Chap 1 - Expérience aléatoire et probabilité

σ-algèbre Une famille $\mathcal{F}$ de sous ensembles de Ω vérifiant

i) $\Omega \in \mathcal{F}$

ii) Si $A \in \mathcal{F}$, alors $A^c \in \mathcal{F}$

iii) Si $(A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{F}$ alors $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$

Probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Une application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$ tq

i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

ii) $\mathbb{P}(A) \geq 0$ pour tout $A \in F$

iii) A_n des d'événements 2 à 2 disjoints, $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$

Combinatoire

nb de *Permutations* de n éléments : $n!$

nb de *Permutations r-distinctes* de n éléments : $\frac{n!}{n_1!\dots n_r!}$

nb d'*Arrangements* de p parmi n : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

nb de *Combinaisons* de p parmi n : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ (pas d'ordre)

Chap 2 - Calcul élémentaire de probabilités

Probabilités totales $\mathbb{P}(A) = \sum_{n\in I} \mathbb{P}(A|A_n)\mathbb{P}(A_n)$

Formule de Bayes $\mathbb{P}(A_n|A) = \dfrac{\mathbb{P}(A|A_n)\mathbb{P}(A_n)}{\sum_{i\in I}\mathbb{P}(A|A_i)\mathbb{P}(A_i)}$

Formule de Poincarré

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j}\mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n A_i)$$

Chap 3 - Variable aléatoire discrète

Espérance mathématique et moments : définitions

espérance : $\mathbb{E}[X] = \sum_x x\mathbb{P}(X=x)$ si $\sum_x |x|\mathbb{P}(X=x) < \infty$

moment d'ordre n : $\mathbb{E}[X^n] = \sum_x x^n \mathbb{P}(X=x)$

variance : $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

moment centré d'ordre r : $\mu_r = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^r\right]$

Propriétés (également valables pour les v.a réelles)

$\mathbb{E}[aX+bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$

$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ si X, Y indépendants

$\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X)$

$\mathrm{Var}(\sum_i X_i) = \sum_i \mathrm{Var}(X_i)$ si les X_i sont indépendants

Lois d'une variable aléatoire discrète

Fonction de répartition $F_X(x) = \sum_{y\leq x}\mathbb{P}(X=y)$

Produit de convolution $c_n = (a_n) * (b_n) = \sum_{k=0}^n a_n b_{n-k}$

Somme de deux v.a. $\mathbb{P}(X+Y=n) = (p_X * p_Y)(n)$

Fonctions génératrices

$g(s) = \mathbb{E}\left[s^X\right] = \sum_{i\in\mathbb{N}} p_i s^i$

$\mathbb{E}[X] = g'(1); \mathrm{Var}(X) = g''(1) + g'(1) - (g'(1))^2$

Lois	$\mathbb{P}(X=k)$	$\mathbb{E}$	Var	$g(s)$
$B(p)$	$\mathbb{P}(X=1)=p$	p	$p(1-p)$	$1-p+pu$
$B(n,p)$	$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$(1-p+ps)^n$
$\mathbb{P}(\lambda)$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$\exp(-\lambda+\lambda s)$
$G(p)$	$p(1-p)^{k-1}$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$p/(1-s-ps)$

FIG. 1 – Caractéristiques des lois discrètes usuelles

Chap 4 - Variable aléatoire réelle

Propriétés essentielles

Fonction de répartition $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

Espérance $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x\mathrm{d}F_X = \int_{\mathbb{R}} xf_X(x)\mathrm{d}x$ si abs. continue.

Médiane $M \in \mathbb{R}$ satisfaisant $\mathbb{P}(X \geq M) \geq \frac{1}{2}$ *et* $\mathbb{P}(X \leq M) \geq \frac{1}{2}$

X abs. continue $\Leftrightarrow \forall\phi$ borélienne : $\mathbb{E}[\phi \circ X] = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)f_X(x)\mathrm{d}x$

Fonction génératrice

$M(t) = \mathbb{E}[\exp(tX)] = \int_{\mathbb{R}} \exp(tx)f_X(x)dx$

$M^{(n)}(0) = \mathbb{E}[X^n]$

Si M est définie sur $[-a, a]$:

- X possède des moments finis de tous ordres
- $M(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\mathbb{E}[X^k]$

Lois	f_X	$\mathbb{E}$	Var	$M(t)$
unif.	$\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(a-b)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
normale	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	μ	σ^2	$\mu t + \exp\frac{t^2\sigma^2}{2}$
exp.	$\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda-t)$
gamma	$\frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$	α/λ	α/λ^2	$(\lambda/(\lambda-t))^\alpha$

FIG. 2 – Caractéristiques de quelques variables continues

Loi normale ou de Gauss

Si $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ alors $X = \dfrac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

Si $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ sont indépendantes alors $X + Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

Inégalités

Bienaymé-Tchebichev $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{Var(X)}{\varepsilon^2}$

Cauchy-schwartz $(\mathbb{E}[XY])^2 \leq \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]$

Jensen $\mathbb{E}[\varphi(X)] \geq \varphi(\mathbb{E}[(X)])$ si φ est convexe sur $\mathbb{R}$

Chap 5 - Variable aléatoire vectorielle

Covariance - définition et propriétés

Covariance $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

- $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
- $\mathrm{Cov}(X,X) = Var(X)$
- $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$
- $\mathrm{Cov}(aX+bY, Z) = a\mathrm{Cov}(X,Z) + b\mathrm{Cov}(Y,Z)$
- Si X et Y indépendants, alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$
- $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$

coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$

- $|\rho_{X,Y}| \leq 1$

Lois, densités, fonctions de répartition

Soient $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d) \in \mathbb{R}^d$ une v.a. vectorielle et $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$

f. de répartition $F(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots X_d \leq x_d)$

f. de densité $f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^d F(\mathbf{x})}{\partial x_1 \dots \partial x_d}$

relation densité/f.d.r $F(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_d} f(x_1, \dots, x_d) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_d$

f. de répartition marginale $F_i(x) = F(\infty, \dots, \infty, x, \infty, \dots, \infty)$

densité marginale pour calculer $f_i(x)$ on fixe x et on intègre $f(x_1 \dots x_n)$ par rapport aux autres variables.

Espérance et matrice de covariance

espérance $\mathbb{E}[\mathbf{X}] = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_d])'$

matrice de covariance $K = (K_{ij})_{i,j=1,\dots,d} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

Transformation d'une v.a Soit $Y = g(X)$, on a
$f_Y(y) = f_X \circ g^{-1}(y) |\frac{\mathrm{d}g^{-1}}{\mathrm{d}y}| \mathbb{1}_F(y)$

Transformation vectorielle Soit $\mathbf{Y} = \mathbf{g}(\mathbf{X})$ de $\mathbb{R}^d$, on a
$f_{\mathbf{Y}}(y) = f_{\mathbf{X}} \circ \mathbf{g}^{-1}(y) |DJ_{\mathbf{g}^{-1}}(y)| \mathbb{1}_F(y)$ avec $DJ_{\mathbf{g}^{-1}} = (DJ_{\mathbf{g}})^{-1}$

$$DJ_{\mathbf{g}} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_d} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_d}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_d}{\partial x_d} \end{pmatrix}$$

Vecteur aléatoire gaussien

définition Soit $\mathbf{a}$ un vecteur de $\mathbb{R}^d$ fixé. La v.a.v. $\mathbf{X}$ de $\mathbb{R}^d$ est dite gaussienne si la v.a. $a_1 X_1 + \cdots + a_d X_d$ est gaussienne.

chacun des X_i est gaussien ;

$\mathbf{g} \circ \mathbf{X}$ est gaussienne si $\mathbf{g}$ est affine de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^m$;

Si $\mathbf{Y} = B\mathbf{X} + b$, alors $K_{\mathbf{Y}} = BK_{\mathbf{X}}B'$;

Si les X_i sont gaussiens et indépendantes, $\mathbf{X}$ est gaussien.

Si $\mathbf{X}$ est un vecteur gaussien, $K_{\mathbf{X}}$ est non-singulière $\Leftrightarrow$

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} (\det K_{\mathbf{X}})^{-1/2} \exp\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)' K_{\mathbf{X}}^{-1} (\mathbf{x} - \mu)\}$$

Chap 6 - Indépendance et conditionnement

Indépendance de n v.a. $X_1, \dots, X_n$

v.a. discrètes $p(x_1, \dots, x_n) = p_1(x_1) \times \cdots \times p_n(x_n)$

v.a. continues $F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \times \cdots \times F_n(x_n)$

v.a. à densité $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \times \cdots \times f_n(x_n)$

n'importe $\mathbb{E}[h_1(X_1) \times \cdots \times h_n(X_n)] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[h_i(X_i)]$

Sommes de deux v.a.r

- $F_{X+Y}(u) = \int_R F_X(u-y) \mathrm{d}F_Y(y) = \int_R F_Y(u-x) \mathrm{d}F_X(x)$
- $M_{X_1+X_2 \dots + X_n}(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \dots M_{X_n}(t)$

Loi conditionnelle

discret $\mathbb{E}[Y|X=x] = \sum_{Y \in E} y \mathbb{P}(Y = y | X = x) = \sum_{Y \in E} y p_x(y)$

continu Soit $f(x,y)$ la densité jointe du couple,

$$F_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{f_X(x)} \int_{-\infty}^{y} f(x,v) dv$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f(x,y)}{\int_R f(x,v) dv}$$

espérance $\mathbb{E}[Y|X=x] = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y|x) \underset{\cdot}{\mathrm{y}}$

variance $\mathrm{Var}[Y|X=x] = \int_{\mathbb{R}} y^2 f_{Y|X}(y|x) \underset{\cdot}{\mathrm{y}} - (\mathbb{E}[Y|X=x])^2$

Espérance conditionnelle

linéarité $\mathbb{E}[aX + bY|Z] = a\mathbb{E}[X|Z] + b\mathbb{E}[Y|Z]$.

indépendance $\mathbb{E}[Y|X] = \mathbb{E}[Y]$ si X et Y sont ind. (réciproque fausse).

théorème de l'espérance totale $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[Y]$

$\mathbb{E}[h(X)Y|X] = h(X)\mathbb{E}[Y|X]$

$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X,Z,V]|X,Z] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X,Z]]$.

Lemme de Wald $\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1]$ où $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$, $N \in \mathbb{N}^*$ et X_i iid

Variance conditionnelle

$\mathrm{Var}(Y|X) = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}(Y|X))^2|X] = \mathbb{E}(Y^2|X) - [E(Y|X)]^2$

$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(Y|X)] + \mathrm{Var}[\mathbb{E}(Y|X)]$

Chap 7 - Convergence stochastique

Convergence presque-sure Si $\mathbb{P}\left(\omega : X_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} X(\omega)\right) = 1$, X_n converge presque sûrement vers X et on note $X_n \xrightarrow{p.s.} X$

Convergence en moyenne quadratique Soient $\mathbb{E}|X_n|^2 < \infty$ et $\mathbb{E}|X|^2 < \infty$, si $\mathbb{E}\left[|X_n - X|^2\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0$, X_n converge en moyenne quadratique vers X et on note $X_n \xrightarrow{m.q.} X$.

Convergence en probabilité Si $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$, X_n converge en probabilité vers X et on note $X_n \xrightarrow{p} X$.

Convergence en loi Si $F_n \to F$ en tout point de continuité de F, X_n converge en loi vers X et on note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Loi faible des grands nombres Soient les X_i i.i.d. tels que $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. Soit $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, alors $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} \mathbb{E}(X_1)$

Loi forte des grands nombres Soient les X_i i.i.d. et $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$. On a $\mathbb{E}|X_1| < \infty \Leftrightarrow S_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}(X_1)$

Théorème de la limite centrale Soient les X_i i.i.d. de moyenne μ et de variance σ^2, alors $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Sn)}} = \sqrt{n}\left(\frac{S_n - \mu}{\sigma}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$

Fonction caractéristique d'une v.a.r : $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\exp(itX)]$

- si $Y = aX + b$, alors $\varphi_Y(t) = \exp(itb)\varphi_X(at)$
- $\varphi_X(0) = 1$, $|\varphi_X(t)| \leq 1$, $\varphi(-t) = \overline{\varphi}(t)$

Lois	Fct caractéristiques
Bernoulli $B(p)$	$pe^{it} + (1-p)$
Binomiale $B(n,p)$	$(pe^{it} + (1-p))^n$
Poisson $\mathbb{P}(\lambda)$	$\exp(-\lambda(1 - \exp it))$
Uniforme sur [0,1]	$(1 - \exp it)/it$
Normale $N(\mu, \sigma^2)$	$\exp(it\mu - \sigma^2 t^2/2)$
Exponentielle $E(\lambda)$	$\lambda/(\lambda - it)$