

---

**Problème 1 (Algorithme d'Euclide).**

L'algorithme d'Euclide calcule le Plus Grand Commun Diviseur (PGCD) de deux nombres entiers  $a$  et  $b$ . Par commodité, nous supposons que  $a$  est strictement plus grand que  $b$  et que  $b$  ne divise pas  $a$ . On se pose la question de la validité de l'algorithme d'Euclide et de sa complexité. Voilà l'algorithme :

**PGCD( $a, b$ )**

**1 Calculer le reste  $r$  de la division euclidienne de  $a$  par  $b$**

**2 Si ce reste  $r$  est nul, écrire PGCD =  $b$ , FIN**

**3 Remplacer  $a$  par  $b$ , et  $b$  par  $r$**

**4 Itérer 1**

**1**

**Question 1.** Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres  $a = 3666$  et  $b = 1080$ .

**Question 2.** Montrer que, chaque fois que l'on passe par 1,  $a$  est strictement plus petit que  $b$ .

**Question 3.** a) Montrer que  $r$  est strictement plus petit que  $a/2$ .

b) Montrer que  $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r)$ .

**Question 4.** Montrer qu'au bout de deux itérations complètes de l'algorithme :  $a$  est remplacé par  $r$ .

**Question 5.** Montrer qu'après  $2m$  itérations complètes de l'algorithme, la valeur actuelle de  $a$ , notée  $a(2m)$ , est telle que  $a(2m)$  est strictement plus petite que  $a$  divisé par 2 puissance  $m$ , et supérieure ou égale à 1.

**Question 6.** On note  $M$ , le nombre d'itérations complètes et on définit  $m$  telle que  $M = 2m + s$  (où  $s=0$  ou 1).

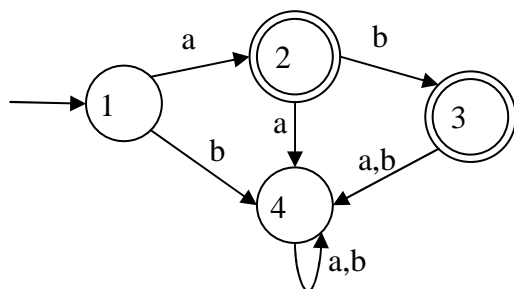
a) Montrer que  $M$  est strictement plus petit que  $\log(a)+1$ .

b) Qu'en concluez-vous pour la validité et la complexité de l'algorithme ?

---

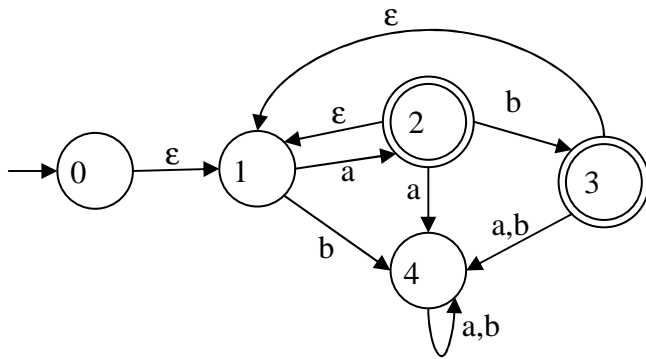
**Problème 2 : Le langage  $L^*$** 

1) On considère l'automate ci-dessous à quatre états :



Quel est le langage  $L_1$  reconnu par cet automate déterministe  $A_1$  ?

2) On associe à cet automate déterministe A1 l'automate non déterministe A2 :



La procédure de construction a été la suivante. On a remplacé l'état initial par un nouvel état initial relié à l'ancien état initial par un arc valué par  $\epsilon$ , le mot vide. On a également relié les mots acceptants de l'automate déterministe A1 à l'ancien état initial.

On rappelle qu'un mot est reconnu par l'automate A2 s'il existe un chemin dans A2, étiqueté par les lettres du mot et allant de l'état initial à un état acceptant.

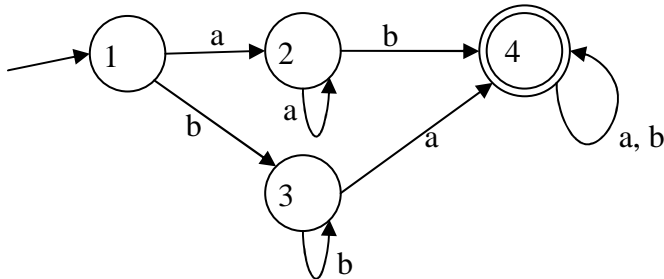
Quel est en fonction de L1, le langage L2 reconnu par l'automate A2 ?

3) On note L un langage régulier. Donner le schéma d'une démonstration pour prouver que  $L^*$  est un langage régulier.

---

### Exercice 1.

Soit L1 le langage reconnu par l'automate ci-dessous :



- 1) Rapporter un mot reconnu par ce langage et un mot non reconnu par ce langage.
- 2) Dessiner un automate reconnaissant le langage  $L2 = (a^* + b^*)$ .
- 3) Quelle relation lie L1 et L2 ? En déduire L1.

---

### Exercice 2.

Soit  $S = \{0, 1, =, +\}$  et  $ADD = \{x = y + z \mid x, y \text{ et } z \text{ sont des mots binaires, et } x \text{ est la somme de } y \text{ et } z\}$

Montrer que ADD n'est pas un langage régulier.