

CHAPITRE ①

GENERALITES

CHAPITRE ① GENERALITES.....	1-1
1. AUTOMATIQUE "CONTINUE"	1
1.1. PROCEDES ET SIGNAUX :	1
1.2. LES SYSTEMES DE COMMANDE :	1
<i>Commande en boucle ouverte</i> :	1
<i>Commande en boucle fermée</i> :	1
1.3. ROLE ET MISE AU POINT DU CORRECTEUR :	2
2. COMMANDE DITE "NUMERIQUE"	3
2.1. LES AVANTAGES DU "NUMERIQUE":	3
2.2. IMPLANTATION D'UNE COMMANDE NUMERIQUE :	3
<i>schéma de principe</i> :	3
<i>programme du correcteur</i> :	4
<i>calcul de la commande</i> :	4
2.3. LE MODELE DU SYSTEME DISCRET :	5
<i>Modèles échantillonnés-bloqués (voir annexes):</i>	5
<i>Le retard du bloqueur</i> :	5
<i>Pôles et zéros</i> :	6
<i>Les retards du procédé</i> :	6
<i>Forme générale de la fonction de transfert échantillonnée-bloquée</i> :	7
3. SPECIFICATION DES DYNAMIQUES.....	7
3.1. CAS CONTINU :	7
<i>système du 1^{er} ordre</i> :	7
<i>système du 2nd ordre</i> :	8
<i>cas général</i> :	10
<i>rôle des zéros</i> :	10
3.2. CAS DISCRET :	11
<i>Choix de la dynamique</i> :	11
<i>Choix de la période d'échantillonnage</i> :	11
4. CONCEPTION DU CORRECTEUR :	12
4.1. UTILISATION DE L'AUTOMATIQUE FREQUENTIELLE DU CONTINU :	12
4.2. PLACEMENT DE POLES EN DISCRET :	13
<i>Placement de pôle par méthode polynomiale</i> :	13
<i>Placement de pôle par retour d'état</i> :	13
<i>Méthodes avancées</i> :	13
5. ANNEXES	13
5.1. FONCTION DE TRANSFERT ECHANTILLONNEE-BLOQUEE, APPROCHE POLYNOMIALE :	13
5.2. FONCTION DE TRANSFERT ECHANTILLONNEE-BLOQUEE, APPROCHE D'ETAT :	14
<i>Calcul de e^{AT}</i> :	14

1. AUTOMATIQUE "CONTINUE"

Le but premier de l'automatique est la mise au point de systèmes de commande ou asservissements sur des procédés (ou systèmes). Grande évolution technologique du 20^{ème} siècle le rôle d'un système de commande dans un ensemble est souvent assimilé à celui du cerveau. Ici nous allons rappeler succinctement les grands axes et le vocabulaire de l'automatique. Il est identique à celui qui a été acquis lors de cours précédents traitant de la commande des systèmes continus.

1.1. Procédés et signaux :

Un procédé est vu comme une boîte noire qui introduit une relation entre deux catégories de signaux:

- Les signaux d'entrée ou entrées de commande du procédé.
- Les signaux de sortie ou sorties commandées.

Le cas le plus simple est celui des procédés SISO (Single Input Single Output) auquel nous allons nous restreindre. La généralisation se faisant ensuite aux procédés plus complexes : les procédés MIMO (Multiple Input Multiple Output). La représentation d'un procédé SISO est donc la suivante :

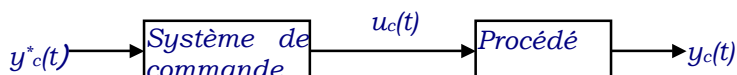


Par convention l'entrée ou commande est notée $u(t)$ et la sortie $y(t)$. Les indices c étant ici présents pour rappeler qu'il s'agit pour l'instant d'un système continu et donc de signaux continus (ou analogiques).

1.2. Les systèmes de commande :

Commande en boucle ouverte :

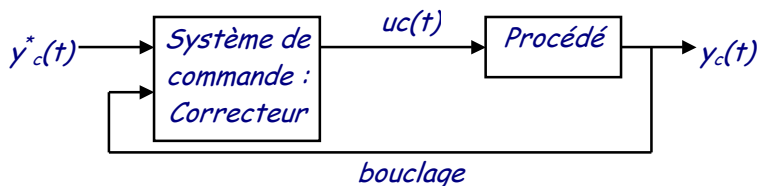
Un premier dispositif à première vue le plus simple pour réaliser la commande du système :



La commande est élaborée par un système de commande qui, à partir d'une sortie désirée : la consigne (ou la référence) élabore la commande appliquée. Ce système simple est en boucle ouverte car, dans sa décision, il ne prend pas en compte l'évolution de la sortie du procédé. On parle alors de commande en boucle ouverte ou de feedforward (FF).

Commande en boucle fermée :

L'automatique introduit sur cette réalisation élémentaire un peu plus "d'intelligence" en proposant une boucle fermée selon le schéma suivant :



L'évolution de la sortie est prise en compte dans l'élaboration de la commande : opération de bouclage. La commande est alors réalisée en boucle fermée ou feedback (FB).

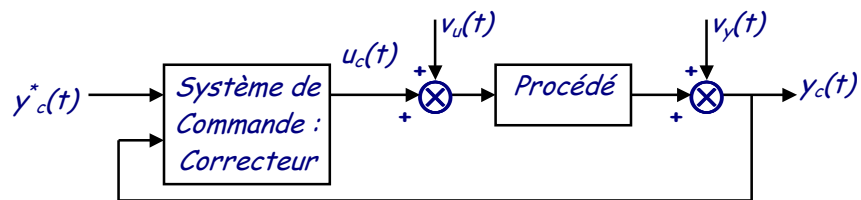
Un système élaboré de commande peut comporter les deux types d'actions : une partie boucle ouverte (FF) et une partie boucle fermée (FB).

1.3. Rôle et mise au point du correcteur :

Le but idéal d'un système de commande est d'assurer la condition $y_c(t) = y_c^*(t)$ si possible $\forall t$. Cette condition est, dans le cas général, impossible à tenir rigoureusement et il est recherché plutôt une solution dite asymptotique :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (y_c^*(t) - y_c(t)) = 0$$

Cette condition doit être remplie non seulement lorsque la consigne évolue au cours du temps mais aussi en présence d'actions de perturbation. Cela est représenté sur le schéma ci-dessous où interviennent les perturbations le plus souvent prises en compte : la perturbation de la commande $v_u(t)$ ou perturbation d'entrée et celle de la sortie ou perturbation de sortie $v_y(t)$.



Le fait que cette condition soit remplie de manière asymptotique introduit dans la réponse du système deux termes :

- Le comportement asymptotique lorsque $t \rightarrow +\infty$: c'est le régime permanent.
- Le comportement entre l'application de l'entrée et l'obtention du régime permanent : c'est le régime transitoire qui définit ce qui est appelé la dynamique du système.

La mise au point du correcteur doit prendre en compte deux types d'actions :

- Une action de poursuite : $y_c(t)$ doit suivre au mieux les évolutions de la consigne.
- Une action de régulation : les entrées de perturbation $v_u(t)$ et $v_y(t)$ doivent avoir une action quasi nulle sur la sortie. C'est le problème de rejet des perturbations.

Pour mettre au point le correcteur l'automatique propose plusieurs méthodes, toutes nécessitent d'avoir un modèle mathématique du comportement du procédé. En utilisant la théorie du signal appliquée aux systèmes linéaires invariants par translation (SLI \equiv LTI) nous avons deux types de modèles linéaires : la fonction de transfert et les représentations d'état. Il est aisé de passer de l'un à l'autre.

La réalisation du correcteur se fait donc comme suit :

1. rédaction d'un cahier des charges : quelles sont les entrées à prendre en compte ? Quel est leur modèle ? Quel régime permanent (erreur de position en général nulle) ? Quelle dynamique de poursuite ? Quelle dynamique de régulation ?
2. choix d'une méthode de mise au point du correcteur adaptée au problème : méthode fréquentielle (PID), retour d'état,.....
3. obtention d'un modèle de procédé adapté à la méthode : méthode fréquentielle \Rightarrow fonction de transfert $H(p)$, retour d'état \Rightarrow quadruplet (A,B,C,D) .
4. Calcul du correcteur avec des méthodes linéaires : PID (méthode fréquentielle), méthode polynomiale, observateur + retour d'état + précompensateur ,...

2. COMMANDE DITE "NUMERIQUE"

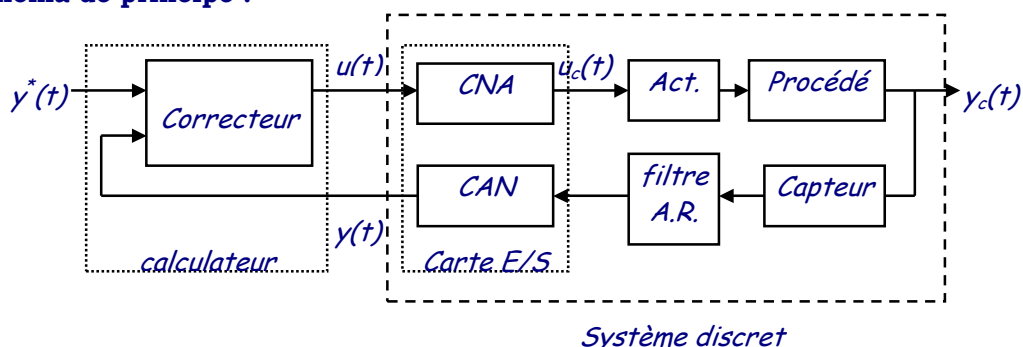
2.1. Les avantages du "numérique":

Avec une approche continue, la réalisation pratique des correcteurs se fait en analogique avec des composants électroniques et réalisation d'un circuit. Quelques réglages peuvent être prévus par des composants (potentiomètres, condensateurs ajustables,...) mais le changement de conception passe par la construction complète d'un nouveau circuit. La phase de mise au point où plusieurs essais de correcteurs peuvent être nécessaires nécessite aussi des changements de composants.

Le numérique propose une autre approche en utilisant des composants d'informatique industrielle (microcontrôleurs, microprocesseurs, DSP, logique programmable, automates, ordinateurs,...). Les signaux traités seront des signaux discrets, donc des échantillons et le correcteur réalisé devient un programme à faire exécuter par le composant choisi. Le changement ou la mise au point ne nécessitent plus de nouvelle réalisation technologique mais simplement une nouvelle programmation ce qui est en général plus simple. L'évolution qui dans le cas continu se fait par matériel (hard) se réalise ainsi par logiciel (soft). Pendant longtemps l'électronique analogique avait l'avantage de la rapidité sur l'électronique numérique ce qui est de moins en moins vrai avec l'évolution rapide des technologies.

2.2. Implantation d'une commande numérique :

schéma de principe :



Le dispositif est un système discret qui travaille à une cadence donnée. Nous y trouvons :

1. une horloge (non représentée ici) usuellement réalisée avec un compteur (timer). Sa fonction est de fournir un "top" à intervalles de temps réguliers. Il impose ainsi T_s la période d'échantillonnage des systèmes discrets mis en œuvre.
2. un correcteur réalisé avec un ordinateur ou tout dispositif de l'informatique industrielle. Ce correcteur est en réalité un programme qui travaille avec des signaux discrets :

a. ses signaux d'entrée: la consigne $y^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k^* \delta(t-kT_s)$, la sortie $y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k \delta(t-kT_s)$.

b. son signal de sortie : la commande $u(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \delta(t-kT_s)$.

3. un système discret d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$. Ce système discret a comme cœur le procédé continu à commander.
 - a. La commande $u_c(t)$ du procédé est construite à partir de la commande $u(t)$ mise en forme par un convertisseur numérique-analogique (CNA). Celui-ci introduit dans cette commande un effet de bloqueur d'ordre zéro.
 - b. La sortie $y_c(t)$ continue est échantillonnée et numérisée grâce à un convertisseur analogique- numérique (CAN) pour fournir $y(t)$ discret.

programme du correcteur :

L'algorithme de base élémentaire est le suivant :

1. initialisations de tableaux : $\{u_k\} \leftarrow 0$; $\{y_k\} \leftarrow 0$; $\{y_k^*\} \leftarrow 0$. Le nombre de variables à utiliser pour chaque signal étant fixé par l'équation du correcteur de l'étape 5
2. attente du top de l'horloge (instant d'échantillonnage) $\Rightarrow t = nT_s$
3. Acquisition de la valeur y_n
4. lecture de la valeur y_n^*
5. calcul de la commande : $u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, y_n, y_{n-1}, \dots, y_n^*, y_{n-1}^*, \dots)$. Cette fonction sera précisée ensuite.
6. appliquer la commande u_n grâce au CNA
7. décalages des variables pour l'instant suivant

a.; $u_{n-2} \leftarrow u_{n-1}$; $u_{n-1} \leftarrow u_n$; pour tout le tableau des $\{u_k\}$

b.; $y_{n-2} \leftarrow y_{n-1}$; $y_{n-1} \leftarrow y_n$; pour tout le tableau des $\{y_k\}$

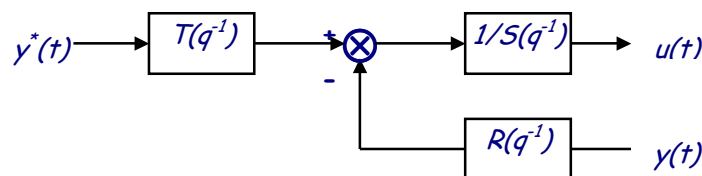
c.; $y_{n-2}^* \leftarrow y_{n-1}^*$; $y_{n-1}^* \leftarrow y_n^*$; pour tout le tableau des $\{y_k^*\}$

Remarque : il faut bien effectuer les décalages de chaque tableau dans l'ordre indiqué. Si on utilise l'ordre inverse par exemple : $u_{n-1} \leftarrow u_n$; $u_{n-2} \leftarrow u_{n-1}$; $u_{n-3} \leftarrow u_{n-2}$;tout le tableau se voit affecter la valeur $u_n \forall k$ ce qui n'est pas l'effet recherché.

8. retour à l'étape 2

calcul de la commande :

En se basant sur les SLI la structure de la commande implantée est une structure dite RST dont le schéma de principe est le suivant :



R , S et T sont des **polynômes de degré fini** et ce schéma représente l'équation récurrente :

$$S(q^{-1}) u(t) = T(q^{-1}) y^*(t) - R(q^{-1}) y(t)$$

d'où la relation permettant de calculer la commande à l'instant $t = kT_s$

$$R(q^{-1}) = r_0 + r_1 q^{-1} + r_2 q^{-2} + \dots + r_{n_r} q^{-n_r}$$

$$S(q^{-1}) = 1 + s_1 q^{-1} + s_2 q^{-2} + \dots + s_{n_s} q^{-n_s}$$

$$T(q^{-1}) = t_0 + t_1 q^{-1} + t_2 q^{-2} + \dots + t_{n_t} q^{-n_t}$$

la relation de l'étape 5 de l'algorithme prend alors une forme simple :

$$u_k = t_0 y_k^* + t_1 y_{k-1}^* + \dots + t_{n_t} y_{k-n_t}^* - r_0 y_k - r_1 y_{k-1} - \dots - r_{n_r} y_{k-n_r} - s_1 u_{k-1} - \dots - s_{n_s} u_{k-n_s}$$

$$u_k = \sum_{n=0}^{n_t} t_n y_{k-n}^* - \sum_{m=0}^{n_r} r_m y_{k-m} - \sum_{i=1}^{n_s} s_i u_{k-i}$$

Remarques :

Le polynôme $S(q^{-1})$ est sous forme dite monic c'est à dire que $s_0=1$.

Les systèmes étant invariants, la relation sur les échantillons est généralisable aux séquences d'où la forme d'écriture communément utilisée en traitement de signal :

$$u(t) = \underbrace{[t_0 y^*(t) + t_1 y^*(t-1) + \dots + t_{n_t} y^*(t-n_t)]}_{\text{poursuite}} - \underbrace{[r_0 y(t) + r_1 y(t-1) + \dots + r_{n_r} y(t-n_r)]}_{\text{régulation}} - \underbrace{[s_1 u(t-1) + \dots + s_{n_s} u(t-n_s)]}_{\text{récurrence}}$$

$$u(t) = \sum_{n=0}^{n_t} t_n y^*(t-n) - \sum_{m=0}^{n_r} r_m y(t-m) - \sum_{i=1}^{n_s} s_i u(t-i)$$

Dans le cas général $T(q^{-1}) \neq R(q^{-1})$ cette structure est équivalente à une action de commande en boucle ouverte (FF) associée à une commande en boucle fermée (FB) telles que :

$$C_{FF}(q^{-1}) = \frac{T(q^{-1})}{S(q^{-1})} \quad \text{et} \quad C_{FB}(q^{-1}) = \frac{R(q^{-1})}{S(q^{-1})}.$$

Lorsque que $T(q^{-1}) = R(q^{-1})$ nous retrouvons un correcteur simple à retour unitaire de la forme $C(q^{-1})$ tel que :

$$C(q^{-1}) = \frac{R(q^{-1})}{S(q^{-1})}.$$

2.3. Le modèle du système discret :

Modèles échantillonnés-bloqués (voir annexes):

Les procédés réels sont des procédés continus. Ils sont modélisés en linéaire soit par une fonction de transfert $H(p)$ soit par un modèle d'état de quadruplet (A, B, C, D) :

$$Y_c(p) = H_c(p) U_c(p) \quad \begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A x_c(t) + B u_c(t) \\ y_c(t) &= C x_c(t) + D u_c(t) \end{aligned}$$

Le système discret associé est lui aussi modélisé soit par une fonction de transfert $G(z)$ soit par une représentation d'état de quadruplet (F, G, H, D) :

$$Y(z) = G(z) U(z) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F x(t) + G u(t) \\ y(t) &= H x(t) + D u(t) \end{aligned}$$

Compte tenu de la présence du CNA et de l'effet bloqueur d'ordre zéro, la relation entre les modèles continus et discrets est :

$$G(z) = \hat{B}_0 H(z) = (1 - z^{-1}) T Z \left[T L^{-1} \left[\frac{H_c(p)}{p} \right] \right] = H(zI - F)^{-1} G = \frac{H \text{Adj}(zI - F) G}{\det(zI - F)}$$

Le retard du bloqueur :

Approche fonction de transfert :

La fonction de transfert ainsi calculée possède quelques propriétés remarquables. Les systèmes réels sont tels que leurs fonctions de transfert sont strictement propres

$$\Rightarrow \text{degré num}(H(p)) < \text{deg den}(H(p)) \Rightarrow \text{degré num}(H(p)/p) < \text{deg den}(H(p)/p)$$

$\Rightarrow \text{degré num}(TZ[TL^{-1}[H(p)/p]]) < \text{deg den}(TZ[TL^{-1}[H(p)/p]])$ (autrement dit : on échantillonne la réponse indicielle d'un système strictement propre, sa valeur initiale est 0 \Rightarrow le premier échantillon de $G(z)$ est nul \Rightarrow il y a un retard en z^{-1} du à la présence du bloqueur d'ordre zéro).

$$\Rightarrow \text{degré num}((1-z^{-1})TZ[TL^{-1}[H(p)/p]]) < \text{deg den}((1-z^{-1})TZ[TL^{-1}[H(p)/p]])$$

soit pour $G(z)$: $\text{degré num}(G(z)) < \text{deg den}(G(z))$ qui implique que la fonction de transfert échantillonnée bloquée possède au minimum un retard d'une période d'échantillonnage.

Approche d'état :

Si n_c est le nombre de pôles du modèle continu :

- $\det(zI - F)$ est de degré n_c
- $H \text{Adj}(zI - F) G$ est de degré $n_c - 1$.

⇒ avec la forme en z^{-1} (multiplication haut et bas par z^{n_c}) apparaît un retard d'une période d'échantillonnage.

Pôles et zéros :

L'approche d'état montre simplement que le modèle discret possèdera n_c pôles (ordre du déterminant) et $n_c - 1$ zéros (ordre des cofacteurs de la matrice adjointe).

Puisque la fonction de transfert échantillonnée-bloquée provient de l'échantillonnage de la réponse indicielle, les modes discrets correspondent à l'échantillonnage des modes continus ce qui implique la relation entre pôles discrets $\{z_i\}$ et pôles continus $\{p_i\}$:

$$z_i = e^{p_i T_s}$$

En ce qui concerne les zéros, on ne peut rien conclure.

Les retards du procédé :

Le procédé continu possède un retard pur θ . Si $\theta = dT_s$ avec $d \in \mathbb{N}$ la formulation transfert montre que cela ajoute dans le transfert échantillonné un retard de d et donc un coefficient z^{-d} dans la fonction de transfert.

Le cas le plus général est que le retard $\theta \notin \mathbb{N}$. Il y a alors un retard fractionnaire

$$H(p) = e^{-p\theta} H_1(p) \text{ et } F_1(p) = \frac{H_1(p)}{p} = \frac{e^{-p\theta}}{p(p+\alpha)} = e^{-p\theta} \frac{H(p)}{p} = e^{-p\theta} F(p) = e^{-p d T_s} e^{-p \varepsilon T_s} F(p)$$

avec $\theta = (d+\varepsilon)T_s$ ce qui fait apparaître les retards discrets entiers dT_s + des retards fractionnaires εT_s .

$$\text{avec } d = 0 \Rightarrow F_1(p) = e^{-p(d+\varepsilon)T_s} F(p)$$

en effectuant la TL^{-1} la réponse indicielle devient : $f_1(t) = f(t - (d+\varepsilon)T_s)$

Illustrons cela avec le cas élémentaire d'un mode continu $p = -\alpha$:

$$\frac{H(p)}{p} = \frac{1}{p(p+\alpha)} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})e(t) \Rightarrow f_1(t) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(t-(d+\varepsilon)T_s)})e(t - (d+\varepsilon)T_s)$$

si nous échantillonnons $f_1(t)$ nous avons :

$$\begin{aligned} f_1(kT_s \leq dT_s) &= 0 \\ f_1((d+1)T_s) &= \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(1-\varepsilon)T_s}) \\ f_1((d+2)T_s) &= \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(2-\varepsilon)T_s}) \\ &\vdots \\ f_1(kT_s) &= \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(k-d-\varepsilon)T_s}) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} TZ[f_1(t)] &= \sum_{k=0}^{+\infty} f_1(k) z^{-k} = \sum_{k=d+1}^{+\infty} f_1(k) z^{-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_1(n+d+1) z^{-(n+d+1)} \\ &= z^{-(d+1)} \sum_{n=0}^{+\infty} f_1(n+d+1) z^{-n} = z^{-(d+1)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(n+1-\varepsilon)T_s}) z^{-n} \\ &= \frac{z^{-(d+1)}}{\alpha} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z e^{-\alpha(1-\varepsilon)T_s}}{z - e^{-\alpha T_s}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(z) &= (1-z^{-1}) TZ[f_1(t)] = \frac{z^{-(d+1)}}{\alpha} \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z e^{-\alpha(1-\varepsilon)T_s}}{z - e^{-\alpha T_s}} \right] = \frac{z^{-(d+1)}}{\alpha} \left[1 - \frac{(z-1) e^{-\alpha(1-\varepsilon)T_s}}{z - e^{-\alpha T_s}} \right] \\ &= \frac{z^{-(d+1)}}{\alpha} \left[\frac{z - e^{-\alpha T_s} - (z-1) e^{-\alpha(1-\varepsilon)T_s}}{z - e^{-\alpha T_s}} \right] = \frac{z^{-(d+1)}}{\alpha} \left[\frac{z(1 - e^{-\alpha(1-\varepsilon)T_s}) + (-e^{-\alpha T_s} + e^{-\alpha(1-\varepsilon)T_s})}{z - e^{-\alpha T_s}} \right] \\ &= \frac{z^{-(d+1)}}{\alpha} \left[\frac{(1 - e^{-\alpha(1-\varepsilon)T_s}) + (-e^{-\alpha T_s} + e^{-\alpha(1-\varepsilon)T_s}) z^{-1}}{z - e^{-\alpha T_s}} \right] \end{aligned}$$

Nous remarquons ainsi :

- La présence du retard z^{-1} dû au bloqueur d'ordre zéro.
- La présence du retard z^{-d} dû au retard "entier" du procédé continu.
- La présence du **retard fractionnaire** se traduit par l'introduction d'un **zéro supplémentaire** dans la fonction de transfert échantillonnée-bloquée.

Ce résultat est généralisable au cas de plusieurs modes dans la réponse indicielle.

Forme générale de la fonction de transfert échantillonnée-bloquée :

Avec les remarques précédentes, à partir d'un modèle continu strictement propre d'ordre n nous obtenons :

- Un système discret d'ordre n ayant comme pôles les pôles transposés du continu dans le plan Z
- Un système ayant $d+1$ retards, d étant le nombre de retards entiers du procédé continu et $(+1)$ étant lié à la présence du bloqueur d'ordre zéro.
- Un système ayant $(n-1)$ zéros ou n zéros s'il y a présence d'un retard fractionnaire.

Ceci justifie la forme systématiquement utilisée pour $G(z)$: une forme en z^{-1} dans laquelle apparaissent les retards :

$$G(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = z^{-(d+1)} \frac{B_1(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

d : Retards du procédé 1 : Effet du bloqueur
 Forme en z^{-1}

L'équation récurrente associée au système a la forme générale :

$$A(q^{-1}) y(t) = B(q^{-1}) u(t) = B_1(q^{-1}) u(t - d - 1)$$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a}$$

$$B_1(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b}$$

Convention : le polynôme $A(q^{-1})$ est mis sous forme monic $a_0 = 1$.

3. SPECIFICATION DES DYNAMIQUES

La spécification des dynamiques utilise des modèles de comportement : systèmes théoriques dont on souhaite reproduire les comportements. Deux modèles de comportement élémentaires sont utilisés :

1. le modèle du premier ordre
2. le modèle du second ordre

3.1. Cas continu :

système du 1^{er} ordre :

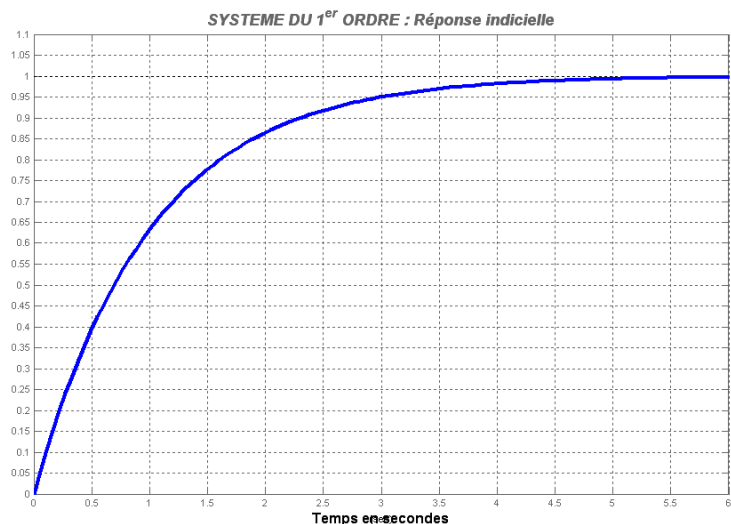
Il a une fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{k}{\tau p + 1}$$

La réponse indicielle d'un tel système est rappelée sur la figure ci-contre pour $k=1$ et $\tau=1$

A 5%, le régime transitoire est terminé pour :

$$t_{5\%} \approx 3\tau$$



système du 2nd ordre :

Système du second ordre

$$G(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2}$$

Les pôles de cette fonction de transfert sont : $p_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$. Pour $\zeta \geq 1$, les deux pôles sont réels et nous sommes donc dans le cas de la superposition de deux systèmes du 1^{er} ordre. Le cas plus intéressant est $\zeta < 1$, les deux pôles sont complexes conjugués et cela introduit des dépassements dans la réponse indicielle. C'est ce cas qui est utilisé comme modèle.

Pôles :

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

Réponse indicielle

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos\left(\omega_0 t \sqrt{1-\zeta^2} - \phi\right)$$

Premier dépassement

$$D_1 = \exp\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

Temps du premier maximum

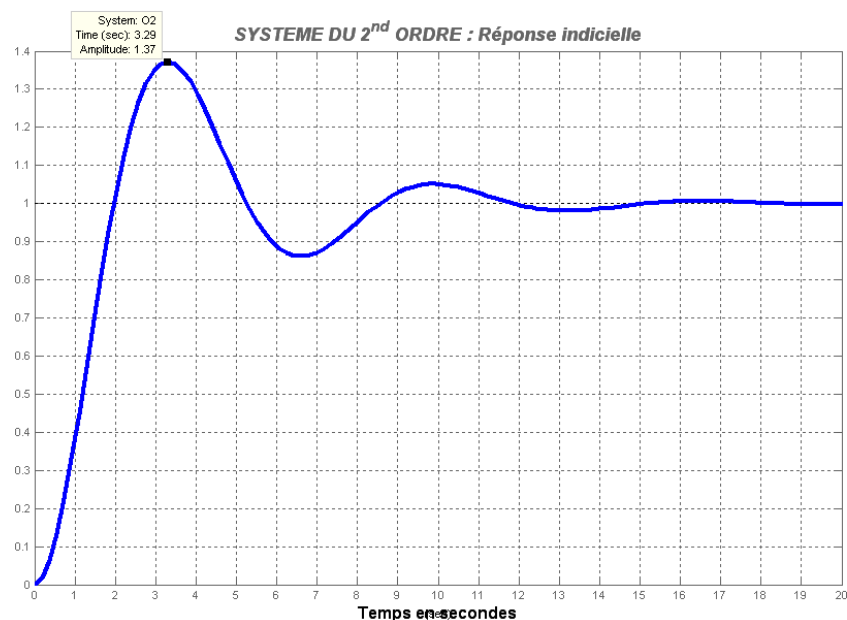
$$t_{\max} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Temps d'établissement à 5%

$$t_{5\%}\omega_0 \approx \frac{3 - \text{Ln}(\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta} \quad (\text{cette dernière formule est}$$

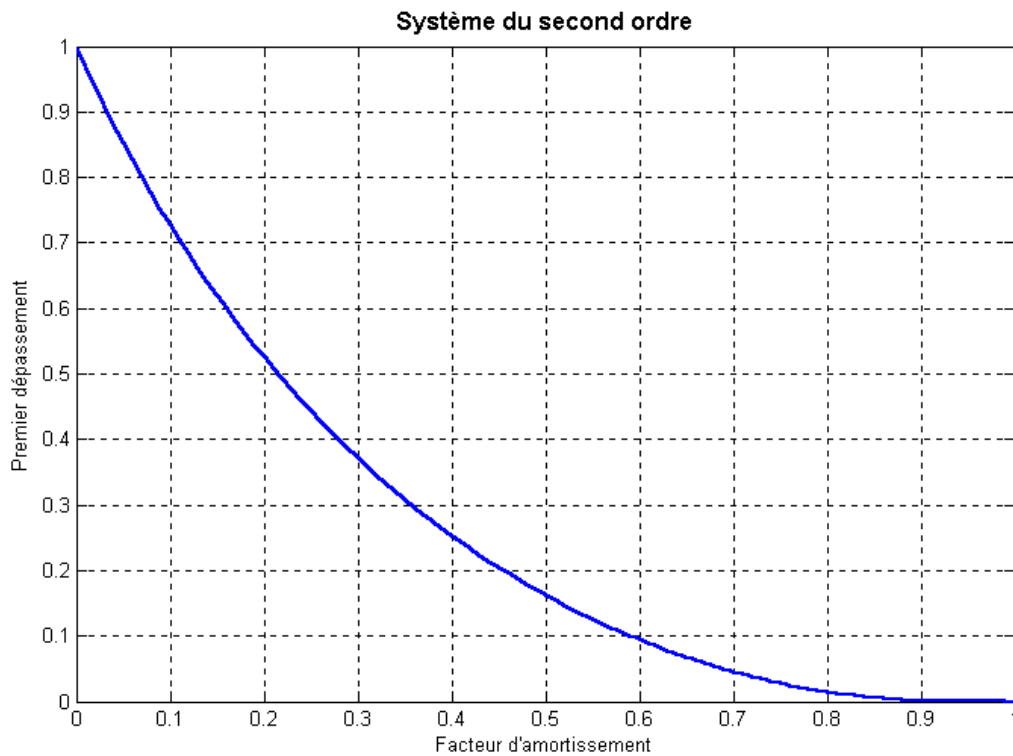
approximative et n'est valable qu'à partir de $\zeta \approx 0,69$)

Un exemple de réponse pour $\omega = 1$ et $\zeta = 0,3$ est donné sur la figure suivante :



Une première approche consiste à utiliser les grandeurs t_{\max} et D_1 car l'expression de t_{\max} est plus simple que celle du temps de réponse à 5% et la relation $D_1 = f(\zeta)$ se met sous forme d'un graphe aisé à utiliser.

$t_{\max}, D_1 \rightarrow \zeta, \omega \rightarrow p_{1,2}$ les deux pôles complexes conjugués.



La démarche usuelle est la suivante :

1. on choisit un dépassement D_1 et la courbe permet d'obtenir l'amortissement ζ correspondant
2. on choisit de spécifier le temps du premier dépassement, t_{max} ce qui permet de déduire ω
3. on peut calculer les deux pôles complexes conjugués correspondants

Seconde approche :

Dans la pratique quelques cas sont intéressants :

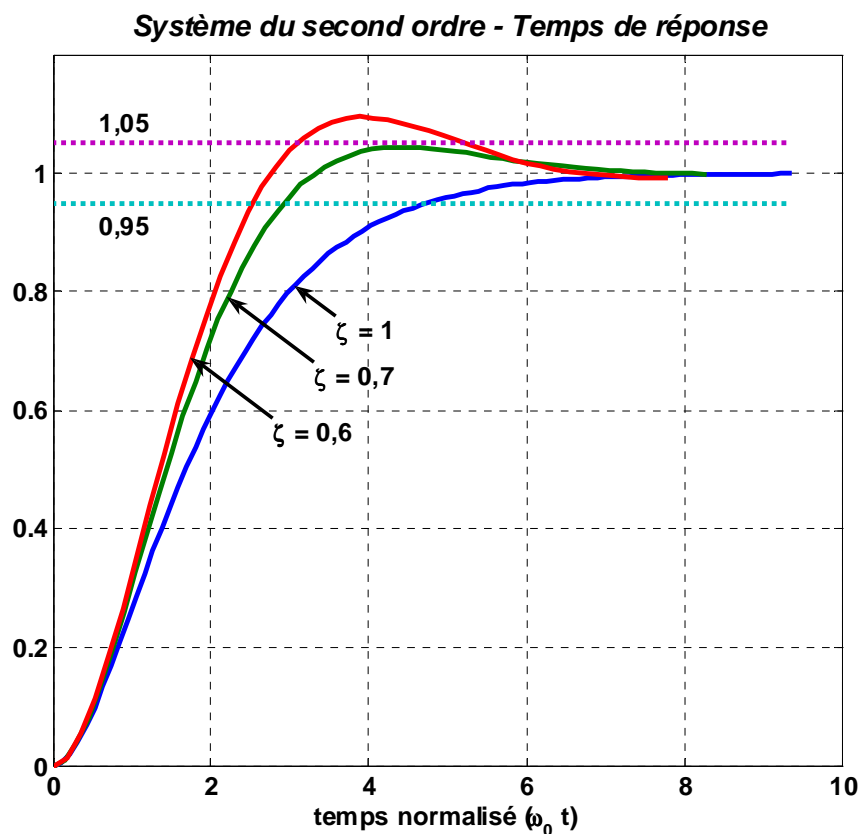
- $\zeta = 1$. Cela correspond à deux pôles doubles et pas de dépassement.
- $\zeta = 0,7$. C'est la valeur pour laquelle le temps de réponse $t_{5\%}$ est minimal (**la figure ci-dessous montre que cela correspond au passage de la valeur 0,95 à la valeur 1,05 une limite un peu subjective qui incite à plutôt s'intéresser à t_{max}). Il y a un très faible dépassement $D_1 = 5\%$
- $\zeta = 0,6$. Un peu plus rapide au niveau du temps de montée que les précédents tout en conservant un dépassement jugé expérimentalement acceptable $D_1 \approx 10\%$.

Pour ces trois valeurs nous avons :

ζ	$t_{5\%}$	t_{max}	D_1
1	$4,75/\omega$	/	0
0,7	*** $2,93/\omega$	$4,4/\omega$	0,05
0,6	$5,3/\omega$	$3,9/\omega$	0,1

Un mélange entre $t_{5\%}$ et t_{max} permet de définir un ordre de grandeur du temps de réponse :

$$t_{réponse} \approx \frac{5}{\omega_0}$$



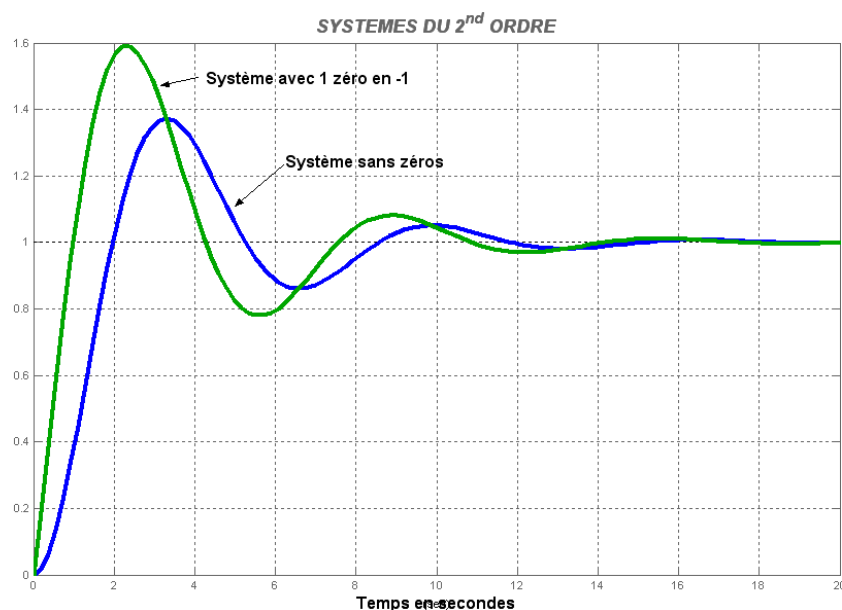
cas général :

Dans le comportement d'un système, on essaie de se ramener à l'un de ces cas simples en supposant que le comportement du système étudié en est voisin : notion de pôles dominants et pôles auxiliaires.

rôle des zéros :

Les fonctions de transfert de référence précédentes ne font pas intervenir de zéros. Le rôle de ceux-ci dans une réponse est loin d'être négligeable mais leur spécification se fait au cas par cas pour des considérations autres que la dynamique de réponse.

La figure ci-dessous montre la réponse indicielle du système du second ordre avec $\omega = 1$ et $\zeta = 0,3$ dans le cas où il n'y a pas de zéro et dans celui où il y a un zéro en $p = -1$.



Le lien entre les deux réponses est immédiat :

Sans zéro $G_1(p) \Rightarrow$ réponse indicielle $y_1(t)$

Avec zéro $G_2(p) = (a p + 1) G_1(p) \Rightarrow$ réponse indicielle $y_2(t) = a \frac{dy_1(t)}{dt} + y_1(t)$

Les modèles de comportement sont choisis sans zéros, les systèmes élaborés, s'ils en comportent, auront donc un comportement plus ou moins proche.

3.2. Cas discret :

Choix de la dynamique :

En discret le choix des dynamiques est réalisé en liaison avec le comportement continu. Rappelons que le lien entre les pôles d'une fonction de transfert continue et ceux de la fonction de transfert discrète équivalente est :

$$z_i = e^{p_i T_s}$$

Pour choisir une dynamique en discret, on choisit celle-ci en continu, ce qui fournit des pôles p_i puis on transpose ces pôles en z_i .

En discret, le rôle des zéros est lui aussi important mais, en continu des zéros agissent comme des termes qui superposent des termes de dérivées à la réponse élémentaire de base alors qu'en discret ils vont superposer des termes retardés à cette même réponse de base.

Choix de la période d'échantillonnage :

Le choix de la période d'échantillonnage doit se faire en considérant deux points de vue : celui du procédé que nous allons discrétiser et celui de la boucle fermée qui est le dispositif obtenu. Le plus souvent, un asservissement est plus rapide que le procédé qu'il utilise et même parfois le procédé est de type instable c'est donc la seconde considération qui est, dans la majorité des cas, la plus restrictive.

Quelque soit le point de vue considéré, on essaie de se ramener à un comportement dominant soit du 1^{er} ordre soit du 2nd ordre. Le système échantillonné doit respecter la condition de Shannon (voir cours de TNS) $T_s \leq \frac{1}{2 f_{\max}}$ ou $T_s \leq \frac{\pi}{\omega_{\max}}$ où f_{\max} et ω_{\max} sont respectivement la fréquence maximale ou la pulsation maximale du spectre du signal qu'on échantillonne. Le problème pratique récurrent est que le spectre de la plupart des systèmes tend en général asymptotiquement vers 0 ($f_{\max} = +\infty$) rendant la condition impossible à réaliser. Le choix de T_s se fait ainsi dans le cadre d'une approximation avec en général deux repères pratiques :

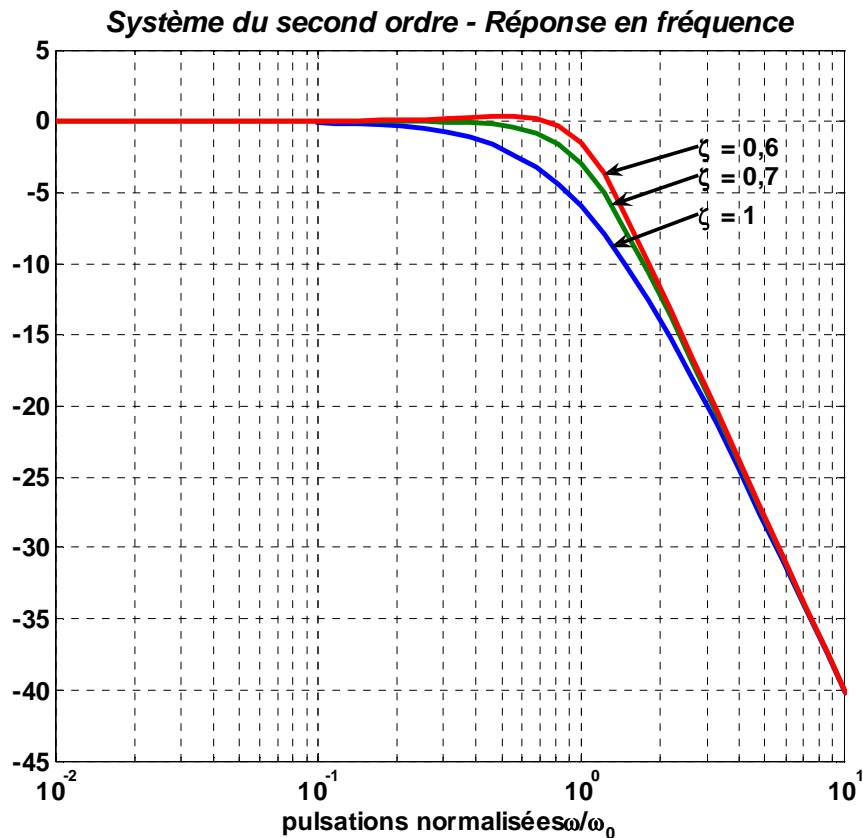
- On néglige les fréquences ayant moins de 10% d'importance (-20dB) : cette condition constitue un ordre de grandeur de la limite à ne pas dépasser.
- On néglige les fréquences ayant moins de 1% d'importance (-40dB) : cette condition donne un ordre de grandeur de ce que nous pouvons considérer comme un choix raisonnable.

Pour un comportement du premier ordre, le diagramme asymptotique nous donne :

$$\omega_{3dB} = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \omega_{20dB} = \frac{10}{\tau} \text{ et } \omega_{40dB} = \frac{100}{\tau}$$

$t_{5\%}$	T_s (10%)	T_s (1%)
3τ	$\pi\tau/10 \approx \tau/3$ $\approx t_{5\%}/10$	$\pi\tau/100 \approx \tau/30$ $\approx t_{5\%}/100$

Plus intéressant est le comportement du type second ordre. En ne s'intéressant qu'aux cas $\zeta = 1; 0,7; 0,6$ les réponses en fréquence sont indiquées sur la figure ci-dessous :



d'où nous déduisons les ordres de grandeur :

$t_{réponse}$	$\omega_{max} (10\%)$	$T_s (10\%)$	$\omega_{max} (1\%)$	$T_s (1\%)$
$5/\omega_0$	$\approx 3 \omega_0$	$1/\omega_0$ $\approx t_{réponse}/5$	$\approx 10 \omega_0$	$0,3/\omega_0$ $\approx t_{réponse}/15$

4. CONCEPTION DU CORRECTEUR :

Pour calculer les polynômes R , S et T du correcteur en fonction du cahier des charges imposé à l'asservissement il y a de nombreuses approches qui sont le résultat de la recherche en automatique.

4.1. Utilisation de l'automatique fréquentielle du continu :

En continu, nous avons à notre disposition un grand nombre de méthodes basées sur l'analyse fréquentielle et qui permettent de concevoir des correcteurs de type PID, PI + avance de phase ou basées sur l'analyse temporelle comme le prédictor de Smith, le modèle interne. Toutes ces méthodes fournissent des correcteurs analogiques répondant à un cahier des charges fixé. Il est possible de trouver un correcteur discret équivalent en utilisant l'une des méthodes de transposition du continu vers le discret : rectangles, invariance impulsionnelle, transposition pôles et zéros, bloqueur d'ordre 0, transformation bilinéaire. Les plus usuelles étant la première (pour sa simplicité) et la dernière.

Méthode des rectangles : $p \rightarrow \frac{1-z^{-1}}{T_s}$

Transformation bilinéaire : $p \rightarrow \frac{2}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

Exemple : soit un correcteur PI tel que $C(p) = k \frac{p+a}{p}$

Avec la méthode des rectangles : $C(p) = k \frac{p+a}{p} \rightarrow D(z) = k \frac{(1+aT_s) - z^{-1}}{1 - z^{-1}}$

$$r_0 = t_0 = k(1+aT_s) \quad r_1 = t_1 = -k \quad s_1 = -1$$

Avec la transposition bilinéaire : $C(p) = k \frac{p+a}{p} \rightarrow D(z) = k \frac{(\frac{1+aT_s}{2}) - (\frac{1-aT_s}{2})z^{-1}}{1 - z^{-1}}$

$$r_0 = t_0 = k\left(\frac{1+aT_s}{2}\right) \quad r_1 = t_1 = -k\left(\frac{1-aT_s}{2}\right) \quad s_1 = -1$$

dans les deux cas, le dénominateur est $1 - z^{-1}$ ce qui remplace p . Nous remplaçons bien un intégrateur continu par un intégrateur discret.

4.2. Placement de pôles en discret :

Placement de pôle par méthode polynomiale :

Ce sera l'objet de la première partie de ce cours : à partir de la structure RST comment spécifier directement les polynômes RST pour tenir les spécifications d'un cahier des charges.

Placement de pôle par retour d'état :

Objet de la seconde partie de ce cours où la spécification des polynômes RST se fait par une méthodologie utilisant l'approche d'état avec observateur et état étendu. L'équivalence avec la méthode précédente sera établie.

Méthodes avancées :

Elles seront l'objet de cours ultérieurs. Les bases de l'approche polynomiale et de l'approche d'état étant acquises, les méthodes prédictives peuvent être abordées.

5. ANNEXES

5.1. fonction de transfert échantillonnée-bloquée, approche polynomiale :

Un bloqueur d'ordre zéro maintient le signal entre deux instants d'échantillonnage, son action est modélisée par le transfert :

$$B_0(p) = \frac{(1 - e^{-pT_s})}{p}$$

La réponse temporelle du système continu de transfert $B_0(p)H(p)$ est $TL^{-1}[B_0(p)H(p)] = TL^{-1}\left[\frac{H(p)}{p}(1 - e^{-pT_s})\right] = TL^{-1}\left[\frac{H(p)}{p}\right] - TL^{-1}\left[e^{-pT_s}\frac{H(p)}{p}\right] = f(t) - f(t-T_s)$

Avec $f(t) = TL^{-1}\left[\frac{H(p)}{p}\right]$ $f(t)$ est la réponse indicielle du système continu.

Si nous échantillonnons l'entrée et la sortie de ce système, on obtient le système discret de fonction de transfert $G(z)$:

$$G(z) = TZ[f(t) - f(t-T_s)] = (1 - z^{-1})TZ[f(t)] = (1 - z^{-1})TZ\left[TL^{-1}\left[\frac{H(p)}{p}\right]\right]$$

\Rightarrow fonction de transfert échantillonnée-bloquée :

$$G(z) = (1 - z^{-1})TZ\left[TL^{-1}\left[\frac{H(p)}{p}\right]\right]$$

Méthode de calcul (voir cours TNS) : $\text{TZ} \left[\text{TL}^{-1} \left[\frac{H(p)}{p} \right] \right] = \sum_{\text{résidus / pôles de } H(p)/p} \left(\frac{H(p)}{p} \frac{1}{1 - e^{pT} z^{-1}} \right)$

5.2. fonction de transfert échantillonnée-bloquée, approche d'état :

Le comportement du système continu est modélisé par une représentation d'état :

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= A x_c(t) + B u_c(t) \\ y_c(t) &= C x_c(t) + D u_c(t)\end{aligned}$$

L'intégration générale de l'équation d'évolution donne :

$$\begin{aligned}e^{-At} \dot{x}_c(t) &= e^{-At} A x_c(t) + e^{-At} B u_c(t) \Rightarrow e^{-At} \dot{x}_c(t) - e^{-At} A x_c(t) = \frac{d}{dt} (e^{-At} x_c(t)) = e^{-At} B u_c(t) \\ \int_{t_0}^t \frac{d}{dv} (e^{-Av} x_c(v)) dv &= \int_{t_0}^t e^{-Av} B u_c(v) dv \\ e^{-At} x_c(t) &= e^{-At_0} x_c(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-Av} B u_c(v) dv \Rightarrow x_c(t) = e^{A(t-t_0)} x_c(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-v)} B u_c(v) dv \\ y_c(t) &= C x_c(t) + D u_c(t)\end{aligned}$$

En échantillonné, $t_0 = t (k T_s)$, $t = t + T_s$ (noté $(t+1) = (k+1) T_s$), $x_c(k T_s) = x(t)$

$$\begin{aligned}x(t+1) &= e^{AT_s} x(t) + \int_t^{t+T_s} e^{A(t+T_s-v)} B u_c(v) dv = e^{AT_s} x(t) + \int_t^{t+T_s} e^{A(t+T_s-v)} B u_c(v) dv = e^{AT_s} x(t) + \int_0^{T_s} e^{A(T_s-\alpha)} B u_c(t+\alpha) d\alpha \\ y(t) &= C x(t) + D u(t)\end{aligned}$$

avec une commande bloquée, $u_c(t+\alpha) = \text{cste entre } t \text{ et } t+T_s$, $u_c(t+\alpha) = u(t)$ discret

$$\begin{aligned}x(t+1) &= e^{AT_s} x(t) + \left[\int_0^{T_s} e^{A(T_s-\alpha)} B d\alpha \right] u(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t)\end{aligned}$$

Un changement de variable pour l'intégrale : $T_s - \alpha = \eta$ conduit à la forme :

$$\begin{aligned}x(t+1) &= e^{AT_s} x(t) + \left[\int_0^{T_s} e^{A\eta} B d\eta \right] u(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t)\end{aligned}$$

La représentation d'état discrète avec bloqueur d'ordre zéro $(A, B, C) \xrightarrow{\text{BOZ}} (F, G, H)$ est donc :

$$\begin{aligned}x(t+1) &= F x(t) + G u(t) \\ y(t) &= H x(t) + D u(t) \\ F &= e^{AT_s} \quad G = \int_0^{T_s} e^{A\eta} B d\eta \quad H = C \quad D = D\end{aligned}$$

La fonction de transfert équivalente est :

$$G(z) = H (zI - F)^{-1} G = \frac{H \text{Adj}(zI - F) G}{\det(zI - F)}$$

Calcul de e^{At} :

$$\text{Pour } u(t) = 0 : \dot{x}_c(t) = A x_c(t) \Rightarrow X_c(p) = (pI - A)^{-1} x(0) \Rightarrow x_c(t) = \left[\text{TL}^{-1}(pI - A)^{-1} \right] x(0)$$

Par ailleurs : $x_c(t) = e^{At} x_c(0)$

$$\Rightarrow e^{At} = \text{TL}^{-1}(pI - A)^{-1}$$