TD-Fonctions de plusieurs variables : corrigé

Exercice 1

Soit $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$*. Calculer les limites suivantes, et conclure :*

$$\lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x,y)],\ \lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x,y)],\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Exercice 2

1. *Soit* $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$*. Etudier la limite de* f *au point* $(0,0)$ *quand* (x,y) *parcourt*
   (a) *Une droite passant par l'origine*
   (b) *La parabole* $y = x^2$.
2. *Conclure.*

Corrigé

1. *Cela revient à prendre* $y = \lambda x$*, d'où* $f(x,\lambda x) = \frac{\lambda x^3}{x^4+\lambda^2x^2} \to 0$ *lorsque* $x \to 0$
2. $f(x,x^2) = \frac{x^4}{2x^4} \to \frac{1}{2}$ *lorsque* $x \to 0$
3. f *n'a pas de limite en* $(0,0)$ *(Non unicité de la limite)*

Exercice 3

1. *Les fonctions suivantes ont-elles une limite lorsque* (x,y) *tends vers* $(0,0)$ *?*

$$f_1(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\quad f_2(x,y) = \frac{|x+y|}{x^2+y^2},\quad f_3(x,y) = \frac{x^3y^3}{x^2+y^2},\quad f_4(x,y) = \frac{x^2+y^3}{x^2+y^2},$$

$$f_5(x,y) = \frac{1-\cos(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2},\quad f_6(x,y) = \frac{1-\cos(x)}{x^2+y^2}.$$

2. *Peut-on les prolonger par continuité en* $(0,0)$ *?*

Corrigé

1. $f_1(x,y) \to (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))$*, elle ne peut être prolongée par continuité.*
2. $f_2(x,y) \to (|\cos(\theta) + \sin(\theta))|$*, elle ne peut être prolongée par continuité.*
3. $f_3(x,y) \to 0$*, donc elle peut être prolongée par continuité en posant* $f(0,0) = 0$
4. $f_4(x,y) \to \cos^3(\theta)$*, elle ne peut être prolongée par continuité.*
5. $f_5(x,y) = \frac{1-\cos(r)}{r^2} \to \frac{1}{2}$ *(il faut utiliser le développement limité de* $\cos(r)$ *au voisinage de* 0*) , elle peut être prolongée par continuité en posant* $f(0,0) = \frac{1}{2}$
6. $f_6(x,y) \to \frac{1}{2}\cos^2(\theta)$*, elle ne peut être prolongée par continuité.*

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, déterminer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *de la fonction* f

$$f(x,y) = x^2\sin(xy), f(x,y) = x\cos(x^2+y^2), f(x,y) = \frac{1}{1+x^2y^2}exp(xy^2)$$

Exercice 5

Soit f *la fonction définie par :*

$$\begin{array}{rcll} f(x,y) & = & xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) & = & 0 & \end{array}$$

1. *Etudier la continuité de* f *en* $(0,0)$
2. *Etudier la continuité des dérivées partielles* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *en* $(0,0)$
3. f *est-elle différentiable ?*

Corrigé

1. *La limite de f en $(0,0)$ est égale à 0. Donc f est y est continue.*
2. *Il faut calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Calculer les $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$. Ensuite étudier la limte de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$. On obtient, par exemple, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \to 0$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$.*
3. *f est donc différentiable (voir cours : continuité des dérivées partielles premières)*

Exercice 6
Soit f la fonction définie par :

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) \quad si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) & = & 0 \end{array}$$

1. *Calculer les dérivée partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$*
2. *Etudier la continuité des dérivée partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$*
3. *Montrer que f est différentiable en $(0,0)$*
4. *Conclure.*

Corrigé

1. *$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = h\sin(\frac{1}{h}) \to 0$ lorsque h tend vers 0 (la fonction sin est bornée). On peut faire la même chose pour $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$*
2. *Un calcul direct de la derivée partielle par rapport à x donne $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) - x(x^2+y^2)\cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}).\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Par conséquent $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$ (on obtient la même chose pour $\frac{\partial f}{\partial y}$.*
3. *En étudiant la limite de la fonction $\frac{f(h,k)-h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}$, on montre que f est différentiable en $(0,0)$*
4. *La continuité des dérivées partielles est une condition suffisante de différentiabilité, mais non nécessaire.*

Exercice 7 *(exemple proposé par Peano) Soit f la fonction définie dans l'exercice 5.*

1. *Calculer les dérivée partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial yx}$ en $(0,0)$*
2. *La fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}$ est elle continue en $(0,0)$? (voire le théoréme de SCHWARZ, chapitre 1, page 16)*

Corrigé

1. *En reprenant les calculs de l'exercice 5, on montre que $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(0,0)$*
2. *Le théoréme de SCHWARZ implique que $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}$ n'est pas continue en $(0,0)$*

Exercice 8 *(Exercice supplémentaire à laisser aux étudiants pour qu'ils le fassent chez eux)*
Soit la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & xy\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} \quad si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) & = & 0 \end{array}$$

1. *Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$*
2. *Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$ des fonctins $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$*
3. *En quels points de $\mathbb{R}^2$ la fonction f est elle de classe C^1 (dérivées partielles premières continues) ?*

Exercice 9 *(Exercice supplémentaire à laisser aux étudiants pour qu'ils le fassent chez eux) il faut remplacer $(x-y)^p$ par $(x-3)^p$! ! Soit la fonction f définie par :*

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & \frac{(x-3)^p}{(x-3)^2+(y-1)^2} \quad si \quad (x,y) \neq (3,1) \\ f(3,1) & = & 0 \end{array}$$

Pour quelles valeurs de p

1. *f est elle contnue ?*
2. *f admet elle des dérivée partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$? Si oui, sont elles contnues ?*
3. *f est ele différentiable ?*

Corrigé

1. *On pose $x-3 = r\cos(\theta)$ et $y-1 = r\sin(\theta)$. D'où $f(x,y) = r^{p-2}\cos^p(\theta)$. Si $p \leq 2$, la fonction f n'est pas continue, s $p > 2$ elle l'est.*
2. *Le reste s'en suit*

Exercice 10 *Soit f la fonction défine de $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^2$ par*

$$f(x,y) = (r(x,y), s(x,y))$$

avec $r(x,y) = x^2$ et $s(x,y) = y^2$.

Soit maintenant la fonction g définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$g(r,s) = r^2 - s^2$$

Calculer les dérivées partielles premières et secondes de la fonction gof de deux manières différebtes (diectement et au moyen des formules de dérivation de fonctions composées). Corrigé

1. *Soit $h(x,y) = gof(x,y) = g(f(x,y)) = g(r(x,y), s(x,y))$. Par suite $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial r}(r(x,y), s(x,y))\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial s}(r(x,y), s(x,y))\frac{\partial s}{\partial x}$. Pour finir il suffit de calculer $\frac{\partial g}{\partial s}(r(x,y), s(x,y))$, $\frac{\partial g}{\partial r}(r(x,y), s(x,y))$, $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial x}$ et remplacer. Le calcul de $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)$ se fait de façon similaire.*

Exercice 11

1. *On considére la fonction $g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, calculer $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$*
2. *Donner une expression de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en fonction de r et θ que l'on notera $g_1(r,\theta)$.*
3. *De méme, calculer $\frac{\partial g_1}{\partial r}$ et $\frac{\partial g_1}{\partial \theta}$, puis en déduire une expression de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ en fonction de r et θ. Comparer avec l'expression obtenue en 1.*
4. *Soit la fonction f définie par $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ directement et retrouver le résultat en utilisant les dérivées de fonctions composées.*

Corrigé

1. *Cet exercice est corrigé en TD.*

Exercice 12
On considére la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2y - 9y - 2$

1. *Donner la condition nécessaire d'extremum local*
2. *Résoudre le systéme obtenu*
3. *Les solutions correspondent elles à des extrema ?*

Corrigé

1. *C.N. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - 9 = 0$*
2. *$M_1 = (3,0)$ et $M_2 = (-3,0)$ sont les deux points critiques.*
3. *Il faut calculer les dérivées partielles secondes en M_1 et M_2 et appliquer le théorème de Lagrange. Après calcul, on obtient des points selles.*

Exercice 13 *(Exercice supplémentaire à laisser aux étudiants pour qu'ils le fassent chez eux)*
On considére les fonctions f, g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3y^2(1-x-y)$ et $g(x,y) = x^2 + x^2y + y^3$. Donner leurs points critiques et vérifier s'ils correspondent à des extréma locaux.
Corrigé

1. *Suivre la démarche de l'exercice ci-dessus.*

Exercice 14

Montrer que l'équation

$$e^x + e^y + x + y = 2$$

définit au voisinage de l'origine, une fonction implicite de x *dont on calculera le développement limité d'ordre trois en* 0

Corrigé

1. *Il faut appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction* $F(x, y) = e^x + e^y + x + y - 2 = 0$. *Vérifier que* $F(0, 0) = 0$*, Calculer la dérivée partielle de* F *par rapport à* y *et vérifier quelle ne s'annule pas en* $(0, 0)$*. Sous ces conditions on sait qu'il exite un voisinage de* 0 *et une fonction* φ *définie dans ce voisinage telle que* $y = \varphi(x)$*. On peut donc écrire* $F(x, \varphi(x) = 0$*, et par application de la dérivation de fonctions composées, on obtient* $\varphi'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) = 0$*. D'où* $\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$*. Cette dernière formule vous permet de calculer* $\varphi'(0), \varphi''(0), \varphi^{(3)}$*. Comme* $\varphi(0) = 0$ *vous pouvez obtenir le développement limité de* $\varphi(x)$ *à l'ordre 3.*