MT22-Fonctions de plusieurs variables et applications

Chapitre 4 : Intégrale double

ÉQUIPE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

UTC-UTT

Sommaire

Chapitre IV
Intégrale double

IV.1 Construction

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Motivation

L'intégrale simple d'une fonction d'une variable nous permet d'évaluer l'aire d'une partie du plan que délimite sa courbe représentative et des axes. Pour une fonction de deux variables, il s'agit de construire une notion qui permet de mesurer le volume d'une partie de l'espace délimitée par sa surface représentative, le plan des variables x et y et un cylindre qui correspond à un ensemble D borné dans $\mathbb{R}^2$ (cf. figure IV.1.1).

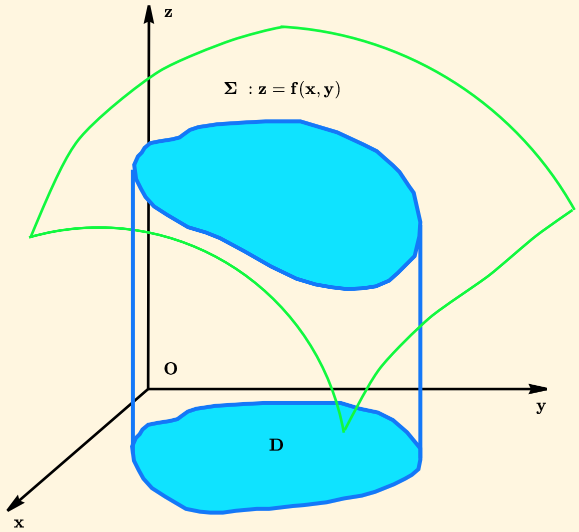


FIG. IV.1.1 – Volume à évaluer

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Aire d'un domaine plan

On se pose le problème de la définition de l'aire d'un ensemble D inclus dans $\mathbb{R}^2$: que faut-il supposer sur D pour que l'on puisse calculer son *aire* ?

Définition IV.1.1 *On dira qu'un ensemble D de $\mathbb{R}^2$ est **borné** s'il existe un rectangle $R = [a,b] \times [c,d]$ tel que $D \subset R$ (a,b,c et d sont des valeurs finies !).*

Lorsque l'on se donne un ensemble borné D dans $\mathbb{R}^2$, on peut se fixer un rectangle R tel que $D \subset R$ une fois pour toute, éventuellement de manière optimale comme sur la figure IV.1.2.

On découpe alors ce rectangle par le quadrillage suivant, associé à un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}$$
$$y_k = c + k\frac{d-c}{n}$$

pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ et on quadrille le rectangle R et l'ensemble D en traçant les parallèles aux axes d'équations $x = x_k$ et $y = y_k$.

Définition IV.1.2 *Pour n donné, on note D_n^+ l'ensemble obtenu en prenant tous les rectangles du quadrillage ayant au moins un point commun avec D, $D \subset D_n^+$. On note D_n^- l'ensemble obtenu en prenant tous les rectangles du quadrillage entièrement contenus dans D, $D_n^- \subset D$.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

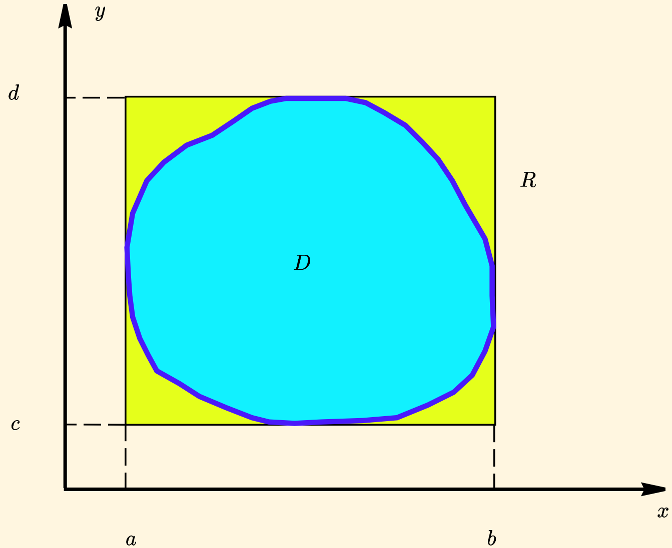


FIG. IV.1.2 – Choix d'un rectangle

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Aire d'un domaine plan

On définit facilement l'*aire* de D_n^+ et celle de D_n^- en faisant la somme des aires des rectangles les formant, notons $\mathcal{A}_n^+$ et $\mathcal{A}_n^-$ ces aires, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \mathcal{A}_n^- \leq \mathcal{A}_n^+ \leq (b-a)(d-c)$$

Pour raffiner le quadrillage obtenu, on peut faire augmenter n, et en particulier, diviser en quatre chaque rectangle en passant de n à $2n$, on a alors (voir les figures IV.1.3 et IV.1.4), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{A}_{2n}^- \geq \mathcal{A}_n^-$$

$$\mathcal{A}_{2n}^+ \leq \mathcal{A}_n^+$$

ce qui précède permet d'obtenir des suites $(u_p) = \left(\mathcal{A}_{2^p}^-\right)$ et $(v_p) = \left(\mathcal{A}_{2^p}^+\right)$ respectivement croissante et décroissante, toutes les deux bornées, ce qui assure leur convergence.
Le seul problème est que leurs limites ne sont pas forcément les mêmes, d'où la :

Définition IV.1.3 *On dira que la partie D de $\mathbb{R}^2$ est **quarrable** si :*

$$\lim_{p\to+\infty} u_p = \lim_{p\to+\infty} v_p$$

*On définit alors l'**aire** de D, notée $\mathcal{A}(\mathcal{D})$, comme étant la limite commune des deux suites.*

Remarque IV.1.1 *La frontière d'un ensemble D est l'ensemble noté ∂D des points M pour lesquels toute boule ouverte centrée en M contient à la fois des points de D et des points qui ne sont pas dans D.*

Un ensemble quarrable peut aussi être vu de la manière suivante :
c'est un ensemble dont la frontière est d'aire nulle, c'est-à-dire, tel que les suites (u_p) et (v_p) considérée avec la frontière de D (et non avec l'ensemble D) tendent toutes les deux vers O (en fait, dans ce cas la suite (u_p) est identiquement nulle).

Ce problème ayant été résolu, on se contentera dans la pratique de considérer des ensembles bornés D limités par des courbes *cartésienne paramétrique* régulières (définies par des fonctions $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^1$ par morceaux), dont on admettra qu'ils sont quarrables.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

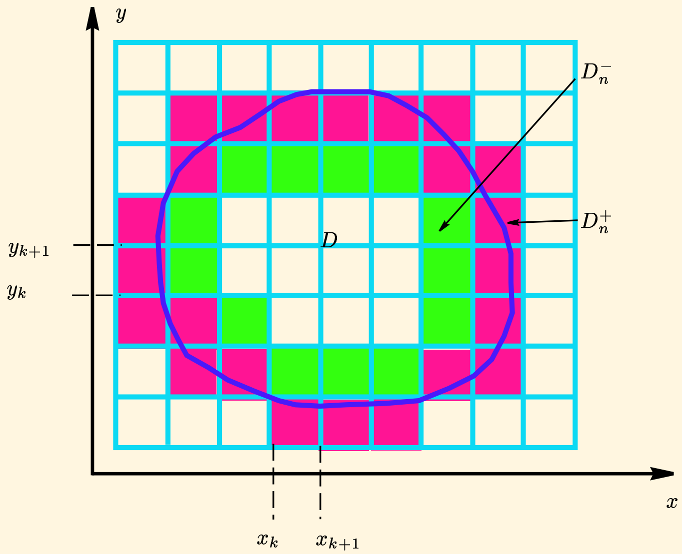


FIG. IV.1.3 – Raffinement progressif du quadrillage

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

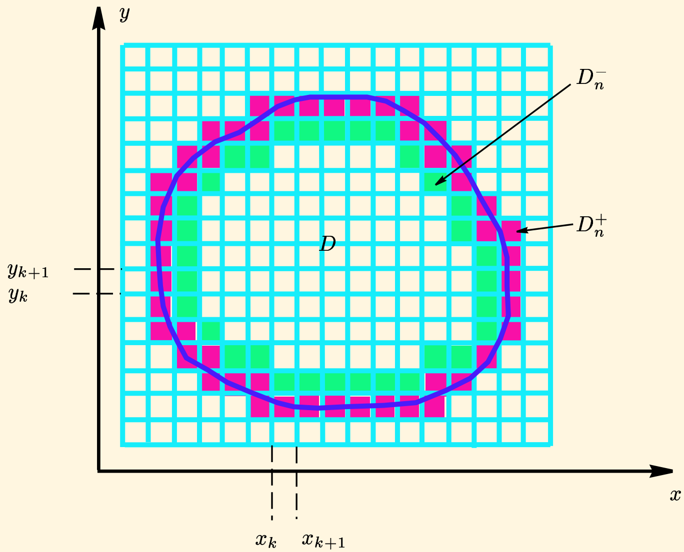


FIG. IV.1.4 – Raffinement progressif du quadrillage

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Sommes de Riemann

On considère une partie quarrable D de $\mathbb{R}^2$ et un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ correspondant. Soit f une fonction définie et *bornée* sur D.
On *prolonge* f à l'*extérieur* de D en posant :

$$f(x, y) = 0 \text{ pour } (x, y) \in R \setminus D$$

puis :

$$M = \sup_{(x,y)\in R} f(x, y) \text{ et } m = \inf_{(x,y)\in R} f(x, y)$$

(M et m sont des nombres finis puisque f est bornée sur D, donc également sur R)

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$:

$$m_{i,j} = \inf_{x_i \le x \le x_{i+1}, y_j \le y \le y_{j+1}} f(x, y)$$

$$M_{i,j} = \sup_{x_i \le x \le x_{i+1}, y_j \le y \le y_{j+1}} f(x, y)$$

On peut constater que $m_{i,j} = M_{i,j} = 0$ si le rectangle correspondant est à l'extérieur de D.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Définition IV.1.4 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :*

$$s_n(f) = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} m_{i,j}$$

$$S_n(f) = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} M_{i,j}$$

*que l'on peut appeler **sommes de Riemann** associées au quadrillage d'ordre n considéré et à la fonction f.*

Ces sommes peuvent s'interpréter comme des sommes de volumes de parallélépipèdes situés en dessous de la surface représentant f pour $s_n(f)$ et au dessus pour $S_n(f)$: le facteur $\frac{(b-a)(d-c)}{n^2}$ représente l'aire des rectangles du quadrillage qui constituent les bases de ces parallélépipèdes dont les hauteurs sont $m_{i,j}$ pour $s_n(f)$, $M_{i,j}$ pour $S_n(f)$ (cf. figure IV.1.5).

Proposition IV.1.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$m(b-a)(d-c) \le s_n(f) \le S_n(f) \le M(b-a)(d-c)$$

En effet, on a :

$$\forall i,j \quad m \le m_{i,j} \le M_{i,j} \le M$$

d'où

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

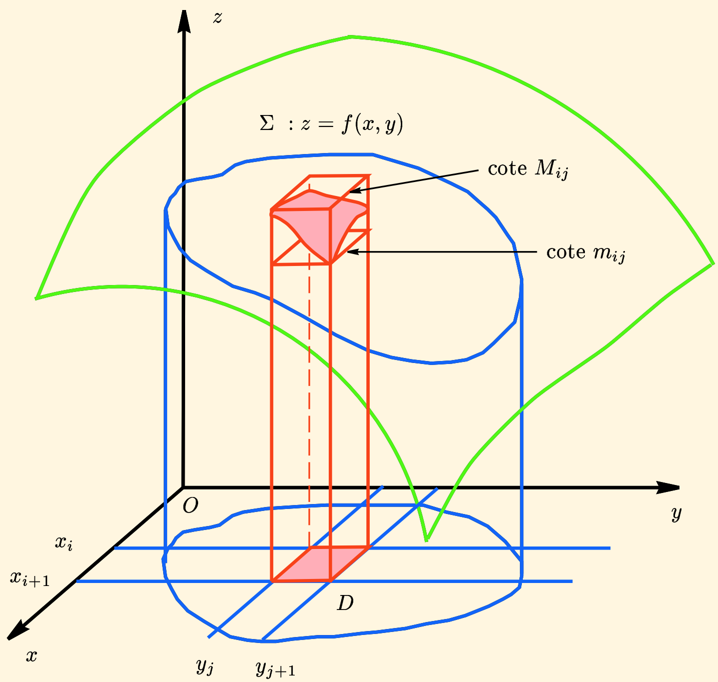


FIG. IV.1.5 – Interprétation des sommes de Riemann

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$$\begin{aligned}\forall i,j \quad m\frac{(b-a)(d-c)}{n^2} &\leq m_{i,j}\frac{(b-a)(d-c)}{n^2}\\ &\leq M_{i,j}\frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \leq M\frac{(b-a)(d-c)}{n^2}\end{aligned}$$

En faisant la somme pour les n^2 rectangles du quadrillage, on obtient :

$$m(b-a)(d-c) \leq s_n(f) \leq S_n(f) \leq M(b-a)(d-c)$$

Soient les suites (u'_p) et (v'_p), définies par :

$$u'_p = s_{2^p}(f) \text{ et } v'_p = S_{2^p}(f) \text{ pour } p \in \mathbb{N}$$

Proposition IV.1.2 *Sous les hypothèses précédentes faites sur f et D, (u'_p) et (v'_p) sont des suites convergentes.*

Il est facile de voir que ces suites sont bornées, d'après la proposition précédente ; il est un peu plus délicat de voir qu'elles sont respectivement *croissante* et *décroissante*.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Intégrale double

Exercices :
Exercice A.1.1

Définition IV.1.5 *On dit que la fonction f est* ***intégrable*** *sur la partie quarrable D de $\mathbb{R}^2$ si on a l'égalité des limites :*

$$\lim_{p\to+\infty} s_{2^p}(f) = \lim_{p\to+\infty} S_{2^p}(f)$$

où $s_{2^p}(f)$ et $S_{2^p}(f)$ sont les sommes de Riemann associées à un quadrillage d'ordre 2^p adapté à l'ensemble D. Cette limite est appelée ***intégrale double*** *de f sur D et notée :*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

Ce nombre évalue, lorsque f est positive sur D, le *volume* de la partie de $\mathbb{R}^3$ délimitée par le plan (xOy), la surface Σ d'équation $z = f(x,y)$ et les droites parallèles à (Oz) s'appuyant sur le contour de D (cf. figure IV.1.1)

Proposition IV.1.3 *Si D est une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction* ***continue et bornée*** *sur D, alors f est intégrable sur D.*

Remarque IV.1.2 *Les sommes de Riemann évoquées précédemment dans les limites définissant l'intégrale double permettent un calcul approché de la valeur de celle-ci, comme dans le cas de l'intégrale simple.*

Un cas que l'on rencontrera fréquemment est celui d'une fonction f définie et continue sur un ensemble *fermé* et borné D, l' intégrabilité de f est alors acquise.

IV.2 Propriétés de l'intégrale double

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Propriétés élémentaires

On considère, dans ce qui suit, un ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ fermé et quarrable.

Proposition IV.2.1 *Soient f et g des fonctions continues, donc intégrables, sur D, alors :*

1.

$$\int\int_D [f(x,y) + g(x,y)]dxdy = \int\int_D f(x,y)dxdy + \int\int_D g(x,y)dxdy$$

2.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \int\int_D \lambda f(x,y)dxdy = \lambda \int\int_D f(x,y)dxdy$$

On peut prouver cela en utilisant les notions vues dans la construction de l'intégrale, car on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n(f+g) \leq S_n(f) + S_n(g)$$

$$s_n(f+g) \geq s_n(f) + s_n(g)$$

avec les notations du paragraphe IV.1, on réalise alors un passage à la limite en vertu de la définition IV.1.5.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Propriétés élémentaires

Proposition IV.2.2 *Soient f et g des fonctions continues, donc intégrables, sur D, telles que :*

$$\forall (x,y) \in D \quad f(x,y) \leq g(x,y)$$

alors

$$\int\int_D f(x,y)dxdy \leq \int\int_D g(x,y)dxdy$$

On peut là-encore utiliser les sommes de Riemann pour prouver cela.
On voit ici que l'intégrale double d'une fonction *positive* sur D est un nombre *positif.*

Remarque IV.2.1 *Si on considère la fonction $f : (x,y) \longmapsto 1$ sur l'ensemble D, on a, avec les notations du paragraphe IV.1 :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n(f) = \mathcal{A}_n^+$$

d'où

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_D dxdy = \lim_{p\to+\infty} \mathcal{A}_{2^p}^+ = \mathcal{A}(D)$$

Cela revient en effet à calculer le volume d'un cylindre de hauteur 1 formé sur D, par exemple :

$$\int\int_{[a,b]\times[c,d]} dxdy = (b-a)(d-c) \text{ avec } a \leq b, c \leq d$$

qui est l'aire du rectangle de base.

Propriétés moins élémentaires

Exercices :
Exercice A.1.2

Proposition IV.2.3 *Soit f une fonction continue donc intégrable sur D, on a :*

$$\left|\int\int_D f(x,y)dxdy\right| \leq \int\int_D |f(x,y)|dxdy \leq \mathcal{A}(D) \sup_{(x,y)\in D} |f(x,y)|$$

On peut partir, là-encore, d'inégalités portant sur les sommes de Riemann, par exemple :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |S_n(f)| \leq S_n(|f|) \leq \mathcal{A}_n^+ \sup_{(x,y)\in D} |f(x,y)|$$

Proposition IV.2.4 (inégalité de Schwarz) *Soient f et g des fonctions continues, donc intégrables, sur D, alors :*

$$\left(\int\int_D f(x,y)g(x,y)dxdy\right)^2 \leq \left(\int\int_D [f(x,y)]^2dxdy\right)\left(\int\int_D [g(x,y)]^2dxdy\right)$$

Démontrer cette proposition en exercice.

Proposition IV.2.5 *Soient D_1 et D_2 deux ensembles quarrables de $\mathbb{R}^2$ tels que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, alors $D_1 \cup D_2$ reste quarrable et on a :*

$$\int\int_{D_1 \cup D_2} f(x,y)dxdy = \int\int_{D_1} f(x,y)dxdy + \int\int_{D_2} f(x,y)dxdy$$

IV.3 Calcul pratique des intégrales doubles

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Intégrales sur un rectangle

Documents :
Document B.1

Exercices :
Exercice A.1.3
Exercice A.1.4

Commençons par examiner un cas particulier du théorème (admis) qui suit, pour lequel on peut donner des éléments de preuve :

Proposition IV.3.1 *Soit* D *le domaine rectangulaire* $[a;b] \times [c;d]$ *où* $a \leq b$ *et* $c \leq d$. *Si*

$$\forall (x,y) \in D \quad f(x,y) = g(x)h(y)$$

où g, h *sont des fonctions continues sur* $[a;b]$ *et* $[c;d]$ *respectivement, alors*

$$\int\int_D g(x)h(y)dxdy = \left(\int_a^b g(x)dx\right) \cdot \left(\int_c^d h(y)dy\right)$$

Une démonstration est proposée en document.

Exemple IV.3.1 *Soit* $D = [1;2] \times [1;3]$ *et* $f : (x,y) \longmapsto x^2 y$.

$$\int\int_D f(x,y)dxdy \quad = \quad \left(\int_1^2 x^2 dx\right)\left(\int_1^3 y dy\right)$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^3 \\ \int\int_D f(x,y)dxdy &= \frac{28}{3} \end{aligned}$$

Avant de passer à un théorème plus général, nous pouvons encore énoncer un cas particulier de celui-ci :

Proposition IV.3.2 *Soient D le domaine rectangulaire $[a;b] \times [c;d]$ où $a \leq b$ et $c \leq d$, f une fonction continue sur D. Alors*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy$$

Ainsi, même si on ne peut pas mettre $f(x,y)$ sous la forme $g(x)h(y)$ pour $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$, le calcul de l'intégrale de f sur un rectangle est possible si on sait déterminer une primitive de la fonction d'une variable $t \mapsto f(t,y)$ pour y fixé, ou une primitive de $t \mapsto f(x,t)$ à x fixé.

Cas presque général

Exercices :
Exercice A.1.5

On va supposer pour la suite que l'ensemble sur lequel on intègre est de la forme suivante :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

(voir figure IV.3.6)

ou bien

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

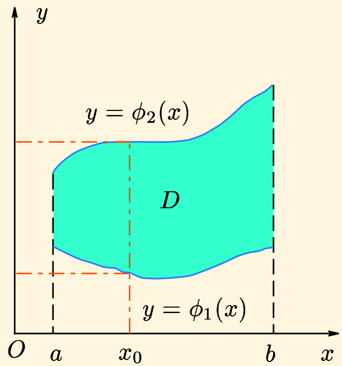
si ce n'est pas le cas, on sera amené à re-découper comme sur la figure IV.3.7. On utilisera alors le théorème suivant :

Théorème IV.3.1 (Fubini) *Soient a, b deux réels tels que $a \leq b$, $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues par morceaux et telles que $\phi_1 \leq \phi_2$. Soient D le domaine suivant*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents



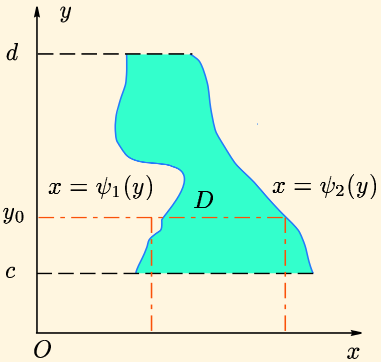


FIG. IV.3.6 – Ensembles pour lequel le théorème de Fubini s'applique

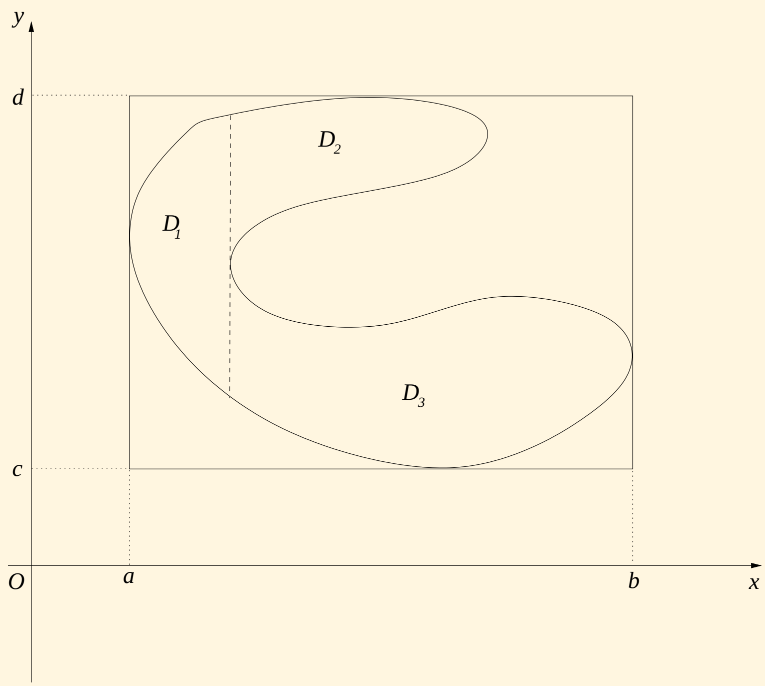


FIG. IV.3.7 – Redécoupage

et f continue sur D. Alors, f est intégrable sur D et

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Le calcul de l'intégrale double est ramené aux calculs successifs de deux intégrales simples.

En échangeant les rôles de x et y, c'est-à-dire

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

on obtiendrait la formule suivante

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

Exemple IV.3.2 *Soit $f:\ (x,y) \longmapsto x + y^2$ et l'ensemble :*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/; 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\right\}$$

On réalise en général un schéma qui aide à la mise en place des calculs, comme la figure IV.3.8.

Cas presque général

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

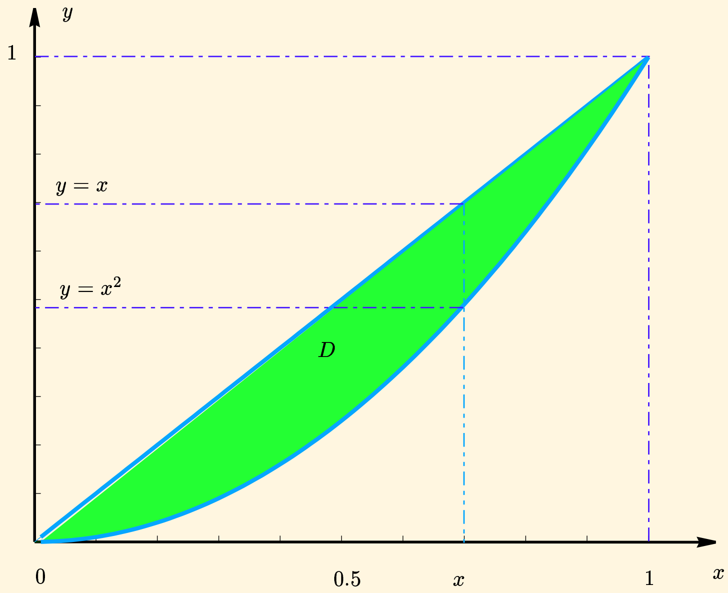


FIG. IV.3.8 – Mise en place d'un calcul

Premier calcul :

$$\begin{aligned}
\int\int_D f(x,y)dxdy &= \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{x} (x+y^2)dy\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=x} dx \\
&= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^3}{3} - x^3 - \frac{x^6}{3}\right) dx \\
&= \frac{5}{42}
\end{aligned}$$

Second calcul :

$$\begin{aligned}
\int\int_D f(x,y)dxdy &= \int_0^1 \left[\int_{y}^{\sqrt{y}} (x+y^2)dx\right] dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + y^2x\right]_{x=y}^{x=\sqrt{y}} dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{y}{2} + y^{\frac{5}{2}} - \frac{y^2}{2} - y^3\right) dy \\
&= \frac{5}{42}
\end{aligned}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Changement de variables

Documents :
Document B.2

Exercices :
Exercice A.1.6
Exercice A.1.7

Soient D et Δ des ensembles quarrables de $\mathbb{R}^2$, on notera :
- (x, y) les points de D ;
- (u, v) les points de Δ.

Définition IV.3.1 *On désignera par* ***changement de variables*** *de Δ sur D toute application :*

$$\begin{aligned} \Phi : \ \Delta &\longrightarrow D \\ (u,v) &\longmapsto \Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \alpha(u,v) \\ \beta(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

telle que :
- *Φ est bijective de Δ sur D ;*
- *α et β sont des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur Δ ;*
- *Si on écrit u et v en fonction de $(x, y) \in D$ à l'aide de Φ^{-1}, on obtient encore des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur D.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On s'attachera surtout dans la pratique à vérifier les deux premiers points de la définition précédente.

Définition IV.3.2 *On appelle* ***jacobien*** *d'un changement de variables* Φ *l'expression :*

$$J_\Phi(u,v) = \frac{\partial \alpha}{\partial u}(u,v)\frac{\partial \beta}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial \alpha}{\partial v}(u,v)\frac{\partial \beta}{\partial u}(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial u} & \frac{\partial \alpha}{\partial v} \\ \frac{\partial \beta}{\partial u} & \frac{\partial \beta}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Théorème IV.3.2 *Soient* Δ, D *deux ouverts bornés quarrables de* $\mathbb{R}^2$, $\Phi : \Delta \to D$ *est un changement de variables de* Δ *sur* D. *On suppose que la fonction*

$$(u,v) \longmapsto J_\Phi(u,v)$$

reste bornée sur Δ. *Supposons que* $f : D \to \mathbb{R}$ *une application continue sur* $D = \Phi(\Delta)$, *alors la fonction*

$$(u,v) \longmapsto f \circ \Phi(u,v)$$

est intégrable sur Δ *et on a :*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Delta f(\alpha(u,v), \beta(u,v)) \left| J_\Phi(u,v) \right| dudv$$

On cherche en général à trouver un changement de variables qui simplifie les calculs à effectuer et on est souvent guidé pour cela par la géométrie de l'ensemble d'intégration, mais cela n'est pas toujours évident !

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

En outre, il est inutile d'utiliser un changement de variables qui tient compte de la forme du domaine (en simplifiant les bornes d'intégration), mais qui complique la fonction à intégrer.

Exemple IV.3.3 *On voudrait calculer :*

$$I = \int\int_D (y^2 - x^2)(x^2 + y^2)dxdy$$

où D *est défini par :*

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leq x \leq y, a \leq xy \leq b, y^2 - x^2 \leq 1\right\}$$

où a *et* b *sont fixés et tels que* $0 < a < b$.
On peut essayer d'appliquer directement le théorème de Fubini, mais un schéma du domaine D *est dissuasif cf. figure IV.3.9.*

On peut poser le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} \psi \quad : \quad & D \longrightarrow \Delta \\ & (x, y) \longmapsto (u(x, y), v(x, y)) = (xy, y^2 - x^2) \end{aligned}$$

où Δ *est le rectangle* $[a, b] \times [0; 1]$.
ψ *vérifie bien les conditions de la définition IV.3.1 et on a :*

$$J_\psi(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -2x & 2y \end{vmatrix} = 2(x^2 + y^2)$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

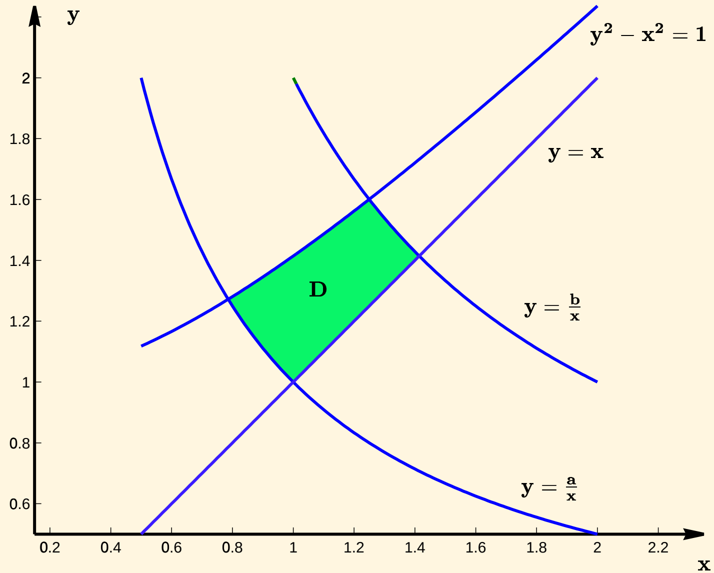


FIG. IV.3.9 – Schéma de l'ensemble d'intégration

Comme $|J_\psi|$ *est majoré sur* D *puisque* $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$*, on a d'après le théorème :*

$$\begin{aligned} I &= \int\int_D v(x,y)\frac{1}{2}\left|J_\psi(x,y)\right| dxdy \\ &= \int\int_\Delta \frac{1}{2} v du dv = \int_a^b \left(\int_0^1 \frac{1}{2} v dv \right) du \\ &= \frac{1}{4}(b-a) \end{aligned}$$

Passage aux coordonnées polaires

Exercices :
Exercice A.1.8

Ce changement de variables peut être considéré comme classique et est particulièrement adapté si l'ensemble sur lequel on intègre comporte des éléments de frontière circulaires et si la fonction à intégrer est du type $f(x, y) = \phi(x^2+y^2)$. On pose

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \rho\cos\theta \\ y & = & \rho\sin\theta \end{array}\right., \quad \rho > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

C'est-à-dire $\Phi : (\theta, \rho) \longmapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ (voir la figure IV.3.10) :

$$J_\Phi(\theta, \rho) = \left|\begin{array}{cc} -\rho\sin\theta & \cos\theta \\ \rho\cos\theta & \sin\theta \end{array}\right| = -\rho$$

et $|J_\Phi(\theta, \rho)| = \rho$. Donc

$$\int\int_{\Phi(\Delta)} f(x, y)dxdy = \int\int_\Delta f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

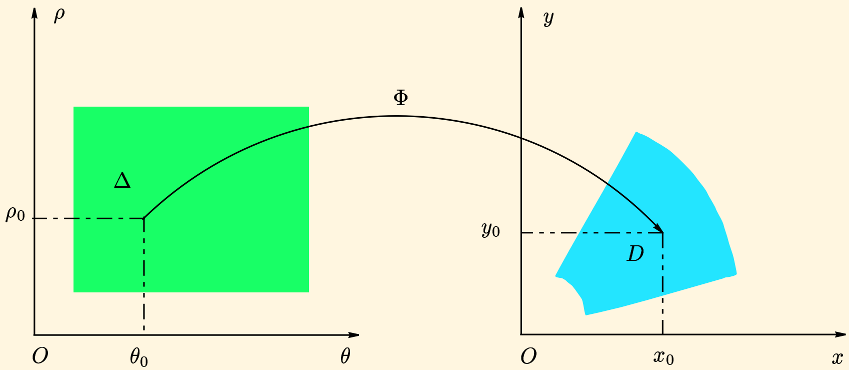


FIG. IV.3.10 – Cas des coordonnées polaires.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple IV.3.4 *On souhaite calculer l'intégrale*

$$\int\int_D \exp\left(x^2+y^2\right) dxdy$$

où D est le disque défini par $D = \{(x,y)/0 \le x^2+y^2 \le 1\}$.
Le passage aux coordonnées polaires nous ramène au calcul de

$$\int\int_\Delta \rho \exp\left(\rho^2\right) d\rho d\theta$$

où Δ est le rectangle $\Delta = \{(\rho,\theta)/0 < \rho \le 1, 0 \le \theta < 2\pi\}$, c'est-à-dire un calcul qui s'avère simple, en vertu des résultats de la proposition IV.3.1.

$$\begin{aligned}\int\int_\Delta \rho \exp\left(\rho^2\right) d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho \exp\left(\rho^2\right) d\rho \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2}\exp\left(\rho^2\right)\right]_0^1 = \pi(e-1)\end{aligned}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

IV.4 Des applications

Les intégrales doubles permettent d'évaluer des volumes ou des aires, comme on l'a déjà vu, mais également d'autres grandeurs physiques.

Détermination du centre de gravité d'une plaque

Exercices :
Exercice A.1.9

On considère une plaque plane de faible épaisseur qu'on assimile à un ensemble quarrable D du plan (xOy).

Définition IV.4.1 *On appelle **masse surfacique** au point $M \in D$ le réel $\mu(M)$ qui représente la masse par unité de surface de cette plaque et qui peut dépendre de la position de M.*

Définition IV.4.2 *On appelle **masse totale** de la plaque D de $\mathbb{R}^2$ de masse surfacique μ le nombre réel **positif** m défini par l'intégrale double :*

$$m = \int\int_D \mu(M) dx dy$$

où M décrit D.

Définition IV.4.3 *On appelle **centre d'inertie** de la plaque D de $\mathbb{R}^2$ de masse surfacique μ le point G dont les coordonnées sont données par les intégrales doubles :*

$$x_G = \frac{1}{m} \int\int_D \mu(M) x dx dy$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$$y_G = \frac{1}{m}\int\int_D \mu(M) y dx dy$$

ce qui vectoriellement s'écrit :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OG} &= x_G\overrightarrow{\imath} + y_G\overrightarrow{\jmath} \\
&= \frac{1}{m}\left(\int\int_D \mu(M) x dx dy\right)\overrightarrow{\imath} + \frac{1}{m}\left(\int\int_D \mu(M) y dx dy\right)\overrightarrow{\jmath} \\
\overrightarrow{OG} &= \frac{1}{m}\int\int_D \mu(M)\overrightarrow{OM} dx dy
\end{aligned}$$

Moments d'inertie

Exercices :
Exercice A.1.10

Avec les mêmes notations que précédemment :

Définition IV.4.4 *Le **moment d'inertie de la plaque** D **par rapport à la droite** Δ est défini par :*

$$\mathcal{I}_\Delta = \int\int_D [d(M,\Delta)]^2 \mu(x,y)dxdy$$

où $d(M,\Delta)$ représente la distance du point $M(x,y)$ à la droite Δ.

Exemple IV.4.1 *Ainsi $\mathcal{I}_{(Oy)} = \int\int_D x^2 \mu(x,y)dxdy$*

De façon analogue, on a :

Définition IV.4.5 *Le **moment d'inertie de la plaque** D **par rapport au point** A est défini par :*

$$\mathcal{I}_A = \int\int_D [d_2(M,A)]^2 \mu(x,y)dxdy$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$$\mathcal{I}_A = \int\int_D \left((x - x_A)^2 + (y - y_A)^2\right) \mu(x, y) dx dy$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices de cours

Exercice A.1.1 Calcul approché d'une intégrale double

On considère la fonction f définie sur le carré $D = [0; 1] \times [0; 1]$ par $f(x, y) = e^{-xy}$.

1. Dresser un tableau des valeurs de $f(x, y)$ pour les 25 points obtenus en prenant $x = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1$ et $y = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1$.
2. On cherche à encadrer le nombre $I = \int\int_D f(x, y)dxdy$ à l'aide des sommes de Riemann $s_4(f)$ et $S_4(f)$.
   (a) Montrer que pour $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, avec a, b, c, d des réels positifs, on a :
   $$e^{-bd} \leq e^{-xy} \leq e^{-ac}$$
   (b) En déduire[1] en prenant $x_i = \frac{i}{4}$ et $y_j = \frac{j}{4}$ où les entiers i et j prennent les valeurs $0, 1, 2, 3, 4$ que :
   $$s_4(f) = \sum_{i=1}^{i=4} \sum_{j=1}^{j=4} \frac{1}{16} e^{-\frac{ij}{16}}$$
   et
   $$S_4(f) = \sum_{i=0}^{i=3} \sum_{j=0}^{j=3} \frac{1}{16} e^{-\frac{ij}{16}}$$

[1] On determinera la borne supérieure et la borne inférieure de f sur chacune des mailles du quadrillage

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

(c) En déduire que

$$0,69 \leq \int\int_D f(x,y)dxdy \leq 0,88$$

3. **Refaire le même type de travail avec $s_8(f)$ et $S_8(f)$ (cela nécessite, a priori, le calcul de $f(x,y)$ en 81 points).**

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2 Ch4-Exercice2

Démontrer l'inégalité de Schwarz en utilisant le fait que si on pose :

$$\phi(t) = \int\int_D [tf(x,y) + g(x,y)]^2 dxdy$$

$\phi(t)$ est une expression positive pour tout réel t (on s'appuira aussi sur la propriété IV.2.1).

Solution

Exercice A.1.3 Ch4-Exercice3

Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int\int_{D_1} (x^2 + y)dxdy \quad avec \quad D_1 = [0;1] \times [0;1]$$

Solution

Exercice A.1.4 Ch4-Exercice4

Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int\int_{D_2} x^7 y^8 dxdy \quad avec \quad D_2 = [0;2] \times [0;1]$$

Solution

Exercice A.1.5 Ch4-Exercice5

Soit une fonction f continue sur $\mathbb{R}^2$. Utiliser le théorème de Fubini pour donner une autre expression des intégrales suivantes :

$$\int_0^4 \left(\int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy \right) dx$$

$$\int_9^1 \left(\int_{2x}^{3x} f(x,y)dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left(\int_{\frac{y^2}{2}}^{y} f(x,y)dx \right) dy$$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.6 Ch4-Exercice6

Soit l'ensemble A défini par

$$A = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / u \geq 0, v \geq 0, v-u \geq 0, a \leq uv \leq b, v^2-u^2 \leq 1\right\}$$

avec $0 < a < b$.

1. Représenter A dans le plan de coordonnées (u,v).
2. Montrer que le calcul de

$$I = \int\int_A (v^2-u^2)^{uv}(u^2+v^2)\,du\,dv$$

   peut se ramener au calcul de

$$\int\int_D x^y\,dx\,dy$$

   où D est un rectangle en posant le changement de variables $x = v^2-u^2$, $y = uv$.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.7 Ch4-Exercice7

Calculer l'aire du domaine $\mathcal{E}$ limité par l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$ et $b > 0$) en utilisant le changement de variables $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$ avec $r \in]0;1]$ et $\theta \in [0;2\pi[$.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.8 Ch4-Exercice8

Calculer l'intégrale

$$I = \int\int_C \frac{\cos(x^2+y^2)}{3+sin(x^2+y^2)}dxdy$$

où C est la couronne définie par

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}$$

Solution

Exercice A.1.9 Ch4-Exercice9

Déterminer les coordonnées du centre de gravité d'une plaque homogène de masse surfacique μ qui a la forme d'un demi-disque d'équation

$$\left\{(x,y)/y \leq 0, 0 \leq x^2+y^2 \leq R^2\right\}$$

(avec $R>0$).

Solution

Exercice A.1.10 Ch4-Exercice10

Déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe (Ox) d'une plaque de masse surfacique constante μ de forme elliptique, avec comme équation pour son bord $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exercices de TD

Exercice A.2.1 intégrales doubles sur un rectangle

Caluler les intégrales suivantes

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\int_{\mathcal{D}} x^2 dx dy \\ I_2 &= \int\int_{\mathcal{D}} |x+y|\, dx dy \\ I_3 &= \int\int_{\mathcal{D}} x^2 y^3 dx dy \end{aligned}$$

où le domaine $\mathcal{D}$ est défini par $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ |x| < 1,\ 0 < y < 3\}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.2 intégrales doubles et volumes

De quels domaines de $\mathbb{R}^3$ ces intégrales doubles mesurent-elles le volume ?

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} (1+x)dxdy & \mathcal{D} = [0,1]\times[0,2] \\
(2) & \displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} (1+\sqrt{2y-y^2})dxdy & \mathcal{D} = [0,2]\times[0,1] \\
(3) & \displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} y dxdy & \mathcal{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \ x^2+y^2-2y\leq 0\}
\end{array}
$$

Faire une figure. Calculer ces volumes.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.3 intégrales doubles sur des domaines non rectangulaires, Fubini

1. On désigne par $\mathcal{D}$ le domaine limité par le quadrilatère $ABCD$ où

$$A(1,0) \quad B(0,1) \quad C(2,3) \quad D(8,0)$$

   (a) Faire une figure. Exprimer à l'aide d'intégrales simples en x et en y l'intégrale double $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy$.

   (b) Calculer le moment d'inertie de $\mathcal{D}$ par rapport à l'axe Ox en supposant que la masse surfacique est égale à 1.

2. $h > 0$ désigne un paramètre réel. On considère le domaine

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ y^2 \le 4x,\ y \ge 0,\ x \le h\right\}$$

   (a) Faire une figure. Exprimer, de deux façons différentes, à l'aide d'intégrales simples en x et en y, l'intégrale double $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy$.

   (b) Calculer les coordonnées du centre de gravité de $\mathcal{D}$ en supposant que la masse surfacique est égale à 1.

3. On considère les domaines suivants

$$\mathcal{D}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x \ge 1 + y^2\right\}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_2 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\;\; y-x+3\geq 0\right\}\\
\mathcal{D}_3 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\;\; y+x-3\leq 0\right\}\\
\mathcal{D} &= \mathcal{D}_1\cap(\mathcal{D}_2\cup\mathcal{D}_3)
\end{aligned}
$$

Calculer les coordonnées du centre de gravité de $\mathcal{D}$ en supposant que la masse surfacique est égale à 1.

Exercice A.2.4 volume d'un tétraèdre

Calculer le volume limités par les plans d'équations

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

Exercice A.2.5 intégrale sur une couronne, changement de variables

Calculer l'intégrale $\int\int_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ où $\mathcal{D}$ est le domaine limité par les courbes d'équation $x^2 + y^2 = 4$ et $x^2 + y^2 = 9$.

Exercice A.2.6 Fubini, changement de variables

On considère le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1,\ y \geq x\right\}$$

1. Faire une figure et exprimer de 2 façons différentes à l'aide d'intégrales simples en x et en y, l'intégrale double $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy$.
2. Soit $\mathcal{V}$ le domaine de $\mathbb{R}^3$ constitué des points situés à l'intérieur du cylindre d'axe $(x=2, y=1)$, de rayon 1 et qui vérifient $z \leq x$, $z \geq 0$, $y \leq x$. Faire une figure.
   (a) Déterminer la projection du domaine $\mathcal{V}$ sur le plan $z=0$.
   (b) Calculer le volume de $\mathcal{V}$.
3. On définit $\mathcal{D}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ y \geq 1,\ x \leq 2,\ y \leq x\right\}$ et $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_1$.
   (a) Calculer $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}_2} f(x,y)dxdy$ à l'aide d'un changement de variables.
   (b) Retrouver le volume de $\mathcal{V}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.7 Fubini, changement de variables

On considère le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\;\; x^2 + (y-1)^2 \leq 1,\; x \geq 0\right\}$$

1. Faire une figure et exprimer de 2 façons différentes à l'aide d'intégrales simples en x et en y, l'intégrale double $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} f(x, y)dxdy$.
2. Soit $\mathcal{V}$ le domaine de $\mathbb{R}^3$ situé dans le quart d'espace $x \geq 0$, $z \geq 0$ et limité par le cylindre d'axe $(x = 0, y = 1)$, de rayon 1 et par la surface d'équation $z = x$, $z \geq 0$, $y \leq x$. Faire une figure. Calculer le volume de $\mathcal{V}$.
3. (a) On effectue le changement de variables suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & 1 + r\sin\theta \end{array}\right.$$

Quel domaine Δ correspond alors au domaine $\mathcal{D}$? Calculer le volume de $\mathcal{V}$ en utilisant ce changement de variables.

(b) Même question en utilisant le changement de variables suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \rho\cos\phi \\ y & = & \rho\sin\phi \end{array}\right.$$

Exercice A.2.8 Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$

On considère le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathcal{D}_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x^2+y^2 \leq R^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$$

On pose $\phi(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

1. Calculer $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}_R} \phi(x,y)dxdy$.
2. On pose $\mathcal{C}_a = [0,a] \times [0,a]$. Exprimer $\displaystyle\int\int_{\mathcal{C}_a} \phi(x,y)dxdy$ en fonction de l'intégrale simple $\displaystyle\int_0^a e^{-t^2}dt$ et en déduire que

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2}) \leq \left(\int_0^a e^{-t^2}dt\right)^2 \leq \frac{\pi}{4}(1-e^{-2a^2})$$

3. Donner un sens à l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ et calculer sa valeur.

Annexe B
Documents

Document B.1 Un cas particulier du théorème de Fubini

On peut supposer, pour simplifier, que les fonctions g et h sont positives sur les intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$, avec les notations du paragraphe IV.1, on pose ici, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} g(x) = M_i \text{ pour } i = 0, 1, \cdots, n-1$$

$$\sup_{y_j \leq y \leq y_{j+1}} h(y) = \widetilde{M_j} \text{ pour } j = 0, 1, \cdots, n-1$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à g et h, pour $i, j = 0, 1, \cdots, n-1$ on a :

$$\exists X_i \in [x_i, x_{i+1}] /\ M_i = g(X_i)$$

$$\exists Y_j \in [y_j, y_{j+1}] /\ \widetilde{M_j} = h(Y_j)$$

d'où, pour $i, j = 0, 1, \cdots, n-1$:

$$M_{i,j} = M_i \widetilde{M_j} = g(X_i) h(Y_j)$$

compte tenu du fait que g et h sont à valeurs positives.
On peut alors écrire, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n(f) = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} M_{i,j} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} g(X_i) \frac{d-c}{n} h(Y_j)$$

c'est-à-dire :

$$S_n(f) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} g(X_i)\right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{d-c}{n} h(Y_j)\right)$$

où l'on reconnaît le produit de deux sommes dont les limites, lorsque n tend vers $+\infty$ sont respectivement :

$$\int_a^b g(x)dx \text{ et } \int_c^d h(y)dy$$

En utilisant le fait que :

$$\int\int_{[a;b]\times[c;d]} f(x,y)dxdy = \lim_{p\to\infty} S_{2^p}(f)$$

on peut conclure.

Document B.1
Un cas particulier du théorème de Fubini

Document B.2 Ébauche de la démonstration du théorème de changement de variables

Soient Δ, D deux ouverts bornés et quarrables de $\mathbb{R}^2$.
On considère l'application $\Phi : \Delta \rightarrow D$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \alpha(u,v) \\ y & = & \beta(u,v) \end{array} \right. \quad \forall (u,v) \in \Delta.$$

Soient h et k deux réels positifs. On considère un quadrillage de Δ par des rectangles élémentaires $[u_i; u_i + h] \times [v_j; v_j + k]$ qui peuvent correspondre à ceux employés pour la construction de l'intégrale double :

$$R_{i,j} = \{(u,v) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2 \mid u_i \leq u \leq u_i + h, \quad v_j \leq v \leq v_j + k\}$$

où u_i et v_j sont les coordonnées des noeuds du quadrillage de Δ (voir la figure).
L'aire du rectangle élémentaire $A_1A_2A_3A_4$ dans le plan de coordonnées (u,v) est hk.
L'image de ce rectangle par Φ, dans le plan de coordonnées (x,y) est un parallélogramme curviligne $P_1P_2P_3P_4$ (voir la figure B.1).

Si les coordonnées des sommets $A_i (i = 1, \ldots, 4)$ sont

$$A_1 \begin{pmatrix} u_i \\ v_j \end{pmatrix}, \; A_2 \begin{pmatrix} u_i + h \\ v_j \end{pmatrix}, \; A_3 \begin{pmatrix} u_i + h \\ v_j + k \end{pmatrix}, \; A_4 \begin{pmatrix} u_i \\ v_j + k \end{pmatrix},$$

Sommaire
Concepts
Exemples
Exercices
Documents

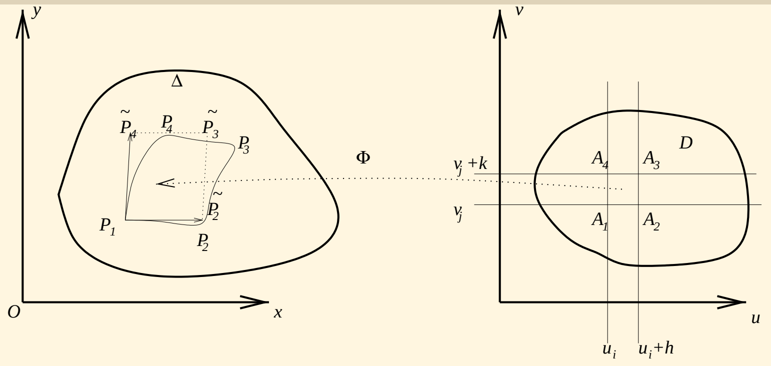


FIG. B.1 – Aire élémentaire en coordonnées curvilignes.

alors les coordonnées des sommets respectifs P_i du parallélogramme curviligne sont

$$P_1\begin{pmatrix}\alpha(u_i,v_j)\\ \beta(u_i,v_j)\end{pmatrix},\quad P_2\begin{pmatrix}\alpha(u_i+h,v_j)\\ \beta(u_i+h,v_j)\end{pmatrix},\quad P_3\begin{pmatrix}\alpha(u_i+h,v_j+k)\\ \beta(u_i+h,v_j+k)\end{pmatrix},\quad P_4\begin{pmatrix}\alpha(u_i,v_j+k)\\ \beta(u_i,v_j+k)\end{pmatrix}.$$

On va maintenant construire une approximation de l'aire du parallélogramme curviligne $P_1P_2P_3P_4$. Quand les quantités h et k sont petites on peut associer au parallélogramme curviligne $P_1P_2P_3P_4$ le vrai parallélogramme $P_1\tilde{P}_2\tilde{P}_3\tilde{P}_4$.

C'est-à-dire, on peut approcher l'arc P_1P_2 par le segment $[P_1\tilde{P}_2]$ où

$$\tilde{P}_2\begin{pmatrix}\alpha(u_i,v_j)+h\frac{\partial\alpha}{\partial u}(u_i,v_j)\\ \beta(u_i,v_j)+h\frac{\partial\beta}{\partial u}(u_i,v_j)\end{pmatrix}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

et l'arc P_1P_4 par le segment $[P_1\tilde{P}_4]$ où

$$\tilde{P}_4\left(\begin{array}{c}\alpha(u_i,v_j)+k\frac{\partial\alpha}{\partial v}(u_i,v_j)\\ \beta(u_i,v_j)+k\frac{\partial\beta}{\partial v}(u_i,v_j)\end{array}\right).$$

L'aire du parallélogramme $P_1\tilde{P}_2\tilde{P}_3\tilde{P}_4$ est donnée par

$$\mathcal{A}(P_1\tilde{P}_2\tilde{P}_3\tilde{P}_4)=\left\|\overrightarrow{P_1\tilde{P}_2}\wedge\overrightarrow{P_1\tilde{P}_4}\right\|_2=\left\|\left(\begin{array}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial u}(u_i,v_j)\\ \frac{\partial\beta}{\partial u}(u_i,v_j)\\ 0\end{array}\right)\wedge\left(\begin{array}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial v}(u_i,v_j)\\ \frac{\partial\beta}{\partial v}(u_i,v_j)\\ 0\end{array}\right)\right\|_2 hk=|J_\Phi(u_i,v_j)|\,hk.$$

Quand les quantités h et k sont petites l'aire du parallélogramme curviligne $P_1P_2P_3P_4$ peut être approchée par $|J_\Phi(u_i,v_j)|\,hk$. Puisque l'aire du rectangle $A_1A_2A_3A_4$ est hk, on a

$$|J_\Phi(u_i,v_j)|=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\mathcal{A}(P_1P_2P_3P_4)}{\mathcal{A}(A_1A_2A_3A_4)}.$$

C'est-à-dire $|J_\Phi(u,v)|$ joue le rôle d'un coefficient de dilatation local (en un point (u,v)) et donc ce qui revient à remplacer $dxdy$ par $|J_\Phi(u,v)|\,dudv$ pour le calcul de l'intégrale.
Pour être plus explicite, on peut écrire, d'après la définition de l'intégrale double , lorsque l'on évalue de deux manière le volume correspondant à $\int\int_D f(x,y)dxdy$:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy \quad = \quad \lim_{p\to+\infty} S_{2^p}(f)$$

Sommaire
Concepts
Exemples
Exercices
Documents

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{q\to+\infty} \sum_{0\le i,j\le 2^q-1} \sup_{(u,v)\in R_{i,j}} f(\alpha(u,v),\beta(u,v))\cdot |J_\Phi(u_i,v_j)|\, hk \\
&= \int\!\!\int_\Delta f(\alpha(u,v),\beta(u,v))\, |J_\Phi(u,v)|\, dudv.
\end{aligned}
$$

où, sans trop rentrer dans les détails, en réutilisant les notations du paragraphe IV.1, 2^q correspond au nombre de mailles du quadrillage de Δ, de façon à ce que $h \to 0$ et $k \to 0$ lorsque q tend vers $+\infty$.

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

R

T

V

Solution de l'exercice A.1.1

Pour la troisième question, on obtient

$$0,74 \leq \int\int_D f(x,y)dxdy \leq 0,85$$

et si on est suffisamment courageux, on peut calculer $s_{16}(f)$, $S_{16}(f)$, $s_{32}(f)$ et $S_{32}(f)$ pour obtenir successivement :

$$0,77 \leq \int\int_D f(x,y)dxdy \leq 0,82$$

et

$$0,78 \leq \int\int_D f(x,y)dxdy \leq 0,81$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.2

On peut écrire, d'après IV.2.1, pour tout réel t

$$\phi(t) = t^2 \int\int_D [f(x,y)]^2 dxdy + 2t \int\int_D f(x,y)g(x,y)dxdy + \int\int_D [g(x,y)]^2 dxdy$$

et le discriminant de ce trinôme du second degré en t est :

$$\Delta = 4\left(\int\int_D f(x,y)g(x,y)dxdy\right)^2 - 4\left(\int\int_D [f(x,y)]^2 dxdy\right)\left(\int\int_D [g(x,y)]^2 dxdy\right)$$

Comme $\phi(t) \geq 0$ pour tout t, on a nécessairement $\Delta \leq 0$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.3

$$
\begin{aligned}
I &= \int\int_{[0;1]\times[0;1]} (x^2+y)dxdy \\
&= \int\int_{[0;1]\times[0;1]} x^2dxdy + \int\int_{[0;1]\times[0;1]} ydxdy \\
&= \left(\int_0^1 x^2dx\right)\left(\int_0^1 dy\right) + \left(\int_0^1 dx\right)\left(\int_0^1 ydy\right) \\
I &= \frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.4

$$\begin{aligned} I &= \int\int_{[0;2]\times[0;1]} x^7 y^8 dxdy \\ &= \left(\int_0^2 x^7 dx\right)\left(\int_0^1 y^8 dy\right) \\ I &= \frac{2^8}{8}.\frac{1}{9} = \frac{32}{9} \end{aligned}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.5

$$\int_0^4 \left(\int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy \right) dx = \int_0^{48} \left(\int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y)dx \right) dy$$

$$\begin{aligned}
\int_9^1 \left(\int_{2x}^{3x} f(x,y)dy \right) dx &= -\int_1^9 \left(\int_{2x}^{3x} f(x,y)dy \right) dx \\
&= -\int_2^3 \left(\int_1^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx \right) dy - \int_3^{18} \left(\int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx \right) dy \\
&\quad -\int_{18}^{27} \left(\int_{\frac{y}{3}}^{9} f(x,y)dx \right) dy
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \left(\int_{\frac{y^2}{2}}^{y} f(x,y)dx \right) dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy \right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_x^1 f(x,y)dy \right) dx$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.6

1. Voir la figure B.2

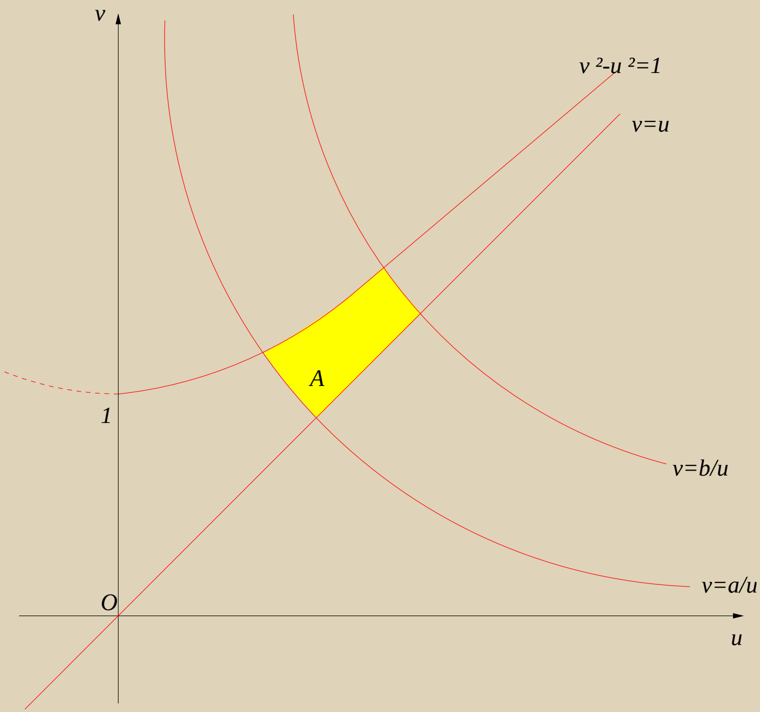


Fig. B.2 – Ensemble A

2. **On pose** $\phi(u,v) = \left\{ \begin{array}{lcl} x(u,v) & = & v^2 - u^2 \\ y(u,v) & = & uv \end{array} \right.$ **, et on a**

$$J_\phi(u,v) = \left| \begin{array}{cc} -2u & 2v \\ v & u \end{array} \right| = -2(u^2+v^2)$$

On a alors

$$\begin{array}{rcl} I & = & \dfrac{1}{2} \displaystyle\int\int (v^2-u^2)^{uv} |J_\phi(u,v)| dudv \\ & = & \dfrac{1}{2} \displaystyle\int\int_{[0;1]\times[a;b]} x^y dxdy \\ I & = & \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_a^b \dfrac{dy}{y+1} = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{b+1}{a+1}\right) \end{array}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.7

Voir la remarque IV.2.1.

On doit trouver un résultat qui n'est pas étonnant lorsque $a = b$!

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.8

Le changement en polaires amène à une intégrale où les variables sont séparables.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.9

Des raisons de symétrie permettent de se dispenser d'un calcul.

L'autre calcul se fait facilement avec un changement de variables en polaires

On trouve une abscisse nulle et une ordonnée de $-\frac{4R}{3\pi}$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.10

Quelle fonction intègre-t-on sur l'ensemble $\left\{(x,y)/\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$? (Revoyez la définition IV.4.4)

On peut utiliser un changement de variable adapté à la géométrie de l'ensemble d'intégration :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a\rho\cos\theta \\ y & = & b\rho\sin\theta \end{array}\right.$$

avec $0<\rho\leq 1$ et $0\leq\theta<2\pi$.

Retour à l'exercice ▲