

Chap 1 - Expérience aléatoire et probabilité

σ-algèbre Une famille F de sous ensembles de Ω vérifiant

- i) Ω ∈ F
- ii) Si A ∈ F, alors A^c ∈ F
- iii) Si (A_n)_{n≥1} ⊂ F alors ∪_n A_n ∈ F

Probabilité sur (Ω, F). Une application P de F dans R tq

- i) P(Ω) = 1
- ii) P(A) ≥ 0 pour tout A ∈ F
- iii) Si (A_n)_{n≥1} ⊂ F, 2 à 2 disjoints, alors P(∪_n A_n) = ∑_n P(A_n)

Combinatoire

nb de Permutations de n éléments : n!

nb de Permutations r-distinctes de n éléments : n! / (n_1! ... n_r!)

nb d'Arrangements de p parmi n : A_n^p = n! / (n-p)!

nb de Combinaisons de p parmi n : C_n^p = n! / (p!(n-p)!) (pas d'ordre)

Chap 2 - Calcul élémentaire de probabilités

Probabilités totales P(A) = ∑_{n∈I} P(A|A_n)P(A_n)

Formule de Bayes P(A_n|A) = (P(A|A_n)P(A_n)) / ∑_{i∈I} P(A|A_i)P(A_i)

Formule de Poincaré

P(∪_{i=1}^n A_i) = ∑_{i=1}^n P(A_i) - ∑_{i<j} P(A_i ∩ A_j) + ... + (-1)^{n-1} P(∩_{i=1}^n A_i)

Chap 3 - Variable aléatoire discrète

Espérance mathématique et moments : définitions

espérance : E[X] = ∑_x xP(X = x) si ∑_x |x|P(X = x) < ∞

moment d'ordre n : E[X^n] = ∑_x x^n P(X = x)

variance : Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2

moment centré d'ordre r : μ_r = E[(X - E[X])^r]

Propriétés (également valables pour les v.a réelles)

E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]

E[XY] = E[X]E[Y] si X, Y indépendants

Var(aX + b) = a^2Var(X)

Var(∑_i X_i) = ∑_i Var(X_i) si les X_i sont indépendants

Lois d'une variable aléatoire discrète

Fonction de répartition F_X(x) = ∑_{y≤x} P(X = y)

Produit de convolution c_n = (a_n) * (b_n) = ∑_{k=0}^n a_k b_{n-k}

Somme de deux v.a. P(X + Y = n) = (p_X * p_Y)(n)

Fonctions génératrices

g(s) = E[s^X] = ∑_{i∈N} p_i s^i

E[X] = g'(1); Var(X) = g''(1) + g'(1) - (g'(1))^2

Lois	$\mathbb{P}(X = k)$	$\mathbb{E}[X]$	$\text{Var}[X]$	$g(s)$
$B(p)$	$\mathbb{P}(X = 1) = p$	p	$p(1 - p)$	$1 - p + pu$
$B(n, p)$	$C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$	np	$np(1 - p)$	$(1 - p + ps)^n$
$\mathbb{P}(\lambda)$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$\exp(-\lambda + \lambda s)$
$G(p)$	$p(1 - p)^{k-1}$	$1/p$	$(1 - p)/p^2$	$ps/(1 - s - ps)$

FIG. 1 – Caractéristiques des lois discrètes usuelles

Chap 4 - Variable aléatoire réelle

Propriétés essentielles

Fonction de répartition $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

Espérance $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x dF_X = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx$ si abs. continue.

Médiane $M \in \mathbb{R}$ satisfaisant $\mathbb{P}(X \geq M) \geq \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X \leq M) \geq \frac{1}{2}$

X abs. continue $\Leftrightarrow \forall \phi$ borélienne : $\mathbb{E}[\phi \circ X] = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f_X(x) dx$

Fonction génératrice

$M(t) = \mathbb{E}[\exp(tX)] = \int_{\mathbb{R}} \exp(tx) f_X(x) dx$

$M^{(n)}(0) = \mathbb{E}[X^n]$

Si M est définie sur $[-a, a]$:

- X possède des moments finis de tous ordres
- $M(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbb{E}[X^k]$

Lois	f_X	$\mathbb{E}[X]$	$\text{Var}[X]$	$M(t)$
unif.	$\frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(a-b)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
normale	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	μ	σ^2	$\mu t + \exp\frac{t^2\sigma^2}{2}$
exp.	$\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda - t)$
gamma	$\frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$	α/λ	α/λ^2	$(\lambda/(\lambda - t))^\alpha$

FIG. 2 – Caractéristiques de quelques variables continues

Loi normale ou de Gauss

Si $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ alors $X = \frac{Y - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

Si $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ sont indépendantes alors $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Inégalités

Bienaymé-Tchebichev $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \epsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\epsilon^2}$

Cauchy-Schwarz $(\mathbb{E}[XY])^2 \leq \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]$

Jensen $\mathbb{E}[\phi(X)] \geq \phi(\mathbb{E}[X])$ si ϕ est convexe sur R

Chap 5 - Variable aléatoire vectorielle

Covariance - définition et propriétés

Covariance $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$

- $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$
- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
- $\text{Cov}(aX + bY, Z) = a\text{Cov}(X, Z) + b\text{Cov}(Y, Z)$
- Si X et Y indépendants, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$
- $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$

coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$

- $|\rho_{X,Y}| \leq 1$

Lois, densités, fonctions de répartition

Soient $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d) \in \mathbb{R}^d$ une v.a. vectorielle et $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$

f. de répartition $F(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d)$

f. de densité $f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^d F(\mathbf{x})}{\partial x_1 \dots \partial x_d}$

relation densité/f.d.r $F(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_d} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d$

f. de répartition marginale $F_i(x) = F(\infty, \dots, \infty, x, \infty, \dots, \infty)$

densité marginale pour calculer $f_i(x)$ on fixe x et on intègre $f(x_1 \dots x_n)$ par rapport aux autres variables.

Espérance et matrice de covariance

espérance $\mathbb{E}[\mathbf{X}] = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_d])'$

matrice de covariance $K = (K_{ij})_{i,j=1,\dots,d} = \text{Cov}(X_i, X_j)$

Transformation d'une v.a

Soit $Y = g(X)$, on a

$f_Y(y) = f_X \circ g^{-1}(y) \left| \frac{dg^{-1}}{dy} \right| \mathbb{1}_F(y)$

Transformation vectorielle

Soit $\mathbf{Y} = \mathbf{g}(\mathbf{X})$ de \mathbb{R}^d , on a

$f_Y(y) = f_X \circ \mathbf{g}^{-1}(y) |DJ_{\mathbf{g}^{-1}}(y)| \mathbb{1}_F(y)$ avec $DJ_{\mathbf{g}^{-1}} = (DJ_{\mathbf{g}})^{-1}$

$$DJ_{\mathbf{g}} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_d} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_d}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_d}{\partial x_d} \end{pmatrix}$$

Vecteur aléatoire gaussien

définition Soit \mathbf{a} un vecteur de \mathbb{R}^d fixé. La v.a.v. \mathbf{X} de \mathbb{R}^d est dite gaussienne si la v.a. $a_1 X_1 + \dots + a_d X_d$ est gaussienne.

chacun des X_i est gaussien ;

$\mathbf{g} \circ \mathbf{X}$ est gaussienne si \mathbf{g} est affine de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^m ;

Si $\mathbf{Y} = B\mathbf{X} + b$, alors $K_Y = BK_X B'$;

Si les X_i sont gaussiens et indépendantes, \mathbf{X} est gaussien.

Si \mathbf{X} est un vecteur gaussien, K_X est non-singulière \Leftrightarrow

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} (\det K_X)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)' K_X^{-1}(\mathbf{x} - \mu)\right\}$$

Chap 6 - Indépendance et conditionnement

Indépendance de n v.a.

X_1, \dots, X_n

v.a. discrètes $p(x_1, \dots, x_n) = p_1(x_1) \times \dots \times p_n(x_n)$

v.a. continues $F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \times \dots \times F_n(x_n)$

v.a. à densité $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \times \dots \times f_n(x_n)$

n'importe $\mathbb{E}[h_1(X_1) \times \dots \times h_n(X_n)] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[h_i(X_i)]$

Sommes de deux v.a.r indépendantes

- $F_{X+Y}(u) = \int_{\mathbb{R}} F_X(u-y) dF_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} F_Y(u-x) dF_X(x)$

- $M_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \dots M_{X_n}(t)$

Loi conditionnelle

discret $\mathbb{E}[Y|X=x] = \sum_{Y \in E} y \mathbb{P}(Y=y|X=x) = \sum_{Y \in E} y p_X(y)$

continu Soit $f(x,y)$ la densité jointe du couple,

$$F_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{f_X(x)} \int_{-\infty}^y f(x,v) dv$$
$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f(x,y)}{\int_{\mathbb{R}} f(x,v) dv}$$

espérance $\mathbb{E}[Y|X=x] = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y|x) dy$

variance $\text{Var}[Y|X=x] = \int_{\mathbb{R}} y^2 f_{Y|X}(y|x) dy - (\mathbb{E}[Y|X=x])^2$

Espérance conditionnelle

linéarité $\mathbb{E}[aX + bY|Z] = a\mathbb{E}[X|Z] + b\mathbb{E}[Y|Z]$.

indépendance $\mathbb{E}[Y|X] = \mathbb{E}[Y]$ si X et Y sont ind. (réciproque fausse).

théorème de l'espérance totale $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[Y]$

$\mathbb{E}[h(X)Y|X] = h(X)\mathbb{E}[Y|X]$

$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X, Z, V]|X, Z] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X, Z]]$.

Lemme de Wald $\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1]$ où $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$, $N \in \mathbb{N}^*$ et X_i iid

Variance conditionnelle

$\text{Var}(Y|X) = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}(Y|X))^2|X] = \mathbb{E}(Y^2|X) - [\mathbb{E}(Y|X)]^2$

$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}[\text{Var}(Y|X)] + \text{Var}[\mathbb{E}(Y|X)]$

Chap 7 - Convergence stochastique

Convergence presque-sure Si $\mathbb{P}\left(\omega : X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X(\omega)\right) = 1$, X_n converge presque sûrement vers X et on note $X_n \xrightarrow{p.s.} X$

Convergence en moyenne quadratique Soient $\mathbb{E}|X_n|^2 < \infty$ et $\mathbb{E}|X|^2 < \infty$, si $\mathbb{E}[|X_n - X|^2] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, X_n converge en moyenne quadratique vers X et on note $X_n \xrightarrow{m.q.} X$.

Convergence en probabilité Si $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$, X_n converge en probabilité vers X et on note $X_n \xrightarrow{p} X$.

Convergence en loi Si $F_n \rightarrow F$ en tout point de continuité de F , X_n converge en loi vers X et on note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Loi faible des grands nombres Soient les X_i i.i.d. tels que $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. Soit $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, alors $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \mathbb{E}(X_1)$

Loi forte des grands nombres Soient les X_i i.i.d. et $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$. On a $\mathbb{E}|X_1| < \infty \Leftrightarrow S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}(X_1)$

Théorème de la limite centrale Soient les X_i i.i.d. de moyenne μ et de variance σ^2 , alors $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} = \sqrt{n} \left(\frac{S_n - \mu}{\sigma} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$

Fonction caractéristique d'une v.a.r : $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\exp(itX)]$

- si $Y = aX + b$, alors $\varphi_Y(t) = \exp(itb) \varphi_X(at)$

- $\varphi_X(0) = 1, |\varphi_X(t)| \leq 1, \varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$

Lois	Fct caractéristiques
Bernoulli $B(p)$	$pe^{it} + (1-p)$
Binomiale $B(n, p)$	$(pe^{it} + (1-p))^n$
Poisson $\mathbb{P}(\lambda)$	$\exp(-\lambda(1 - \exp it))$
Uniforme sur $[0,1]$	$(1 - \exp it)/it$
Normale $N(\mu, \sigma^2)$	$\exp(it\mu - \sigma^2 t^2/2)$
Exponentielle $E(\lambda)$	$\lambda/(\lambda - it)$