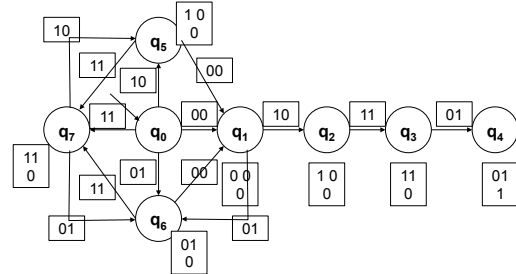


Réseaux de Petri Présentation informelle

Pavol BARGER
SY08 A11 cours 8

Automates



2

Limitation des automates

- La complexité des systèmes à événements discrets vient de :
 - la coopération : les automates décrivent des processus ayant un but commun
 - la compétition : les automates partagent des ressources
- Pseudo parallélisme - entrelacement (interleaving)
 - les événements sont tous ordonnés (ordre total), temps linéaire
- Parallélisme vrai
 - évolutions simultanées des processus, indépendance entre des horloges locales
 - les événements ne sont reliés que par des relations d'ordre partiel
 - problème de la composition parallèle
- Risque de blocage mortel, incohérence dans les communications

3

Réseaux de Petri

- Thèse de Carl Adam Petri en 1962 intitulée Communication entre automates.
 - *Kommunikation mit Automaten*
- Thèse à l'Université de Bonn et Darmstadt
- Actuellement professeur émérite à Hambourg



4

Idées à l'origine de RdP

- Décrire d'une façon unifiée les changements d'états internes entre automates
- Petri propose un graphe avec deux types de nœuds :
 - places
 - transitions

5

Une place RdP

- Inspiré d'un état de l'automate
- Un cercle ou une ellipse
- Mais une place n'est pas vraiment identique à un état d'un automate !

6

Une transition RdP

- Représentée par rectangle
 - extrapolation à un trait
 - extrapolation à un carré
- Rectangle peut être plein ou vide
 - possibilité d'une convention particulière

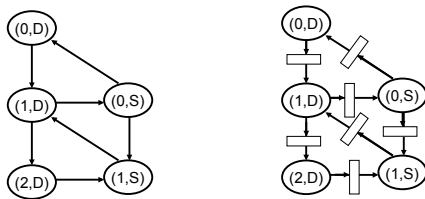
7

Un arc RdP

- Relie une place à une transition ou une transition à une place
 - jamais une place à une place ni une transition à une transition
- Toujours orientée
- Toujours étiquetée
 - étiquette par défaut : l'identité (ne s'écrit pas)

8

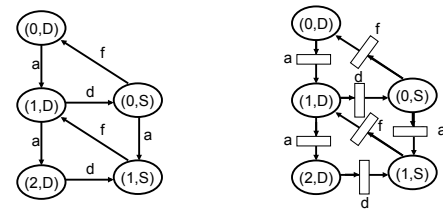
D'un automate vers un RdP



- Une transition sur chaque arc

9

D'un automate vers un RdP interprété



- Fonction d'interprétation I

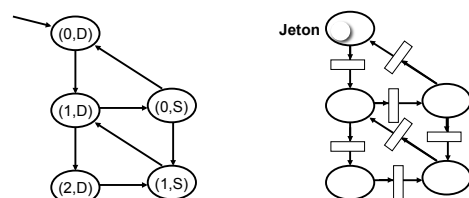
10

Statique vs dynamique

- Un automate est un modèle statique
 - on peut le réduire
 - on peut prouver des propriétés
 - il n'évolue pas
- Un RdP est un modèle dynamique
 - on le construit
 - puis le modèle évolue
- La différence c'est l'état initial

11

État initial



- L'état initial d'un RdP est une distribution de marques (ou jetons) sur l'ensemble de places

12

Un pas en avant

- L'évolution élémentaire d'un RdP s'appelle un franchissement ou un tir (angl : firing)
- Pour qu'un franchissement d'une transition puisse avoir lieu, il faut que la transition soit sensibilisée (ou validée)

13

Règles du franchissement

- Un seul franchissement à la fois
- La durée est nulle
 - indivisible
- Au franchissement :
 1. On enlève un jeton de chaque place en amont de la transition.
 2. On rajoute un jeton dans chaque place en aval de la transition.

14

Séquence de franchissement

- Séquence de plusieurs franchissements successifs.
- Attention : l'ordre d'événements est important !

15

L'état n'est pas une place

- Une place peut contenir 0, 1 ou plusieurs jetons.
 - un entier positif ou nul
- L'état d'un RdP est la distribution de jetons dans les places à un moment donné.

16

Exemple I

- Modélisez en RdP une file d'attente et un serveur. Le serveur peut servir un nombre quelconque de clients simultanément et la capacité de la file est infinie. Le service d'un nouveau client peut commencer même si le serveur sert déjà un autre client.

17

Exemple II

- Modélisez en RdP une file d'attente et un serveur. Le serveur peut servir au maximum un seul client. La capacité de la file est infinie.

18

Exemple III

- Modélisez en RdP une file d'attente et un serveur. Le serveur peut servir au maximum un seul client. La capacité de la file permet de stocker dans la file au maximum 3 clients.

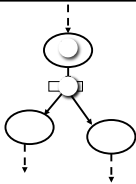
19

Exemple IV

- Modélisez en RdP deux files d'attente et un serveur. Le serveur peut servir au maximum un seul client. La capacité de la file F1 est 2 et celle de F2 est 3.

20

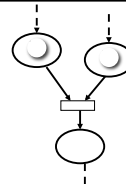
Quelques comportements types



- Départ synchronisé
 - exemple : une pomme coupée en deux

21

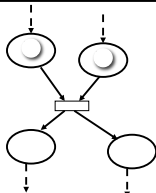
Quelques comportements types



- Synchronisation à l'arrivée
 - exemple : l'arrivée d'un login et d'un mot de passe

22

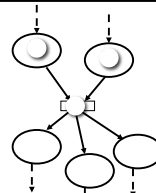
Quelques comportements types



- Synchronisation
 - exemple : travail collaboratif de deux personnes

23

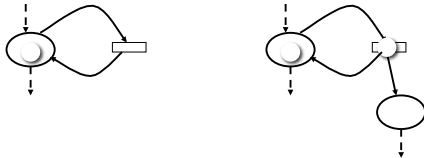
Quelques comportements types



- Synchronisation
 - exemple : travail collaboratif de deux personnes

24

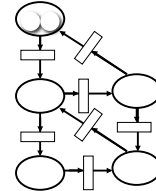
Quelques comportements types



25

Vous voyez double ?

- Que représente ce modèle ?
 - Deux automates indépendants modélisant le même système et fonctionnant en parallèle



26

Quelques schémas de base

- Partage de ressources
- Producteur/consommateur
 - avec un tampon illimité
 - avec un tampon limité

27

Dining philosophers

- Les philosophes sont assis autour d'une table. Ils mangent avec des baguettes. Chaque philosophe a besoin de deux baguettes pour manger. Une baguette est à sa gauche et il la partage avec son voisin de gauche. Et une est à sa droite et elle est partagée avec son voisin droit. Une fois prise, la baguette ne peut être posée qu'après avoir servie.

28

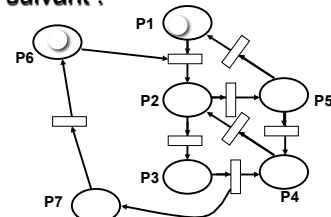
Dining philosophers modif

- Les philosophes sont assis autour d'une table. Ils mangent avec des baguettes. Chaque philosophe a besoin de deux baguettes pour manger. Une baguette est à sa gauche et il la partage avec son voisin de gauche. Et une est à sa droite et elle est partagée avec son voisin droit. Pour commencer à manger, le philosophe doit pouvoir prendre les deux baguettes.

29

D'un RdP vers un automate

- Donnez l'automate qui correspond à le RdP suivant :



30

Notion d'état dans un RdP

- On appelle l'état d'un RdP la distribution de jetons dans les places à un moment donné.

31

La semaine prochaine

- Présentation formelle de réseaux de Petri
- Cas particuliers
 - graphe d'états
 - graphe d'événements
- Propriétés
- Extensions et abréviations

32

Réseaux de Petri Présentation formelle

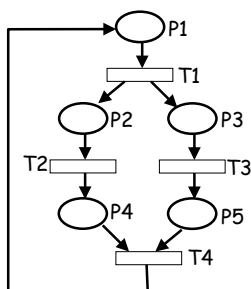
Pavol BARGER
SY08 A11 cours 8

Plan

- Définition
- Matrice d'incidence
- Vecteur de marquage
- Équation fondamentale
- Composantes conservatives
- Composante répétitives

34

Réseau de Petri

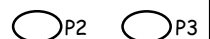


35

Constituants

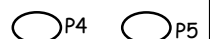
● Ensemble de places

- Fini
- Non vide



● Exemple

- $P = \{P1, P2, P3, P4, P5\}$



36

Constituants

● Ensemble de transitions

- Fini
- Non vide

T1

● Exemple

- $T = \{T1, T2, T3, T4\}$

T2 T3

● $P \cap T = \emptyset$!

T4

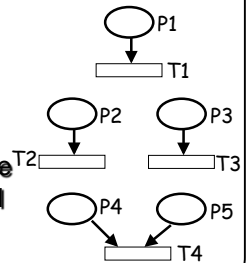
37

Constituants

● Application d'incidence avant

- Pré: $P \times T \rightarrow \{0, 1\}$

● Pré(P_i, T_j) est le poids de l'arc $P_i \rightarrow T_j$. (valeur 1 s'il existe, 0 sinon)



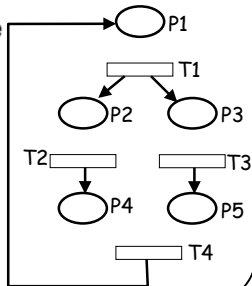
38

Constituants

● Application d'incidence arrière

- Post: $P \times T \rightarrow \{0, 1\}$

● Post(P_i, T_j) est le poids de l'arc $T_j \rightarrow P_i$. (valeur 1 s'il existe, 0 sinon)



39

Constituants

● Une transition-puit est une transition ayant une sortie vide.



● Une transition-source est une transition ayant une entrée vide.



40

Définition RdP

- Un Réseau de Petri places-transitions (RdP PT) R se définit par le quadruplet $(P, T, \text{Pré}, \text{Post})$, avec [Dia 01]:
 - $P = \{p_1, \dots, p_i, \dots, p_n\}$ un ensemble de places;
 - $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ un ensemble de transitions, avec $P \cap T = \emptyset$;
 - Pré: $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ une application d'incidence avant;
 - Post: $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ une application d'incidence arrière correspondant aux arcs :
 - Pré(p_i, t) contient la valeur entière n associée à l'arc allant de p_i à t ;
 - Post(p_i, t) contient la valeur entière n associée à l'arc allant de t à p_i ;

41

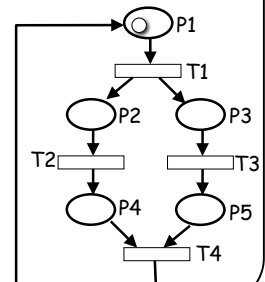
Constituants

● Marquage

- Jetons, marques
- Un jeton vaut un autre

● La position de jetons évolue

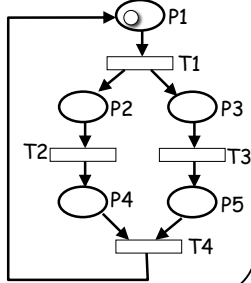
- RdP côté dynamique



42

Définition RdP marqué

- Un Réseau de Petri places-transitions marqué se définit par couple (R, m) dans lequel R est un réseau de Petri places-transitions et $m : P \rightarrow \mathbb{N}$ une application appelée marquage.



43

Représentation d'un RdP

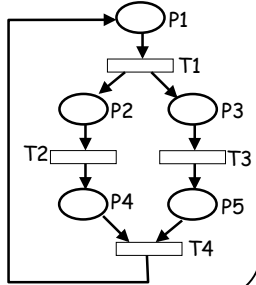
- Graphique
- Algébrique
 - matrice d'incidence
 - équation fondamentale

44

Matrice d'incidence avant

- Pré: $P \times T \rightarrow \{0, 1\}$
- W^-

	T1	T2	T3	T4
P1				
P2				
P3				
P4				
P5				

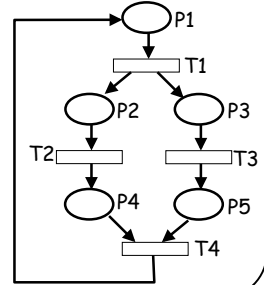


45

Matrice d'incidence arrière

- Post: $P \times T \rightarrow \{0, 1\}$
- W^+

	T1	T2	T3	T4
P1				
P2				
P3				
P4				
P5				

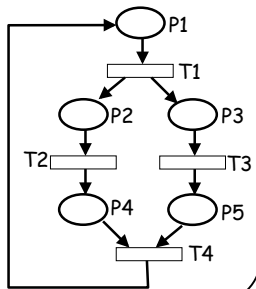


46

Matrice d'incidence

- complète
- $W = W^+ - W^-$

	T1	T2	T3	T4
P1				
P2				
P3				
P4				
P5				



47

RdP pur

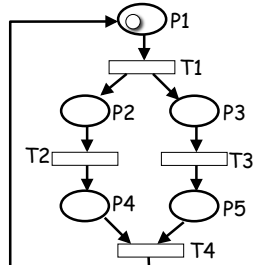
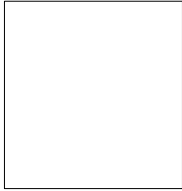
- Un RdP est pur si sa matrice d'incidence permet de reconstituer le RdP.

- Contre-exemple

48

Marquage

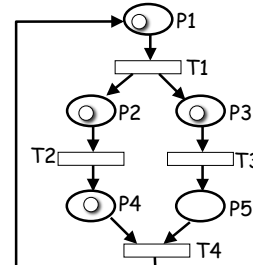
- vecteur M_i
- M_0 – marquage initial



49

Séquence de franchissement

- vecteur S
- chemin



50

Équation fondamentale

$$M_j = M_i + W \cdot S$$

51

Équation fondamentale

Dans notre exemple
 $M_2 = M_0 + W \cdot S$

		T1	T2	T3	T4
P1	1	-1	0	0	1
P2	0	1	-1	0	0
P3	0	1	0	-1	0
P4	0	0	1	0	-1
P5	0	0	0	1	-1

$$+ \quad$$

	T1	T2	T3	T4
T1	1			
T2	1			
T3	0			
T4	0			

$$* \quad$$

52

Équation fondamentale

$$M_j = M_i + W \cdot S$$

53

Remarques : matrice d'incidence

- Matrice d'incidence ne dépend pas du marquage.
 - exclusivement de la structure du RdP
- Elle ne peut pas exprimer un RdP non pur
 - dans ce cas, on est obligé de travailler avec la matrice d'incidence avant et la matrice d'incidence arrière

54

Remarques : séquence de franchissement

- Le chemin est représenté par un vecteur.
- Hors, on ne peut avoir qu'un seul franchissement à la fois.
- Par conséquent, il y a un ordre de franchissement pour chaque transition.
- Une fois le vecteur trouvé, il faut encore trouver l'ordre de franchissements.
 - Il peut y en avoir plusieurs.
- ex : à partir de M_0 tirer d'abords T_2 puis T_1

55

Équation fondamentale

$$M_j = M_i + W^*S$$

56

Composantes conservatives

- Un vecteur de pondération $F=(q_1, q_2, \dots, q_n)$
 - n – nombre de places
 - $q_i \geq 0$
- $P(F)$ est l'ensemble des places dont le q_i est > 0 .
 - $P(F)$ est donc un sous-ensemble de P

57

Composantes conservatives

- Définition :
 - B est une composante conservative si et seulement si il existe un vecteur de pondération F tel que $P(F) = B$ et $F^T W = 0$.
- Démonstration
 - $F^T M_j = F^T M_i + F^T W^* S$

58

Invariant de marquage

- Invariant de marquage : $F^T M_i$
- Explication
 - Le nombre de marques dans l'ensemble de places $P(F)$, pondéré par le vecteur F , est constant
- Exemple
 - $F=(1,1,0,1,0)$

59

Remarque

- Composante conservative et invariant de marquage sont des propriétés structurelles d'un RdP
- C'est-à-dire qu'ils ne dépendent pas du marquage.

60

Composante conservative

- **Propriété**

- Soient $P(F) = \{P_1, P_2, \dots, P_r\}$ une composante conservative, et $F = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ le vecteur de pondération correspondant. Toutes les places P_i de $P(F)$ sont alors bornées, et l'on a $M(P_i) \leq F^T \cdot M_0 / q_i$.

61

Composantes répétitives

- Soit D un sous-ensemble non-vide de transitions de l'ensemble de toutes les transitions T .
- L'ensemble D est une composante répétitive (stationnaire) si et seulement s'il existe une séquence de franchissements S telle que $T(S) = D$ et $W^*S = 0$.
- D est une composante répétitive croissante si $W^*S > 0$.

62

Remarques

- Composante répétitive est indépendante du marquage.
- Pour que D soit une composante répétitive, il faut impérativement que S existe.

63

La semaine prochaine

- Propriétés
- Conflits
- Structures particulières
- Réductions
- Abréviations, extensions
- RdP généralisés

64