Exercices du chapitre V avec corrigé succinct

Exercice V.1 Ch5-exercice1

– Montrer que $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle\ > 0$ pour tout $\vec{x} \neq \vec{0}$
– Montrer que $\langle \vec{x}, \vec{0} \rangle = \langle \vec{0}, \vec{x} \rangle = 0$ et que donc, en particulier, $\vec{x} = \vec{0} \Longrightarrow\ \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle\ = 0$.

Solution :

– Dans la définition on a

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

donc en utilisant la contraposée :

$$\vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \neq 0$$

mais puisque

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$$

on a donc :

$$\vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0.$$

– La bilinéarité et la symétrie entraînent

$$\langle \vec{x}, \vec{0} \rangle = \langle \vec{0}, \vec{x} \rangle = 0$$

(revoir comment on a démontré que $u(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ lorsque u est linéaire).

Exercice V.2 Ch5-exercice2

Montrer que si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sont des réels strictement positifs, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i y_i$ définit bien un produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$. Que se passe-t-il si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ ne sont plus des réels strictement positifs ?

Solution :

– On vérifie la bilinéarité.
– On a
  – $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i^2 \geq 0$ puisque $\gamma_i > 0$ et $x_i^2 \geq 0$
  – $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \gamma_i x_i^2 = 0\ \forall i = 1, \ldots, n \Longleftrightarrow x_i = 0\ \forall i = 1, \ldots, n \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

  Si les γ_i ne sont pas strictement positifs, prenons par exemple

$$n = 2, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = -1,$$

on a alors

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = x_1^2 - x_2^2$$

donc $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ n'est pas positif ou nul pour tout $\vec{x}$, on peut prendre pour s'en convaincre

$$x_1 = 0, x_2 = 1.$$

Si tous les γ_i sont positifs ou nuls , par exemple

$$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0,$$

il n'est plus possible d'avoir $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$, mais on peut avoir $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ avec $\vec{x} \neq \vec{0}$, prendre par exemple

$$x_1 = 0, x_2 = 1.$$

D'une façon plus générale quand les γ_i sont seulement positifs ou nuls on peut avoir $\gamma_i x_i^2 = 0$ sans que $x_i = 0$.

Exercice V.3 Ch5-exercice3

Montrer la proposition :
Si $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ alors $A^T \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ vérifie :

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall y \in \mathbb{R}^m \tag{1.1}$$

(le poduit scalaire du membre de gauche est dans $\mathbb{R}^m$ et celui de droite dans $\mathbb{R}^n$.)

Solution : On applique la définition $\langle x, y \rangle = x^T y$, on obtient :

$$\langle Ax, y \rangle = (Ax)^T y = x^T A^T y = \langle x, A^T y \rangle.$$

Exercice V.4 Ch5-exercice4

Dans l'espace, le produit scalaire usuel est défini par $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos\theta$ où θ est l'angle entre les 2 vecteurs . Vérifier l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans ce cas particulier.

Solution : On obtient $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 cos^2\theta \leq \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$.
Or $\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle, \|\vec{y}\|^2 = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$.
Ce qui termine de démontrer la propriété.

Exercice V.5 Ch5-exercice5

Montrer que dans $\mathbb{R}^n$, $\max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les composantes de x, définit une norme. On appelle cette norme la norme infinie et on la note $\|.\|_\infty$

Solution :
- $\max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 0 \Longleftrightarrow x_i = 0 \ \forall i = 1, \ldots, n \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
- $\max\limits_{1 \leq i \leq n} |\alpha x_i| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} (|\alpha| |x_i|) = |\alpha| \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$
- $\max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i + y_i| \leq \max\limits_{1 \leq i \leq n} (|x_i| + |y_i|) \leq \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| + \max\limits_{1 \leq i \leq n} |y_i|$

Les propriétés d'une norme sont donc vérifiées.

Exercice V.6 Ch5-exercice6

Vérifier que $F^\perp$ est bien un sous-espace vectoriel et montrer que $F \cap F^\perp = \{\vec{0}\}$

Solution :

- On vérifie que si $\vec{x}_1 \in F^\perp, \vec{x}_2 \in F^\perp, \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 \in F^\perp$, $F^\perp$ est stable donc est un sous espace vectoriel.
- $\left.\begin{array}{l} \vec{x} \in F^\perp \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \ \forall \vec{y} \in F \\ \vec{x} \in F \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$ donc $F \cap F^\perp = \{\vec{0}\}$

Exercice V.7 Ch5-exercice7

Montrer qu'une famille de vecteurs orthogonaux non nuls est une famille libre.

Solution : Soit $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$ une famille orthogonale, supposons que

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_p\vec{x}_p = \vec{0},$$

alors en effectuant le produit scalaire avec $\vec{x}_i$ on a :

$$\langle \vec{x}_i, \alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_p\vec{x}_p \rangle = 0,$$

en utilisant la bilinéarité on obtient

$$\alpha_1\langle \vec{x}_i, \vec{x}_1 \rangle + \alpha_2\langle \vec{x}_i, \vec{x}_2 \rangle + \ldots + \alpha_p\langle \vec{x}_i, \vec{x}_p \rangle = 0,$$

puisque la famille est orthogonale
$\langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = 0$ pour $j \neq i$, donc on obtient

$$\alpha_i\langle \vec{x}_i, \vec{x}_i \rangle = 0$$

or $\vec{x}_i \neq \vec{0}$ donc $\langle \vec{x}_i, \vec{x}_i \rangle \neq 0$ donc $\alpha_i = 0$ ce que l'on vient de faire est valable $\forall i = 1, \ldots, p$ donc la famille est libre.

Exercice V.8 Ch5-exercice8

Utiliser le procédé d'orthogonalisation de Schmidt pour construire la famille $\mathcal{Y}$ associée à la famille $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ avec $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solution :

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta = -\langle \vec{x}_2, \vec{y}_1 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\hat{\vec{y}}_2 = \vec{x}_2 + \beta\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\hat{y}}_3 = \vec{x}_3 + \beta_1 \vec{y}_1 + \beta_2 \vec{y}_2, \text{ avec } \beta_1 = -\langle \vec{x}_3, \vec{y}_1 \rangle = -\sqrt{2},\ \beta_2 = -\langle \vec{x}_3, \vec{y}_2 \rangle = -\frac{2}{\sqrt{6}},$$

$$\vec{\hat{y}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\vec{y}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Pour obtenir $\vec{y}_3$ on peut écrire $\vec{y}_3 = \dfrac{1}{\|\vec{\hat{y}}_3\|} \vec{\hat{y}}_3$

où ce qui est équivalent mais plus facile à calculer

$\vec{y}_3 = \dfrac{1}{\|\vec{y^*}_3\|} \vec{y^*}_3,$ avec $\vec{y^*}_3 = 3\vec{\hat{y}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice V.9 Ch5-exercice9

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\vec{y} = (1, -2, 1)$, $F = \text{vect}\langle \vec{y} \rangle$.

Alors on a vu que $F^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$. $F^\perp$ est donc un plan dont $(2, 1, 0)$ et $(1, 0, -1)$ constituent par exemple une base. Montrer directement dans ce cas particulier que $E = F \oplus F^\perp$.

Solution : Si on note $\vec{x}_1 = (2, 1, 0), \vec{x}_2 = (1, 0, -1)$, alors $\{\vec{y}, \vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On peut alors montrer facilement que $F \cap F^\perp = \{\vec{0}\}$ et que $\mathbb{R}^3 = F + F^\perp$.

Exercice V.10 Ch5-exercice10

Montrer que la matrice Q

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

est orthogonale. Quelle est l'inverse de Q ? Que vaut le déterminant de Q ?

Solution : On vérifie que

$$(Q_1)^T Q_1 = 1, (Q_1)^T Q_2 = 0, (Q_1)^T Q_3 = 0, (Q_1)^T Q_4 = 0,$$

$$(Q_2)^T Q_2 = 1, (Q_2)^T Q_3 = 0, (Q_2)^T Q_4 = 0,$$
$$(Q_3)^T Q_3 = 1, (Q_3)^T Q_4 = 0,$$
$$(Q_4)^T Q_4 = 1$$

Donc $Q^T Q = I$ donc $Q^{-1} = Q^T$.
On calcule $\det Q = -1$.

Exercice V.11 Ch5-exercice11

On définit sur $\mathbb{R}^3$ le produit scalaire usuel. Soit $\mathcal{B}$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$, montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée. Montrer que la base $\mathcal{B}'$ définie par

$$\mathcal{B}' = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) , \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) , \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) \right\}$$

est une base orthonormée. Que vaut P matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Vérifier que $PP^T = P^T P = I$

Solution : On vérifie que :
$\|\vec{e}_1\| = 1, \|\vec{e}_2\| = 1, \|\vec{e}_3\| = 1, \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle = 0, \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3\rangle = 0, \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3\rangle = 0,$
$\|\vec{e'}_1\| = 1, \|\vec{e'}_2\| = 1, \|\vec{e'}_3\| = 1, \langle \vec{e'}_1, \vec{e'}_2\rangle = 0, \langle \vec{e'}_1, \vec{e'}_3\rangle = 0, \langle \vec{e'}_2, \vec{e'}_3\rangle = 0$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

lorsque l'on effectue $P^T P$ on effectue les mêmes calculs que pour calculer les normes $\|\vec{e'}_1\|, \ldots$ et les produits scalaires $\langle \vec{e'}_1, \vec{e'}_3\rangle, \ldots$, on trouve donc que $P^T P = I$.
En effectuant PP^T on obtient à nouveau $PP^T = I$, c'est normal car
$P^T P = I \Rightarrow P^{-1} = P^T$ et donc $PP^T = PP^{-1} = I$.

Exercice V.12 Ch5-exercice12

Quel est l'inverse de la matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} ?$$

Que vaut son déterminant ?

Solution : C'est la matrice P de l'exercice précédent, c'est une matrice de passage entre 2 bases orthonormées, elle est donc orthogonale donc $P^{-1} = P^T$, et on calcule $\det P = 1$, (en fait on peut montrer que lorsque la base est orthonormée directe $\vec{e'}_3 = \vec{e'}_1 \wedge \vec{e'}_2$, alors $\det P = 1,$ sinon $\det P = -1$)

Exercice V.13 Ch5-exercice13

Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on définit la base

$$\mathcal{B}' = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \ , \ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \ , \ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

on note x'_1, x'_2, etc les composantes de x et y dans cette nouvelle base, calculer

$$(x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2$$

Puis

$$x'_1 y'_1 + x'_2 y'_2 + x'_3 y'_3$$

Solution : On a $x' = P^{-1}x = P^T x$ d'où

$$x'_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\sqrt{3}}, x'_2 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, x'_3 = \frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{\sqrt{6}}.$$

On a donc $\begin{cases} (x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 \\ x'_1 y'_1 + x'_2 y'_2 + x'_3 y'_3 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \end{cases}$

Ceci était prévisible puisque $x' = Qx$, or $Q = P^T$ est orthogonale, donc

$$(x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2 = \|Qx\|^2 = x^T Q^T Q x = x^T x = \|x\|^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2,$$

$$x'_1 y'_1 + x'_2 y'_2 + x'_3 y'_3 = \langle Qx, Qy \rangle = y^T Q^T Q x = \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Exercice V.14 Ch5-exercice14

Soit A une matrice symétrique, λ_1, λ_2 2 valeurs propres réelles distinctes, on note y_1, y_2 2 vecteurs propres réels associés.

1. Exprimer $\langle Ay_1, y_2 \rangle$ à l'aide de $\langle y_1, y_2 \rangle$.
2. Exprimer $\langle y_1, Ay_2 \rangle$ à l'aide de $\langle y_1, y_2 \rangle$.
3. En déduire que $\langle y_1, y_2 \rangle$=0.

Solution :

1. $\langle Ay_1, y_2 \rangle = \lambda_1 \langle y_1, y_2 \rangle$.
2. $\langle y_1, Ay_2 \rangle = \lambda_2 \langle y_1, y_2 \rangle$.
3. Or $\langle Ay_1, y_2 \rangle = \langle y_1, A^T y_2 \rangle = \langle y_1, Ay_2 \rangle$.
   Donc
   $$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle y_1, y_2 \rangle = 0.$$
   Puisque
   $$\lambda_1 \neq \lambda_2,$$
   on obtient
   $$\langle y_1, y_2 \rangle = 0.$$

Exercice V.15 Ch5-exercice15

Calculer les valeurs propres et déterminer une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Solution : det $(sI - A) = (s-6)^2 s$, on a donc 2 valeurs propres (réelles) $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 6$. On calcule les vecteurs propres :

les composantes de Y_0 doivent vérifier $y_1 = y_2 = y_3$; d'où un vecteur propre normé possible : $Y_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

les composantes de Y_1 doivent vérifier $y_1 + y_2 + y_3 = 0$; d'où :

$$Y_1 = y_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on obtient 2 vecteurs propres qui constituent une base de V_{λ_1} à savoir

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ces 2 vecteurs ne sont pas normés, ils ne sont pas orthogonaux entre eux, en revanche X_1 et Y_0 sont orthogonaux, il en est de même pour X_2 et Y_0. On va utiliser le procédé d'orthogonalisation de Schmidt pour construire à partir de X_1 et X_2 , 2 vecteurs orthonormés Y_1^* et Y_2^* . On peut remarquer en effet qu'avec ce procédé on reste dans l'espace vectoriel V_{λ_1} donc que les vecteurs Y_1^*, Y_2^* sont également des vecteurs propres associés à λ_1.

$$Y_1^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{Y_2} = X_2 - \langle X_2, Y_1^* \rangle Y_1^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$Y_2^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

On obtient donc la base orthonormée de vecteurs propres :

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\}$$

le premier vecteur est associé à λ_0, les 2 derniers sont associés à λ_1.

Exercice V.16 Ch5-exercice16

Montrer que si une matrice est symétrique définie positive, ses termes diagonaux sont strictement positifs (calculer $x^T Ax$ avec un vecteur x judicieusement choisi). Montrer que si une matrice est symétrique semi-définie positive, ses termes diagonaux sont positifs ou nuls.

Solution : Choisissez successivement pour x les vecteurs de la base canonique, on a alors $e_i^T Ae_i = a_{ii}$, d'où la conclusion.

Exercice V.17 Ch5-exercice17

Démontrer la proposition suivante :
Une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A symétrique soit semi-définie positive est que toutes ses valeurs propres soient positives ou nulles.

Solution : On a : $x^T Ax \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n \iff \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\tilde{x}_i)^2 \geq 0 \; \forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$,

donc si toutes les valeurs propres sont positives ou nulles, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\tilde{x}_i)^2 \geq 0$$

donc $x^T Ax \geq 0$ donc la matrice est symétrique semi-définie positive.
Réciproquement si la matrice est symétrique semi-définie positive, on a
$x^T Ax \geq 0 \; \forall x$ donc

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\tilde{x}_i)^2 \geq 0 \; \forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^n,$$

donc en particulier si on choisit $\tilde{x}$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on obtient $\lambda_1 \geq 0$. De même on obtient que chacun des λ_i est positif ou nul, en choisissant pour $\tilde{x}$ chacun des vecteurs de la base canonique.

Exercice V.18 Ch5-exercice18

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

est-elle définie positive ? semi-définie positive ? Calculer $x^T Ax$.

Solution : La matrice est semi-définie positive puisque toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles. Elle n'est pas définie positive puisque ses valeurs propres ne sont pas strictement positives.

$$x^T Ax = 4(x_1)^2 + 4(x_2)^2 + 4(x_3)^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

Exercice V.19 Ch5-exercice19

Montrer qu'une matrice symétrique définie positive est inversible. Le résultat est-il toujours valable si la matrice est semi-définie positive ? Si oui démontrez-le, si non trouvez un contre exemple.

Solution : Si A est définie positive, ses valeurs propres sont strictement positives donc 0 n'est pas valeur propre, donc A est inversible.
Si on définit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, cette matrice est semi-définie positive puisque ses valeurs propres sont positives ou nulles, mais elle n'est pas inversible.

Exercice V.20 Ch5-exercice20

- On définit
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 7 & 11 \\ 5 & 11 & 13 \end{pmatrix},$$
calculer $q(x) = x^T Ax$ et montrer que q est une forme quadratique.
- On définit la forme quadratique $q(x) = 4x_1^2 + 5x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 9x_1x_3 - 15x_2x_3$, déterminer une matrice symétrique A telle que $q(x) = x^T Ax$.

Solution :
- $q(x) = 3(x_1)^2 + 7(x_2)^2 + 13(x_3)^2 - 4x_1x_2 + 10x_1x_3 + 22x_2x_3$
- $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & \frac{9}{2} \\ -2 & 5 & -\frac{15}{2} \\ \frac{9}{2} & -\frac{15}{2} & -7 \end{pmatrix}$

Exercice V.21 Ch5-exercice21

Soit $x \in \mathbb{R}^3$, on définit les formes quadratiques suivantes :
- $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
- $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$
- $q(x) = x_1^2 + x_3^2$

Pour chacune d'entre-elles, dire si elle est définie-positive, semi-définie positive. Donner la matrice A associée dans chacun des cas.

Solution :
- $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0 \ \forall x$.
D'autre part si $q(x) = 0$ alors $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
C'est une forme quadratique définie positive.
- $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$.
Si $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 1, q(x) = -1$, donc q n'est pas définie positive ni semi-définie positive
- $q(x) = x_1^2 + x_3^2 \geq 0 \ \forall x$. Donc q est semi-définie positive,
par contre si $x_1 = x_3 = 0, x_2 = 1, q(x) = 0$ alors que $x \neq 0$ donc q n'est pas définie positive.

Les matrices associées sont égales dans chacun des cas à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

. Ces 3 matrices sont diagonales, leurs valeurs propres sont donc

$$\{1,1,1\}, \{1,1,-1\}, \{1,0,1\},$$

on retrouve la caractérisation de matrice définie positive ou semi-définie positive à l'aide du signe des valeurs propres.

Exercice V.22 Ch5-exercice22

Les formes quadratiques suivantes sont-elle définies positives ? semi-définies positives ? On utilisera la décomposition de Gauss.

- $q(x) = x_1^2 + 28x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$,
- $q(x) = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 4x_3x_4$,
- $q(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.

Solution :

- $q(x) = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + (x_3 + 5x_2)^2 + 2(x_2)^2$
  il est immédiat de voir que $q(x) \geq 0 \; \forall x$: c'est une somme de carrés.
  De plus si $q(x) = 0$ alors

  $$x_2 = 0, x_3 + 5x_2 = 0, x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

  donc

  $$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

  Donc q est définie positive.
- $q(x) = (x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4)^2 - (x_1 - x_2 + 3x_4)^2 - 4(x_3 - x_4)^2 + 12(x_4)^2$,
  si l'on choisit

  $$x_3 = x_4 + 1, x_4 = 0, x_1 - x_2 + 3x_4 = 0, x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$$

  (ce qui est obtenu par exemple pour

  $$x_3 = 1, x_4 = 0, x_1 = -1, x_2 = -1),$$

  on obtient $q(x) = -4$ donc la forme quadratique n'est pas définie positive, ni semi-définie positive.
  On pourrait montrer de façon générale que pour que q forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ soit définie positive, il faut et il suffit que la réduction conduise à **n** carrés affectés de coefficients strictement positifs. Pour que q soit semi-définie positive, il faut et il suffit que la réduction conduise à des carrés affectés de coefficients positifs. Ceci est lié bien sûr aux valeurs propres de la matrice A associée.

– On a vu que la matrice associée à q était semi-définie positive donc q est semi-définie positive.
  Si on appliquait la réduction de Gauss on obtiendrait :

$$q(x) = 4(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3)^2 + 3(x_2 - x_3)^2.$$

  On a donc $q(x) \geq 0 \; \forall x$, mais si on prend

$$\begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases}$$

  alors $q(x) = 0$ (ce cas est obtenu par exemple pour $x_1 = x_2 = x_3 = 1$). On retrouve bien que q est seulement semi-définie positive.

Exercice V.23 Ch5-exercice23

Montrer que si ϕ est sesquilinéaire hermitienne alors $\phi(\vec{x}, \vec{x}) \in \mathbb{R}$.

Solution : Immédiat : $\phi(\vec{x}, \vec{x}) = \overline{\phi(\vec{x}, \vec{x})}$ donc $\phi(\vec{x}, \vec{x}) \in \mathbb{R}$.
