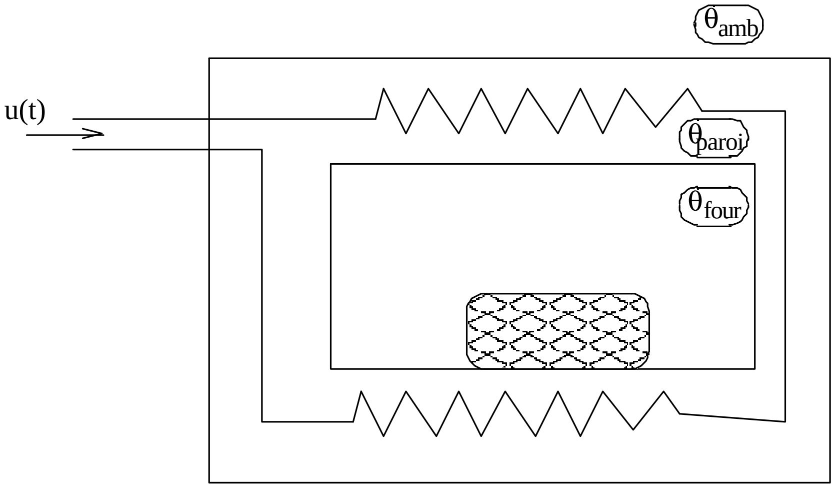
Corrigé du Median A-94

Corrigé du Median 95

Question 4 : Contrôle d'une enceinte thermique



Une enceinte thermique à double paroi

1. Dans cette question, on construit une représentation d'état de ce procédé. On choisit $X(t)$ (eq. ref: eq:1) comme état du système.

   On part de :On part de :

$$
\begin{aligned}
0 &= 2.\dot{y}(t) - 2(z(t) - y(t)) \\
u(t) &= 0.5(\dot{z}(t)) \; + (z(t) - w(t)) \; + 2(z(t) - y(t)) \\
u(t) &= 0.5(\dot{z}(t)) \; + 3z(t) - w(t) - 2y(t) \\
\dot{z}(t) &= 2(+2y(t) - 3z(t) + w(t) + u(t)) \\
\dot{z}(t) &= 4y(t) - 6z(t) + 2(w(t) + u(t))
\end{aligned}
$$

En utilisant le vecteur état

$$X(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

ces expressions se réécrivent :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} w(t)$$

1. a. Donner une représentation d'état de ce procédé en considérant l'entrée $u(t)$ (θ_{amb} étant supposée nulle).

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

b. Donner une représentation d'état de ce procédé en considérant l'entrée θ_{amb} ($u(t)$ étant supposée nulle).

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} w(t)$$

c. Si maintenant on considère que le système a deux entrées $u(t)$ et θ_{amb}, comme il est linéaire, on obtient la représentation d'état globale en ajoutant les représentations d'état obtenues pour chacune des entrées considérées indépendamment.

Ecrivez donc cette représentation d'état globale du système a deux entrées.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{t}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \mathbf{w}(\mathbf{t}) \quad \#$$

2. Donner la relation entre la sortie $\theta_{four}(t)$ et les entrées $u(t)$ et $\theta_{amb}(t)$ (sous forme d'une somme de fonctions de transfert en p).

La fonction d'observation de la variable $y(t)$ est :

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad \#$$

On élémine l'état de l'équation d'état (ref: rep_eq_etat) et de l'équation d'observation (ref: rep_eq_obs), il vient :

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} p+1 & -1 \\ -4 & p+6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} (u(t) + w(t)) \right] \qquad \#$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\begin{bmatrix} p+6 & 1 \\ 4 & p+1 \end{bmatrix}}{(p+1)(p+6) - 4} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right] (u(t) + w(t))$$

$$= \frac{2}{(p+1)(p+6) - 4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p+1 \end{bmatrix} (u(t) + w(t))$$

$$= \frac{2}{p^2 + 7p + 2} (u(t) + w(t))$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \frac{2}{p^2 + 7p + 2} \mathbf{u}(\mathbf{t}) + \frac{2}{p^2 + 7p + 2} \mathbf{w}(\mathbf{t}) \qquad \#$$

3. On souhaite que $\theta_{four}(t)$ reste constante au voisinage de la consigne θ^c. On considère d'abord un régulateur proportionnel :

$$u(t) = K.(\theta^c - \theta_{four}(t)) \qquad \#$$

En supposant que le système contrôlé est toujours stable, vous déterminerez l'erreur stationnaire $\varepsilon(\infty) = \theta^c - \theta_{four}(\infty)$.
On injecte la commande (ref: eq:2) dans le modèle du processus (ref: eq_reponse_tf).
Il vient :

$$y(t) = \frac{2}{p^2 + 7p + 2} K.(\theta^c - y(t)) + \frac{2}{p^2 + 7p + 2} w(t)$$

On ordonne l'expression par rapport à $y(t)$:

$$(p^2 + 7p + 2) y(t) = 2K.(\theta^c - y(t)) + 2w(t)$$

$$(p^2 + 7p + 2(1 + K)) y(t) = 2K.\theta^c + 2w(t)$$

La solution stationnaire est obtenue pour $p = 0$

$$\mathbf{2}(\mathbf{1} + \mathbf{K})\mathbf{y}^s = \mathbf{2K}.\boldsymbol{\theta}^c + \mathbf{2}\boldsymbol{\theta}_{amb}$$

Donc

$$\mathbf{y}^s = \frac{\mathbf{K}}{(\mathbf{1} + \mathbf{K})}.\boldsymbol{\theta}^c + \frac{\mathbf{2}}{(\mathbf{1} + \mathbf{K})}\boldsymbol{\theta}_{amb}$$

$$\varepsilon(\infty) = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1} + \mathbf{K})}.\boldsymbol{\theta}^c - \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1} + \mathbf{K})}\boldsymbol{\theta}_{amb}$$

Peut-elle être nulle si on ne connaît pas θ_{amb} (qui peut donc

être quelconque) ?
Elle n'est nulle que si on a $\{\theta^c = \theta_{amb}\}$, donc il faut connaître θ_{amb}

4. On souhaite toujours que $\theta_{four}(t)$ reste constante au voisinage de la consigne θ^c. On considère maintenant un régulateur proportionnel et intégral :

$$u(t) = K.(1 + \frac{1}{\tau_i.p}).(\theta^c - \theta_{four}(t)) \qquad \#$$

On procède de la même manière

$$y(t) = \frac{2}{p^2 + 7p + 2}K.(1 + \frac{1}{\tau_i.p}).(\theta^c - y(t)) + \frac{2}{p^2 + 7p + 2}w(t)$$

$$y(t) = \frac{2}{p^2 + 7p + 2}K.(\frac{1 + \tau_i.p}{\tau_i.p}).(\theta^c - y(t)) + \frac{2}{p^2 + 7p + 2}w(t)$$

On ordonne l'expression par rapport à $y(t)$:

$$p(p^2 + 7p + 2)y(t) = 2K.(\frac{1}{\tau_i} + p)(\theta^c - y(t)) + 2pw(t)$$

$$p(p^2 + 7p + 2)y(t) = 2K.(\frac{1}{\tau_i} + p)(\theta^c - y(t)) + 2p\theta_{amb}$$

$$p^3 + 7p^2 + 2(1 + K)p + \frac{2K}{\tau_i}y(t) = (\frac{2K}{\tau_i} + p)(\theta^c + 2p\theta_{amb}$$

La solution stationnaire est obtenue pour $p = 0$

$$\mathbf{y}^s = \theta^c$$

Corrigé du Median 96

Corrigé du Median 97

Corrigé du Median 98

Corrigé du Median 2000

Question 1) Commande en boucle ouverte de type bang_bang

analyse qualitative (2 points) :

Ce processus

		réponse
est il stable ?		oui ; les pôles sont **réels**
est-il d'inverse stable (à déphasage minimal) ?		non, il y a un zéro **réel po**
quel est son ordre ?		2
quel est son degré relatif ?		1

Décomposition modale (1 point) :

Représenter la fonction de transfert $H(p) = \frac{K(1-zp))}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$ comme la mise en parallèle de deux systèmes du 1^{er} ordre

$$H(p) = \frac{K(1-zp))}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$
$$= K\frac{z+\tau_2}{(\tau_2-\tau_1)}\left(\frac{1}{1+\tau_2 p}\right) - \frac{K(z+\tau_1)}{(\tau_2-\tau_1)}\left(\frac{1}{1+\tau_1 p}\right)$$

Une décomposition modale de $H(p)$ est donc :

$$\frac{x_1(t)}{u(t)} = \frac{1}{1+\tau_1 p}$$
$$\frac{x_2(t)}{u(t)} = \frac{1}{1+\tau_2 p}$$
$$y(t) = K\frac{z+\tau_2}{(\tau_2-\tau_1)}x_2(t) - \frac{K(z+\tau_1)}{(\tau_2-\tau_1)}x_1(t)$$

Représentation d'état modale : Donner une équation d'état correspondante à cette décomposition

$$\frac{d}{dt}\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1/\tau_1 & 0 \\ 0 & -1/\tau_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/\tau_1 \\ 1/\tau_2 \end{bmatrix} . u(t)$$

$$y(t) = \frac{K}{(\tau_2 - \tau_1)} \begin{bmatrix} -(z+\tau_1), & (z+\tau_2) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Représentation temporelle (3 points)

Donnez l'expression analytique de la réponse à un échellon d'amplitude $A = 50\,\mathrm{V}$

$$x_1(t) = \left(1 - e^{-t/\tau_1}\right)$$

$$x_2(t) = \left(1 - e^{-t/\tau_2}\right)$$

$$y(t) = \frac{K}{(\tau_2 - \tau_1)} \begin{bmatrix} -(z+\tau_1), & (z+\tau_2) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \frac{KA}{(\tau_2 - \tau_1)} \left[-(z+\tau_1)\left(1 - e^{-t/\tau_1}\right) + (z+\tau_2)\left(1 - e^{-t/\tau_2}\right)\right]$$

Dessinez l'allure de cette réponse. Pour ce faire, vous donnerez

1. la valeur numérique de l'asymptote $y(+\infty)$ (en n'oubliant pas les unités !)

$$\begin{aligned} y(+\infty) &= KA + d \\ &= 600 + d\,^\circ\mathrm{C} \end{aligned}$$

2. la valeur numérique de la pente de la tangente à l'origine $\dot{y}(0)$ (en n'oubliant pas les unités !)

$$\dot{x}_1(0) = 1/\tau_1$$

$$\dot{x}_2(0) = 1/\tau_2$$

$$\dot{y}(0) = \frac{KA}{(\tau_2 - \tau_1)} \begin{bmatrix} -(z+\tau_1), & (z+\tau_2) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{bmatrix}$$

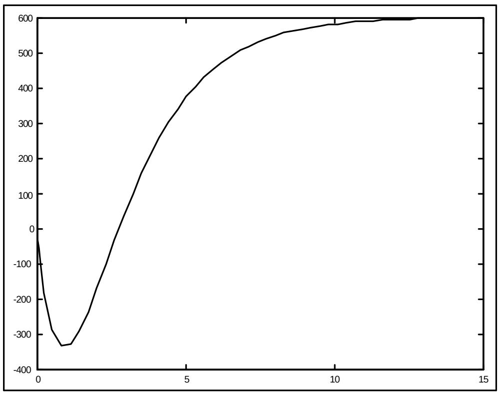
$$\begin{aligned} \dot{y}(0) &= \frac{K}{(\tau_2 - \tau_1)} \left(\frac{(z+\tau_2)}{\tau_2} - \frac{(z+\tau_1)}{\tau_1} \right) \\ &= \frac{KAz}{(\tau_2 - \tau_1)} \left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} \right) \\ &= \frac{600 \times 3}{1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1} \right) {}^\circ\mathrm{C}/\mathrm{mn} \\ &= -900\,^\circ\mathrm{C}/\mathrm{mn} \end{aligned}$$

3. et vous donnerez un ordre de grandeur du temps de

réponse sur l'axe des abscisses. On peut estimer que le temps de réponse est donné par la somme des 2 constantes de temps, il vient alors

$$\approx 3.(\tau_1 + \tau_2) = 9\,\mathrm{mn}$$

Avec la pente à l'origine, l'asymptote et le temps de réponse, on peut ébaucher la forme de la réponse, la simulation par **SIMULINK** donne



Commande de type Bang-Bang (2 points)

On veut faire évoluer rapidement la sortie de $y(0) = d = 50\,°\mathrm{C}$ à la valeur $y(T_f) = 400\,°\mathrm{C}$ sans que $y(t)$ sorte de l'intervalle $[y(0), y(T_f)]$.
Pour ce faire, on applique

$$u(t) = \begin{cases} -50\,\mathrm{V} & \text{pour} \quad t \in [0, T_d[\\ +50\,\mathrm{V} & \text{pour} \quad t \in [T_d, T_f[\end{cases}$$

Dessinez l'allure des évolutions conjointes de $u(t)$ et de $y(t)$ que vous espérez en expliquant comment vous pourriez régler T_d et T_f avec **SIMULINK**.

Un raisonnement possible est le suivant : sous l'effet de l'entrée $u(t) = -50\,\mathrm{V}$, $y(t)$ démarre de $y(0) = d = 50\,°\mathrm{C}$ avec une pente de $900\,°\mathrm{C/mn}$

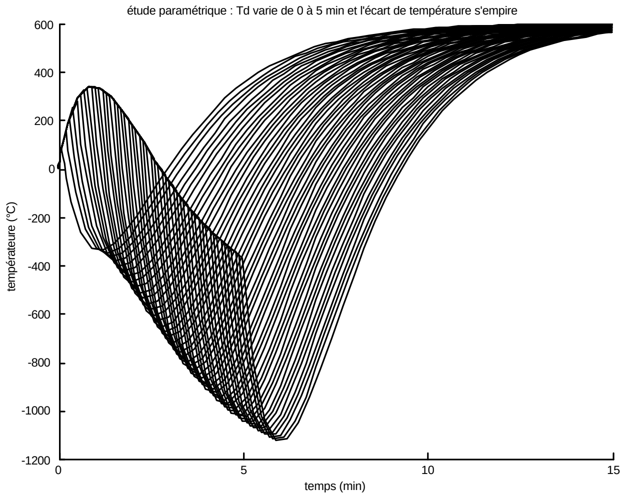
Cette évolution croissante s'opère jusqu'à ce que ce que l'instant où la dérivée s'annule ; soit T_d cet instant (qu'on peut évaluer par **MATLAB** et **SIMULINK**). Compte tenu de ce démarrage, $y(T_d) > d$.

On applique alors $u(t) = +50\,\mathrm{V}$. La sortie décroit alors mais on espère qu'elle ne retombera pas en dessous de de $y(0) = d = 50\,°\mathrm{C}$.

Lorsque le temps augmente indéfiniment, $y(t)$ doit tendre vers $600\,°\mathrm{C}$. Il existe donc un temps tel que $y(T_f) = 400\,°\mathrm{C}$. T_f est évalué par

`MATLAB` et **`SIMULINK.`**
Ce raisonnement et la figure qui s'en déduit vaut le total des points.

En fait, lorsqu'on fait une simulation et qu'on fait varier T_d de 0 à 5 mn, on obtient ça (car à l'instant T_d, on applique un échelon de $+2 * 50\,\mathrm{V}$!):



Question 2) Synthèse d'asservissement (4 points)

Pour l'étude qui suit, on ne considèrera pas la saturation.Pour compenser la connaissance imparfaite du modèle, on associe à la commande précédente une commande en boucle fermée par réseau correcteur dont le schéma bloc est donné par la figure suivante :

Action proportionnelle: $RC(p) = G$ (2.5 points)

1. Etablir la relation qui existe entre les entrées $\{d, y^c\}$ et la sortie $y(t)$.

$$y(t) = d + \frac{K(1-zp)}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}.G(y^c - y(t))$$

$$(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)y(t) = (1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)d + KG(1-zp).(y^c - y$$

$$[(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + KG(1-zp)]y(t) = (1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)d + KG(1-zp).y^c$$

Lorsque d et y^c sont constants, leures dérivées sont nulles et la relation ci-dessus se simplifie :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{[(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + KG(1-zp)]}d \\ &+ \frac{KG}{[(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + KG(1-zp)]}y^c \end{aligned}$$

2. Pour quelles valeurs de G l'asservissement est-il stable ? L'asservissement est un système du 2nd ordre dont le dénominateur est

$$\begin{aligned} D_P(p) &= (1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + KG(1-zp) \\ &= \tau_1\tau_2 p^2 + (\tau_1 + \tau_2 - zKG)p + KG + 1 \end{aligned}$$

Ses racines sont à partie réelle positive si et seulement si les coefficients $D(p)$ de sont de même signe. La condition de stabilité est donc

$$\begin{aligned} \tau_1 + \tau_2 - zKG &> 0 \\ 1 + KG &> 0 \end{aligned}$$

Soit :

$$-1 < KG < \frac{(\tau_1 + \tau_2)}{z}$$

3. Quelle est la solution stationnnaire y^s pour des entrées $\{d, y^c\}$ constantes.

Cette valeur s'obtient en posant $p = 0$ dans . Il vient

$$y^s = \frac{1}{[1+KG]}d + \frac{KG}{[1+KG]}y^c$$

Action proportionnelle et intégrale:

$RC(p) = G(1 + \frac{1}{\tau_i p})$ (2.5 points)

1. Etablir la relation qui existe entre les entrées $\{d, y^c\}$ et la sortie $y(t)$.

Il suffit de remplacer G par dans $G(1 + \frac{1}{\tau_i p})$. Il vient

$$y(t) = \frac{1}{\left[(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + KG(1+\frac{1}{\tau_i p})(1-zp)\right]}d + \frac{KG(1+\frac{1}{\tau_i p})}{\left[(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + KG(1+\frac{1}{\tau_i p})(1-zp)\right]}y^c$$

$$y(t) = \frac{1}{\left[(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + KG(\frac{1+\tau_i p}{\tau_i p})(1-zp)\right]}d + \frac{KG(\frac{1+\tau_i p}{\tau_i p})}{\left[(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + KG(\frac{1+\tau_i p}{\tau_i p})(1-zp)\right]}y^c$$

$$y(t) = \frac{\tau_i p}{[\tau_i p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + KG(1+\tau_i p)(1-zp)]}d + \frac{KG(1+\tau_i p)}{[\tau_i p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + KG(1+\tau_i p)(1-zp)]}y^c$$

2. Quelle est la solution stationnnaire y^s pour des entrées $\{d, y^c\}$ constantes ?

Il vient donc

$$y^s = y^c$$

3. Pour stabiliser le processus, on règle les paramètres (G, τ_i) de sorte que tous les pôles soient au même endroit. Explicitez l'algorithme de calcul de (G, τ_i).

Le dénominateur est

$$\begin{aligned}
D_{PI}(p) &= \tau_i p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + KG(1+\tau_i p)(1-zp) \\
&= \tau_i\tau_1\tau_2 p^3 + (\tau_i\tau_2 + \tau_i\tau_1 - KG\tau_i z)p^2 + (\tau_i - KGz + KG\tau_i)p + KG \\
&= \tau_i\tau_1\tau_2 . \left(\frac{\tau_i\tau_1\tau_2 p^3 + (\tau_i\tau_2 + \tau_i\tau_1 - KG\tau_i z)p^2 + (\tau_i - KGz + KG\tau_i)p}{\tau_i\tau_1\tau_2} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{PI}(p)/\tau_i\tau_1\tau_2 &= p^3 + [1/\tau_2 + 1/\tau_1 - KGz/(\tau_1\tau_2)]p^2 \\
&+ [1/(\tau_1\tau_2) + KG(\tau_i - z)/(\tau_1\tau_2\tau_i)]p + [KG/(\tau_1\tau_2\tau_i)]
\end{aligned}$$

On veut que les pôles soit aux même endroit et qu'il soient stables; Soit , le pôle commun est donc $(-1/\tau_d)$ où τ_d est une constante de temps désirée. Le dénominateur doit être égal à

$$\begin{aligned}
D_{PI}(p)/\tau_i\tau_1\tau_2 &= \left(p + \frac{1}{\tau_d}\right)^3 \\
&= p^3 + \frac{3}{\tau_d}p^2 + \frac{3}{\tau_d^2}p + \frac{1}{\tau_d^3}
\end{aligned}$$

Le principe du réglage des coefficients est donc la résolution du système suivant :

$$\begin{aligned}
[1/\tau_2 + 1/\tau_1 - KGz/(\tau_1\tau_2)] &= \frac{3}{\tau_d} \\
[1/(\tau_1\tau_2) + KG(\tau_i - z)/(\tau_1\tau_2\tau_i)] &= \frac{3}{\tau_d^2} \\
[KG/(\tau_1\tau_2\tau_i)] &= \frac{1}{\tau_d^3}
\end{aligned}$$

La première équation donne :

$$KG = \left(1/\tau_2 + 1/\tau_1 - \frac{3}{\tau_d}\right)\tau_1\tau_2/z$$

La troisième équation donne :

$$KG/\tau_i = \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_d^3}$$

La deuxième équation fixe donc le pôle $-\frac{1}{\tau_d}$:

$$[1/(\tau_1\tau_2) + KG/(\tau_1\tau_2) - KGz/(\tau_1\tau_2\tau_i)] = \frac{3}{\tau_d^2}$$

$$1/(\tau_1\tau_2) +$$

4. Est-il possible de choisir arbitrairement le temps de réponse de l'asservissement en ajustant les paramètres (G, τ_i) ?
Non car on a 3 équations et seulement 2 inconnues.

Question 3) reconnaissance de réponses temporelles (7 points)

Associez une réponse temporelle à chaque fonction de transfert de la liste suivante :

fonction de transfert : réponse explication

$$\frac{-3}{p^2+3} \; : \; C1,2$$

C'est le seul oscilateur

$$\frac{2}{p^2+p+1} \; : \; C3,2$$

C'est un système oscilant amorti qui n'a pas les propriétés ci-desso

$$\frac{p-2}{p^2+p+1} \; : \; C1,1$$

C'est un système oscilant amorti qui a un gain statique négatif

et un démarrage à l'envers et donc un zéro instable

$$\frac{2p+2}{p^2+p+1} \; : \; C3,1$$

C'est un système oscilant amorti

dont la pente de la tangente à l'origine est non-nulle.

Le degré relatif est donc égal à 1

$$\frac{0.3p+0.3}{p^2+p} \; : \; \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ C2,2$$

C'est un intégrateur (en simplifaiant p + 1)

$$\frac{-1}{p^2-0,1p+1} \; : \; C4,1$$

C'est un système oscilant instable

$$\frac{3p+3}{2p+1} \; : \; \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ C4,2$$

C'est un système à transfert direct (discontinuité à l'origine) de gain

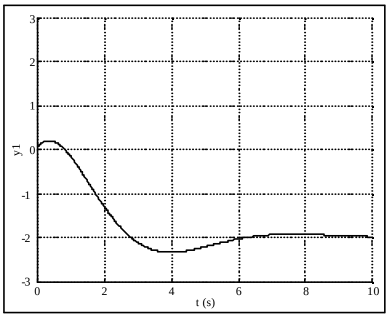
---

Les figures suivantes donnes les réponses de systèmes linéaires à un échelon unitaire. On suppose que les valeurs initiales de tous les intégrateurs constituant ces processus sont nulles.

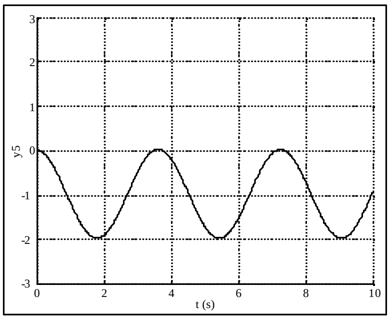
Conseil : pour chacune des fonctions, prenez le temps de voir si elle

ne se simplifie pas.
Notation :

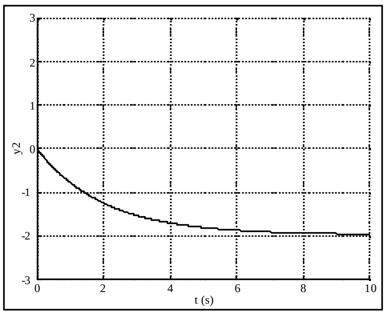
- +1 point pour une bonne réponse,
- -1 point pour une mauvaise réponse ; une absence de réponse est une mauvaise réponse



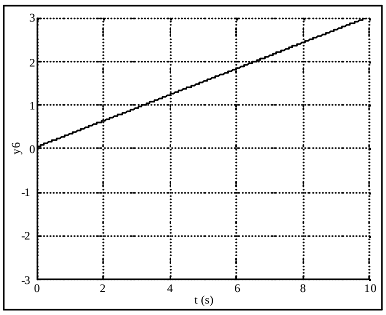
C1,1



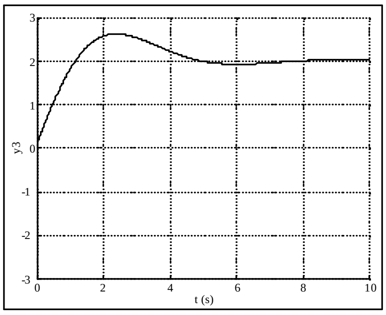
C1,2



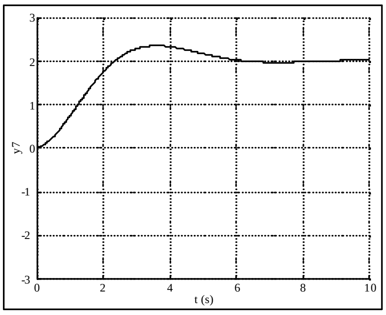
C2,1



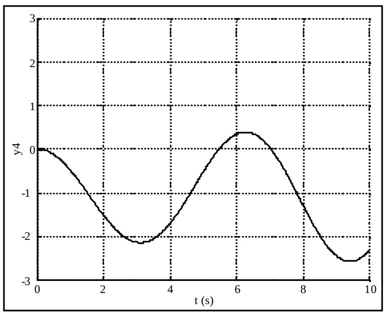
C2,2



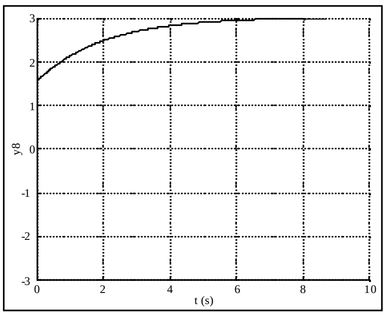
C3,1



C3,2



C4,1



C4,2

Median 2001

corrigé
de l'examen médian de l'UV SY14
(Eléments d'Automatique)
28 novembre 2001

Question 1) 4 points

Voila 4 processus :

$$P_1 : \frac{y(t)}{u(t)} = 4\left(\frac{p+2}{(p^2+3p+2)(1+2p)}\right),$$

$$P_2 : \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{1}{p^3},$$

$$P_3 : \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{-200}{p^2+300},$$

$$P_4 : \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -6 & -8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}.$$

Pour chacun des processus P_1, P_2, P_3, P_4, vous préciserez

1. l'ordre,
2. le degré relatif,
3. la sortie stationnaire y^s correspondant à l'entrée stationnaire $u^s \equiv 3$,
4. les pôles,
5. les zéros, s'il y en a,
6. la stabilité du processus,
7. la stabilité de l'inverse du processus,
8. si le processus est stable, un ordre de grandeur de son temps de réponse.

Vous répondrez dans le tableau ci-dessous :

Pour répondre, on aura besoin de la fonction de transfert de P_4:

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p+6, & +8 \\ -1, & p \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

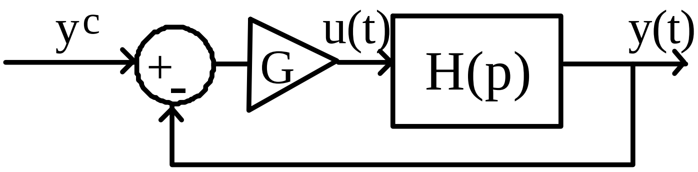
$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p, & -8 \\ 1, & p+6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{p^2+6p+8}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}}{p^2+6p+8}$$

$$= \frac{p-2}{p^2+6p+8}$$

	P_1	P_2	P_3	P_4
ordre	**3**	**3**	**2**	**2**
degré relatif	**2**	**3**	**2**	**1**
y^s pour $u^s \equiv 3$	**12**	**pas défini**	**-2**	**-3/4**
pôles (s^{-1})	**0.5, 1, 2**	**0, 0, 0**	**-10**$i\sqrt{3}$ **, +10**$i\sqrt{3}$	**-2, -4**
zéros (s^{-1})	**-2**	**aucun**	**aucun**	**2**
stabilité	**oui**	**non**	**limite (oscillateur)**	**oui**
stabilité de l'inverse	**oui**	**oui**	**oui**	**non**
temps de réponse	**9s**	**pas défini**	**pas défini**	**1.5 s**

Question 2) 3 points



On considère l'asservissement d'un processus par action proportionnelle représenté ci-dessus.
La fonction de transfert du processus est

$$H(p) = \frac{3}{p-4}$$

1. Ce processus est-il stable en boucle ouverte ?
réponse :**non car le pôle ($p = 4$) est positif**

2. Exprimez la fonction de transfert $y(t)/y^c$
réponse :

$$y(t) = \frac{3}{p-4}.G(y^c - y(t))$$

$$\frac{y(t)}{y^c} = \frac{3G}{p-4+3G}$$

3. En boucle fermée, quelles sont les valeurs de G qui stabilisent l'asservissement ?
réponse :**il faut que le pôle** $(p = 4-3G)$ **soit négatif. Il vient**

donc:

$$G > 4/3$$

4. On adopte $G = 2$, quel est le temps de réponse de l'asservissement ? (préciser les unités !)
réponse :**le pôle est** $\left(p = -2\ \mathrm{s}^{-1}\right)$**.**

Cela correspond à une constante de temps $\tau = 0.5s$ et donc à
un temps de réponse de $T_R = 1.5s$.

5. Toujours avec $G = 2$, si on veut réaliser cet asservissement avec un microcontroleur, quelle période d'échantillonnage va t-on adopter ? (préciser les unités !)
   réponse :**on adoptera T_e de l'ordre de $\frac{T_R}{10} = 0.15s$**

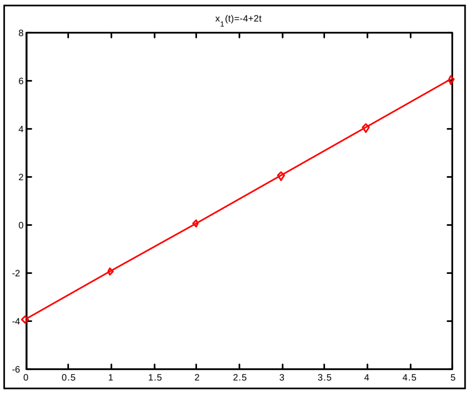
Question 3) 3 points

On considère l'équation d'état suivante :

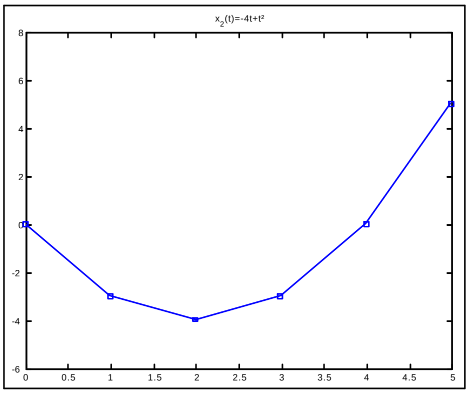
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

En appliquant une entrée constante $u(t) \equiv 2$ à partir de la condition initiale $x(0) = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

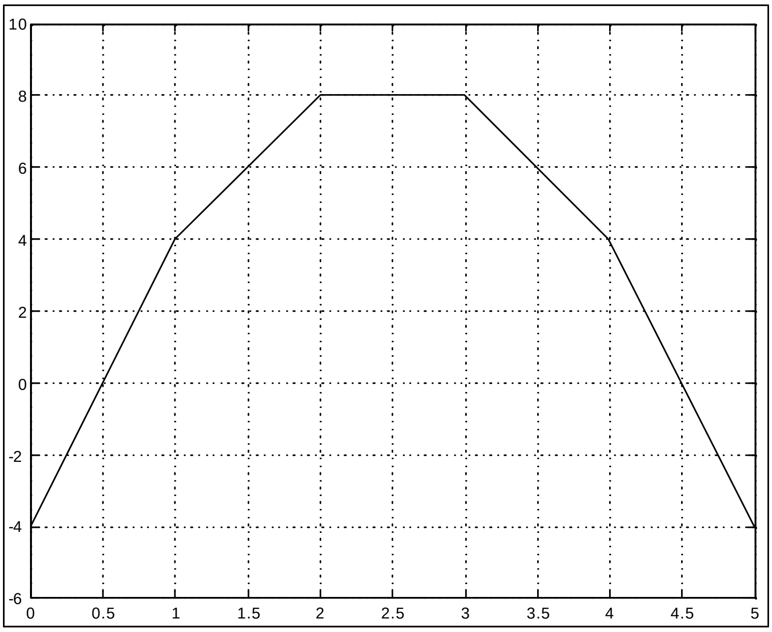
1. Dessiner l'évolution de $x_1(t)$, $x_2(t)$, $y(t)$ pour $t \in [0,5]$ sur les figures suivantes :
réponse



$x_1(t) = -4 + 2t$

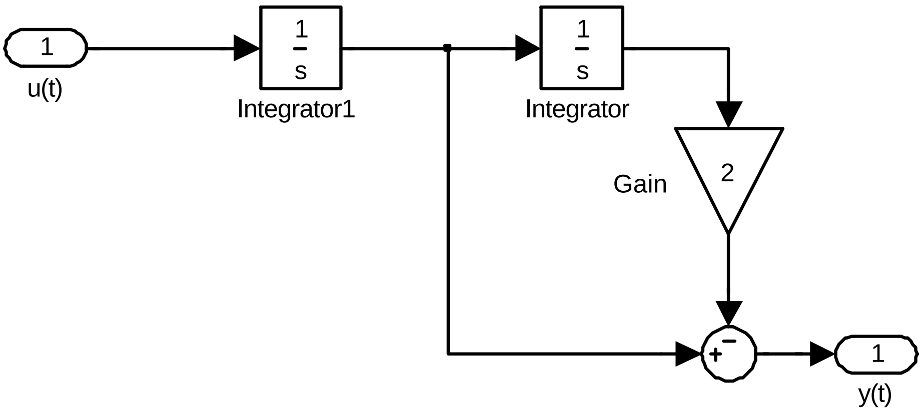


$x_2(t) = -4t + t^2$



$$y(t) = -4 + 6t - 2t^2$$

2. Dessiner un schéma bloc représentant cette équation d'état.
réponse :



3. Quelle est la fonction de transfert $\frac{y(t)}{u(t)}$?
réponse :

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{p-2}{p^2}$$

Question 4) 4 points

On considère le problème suivant d'ACC. Ce dispositif permet de suivre le véhicule précédent avec un espacement donné.Vudu dispositif, son principe est le suivant :

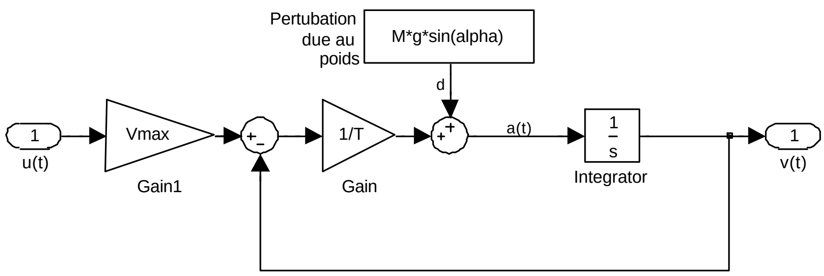
Je suit une voiture et je mesure la distance $z(t)$ de mon pare-choc avant à l'arrière du véhicule qui me précède. Je souhaite réguler cet écart autour d'une valeur z^c (qui dépend de l'estimation de la vitesse du véhicule suivi mais ce n'est pas l'objet du problème).

On suppose qu'on agit sur la commande d'injection notée $u(t)$.définie dans l'intervalle $[0, 100\%]$.

L'effet de $u(t)$ sur la vitesse $v(t)$ tient compte de la résistance de l'air. Sur terrain plat, il peut être décrit par une fonction de transfert

$$\frac{v(t)}{u(t)} = \frac{v_{\max}}{1 + Tp}$$

Si on rajoute maintenant l'effet d du poids de la voiture lorsque le terrain n'est pas plat, le modèle de ma voiture est représenté sur le schéma **SIMULINK** suivant :



Modèle SIMULINK des liens entre $\{u(t), p\}$ et $v(t)$

On suppose que le véhicule précédent roule à vitesse constante v^f, l'écart entre mon véhicule et le véhicule précédent est donc :

$$z(t) = p.z(t) = v^f - v(t)$$

1. Donner sous forme algébrique (en utilisant des fonctions de transfert) les liens entre $\{u(t), d\}$ et $v(t)$ qu'on vous a donné sous forme de schéma-blocs.
   réponse :

$$\begin{aligned}
v(t) &= \frac{1}{p}\left(d + \frac{1}{T}(v_{\max}.u(t) - v(t))\right)\\
pTv(t) &= Td + (v_{\max}.u(t) - v(t))\\
(1+Tp)v(t) &= Td + v_{\max}.u(t)
\end{aligned}$$

Il vient donc :

$$v(t) = \frac{T}{1+Tp}d + \frac{v_{\max}.}{1+Tp}u(t)$$

2. Donner sous forme algébrique (en utilisant des fonctions de transfert) les liens entre $\{u(t), v^f, d\}$ et $z(t)$.réponse :

La relation entre $z(t)$ **et** $\{v(t), v^f\}$ **est :**

$$p.z(t) = v^f - v(t)$$

La relation entre $v(t)$ **et** $\{u(t), d\}$ **déduite de la question précédente est :**

$$v(t) = \frac{T}{1+Tp}d + \frac{v_{\max}.}{1+Tp}u(t)$$

On combine les 2 en éliminant $v(t)$**,il vient:**

$$v^f - p.z(t) = \frac{T}{1+Tp}d + \frac{v_{\max}.}{1+Tp}u(t)$$

On ordonne les termes :

$$(1+Tp)v^f - Td - v_{\max}u(t) = p(1+Tp).z(t)$$

Il vient donc :

$$z(t) = \frac{v^f}{p} - \frac{Td}{p(1+Tp)} - \frac{v_{\max}}{p(1+Tp)}u(t)$$

On propose une simple commande proportionnelle ($z_{\sec}$ est la distance de sécurité désirée) :

$$u(t) = K.\left(z_{\sec} - z(t)\right).$$

Avec cette commande,

3. quelle est la solution stationnaire z^s lorsque $z_{\sec}, v^f$ et d sont constants ?
réponse : **On injecte l'expression de dans la relations obtenue dans la question précédente : les 2 en éliminant** $v(t)$**,il vient:**

$$v^f - p.z(t) = \frac{T}{1+Tp}d + \frac{v_{\max}.}{1+Tp}u(t)$$

$$(1+Tp)\left(v^f - p.z(t)\right) = Td + v_{\max}K.(z_{\sec} - z(t))$$

$$(1+Tp)v^f - Td - v_{\max}K.z_{\sec} = p(1+Tp).z(t) - v_{\max}Kz(t)$$

$$(1+Tp)v^f - Td - v_{\max}K.z_{\sec} = (p(1+Tp) - v_{\max}K)z(t)$$

Il vient donc en régime permanent :

$$v^f - Td - v_{\max}K.z_{\sec} = (-v_{\max}K)z^s$$

donc

$$z^s = z_{\sec} + \left(Td - v^f\right)/v_{\max}K$$

4. avec $T = 20s$, comment faut-il régler T pour que les pôles soient confondus ?
Quel est alors le temps de réponse de l'ACC à un freinage brusque du véhicule précédent ?
réponse :**Les pôles sont les zéros du polynôme** $(p(1+Tp) - v_{\max}K)$, soit $(p^2 + p/T - (v_{\max}K)/T)$ **:**
Pour que les pôles soient confondus, il faut que

$$\frac{1}{T^2} + \frac{4v_{\max}K}{T} = 0$$

Soit :

$$K = -\frac{1}{4v_{\max}T}$$

Le dénominateur est alors $\left(1+\frac{T}{2}p\right)^2$**; l'ordre de grandeur du temps de réponse est donc :**

$$T_{rep} = 3T = 1mn$$

On peut mieux faire ! Mais pas forcément dans le temps imparti pour un examen.

Question 5) 1 point

Classer les processus suivants en fonction de leur rapidité en justifiant votre réponse :

le plus rapide est codé 1, le code 0 correspond à un processus inclassable.
réponse :

Processus	Classement	justification
$\frac{0.0003}{2p+8}$	**2**	$\boldsymbol{\tau = 0.25s}$
$\frac{2500(1-p)}{p^2+100p+250000}$	**1**	$\omega_0 = 500$ **rad/s,** $\zeta = \frac{100}{2\times500} = 0.1, \tau_{equ} = 0.01s$
$\frac{3}{p^2}$	**0**	**instable**
$\frac{3}{2p^2+3p+1}$	**3**	$\boldsymbol{\tau_1 = 1s, \tau_2 = 2s}$

Question 6) 2 points

Donner l'***allure*** de la réponse temporelle de chacun des systèmes suivants pour une entrée échellon d'amplitude 1.

Vous préciserez en particulier sa valeur finale $y(\infty)$ lorsque c'est possible, sa dérivée initiale $\dot{y}(0)$ et une valeur approximative de son temps de réponse T_{rep} .
réponse : **Lorsque le processus est stable, on calcule** $y(\infty)$ **en**

utilisant le gain statique (dans le cas d'un processus instable la sortie diverge on ne sait trop où !)
Comme $y(0) = 0$**, la dérivée à l'origine est calculée en évaluant la valeur de** $py(t)$ **avec .**$u(0) = 1$ **,**$y(0) = 0$ **et toutes les intégrales de** $u(t)$ **et de** $y(t)$ **nulles.**
Exemple pour le deuxième processus $\left(\frac{y_b(t)}{u(t)} = \frac{1-p}{p^2+2p+1}\right)$**:**

$$(p^2 + 2p + 1)y_b(t) = (1 - p)u(t)$$

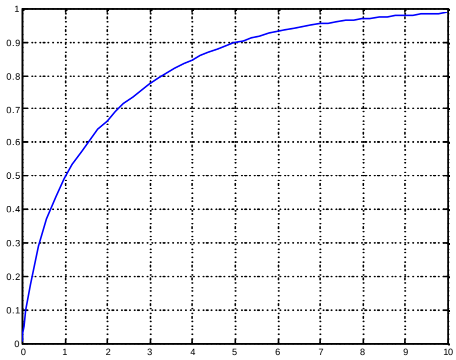
$$py_b(t) = \frac{(1-p)}{p}u(t) - \frac{(2p+1)}{p}y_b(t)$$

donc :

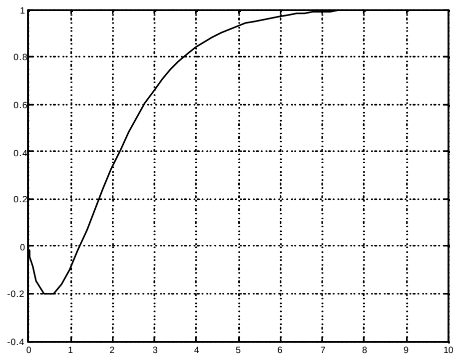
$$\begin{aligned}\dot{y}_b(0) &= -u(0) - 2y_b(0) + \int_0^0 u(t)dt - \int_0^0 y(t)dt \\ &= -1 - 2 \times 0 + 0 - 0 \\ &= -1\end{aligned}$$

a	$y(\infty)$	$\dot{y}(0)$	T_{rep}
$\frac{y_a(t)}{u(t)} = \frac{p+1}{p^2+3p+1}$	**1**	**1**	
$\frac{y_b(t)}{u(t)} = \frac{1-p}{p^2+2p+1}$	**1**	**-1**	**6s**
$\frac{y_c(t)}{u(t)} = \frac{5}{0.25p^2+0.5p+1}$	**5**	**0**	**3s**
$\frac{y_d(t)}{u(t)} = \frac{1}{p-1}$	**instable**	**1**	**instable**

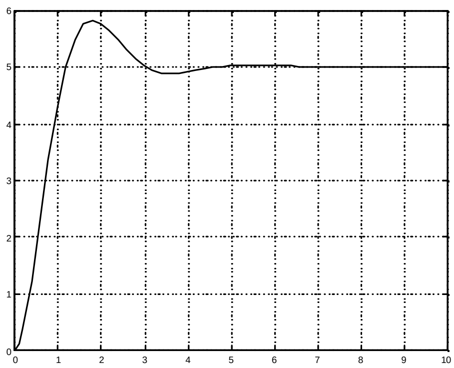
Les simulations (calculées par `SIMULINK`) sont les suivantes et toutes les dessins à main levée ressemblant à ça sont justes :



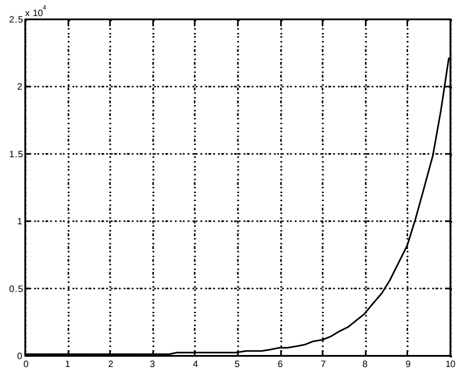
$y_a(t)$



$y_b(t)$



$y_c(t)$



$y_d(t)$

Question 7) 2 points

Soit un système dont les fréquences utiles sont données par : $f_1 = 100Hz$ et $f_2 = 50Hz$. Le signal de sortie est perturbé par un signal de bruit de haute fréquence ($f_b = 1000Hz$).

- Donnez, en le justifiant, un bon choix pour la période d'échantillonnage.
  réponse :**La fréquence d'échantillonnage f_e doit être**

  supérieure à $2\max(f_1,f_2) = 200Hz$.
- Donnez, en le justifiant, un bon choix de la fréquence de coupure du filtre antirepliement.
  réponse :**La fréquence f_c de coupure du filtre d'anti-repliement doit être**
  - **supérieure à la plus grande fréquence utile (**$100Hz$ **)**

    $$f_c > 100Hz$$
  - **inférieure à $f_e/2$,** donc

    $$f_e > 200Hz$$
  - **inférieure à la fréquence du bruit (**$1000Hz$)

On peut par exemple prendre

$$f_e = 400Hz$$

Question 8) 1 point

On considère un système représenté par sa fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{5}{(p^2+6p+8)(4p^2+p+1)}$$

Donnez, en le justifiant, un bon choix pour la période d'échantillonnage.

réponse : **Les pôles de** $\frac{1}{(p^2+6p+8)}$ **sont** $(-2,-4)$**, ce qui correspond**

à des constantes de temps de $(0.5s, 0.25s)$

$\frac{1}{(4p^2+p+1)} = \frac{1/4}{(p^2+p/4+1/4)}$ **est une fonction de transfert stable avec** $(\omega_0 = 0.5, \zeta = 0.25)$ **des oscillations amorties, sa constante de temps équivalente est** $1/(\zeta\omega_0) = 8s.$

Au total,

le temps de réponse de est de l'ordre de $3 * (8 + 0.5 + 0.75)s$

et on choisit donc

$$T_e \approx 2.5s$$

Question 9) 1 point

Soit un processus de fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{10}{(p+1)(p+5)(p+9)}$$

On mesure sa sortie avec un capteur dont la dynamique est :

$$C(p) = \frac{m(t)}{y(t)} = \frac{1}{(1+0.01p)}$$

On souhaite commander ce procédé par ordinateur, donner une période d'échantillonnage convenable. Justifier votre choix.

réponse : **Par rapport à la dynamique du processus dont le temps**

de réponse est voisine de $3s$**, la période d'échantillonnage doit donc être choisi voisin de** $0.3s$**.**

On ne verra donc que le régime permanent du capteur, ce qui n'est pas grave car sa dynamique ne masque pas celle du processus.

Median 2002

C’est une blague !