MT23-Algèbre linéaire

Chapitre 5 : Espaces euclidiens

ÉQUIPE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

UTC

décembre 2008

Chapitre V

Espaces Euclidiens et applications

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

V.1 Produit scalaire, norme, espace euclidien

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

V.1.1 Définition du produit scalaire

Exercices :
Exercice A.1.1
Exercice A.1.2

Exemples :
Exemple B.1.1

La notion d'espace vectoriel constitue le cadre général de l'algèbre linéaire. La richesse de la théorie s'accroît si à la structure d'espace vectoriel on ajoute d'autres notions qui permettent de rendre compte d'autres propriétés remarquables que l'on rencontre naturellement. En particulier il est intéressant de pouvoir traduire les propriétés de longueurs, distances, volumes, angles. Le produit scalaire et la notion d'espace euclidien vont permettre de définir et d'étudier toutes ces propriétés dites métriques.

Définition V.1.1. *On appelle* **produit scalaire** *dans un espace vectoriel réel E, une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ notée $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$*
possédant les propriétés suivantes :

1. *elle est bilinéaire :*
   - $\langle \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2, \vec{y} \rangle = \alpha_1 \langle \vec{x}_1, \vec{y} \rangle + \alpha_2 \langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle$,
   - $\langle \vec{x}, \alpha_1 \vec{y}_1 + \alpha_2 \vec{y}_2 \rangle = \alpha_1 \langle \vec{x}, \vec{y}_1 \rangle + \alpha_2 \langle \vec{x}, \vec{y}_2 \rangle$,
2. *elle est définie positive :*
   - $\forall \vec{x} \in E,\ \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$
   - $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Longrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
3. *elle est symétrique :* $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$ *on a* $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Il n'était pas nécessaire de donner la linéarité par rapport à la deuxième variable, on aurait pu grâce à la symétrie la déduire de la linéarité par rapport à la première variable.

Exemple : $E = \mathbb{R}^n$, le produit scalaire usuel défini par

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

vérifie bien évidemment les propriétés de la définition précédente. Si l'on note comme d'habitude X et Y les vecteurs colonnes dont les éléments sont respectivement les x_i et les y_i, le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ se calcule à l'aide du produit matriciel suivant :

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \; = X^T Y = Y^T X.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

V.1.2 Produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$

Exercices :
Exercice A.1.3

Avant de continuer nous allons introduire une notation que nous allons utiliser dorénavant jusqu'à la fin de ce cours. Si $\vec{x}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on lui associe de façon bijective un vecteur colonne X. Nous noterons maintenant avec la notation unique x à la fois le vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et le vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$. On utilisera plus tard la même notation entre $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$.
Le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$ est

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^T y = y^T x.$$

Proposition V.1.1. *Si* $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ *alors* $A^T \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ *vérifie :*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall y \in \mathbb{R}^m \tag{V.1.1}$$

(le produit scalaire du membre de gauche est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^m$ *et celui de droite est le produit scalaire usuel de* $\mathbb{R}^n$*.)*

Montrer cette proposition en exercice.

V.1.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercices :
Exercice A.1.4

Proposition V.1.2. Inégalité de Cauchy-Schwarz
On a

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle^2 \ \leq \ \langle\vec{x},\vec{x}\rangle\langle\vec{y},\vec{y}\rangle$$

avec égalité si et seulement si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires.

Démonstration – Pour $\vec{x},\vec{y}\in E$ et $\theta\in\mathbb{R}$ définissons

$$q(\theta)=\langle\vec{x}+\theta\vec{y},\vec{x}+\theta\vec{y}\rangle.$$

En utilisant la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire, on obtient

$$q(\theta)= \ \langle\vec{x},\vec{x}\rangle+2\theta\langle\vec{x},\vec{y}\rangle+\theta^2\langle\vec{y},\vec{y}\rangle.$$

De plus le produit scalaire est défini-positif, donc quel que soit $\theta\in\mathbb{R}$,

$$q(\theta)=\langle\vec{x}+\theta\vec{y},\vec{x}+\theta\vec{y}\rangle\geq 0.$$

Si $\vec{y}\neq 0$, $q(\theta)$ est un trinôme du second degré (car $\langle\vec{y},\vec{y}\rangle\neq 0$) qui est non négatif quelque soit θ , son discriminant est donc ≤ 0 d'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle^2-\langle\vec{x},\vec{x}\rangle\langle\vec{y},\vec{y}\rangle \ \leq 0.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Si $\vec{y} = \vec{0}$, l'inégalité est encore trivialement vérifiée puisque

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 = 0 \leq \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = 0.$$

Dans ce cas l'inégalité est une égalité, dans quel autre cas a-t-on encore une égalité ?
Si $\vec{y} \neq \vec{0}$ et $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 - \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = 0$, le discriminant est nul donc le trinôme du second degré $q(\theta)$ admet une racine (double), donc $\exists \bar{\theta}$ tel que $q(\bar{\theta}) = \langle \vec{x} + \bar{\theta}\vec{y}, \vec{x} + \bar{\theta}\vec{y} \rangle = 0$, or le produit scalaire est défini positif donc $\vec{x} + \bar{\theta}\vec{y} = \vec{0}$, ce qui veut dire que $\vec{x} = -\bar{\theta}\vec{y}$.
Réciproquement, si $\vec{x} = -\bar{\theta}\vec{y}$, un calcul direct montre que $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$.
En résumé on a toujours

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \leq \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle.$$

On a égalité pour $\vec{y} = \vec{0}$ ou $\vec{x} = -\bar{\theta}\vec{y}$ ce qui est équivalent à dire $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ est une famille liée, ou $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires (montrez le).

L'inégalité de Cauchy-Schwarz peut aussi s'écrire

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \sqrt{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle}.$$

Cette inégalité appliquée au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$, donne l'inégalité :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

V.1.4 Définition de la norme

Exercices :
Exercice A.1.5

Définition V.1.2. *On appelle* **norme** *sur un espace vectoriel réel E, une application de E dans $\mathbb{R}^+$ notée*

$$\vec{x} \mapsto \|\vec{x}\|$$

possédant les propriétés suivantes :

1. $\|\vec{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$,
2. $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha| \, \|\vec{x}\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,
3. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$: **inégalité triangulaire.**

Définition V.1.3. *On appelle* **espace vectoriel normé** *un espace vectoriel réel muni d'une norme.*

Exemple : Dans $\mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|, \text{ où } x = (x_1, \ldots, x_n)$$

définit une norme.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

En effet, c'est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \Longleftrightarrow x_i = 0,\ \forall i \quad \Longleftrightarrow x = 0.$$

Les deux autres propriétés proviennent de celles de la valeur absolue :

$$|\alpha x_i| = |\alpha||x_i| \text{ et } |x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|.$$

On appelle cette norme la norme 1 et on la note $\|.\|_1$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

V.1.5 Définition de l'espace euclidien

Proposition V.1.3. *Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire, alors l'application*

$$\vec{x} \mapsto \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \tag{V.1.2}$$

définit une norme sur E.

Démonstration – Il faut montrer que $\sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$ vérifie les 3 propriétés de la norme.
La propriété 1 provient du fait que le produit scalaire est défini positif.
La propriété 2 provient de la bilinéarité :

$$\sqrt{\langle \alpha\vec{x}, \alpha\vec{x} \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}.$$

La bilinéarité et la symétrie du produit scalaire permettent d'écrire :

$$\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$$

Ensuite, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne :

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \ \leq \ \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + 2\sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle} + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$$

d'où

$$\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle \ \leq \left(\sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} + \sqrt{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle} \right)^2$$

soit $\sqrt{\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle} \leq \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} + \sqrt{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Définition V.1.4. *Un* **espace euclidien** *est un espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire donc de la norme associée à ce produit scalaire.*

Exemple : $E = \mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie n muni du produit scalaire usuel $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ et de la norme associée

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

$\mathbb{R}^n$ est donc un espace euclidien.

On vient de voir qu'à un produit scalaire on peut associer une norme, la réciproque est fausse, par exemple il n'existe pas de produit scalaire associé à la norme $\displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|$ de $\mathbb{R}^n$, ni d'ailleurs à la norme $\max\limits_{1\le i\le n} |x_i|$.

Définition de l'espace euclidien

V.2 Orthogonalité

V.2.1 Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux

Exercices :
Exercice A.1.6
Exercice A.1.7

Exemples :
Exemple B.1.2

Définition V.2.1. *Soit un espace euclidien E.*

1. *Deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont* **orthogonaux** *si* $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$.
2. *Une famille de vecteurs $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ est* **orthogonale** *si*

$$\langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = 0, \forall i \neq j.$$

   Elle est **orthonormée** *ou* **orthonormale** *si de plus*

$$\|x_i\| = 1, \forall i = 1, \ldots, p.$$

3. *Si F est un sous-espace vectoriel de E, on appelle* **orthogonal de** *F dans E et on le note $F^\perp$, le sous-espace vectoriel*

$$F^\perp = \{\vec{x} \in E \mid \forall \vec{y} \in F, \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0\}.$$

Montrer, en exercice, que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel e E.

Exemple : $E = \mathbb{R}^3$, $\vec{y} = (1, -2, 1) \in \mathbb{R}^3$, $F = vect\langle \vec{y} \rangle$.
Alors $F^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$. $F^\perp$ est donc un plan dont $(2, 1, 0)$ et $(1, 0, -1)$ sont les vecteurs d'une base possible.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Proposition V.2.1. *Une famille orthogonale de vecteurs non nuls d'un espace euclidien, est libre.*

Montrer cette propriété en exercice.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

V.2.2 Procédé d'orthogonalisation de Schmidt

Exercices :
Exercice A.1.8

Documents :
Document C.1.1

Proposition V.2.2. Procédé d'orthogonalisation de Schmidt
Soit $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ une famille libre de E, alors il existe une famille orthonormée $\mathcal{Y} = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_p\}$ telle que :

$$\mathit{vect}\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k\rangle = \mathit{vect}\langle \vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_k\rangle, \quad \forall k = 1, \ldots, p.$$

Démonstration – Raisonnons par récurrence sur p :

– Pour $p = 1$, on pose :

$$\vec{y}_1 = \frac{1}{\|\vec{x}_1\|}\vec{x}_1.$$

et il est clair que $\mathrm{vect}\langle \vec{x}_1\rangle = \mathrm{vect}\langle \vec{y}_1\rangle$.

– Dans le cas $p = 2$, on déterminerait $\vec{y}_1$ comme précédemment.
Pour obtenir $\vec{y}_2$, on commence par calculer un vecteur $\vec{\hat{y}}_2$ défini de la façon suivante :

$$\vec{\hat{y}}_2 = \vec{x}_2 + \beta\vec{y}_1, \text{ (combinaison linéaire de } \vec{x}_2 \text{ et de } \vec{y}_1)$$

puis on divise ce vecteur par sa norme pour obtenir le vecteur $\vec{y}_2$ de norme 1

$$\vec{y}_2 = \frac{1}{\|\vec{\hat{y}}_2\|}\vec{\hat{y}}_2.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Alors il est clair, par construction, que vect$\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = $ vect$\langle \vec{y}_1, \vec{y}_2 \rangle$. Il ne reste plus qu'à déterminer β pour que les vecteurs $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2\}$ soient orthogonaux :

$$\langle \vec{\tilde{y}}_2, \vec{y}_1 \rangle = \langle \vec{x}_2 + \beta \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle = 0,$$

soit

$$\beta = -\langle \vec{x}_2, \vec{y}_1 \rangle,$$

d'où

$$\vec{\tilde{y}}_2 = \vec{x}_2 - \langle \vec{x}_2, \vec{y}_1 \rangle \vec{y}_1,$$

$\vec{\tilde{y}}_2$ est un vecteur non nul, car sinon on aurait $\vec{x}_2$ et $\vec{y}_1$ colinéaires donc $\vec{x}_2$ et $\vec{x}_1$ colinéaires, ce qui est contraire à l'hypothèse. On peut donc définir :

$$\vec{y}_2 = \frac{1}{\|\vec{\tilde{y}}_2\|} \vec{\tilde{y}}_2$$

– Dans le cas $p = 3$, on déterminerait $\vec{y}_1$ et $\vec{y}_2$ comme précédemment.
  Pour obtenir $\vec{y}_3$, on commence par calculer un vecteur $\vec{\tilde{y}}_3$ défini de la façon suivante :

$$\vec{\tilde{y}}_3 = \vec{x}_3 + \beta_1 \vec{y}_1 + \beta_2 \vec{y}_2$$

  puis on divise ce vecteur par sa norme pour obtenir le vecteur $\vec{y}_3$ de norme 1

$$\vec{y}_3 = \frac{1}{\|\vec{\tilde{y}}_3\|} \vec{\tilde{y}}_3.$$

  On détermine β_1 et β_2 pour que $\vec{\tilde{y}}_3$ soit orthogonal à $\vec{y}_1$ et à $\vec{y}_2$.
  Faites le calcul, on obtient $\beta_1 = - < \vec{x}_3, \vec{y}_1 >$, $\beta_2 = - < \vec{x}_3, \vec{y}_2 >$.
– Pour la récurrence générale, lire le document.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

V.2.3 Décomposition d'un espace euclidien en sous-espaces orthogonaux

Exercices :
Exercice A.1.9

Théorème V.2.1. *Soit E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E, alors*

$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

Démonstration – Soit $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ une base de F, d'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter $\mathcal{X}$ par une famille $\widetilde{\mathcal{X}} = \{\vec{x}_{p+1}, \vec{x}_{p+2}, \ldots, \vec{x}_n\}$ telle que $\mathcal{X} \cup \widetilde{\mathcal{X}}$ forme une base de E. D'après l'orthogonalisation de Schmidt, on peut trouver une famille orthonormée $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n\}$ telle que :

- $\mathrm{vect}\langle \vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_p\rangle = \mathrm{vect}\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\rangle$ et donc $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_p\}$ est une base orthonormée de F,
- $\mathrm{vect}\langle \vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n\rangle = \mathrm{vect}\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\rangle$ et donc $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n\}$ est une base orthonormée de E,
- $E = F \oplus G$ où $G = \mathrm{vect}\langle \vec{y}_{p+1}, \ldots, \vec{y}_n\rangle$.
- Par définition d'une base orthonormée on a

$$\langle \vec{y}_k, \vec{y}_i\rangle = 0,\ \forall k = p+1, \ldots, n,\ \forall i = 1, \ldots, p.$$

  Puisque $\vec{y}_k$ est orthogonal à tous les éléments de la base de F, $\vec{y}_k$ est orthogonal à tous les vecteurs de F donc $\vec{y}_k \in F^{\perp}$, ceci est vrai $\forall k = p+1, \ldots, n$ et donc $G \subset F^{\perp}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

- Donc $E = F \oplus G \subset F + F^{\perp}$.
- Evidemment $F + F^{\perp} \subset E$, donc $E = F + F^{\perp}$.
- Or $F \bigcap F^{\perp} = \{0\}$, donc la somme est directe : $F + F^{\perp} = F \oplus F^{\perp}$
  On a donc $E = F \oplus F^{\perp}$

V.3 Matrices orthogonales

V.3.1 Définition et caractérisation des matrices orthogonales

Exercices :
Exercice A.1.10

On rappelle la définition du symbole de Kronecker δ_{ij} qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. Dans la définition suivante on note comme d'habitude Q_i la i^e colonne de Q.

Définition V.3.1. *On dit que $Q \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale si pour tout $1 \leq i, j \leq n$, $(Q_i)^T Q_j = \delta_{ij}$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.*

Bien sûr la terminologie "matrice orthogonale" n'a pas été choisie au hasard : si on utilise le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$, on voit que 2 colonnes distinctes de Q ont un produit scalaire nul, elles sont donc orthogonales. On remarque de plus que les colonnes de Q sont *orthonormées*, ce que ne laisse pas supposer la terminologie.

Proposition V.3.1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que Q soit orthogonale est que :*

$$Q^T Q = I$$

Démonstration –
$Q^T Q = I \iff (\underline{Q^T}_{\,i})Q_j = \delta_{ij} \iff (Q_i)^T Q_j = \delta_{ij} \iff Q$ est orthogonale.
Une conséquence immédiate de la proposition précédente est :

Proposition V.3.2. *Une matrice est orthogonale si et seulement si $Q^{-1} = Q^T$
De plus, le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à ± 1.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

V.3.2 Matrice de passage entre 2 bases orthonormées

Exercices :
Exercice A.1.11
Exercice A.1.12

Proposition V.3.3. *Soit $\mathcal{B}$={ $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$} et $\mathcal{B}'$={ $\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \ldots, \vec{b}'_n$}, deux bases orthonormées d'un même espace euclidien E, alors la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice orthogonale.*

Démonstration – Par définition on a :

$$\vec{b}'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \vec{b}_i$$

Si l'on note $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire de E, on peut donc écrire

$$\langle \vec{b}'_j, \vec{b}'_k \rangle \; = \; \langle \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \vec{b}_i, \sum_{l=1}^{n} p_{lk} \vec{b}_l \rangle \; = \; \sum_{i,l=1}^{n} p_{ij} p_{lk} \langle \vec{b}_i, \vec{b}_l \rangle$$

or la base $\mathcal{B}$ est orthonormée donc $\langle \vec{b}_i, \vec{b}_l \rangle = \delta_{il}$ d'où

$$\langle \vec{b}'_j, \vec{b}'_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} p_{ik} = (P_j)^T P_k$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

et comme la base $\mathcal{B}'$ est orthonormée, on a $\langle \vec{b}'_j, \vec{b}'_k \rangle = \delta_{jk}$,
ce qui implique que $(P_j)^T P_k = \delta_{jk}$ et donc que P est orthogonale.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

V.3.3 Propriétés des matrices orthogonales

Exercices :
Exercice A.1.13

Proposition V.3.4. *Les matrices orthogonales ont les deux propriétés importantes suivantes :*
- *La transposée d'une matrice orthogonale est orthogonale*
- *Un produit de matrices orthogonales est orthogonal.*

Démonstration –
- si Q est orthogonale alors $Q^TQ = I$, donc on en déduit que Q est l'inverse de Q^T donc que $QQ^T = I$, donc Q^T est orthogonale.
- $(PQ)^TPQ = Q^TP^TPQ = Q^TQ = I$, donc PQ est orthogonale.

Proposition V.3.5. *Lien entre matrice orthogonale, norme et produit scalaire dans* $\mathbb{R}^n$
- *Une matrice Q est orthogonale si et seulement si elle conserve la norme des vecteurs, c'est à dire quelque soit le vecteur x de $\mathbb{R}^n$, on a $\|x\| = \|Qx\|$ où $\|.\|$ représente la norme usuelle de $\mathbb{R}^n$.*
- *Une matrice est orthogonale si et seulement si elle conserve le produit scalaire usuel, c'est à dire quelque soit les vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$ $\langle x, y\rangle = \langle Qx, Qy\rangle$.*

Démonstration –

– On suppose que Q est orthogonale alors

$$\|Qx\|^2 = (Qx)^T Qx = x^T Q^T Qx = x^T x = \|\vec{x}\|^2.$$

La réciproque est admise ici, si vous voulez la démontrer vous pouvez consulter l'examen final de l'automne 98.

– De même si Q est orthogonale alors elle conserve le produit scalaire usuel, en effet : $\langle Qx, Qy\rangle = (Qy)^T Qx = y^T Q^T Qx = y^T x = \langle x, y\rangle$.
Pour la réciproque on utilise l'equivalence précédente, si une matrice conserve le produit scalaire, elle conserve la norme donc elle est orthogonale.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

V.4 Diagonalisation des matrices symétriques

V.4.1 Matrices symétriques et diagonalisation

Exercices :
Exercice A.1.14
Exercice A.1.15

Documents :
Document C.1.2

Le but de ce paragraphe est de montrer qu'une matrice symétrique est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. On va énoncer tout d'abord un premier résultat que l'on complètera après.

Proposition V.4.1. *Si A est une matrice symétrique, si λ_1 et λ_2 sont 2 valeurs propres réelles distinctes, si on note y_1, y_2 2 vecteurs propres réels associés, alors y_1, y_2 sont orthogonaux.*

Démontrer cette proposition en exercice.

Théorème V.4.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, alors*

1. *A a toutes ses valeurs propres réelles,*
2. *il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A (on utilise le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$),*
3. *A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Plus précisément, il existe une matrice P orthogonale telle que $D = P^T AP$ soit une matrice diagonale.*

Démonstration –

1. Soit $(\lambda, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ un couple propre de A. Pour montrer que λ est réel, nous allons montrer que $\lambda = \bar{\lambda}$. On a par définition

$$Ay = \lambda y \tag{V.4.1}$$

et en conjugant

$$A\bar{y} = \bar{\lambda}\bar{y} \text{ (}A\text{ est réelle).} \tag{V.4.2}$$

Multiplions à gauche (V.4.1) par $\bar{y}^T$, on obtient :

$$\bar{y}^T Ay = \lambda \bar{y}^T y = \lambda \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i y_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2. \tag{V.4.3}$$

Multiplions à gauche (V.4.2) par y^T on obtient :

$$y^T A\bar{y} = \bar{\lambda} y^T \bar{y} = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2. \tag{V.4.4}$$

Or

$$\bar{y}^T Ay = (\bar{y}^T Ay)^T = y^T A\bar{y},$$

donc en utilisant les égalités (V.4.3) et (V.4.4), on trouve $\lambda = \bar{\lambda}$ (le vecteur propre y étant non nul, on peut simplifier par $\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2$).

3. Ceci se démontre par récurrence sur l'ordre n de la matrice A.

– Pour n=1, le théorème est trivial. Mais pour comprendre le principe de la démonstration, nous allons étudier le cas $n = 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et soit $(\lambda, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ un couple propre de A, on peut toujours supposer que $\|y\| = 1$. D'après l'orthogonalisation de Schmidt, il existe $z \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|z\| = 1$ et $\langle y, z\rangle = y^T z = 0$. Soit P la matrice 2×2 dont les colonnes sont y et z : $P = \begin{pmatrix} y & z \end{pmatrix}$. Comme cette matrice est orthogonale, on a $P^{-1} = P^T$, et on peut écrire :

$$P^{-1}AP = P^T AP = P^T A \begin{pmatrix} y & z \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} Ay & Az \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} \lambda y & Az \end{pmatrix}.$$

D'où, en utilisant la multiplication par blocs :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} y^T \\ z^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda y & Az \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda y^T y & y^T Az \\ \lambda z^T y & z^T Az \end{pmatrix}.$$

Or
– $\|y\| = 1 \Longrightarrow \lambda y^T y = \lambda$,
– $\langle y, z\rangle = 0 \Longrightarrow \lambda y^T z = \lambda z^T y = 0$,
– $y^T Az = y^T A^T z = (Ay)^T z = \lambda y^T z = 0$,
donc, si l'on pose $\mu = z^T Az \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

On vient donc d'établir que A est diagonalisable et que $D = P^T AP$ avec P orthogonale.

(Voir le document pour la fin de la démonstration par récurrence.)

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2. En utilisant ce que l'on vient de démontrer, on obtient que $PD = AP$. Si l'on note P_i la i^e colonne de P et d_i le i^e terme de la diagonale de D, les propriétés du produit matriciel impliquent donc que $d_i P_i = AP_i$, donc P_i est un vecteur propre de A associé à la valeur propre d_i. Or la matrice P est orthogonale, les vecteurs P_i constituent donc une base orthonormée de vecteurs propres de A.

V.5 Formes quadratiques

V.5.1 Matrice définie positive

Exercices :
Exercice A.1.16
Exercice A.1.17
Exercice A.1.18
Exercice A.1.19

Définition V.5.1. *On dit que la matrice symétrique* $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ *est* **semi-définie positive** *si*

$$x^T Ax \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{V.5.1}$$

On dit qu'elle est **définie positive** *si, de plus,*

$$x^T Ax = 0 \Longrightarrow x = 0. \tag{V.5.2}$$

Ceci implique donc qu'une matrice symétrique est définie positive si et seulement si

$$x^T Ax > 0 \text{ , pour tout } x \neq 0.$$

Proposition V.5.1. *Les termes diagonaux d'une matrice définie positive sont strictement positifs.*
Les termes diagonaux d'une matrice semi-définie positive sont positifs ou nuls.

Montrer ces propriétés en exercice.

On a la caractérisation importante suivante :

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Matrice définie positive

Proposition V.5.2. *Une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A symétrique soit définie positive (resp. semi-définie positive) est que toutes ses valeurs propres soient strictement positives (resp. positives ou nulles).*

Démonstration – Comme A est symétrique, elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et $Q^T AQ = \Lambda$ avec Λ diagonale et Q orthogonale. Posons $x = Q\tilde{x}$, alors

$$x^T Ax > 0,\ \forall x \neq 0 \iff \tilde{x}^T(Q^T AQ)\tilde{x} > 0,\ \forall \tilde{x} \neq 0 \iff \tilde{x}^T \Lambda \tilde{x} > 0,\ \forall \tilde{x} \neq 0$$

où Λ est la matrice diagonale des valeurs propres de A. On a donc

$$x^T Ax > 0,\ \forall x \neq 0 \iff \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{x}_i^2 > 0,\ \forall \tilde{x} \neq 0.$$

Il est alors clair que si toutes les valeurs propres sont strictement positives, la matrice est définie positive. Réciproquement, si la matrice est définie positive, en prenant $\tilde{x}$ égal successivement aux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on obtient aisément que toutes les valeurs propres sont strictement positives.
Démontrer en exercice le résultat énoncé pour les matrices semi-définies positives.
Le résultat suivant découle immédiatement de la proposition précédente :

Proposition V.5.3. *Une matrice symétrique définie positive est inversible.*

Démontrer cette proposition en exercice.

V.5.2 Définition d'une forme quadratique

Exercices :
Exercice A.1.20

Définition V.5.2. *On appelle* **forme quadratique** *sur* $\mathbb{R}^n$*, un polynôme homogène de degré* 2 *en les variables* $(x_1 x_2, \ldots, x_n)$*, c'est à dire une expression de la forme*

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta_{ij} x_i x_j. \tag{V.5.3}$$

Proposition V.5.4. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* q *soit une forme quadratique est qu'il existe une matrice symétrique* A *appartenant à* $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ *telle que* $q(x) = x^T A x$*, cette matrice étant unique.*

Démonstration – La condition est évidemment suffisante puisque, A étant symétrique, on a

$$x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j,$$

ce qui est bien une expression de la forme quadratique.
Réciproquement, en partant d'une forme quadratique, l'unique matrice A vérifiant $q(x) = x^T A x$ est définie par

$$a_{ii} = \alpha_i \text{ et } a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2}\beta_{ij} \text{ pour } i \neq j$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

ce qui donne effectivement $q(x) = x^T Ax$.

A toute forme quadratique on peut associer une matrice symétrique, de façon similaire, on peut associer à toute forme quadratique une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$, définie par :

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= x^T Ay = \frac{1}{2}\left[(x+y)^T A(x+y) - x^T Ax - y^T Ay\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right]. \end{aligned}$$

Définition d'une forme quadratique

V.5.3 Forme quadratique définie positive

Exercices :
Exercice A.1.21

Définition V.5.3. *On dit que la forme quadratique* $q(x) = x^T Ax$ *est*
– *définie positive si la matrice* A *est définie positive,*
– *semi-définie positive si la matrice* A *est semi-définie positive.*

Bien sûr on aurait pu donner une définition équivalente :
– q est définie positive $\Longleftrightarrow q(x) > 0, \; \forall x \neq 0$
– q est semi définie positive $\Longleftrightarrow q(x) \geq 0, \; \forall x$

V.5.4 Réduction de Gauss d'une forme quadratique

Exercices :
Exercice A.1.22

La réduction de Gauss est un algorithme qui permet de réduire en carrés une forme quadratique, c'est à dire d'écrire $q(x)$ comme une somme de carrés de combinaisons linéaires des variables.

Nous allons étudier cette méthode sur des exemples :

– 1^e **cas** - Soit la forme quadratique

$$q(x) = x_1^2 + 28x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

On voit qu'il existe des termes "au carré", par exemple x_1^2. On recense tous les termes qui font intervenir cette variable x_1, c'est à dire

$$q^*(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

On écrit alors que $q^*(x)$ constitue les premiers termes d'un carré

$$q^*(x) = \alpha(x_1 + \ldots)^2 + \hat{q}(x)$$

où $\hat{q}(x)$ ne dépend plus de x_1 :

$$q^*(x) = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On a ainsi obtenu

$$q(x) = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + 28x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3$$

donc

$$q(x) = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 27x_2^2 + x_3^2 + 10x_2x_3.$$

On recommence la même méthode avec

$$q_1(x) = 27x_2^2 + x_3^2 + 10x_2x_3.$$

On peut alors choisir la variable x_3 et écrire

$$q_1(x) = (x_3 + 5x_2)^2 - 25x_2^2 + 27x_2^2 = (x_3 + 5x_2)^2 + 2x_2^2.$$

On a obtenu ce que l'on appelle une réduction en carrés de $q(x)$:

$$q(x) = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + (x_3 + 5x_2)^2 + 2x_2^2.$$

– 2^e **cas** - La méthode que l'on vient d'utiliser, s'applique lorsqu'il existe des termes au carré. Dans le cas contraire on applique la règle expliquée sur l'exemple suivant :

$$q(x) = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 4x_3x_4.$$

On choisit deux variables x_1 et x_2 par exemple, on regroupe tous les termes qui font intervenir ces deux variables

$$q^*(x) = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4$$

et on écrit $q^*(x) = \alpha(x_1 + \ldots)(x_2 + \ldots) + \hat{q}(x)$ où $\hat{q}(x)$ ne dépend plus de x_1 et x_2. On a donc ici

$$q^*(x) = 4(x_1 + x_3 + x_4)(x_2 + x_3 - 2x_4) - 4(x_3 + x_4)(x_3 - 2x_4).$$

Pour le premier terme de q^* on utilise l'identité

$$ab = \frac{1}{4}\left((a+b)^2 - (a-b)^2\right),$$

d'où

$$q^*(x) = (x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4)^2 - (x_1 - x_2 + 3x_4)^2 - 4(x_3 + x_4)(x_3 - 2x_4)$$

On a donc

$$q(x) = (x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4)^2 - (x_1 - x_2 + 3x_4)^2 - 4(x_3 + x_4)(x_3 - 2x_4) + 4x_3x_4$$

On note

$$q_1(x) = -4(x_3 + x_4)(x_3 - 2x_4) + 4x_3x_4$$

$q_1(x)$ ne dépend plus de x_1 et x_2. On recommence la réduction avec q_1 : s'il existe des termes au carré, on se trouve dans le premier cas, sinon on applique deuxième cas. On obtient finalement :

$$q(x) = (x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4)^2 - (x_1 - x_2 - 3x_4)^2 - 4(x_3 - x_4)^2 + 12x_4^2.$$

Dans tous les cas, on arrive à décomposer $q(x)$ en une somme algébrique de carrés. Bien sûr, cette décomposition n'est pas unique, mais, en revanche, on peut démontrer qu'il existe des invariants : si l'on note n_+ le nombre de carrés affectés d'un coefficient

strictement positif, n_- le nombre de carrés affectés d'un coefficient strictement négatif, n_+ et n_- sont des invariants. Si l'on note A la matrice symétrique associée à q, alors n_+ est le nombre de valeurs propres strictement positives (comptées avec leur multiplicité) et n_- est le nombre de valeurs propres strictement négatives (comptées avec leur multiplicité).
De la relation de n_+ et n_- avec les valeurs propres, on peut en déduire que

$$n_+ + n_- \leq n.$$

D'autre part :
- si $n_+ = n$ (on a alors $n_- = 0$), q est définie positive.
- si $n_- = 0$, q est semi-définie positive.

V.6 Espace hermitien

V.6.1 Forme sesquilinéaire

Exemples :
Exemple B.1.3

Dans la section espace hermitien, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
L'analogue d'une forme bilinéaire est une forme sesquilinéaire .

Définition V.6.1. *On appelle* **forme sesquilinéaire** *sur $E \times E$, une application ϕ de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$, vérifiant les propriétés suivantes :*
– elle est linéaire par rapport à son premier argument

$$\phi(\lambda \vec{x}_1 + \mu \vec{x}_2, \vec{y}) = \lambda \phi(\vec{x}_1, \vec{y}) + \mu \phi(\vec{x}_2, \vec{y}) \forall \lambda, \mu, \in \mathbb{C}$$

– elle est **anti-linéaire** *par rapport à son deuxième argument*

$$\phi(\vec{x}, \lambda \vec{y}_1 + \mu \vec{y}_2) = \bar{\lambda} \phi(\vec{x}, \vec{y}_1) + \bar{\mu} \phi(\vec{x}, \vec{y}_2) \forall \lambda, \mu, \in \mathbb{C}$$

Exemple : $E = \mathbb{C}^n$, $\phi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$ est une forme sesquilinéaire sur $E \times E$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

V.6.2 Produit hermitien, espace hermitien, matrice hermitienne

Exercices :
Exercice A.1.23

Exemples :
Exemple B.1.4

L'analogue de la forme bilinéaire symétrique est la forme sesquilinéaire hermitienne.

Définition V.6.2. *On appelle* **forme sesquilinéaire hermitienne** *sur* E*, une forme sesquilinéaire* $(\vec{x},\vec{y}) \mapsto \phi(\vec{x},\vec{y})$ *de* $E \times E$ *dans* $\mathbb{C}$ *possédant la propriété suivante :*

$$\phi(\vec{y},\vec{x}) = \overline{\phi(\vec{x},\vec{y})},$$

L'analogue du produit scalaire est le produit hermitien.

Définition V.6.3. *On appelle* **produit hermitien** *sur* E*, une forme sesquilinéaire* ϕ *de* $E \times E$ *dans* $\mathbb{C}$*, hermitienne et définie positive, c'est à dire :*

$$\phi(\vec{x},\vec{x}) > 0 \textit{ pour tout } \vec{x} \neq \vec{0} \;\; \textit{(en effet } \phi(\vec{x},\vec{x}) \in \mathbb{R}\textit{)}.$$

Définition V.6.4. *Un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$ *de dimension finie muni d'un produit hermitien est appelé* **espace hermitien**.

Exemple : $E = \mathbb{C}^n$, $\phi(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$ est un produit hermitien sur E.

Si les éléments de la matrice A sont des nombres complexes, voici l'analogue de la matrice transposée et de la matrice symétrique.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Définition V.6.5. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, on appelle* **adjointe** *de A et on note A^* la matrice $A^* = \bar{A}^T$.*
On dit que A est une **matrice hermitienne** *si $A^* = A$.*

On peut alors noter le produit hermitien $\phi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$ sous la forme

$$\phi(x,y) = y^* x = \overline{x^* y}.$$

Dans ce cas

$$\phi(x,x) = x^* x = \sum_{i=1}^{n} |x_i^2|$$

et on pourrait donc définir la norme de $x \in \mathbb{C}^n$ par $\|x\| = \sqrt{x^* x}$.

V.6.3 Orthogonalité dans les espaces hermitiens

On peut étendre au produit hermitien la notion d'orthogonalité :

Définition V.6.6. *Si E est un espace hermitien, on dit que 2 vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont orthogonaux si leur produit hermitien est nul*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0.$$

En particulier si on munit $\mathbb{C}^n$ du produit hermitien usuel, on dit que x et y, vecteurs de $\mathbb{C}^n$ sont orthogonaux si $y^* x = 0$.

Définition V.6.7. *On dit que la matrice $H \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ est* **unitaire** *si $H^* H = I$.*

Théorème V.6.1. *Une matrice hermitienne a toutes ses valeurs propres réelles et elle est diagonalisable. La matrice D est à coefficients réels. La matrice de changement de base P (à coefficients complexes) est unitaire.*

Démonstration – La démonstration est tout à fait analogue à celle qui a été faite pour la diagonalisation des matrices symétriques. Montrons simplement que les valeurs propres sont réelles. Soit $(\lambda, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ un couple propre, alors on a

$$y^* A y = \lambda y^* y = \lambda \|y\|^2. \tag{V.6.1}$$

En prenant l'adjointe de cette équation et en remarquant que $(Ay)^* = (\bar{\lambda} \bar{y})^T = \bar{\lambda} y^*$, on a

$$(Ay)^* y = \bar{\lambda} y^* y = \bar{\lambda} \|y\|^2. \tag{V.6.2}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Mais puisque A est hermitienne, $(Ay)^* = y^*A^* = y^*A$, en comparant les équations (V.6.1) et (V.6.2) on obtient

$$\lambda\|y\|^2 = \bar{\lambda}\|y\|^2,$$

ce qui signifie que $\lambda = \bar{\lambda}$, puisque un vecteur propre est non nul.

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices du chapitre V

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.1 Ch5-exercice1

– Montrer que $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \ > 0$ pour tout $\vec{x} \neq \vec{0}$

– Montrer que $\langle \vec{x}, \vec{0} \rangle = \langle \vec{0}, \vec{x} \rangle = 0$ et que donc, en particulier, $\vec{x} = \vec{0} \Longrightarrow \ \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \ = 0$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2 Ch5-exercice2

Montrer que si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sont des réels strictement positifs, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i y_i$ définit bien un produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$. Que se passe-t-il si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ ne sont plus des réels strictement positifs ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.3 Ch5-exercice3

Montrer la proposition :
Si $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ alors $A^T \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ vérifie :

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall y \in \mathbb{R}^m \tag{A.1.1}$$

(le poduit scalaire du membre de gauche est dans $\mathbb{R}^m$ et celui de droite dans $\mathbb{R}^n$.)

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4 Ch5-exercice4

Dans l'espace, le produit scalaire usuel est défini par $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos\theta$ où θ est l'angle entre les 2 vecteurs . Vérifier l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans ce cas particulier.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.5 Ch5-exercice5

Montrer que dans $\mathbb{R}^n$, $\max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$, où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les composantes de x, définit une norme. On appelle cette norme la norme infinie et on la note $\|.\|_\infty$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.6 Ch5-exercice6

Vérifier que $F^\perp$ est bien un sous-espace vectoriel et montrer que $F \cap F^\perp = \{\vec{0}\}$

retour au cours

Solution

Exercice A.1.7 Ch5-exercice7

Montrer qu'une famille de vecteurs orthogonaux non nuls est une famille libre.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.8 Ch5-exercice8

Utiliser le procédé d'orthogonalisation de Schmidt pour construire la famille $\mathcal{Y}$ associée à la famille $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ avec $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.9 Ch5-exercice9

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\vec{y} = (1, -2, 1)$, $F = \text{vect}\langle\vec{y}\rangle$.
Alors on a vu que $F^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$. $F^\perp$ est donc un plan dont $(2, 1, 0)$ et $(1, 0, -1)$ constituent par exemple une base. Montrer directement dans ce cas particulier que $E = F \oplus F^\perp$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.10 Ch5-exercice10

Montrer que la matrice Q

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

est orthogonale. Quelle est l'inverse de Q ? Que vaut le déterminant de Q ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.11 Ch5-exercice11

On définit sur $\mathbb{R}^3$ le produit scalaire usuel. Soit $\mathcal{B}$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$, montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée. Montrer que la base $\mathcal{B}'$ définie par

$$\mathcal{B}' = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \ , \ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \ , \ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

est une base orthonormée. Que vaut P matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Vérifier que $PP^T = P^T P = I$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.12 Ch5-exercice12

Quel est l'inverse de la matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}?$$

Que vaut son déterminant ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.13 Ch5-exercice13

Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on définit la base

$$\mathcal{B}' = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) , \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) , \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) \right\}$$

on note x'_1, x'_2, etc les composantes de x et y dans cette nouvelle base, calculer

$$(x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2$$

Puis

$$x'_1 y'_1 + x'_2 y'_2 + x'_3 y'_3$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.14 Ch5-exercice14

Soit A une matrice symétrique, λ_1, λ_2 2 valeurs propres réelles distinctes, on note y_1, y_2 2 vecteurs propres réels associés.

1. Exprimer $\langle Ay_1, y_2\rangle$ à l'aide de $\langle y_1, y_2\rangle$.
2. Exprimer $\langle y_1, Ay_2\rangle$ à l'aide de $\langle y_1, y_2\rangle$.
3. En déduire que $\langle y_1, y_2\rangle$=0.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.15 Ch5-exercice15

Calculer les valeurs propres et déterminer une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.16 Ch5-exercice16

Montrer que si une matrice est symétrique définie positive, ses termes diagonaux sont strictement positifs (calculer $x^T Ax$ avec un vecteur x judicieusement choisi).
Montrer que si une matrice est symétrique semi-définie positive, ses termes diagonaux sont positifs ou nuls.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.17 Ch5-exercice17

Démontrer la proposition suivante :
Une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A symétrique soit semi-définie positive est que toutes ses valeurs propres soient positives ou nulles.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.18 Ch5-exercice18

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

est-elle définie positive ? semi-définie positive ? Calculer $x^T Ax$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.19 Ch5-exercice19

Montrer qu'une matrice symétrique définie positive est inversible. Le résultat est-il toujours valable si la matrice est semi-définie positive ? Si oui démontrez-le, si non trouvez un contre exemple.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.20 Ch5-exercice20

– On définit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 7 & 11 \\ 5 & 11 & 13 \end{pmatrix},$$

calculer $q(x) = x^T Ax$ et montrer que q est une forme quadratique.

– On définit la forme quadratique $q(x) = 4x_1^2 + 5x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 9x_1x_3 - 15x_2x_3$, déterminer une matrice symétrique A telle que $q(x) = x^T Ax$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.21 Ch5-exercice21

Soit $x \in \mathbb{R}^3$, on définit les formes quadratiques suivantes :
- $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
- $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$
- $q(x) = x_1^2 + x_3^2$

Pour chacune d'entre-elles, dire si elle est définie-positive, semi-définie positive. Donner la matrice A associée dans chacun des cas.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.22 Ch5-exercice22

Les formes quadratiques suivantes sont-elle définies positives ? semi-définies positives ? On utilisera la décomposition de Gauss.

- $q(x) = x_1^2 + 28x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$,
- $q(x) = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 4x_3x_4$,
- $q(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.23 Ch5-exercice23

Montrer que si ϕ est sesquilinéaire hermitienne alors $\phi(\vec{x}, \vec{x}) \in \mathbb{R}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exercices de TD

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.1 TD5-Exercice 1

1. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on définit $\langle A, B\rangle = \text{ trace } A^T B$. Montrer que l'on définit bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Quelle est la norme associée ? Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz correspondante.

   (b) On définit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $\langle A, B\rangle, ||A||, ||B||$.

   (réponse : $\langle A, B\rangle = 52, ||A|| = \sqrt{76}, ||B|| = \sqrt{158}$).

2. On associe à la matrice A le vecteur $\hat{A}$ de $\mathcal{M}_{np,1}(\mathbb{R})$ défini par blocs de la façon suivante : $\hat{A}$= $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix}$, où les A_i sont les colonnes de A.

   Montrer que $\langle A, B\rangle$ est égal au produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^{np}$ de $\hat{A}$ par $\hat{B}$.

Question 1a Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.2 TD5-Exercice 2

Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 \leq n\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Aide 1 Aide 2

Exercice A.2.3 TD5-Exercice 3

1. Soit E un espace euclidien, montrer que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont orthogonaux si et seulement si $||\vec{x}+\vec{y}|| = ||\vec{x}-\vec{y}||$.
   Illustrer cette propriété avec une figure dans le cas $E = \mathbb{R}^2$.
2. Démontrer la généralisation du théorème de Pythagore à savoir : dans un espace euclidien, si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont orthogonaux alors $||\vec{x}+\vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2$

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4
Question 2 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.4 TD5-Exercice 4

Soit E un espace euclidien. Si A est un sous espace vectoriel de E, on note $A^\perp$ l'orthogonal de A dans E.

1. Montrer que
   (a) $\{\vec{0}\}^\perp = E$.
   (b) $E^\perp = \{\vec{0}\}$.
2. Montrer que, si F est un sous-espace vectoriel de E, $(F^\perp)^\perp = F$.
3. Montrer que
   (a) $F \subset G \Longleftrightarrow G^\perp \subset F^\perp$,
   (b) $(F+G)^\perp = F^\perp \bigcap G^\perp$.

Question 1a Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 1b Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 3a Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 3b Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.5 TD5-Exercice 5

1. Le plan est muni d'une base orthonormée directe, montrer que la matrice de la rotation d'un angle θ est une matrice orthogonale. Que vaut son déterminant ?
2. L'espace est muni d'une base orthonormée directe $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.
   (a) Ecrire les matrices des rotations d'angle θ autour de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Vérifier que ces matrices sont orthogonales.
   (b) En déduire que la matrice R d'une rotation quelconque est orthogonale.
   (c) Comment pouvait-on obtenir ce dernier résultat immédiatement ? Que vaut le déterminant de R ?
   Réponse : le déterminant d'une matrice de rotation est toujours égal à 1.

Question 1 Aide 1
Question 2a Aide 1 Aide 2
Question 2b Aide 1 Aide 2
Question 2c Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6 TD5-Exercice 6

On pourrait généraliser la notion de matrice orthogonale de la définition V.3.1 au cas où la matrice Q n'est pas carrée :

$$Q \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \text{ est orthogonale si } Q^T Q = I.$$

1. Montrer qu'avec cette définition, la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

   est une matrice orthogonale. Que vaut QQ^T ? Q^T est-elle orthogonale ?
2. Est-ce que la proposition V.3.2 a encore un sens ?
3. Est-ce que le produit de matrices orthogonales est orthogonal ?

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1
Question 3 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.7 TD5-Exercice 7

1. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de la matrice A_2 de l'exercice 1 du TD4.
   Réponse : On a $Y_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, Y_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.
2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de la matrice
   $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
   Réponse : on a $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 6$ double,
   $Y_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, Y_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$
3. On définit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Sans calculs (ou presque !) donner les valeurs propres de A et leur multiplicité.

(b) Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ constituée de vecteurs propres de la matrice A.

Réponse : on a $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$ triple,

$$Y_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Y_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 3a Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4
Question 3b Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.8 TD5-Exercice 8

1. Existe-t-il une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de la matrice A_1 de l'exercice 1 du TD4.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, montrer que les propositions (1) et (2) sont équivalentes :

$$(1) \quad A \text{ est symétrique}$$

$$(2) \quad \text{Il existe une base orthonormée de } \mathbb{R}^n \text{ constituée de vecteurs propres de } A.$$

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Exercice A.2.9 TD5-Exercice 9

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ symétrique définie positive.
   Montrer que, si $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, y\rangle = x^T Ay$ définit bien un produit scalaire.
2. Réciproquement, soit $\langle ., .\rangle$ un produit scalaire quelconque sur $\mathbb{R}^n$. On note A la matrice dont les termes sont définis par $a_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$ (les e_i sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$).
   (a) Montrer que si x et y sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on a $\langle x, y\rangle = x^T Ay$.
   (b) En déduire que A est symétrique définie positive.

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2a Aide 1
Question 2b Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.10 TD5-Exercice 10

1. Pour quelles valeurs de α les formes quadratiques ci-dessous sont-elles définies positives, semi-définies positives ?
   (a) $q(x) = (x_1)^2 + 6(x_2)^2 + 3(x_3)^2 + 4x_1x_2 + 6\alpha x_1x_3$,
   (réponse : définie positive pour $-\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{3}$, semi-définie positive pour $-\frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{1}{3}$).
   (b) $q(x) = 2(x_1)^2 + 8(x_2)^2 - 3(x_3)^2 + 14x_1x_2 + 2\alpha x_2x_3$, (réponse : aucune).
2. Pour quelles valeurs de α les formes bilinéaires ci-dessous définissent-elles un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?
   (a) $f(x, y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\alpha x_1y_3 + 3\alpha x_3y_1$.
   (b) $f(x, y) = x_1y_1 + 10x_2y_2 + \alpha x_3y_3 + 6x_1y_2 - x_2y_3 - x_3y_2$.
   (c) $f(x, y) = 2x_1y_1 + 8x_2y_2 - 3x_3y_3 + 7x_1y_2 + 7x_2y_1 + \alpha x_2y_3 + \alpha x_3y_2$.
3. Les matrices suivantes sont-elles symétriques définies positives, semi-définies positives ?
   $$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$
   $$A_5 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_7 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} ?$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Réponses :

définie positive : non, non, oui, non, non, non, non,

semi-définie positive : non, non, oui, non, oui, oui, non.

Question 1a Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 1b Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2
Question 3 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.11 TD5-Exercice 11

Une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ est une *distance* si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1) & d(\vec{x},\vec{y}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{y} & \forall \vec{x},\vec{y} \in E, \\ 2) & d(\vec{x},\vec{y}) = d(\vec{y},\vec{x}) & \forall \vec{x},\vec{y} \in E, \\ 3) & d(\vec{x},\vec{z}) \le d(\vec{x},\vec{y}) + d(\vec{y},\vec{z}) & \forall \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in E. \end{array}$$

1. Montrez que si E est un espace Euclidien, $d(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\|$ définit bien une distance sur E.
2. Que vaut $d(\vec{x},\vec{y})$ dans le cas $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel $\langle x, y\rangle = x^T y$?
3. Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. Montrez que $\sqrt{(x-y)^T A\,(x-y)}$ est une distance.
4. Application : On considère $E = \mathbb{R}^2$ et on note d la distance Euclidienne dans E. On considère également la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on note d_A la distance définie en 3.
   Décrivez $\mathcal{C} = \{\vec{x} \mid d(\vec{x},\vec{0}) = 1\}$ et $\mathcal{C}_A = \{\vec{x} \mid d_A(\vec{x},\vec{0}) = 1\}$.

Question 1 Aide 1
Question 3 Aide 1 Aide 2
Question 4 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe B
Exemples

B.1 Exemples du chapitre V

Exemple B.1.1 polynômes

$E = \mathcal{P}_n$, $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$.
En effet la linéarité de l'intégrale implique la bilinéarité.
De plus $\langle p, p\rangle = \int_0^1 p^2(t)dt \geq 0$ et $\langle p, p\rangle = 0$ implique $\{\forall t \in [0,1], p(t) = 0\}$, donc $p = 0$ (un polynôme non nul ne peut avoir une infinité de racines).

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.2 Sous-espace orthogonal

$E = \mathcal{P}_n$, muni du produit scalaire $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$, $F = \mathcal{P}_0$, alors

$$F^\perp = \{p \in \mathcal{P}_n \mid \int_0^1 p(t)dt = 0\}.$$

Donc $p(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ appartient à $F^\perp$ si et seulement si $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} = 0.$

retour au cours

Exemple B.1.3 Forme sesquilinéaire

1. $E = \mathcal{P}_n$ (polynomes de degré $\leq n$ à coefficients complexes), $\phi(p,q) = \int_0^1 p(t)\bar{q}(t)dt$ définit une forme sesquilinéaire sur $E \times E$.
2. $E = \mathbb{C}^n$, $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ et $\phi(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \bar{y}_j$ définit une forme sesquilinéaire sur $E \times E$.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.4 Espace hermitien

1. $E = \mathcal{P}_n$ (polynomes de degré $\leq n$ à coefficients complexes), $\phi(p,q) = \int_0^1 p(t)\bar{q}(t)dt$ est un produit hermitien sur E.
2. $E = \mathbb{C}^n$, $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ et $\phi(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i\bar{y}_j$ n'est pas en général une forme hermitienne, ce n'est donc pas un produit hermitien.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe C
Documents

C.1 Documents du chapitre V

Document C.1.1 Procédé d'orthogonalisation de Schmidt

Soit $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ une famille libre de E, alors il existe une famille orthonormée $\mathcal{Y} = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_p\}$ telle que :

$$\text{vect}\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k \rangle = \text{vect}\langle \vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_k \rangle, \quad \forall k = 1, \ldots, p.$$

Démonstration – Raisonnons par récurrence sur p :

– Pour $p = 1$, on pose :

$$\vec{y}_1 = \frac{1}{\|\vec{x}_1\|}\vec{x}_1.$$

et il est clair que $\text{vect}\langle \vec{x}_1 \rangle = \text{vect}\langle \vec{y}_1 \rangle$.

– Supposons la propriété vraie jusqu'à l'ordre p. On dispose donc d'une famille orthonormée $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_p\}$ obtenue en prenant des combinaisons linéaires des vecteurs $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$. On va alors déterminer $\vec{\hat{y}}_{p+1}$ comme combinaison linéaire de $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_p\}$ et de $\vec{x}_{p+1}$ de la façon suivante :

$$\vec{\hat{y}}_{p+1} = \vec{x}_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \vec{y}_i,$$

On veut que $\vec{\hat{y}}_{p+1}$ soit orthogonal à $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_p$
Les conditions d'orthogonalité s'écrivent :

$$0 = \langle \vec{x}_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \vec{y}_i, \vec{y}_j \rangle = \langle \vec{x}_{p+1}, \vec{y}_j \rangle + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \langle \vec{y}_i, \vec{y}_j \rangle = \langle \vec{x}_{p+1}, \vec{y}_j \rangle + \beta_j, j = 1, \ldots, p$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On obtient ainsi

$$\vec{\hat{y}}_{p+1} = \vec{x}_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \langle \vec{x}_{p+1}, \vec{y}_i \rangle \vec{y}_i$$

On remarque que $\vec{\hat{y}}_{p+1}$ ne peut être nul puisque, par hypothèse,$\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{p+1}\}$ étant libre, $\vec{x}_{p+1}$ ne peut pas appartenir à vect$\langle \vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_p \rangle$ = vect$\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p \rangle$. Donc $\|\vec{\hat{y}}_{p+1}\| \neq 0$, et on peut définir :

$$\vec{y}_{p+1} = \frac{1}{\|\vec{\hat{y}}_{p+1}\|} \vec{\hat{y}}_{p+1}$$

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.2 Diagonalisation des matrices symétriques

– On suppose que toute matrice symétrique de taille au plus $n-1$ est diagonalisable par une matrice orthogonale. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et $(\lambda, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, un couple propre de A, dont on peut toujours supposer que $\|y\| = 1$. En utilisant l'orthogonalisation de Schmidt, on peut construire à partir de y une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, soit $\{y, Q_2, \ldots, Q_n\}$ et on posera

$$Q = \begin{pmatrix} y & \hat{Q} \end{pmatrix} \text{ avec } \hat{Q} = (Q_2, Q_3, \ldots, Q_n) \in \mathcal{M}_{n,n-1}(\mathbb{R}).$$

Définissons $B = Q^{-1}AQ = Q^TAQ$ (Q est orthogonale), alors

$$B = Q^TA \begin{pmatrix} y & \hat{Q} \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} Ay & A\hat{Q} \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} \lambda y & A\hat{Q} \end{pmatrix}$$

soit en utilisant la multiplication par blocs :

$$B = \begin{pmatrix} y^T \\ \hat{Q}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda y & A\hat{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda y^T y & y^T A\hat{Q} \\ \lambda \hat{Q}^T y & \hat{Q}^T A \hat{Q} \end{pmatrix}$$

or :
– $\|y\| = 1 \Longrightarrow \lambda y^T y = \lambda$
– y est orthogonal aux colonnes de Q donc $\hat{Q}^T y = 0$
– $y^T A\hat{Q} = y^T A^T \hat{Q} = (Ay)^T\hat{Q} = \lambda y^T \hat{Q} = \lambda(\hat{Q}^T y)^T = 0$

Donc

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \hat{Q}^T A\hat{Q} \end{pmatrix}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Définissons la matrice $\hat{B} = \hat{Q}^T A \hat{Q} \in \mathcal{M}_{n-1,n-1}(\mathbb{R})$. Cette matrice étant symétrique, on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe donc une matrice orthogonale $\hat{R}$ telle que $\hat{\Lambda} = \hat{R}^T \hat{B} \hat{R}$ soit une matrice diagonale. Soit la matrice

$$R = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \dots & & \hat{R} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

qui est une matrice orthogonale car on vérifie aisément que $R^T R = I$. Alors on a

$$R^T B R = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \dots & & \hat{R}^T & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \dots & & \hat{B} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \dots & & \hat{R} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

soit

$$R^T B R = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \dots & & \hat{R}^T & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \dots & & \hat{B}\hat{R} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \dots & & \hat{R}^T \hat{B} \hat{R} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

soit donc

$$R^T BR = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \ldots & & \hat{\Lambda} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \Lambda$$

où Λ est une matrice diagonale puisque $\hat{\Lambda}$ est diagonale. On vient donc de montrer que

$$\Lambda = R^T BR = R^T Q^T AQR = (QR)^T A(QR)$$

et, comme QR est orthogonale (produit de matrices orthogonales), on a bien établi que A était semblable à la matrice diagonale Λ par un changement de base orthonormé.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

P

R

Solution de l'exercice A.1.1

- Dans la définition on a
$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$
donc en utilisant la contraposée :
$$\vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \neq 0$$
mais puisque
$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$$
on a donc :
$$\vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0.$$
- La bilinéarité et la symétrie entraînent
$$\langle \vec{x}, \vec{0} \rangle = \langle \vec{0}, \vec{x} \rangle = 0$$
(revoir comment on a démontré que $u(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ lorsque u est linéaire).

Retour à l'exercice ▲

- On vérifie la bilinéarité.
- On a
  - $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i^2 \geq 0$ puisque $\gamma_i > 0$ et $x_i^2 \geq 0$
  - $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \gamma_i x_i^2 = 0 \ \forall i = 1, \ldots, n \Longleftrightarrow x_i = 0 \ \forall i = 1, \ldots, n \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

  Si les γ_i ne sont pas strictement positifs, prenons par exemple

$$n = 2, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = -1,$$

on a alors

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = x_1^2 - x_2^2$$

donc $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ n'est pas positif ou nul pour tout $\vec{x}$, on peut prendre pour s'en convaincre

$$x_1 = 0, x_2 = 1.$$

Si tous les γ_i sont positifs ou nuls , par exemple

$$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0,$$

il n'est plus possible d'avoir $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$, mais on peut avoir $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ avec $\vec{x} \neq \vec{0}$, prendre par exemple

$$x_1 = 0, x_2 = 1.$$

D'une façon plus générale quand les γ_i sont seulement positifs ou nuls on peut avoir $\gamma_i x_i^2 = 0$ sans que $x_i = 0$.

Retour à l'exercice ▲

On applique la définition $\langle x, y \rangle = x^T y$, on obtient :

$$\langle Ax, y \rangle = (Ax)^T y = x^T A^T y = \langle x, A^T y \rangle.$$

Retour à l'exercice ▲

On obtient $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle^2 = \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 cos^2\theta \leq \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2$.
Or $\|\vec{x}\|^2 = \langle\vec{x},\vec{x}\rangle, \|\vec{y}\|^2 = \langle\vec{y},\vec{y}\rangle$.
Ce qui termine de démontrer la propriété.

Retour à l'exercice ▲

- $\max_{1\leq i\leq n} |x_i| = 0 \Longleftrightarrow x_i = 0\ \forall i = 1,\ldots,n \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
- $\max_{1\leq i\leq n} |\alpha x_i| = \max_{1\leq i\leq n} (|\alpha||x_i|) = |\alpha| \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$
- $\max_{1\leq i\leq n} |x_i + y_i| \leq \max_{1\leq i\leq n} (|x_i| + |y_i|) \leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i| + \max_{1\leq i\leq n} |y_i|$

Les propriétés d'une norme sont donc vérifiées.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.6

- **On vérifie que si** $\vec{x}_1 \in F^\perp, \vec{x}_2 \in F^\perp, \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 \in F^\perp$, $F^\perp$ **est stable donc est un sous espace vectoriel.**
- $\left.\begin{array}{l} \vec{x} \in F^\perp \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \ \forall \vec{y} \in F \\ \vec{x} \in F \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$ **donc** $F \cap F^\perp = \{\vec{0}\}$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.7

Soit $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$ une famille orthogonale, supposons que

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_p\vec{x}_p = \vec{0},$$

alors en effectuant le produit scalaire avec $\vec{x}_i$ on a :

$$\langle \vec{x}_i, \alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_p\vec{x}_p\rangle = 0,$$

en utilisant la bilinéarité on obtient

$$\alpha_1\langle \vec{x}_i, \vec{x}_1\rangle + \alpha_2\langle \vec{x}_i, \vec{x}_2\rangle + \ldots + \alpha_p\langle \vec{x}_i, \vec{x}_p\rangle = 0,$$

puisque la famille est orthogonale
$\langle \vec{x}_i, \vec{x}_j\rangle = 0$ pour $j \neq i$, donc on obtient

$$\alpha_i\langle \vec{x}_i, \vec{x}_i\rangle = 0$$

or $\vec{x}_i \neq \vec{0}$ donc $\langle \vec{x}_i, \vec{x}_i\rangle \neq 0$ donc $\alpha_i = 0$ ce que l'on vient de faire est valable $\forall i = 1, \ldots, p$ donc la famille est libre.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.8

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta = -\langle \vec{x}_2, \vec{y}_1 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\vec{\hat{y}}_2 = \vec{x}_2 + \beta \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\hat{y}}_3 = \vec{x}_3 + \beta_1 \vec{y}_1 + \beta_2 \vec{y}_2,\ \textbf{avec}\ \beta_1 = -\langle \vec{x}_3, \vec{y}_1 \rangle = -\sqrt{2},\ \beta_2 = -\langle \vec{x}_3, \vec{y}_2 \rangle = -\frac{2}{\sqrt{6}},$$

$$\vec{\hat{y}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\vec{y}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Pour obtenir $\vec{y}_3$ on peut écrire $\vec{y}_3 = \dfrac{1}{\|\vec{\hat{y}}_3\|} \vec{\hat{y}}_3$

où ce qui est équivalent mais plus facile à calculer

$$\vec{y}_3 = \frac{1}{\|\vec{y^*}_3\|}\vec{y^*}_3, \text{ avec } \vec{y^*}_3 = 3\vec{\hat{y}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.9

**Si on note $\vec{x}_1 = (2, 1, 0), \vec{x}_2 = (1, 0, -1)$, alors $\{\vec{y}, \vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
On peut alors montrer facilement que $F \cap F^{\perp} = \{\vec{0}\}$ et que $\mathbb{R}^3 = F + F^{\perp}$.**

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.10

On vérifie que

$$(Q_1)^T Q_1 = 1, (Q_1)^T Q_2 = 0, (Q_1)^T Q_3 = 0, (Q_1)^T Q_4 = 0,$$
$$(Q_2)^T Q_2 = 1, (Q_2)^T Q_3 = 0, (Q_2)^T Q_4 = 0,$$
$$(Q_3)^T Q_3 = 1, (Q_3)^T Q_4 = 0,$$
$$(Q_4)^T Q_4 = 1$$

Donc $Q^T Q = I$ donc $Q^{-1} = Q^T$.
On calcule $\det Q = -1$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.11

On vérifie que :
$\|\vec{e}_1\| = 1, \|\vec{e}_2\| = 1, \|\vec{e}_3\| = 1, \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0, \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle = 0, \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = 0,$
$\|\vec{e'}_1\| = 1, \|\vec{e'}_2\| = 1, \|\vec{e'}_3\| = 1, \langle \vec{e'}_1, \vec{e'}_2 \rangle = 0, \langle \vec{e'}_1, \vec{e'}_3 \rangle = 0, \langle \vec{e'}_2, \vec{e'}_3 \rangle = 0$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

lorsque l'on effectue $P^T P$ on effectue les mêmes calculs que pour calculer les normes $\|\vec{e'}_1\|, \ldots$ et les produits scalaires $\langle \vec{e'}_1, \vec{e'}_3 \rangle, \ldots$, on trouve donc que $P^T P = I$. En effectuant PP^T on obtient à nouveau $PP^T = I$, c'est normal car $P^T P = I \Rightarrow P^{-1} = P^T$ et donc $PP^T = PP^{-1} = I$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.12

C'est la matrice P de l'exercice précédent, c'est une matrice de passage entre 2 bases orthonormées, elle est donc orthogonale donc $P^{-1} = P^T$, et on calcule $\det P = 1$, (en fait on peut montrer que lorsque la base est orthonormée directe $\vec{e'}_3 = \vec{e'}_1 \wedge \vec{e'}_2$, alors $\det P = 1,$ sinon $\det P = -1$)

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.13

On a $x' = P^{-1}x = P^T x$ d'où

$$x'_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\sqrt{3}}, x'_2 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, x'_3 = \frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{\sqrt{6}}.$$

On a donc $\left\{ \begin{array}{l} (x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 \\ x'_1 y'_1 + x'_2 y'_2 + x'_3 y'_3 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \end{array} \right.$

Ceci était prévisible puisque $x' = Qx$, or $Q = P^T$ est orthogonale, donc

$$(x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2 = \|Qx\|^2 = x^T Q^T Q x = x^T x = \|x\|^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2,$$

$$x'_1 y'_1 + x'_2 y'_2 + x'_3 y'_3 = \langle Qx, Qy \rangle = y^T Q^T Q x = \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Retour à l'exercice ▲

1. $\langle Ay_1, y_2\rangle = \lambda_1 \langle y_1, y_2\rangle$.
2. $\langle y_1, Ay_2\rangle = \lambda_2 \langle y_1, y_2\rangle$.
3. Or $\langle Ay_1, y_2\rangle = \langle y_1, A^T y_2\rangle = \langle y_1, Ay_2\rangle$.
   Donc
   $$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle y_1, y_2\rangle = 0.$$
   Puisque
   $$\lambda_1 \neq \lambda_2,$$
   on obtient
   $$\langle y_1, y_2\rangle = 0.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.15

det $(sI - A) = (s-6)^2 s$, on a donc 2 valeurs propres (réelles) $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 6$. On calcule les vecteurs propres :

les composantes de Y_0 doivent vérifier $y_1 = y_2 = y_3$; d'où un vecteur propre normé possible : $Y_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

les composantes de Y_1 doivent vérifier $y_1 + y_2 + y_3 = 0$; d'où :

$$Y_1 = y_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on obtient 2 vecteurs propres qui constituent une base de V_{λ_1} à savoir

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ces 2 vecteurs ne sont pas normés, ils ne sont pas orthogonaux entre eux, en revanche X_1 et Y_0 sont orthogonaux, il en est de même pour X_2 et Y_0. On va utiliser le procédé d'orthogonalisation de Schmidt pour construire à partir de X_1 et X_2 , 2 vecteurs orthonormés Y_1^* et Y_2^* . On peut remarquer en effet qu'avec ce procédé on reste dans l'espace vectoriel V_{λ_1} donc que les vecteurs Y_1^*, Y_2^* sont également des vecteurs propres associés à λ_1.

$$Y_1^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{Y}_2 = X_2 - \langle X_2, Y_1^* \rangle Y_1^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$Y_2^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

On obtient donc la base orthonormée de vecteurs propres :

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\}$$

le premier vecteur est associé à λ_0, les 2 derniers sont associés à λ_1.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.16

Choisissez successivement pour x les vecteurs de la base canonique, on a alors $e_i^T A e_i = a_{ii}$, d'où la conclusion.

Retour à l'exercice ▲

On a : $x^T Ax \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\tilde{x}_i)^2 \geq 0 \; \forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$,
donc si toutes les valeurs propres sont positives ou nulles, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\tilde{x}_i)^2 \geq 0$$

donc $x^T Ax \geq 0$ donc la matrice est symétrique semi-définie positive.
Réciproquement si la matrice est symétrique semi-définie positive, on a $x^T Ax \geq 0 \; \forall x$ donc

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\tilde{x}_i)^2 \geq 0 \; \forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^n,$$

donc en particulier si on choisit $\tilde{x}$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on obtient $\lambda_1 \geq 0$. De même on obtient que chacun des λ_i est positif ou nul, en choisissant pour $\tilde{x}$ chacun des vecteurs de la base canonique.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.18

La matrice est semi-définie positive puisque toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles. Elle n'est pas définie positive puisque ses valeurs propres ne sont pas strictement positives.

$$x^T Ax = 4(x_1)^2 + 4(x_2)^2 + 4(x_3)^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.19

Si A est définie positive, ses valeurs propres sont strictement positives donc 0 n'est pas valeur propre, donc A est inversible.

Si on définit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, cette matrice est semi-définie positive puisque ses valeurs propres sont positives ou nulles, mais elle n'est pas inversible.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.20

- $q(x) = 3(x_1)^2 + 7(x_2)^2 + 13(x_3)^2 - 4x_1x_2 + 10x_1x_3 + 22x_2x_3$
- $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & \frac{9}{2} \\ -2 & 5 & -\frac{15}{2} \\ \frac{9}{2} & -\frac{15}{2} & -7 \end{pmatrix}$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.21

– $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0 \; \forall x$.
D'autre part si $q(x) = 0$ alors $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
C'est une forme quadratique définie positive.
– $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$.
Si $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 1, q(x) = -1$, donc q n'est pas définie positive ni semi-définie positive
– $q(x) = x_1^2 + x_3^2 \geq 0 \; \forall x$. Donc q est semi-définie positive,
par contre si $x_1 = x_3 = 0, x_2 = 1, q(x) = 0$ alors que $x \neq 0$ donc q n'est pas définie positive.

Les matrices associées sont égales dans chacun des cas à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

. Ces 3 matrices sont diagonales, leurs valeurs propres sont donc

$$\{1, 1, 1\}, \{1, 1, -1\}, \{1, 0, 1\},$$

on retrouve la caractérisation de matrice définie positive ou semi-définie positive à l'aide du signe des valeurs propres.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.22

- $q(x) = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + (x_3 + 5x_2)^2 + 2(x_2)^2$
  il est immédiat de voir que $q(x) \geq 0 \; \forall x$: c'est une somme de carrés.
  De plus si $q(x) = 0$ alors
  $$x_2 = 0, x_3 + 5x_2 = 0, x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$
  donc
  $$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$
  Donc q est définie positive.
- $q(x) = (x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4)^2 - (x_1 - x_2 + 3x_4)^2 - 4(x_3 - x_4)^2 + 12(x_4)^2$,
  si l'on choisit
  $$x_3 = x_4 + 1, x_4 = 0, x_1 - x_2 + 3x_4 = 0, x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$$
  (ce qui est obtenu par exemple pour
  $$x_3 = 1, x_4 = 0, x_1 = -1, x_2 = -1),$$
  on obtient $q(x) = -4$ donc la forme quadratique n'est pas définie positive, ni semi-définie positive.
  On pourrait montrer de façon générale que pour que q forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ soit définie positive, il faut et il suffit que la réduction conduise à **n** carrés affectés de coefficients strictement positifs. Pour que q soit semi-définie positive, il faut et il suffit que la réduction conduise à des carrés affectés de coefficients positifs. Ceci est lié bien sûr aux valeurs propres de la matrice A associée.
- On a vu que la matrice associée à q était semi-définie positive donc q est semi-définie positive.
  Si on appliquait la réduction de Gauss on obtiendrait :
  $$q(x) = 4(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3)^2 + 3(x_2 - x_3)^2.$$

On a donc $q(x) \geq 0 \; \forall x$, mais si on prend

$$\begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases}$$

alors $q(x) = 0$ (ce cas est obtenu par exemple pour $x_1 = x_2 = x_3 = 1$). On retrouve bien que q est seulement semi-définie positive.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.23

Immédiat : $\phi(\vec{x}, \vec{x}) = \overline{\phi(\vec{x}, \vec{x})}$ **donc** $\phi(\vec{x}, \vec{x}) \in \mathbb{R}$.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Produit scalaire-définition".

Retour à l'exercice ▲

Bien mettre en évidence les propriétés de la trace que vous utilisez pour démontrer chacune des propriétés du produit scalaire.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1a, Exercice A.2.1

$$||A||^2 = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} (a_{ij}^2)$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 1a, Exercice A.2.1

$$(\textbf{ trace } A^T B)^2 \leq (\textbf{ trace } A^T A)(\textbf{ trace } B^T B)$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.1

Vérifier la propriété avec les matrices A et B de la question précédente.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.1

Dans le cas général, montrer que le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^{np}$ est égal à la somme de p produits scalaires dans $\mathbb{R}^n$.

Retour à l'exercice ▲

Si on note $\langle\langle .,. \rangle\rangle$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$, montrer que $\langle\langle A_i, B_i \rangle\rangle = (A^T B)_{ii}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.2

Voir le paragraphe "Inégalité de Schwarz".

Retour à l'exercice ▲

Ecrire la somme $\sum y_i$ comme le produit scalaire de y avec ... quel vecteur ?

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Norme-définition".

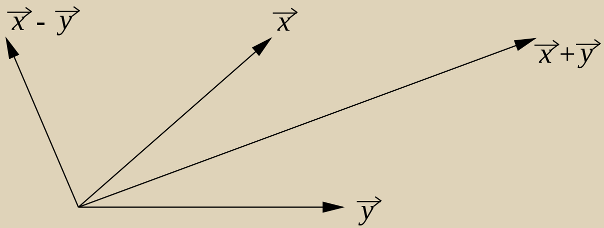
Retour à l'exercice ▲

Les normes sont toujours positives donc il suffit de montrer l'égalité des carrés.

Retour à l'exercice ▲

Utilisez le produit scalaire et sa bilinéarité.

Retour à l'exercice ▲



Comment placer $\vec{x}$ sur la figure pour que $||\vec{x}+\vec{y}|| = ||\vec{x}-\vec{y}||$

Retour à l'exercice ▲

Exprimer la norme à l'aide du produit scalaire.

Retour à l'exercice ▲

Le produit scalaire est bilinéaire.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Orthogonaux-vecteurs,sous-espaces".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1a, Exercice A.2.4

Montrer l'égalité par double inclusion, l'une des inclusions est évidente, montrer l'autre.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1a, Exercice A.2.4

Montrer que

$$\forall \vec{x} \in E, \vec{x} \in \{\vec{0}\}^{\perp}.$$

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Orthogonaux-vecteurs,sous-espaces".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1b, Exercice A.2.4

Montrer l'égalité par double inclusion, l'une des inclusions est évidente, montrer l'autre.

Retour à l'exercice ▲

Choisir $\vec{x} \in E^{\perp}$, montrer que $\vec{x} = \vec{0}$.

Retour à l'exercice ▲

Le produit scalaire est défini-positif.

Retour à l'exercice ▲

Montrer que $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$.

Retour à l'exercice ▲

Montrer que F et $(F^\perp)^\perp$ ont même dimension.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Espace euclidien-décomposition"

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3a, Exercice A.2.4

Montrer l'implication de gauche à droite.

Retour à l'exercice ▲

Choisir $\vec{x} \in G^\perp$, montrer que $\vec{x} \in F^\perp$.
Utiliser pour cela la définition du sous-espace orthogonal.

Retour à l'exercice ▲

Pour démontrer la réciproque penser à la question 2.

Retour à l'exercice ▲

Montrer une double inclusion.

Retour à l'exercice ▲

$(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp}$. Pourquoi ?

Retour à l'exercice ▲

F et G sont inclus dans $F+G$, donc

$$(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp.$$

Pourquoi ?

Retour à l'exercice ▲

Montrer la réciproque,
on choisit $\vec{x} \in F^{\perp} \cap G^{\perp},\ \vec{z} \in F + G$. **Calculer**

$$\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle.$$

Retour à l'exercice ▲

Si $\vec{x} \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$**, si** $\vec{z} \in F + G$**, alors**

$$\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = 0$$

donc

$$\vec{x} \in (F + G)^{\perp}.$$

Retour à l'exercice ▲

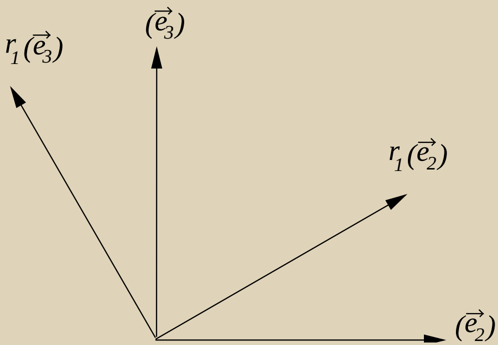
Voir le paragraphe "Matrices orthogonales-définitions".

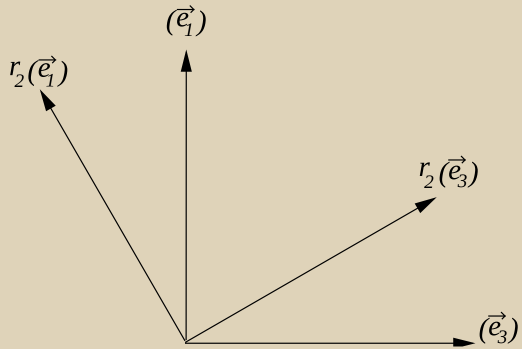
Retour à l'exercice ▲

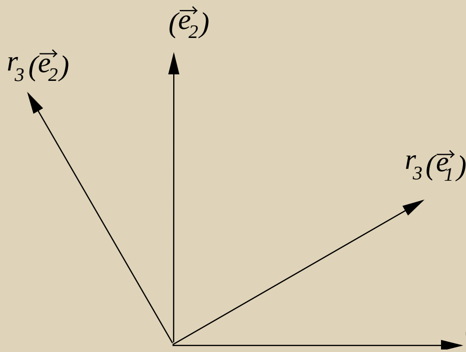
Voir le paragraphe "Matrices orthogonales - propriétés".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2a, Exercice A.2.5







On note
- r_1 la rotation d'angle θ autour de $\vec{e}_1$,
- r_2 la rotation d'angle θ autour de $\vec{e}_2$,
- r_3 la rotation d'angle θ autour de $\vec{e}_3$.

Ecrire les matrices R_1, R_2, R_3. Aidez-vous des figures.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Matrice de passage entre 2 bases orthonormées".

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Matrices orthogonales - propriétés".

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Matrices orthogonales - propriétés"

Retour à l'exercice ▲

Que vaut $||Rx||$ **?**

Retour à l'exercice ▲

$QQ^T \neq I$. **Donc** Q^T **n'est pas orthogonale.**

Retour à l'exercice ▲

Q **n'est pas carrée !**

Retour à l'exercice ▲

Calculer $(PQ)^T PQ$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.7

Si y est vecteur propre alors $\frac{y}{\|y\|}$ est encore vecteur propre.

Retour à l'exercice ▲

Les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux (pour une matrice symétrique, évidemment !).

Retour à l'exercice ▲

A l'intérieur d'un sous-espace propre, il est possible d'utiliser l'algorithme d'orthogonalisation de Schmidt.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.7

Si y est vecteur propre alors $\frac{y}{\|y\|}$ est encore vecteur propre.

Retour à l'exercice ▲

Les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux (pour une matrice symétrique, évidemment !).

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.7

A l'intérieur d'un sous-espace propre, il est possible d'utiliser l'algorithme d'orthogonalisation de Schmidt.

Retour à l'exercice ▲

Il y a une valeur propre évidente !

Retour à l'exercice ▲

Trouver une inégalité sur la multiplicité de la valeur propre évidente (penser au rang de A).

Retour à l'exercice ▲

0 **peut-elle être valeur propre de multiplicité** 4 **?**

Retour à l'exercice ▲

Calculer la trace de A.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3b, Exercice A.2.7

Si y est vecteur propre alors $\frac{y}{||y||}$ est encore vecteur propre.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3b, Exercice A.2.7

Les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux (pour une matrice symétrique, évidemment !).

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 3b, Exercice A.2.7

A l'intérieur d'un sous-espace propre, il est possible d'utiliser l'algorithme d'orthogonalisation de Schmidt.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.8

Que se passe-t-il si on applique l'algorithme de Schmidt sur la famille de vecteurs propres de A_1 ?

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Matrices symétriques - diagonalisation".

Retour à l'exercice ▲

Une des implications a déjà été démontrée, laquelle ?
Montrer l'autre maintenant.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.8

On suppose qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres de A, on appelle P la matrice dont les colonnes sont ces vecteurs propres. Que vaut P^T ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 2, Exercice A.2.8

$A = PDP^T$. Pourquoi ? Calculer A^T, en déduire que A est symétrique.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Produit scalaire-définition".

Retour à l'exercice ▲

Il faut utiliser le fait que A est symétrique et définie positive.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2a, Exercice A.2.9

Utiliser la bilinéarité du produit scalaire pour calculer $\langle x, y \rangle$.
Calculer $x^T Ay$.
Comparer.

Retour à l'exercice ▲

Quelle propriété du produit scalaire utilise-t-on pour démontrer que A est symétrique ?
Quelle propriété du produit scalaire utilise-t-on pour obtenir des renseignements quant au signe de $x^T Ax$?

Retour à l’exercice ▲

Voir le paragraphe "Forme quadratique définiepositive".

Retour à l'exercice ▲

Utiliser la réduction de Gauss d'une forme quadratique.

Retour à l'exercice ▲

Faites la distinction entre forme quadratique définie positive et forme quadratique semi-définie positive.

Retour à l'exercice ▲

Il y a un terme de la forme $-3(x_3)^2$. Qu'en pensez-vous ?

Retour à l'exercice ▲

Si on choisit $x_3 = 1$, $x_1 = x_2 = 0$?

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Produit scalaire-définition".

Retour à l'exercice ▲

Penser à symétrique et définie positive. Vous pouvez utiliser la question précédente.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Matrice définie positive".

Retour à l'exercice ▲

On a déjà étudié au cours de ce TD ou du TD4 des formes quadratiques et des matrices. Pensez à utiliser ces résultats en particulier pour les matrices 1, 5 6, 7.

Retour à l'exercice ▲

Aucun calcul pour la matrice 2 ou 7, les matrices 5 et 6 ont été étudiées auparavant, utilisez les résultats. Utiliser la réduction de Gauss pour les autres.

Retour à l'exercice ▲

Les matrice 2 ou 7 ont un terme diagonal négatif.
Les matrices 5 et 6 ont des valeurs propres positives ou nulles.
On utilise la réduction de Gauss pour les autres matrices.
D'où les résultats.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.11

Utiliser les propriétés des normes pour démontrer les propriétés de la distance.

Retour à l'exercice ▲

Utiliser l'exercice A.2.9.

Retour à l'exercice ▲

$x^T Ay$ est un produit scalaire, donc $\sqrt{(x-y)^T A(x-y)}$ est la norme de $(x-y)$ associée.
Reprenez la question 1. pour conclure.

Retour à l'exercice ▲

C est un cercle, C_A est une ellipse.

Retour à l'exercice ▲