Final SY02 Automne 2007

Nom :	**Signature :**
Prénom :	

Répondre sur ce document, en ne reportant que les grandes lignes du raisonnement et les résultats (faire d'abord les calculs au brouillon). La qualité de la présentation sera prise en compte dans la notation. Aucune copie supplémentaire ne sera acceptée. Le seul document autorisé est le recueil de tables. Le stockage d'informations relatives au cours de sy02 sur une calculette programmable est interdit.

Exercice 1 (10 points)

Un producteur de vin désire savoir si sa production est conforme aux normes imposées et, en particulier, si le *titre alcoométrique volumique naturel* (c'est-à-dire la quantité d'alcool naturellement présente dans le vin, mesurée par rapport au volume total) est bien compris dans la fourchette $[11\%, 14\%]$ imposée par le gouvernement. Le vigneron souhaite donc estimer le titrage moyen de sa dernière cuvée par une série de mesures réalisées sur un nombre n de cuves. On supposera que la mesure du titre alcoométrique volumique naturel X suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 où μ est le titrage moyen.

1. Proposer un estimateur du titrage moyen et une fonction pivotale de ce paramètre en s'appuyant sur cet estimateur.

2. Donner (avec démonstration) l'expression d'un intervalle de confiance bilatéral au niveau $1 - \alpha$ sur le titrage moyen. Application numérique : quel est l'intervalle de confiance sachant que on a obtenu 10 mesures $x_1, \ldots, x_{10}$ vérifiant $\sum_i x_i = 130.5$ et $\sum_i x_i^2 = 1713.73$ et que l'on prend $\alpha = 0.05$?

Intervalle de confiance :

Application numérique :

3. On cherche à tester l'hypothèse $H_0 : \sigma^2 = \sigma_O^2$ vs. l'hypothèse $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_O^2$. Donner la fonction pivotale à employer, puis en déduire la région critique du test. Application numérique : peut-on accepter l'hypothèse $H_0 : \sigma^2 = 1$ au niveau de signification $\alpha^* = 0.05$, si l'on utilise les données de la question 2 ?

Fonction pivotale :

Région critique :

Application numérique :

On suppose à présent que la variance σ^2 est connue et égale à $\sigma_0^2 = 1$.

4. Donner (sans démonstration) l'expression d'un nouvel intervalle de confiance sur le titrage moyen. Application numérique avec les mêmes données que dans la question 2. Combien de mesures doit-on réaliser pour que sa largeur n'excède pas 0.5 ?

Intervalle de confiance

Application numérique

Nombre de mesures :

5. Tester l'hypothèse $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. l'hypothèse $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Application numérique : que décide-t-on pour $\mu_0 = 13$ au niveau de signification $\alpha^* = 0.05$ avec les données de la question 2 ?

Région critique :

Application numérique :

Exercice 2 (5 points)

On cherche à estimer la probabilité p qu'un dindon mécanique tombe en panne. Pour cela, on modélise la durée de vie en secondes par une variable aléatoire X qui est supposée suivre une loi géométrique de paramètre p définie par $\Pr(X = x) = (1-p)^{x-1}p$ pour $x \in \mathbb{N}^*$. La mise en service de $n = 100$ dindons mécaniques a donné les résultats suivants :

date de panne	1	2	3	4	5
nombre d'occurences	57	26	10	5	2

1. Existe-t-il un estimateur efficace de p ou d'une fonction de p ? Si oui, donner son espérance et sa variance. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

Estimateur efficace :

Espérance et variance de l'estimateur efficace :

Espérance et variance de X :

2. Au vu des résultats, peut-on admettre, au niveau de signification $\alpha^* = 5\%$, que la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $p = 0.6$? (On utilisera un test du χ^2.)

Exercice 3 (5 points)

On a relevé les durées de vie $x_1, \ldots, x_n$ de n appareils de même type. On suppose que la durée de vie X d'un appareil suit une loi exponentielle de paramètre θ inconnu. On rappelle que la densité de cette loi s'écrit $f(x) = \theta e^{-\theta x}$. Le fabricant prétend que la durée de vie moyenne est de 1000 heures, c'est-à-dire que le paramètre θ est égal à $1/1000$. Ce chiffre est considéré comme sur-estimé par une association des consommateurs. Nous allons utiliser la théorie des tests pour tenter de trancher cette question.

1. On considère le problème de test suivant : $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta = \theta_1$ avec $\theta_1 > \theta_0$. Donner la forme de la région critique du test optimal au niveau α^* pour ce problème.

2. En supposant n grand, déterminer l'expression littérale de la région critique.

4. On considère cette fois les hypothèses $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta > \theta_0$. Montrer qu'il existe un test UPP pour ce problème.