit $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, de matrice A relativement à $\mathcal{E}$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. On se donne le vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Calculez $u(\vec{x})$.
2. En déduire le noyau de u (on pourra en donner une base), (réponse : une base de Ker u est $\{(1, -1, 1)\}$).
3. On pose $\vec{e'}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e'}_2 = \vec{e}_2$ et $\vec{e'}_3 = \vec{e}_3$.
   (a) Montrez que $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Exprimer $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ en fonction de $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3$
   (c) Utiliser les questions précédentes pour obtenir la matrice A' de u dans la base $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3)$.
   Réponse : $A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.
4. On définit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Que vaut P^{-1} ?

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

réponse : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Quelle relation lie A, A', P, P^{-1} ?

Question 1	Aide 1			
Question 2	Aide 1	Aide 2	Aide 3	
Question 3a	Aide 1	Aide 2	Aide 3	
Question 3c	Aide 1	Aide 2	Aide 3	
Question 4	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4
Question 5	Aide 1			

Exercice A.2.13 TD2-Exercice 13

On se place dans $\mathbb{R}^3$. On rappelle que si $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ alors
– le produit scalaire de $\vec{x}$ par $\vec{y}$ est donné par $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$,
– la norme de $\vec{x}$ est égale à $\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2}$
On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique (elle est orthonormée).
On note ρ la rotation d'angle θ autour du vecteur $\vec{\omega} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

1. On pose $\vec{e'}_1 = \vec{e}_1$,$\vec{e'}_2 = \vec{\omega}$, déterminer $\vec{e'}_3$ tel que la base $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3)$ soit orthonormée directe.
2. Ecrivez la matrice R' de la rotation ρ dans la base $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3)$.
3. Donnez la matrice de passage de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ à la base $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3)$.
4. Ecrivez la matrice R de la rotation ρ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$,
   réponse : $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{1+\cos\theta}{2} & \frac{1-\cos\theta}{2} \\ -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{1-\cos\theta}{2} & \frac{1+\cos\theta}{2} \end{pmatrix}$.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 3 Aide 1 Aide 2
Question 4 Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.14 TD2-Exercice 14

1. Déterminer le rang de la matrice A obtenue dans l'exercice A.2.6 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   (réponse : 3).

2. Déterminer le rang de la matrice A obtenue dans l'exercice A.2.7 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

   (réponse : 3).

3. Déterminer le rang de la matrice M obtenue dans la première question de l'exercice A.2.8 (réponse : si $a = b = 0$, le rang est nul, il vaut 2 sinon).
4. Déterminer le rang de la matrice A obtenue dans l'exercice A.2.12, (réponse : 2).
5. Déterminer le rang de la matrice R obtenue dans l'exercice A.2.13 (réponse : 3)

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.14
TD2-Exercice 14

Question 1	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4
Question 2	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4
Question 3	Aide 1	Aide 2	Aide 3	
Question 4	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4
Question 5	Aide 1	Aide 2	Aide 3	

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.15 TD2-Exercice 15

Soient E et F deux espaces vectoriels de bases respectives $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}\}$ et $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ dont la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de Ker u, (réponse : $\vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4$).
2. Déterminer une base de Im u, (réponse : $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$).
3. Quel est le rang de u ?

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 3 Aide 1

Exercice A.2.16 TD2-Exercice 16

1. Soient $V_1, V_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nuls.
   Montrez que rang $(V_1 {V_2}^T) = 1$.
2. Reciproquement, montrez que si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et rang $(A) = 1$, alors $\exists V_1, V_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : A = V_1 {V_2}^T$.
3. Application : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 3 Aide 1 Aide 2

Exercice A.2.17 TD2-Exercice 17

Soit $u \in \mathcal{L}(E, E)$ vérifiant $u^2 = u$, montrer directement (sans utiliser l'exercice A.2.3) que :

1. $\text{Ker } u \cap \text{Im } u = \{\vec{0}\}$.
2. $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$.

Question 1	Aide 1	Aide 2
Question 2	Aide 1	Aide 2

Exercice A.2.18 TD2-Exercice 18

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$
   (a) Montrer que Ker $u \subset$ Ker $(v \circ u)$
   (b) On suppose que v est bijective.
   – Montrer que Ker $u =$ Ker $(v \circ u)$.
   – En déduire que u et $v \circ u$ ont le même rang.
   (c) Soit B une matrice inversible, montrer que A et BA ont le même rang (pour toute matrice A pour laquelle le produit est possible)
2. Soit $w \in \mathcal{L}(H,E)$, $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
   (a) Montrer que Im $(u \circ w) \subset$ Im u.
   (b) On suppose que w est bijective.
   – Montrer que Im $(u \circ w) =$ Im u.
   – En déduire que u et $u \circ w$ ont le même rang.
   (c) Soit B une matrice inversible, montrer que A et AB ont le même rang (pour toute matrice A pour laquelle le produit est possible).

Question 1a Aide 1 Aide 2
Question 1b Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 1c Aide 1
Question 2a Aide 1
Question 2b Aide 1
Question 2c Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe B
Exemples

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

B.1 Exemples du chapitre II

Exemple B.1.1

Soit $E = F \oplus G$ muni de la base $\mathcal{E} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ ($\mathcal{F}$ base de F, $\mathcal{G}$ base de G) avec $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$, $\mathcal{G} = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ (dim $E = 5$, dim $F = 3$, dim $G = 2$). On reprend l'exemple de la projection. La matrice de u, projection sur F parallèlement à G, s'écrit alors

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puisque $u(\vec{f}_j) = \vec{f}_j$, pour $j = 1, 2, 3$ et $u(\vec{g}_k) = \vec{0}$, pour $k = 1, 2$.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe C
Documents

C.1 Documents du chapitre II

Document C.1.1 Anneaux $\mathcal{L}(E;E)$

Si $F = E$ on peut munir $\mathcal{L}(E;E)$ d'une structure d'anneau pour la loi de composition des applications. On notera i_E l'application identité de E dans E : c'est l'élément neutre pour la loi "$\circ$" de l'anneau.
Attention : cet anneau n'est pas commutatif.
Exemple : dans le plan, si on compose une rotation et une projection, ces deux applications ne commutent pas en général.

retour au cours

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

Solution de l'exercice A.1.1

1) non, 2) non si $\beta \neq 0$, oui si$\beta = 0$ 3) 4) 5) oui, 6) non, 7) oui.

Retour à l'exercice ▲

2) **- si** $\alpha = \beta = 0$ **, Ker** $u = \mathbb{R}$**, Im** $u = \{\vec{0}\}$**,**
- si $\alpha \neq 0, \beta = 0$ **Ker** $u = \{\vec{0}\}$**, Im** $u = \mathbb{R}$**.**

3) Ker $u = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0\}$**, Im** $u = \mathbb{R}$**.**

4) Ker $u = \Delta$**, Im** $u = \Pi$**.**

5) Ker $u = \mathcal{P}_0$ **(polynômes constants), Im** $u = \mathcal{P}_{n-1}$**.**

7) Ker $u = \{\phi \in \mathcal{C}(0,1) | \int_0^1 \phi(t)dt = 0\}$**, Im** $u = \mathbb{R}$**.**

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.4

- On suppose que $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$ est une famille liée de E, donc il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ non tous nuls tels que : $\lambda_1\vec{x}_1 + \ldots + \lambda_p\vec{x}_p = \vec{O}$ on a donc $u(\lambda_1\vec{x}_1 + \ldots + \lambda_p\vec{x}_p) = \vec{O}$ et donc $\lambda_1 u(\vec{x}_1) + \ldots + \lambda_p u(\vec{x}_p) = \vec{O}$, ce qui montre que $\{u(\vec{x}_1), \ldots, u(\vec{x}_p)\}$ est une famille liée.
- Soit $\vec{y} \in \mathrm{Im}\, u$ alors il existe $\vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = u(\vec{x})$. Si $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$ est une famille génératrice de E , $\vec{x}$ peut s'écrire $\vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{x}_i$, on a donc $\left\{ \begin{array}{l} \vec{y} = u(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u(\vec{x}_i) \\ u(\vec{x}_i) \in \mathrm{Im}\, u \end{array} \right.$ donc $\{u(\vec{x}_1), \ldots, u(\vec{x}_p)\}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, u$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.5

On vérifie facilement que $u(\vec{x}+\vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y}), u(\lambda\vec{x}) = \lambda u(\vec{x})$
Im $u = F_1$, Ker $u = F_2$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.6

On a bien sûr $u(\vec{x}_1) = \vec{x}_1$, donc $u \circ u(\vec{x}) = u(\vec{x}) \forall \vec{x} \in E$ on a donc $u \circ u = u$. Vous pouvez illustrer ce résultat en pensant aux projections géométriques classiques sur un plan ou une droite.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.7

$$\left.\begin{cases} (u \circ v)(\vec{x} + \vec{y}) = (u \circ v)(\vec{x}) + (u \circ v)(\vec{y}) \\ (u \circ v)(\lambda \vec{x}) = \lambda (u \circ v)(\vec{x}) \end{cases}\right\} \textbf{ces 2 propriétés se vérifient très facilement.}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.8

$u(\vec{x}) = u(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = x_1u(\vec{e}_1) + x_2u(\vec{e}_2) + x_3u(\vec{e}_3) = (x_1 + x_2 + x_3)\vec{f}_1 + (x_1 - x_2 - 2x_3)\vec{f}_2$.
On voit donc que la donnée de $u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), u(\vec{e}_3)$ définit $u(\vec{x})$ pour tout $\vec{x}$.
(A condition bien sûr de connaitre les composantes de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{E}$)

Retour à l'exercice ▲

1. (a) On sait que si u est injective, on a $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$ libre $\Longrightarrow \{u(\vec{x}_1), \ldots, u(\vec{x}_p)\}$ libre, donc en utilisant la contraposée :
   $\{u(\vec{x}_1), \ldots, u(\vec{x}_p)\}$ liée $\Longrightarrow \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$ liée

   (b) Une base de E est une famille libre, donc son image par u est une famille libre puisque u est injective.
   Une base de E est une famille génératrice de E, donc son image par u est une famille génératrice de Im u.
   L'image d'une base de E est donc une base de Im u.

2. (ii)⇒(i) - Soit $\vec{x}$ un vecteur tel que $u(\vec{x}) = \vec{0}$, on peut alors décomposer ce vecteur sur la base $\mathcal{E}$:
   $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j$ et $\vec{0} = u(\vec{x}) = u(\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j u(\vec{e}_j)$ et comme la famille $u(\mathcal{E})$ est libre par hypothèse cela implique que
   $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, soit $\vec{x} = \vec{0}$ et donc Ker $u = \{\vec{0}\}$.
   (i)⇒(ii) - Puisque E est de type fini, il existe une base $\mathcal{B}$ de E, cette base est une famille libre, donc d'après la proposition II.1.3 son image par u est une famille libre.

Retour à l'exercice ▲

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i)} \Longrightarrow u \text{ est injective } \Longrightarrow \text{ l'image d'une famille libre est libre} \\ \text{(i)} \Longrightarrow u \text{ est surjective } \Longrightarrow \text{ l'image d'une famille génératrice de E est génératrice de F}\end{array}\right\}$$

$\Longrightarrow$ l'image d'une base de E est une base de F

Réciproquement : Soit $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ une base de E. On suppose que l'image par u de cette base de E est une base de F

– Montrons que Ker $u = \vec{0}$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{x} \in \text{Ker } u \Longleftrightarrow u(\vec{x}) = \vec{0} \\ \vec{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i\end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(\vec{x}_i) = \vec{0} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$

(On a utilisé l'hypothèse que $\{u(\vec{x}_1), \ldots, u(\vec{x}_n)\}$ est une base donc libre).

On vient donc de montrer que Ker $u = \vec{0}$ donc u est injective.

– Montrons que Im $u = F$

$\{u(\vec{x}_1), \ldots, u(\vec{x}_n)\}$ est une base de F donc $\forall \vec{y} \in F, \vec{y} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(\vec{x}_i) = u\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i\right)$ donc $\vec{y} \in$ Im u.

On vient de montrer que Im $u = F$, donc que u est surjective.

Ce qui termine de démontrer l'équivalence.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.11

On démontre facilement que : $\left\{\begin{array}{l} u(\vec{x})=\vec{0} \Rightarrow \vec{x}=\vec{0} \text{ donc } \operatorname{Ker} u=\{\vec{0}\} \\ \forall \vec{y} \in F, \exists \vec{x}, \vec{y}=u(\vec{x}) \text{ donc } \operatorname{Im} u=F \end{array}\right.$ donc u est bijective.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.12

Comme tout $\vec{x} \in E$ admet une décomposition unique sur la base $\mathcal{E}$ l'application $\vec{x} \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est bien définie. On montre facilement qu'elle est linéaire et injective et surjective.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.13

$i_E(\vec{e}_i) = \vec{e}_i$ **donc** $A = I$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.14

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.15

$\vec{x} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ donc $u(\vec{x}) = u(\vec{e}_1) - u(\vec{e}_2) + 2u(\vec{e}_3)$

Or d'après la définition de A on a : $\left\{ \begin{array}{rcl} u(\vec{e}_1) & = & 3\vec{f}_1 + \vec{f}_2 \\ u(\vec{e}_2) & = & 4\vec{f}_1 + 2\vec{f}_2 \\ u(\vec{e}_3) & = & 5\vec{f}_1 + 6\vec{f}_2 \end{array} \right.$

On déduit donc de tout ce qui précède : $u(\vec{x}) = 9\vec{f}_1 + 11\vec{f}_2$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.16

Pour obtenir A il suffit de déterminer $u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), u(\vec{e}_3), u(\vec{e}_4)$.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} u(\vec{e}_1) & = & (1,1,1) & = & \vec{f}_1+\vec{f}_2+\vec{f}_3 \\ u(\vec{e}_2) & = & (-1,2,1) & = & -\vec{f}_1+2\vec{f}_2+\vec{f}_3 \\ u(\vec{e}_3) & = & (1,0,3) & = & \vec{f}_1+3\vec{f}_3 \\ u(\vec{e}_4) & = & (1,-1,-3) & = & \vec{f}_1-\vec{f}_2-3\vec{f}_3 \end{array}\right. \text{.D'où } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bien sûr pour obtenir $u(\vec{e}_1)$, on écrit $\vec{e}_1 = (1,0,0,0)$ donc $x_1 = 1, x_2 = x_3 = x_4 = 0$.
Vous pourrez revenir à cet exrcice après avoir étudié le calcul explicite de l'image d'un vecteur.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.17

1. On démontre facilement que la somme est une loi de composition interne, associative, la matrice E dont tous les termes sont nuls (on la note $E = 0$) est l'élément neutre, la matrice B dont les termes sont les opposés de ceux de A (B=-A) est le symétrique de A. On a de plus
$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A), (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, 1A = A$
2. Si l'on note E_{ij} la matrice dont tous les termes sont nuls sauf le terme situé en ligne i et colonne j qui vaut 1, alors $A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$. La famille $\{E_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ est donc génératrice, on montre facilement qu'elle est libre : c'est donc une base , la dimension de $\mathcal{M}_{mn}$ est donc mn.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.18

- $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $AB = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

  Une disposition pratique pour ce dernier produit est la suivante :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \times & \times \\ \otimes & \times \\ \times & \times \end{pmatrix} \end{array}$$

  Le terme $\otimes$ est obtenu par produit terme à terme de la ligne de A et de la colonne de B situées dans son prolongement. C'est à dire $\otimes = 0 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 1$. Bien sûr cette disposition qui est pratique quand on débute se revèle rapidement encombrante !
  On ne peut pas effectuer le produit BA.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.19

1. $BD' = \begin{pmatrix} 5B_1 & 6B_2 \end{pmatrix}$: le produit à droite d'une matrice B par une matrice diagonale D' revient à multiplier chacune des colonnes B_i par le scalaire d'_{ii}.
   $DB = \begin{pmatrix} 2\underline{B}_1 \\ 3\underline{B}_2 \\ 4\underline{B}_3 \end{pmatrix}$: le produit à gauche d'une matrice B par une matrice diagonale D, revient à multiplier chacune des lignes $\underline{B}_i$ par le scalaire d_{ii}.
2. $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce résultat se généralise bien sûr à une matrice B quelconque.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.20

On a $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $AX = Y \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$ **donc** $u(\vec{x}) = (9, 11) = 9\vec{f_1} + 11\vec{f_2}$**. On retrouve bien sûr le même résultat.**

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.21

On pose $M = AB, N = B^{-1}A^{-1}$, on montre en utilisant l'associativité que $MN = NM = I$, donc $N = (M)^{-1} : B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.22

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\underline{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \underline{B}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}, \underline{B}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}, \underline{B^T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \underline{B^T}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(B^T)_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, (B^T)_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, (B^T)_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(\underline{B}_1)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, (\underline{B}_2)^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, (\underline{B}_3)^T = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(B_1)^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, (B_2)^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.23

1. On montre que $\{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2\}$ est une famille libre, en effet $\lambda_1 \vec{e'}_1 + \lambda_2 \vec{e'}_2 = \vec{O} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
   (Il suffit en effet d'exprimer $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2$ en fonction de $\vec{e}_1, \vec{e}_2$).
   Or une famille libre à 2 éléments est une base.
2. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.24

1. $\left\{\begin{array}{rcl}\vec{e'}_1 & = & \vec{e}_1+\vec{e}_2\\ \vec{e'}_2 & = & 2\vec{e}_1-\vec{e}_2\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl}\vec{e}_1 & = & \frac{1}{3}\vec{e'}_1+\frac{1}{3}\vec{e'}_2\\ \vec{e}_2 & = & \frac{2}{3}\vec{e'}_1-\frac{1}{3}\vec{e'}_2\end{array}\right.$

2. $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2=x_1\left(\frac{1}{3}\vec{e'}_1+\frac{1}{3}\vec{e'}_2\right)+x_2\left(\frac{2}{3}\vec{e'}_1-\frac{1}{3}\vec{e'}_2\right)=\left(\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2\right)\vec{e'}_1+\left(\frac{1}{3}\vec{x}_1-\frac{1}{3}x_2\right)\vec{e'}_2$ **donc** $x'_1=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2\ ,\ x'_2=\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2$

3. $PX'=\begin{pmatrix} x'_1+2x'_2\\ x'_1-x'_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}=X$

4. $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$**, on a obtenu** P^{-1} **à partir de 1. On vérifie bien sûr que** $PP^{-1}=P^{-1}P=I$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.25

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
- $u(\vec{e'}_1) = u(\vec{e}_1) + u(\vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \quad , \quad u(\vec{e'}_2) = 2u(\vec{e}_1) - u(\vec{e}_2) = 7\vec{e}_2$
- $u(\vec{e'}_1) = \vec{e'}_1 + \vec{e'}_2 + \frac{4}{3}\vec{e'}_1 - \frac{2}{3}\vec{e'}_2 = \frac{7}{3}\vec{e'}_1 + \frac{1}{3}\vec{e'}_2 \quad , \quad u(\vec{e'}_2) = \frac{14}{3}\vec{e'}_1 - \frac{7}{3}\vec{e'}_2$
- $A' = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} = P^{-1}AP$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.26

On démontre immédiatement que Im A est un sous espace vectoriel. On a de plus :
$Y \in \mathrm{Im}\ A \Longleftrightarrow Y = AX \Longleftrightarrow Y = \sum_{i=1}^{n} x_i A_i$ avec $x_i \in K \Longleftrightarrow Y \in$ vect $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.27

– rang $A = \dim E_1$
– rang $A = 2$
– rang $A = 2$ car $\{A_1, A_2, A_3\}$ est une famille liée et que $\{A_1, A_2\}$ est une famille libre.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.28

1. e)
2. rien sans hypothèses supplémentaires
3. d)
4. a) e)
5. a), b), c)
6. b), d)
7. a), b), c)

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.29

Ker A n'est pas vide puisque $0 \in$ Ker A.
On vérifie de plus la stabilité
Si $X, X' \in$ Ker $A, a \in K$ alors $X + X' \in$ Ker $A, aX \in$ Ker A.

Retour à l'exercice ▲

On constate que la recherche du noyau de A revient à chercher les coefficients x_1, x_2, x_3 qui vérifient $x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 = 0$, ce qui revient à étudier si les colonnes A_1, A_2, A_3 forment un famille libre, ce qui permet de savoir si le rang de A vaut 3.
Dans le cas de A on trouve des coefficients non nuls possibles, donc Ker $A \neq \{0\}$,ou encore rang $A < 3$, ce qui permet de conclure que A n'est pas inversible.
Dans le cas de B, la seule solution est $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, donc B est inversible.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Application linéaire-définition".

Retour à l'exercice ▲

Montrer que

$$f(\vec{x}) = \vec{0} \Longleftrightarrow x_1 = x_2$$

$$\{\exists \vec{x}, \vec{y} = f(\vec{x})\} \Longleftrightarrow y_1 = y_2$$

Attention, montrez bien les équivalences . En déduire Ker f et Im f.

Retour à l'exercice ▲

On a montré $\text{Ker } f = \text{Im } f$, quelle conséquence cela a-t-il sur $f \circ f$?

Retour à l'exercice ▲

Raisonnez précisément par équivalences.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.1

– Que signifie qu'une application est nulle ?
– Quelle est la définition de $g \circ f$?
– Quelle est la définition de $\mathrm{Im}\, f$?

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Application linéaire-définition".

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Noyau et image".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.2

Ecrire les conditions pour que $\vec{x} \in \text{Ker } f$, en déduire une famille génératrice de Ker f, montrer que cette famille est libre.

Retour à l'exercice ▲

En raisonnant par équivalences montrer par exemple que

$$\vec{x} \in \mathrm{Ker}\ f \Longleftrightarrow \vec{x} = x_3\ \vec{f_3} + x_4\ \vec{f_4} \text{ avec } \vec{f_3} = (-2,-1,1,0)\,,\ \vec{f_4} = (1,2,0,1)\,.$$

Vérifier que $\vec{f_3}, \vec{f_4} \in \mathrm{Ker}\ f$ et qu'ils forment une famille libre. Conclure.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.2

Voir le paragraphe "Noyau et image". .

Retour à l'exercice ▲

Déterminer une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, f$.

Retour à l'exercice ▲

Calculer $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3), f(\vec{e}_4)$ et extraire de cette famille génératrice une base de Im f. Bien sûr la base de Im f n'est pas unique, il se peut que vous obteniez une base de Im f différente de celle proposée dans la solution. Dans tous les cas toutes les bases ont le même nombre de vecteurs, si vous trouvez que $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ est une base de Im f, vous devez montrer que les vecteurs $\vec{g}'_1 = (1,1,1), \vec{g}'_2 = (-1,0,1)$ sont des combinaisons linéaires de $\vec{g}_1, \vec{g}_2$.

Retour à l'exercice ▲

Montrer que si $\vec{x} \in \text{Ker } u$ alors $\vec{x} \in \text{Ker } u^2$.

Retour à l'exercice ▲

Si u est linéaire , on a toujours $u(\vec{0}) = \vec{0}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1b, Exercice A.2.3

Montrer que si $\vec{y} \in \mathrm{Im}\, u^2$ alors $\vec{y} \in \mathrm{Im}\, u$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1b, Exercice A.2.3

$u^2(\vec{x}) = u(u(\vec{x}))$.

Retour à l'exercice ▲

Revoir le paragraphe "Noyau et image".

Retour à l'exercice ▲

Proposez une démonstration claire, la rigueur de la rédaction est ici très importante. Par exemple, pour montrer que la proposition P implique la proposition Q, montrez que Q (la conclusion) est vraie en utilisant le fait que P (l'hypothèse) est vraie. Pour montrer que 2 propositions sont équivalentes on démontre souvent une double implication.
Pour démontrer que $A \subset B$ il faut montrer que tout élément de A appartient à B (en général ceci se démontre par une série d'implications).
Pour démontrer que $A = B$, on peut montrer que $A \subset B$ et $B \subset A$ comme précédemment. Ou encore on montre que $x \in A \iff x \in B$ (on utilise alors une série d'équivalences).

Retour à l'exercice ▲

Supposer que Ker $u =$ Ker u^2, prendre un élément quelconque de Im $u \cap$ Ker u, montrer que cet élément est nul (en utilisant bien sûr l'hypothèse Ker $u =$ Ker u^2).
Démontrer ensuite la réciproque, c'est à dire on suppose que Im $u \cap$ Ker $u = \vec{0}$ et on montre que Ker $u =$ Ker u^2 (par double inclusion, penser aux questions qui ont été traitées avant).

Retour à l'exercice ▲

Revoir le paragraphe "Noyau et image".

Retour à l'exercice ▲

Proposez une démonstration claire, la rigueur de la rédaction est ici très importante. Par exemple, pour montrer que la proposition P implique la proposition Q, montrez que Q (la conclusion) est vraie en utilisant le fait que P (l'hypothèse) est vraie. Pour montrer que 2 propositions sont équivalentes on démontre souvent une double implication.
Pour démontrer que $A \subset B$ il faut montrer que tout élément de A appartient à B (en général ceci se démontre par une série d'implications).
Pour démontrer que $A = B$, on peut montrer que $A \subset B$ et $B \subset A$ comme précédemment. Ou encore on montre que $x \in A \iff x \in B$ (on utilise alors une série d'équivalences).

Retour à l'exercice ▲

On suppose que $\text{Im } u = \text{Im } u^2$.
On choisit $\vec{x} \in E$, on sait (pourquoi ?) $\exists \vec{z} \in E, u(\vec{x}) = u^2(\vec{z})$. On peut alors écrire que $\vec{x} = u(\vec{z}) + (\vec{x} - u(\vec{z}))$! En déduire que $E = \text{Im } u + \text{Ker } u$.
Réciproquement, on suppose que $E = \text{Im } u + \text{Ker } u$.
Soit $\vec{x} \in \text{Im } u$ alors $\exists \vec{z}_1 \in \text{Im } u, \vec{z}_2 \in \text{Ker } u$ tels que $\vec{x} = u(\vec{z}_1 + \vec{z}_2)$. Pourquoi ?
En déduire qu'il existe $\vec{y}$ tel que $\vec{x} = u^2(y)$ et donc que $\vec{x} \in \text{Im } u^2$.
On en déduit que $\text{Im } u \subset \text{Im } u^2$.
En utilisant les questions précédentes on obtient l'égalité des deux ensembles.

Retour à l'exercice ▲

Revoir dans le chapitre 1 la définition de somme directe.

Retour à l'exercice ▲

On a alors $p^2 = p$, on peut utiliser 1(c) et 1(d) et conclure.

Retour à l'exercice ▲

Inspirez-vous de l'aide 3 de la question 1(d).

Retour à l'exercice ▲

Revoir le paragraphe "Projection".

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.4

Quelle est la base canonique de P_n ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2a, Exercice A.2.4

Voir l'exercice A.1.4

Retour à l'exercice ▲

Essayez de démontrer cette propriété sans hypothèse supplémentaire. Si vous n'y arrivez pas, essayez de trouver un contre-exemple pour prouver qu'elle est fausse.

Retour à l'exercice ▲

La question 1 fournit un contre-exemple.
On cherche l'hypothèse supplémentaire :
Soit $\vec{x} \in E$ alors $u(\vec{x})$ s'écrit $u(\vec{x}) = \alpha_1 u(\vec{x}_1) + \ldots + \alpha_p u(\vec{x}_p)$. Pourquoi ?
Quelle hypothèse faut-il ajouter pour pouvoir déduire que $\vec{x} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \ldots + \alpha_p \vec{x}_p$?

Retour à l'exercice ▲

Revoir la question 2(a).

Retour à l'exercice ▲

A-t-on Im $u = F$ **?**

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2c, Exercice A.2.4

Si u n'est pas surjective, la réponse est "non".

Retour à l'exercice ▲

Une des implications découle immédiatement du théorème II.1.1.

Retour à l'exercice ▲

$P_2 \Rightarrow P_1$ est la contraposée de la première assertion du théorème II.1.1. Donc l'implication est démontrée. Essayez maintenant de la démontrer directement sans utiliser le théorème.

Retour à l'exercice ▲

On suppose que P_2 est vraie, on doit montrer que

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{x}_n = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.5

N'avez-vous pas déjà démontré dans le cours que sous certaines hypothèses $P_1 \Rightarrow P_2$?

Retour à l'exercice ▲

Revoir l'exercice A.1.9

Retour à l'exercice ▲

Voir la définition de "famille libre" dans le chapitre 1.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.6

On rappelle que si une fonction est nulle alors sa dérivée est nulle. Attention, faites bien la différence entre "f est la fonction nulle" et "la fonction f s'annule pour la valeur $t = 75$".

Retour à l'exercice ▲

Utiliser les dérivées et des valeurs particulières de t.

Retour à l'exercice ▲

Revoir le paragraphe "Injective" .

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2b, Exercice A.2.6

Ecrire $u(p) = 0$

Retour à l'exercice ▲

Utiliser 1. pour montrer que $u(p) = 0 \iff p = 0$

Retour à l'exercice ▲

Revoir le paragraphe "Noyau et image".

Retour à l'exercice ▲

Calculer l'image par u des éléments de $\mathcal{F}$.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Matrices-définitions".

Retour à l'exercice ▲

Calculer l'image des vecteurs de base de $\mathcal{P}_2$ et calculer leurs composantes dans une base de F.

Retour à l'exercice ▲

Utiliser A pour traduire $u(p) = 0$.

Retour à l'exercice ▲

Calculer AX.

Retour à l'exercice ▲

Montrer que $AX = 0 \Longleftrightarrow X = 0$**.**

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Application linéaire-définition".

Retour à l'exercice ▲

N'oubliez pas que $u(p+q), u(p), u(q), u(\lambda p)$ sont des polynômes. On rappelle que pour montrer l'égalité de deux polynômes p_1 et p_2 par exemple, il faut montrer que $p_1(t) = p_2(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$.
N'oubliez pas de montrer que $u(p) \in \mathcal{P}_{n-2}$, pour cela décomposez p sur la base canonique.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Matrices-définitions".

Retour à l'exercice ▲

Calculer les composantes de $u(p_0), u(p_1), \ldots, u(p_4)$ dans la base de $\mathcal{P}_{n-2}$ et rangez ces coefficients correctement dans la matrice A.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.8

Revoir dans le chapitre 1 la caractérisation de sous-espace vectoriel et la définition de base.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.8

On obtient facilement une famille génératrice de E. Montrer ensuite que cette famille génératrice est libre.

Retour à l'exercice ▲

On écrit $M = aA + bB$ (une base de E est constituée de matrices de E).

Retour à l'exercice ▲

Revoir la caractérisation de sous-espace vectoriel.

Retour à l'exercice ▲

Choisir par exemple $n = 3$, soit $M \in \mathcal{T}_3$, et traduire cette propriété sur les coefficients de M.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2a, Exercice A.2.8

On a $m_{33} = -m_{11} - m_{22}$ donc en utilisant les notations classiques E_{ij},
$M = m_{11}(E_{11} - E_{33}) + m_{22}(E_{22} - E_{33}) + m_{12}E_{12} + m_{13}E_{13} + m_{21}E_{21} + m_{23}E_{23} + m_{31}E_{31} + m_{32}E_{32}$. On démontre facilement que les 8 matrices qui interviennent dans la décomposition précédente appartiennent à $\mathcal{T}_3$ et qu'elles forment une famille libre, c'est donc une base.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2b, Exercice A.2.8

Revoir la caractérisation de sous-espace vectoriel et reprendre les notations de l'exercice A.1.17.

Retour à l'exercice ▲

Revoir la caractérisation de sous-espace vectoriel et reprendre les notations de l'exercice A.1.17.

Retour à l'exercice ▲

Revoir la caractérisation de sous-espace vectoriel et reprendre les notations de l'exercice A.1.17.

Retour à l'exercice ▲

Si A est symétrique montrer que l'on peut écrire

$$A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} + a_{22}A_{22} + \ldots + a_{2n}A_{2n} + \ldots + a_{nn}A_{nn}$$

où $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1n}, A_{22}, \ldots, A_{2n}, \ldots, A_{nn}$ sont des matrices symétriques à déterminer à l'aide des notations de l'exercice A.1.17. Si vous ne voyez pas avec n quelconque, traitez d'abord un cas particulier : $n = 3$ par exemple.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2d, Exercice A.2.8

Montrer que la famille $\{A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1n}, A_{22}, \ldots, A_{2n}, \ldots, A_{nn}\}$ est libre. Conclure que la dimension de $\mathcal{Y}_n$ vaut $\frac{n(n+1)}{2}$. Démontrer de façon similaire que la dimension de $\mathcal{A}_n$ vaut $\frac{n(n-1)}{2}$.

Retour à l'exercice ▲

Montrer que $\mathcal{Y}_n \cap \mathcal{A}_n = \{\vec{0}\}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2e, Exercice A.2.8

Quelle est la dimension de $\mathcal{Y}_n \oplus \mathcal{A}_n$? En déduire que $\mathcal{M}_{n,n} = \mathcal{Y}_n \oplus \mathcal{A}_n$.
Par curiosité , étant donné $M \in \mathcal{M}_{n,n}$, essayez de construire $Y \in \mathcal{Y}_n, A \in \mathcal{A}_n$ tels que $M = Y + A$. Vous pouvez vous inspirer de ce qui a été fait pour les fonctions paires et impaires dans le chapitre précédent.

Retour à l'exercice ▲

Vérifier que

$$u_A(X+Y) = u_A(X) + u_A(Y)$$

$$u_A(\lambda X) = \lambda u_A(X)$$

N'oubliez pas que X, Y sont des matrices.

Retour à l'exercice ▲

Ecrire $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ **et trouver les conditions sur** x, y, z, t **pour que** $u_A(X) = 0$.

Retour à l'exercice ▲

On obtient $\left\{ \begin{array}{c} 2y + z = 0 \\ t - x = 0 \end{array} \right.$.
En déduire une famille génératrice de Ker u_A et montrer que cette famille est libre.
Attention, vos calculs vous ont peut-être conduit à une autre base $\{Y_1, Y_2\}$ que la base $\{X_1, X_2\}$ proposée en solution. Dans ce cas, vérifiez que les vecteurs X_1, X_2 sont des combinaisons linéaires des vecteurs Y_1, Y_2.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.9

Avant tout calcul, voyez-vous une matrice particulière A qui vérilie $AX = XA, \ \forall X$?

Retour à l'exercice ▲

Si $A = I$ ou $A = \lambda I$, la propriété est démontrée.
On va montrer maintenant qu'il n'existe pas d'autres matrices qui vérifient cette propriété.
Choisir $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, traduire $AX = XA$ et ne pas oublier que l'égalité doit être vraie pour tout X.

Retour à l'exercice ▲

Revoir le paragraphe "Produit de deux matrices".

Retour à l'exercice ▲

Donner l'expression du terme de AB qui se trouve en ligne i et colonne i. Même question pour le terme de BA.

Retour à l'exercice ▲

Calculer les traces et comparer.

Retour à l'exercice ▲

Attention AB est un scalaire et BA est une matrice.
Que vaut AB ?
Expliciter les termes de BA et conclure.

Retour à l'exercice ▲

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$

Retour à l'exercice ▲

Utiliser la distributivité du produit par rapport à la somme.
Attention le produit n'est pas commutatif.

Retour à l'exercice ▲

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

La formule du binôme serait :

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Lorsque $AB = BA$ on dit que A et B commutent, la formule du binôme est alors valable pour $n = 2$.
Vérifiez maintenant par récurrence que lorsque A et B commutent, la formule est valable pour n quelconque.On rappelle la formule du binôme :

$$(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i A^{n-i} B^i.$$

Retour à l'exercice ▲

Ecrire A comme une somme de 2 matrices et utiliser ce qui précède.

Retour à l'exercice ▲

Avez-vous vérifié que les conditions énoncées pour appliquer la formule du binôme étaient satisfaites ?

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Calcul explicite de l'image d'un vecteur".

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Noyau et image".

Retour à l'exercice ▲

Trouver les conditions pour que $u(\vec{x}) = \vec{0}$**.**

Retour à l'exercice ▲

En écrivant les conditions pour que $u(\vec{x}) = \vec{0}$, on trouve une famille libre, génératrice de Ker u.

Retour à l'exercice ▲

Comment allez-vous caractériser une base ?

Retour à l'exercice ▲

Connaissez-vous la dimension de $\mathbb{R}^3$?

Retour à l'exercice ▲

Montrer que la famille $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3$ est libre.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Matrices-définitions".

Retour à l'exercice ▲

Calculez les composantes de $u(\vec{e'}_1), u(\vec{e'}_{2)}, u(\vec{e'}_3)$ **dans la base** $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3$.

Retour à l'exercice ▲

Pensez à utiliser la linéarité de u, les composantes de $u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_{2)}, u(\vec{e}_3)$ dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, et enfin les composantes de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ dans la base $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3$.

Retour à l'exercice ▲

Revoir le paragraphe "Matrice de passage".

Retour à l'exercice ▲

Qu'est ce qui relie cette matrice aux questions précédentes ?

Retour à l'exercice ▲

Il n'y a aucun calcul nouveau, utilisez la question précédente.

Retour à l'exercice ▲

Les colonnes de P^{-1} contiennent les composantes des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ dans la base $\{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3\}$.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Changement de base et matrices".

Retour à l'exercice ▲

Rappeler la définition de "base orthonormée directe".

Retour à l'exercice ▲

Vérifiez que $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2$ sont orthonormés. Rappelez vos souvenirs de géométrie pour construire $\vec{e'}_3$

Retour à l'exercice ▲

Utilisez le produit vectoriel.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Matrices-définitions".

Retour à l'exercice ▲

Que vaut $\rho(\vec{e'}_1), \rho(\vec{e'}_2), \rho(\vec{e'}_3)$ **?**

Retour à l'exercice ▲

Faites une figure pour vous aider.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Matrice de passage".

Retour à l'exercice ▲

Rappelez les composantes de $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, , \vec{e'}_3$ dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, , \vec{e}_3$. En déduire P.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Changement de base et matrices".

Retour à l'exercice ▲

Comment allez-vous déterminer P^{-1} ? Est-ce une matrice de passage ?

Retour à l'exercice ▲

Effectuez le produit $PR'P^{-1}$.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Rang".

Retour à l'exercice ▲

Dans l'exercice A.2.6, vous avez démontré des résultats sur u.

Retour à l'exercice ▲

Que vaut la dimension de Im u ?

Retour à l'exercice ▲

Pouvait-on travailler directement sur les colonnes ou lignes de A ?

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Rang".

Retour à l'exercice ▲

Pourquoi peut-on affirmer que rang $A \leq 3$?

Retour à l'exercice ▲

Comment voit-on immédiatement que rang $A \geq 1$?

Retour à l'exercice ▲

Etudiez plus précisément les colonnes de A pour conclure.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Rang".

Retour à l'exercice ▲

Est ce que l'on peut avoir rang $M = 0$?

Retour à l'exercice ▲

Discuter suivant les valeurs de a et b.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Rang".

Retour à l'exercice ▲

A et A' sont semblables.

Retour à l'exercice ▲

Travailler sur les colonnes de A'.

Retour à l'exercice ▲

Avait-on obtenu dans l'exercice A.2.12 des résultats sur u vous permettant de conclure quant au rang de A ?

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Rang".

Retour à l'exercice ▲

Pensez à u.

Retour à l'exercice ▲

On aurait pu aussi étudier R'.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Calcul explicite de l'image d'un vecteur".

Retour à l'exercice ▲

Montrer que :

$$u(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 = -x_4 \end{array} \right.$$

Bien raisonner par équivalences.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.15

Si on a étudié le chapitre 2 jusqu'au bout, on peut utiliser les résultats démontrés dans le paragraphe "Rang et dimension du noyau". On en déduit que Im $u = F$, pourquoi ? Donc $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ est une base de Im u. Essayons maintenant de résoudre cet exercice sans connaître ce résultat.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.15

$\{u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), u(\vec{e}_3), u(\vec{e}_4)\}$ est génératrice de $\operatorname{Im} u$, elle ne peut pas être libre : pourquoi ? Montrez que la famille $\{u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), u(\vec{e}_3)\}$ est libre.

Retour à l'exercice ▲

La famille $\{u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), u(\vec{e}_3)\}$ est génératrice de Im u, pourquoi ?
C'est donc une base de Im u.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Rang" et utiliser la question précédente.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Rang".

Retour à l'exercice ▲

Expliciter les colonnes de $V_1V_2^T$ à l'aide de V_1 et des composantes de V_2.

Retour à l'exercice ▲

Montrer que toutes les colonnes de $V_1 V_2^T$ sont proportionnelles à V_1 et que l'une d'entre elles au moins est non nulle.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Rang".

Retour à l'exercice ▲

Montrer qu'une colonne de A au moins est non nulle.

Retour à l'exercice ▲

Montrer que toutes les autres colonnes de A sont proportionnelles à cette colonne non nulle, A_i par exemple. En déduire que $A = A_i L$ où L est un vecteur ligne non nul.

Retour à l'exercice ▲

Les 3 colonnes de A sont proportionnelles.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3, Exercice A.2.16

$$A = (2A_2 \ A_2 \ 3A_2) = A_2(2 \ 1 \ 3).$$

Retour à l'exercice ▲

On choisit $\vec{x} \in \text{Ker } u \cap \text{Im } u$ et on montre que $\vec{x} = \vec{0}$.
Ecrire des implications très claires.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.17

$$\vec{x} \in \mathbf{Ker}\ u \cap \mathbf{Im}\ u \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u(\vec{x}) = \vec{0} \\ \exists \vec{y}, \vec{x} = u(\vec{y}) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \vec{y}, \vec{x} = u(\vec{y}) \\ u(u(\vec{y})) = \vec{0} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \vec{y}, \vec{x} = u(\vec{y}) \\ u(\vec{y}) = \vec{0} \end{array} \right. \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

Retour à l'exercice ▲

Ker u et Im u sont en somme directe. Pourquoi ?

Retour à l'exercice ▲

On pose $H = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$, comparer les dimensions de H et de E. Conclure.

Retour à l'exercice ▲

Choisir $\vec{x} \in \mathrm{Ker}\ u$ et montrer que $v \circ u(\vec{x}) = \vec{0}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1a, Exercice A.2.18

Ne pas oublier que si v est linéaire, $v(\vec{0}) = \vec{0}$

Retour à l'exercice ▲

Il faut maintenant montrer l'inclusion $\mathrm{Ker}\,(v \circ u) \subset \mathrm{Ker}\, u$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1b, Exercice A.2.18

$(v \circ u)(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow u(\vec{x}) = \vec{0}$. **Pourquoi ?**

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Rang et dimension du noyau".

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1c, Exercice A.2.18

Appelons u l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ dont B est la matrice dans la base canonique et appelons v l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique. Si B est inversible, u est bijective et on peut appliquer la question précédente.

Retour à l'exercice ▲

$\vec{y} \in \mathbf{Im}\ (u \circ v) \Rightarrow \vec{y} \in \mathbf{Im}\ u$. **Pourquoi ?**

Retour à l'exercice ▲

Il faut montrer maintenant que

$$\mathbf{Im}\, u \subset \mathbf{Im}\, (u \circ w).$$

Retour à l'exercice ▲

S'inspirer de ce qui a été fait dans la question précédente.

Retour à l'exercice ▲