Analyse vectorielle-Courbes et surfaces

Exercice 1 *underline***Champs et potentiels scalaires**

Soit le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dèfini par :

$$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} yz - x^2 \\ zx - y^2 \\ xy - z^2 \end{pmatrix}$$

Montrer qu'il dèrive d'un potentiel scalaire que l'on dèterminera.

Corrigè :

Pour montrer que le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ dèrive d'un potentiel scalaire f, il suffit de montrer que $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{0}$. Pour dèterminer le potentiel f, il suffit de rèsoudre le système $\overrightarrow{\nabla} f = \overrightarrow{V}$, que l'on l'obtient de deux manières diffèrentes, soit en rèsolvant le système $\overrightarrow{\nabla} f = \overrightarrow{V}$, soit on utilsant la forme intègrale de f donnèe dans le cas gènèrale par

$$f(x,y,z) = \int_0^1 xP(tx,ty,tz) + yQ(tx,ty,tz) + zR(tx,ty,tz)dt$$

où P, Q, R dèsignent les composantes du champ $\overrightarrow{V}$. Par la deuxième mèthode on obtient,

$$f(x,y,z) = \int_0^1 x(t^2(yz-x^2)) + yt^2(zx-y^2) + zt^2(xy-z^2)dt = \frac{1}{3}(xyz-x^3+yzx-y^3+zxy-z^3)$$

Exercice 2 **Champs et potentiels scalaires**

Soit le champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dèfini par :

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{1+r^2} \\ \frac{y}{1+r^2} + \beta y^2 z \\ \frac{\alpha z}{1+r^2} + \frac{\beta y^3}{3} \end{pmatrix}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et où on a posè $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1. *Montrer que*
$$\forall \ \beta \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{rot}\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \alpha = \alpha_0$$
où α_0 est une constante à dèterminer.
2. *Le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ dèrive t-il d'un potentiel scalaire f ? Si oui le dèterminer.*
3. *On pose $\beta = 0$. Si f existe, Calculer Δf.*
4. *Retrouver le rèsultat prècèdent en utilisant les coordonnèes sphèriques.*

Corrigè :

1.
$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{2yz}{(1+r^2)^2}(1-\alpha) \\ -\frac{2xz}{(1+r^2)^2}(1-\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Donc
$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \alpha = 1$$

2. On choisit $\alpha = 1$. Comme $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$, il existe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla f}$.
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{1+x^2+y^2+z^2} & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{1+x^2+y^2+z^2} + \beta y^2 z & (2) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{z}{1+x^2+y^2+z^2} + \dfrac{\beta}{3}y^3 & (3) \end{cases}$$

   En intègrant (1) par rapport à x (à y et z fixès)
$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}ln(1+x^2+y^2+z^2) + \lambda(y,z)$$

   En reportant dans (2) :
$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \beta y^2 z$$

   qui s'intègre (par rapport à y, à z fixè) en
$$\lambda(y,z) = \frac{\beta}{3}y^3 + \nu(z)$$

   D'où $f(x,y,z) = \frac{1}{2}ln(1+x^2+y^2+z^2) + \frac{\beta}{3}y^3 + \nu(z)$ qu'on reporte dans (3) pour obtenir : $\nu'(z) = 0$ et donc $\nu(z) = c$ (fonction constante).
   On peut donc choisir comme potentiel, toute fonction du type :
$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}ln(1+x^2+y^2+z^2) + \frac{\beta}{3}y^3 + c$$

   où $c \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire.

3. On pose $\beta = 0$. On choisit $c = 0$, on a donc $f(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2+y^2+z^2)$.
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{1+x^2+y^2+z^2} \qquad \text{(sans calcul, car c'est la première composante de V)}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1+y^2+z^2-x^2}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$$

   De même (rôle symètrique jouè par y et z)
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1+x^2-y^2+z^2}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1+x^2+y^2-z^2}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$$

   D'où :
$$\Delta f = \frac{3+x^2+y^2+z^2}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$$

4. $f(x,y,z) = \frac{1}{2}ln(1+r^2)$ en posant $r^2 = x^2+y^2+z^2$ (coord. sphèrique)

   En coordonnèes sphèriques (cf cours) :
   $\Delta f = \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r}$ où $g(r,\theta,\phi) = \frac{1}{2}ln(1+r^2)$ (indèpendant de θ et ϕ ici)
   $g'(r) = \frac{r}{1+r^2}$, $g''(r) = \frac{1-r^2}{(1+r^2)^2}$. D'où :

   $$\Delta f = \frac{1-r^2}{(1+r^2)^2} + \frac{2r}{r(1+r^2)} = \frac{3+r^2}{(1+r^2)^2}$$

   Ce qui est bien le rèsultat obtenu au 3.

Exercice 3 **Champs et potentiels vecteurs**

Soit le champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ et la fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ dèfinis par :

$$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} 2y+z \\ 2x+z \\ x+y \end{pmatrix}$$

1. *Montrer qu'il existe un champ de vecteur $\overrightarrow{A}$ tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}$*
2. *On cherche un tel champ sous la forme $\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} x(2z-y) \\ y\varphi(x,z) \\ z\psi(x,y) \end{pmatrix}$. Dèterminer la forme gènèrale des fonctions φ et ψ.*
3. *expliciter ces fonctions lorsque $\nabla.\overrightarrow{A} = 0$.*

Corrigè :

1. Il suffity de remarquer que $div\overrightarrow{V} = 0$
2. On obtient $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} z\dfrac{\partial\psi}{\partial y} - y\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \\ -z\dfrac{\partial\psi}{\partial x} \\ y \\ dspfrac\partial\varphi\partial x \end{pmatrix}$

   Par consèquent $\psi(x,y) = -xh(y)$ et $\varphi(x,z) = yx + k(z)$.
3.

Exercice 4 **Calcul du Laplacien**

Soient f et g deux fonctions dèfinies respectivement de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad et \quad g(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

1. *Calculer $\triangle f$ et $\triangle g$ en utilisant les coordonnèes cartèsiennes*
2. *Calculer $\triangle f$ et $\triangle g$ en utilisant respectivement les coordonnèes polaires et cylindriques*
3. *Calculer $\triangle g$ en utilisant les coordonnèes sphèriques.*

Corrigè : voir cours

Exercice 5 *Soit M_0 un point de coordonnèes (x_0, y_0, z_0), soient $\overrightarrow{U}_1$, $\overrightarrow{U}_2$ deux vecteurs non colinèaires dont les composantes sont (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2).*

1. *Donner l'èquation cartèsienne et les èquations paramètriques du plan Π contenant M_0, $\overrightarrow{U}_1$ et $\overrightarrow{U}_2$*
2. *Donner les èquations paramètriques de la droite Δ passant par M_0 et ayant $\overrightarrow{U}_1$ comme vecteur directeur*

Corrigè :

1. $M \in \Pi \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = u\overrightarrow{U}_1 + v\overrightarrow{U}_2 : x = x_0 + a_1u + a_2v,\ \ y = y_0 + b_1u + b_2v,\ \ z = z_0 + c_1u + c_2v$
2. On pourra ècrire que $M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}$ est proportionnel à $\overrightarrow{U}_1 : x = x_0 + \lambda a, \quad y = y_0 + \lambda b, \quad z = z_0 + \lambda c$

Exercice 6 *Soit M_0 un point de coordonnèes $(x_0; y_0; z_0)$, $\overrightarrow{V}$ un vecteur non nul de composantes $(\alpha; \beta; \gamma)$, on appelle Δ la droite passant par M_0 et de vecteur directeur $\overrightarrow{V}$. Soit M_1 un point de coordonnèes $(x_1; y_1; z_1)$. Dèterminer le point M_2 projection orthogonale de M_1 sur Δ.*

Corrigè :

Il existe λ tel que $\overrightarrow{M_0M}_2 = \lambda\overrightarrow{V}$. Par suite, le produit scalaire $\overrightarrow{M_0M}_1.\overrightarrow{V} = \overrightarrow{M_0M}_2.\overrightarrow{V} + \overrightarrow{M_2M}_1.\overrightarrow{V} = \lambda\|\overrightarrow{V}\|^2$. Ce qui permet d'obtenir λ et par suite le vecteur $\overrightarrow{M_0M}_2$.

Exercice 7 *Soit Π le plan d'èquation $ax + by + cz = d$.*

1. *Dèterminer un vecteur $\overrightarrow{N}$ normal au plan Π.*
2. *Soit M_1 le point de coordonnèes $(x_1; y_1; z_1)$, on appelle M_2 la projection orthogonale de M_1 sur Π, dèterminer les coordonnèes de M_2.*
3. *En dèduire la distance de M_1 à Π.*
4. *Dèterminer les coordonnèes de M_3 symètrique de M_1 par rapport à Π.*

Corrigè :

1. La normale est le vecteur de composantes (a, b, c)
2. Il existe λ tel que $\overrightarrow{M_1M}_2 = \lambda\overrightarrow{N}$. Par suite, pour un point quelconque $M_0 \in \Pi$, le produit scalaire $0 = \overrightarrow{M_0M}_2.\overrightarrow{N} = \overrightarrow{M_0M}_1.\overrightarrow{N} + \overrightarrow{M_1M}_2.\overrightarrow{N} = \overrightarrow{M_0M}_1.\overrightarrow{N} + \lambda\|\overrightarrow{N}\|^2$. Ce qui permet d'obtenir λ et par suite le vecteur $\overrightarrow{M_1M}_2$.
3. $\|\overrightarrow{M_1M}_2\|$
4. Il suffit d'observer que $\overrightarrow{M_1M}_3 = 2\overrightarrow{M_1M}_2$

Exercice 8 *Dèterminer les èquations paramètriques de la droite dèfinie par les èquations $x + y + z = 1$ et $x - y + 2z = 1$.*

Corrigè : Il suffit de dèterminer un vecteur directeur $\overrightarrow{V}$ de la droite intersection des deux plans d'èquations $x + y + z = 1$ et $x - y + 2z = 1$ de normales respectives $\overrightarrow{N}_1 = (1, 1, 1) et \overrightarrow{N}_2 = (1, -1, 2)$. Un tel vecteur est donnè par $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{N}_1 \Lambda \overrightarrow{N}_2 = (3, -1, -2)$.

Exercice 9 *Soient $a; b; c$ trois paramètres strictement positifs. Donner des èquations paramètriques des surfaces dont les èquations cartèsiennes sont dèfinies ci-après, prèciser dans chacun des cas de quelle surface il s'agit.*

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
3. $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$
5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$
6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + z = 0$

Corrigè : A faire

Exercice 10 1. *Pour chacune des trois courbes ci-dessous, faire un dessin (allure) et donner une paramètrisation.*
   (a) $x^2 + y^2 = 1; \quad z = 3$
   (b) $x^2 + y^2 = 1; \quad x + y + z = 1$
   (c) $x^2 + y^2 = 1; x + y = 1.$

2. *Soit la courbe de $\mathbb{R}^3$ dèfinie par les èquations suivantes $z = x^2 + y^2; \quad x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1$*
   (a) *Tracer et paramètrer cette courbe.*
   (b) *Donner une paramètrisation de la droite tangente à cette courbe au point $M_0 = (1, 0, 1)$.*

Corrigè :

1. (a) $\{x^2 + y^2 = 1; \quad z = 3\} \Leftrightarrow \{x = \cos(\theta), y = \sin(\theta), \ \theta \in [0, 2\pi], \quad z = 3\}$
   (b) $\{x^2 + y^2 = 1; \quad x + y + z = 1\} \Leftrightarrow \{x = \cos(\theta), y = \sin(\theta), \ \theta \in [0, 2\pi], \quad z = 1 - \cos(\theta) - \sin(\theta)\}$
   (c) $\{x^2 + y^2 = 1; \quad x + y = 1\} \Leftrightarrow \{x^2 + (1 - x)^2 = 1; \quad x + y = 1\} \Leftrightarrow \{x^2 + -2x = 0; \quad x + y = 1\} \Leftrightarrow \{(x, y) = (0, 1)$ ou $(x, y) = (2, -1)\}$ Il s'agit de deux droites .

   (a)
$$\{z = x^2+y^2; \quad x^2+\frac{1}{2}y^2 = 1\} \Leftrightarrow \{z = x^2+y^2; \quad x = \cos(\theta), y = \sqrt{2}\sin(\theta), \ \theta \in [0, 2\pi]\}$$
$$\Leftrightarrow \{z = \cos^2(\theta)+2\sin^2(\theta); \quad x = \cos(\theta), y = \sqrt{2}\sin(\theta), \ \theta \in [0, 2\pi]\} \Leftrightarrow \{z = 1+\sin^2(\theta); \quad x = \cos($$
   (b) Le point M_0 correspond à la valeur de $\theta = 0$. Un vecteur directeur à la droite tangente à la courbe au point M_0 est obtenu par $\overrightarrow{V} = (x'(0), y'(0), z'(0))$. D'où le rèsultat......

Exercice 11 *On considère la courbe C, intersection des deux surfaces S_1 et S_2 dèfinies paramètriquement par :*

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & u + v + \frac{1}{3} \\ y & = & u - 2v + \frac{1}{3} \\ z & = & -2u + v + \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$(S_2)\left\{\begin{array}{lcl} x & = & u \\ y & = & v \\ z & = & u^2+v^2. \end{array}\right.$$

où $(u,v)\in\mathbb{R}^2$

1. *Donner des èquations implicites pour* S_1 *et* S_2.
2. *Soit* $M_2\in S_2$. *Utiliser deux mèthodes diffèrentes pour trouver un vecteur normal à* S_2 *au point* M_2. *En dèduire l'èquation du plan tangent à* S_2 *au point* M_2.
3. *On suppose que* M_2 *appartient aussi à* S_1. *Donner un vecteur tangent à la courbe* C *en* M_2. *En dèduire des èquations paramètriques de la tangente à* C *en* M_2.

Corrigè :

1. $x+y+z=1$ pour S_1 et $z=x^2+y^2$ pour S_2.
2. Pour un vecteur normal à la surface S_2, soit on utlise les equations paramètriques, soit l'èquation cartèsiènne. Dans le premier cas on effectue le produit vectoriel des vecteurs (dèrivèes partielles par rapport à u et v) $T_u(M_2)=(1,0,2u)$ et $T_v(M_2)=(0,1,2v)$. Dans le deuxième cas il s'agit d'une direction du gradient de la fonction $f(x,y,z)=z-x^2-y^2$, à savoir $\overrightarrow{N}_2=(-2x_2,-2y_2,1)$, où $M_2=(x_2,y_2,z_2)$.
3. Soit $\overrightarrow{N}_1=(1,1,1)$ un vecteur normal au plan S_1. Un vecteur directeur de la droite tangente en M_2 à la courbe C est obtenu comme produit vectoriel des normales $\overrightarrow{N}_1$ et $\overrightarrow{N}_2$. Ensuite on en dèduira facilement les èquations paramètriques de la droite tangente.

Exercice 12 *Pour chacun des domaines* $D\subset\mathbb{R}^2$ *ci-dessous, faire un dessin reprèsentant* D *et paramètrer son bord.*

1. $D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2;\ \ |x|<1;\ \ |y|<1\}$
2. $D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2;\ \ x^2+(y-1)^2\leq 1;\ \ y\geq x\}$
3. $D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2;\ \ x>0;\ \ y>0;\ \ x+y<1\}$
4. $D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2;\ \ x^2+y^2-x<0;\ \ x^2+y^2-y>0;\ \ y>0\}$
5. $D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2;\ \ x^2+(y-2)^2\leq 4;\ \ x\geq 0\}$
6. $D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2;\ \ y^2\leq 4x;\ \ y\geq 0;\ \ x\leq h\}$
7. $D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2;\ \ x<2y;\ \ y<2x;\ \ y<2\}$

Corrigè : facile à faire !

Exercice 13 *On considère la surface* S*, dèfinie par :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} z & = & x^2+y^2 \\ z & \leq & 1-2y \end{array}\right.$$

1. *Dessiner* S.
2. *Paramètrer* S
3. *Donner l'èquation du plan tangent à* S *en un point* M_0*, d'une part en utilisant la reprèsentation paramètrique, d'autre part en utilisant l'èquation cartèsienne.*
4. *On appelle* C *le bord de* S.

(a) Donner les èquations cartèsiennes de C.

(b) Montrer que C est l'intersection d'un plan et d'un cylindre. En dèduire des èquations paramètriques de C.

(c) Donner un vecteur tangent à la courbe C en un point M_0.

Corrigè :

1. S est l'intersection de la paraboloide $z = x^2 + y^2$ et du demi-plan $z + 2y \leq 1$
2.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} z & = & x^2 + y^2 \\ z & \leq & 1 - 2y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccl} z & = & x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 & \leq & 1 - 2y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccl} z & = & x^2 + y^2 \\ x^2 + (y+1)^2 & \leq & 2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} x & = & r\cos(\theta), & \theta \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, \sqrt{2}] \\ y & = & -1 + r\sin(\theta), & \theta \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, \sqrt{2}] \\ z & = & 3 - 2r\sin(\theta), & \theta \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, \sqrt{2}] \end{array} \right.$$

3. Il suffit de calculer une normale par les deux mèthodes ; celle du gradient dans le cas de l'èquation cartèsienne $z - x = 2 - y^2 = 0$ et celle qui utilise les èquations paramètriques.
4. (a) Les èquations cartèsiennes de C sont $z = x^2 + y^2 etz + 2y = 1$. ($C$ est une courbe obtenue comme l'intersection de deux surfaces)

   (b) $M(x, y, z) \in C \Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{ccl} z & = & x^2 + y^2 \\ z + 2y & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccl} 1 - 2y & = & x^2 + y^2 \\ z + 2y & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccl} x^2 + (y+1)^2 & = & 2 \\ z + 2y & = & 1 \end{array} \right.$$

   L'èquation cartèsienne $x^2 + (y + 1)^2 = 1$ dècrit le cylindre d'axe $(x = 1, y = -1)$. Par consèquent les èquations paramètriques sont donnèes par :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} x & = & \sqrt{2}\cos(\theta), & \theta \in [0, 2\pi] \\ y & = & -1 + \sqrt{2}\sin(\theta), & \theta \in [0, 2\pi] \\ z & = & 3 - 2\sqrt{2}\sin(\theta), & \theta \in [0, 2\pi] \end{array} \right.$$

   (c) Soit $M_0 = M(x(\theta_0), y(\theta_0), z(\theta_0))$. Prenons, pour simplifier, $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, ce qui correspond à $M_0 = (1, 0, 1)$. Un vecteur tangent est donnè par

$$T(\theta_0) = (x'(\theta_0), y'(\theta_0), z'(\theta_0)) = (-1, 1, -2)$$