

# Final SY02 Automne 2006

Nom :

Signature :

Prénom :

*Répondre sur ce document, en ne reportant que les grandes lignes du raisonnement et les résultats (faire d'abord les calculs au brouillon). La qualité de la présentation sera prise en compte dans la notation. Aucune copie supplémentaire ne sera acceptée. Le seul document autorisé est le recueil de tables. Le stockage d'informations relatives au cours de sy02 sur une calculatrice programmable est interdit.*

## Exercice 1 (7 points)

Une v.a. aléatoire  $X$  suit une loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  d'écart-type connu  $\sigma = 4$ . Au vu d'un échantillon i.i.d.  $X_1, \dots, X_n$  de v.a. parente  $X$ , on veut tester l'hypothèse  $H_0 : \mu = 1$  contre l'hypothèse alternative  $H_1 : \mu = 5$ .

1. Soit  $L(\mu; x_1, \dots, x_n)$  la fonction de vraisemblance. Donner l'expression du rapport  $\lambda = \frac{L(5; x_1, \dots, x_n)}{L(1; x_1, \dots, x_n)}$ .

2. En déduire la région critique du test de Neyman-Pearson, en fonction du niveau de signification  $\alpha^*$ .

3. Calculer la puissance de ce test dans le cas où  $n = 5$  et  $\alpha^* = 0.05$ .

4. Quelle doit être la taille minimum  $n_0$  de l'échantillon pour que la puissance soit supérieure à 0.95, en supposant toujours  $\alpha^* = 0.05$  ?

5. On a observé  $\bar{x} = 6$  toujours avec  $n = 5$ . Quel est le degré de signification du test ?

## Exercice 2 (5 points)

On a demandé à 500 personnes de choisir au hasard un nombre entre 1 et 10. On obtient les résultats suivants :

Nombre choisi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
fréquence observée	63	54	30	31	52	49	46	57	58	60

D'après ces données, peut-on accepter, au niveau de signification de 1 %, l'hypothèse selon laquelle les nombres ont été choisis de manière uniforme.

## Exercice 3 (8 points)

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon i.i.d. de variable parente  $X$ , de densité  $f(x) = \frac{\theta^4}{6} x^3 e^{-\theta x} 1_{[0, +\infty[}(x)$   $\theta$  étant un paramètre positif.

1. Donner l'expression de  $\hat{\theta}$ , estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ .

**2.** Calculer l'information de Fisher  $I_n(\theta)$  relative au paramètre  $\theta$ . En déduire une fonction asymptotiquement pivotale pour  $\theta$  que l'on exprimera en fonction de  $\hat{\theta}$ .

*Information de Fisher*

*Fonction asymptotiquement pivotale de  $\theta$  (en fonction de  $\hat{\theta}$ )*

**3.** On considère le problème de test  $H_0 : \theta = \theta_0$  contre  $H_1 : \theta = \theta_1$  avec  $\theta_1 > \theta_0$ . Montrer que la région critique  $W$  du test le plus puissant pour ce problème au niveau  $\alpha^*$  s'exprime en fonction de  $\hat{\theta}$ , puis donner une approximation de  $W$  en supposant  $n$  grand.

*Expression de  $W$  en fonction de  $\hat{\theta}$*

*Approximation de  $W$  pour  $n$  grand*

4. On considère maintenant le problème de test suivant  $H_0 : \theta = \theta_0$  contre  $H_1 : \theta \neq \theta_0$ . Existe-t-il un test UPP pour ce problème ?

5. Calculer la statistique du rapport de vraisemblance  $\lambda$ , exprimée en fonction de  $\hat{\theta}$ , pour le problème de test de la question 4.

6. En utilisant la statistique  $\ln \lambda$  et en supposant que  $n$  est grand, proposer une région critique pour le test de la question 4. Quelle décision prendra-t-on si  $\theta_0 = 2$ ,  $n = 50$ ,  $\sum_i x_i = 115$  et  $\alpha^* = 0.05$ .

*Région critique*

*Application numérique*