

# MT22-Fonctions de plusieurs variables et applications

---

*Chapitre 5 : Intégrale triple*

ÉQUIPE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

UTC-UTT



# Sommaire

<b>V</b>	<b>Intégrale triple</b>	<b>3</b>
V.1	Construction . . . . .	4
V.2	Propriétés de l'intégrale triple . . . . .	9
V.3	Calcul pratique des intégrales triples . . . . .	14
V.4	Des applications . . . . .	36
<b>A</b>	<b>Exercices</b>	<b>45</b>
A.1	Exercices de cours . . . . .	46
A.2	Exercices de TD . . . . .	52

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

# Chapitre V

## Intégrale triple

V.1	Construction . . . . .	4
V.2	Propriétés de l'intégrale triple . . . . .	9
V.3	Calcul pratique des intégrales triples . . . . .	14
V.4	Des applications . . . . .	36

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

# V.1 Construction

Volume d'un ensemble de $\mathbf{R}^3$ . . . . .	5
Définition de l'intégrale triple . . . . .	7

Il s'agit ici de généraliser les résultats du chapitre précédent, et notamment de donner un sens à la notation :

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz$$

où  $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $D$  une partie bornée de  $\mathbb{R}^3$ .

On ne possède pas de représentation vraiment concrète des intégrales triples alors qu'on pouvait interpréter une intégrale double comme un *volume* et une intégrale simple comme une *aire*.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Volume d'un ensemble de $\mathbb{R}^3$

On se pose ici le problème de savoir sur quel genre d'ensemble  $D$  on va pouvoir calculer une intégrale triple.

**Définition V.1.1** *Un ensemble  $D \subset \mathbb{R}^3$  est **borné** s'il existe un parallélépipède  $P = [a; b] \times [c; d] \times [\gamma; \delta]$  tel que  $D \subset P$ .*

Comme au chapitre précédent, si on se fixe le parallélépipède  $P$  pour un ensemble  $D$  donné, on peut le découper en plus petits parallélépipèdes, suivant des plans parallèles à  $(xOy)$ ,  $(xOz)$ ,  $(yOz)$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$x_i = a + i \frac{b - a}{n}$$

$$y_j = c + j \frac{d - c}{n}$$

$$z_k = \gamma + k \frac{\delta - \gamma}{n}$$

pour  $i, j, k = 0, 1, 2, \dots, n$ , ce qui définit les parallélépipèdes  $P_{i,j,k}$  :

$$P_{i,j,k} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

**Définition V.1.2** Pour  $n$  donné, on note  $D_n^+$  l'ensemble obtenu en prenant tous les  $P_{i,j,k}$  de ce maillage ayant au moins un point commun avec  $D$ ,  $D \subset D_n^+$ . On note  $D_n^-$  l'ensemble obtenu en prenant tous les  $P_{i,j,k}$  du maillage entièrement contenus dans  $D$ ,  $D_n^- \subset D$ .

On définit les volumes  $\mathcal{V}_n^-$  et  $\mathcal{V}_n^+$  respectifs de  $D_n^-$  et  $D_n^+$  comme étant la somme des volumes des  $P_{i,j,k}$  les formant.

$$\left( \forall (i, j, k) \quad \mathcal{V}(P_{i,j,k}) = \frac{(b-a)(d-c)(\delta-\gamma)}{n^3} \right)$$

**Définition V.1.3** On dira qu'une partie bornée  $D$  de  $\mathbb{R}^3$  est **cubable** si :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathcal{V}_{2^p}^- = \lim_{p \rightarrow \infty} \mathcal{V}_{2^p}^+$$

et on définira le **volume** de  $D$ , noté  $\mathcal{V}(D)$  comme étant la limite commune des deux suites.

Dans le même esprit qu'au chapitre précédent, la plupart du temps, on considérera des ensembles  $D$  limités par des surfaces régulières (définies par des équations cartésiennes ou paramétriques faisant intervenir des fonctions différentiables...), ce qui assurera que ces ensembles sont cubables.

**Volume d'un  
ensemble de  
 $\mathbb{R}^3$**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Définition de l'intégrale triple

On considère une partie cubable  $D$  de  $\mathbb{R}^3$  et on réutilise ici les notations du paragraphe V.1.

Soit  $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie et *bornée* sur  $D$ , on prolonge, comme au chapitre précédent,  $f$  au parallélépipède  $P$  en posant :

$$f(x, y, z) = 0 \text{ pour } (x, y, z) \in P \setminus D$$

on pose également :

$$M = \sup_{(x,y,z) \in P} f(x, y, z) \quad m = \inf_{(x,y,z) \in P} f(x, y, z)$$

On pose enfin, pour  $0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq n-1$  et  $0 \leq k \leq n-1$  :

$$M_{i,j,k} = \sup_{(x,y,z) \in P_{i,j,k}} f(x, y, z) \quad m_{i,j,k} = \inf_{(x,y,z) \in P_{i,j,k}} f(x, y, z)$$

**Définition V.1.4** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit les **sommes de Riemann** associées à  $f$  et au découpage d'ordre  $n$  de  $D$  en posant :

$$s_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} m_{i,j,k} \mathcal{V}(P_{i,j,k})$$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

et

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} M_{i,j,k} \mathcal{V}(P_{i,j,k})$$

avec  $\mathcal{V}(P_{i,j,k}) = \frac{(b-a)(d-c)(\delta-\gamma)}{n^3} \quad \forall(i, j, k).$

On est alors en mesure de définir l'intégrale de  $f$  sur  $D$  :

**Définition V.1.5**  $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$  est **intégrable** sur  $D$  si :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} s_{2^p}(f) = \lim_{p \rightarrow +\infty} S_{2^p}(f)$$

Cette limite est l'**intégrale triple** de  $f$  sur l'ensemble cubable  $D$ , on note ce nombre :

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz$$

## Définition de l'intégrale triple

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents



## V.2 Propriétés de l'intégrale triple

<a href="#">Retour au volume d'un ensemble</a> . . . . .	10
<a href="#">Propriétés élémentaires</a> . . . . .	11
<a href="#">Quelques inégalités</a> . . . . .	12

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Retour au volume d'un ensemble

### Exercices :

#### Exercice A.1.1

Si on considère la fonction  $f$  définie par  $f(x, y, z) = 1$  pour  $(x, y, z) \in D = [a, b] \times [c, d] \times [\gamma, \delta]$ , il est facile de voir, avec la définition de

$$\int \int \int_{[a,b] \times [c,d] \times [\gamma,\delta]} f(x, y, z) dx dy dz$$

que cette intégrale triple vaut  $\mathcal{V}(D) = (b - a)(d - c)(\gamma - \delta)$ .  
De manière générale, on a la :

**Proposition V.2.1** *Pour un ensemble cubable  $D \subset \mathbb{R}^3$ ,*

$$\int \int \int_D dx dy dz = \mathcal{V}(D)$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Propriétés élémentaires

Elles sont, pour l'essentiel, analogues à celles obtenues pour l'intégrale double :

### Proposition V.2.2 (linéarité de l'intégrale)

$$\int \int \int_D (f(x, y, z) + g(x, y, z)) dx dy dz = \int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz + \int \int \int_D g(x, y, z) dx dy dz$$

$$\int \int \int_D \lambda f(x, y, z) dx dy dz = \lambda \int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz$$

où  $f, g$  sont des fonctions intégrables sur  $D$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Proposition V.2.3** Soient  $D_1$  et  $D_2$  deux ensembles cubables disjoints, alors  $D_1 \cup D_2$  est cubable et :

$$\int \int \int_{D_1 \cup D_2} f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{D_1} f(x, y, z) dx dy dz + \int \int \int_{D_2} f(x, y, z) dx dy dz$$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## Quelques inégalités

**Proposition V.2.4**   1. Si  $f(x, y, z) \geq 0$  sur  $D$ , alors

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz \geq 0$$

2. Si  $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$  sur  $D$ , alors

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz \leq \int \int \int_D g(x, y, z) dx dy dz$$

**Proposition V.2.5** Si  $f$  est une fonction intégrable sur  $D$ , alors  $|f|$  est intégrable sur  $D$  et

$$\left| \int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz \right| \leq \int \int \int_D |f(x, y, z)| dx dy dz \leq \mathcal{V}(D) \sup_{(x,y,z) \in D} |f(x, y, z)|$$

où  $\mathcal{V}(D) = \int \int \int_D dx dy dz$ .

**Proposition V.2.6** Si  $f(x, y, z) \geq 0$  sur  $D_2$  et  $D_1 \subset D_2$  alors

$$\int \int \int_{D_1} f(x, y, z) dx dy dz \leq \int \int \int_{D_2} f(x, y, z) dx dy dz.$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Proposition V.2.7 (inégalité de Schwarz)**

$$\left( \int \int \int_D f(x, y, z) g(x, y, z) dx dy dz \right)^2 \leq \left( \int \int \int_D [f(x, y, z)]^2 dx dy dz \right) \left( \int \int \int_D [g(x, y, z)]^2 dx dy dz \right)$$

où  $f, g$  sont des fonctions intégrables sur  $D$ .

**Quelques  
inégalités**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## V.3 Calcul pratique des intégrales triples

<a href="#">Intégrale sur un parallélépipède, cas des variables séparables</a>	15
<a href="#">Calcul avec la méthode des bâtonnets . . . . .</a>	16
<a href="#">Calcul par la méthode des tranches . . . . .</a>	22
<a href="#">Changement de variables, généralités . . . . .</a>	28
<a href="#">Passage aux coordonnées cylindriques . . . . .</a>	31
<a href="#">Passage aux coordonnées sphériques . . . . .</a>	34

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Intégrale sur un parallélépipède, cas des variables séparables

C'est l'analogue du résultat obtenu pour l'intégrale double

**Proposition V.3.1** *Soit  $D$  le parallélépipède  $[a; b] \times [c; d] \times [\gamma; \delta]$  où  $a \leq b$ ,  $c \leq d$ ,  $\gamma \leq \delta$ . Si*

$$\forall (x, y, z) \in D \quad f(x, y, z) = g(x)h(y)l(z)$$

*où  $g, h$  et  $l$  sont des fonctions continues sur  $[a; b]$ ,  $[c; d]$  et  $[\gamma; \delta]$  respectivement, alors*

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz = \left( \int_a^b g(x) dx \right) \cdot \left( \int_c^d h(y) dy \right) \cdot \left( \int_\gamma^\delta l(z) dz \right)$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Calcul avec la méthode des bâtonnets

On suppose que l'ensemble d'intégration  $D$  considéré peut être défini par :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in A, \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)\}$$

où  $A$  est une partie de  $\mathbb{R}^2$  et  $\phi_1, \phi_2$  des fonctions de  $A$  dans  $\mathbb{R}$ , on pourrait dire que  $A$  est l'ombre de  $D$  sur le plan  $(xOy)$  si on éclaire  $D$  suivant  $(Oz)$  (cf. figure V.3.1).  $D$  est alors un cylindre formé sur la courbe limitant  $A$  que l'on a fermé avec les surfaces

$$\Sigma_1 : z = \phi_1(x, y) \text{ et } \Sigma_2 : z = \phi_2(x, y)$$

**Théorème V.3.1** *Sous ces hypothèses faites sur  $D$ , si  $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$  est intégrable, on a :*

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int \int_A \left( \int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

Le calcul de  $F(x, y) = \int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$  correspond à un découpage de  $D$  suivant des bâtonnets parallèles à  $(Oz)$  (cf. figure V.3.2), dont la section infinitésimale correspond au quadrillage de l'ensemble  $A$ .

On rassemble tous ces bâtonnets lorsque l'on calcule

$$\int \int_A F(x, y) dx dy$$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents



## Calcul avec la méthode des bâtonnets

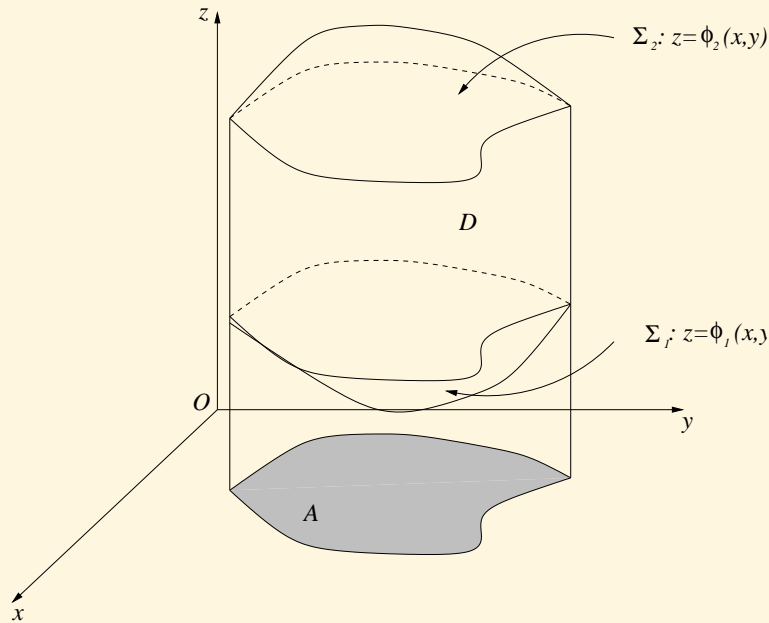


FIG. V.3.1 – Ensemble pour lequel on peut appliquer la méthode des bâtonnets

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Remarque V.3.1** *Pour obtenir le volume de  $D$ , on peut dans ce cas écrire :*

$$\mathcal{V}(D) = \int \int_A (\phi_2(x, y) - \phi_1(x, y)) \, dx dy$$

**Exemple V.3.1** *Soit l'ensemble  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in A, x^2 + y^2 \leq z \leq 2\}$  où*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

*Calculons*

$$I = \int \int \int_D z \, dx dy dz$$

*On se trouve sous les hypothèses du théorème :*

$$\begin{aligned} I &= \int \int_A \left( \int_{x^2+y^2}^2 z \, dz \right) dx dy \\ &= \int \int_A \left( 2 - \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} \right) dx dy \end{aligned}$$

*On est donc ramené à des techniques de calcul évoquées au chapitre précédent.*

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## Calcul avec la méthode des bâtonnets

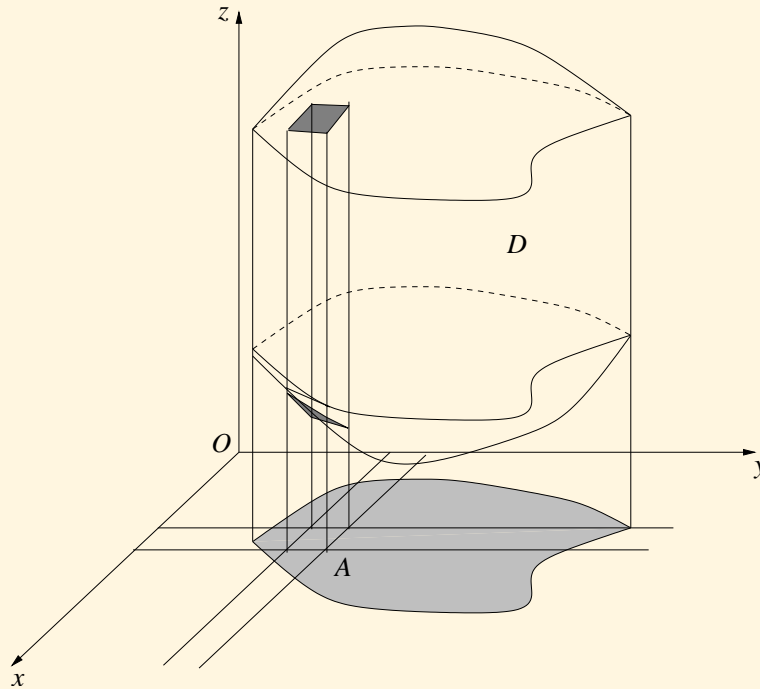
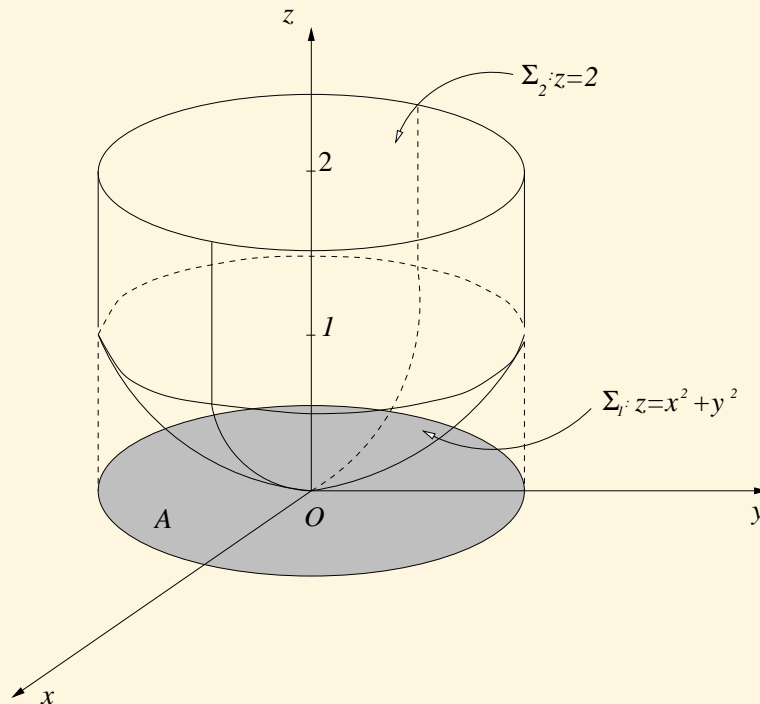


FIG. V.3.2 – Un bâtonnet

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## Calcul avec la méthode des bâtonnets



Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

*Si on passe en coordonnées polaires, on a :*

$$\begin{aligned} I &= \int \int_{[0;1] \times [0;2\pi]} \left( 2 - \frac{r^4}{2} \right) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ r^2 - \frac{r^6}{6} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta \\ I &= \frac{11\pi}{6} \end{aligned}$$

**Calcul avec la  
méthode des  
bâtonnets**

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## Calcul par la méthode des tranches

On suppose, ce qui n'exclut pas forcément le cas précédent, que l'ensemble cubable  $D$  peut être défini par :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \gamma \leq z \leq \delta, (x, y) \in D_z\}$$

où  $D_z$  est une partie quarrable de  $\mathbb{R}^2$  qui dépend de la cote  $z$  et qui correspond à la coupe de l'ensemble  $D$  suivant un plan parallèle à  $(xOy)$  (cf figure V.3.3) :  $D_{z_0} = D \cap \mathcal{P}_0$  où  $\mathcal{P}_0$  est le plan d'équation  $z = z_0$ .

**Théorème V.3.2** *Sous ces hypothèses faites sur  $D$ , si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable, on a :*

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\gamma}^{\delta} \left( \int \int_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

Cela correspond cette fois à un découpage de l'ensemble  $D$  en tranches  $D_z$  parallèles à  $(xOy)$ , on calcule, à  $z$  fixé :

$$F(z) = \int \int_{D_z} f(x, y, z) dx dy$$

grâce aux méthodes du chapitre précédent, puis on empile ces tranches pour le calcul de :

$$\int_{\gamma}^{\delta} F(z) dz = \int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz$$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## Calcul par la méthode des tranches

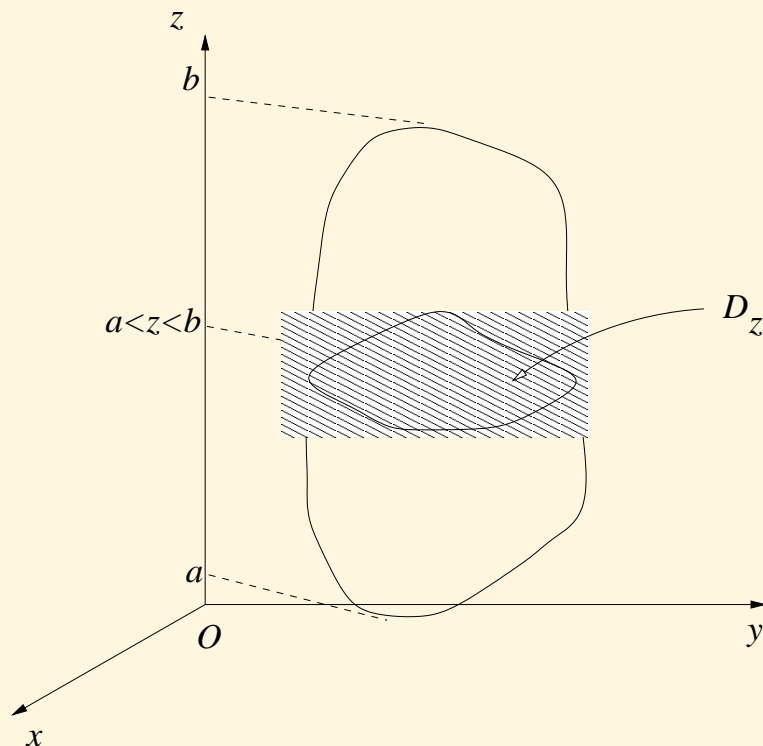


FIG. V.3.3 – Méthode des tranches

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

**Remarque V.3.2** – On peut, bien sûr, selon la commodité des calculs, découper en tranches parallèlement à  $(xOz)$  ou  $(yOz)$ , ce qui conduira à des égalités de la forme :

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d \left( \int \int_{D_y} f(x, y, z) dx dz \right) dy$$

ou

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left( \int \int_{D_x} f(x, y, z) dy dz \right) dx$$

– Si on veut calculer le volume d'un ensemble cubable  $D$ , l'application du théorème, lorsque l'ensemble  $D$  s'y prête, conduit à :

$$\mathcal{V}(D) = \int_{\gamma}^{\delta} \mathcal{A}(D_z) dz$$

où  $\mathcal{A}(D_z)$  est l'aire de  $D_z$ , formule qui ne vous est pas inconnue.

**Exemple V.3.2** Calculons

$$I = \int \int \int_D x^3 y^2 z dx dy dz$$

où l'ensemble  $D$  est défini par :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq xy\}$$

**Calcul par la  
méthode des  
tranches**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



Pour pouvoir appliquer le théorème, on est amené à redéfinir autrement l'ensemble  $D$  :

Soit  $z_0 \in \mathbb{R}^+$  et  $\mathcal{P}_{z_0}$  le plan d'équation  $z = z_0$ .

$$D \cap \mathcal{P}_{z_0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, xy \geq z_0\}$$

Si on note  $D_{z_0} = D \cap \mathcal{P}_{z_0}$ , on peut écrire :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq z \leq 1, (x, y) \in D_z\}$$

car on a  $D_z = \emptyset$  pour  $z > 1$ .

On peut alors tenter une représentation des ensembles  $D_{z_0}$  et de l'ensemble  $D$  (cf. figure V.3.4).

L'application du théorème conduit à :

$$I = \int_0^1 \left( \int \int_{D_z} x^3 y^2 z dx dy \right) dz$$

On est, là-encore, ramené aux méthodes de calcul du chapitre précédent : pour  $0 \leq z \leq 1$ , posons :

$$\begin{aligned} F(z) &= \int \int_{D_z} x^3 y^2 z dx dy \\ &= z \int_{\sqrt{z}}^1 \left( \int_{\frac{z}{x}}^x x^3 y^2 dy \right) dx \end{aligned}$$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

(On voit ici l'importance d'un schéma pour déterminer les bornes d'intégration)

$$\begin{aligned}
 F(z) &= z \int_{\sqrt{z}}^1 x^3 \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{\frac{z}{x}}^x dx \\
 &= z \int_{\sqrt{z}}^1 \left( \frac{x^6}{3} - \frac{z^3}{3} \right) dx \\
 &= z \left[ \frac{x^7}{21} - \frac{z^3 x}{3} \right]_{\sqrt{z}}^1 \\
 F(z) &= \frac{z}{21} - \frac{z^4}{3} - \frac{z^{\frac{9}{2}}}{21} + \frac{z^{\frac{9}{2}}}{3}
 \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$I = \int_0^1 F(z) dz = \frac{1}{110}$$

## Calcul par la méthode des tranches

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

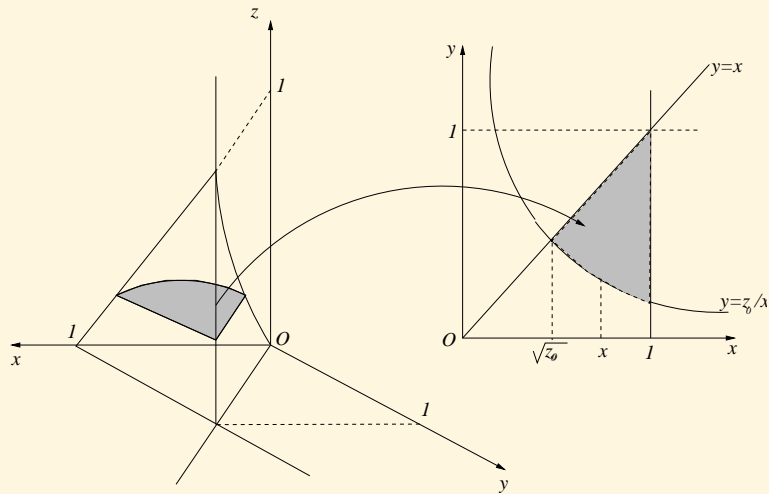


FIG. V.3.4 – Représentation de l'ensemble d'intégration

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## Changement de variables, généralités

### Exercices :

#### [Exercice A.1.2](#)

Là encore, on généralise ce qui a été vu au chapitre précédent.  
Soient  $D$  et  $\Delta$  des ensembles cubables de  $\mathbb{R}^3$ , on notera :

- $(x, y, z)$  les points de  $D$  ;
- $(u, v, w)$  les points de  $\Delta$ .

**Définition V.3.1** On désignera par **changement de variables** de  $\Delta$  sur  $D$  toute application :

$$\Phi : \Delta \longrightarrow D$$

$$(u, v, w) \longmapsto \Phi(u, v, w) = \begin{pmatrix} \alpha(u, v, w) \\ \beta(u, v, w) \\ \gamma(u, v, w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u, v, w) \\ y(u, v, w) \\ z(u, v, w) \end{pmatrix}$$

telle que :

- $\Phi$  est bijective de  $\Delta$  sur  $D$  ;
- $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont des fonctions  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Delta$  ;

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

- Si on écrit  $u, v$  et  $w$  en fonction de  $(x, y, z) \in D$  à l'aide de  $\Phi^{-1}$  (bijection réciproque), on obtient encore des fonctions  $C^1$  sur  $D$ .

**Définition V.3.2** On appelle **jacobien** d'un changement de variables  $\Phi$  l'expression, donnée par le **produit mixte** des vecteurs  $\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}$  et  $\frac{\partial \Phi}{\partial w}$  :

$$J_{\Phi}(u, v, w) = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial w} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial u} & \frac{\partial \alpha}{\partial v} & \frac{\partial \alpha}{\partial w} \\ \frac{\partial \beta}{\partial u} & \frac{\partial \beta}{\partial v} & \frac{\partial \beta}{\partial w} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial u} & \frac{\partial \gamma}{\partial v} & \frac{\partial \gamma}{\partial w} \end{vmatrix}$$

**Théorème V.3.3** Soient  $\Delta, D$  deux ensembles bornés et cubables de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Phi : \Delta \rightarrow D$  est un changement de variables de  $\Delta$  sur  $D$ . On suppose que la fonction

$$(u, v, w) \longmapsto J_{\Phi}(u, v, w)$$

reste bornée sur  $\Delta$ . Supposons que  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue sur  $D = \Phi(\Delta)$ , alors la fonction

$$(u, v, w) \longmapsto f \circ \Phi(u, v, w)$$

est intégrable sur  $\Delta$  et on a :

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{\Delta} f(\alpha(u, v, w), \beta(u, v, w)) |J_{\Phi}(u, v, w)| du dv dw$$

**Changement  
de variables,  
généralités**

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

Il s'agit là-encore de s'adapter à la géométrie de l'ensemble sur lequel on calcule l'intégrale triple considérée (lorsque cela entraîne des calculs plus faciles...) : il y a une déformation des éléments de volume servant à découper l'ensemble  $D$  (cf. figures [V.3.5](#) pour les coordonnées cylindriques), on utilise en quelque sorte des parallélépipèdes curvilignes.

## Changement de variables, généralités

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Passage aux coordonnées cylindriques

Les formules de changement de variables sont dans ce cas :

$$\Phi : (\rho, \theta, z) \mapsto \begin{pmatrix} x(\rho, \theta, z) & = & \rho \cos \theta \\ y(\rho, \theta, z) & = & \rho \sin \theta \\ z(\rho, \theta, z) & = & z \end{pmatrix}$$

Le triplet  $(\rho, \theta, z)$  constitue un système de coordonnées cylindriques. En choisissant  $\rho > 0$  et  $\theta \in [0, 2\pi[$  on définit une bijection de  $]0, +\infty[ \times [0, 2\pi[ \times \mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}^3 \setminus (Oz)$  (éventuellement une bijection d'un sous-ensemble  $\Delta$  sur un autre sous-ensemble  $D$ ).

$$\forall (\rho, \theta, z) \in ]0, +\infty[ \times [0, 2\pi[ \times \mathbb{R}$$

$$J_{\Phi}(\rho, \theta, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

Pour passer en coordonnées cylindriques dans une intégrale triple, on remplace

- $D$  par le domaine des  $(\theta, \rho, z)$  correspondant  $(\Phi^{-1}(D) = \Delta)$  ;
- $f(x, y, z)$  par  $f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$  ;
- $dx dy dz$  par  $\rho d\theta d\rho dz$ .

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## Passage aux coordonnées cylindriques

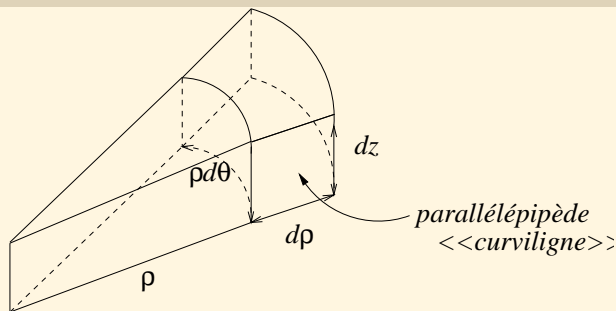


FIG. V.3.5 – Élément de volume en coordonnées cylindriques

**Exemple V.3.3** *Calcul du volume d'un ellipsoïde de révolution par rapport à l'axe  $(Oz)$  :*

*Soit l'ensemble  $D$  défini par*

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

*où  $c$  est strictement positif; on a en fait*

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1, -c\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \leq z \leq c\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \right\}$$

*ce qui correspond, en coordonnées cylindriques, à l'ensemble*

$$\Delta = \left\{ (\rho, \theta, z) / 0 < \rho \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi, -c\sqrt{1 - \rho^2} \leq z \leq c\sqrt{1 - \rho^2} \right\}$$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents



*L'application du théorème conduit dans ce cas à :*

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(D) &= \int \int \int_D dx dy dz = \int \int \int_{\Delta} |J_{\phi}(\rho, \theta, z)| d\rho d\theta dz \\ &= \int \int \int_{\Delta} \rho d\rho d\theta dz\end{aligned}$$

*On peut alors, par exemple, appliquer la méthode des bâtonnets pour calculer cette intégrale :*

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(D) &= \int \int_{[0;1] \times [0,2\pi]} \rho \left( \int_{-c\sqrt{1-\rho^2}}^{c\sqrt{1-\rho^2}} dz \right) d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \rho \left( \int_{-c\sqrt{1-\rho^2}}^{c\sqrt{1-\rho^2}} dz \right) d\rho \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 2c\rho\sqrt{1-\rho^2} d\rho \right) d\theta \\ &= c \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{2}{3}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta \\ \mathcal{V}(D) &= \frac{4\pi}{3}c\end{aligned}$$

*On retrouve au passage que, lorsque  $c = 1$ ,  $\mathcal{V}(D) = \frac{4\pi}{3}$ , ce qui est bien le volume d'une sphère de rayon 1.*

**Passage aux  
coordonnées  
cylindriques**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Passage aux coordonnées sphériques

Les formules de changement de variables :

$$\Phi : (\rho, \theta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} x(\rho, \theta, \varphi) & = & \rho \cos \theta \cos \varphi \\ y(\rho, \theta, \varphi) & = & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ z(\rho, \theta, \varphi) & = & \rho \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Le triplet  $(\rho, \theta, \varphi)$  constitue un système de coordonnées sphériques. En choisissant  $\rho > 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi[$  et  $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  on définit une bijection de  $]0, +\infty[ \times [0, 2\pi[ \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0; 0; 0)\}$  (éventuellement une bijection d'un sous-ensemble  $\Delta$  sur un autre sous-ensemble  $D$ ).

$$\forall (\rho, \theta, \varphi) \in ]0, +\infty[ \times [0, 2\pi[ \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$J_{\Phi}(\rho, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \cos \varphi & -\rho \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho^2 \cos \varphi$$

Pour passer en coordonnées sphériques dans une intégrale triple, on remplace

- $D$  par le domaine  $\Delta$  des  $(\theta, \varphi, \rho)$  correspondant ( $\Phi^{-1}(D) = \Delta$ ) ;
- $f(x, y, z)$  par  $f(\rho \cos \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$  ;
- $dx dy dz$  par  $\rho^2 |\cos \varphi| d\theta d\varphi d\rho$  (Si  $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , alors  $\cos \varphi \geq 0$  et  $|\cos \varphi| = \cos \varphi$ ).

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

**Exemple V.3.4** On veut calculer l'intégrale suivante

$$I = \int \int \int_D \frac{1}{\sqrt{9 - (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}} dx dy dz$$

où l'ensemble  $D$  est la boule creuse définie par :

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \right\}$$

ce qui correspond en coordonnées sphériques à l'ensemble

$$\Delta = \left\{ (\rho, \theta, \phi) / \frac{1}{2} \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta < 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

L'application de la formule de changement de variables conduit à :

$$\begin{aligned} I &= \int \int \int_{\Delta} \frac{|\rho^2 \cos \phi|}{\sqrt{9 - \rho^3}} d\rho d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi d\phi \cdot \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\rho^2}{\sqrt{9 - \rho^3}} d\rho \\ &= 4\pi \left[ -\frac{2}{3} (9 - \rho^3)^{\frac{1}{2}} \right]_{\frac{1}{2}}^2 \\ I &= \frac{8\pi}{3} \left( \sqrt{\frac{71}{8}} - 1 \right) \end{aligned}$$

**Passage aux  
coordonnées  
sphériques**

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## V.4 Des applications

Détermination du centre de gravité d'un solide . . . . .	37
Moments d'inertie . . . . .	39
Théorème de Guldin . . . . .	42

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Détermination du centre de gravité d'un solide

### Exercices :

#### [Exercice A.1.3](#)

On considère un objet qu'on assimile à un ensemble cubable  $D$  de  $\mathbb{R}^3$ .

**Définition V.4.1** On appelle **masse volumique (ou densité)** au point  $M \in D$  le réel  $\mu(M) = \mu(x, y, z)$  qui représente la masse par unité de volume de cet objet et qui peut dépendre de la position de  $M$  (et aussi du matériau avec lequel est fait l'objet).

**Définition V.4.2** On appelle **masse totale** du solide  $D$  de  $\mathbb{R}^3$  de masse volumique  $\mu$  le nombre réel **positif**  $m$  défini par l'intégrale triple :

$$m = \int \int \int_D \mu(M) dx dy dz$$

où  $M$  décrit  $D$ .

**Définition V.4.3** On appelle **centre d'inertie (ou centre de gravité)** du solide  $D$  de  $\mathbb{R}^3$  de masse volumique  $\mu$  le point  $G$  dont les coordonnées sont données par

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

*les intégrales triples :*

$$x_G = \frac{1}{m} \int \int \int_D \mu(M) x dx dy dz$$

$$y_G = \frac{1}{m} \int \int \int_D \mu(M) y dx dy dz$$

$$z_G = \frac{1}{m} \int \int \int_D \mu(M) z dx dy dz$$

*ce qui vectoriellement s'écrit :*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= x_G \overrightarrow{i} + y_G \overrightarrow{j} + z_G \overrightarrow{k} \\ &= \frac{1}{m} \left( \int \int \int_D \mu(M) x dx dy dz \right) \overrightarrow{i} + \frac{1}{m} \left( \int \int \int_D \mu(M) y dx dy dz \right) \overrightarrow{j} \\ &\quad + \frac{1}{m} \left( \int \int \int_D \mu(M) z dx dy dz \right) \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{OG} &= \frac{1}{m} \int \int \int_D \mu(M) \overrightarrow{OM} dx dy dz \end{aligned}$$

## Détermination du centre de gravité d'un solide

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## Moments d'inertie

### Exercices :

#### Exercice A.1.4

Avec les mêmes notations que précédemment :

**Définition V.4.4** *Le **moment d'inertie du solide**  $D$  par rapport à la droite  $\Delta$  est défini par :*

$$\mathcal{I}_{\Delta} = \int \int \int_D [d(M, \Delta)]^2 \mu(x, y, z) dx dy dz$$

où  $d(M, \Delta)$  représente la distance du point  $M(x, y, z)$  à la droite  $\Delta$ , i.e.  $d(M, \Delta) = \|\overline{MH}\|$  où  $H$  est le projeté orthogonal du point  $M$  sur la droite  $\Delta$ .

**Exemple V.4.1** *Calcul du moment d'inertie d'un cylindre de révolution homogène, par rapport à son axe de révolution.*

Soit le cylindre occupant l'ensemble  $D = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}$  avec  $a > 0, h > 0$ .

$$\mathcal{I}_{Oz} = \int \int \int_D [d(M, (Oz))]^2 \mu dx dy dz$$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

**Moments  
d'inertie**

avec  $\mu$  constante.

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{Oz} &= \mu \int \int \int_D (x^2 + y^2) dx dy dz \\ &= \mu \int \int \int_{\Delta} \rho^3 d\rho d\theta dz\end{aligned}$$

en passant en coordonnées cylindriques avec  $\Delta = \{(\rho, \theta, z) / 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h\}$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{Oz} &= \mu \cdot 2\pi \cdot h \cdot \int_0^a \rho^3 d\rho \\ &= \frac{1}{2} \mu \pi h a^4 \\ \mathcal{I}_{Oz} &= \frac{1}{2} m a^2\end{aligned}$$

où  $m = \mu \pi h a^2$  est la masse du cylindre.

**Définition V.4.5** Le **moment d'inertie du solide  $D$  par rapport au point  $A$**  est défini par :

$$\mathcal{I}_A = \int \int \int_D [d(M, A)]^2 \mu(x, y, z) dx dy dz$$

$$\mathcal{I}_A = \int \int \int_D ((x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2) \mu(x, y, z) dx dy dz$$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents



**Définition V.4.6** *Le moment d'inertie du solide  $D$  par rapport au plan  $\mathcal{P}$  est défini par :*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{P}} = \int \int \int_D [d(M, \mathcal{P})]^2 \mu(x, y, z) dx dy dz$$

où  $d(M, \mathcal{P})$  représente la distance du point  $M(x, y, z)$  au plan  $\mathcal{P}$ , i.e.  $d(M, \mathcal{P}) = \|\overrightarrow{MH}\|$  où  $H$  est le projeté orthogonal du point  $M$  sur le plan  $\mathcal{P}$ .

On rappelle que les distances évoquées ci-dessus peuvent être calculées simplement en établissant que :

$$d(M, \Delta) = \frac{\|\overrightarrow{M_0M} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$$

où  $M_0$  est un point de  $\Delta$  et  $\overrightarrow{u}$  est un vecteur directeur de  $\Delta$  ;

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{\|\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$$

où  $M_0$  est un point de  $\mathcal{P}$  et  $\overrightarrow{u}$  un vecteur normal à  $\mathcal{P}$ .

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Théorème de Guldin

### Exercices :

#### Exercice A.1.5

On considère un solide de révolution par rapport à l'axe  $(Oz)$  : on peut voir ce solide  $S$  comme ce qu'on obtient en faisant tourner une plaque  $D$  autour de  $(Oz)$  (cf. figure V.4.6).

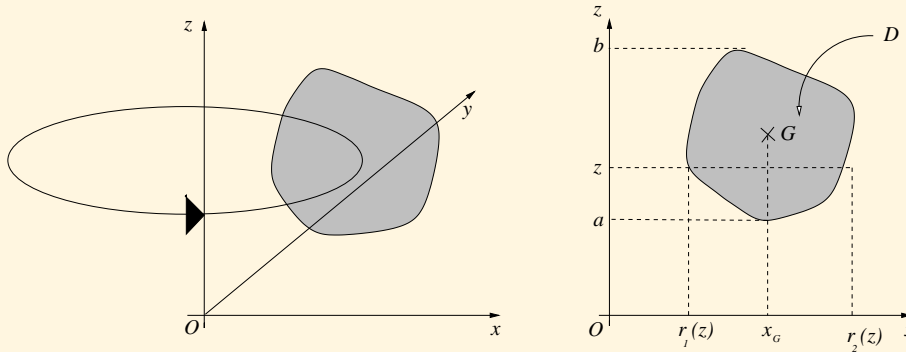


FIG. V.4.6 –

Si  $D$  est un disque, on obtient un *tore*.

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## Théorème de Guldin

On voudrait calculer  $\mathcal{V}(\mathcal{S})$  :

$$\mathcal{V}(\mathcal{S}) = \int \int \int_{\mathcal{S}} dx dy dz = \int \int \int_{\Delta} \rho d\rho d\theta dz$$

en passant en coordonnées cylindriques, avec :

$$\Delta = \{(\rho, \theta, z) / a \leq z \leq b, 0 \leq \theta < 2\pi, \rho_1(z) \leq \rho \leq \rho_2(z)\}$$

$$\mathcal{V}(\mathcal{S}) = \int_0^{2\pi} \left( \int_a^b \left( \int_{\rho_1(z)}^{\rho_2(z)} \rho d\rho \right) dz \right) d\theta = 2\pi I$$

en posant :

$$I = \int_a^b \left( \int_{\rho_1(z)}^{\rho_2(z)} \rho d\rho \right) dz$$

Si on regarde, dans le plan  $(xOz)$  par exemple, la plaque  $D$  comme un objet homogène de masse surfacique  $\mu = 1$ , l'abscisse  $x_G$  de son centre de gravité est donnée par ( $m = \mu \mathcal{A}(D) = \mathcal{A}(D)$  est alors la masse de la plaque) :

$$x_G = \frac{1}{\mathcal{A}(D)} \int_a^b \left( \int_{\rho_1(z)}^{\rho_2(z)} x dx \right) dz = \frac{1}{\mathcal{A}(D)} \int_a^b \left( \int_{\rho_1(z)}^{\rho_2(z)} \rho d\rho \right) dz$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

ce qui permet d'écrire :

$$I = mx_G = x_G \mathcal{A}(D)$$

d'où

$$\boxed{\mathcal{V}(\mathcal{S}) = 2\pi I = 2\pi x_G \mathcal{A}(D)}$$

En résumé, le volume engendré par la rotation de  $D$  autour de l'axe  $(Oz)$  est le produit du trajet parcouru par le centre de gravité de  $D$  (cercle de rayon  $x_G$ ) par l'aire de  $D$ .

## **Théorème de Guldin**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Annexe A

## Exercices

A.1	Exercices de cours . . . . .	46
A.2	Exercices de TD . . . . .	52

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

# A.1 Exercices de cours

A.1.1	Chap5-Exercice1 . . . . .	47
A.1.2	Chap5-Exercice2 . . . . .	48
A.1.3	Chap5-Exercice3 . . . . .	49
A.1.4	Chap5-Exercice4 . . . . .	50
A.1.5	Chap5-Exercice5 . . . . .	51

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

### Exercice A.1.1 Chap5-Exercice1

Démontrer la proposition [V.2.1](#) dans le cas d'un parallélépipède  $D = [a, b] \times [c, d] \times [\gamma, \delta]$ .

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.2 Chap5-Exercice2

En s'inspirant de la géométrie de  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ , ensemble limité par l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

trouver un changement de variables qui permette un calcul facile du volume  $\mathcal{V}(\mathcal{E})$ .

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



### Exercice A.1.3 Chap5-Exercice3

Soit  $B$  une demi-boule homogène (de masse volumique constante égale  $\mu$ ) définie par

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$$

Calculer les coordonnées de son centre de gravité  $G$ .

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.4 Chap5-Exercice4

Reprendre la demi-boule de l'exercice [A.1.3](#) et calculer :

1. son moment d'inertie par rapport à l'axe  $(Oz)$  ;
2. son moment d'inertie par rapport à  $O$ .

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.5** Chap5-Exercice5

Calculer le volume d'un solide  $\mathcal{S}$  engendré par la rotation d'une plaque de forme circulaire de rayon  $R$  autour de l'axe  $(Oz)$ .

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## A.2 Exercices de TD

A.2.1	Fubini . . . . .	53
A.2.2	Fubini, coordonnées cylindriques . . . . .	54
A.2.3	coordonnées sphériques . . . . .	55
A.2.4	Fubini, des bâtons et des tranches . . . . .	56
A.2.5	Fubini, des bâtons et des tranches . . . . .	57
A.2.6	Fubini . . . . .	58
A.2.7	intersection sphère-cylindre . . . . .	59
A.2.8	intersection sphère-cône . . . . .	60
A.2.9	variables sphériques . . . . .	61
A.2.10	ellipsoïde/8 . . . . .	62

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.2.1 Fubini**

On considère le domaine de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x \geq 0, \quad z \geq 0, \quad x - 2y + 2z \leq 0, \quad y \leq 1\}$$

1. Faire une figure et exprimer de plusieurs façons  $\int \int \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz$  à l'aide d'intégrales simples.
2. Calculer les coordonnées du centre de gravité de  $\mathcal{V}$  qu'on supposera homogène pour l'occasion.

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

**Exercice A.2.2** Fubini, coordonnées cylindriques

On considère le domaine de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$$

1. Faire une figure et exprimer de plusieurs façons  $\int \int \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz$  à l'aide d'intégrales simples.
2. Calculer le volume de  $\mathcal{V}$  en utilisant l'une des expressions obtenues.
3. Calculer le volume de  $\mathcal{V}$  en utilisant un changement de variables en coordonnées cylindriques.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.2.3** coordonnées sphériques

On considère le domaine de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 \leq 4\}$$

1. Faire une figure et exprimer  $\int \int \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz$  à l'aide des coordonnées sphériques.
2. Calculer le volume de  $\mathcal{V}$ .

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.2.4 Fubini, des bâtons et des tranches

On considère le domaine de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad z + x^2 + y^2 \leq 4, \quad z + 2y \geq 1\}$$

1. Faire une figure.
2. (a) Quelle est la projection de  $\mathcal{V}$  sur le plan  $z = 0$ ?  
 (b) Quelle est la projection de  $\mathcal{V}$  sur le plan  $x = 0$ ?  
 (c) Quelle est l'intersection de  $\mathcal{V}$  avec le plan  $y = b$ ?
3. En déduire trois façons de calculer  $\int \int \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz$ .
4. Calculer le volume de  $\mathcal{V}$ .

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents



### Exercice A.2.5 Fubini, des bâtons et des tranches

On considère le domaine de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - 2y\}$$

1. Faire une figure.
2. (a) Quelle est la projection de  $\mathcal{V}$  sur le plan  $z = 0$ ?  
(b) Quelle est la projection de  $\mathcal{V}$  sur le plan  $x = 0$ ?  
(c) Quelle est l'intersection de  $\mathcal{V}$  avec le plan  $y = b$ ?  
(d) Quelle est l'intersection de  $\mathcal{V}$  avec le plan  $z = c$ ?
3. En déduire quatre façons de calculer  $\int \int \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz$ .
4. Calculer le volume de  $\mathcal{V}$ .

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.2.6 Fubini

On considère le domaine de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y \geq 2, 2y + x \leq 6, y^2 + z^2 \leq 4\}$$

1. Faire une figure et exprimer  $\int \int \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz$  à l'aide d'intégrales simples.
2. Calculer  $\int \int \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz$  lorsque  $f(x, y, z) = z$ .

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

**Exercice A.2.7** intersection sphère-cylindre

On considère le domaine de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$\mathcal{V} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \quad x^2 + \left(y - \frac{R}{2}\right)^2 \leq \frac{R^2}{4} \right\}$$

Faire une figure et calculer le volume de  $\mathcal{V}$ .

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.2.8** intersection sphère-cône

Calculer le volume de l'intersection de la sphère d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  et du cône d'équation  $x^2 + y^2 \leq z^2$ .

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.2.9** variables sphériques

On considère le domaine de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\}$$

Calculer l'intégrale triple  $\int \int \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz$ .

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.2.10** ellipsoïde/8

On considère le domaine de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$\mathcal{V} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

En supposant que la masse volumique vaut 1, calculer la masse et le moment d'inertie de  $\mathcal{V}$  par rapport à l'origine.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

## C

Centre de gravité .....	<b>37</b>
Changement de variables .....	<b>28</b>
Coordonnées cylindriques (changement de variables en) .....	<b>31</b>
Coordonnées sphériques (changement de variables en) .....	<b>34</b>

## E

Ensemble cubable .....	<b>5</b>
------------------------	----------

## I

Intégrale triple .....	<b>7</b>
Intégrales sur un parallélépipède ..	<b>15</b>

## L

Linéarité .....	<b>11</b>
-----------------	-----------

## M

Méthode des bâtonnets .....	<b>16</b>
Méthodes des tranches .....	<b>22</b>
Moments d'inertie .....	<b>39</b>

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



## P

Positivité-Comparaison de deux intégrales

**12**

## T

Théorème de Guldin ..... **42**

## V

Volume ..... **10**

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents



## Solution de l'exercice A.1.1

Dans ce cas là, on a, pour tout  $n$  entier non nul :

$$s_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} 1 \mathcal{V}(P_{i,j,k})$$

et

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} 1 \mathcal{V}(P_{i,j,k})$$

avec  $\mathcal{V}(P_{i,j,k}) = \frac{(b-a)(d-c)(\delta-\gamma)}{n^3} \quad \forall (i, j, k)$  d'où

$$s_n(f) = S_n(f) = n^3 \frac{(b-a)(d-c)(\delta-\gamma)}{n^3} = (b-a)(d-c)(\delta-\gamma)$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.2

On peut s'inspirer des coordonnées sphériques, puisque, pour  $a = b = c$ , l'ellipsoïde considéré est une sphère.

Utiliser le changement de variables :

$$\begin{cases} x &= a\rho \cos \theta \cos \phi \\ y &= b\rho \sin \theta \cos \phi \\ z &= c\rho \sin \phi \end{cases} \quad (\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}_*^+ \times [0; 2\pi[ \times \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Le jacobien de ce changement est  $abc\rho^2 \cos \phi$  et on obtient

$$\mathcal{V}(\mathcal{E}) = \frac{4}{3}\pi abc$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Solution de l'exercice A.1.3

Pour des raisons de symétrie, on doit trouver  $x_G = y_G = 0$  et utiliser, bien sûr, les coordonnées sphériques pour calculer  $z_G$ .

La masse de la demi-boule est  $m = \frac{2}{3}\pi R^3 \mu$  et

$$z_G = \frac{\mu}{m} \int \int \int_{[0;R] \times [0;2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]} \rho \sin \phi \rho^2 \cos \phi d\rho d\theta d\phi = \frac{3R}{8}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.4

En reprenant les notations de l'exercice [A.1.3](#), on obtient  $\frac{2}{5}mR^2$  pour le moment par rapport à l'axe  $Oz$  et  $\frac{3}{5}mR^2$  pour le moment par rapport au point  $O$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Solution de l'exercice A.1.5

$\mathcal{V}(S) = 2\pi^2 d R^2$  où  $d$  est la distance du centre de la plaque à l'axe  $Oz$  (en supposant  $d > R$ ).

[Retour à l'exercice ▲](#)