MT23-Algèbre linéaire

Chapitre 1 : Espaces vectoriels

ÉQUIPE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

UTC

octobre 2009

Chapitre I

Espaces vectoriels

I.1 Espaces vectoriels, généralités

I.1.1 Groupe

Exercices :
Exercice A.1.1
Exercice A.1.2

Exemples :
Exemple B.1.1

Définition I.1.1. *Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne, c'est-à-dire d'une application de $G \times G$ dans G.*
Cette loi est notée par exemple $(x, y) \mapsto x \hat{+} y$.
L'ensemble G est un **groupe** *si la* **loi de composition interne** *possède les propriétés suivantes :*
- *elle est* **associative** *: $\forall x, y, z \in G$ on a $(x \hat{+} y) \hat{+} z = x \hat{+} (y \hat{+} z)$,*
- *elle admet un* **élément neutre** *: $\exists e \in G$ tel que , $\forall x \in G$ on a $e \hat{+} x = x \hat{+} e = x$,*
- *tout élément admet un* **symétrique** *(ou* **opposé** *ou* **inverse** *qui est nécessairement unique) : $\forall x \in G$, $\exists \tilde{x} \in G$ tel que $\tilde{x} \hat{+} x = x \hat{+} \tilde{x} = e$.*

On dit que le groupe est **commutatif** *si la loi de composition l'est : $\forall x, y \in G, x \hat{+} y = y \hat{+} x$.*
On note $(G, \hat{+})$ le groupe pour préciser l'ensemble et sa loi de composition.

$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ sont des groupes (commutatifs). On sait que l'addition "usuelle" est associative et commutative, 0 est évidemment l'élément neutre de l'addition et $-x$ est le symétrique de x.

Lorsque la loi est associative on peut omettre les parenthèses, on notera sans ambigüité $x \hat{+} y \hat{+} z$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Dans un groupe il est possible de "simplifier", c'est à dire :

$$x\hat{+}y = x\hat{+}z \Rightarrow y = z, \qquad y\hat{+}x = z\hat{+}x \Rightarrow y = z$$

(il suffit en effet de composer à gauche ou à droite par l'inverse de x). En particulier on aura :

$$x\hat{+}y = x \Rightarrow y = e, \qquad x\hat{+}y = y \Rightarrow x = e$$

Attention ! Ces simplifications ne sont plus valables lorsque l'on n'a pas de structure de groupe. Ainsi, on a $0 \times 3 = 0 \times 5$ et pourtant 3 n'est pas égal à 5 ! (On pourra vérifier que $(\mathbb{Q}, \times)$ n'est pas un groupe)

Proposition I.1.1. *Soit $(G, \hat{+})$ un groupe, l'inverse de tout élément $x \in G$ est unique.*

Démonstration – En effet si x_1 et x_2 sont deux inverses de x, on a alors

$$x_1\hat{+}x = x\hat{+}x_1 = e, \qquad x_2\hat{+}x = x\hat{+}x_2 = e.$$

On a donc

$$x_1 = x_1\hat{+}e = x_1\hat{+}(x\hat{+}x_2) = (x_1\hat{+}x)\hat{+}x_2 = e\hat{+}x_2 = x_2.$$

I.1.2 Espaces vectoriels

Exercices : Exercice A.1.3
Exemples : Exemple B.1.2
Documents : Document C.1.1

Soit E un ensemble dont les éléments sont appelés **vecteurs** (cette notation sera justifiée par la suite). On notera (dans un premier temps du moins) ces éléments avec une "flèche" : $\vec{x}$.
Soit K un corps commutatif (voir document) a priori quelconque dont les éléments sont appelés scalaires. On les notera très souvent en utilisant l'alphabet grec. Dans la suite de ce cours, K sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On note $+$ l'addition dans K, on n'utilise pas de symbole pour la multiplication dans K : $\lambda + \mu$, $\lambda\mu$ ont leur signification habituelle.

On définit les deux lois de composition suivantes :
– une loi interne dans E notée $\hat{+}$: $\vec{x}\hat{+}\vec{y} \in E$,
– une loi externe notée "." de $K \times E$ dans E , c'est-à-dire une application de $K \times E$ dans E qui au couple $(\lambda, \vec{x})$ associe le vecteur $\lambda.\vec{x}$.

Par exemple, on définit $E = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$ et on note (x_1, x_2) les composantes d'un vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^2$. On peut prendre pour lois de composition :
– l'addition habituelle des vecteurs de $\mathbb{R}^2$: $\vec{x}\hat{+}\vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ (on remarque que $+$ désigne l'addition entre deux nombres réels alors que $\hat{+}$ désigne l'addition entre deux vecteurs),

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

– le produit habituel d'un scalaire (nombre réel) par un vecteur : $\lambda.\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2)$.

Définition I.1.2. *Soit K un corps commutatif. On appelle espace vectoriel sur K un ensemble E sur lequel on a défini deux lois de composition :*
– *une loi interne $\hat{+}$ telle que $(E, \hat{+})$ soit un groupe commutatif (on note $\vec{0}$ l'élément neutre et $-\vec{x}$ le symétrique de $\vec{x}$),*
– *une loi externe définie de $K \times E$ dans E qui possède les propriétés suivantes : $\forall \lambda, \mu \in K$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$:*
  - $(\lambda\mu).\vec{x} = \lambda.(\mu.\vec{x})$
  - $(\lambda + \mu).\vec{x} = \lambda.\vec{x} \hat{+} \mu.\vec{x}$
  - $\lambda.(\vec{x} \hat{+} \vec{y}) = \lambda.\vec{x} \hat{+} \lambda.\vec{y}$
  - $1.\vec{x} = \vec{x}$ *(1 élément unité de K).*

Puisque E s'appelle, dans ce cas, espace vectoriel, cela justifie d'appeler ses éléments des vecteurs. Nous verrons que nous omettrons rapidement les flèches de $\vec{x}$ qui n'existent pas habituellement.

Exemples
– On définit l'ensemble $\mathbb{R}^n$ des n-uplets de nombres réels $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ avec les lois suivantes :
  - $\vec{x} \hat{+} \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$
  - $\lambda.\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$
– L'ensemble $\mathcal{P}_n$ des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients réels muni de l'addition et du produit par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Proposition I.1.2. *Pour tout $\lambda \in K$ et pour tout $\vec{x} \in E$ on a :*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

1. $\lambda.\vec{0} = \vec{0}$ *et* $0.\vec{x} = \vec{0}$*,*

2. $\lambda.\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0$ *ou* $\vec{x} = \vec{0}$*,*

3. $(-\lambda).\vec{x} = \lambda.(-\vec{x}) = -(\lambda.\vec{x})$

Démonstration–

1. $\lambda.\vec{0} = \lambda.(\vec{0}\hat{+}\vec{0}) = \lambda.\vec{0}\hat{+}\lambda.\vec{0}$ d'où $\vec{0} = \lambda.\vec{0}$ après simplification,
   $\lambda.\vec{x} = (0+\lambda).\vec{x} = 0.\vec{x}\hat{+}\lambda.\vec{x}$ d'où $\vec{0} = 0.\vec{x}$ après simplification.
2. Supposons $\lambda.\vec{x} = \vec{0}$ et $\lambda \neq 0$, alors $\lambda^{-1}.(\lambda.\vec{x}) = \lambda^{-1}.\vec{0} = \vec{0}$, d'où $(\lambda^{-1}\lambda).\vec{x} = \vec{0}$ c'est à dire $1.\vec{x} = \vec{0}$, c'est à dire $\vec{x} = \vec{0}$.
3. $(-\lambda).\vec{x}\hat{+}(\lambda).\vec{x} = (-\lambda+\lambda).\vec{x} = 0.\vec{x} = \vec{0}$ donc $(-\lambda).\vec{x} = -(\lambda.\vec{x})$ puisque l'élément opposé est unique. On peut montrer de façon similaire que : $\lambda.(-\vec{x}) = -(\lambda.\vec{x})$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.1.3 Sous-espaces vectoriels

Exercices :
Exercice A.1.4
Exercice A.1.5
Exercice A.1.6

Exemples :
Exemple B.1.3

Dans toute la suite E désignera un espace vectoriel sur un corps K.

Définition I.1.3. *Soit F une partie non vide de E, on dit que F est un* **sous-espace vectoriel** *de E si la restriction des lois de E à F fait de F un espace vectoriel sur le même corps K.*

L'ensemble P_3 des polynômes réels de degré inférieur ou égal à trois est un sous-espace vectoriel de l'ensemble P_4 des polynômes réels de degré inférieur ou égal à quatre puisque $P_3 \subset P_4$ et que ces ensembles ont une structure d'espace vectoriel pour les mêmes lois de composition (l'addition et la multiplication par un réel).

Proposition I.1.3. *$F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si*
– *$F \neq \emptyset$,*
– *(i) $\vec{x}, \vec{y} \in F \Rightarrow \vec{x} \hat{+} \vec{y} \in F$,*
– *(ii) $\lambda \in K, \vec{x} \in F \Rightarrow \lambda . \vec{x} \in F$.*

On dit que F est stable pour les lois $\hat{+}$ et .

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration – Les conditions sont évidemment nécessaires par définition des lois de composition de l'espace vectoriel F. Supposons que ces conditions soient satisfaites et montrons alors que F est un espace vectoriel. La loi $\hat{+}$ est une loi interne de F grâce à (i). L'associativité et la commutativité de la loi $\hat{+}$ étant vérifiées pour E , elles le sont pour F. Il en est de même pour les quatre propriétés de la définition I.1.2 de la loi externe . En prenant $\lambda = -1$ dans (ii) on a $-\vec{x} \in F$ ce qui montre que tout élément de F admet un opposé dans F. Enfin (i) appliqué aux vecteurs $\vec{x}$ et $-\vec{x}$ montre que $\vec{0} \in F$ et donc que l'élément neutre de $\hat{+}$ est dans F.

On en déduit immédiatement la caractérisation fondamentale (très utile !) suivante :

Proposition I.1.4. *F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si F est non vide et*

$$\vec{x}, \vec{y} \in F \text{ et } \lambda, \mu \in K \Rightarrow \lambda.\vec{x} \hat{+} \mu.\vec{y} \in F.$$

Proposition I.1.5.
– *E et $\{\vec{0}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.*
– *Tous les sous-espaces vectoriels contiennent $\{\vec{0}\}$.*

La démonstration est à faire dans l'exercice A.1.5.

Proposition I.1.6. *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel et $F \cup G$ n'en est pas un (en général).*

Démonstration –
– $\vec{0} \in F \cap G$ donc cet ensemble n'est pas vide. Avec les notations habituelles si $\vec{x}, \vec{y} \in F \cap G$ alors on montre facilement (le vérifier) que $\lambda.\vec{x} \hat{+} \mu.\vec{y} \in F \cap G$, c'est à dire que $F \cap G$ est stable.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

– Montrons sur un exemple que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel. F est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(1, 0)$, G est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(0, 1)$. Si l'on prend $\vec{y} = (1, 0)$, alors $\vec{y} \in F$ donc $\vec{y} \in F \cup G$. De même si l'on prend $\vec{z} = (0, 1)$, alors $\vec{z} \in G$ donc $\vec{z} \in F \cup G$. Et pourtant $\vec{y} \hat{+} \vec{z} = (1, 1)$ n'appartient pas à $F \cup G$. $F \cup G$ n'est donc pas stable pour la loi $\hat{+}$. On pourrait démontrer que $F \cup G$ n'est un sous-espace vectoriel <u>que</u> dans le cas où $F \subset G$ ou $G \subset F$.

I.1.4 Sous-espaces supplémentaires

Exercices :
Exercice A.1.7
Exercice A.1.8
Exercice A.1.9

Note importante -
Désormais nous omettrons le signe . pour la loi externe et nous noterons souvent "+" et non "$\hat{+}$" la loi additive du groupe commutatif de l'espace vectoriel. En effet il s'agit bien de la somme de deux vecteurs et le contexte mathématique de ce "+" permet de voir aisément s'il s'agit de la somme de deux scalaires ou de la somme de deux vecteurs. Dans la définition suivante on définit un troisième signe "+", puisqu'il s'agit de la somme de deux sous-espaces vectoriels. Mais le fait que ce signe "+" soit encadré par les lettres F et G représentant deux ensembles suffit à enlever toute confusion sur la signification de ce "+".

Définition I.1.4.

– *On appelle* **somme** *de deux sous-espaces vectoriels F et G (d'un espace vectoriel E) le sous-espace vectoriel H de E noté $F+G$ tel que* $H = \{\vec{x} \in E |\ \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}, \vec{y} \in F, \vec{z} \in G\}$.
– *On dit que F et G sont en* **somme directe** *si $F \cap G = \{\vec{0}\}$. On note alors $F \oplus G$. On a donc*

$$H = F \oplus G \Leftrightarrow \{H = F + G \text{ et } F \cap G = \{\vec{0}\}\}.$$

– *On dit que F et G sont* **supplémentaires** *dans E si $E = F \oplus G$.*

Montrer en exercice que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition I.1.7.

$$H = F \oplus G \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in H, \text{ il existe un couple unique } (\vec{y}, \vec{z}) \in F \times G \text{ tel que } \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}.$$

En particulier, si $E = F \oplus G$, alors tout vecteur $\vec{x} \in E$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Démonstration – Soit une autre décomposition de $\vec{x}$ sous la forme $\vec{x} = \vec{y'} + \vec{z'}$, alors

$$\vec{0} = \vec{y} - \vec{y'} + \vec{z} - \vec{z'} \quad \text{ou encore} \quad \vec{y} - \vec{y'} = -\vec{z} + \vec{z'}$$

avec $\vec{y} - \vec{y'} \in F$ et $-\vec{z} + \vec{z'} \in G$. Or $F \cap G = \{0\}$, on a donc nécessairement $\vec{y} = \vec{y'}$ et $\vec{z} = \vec{z'}$.

Attention ! Si H et F sont donnés, le supplémentaire G de F n'est pas unique. Illustrer cette propriété à l'aide d'un exemple.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.2 Espaces vectoriels de dimension finie

I.2.1 Familles liées-libres

Exercices :
Exercice A.1.10
Exercice A.1.11
Exercice A.1.12

Définition I.2.1. *On dit que la famille* $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ *de vecteurs de E est* **liée** *s'il existe des scalaires* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in K$ *non tous nuls tels que*

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_p\vec{x}_p = \vec{0}.$$

Dans le cas où la famille contient un seul vecteur, la famille est liée si et seulement si ce vecteur est nul (le vérifier).
Dans le cas où la famille S *contient au moins 2 vecteurs, elle est liée si et seulement si l'un (au moins) des vecteurs de* S*, soit* $\vec{x}_k$*, est* **combinaison linéaire** *des autres : cela signifie qu'on peut écrire* $\vec{x}_k$ *sous la forme*

$$\vec{x}_k = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_{k-1}\vec{x}_{k-1} + \alpha_{k+1}\vec{x}_{k+1} + \ldots + \alpha_p\vec{x}_p$$

où $\alpha_i \in K$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, p$*. Démontrer ce résultat.*
Une famille qui n'est pas liée est dite **libre** *(on dit aussi que les vecteurs* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p$ *sont* **linéairement indépendants***). Dans ce cas on a*

$$\{\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_p\vec{x}_p = \vec{0}\} \Rightarrow \{\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0\}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Par exemple, si l'on se place dans $\mathbb{R}^2$ et si on définit les vecteurs $\vec{x}_1 = (1,2)$, $\vec{x}_2 = (2,3)$ et $\vec{x}_3 = (2,4)$ alors la famille $\{\vec{x}_1, \vec{x}_3\}$ est liée car $2\vec{x}_1 - \vec{x}_3 = \vec{0}$ et la famille $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ est libre car si $\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 = \vec{0}$ alors les deux équations $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$, $2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$ ont pour unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Proposition I.2.1.

1. *Si deux vecteurs d'une famille $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ sont égaux (par exemple $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$) alors la famille S est liée.*
2. *Si l'un quelconque des vecteurs de S est le vecteur nul, alors S est liée.*

La démonstration est à faire dans l'exercice A.1.11.

Proposition I.2.2.

1. *Si $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ est liée et si $\vec{x}$ est un vecteur quelconque de $\mathbf{E}$, alors $S \cup \{\vec{x}\}$ est liée. Autrement dit, toute sur-famille d'une famille liée est liée.*
2. *Si $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ est libre, la famille $\{\vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ est libre. Autrement dit, toute sous-famille d'une famille libre est libre.*

La démonstration est à faire dans l'exercice A.1.11.

Proposition I.2.3. *Soit $\mathcal{L} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p\}$ une famille libre et $\vec{x}$ un vecteur tel que $\mathcal{L} \cup \{\vec{x}\}$ est liée, alors $\vec{x}$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{L}$.*

Démonstration – Comme $\mathcal{L} \cup \{\vec{x}\}$ est liée, il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1}$ non tous nuls tels que

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_p\vec{e}_p + \alpha_{p+1}\vec{x} = \vec{0}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Si $\alpha_{p+1} = 0$, alors $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ sont non tous nuls et on aurait $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + ... + \alpha_p\vec{e}_p = \vec{0}$, donc la famille $\mathcal{L} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_p\}$ serait liée, ce qui est impossible, donc $\alpha_{p+1} \neq 0$.
On peut donc écrire

$$\vec{x} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{p+1}}\vec{e}_1 - ... - \frac{\alpha_p}{\alpha_{p+1}}\vec{e}_p,$$

ce qui démontre le résultat.
Il faut bien voir que si $\mathcal{L}$ n'est pas libre le résultat est faux. Prendre par exemple les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de l'exercice A.1.10 et choisir $\mathcal{L} = \{\vec{y}_3, \vec{y}_5\}$ et $\vec{x} = \vec{y}_1$. Ceci illustre le fait que dans une famille liée tout vecteur n'est pas nécessairement combinaison linéaire des autres.

Proposition I.2.4. *Soit $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p\}$ une famille libre et $\vec{x}$ admettant une décomposition de la forme*

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_p\vec{e}_p,$$

alors les coefficients $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p}$ sont uniques.

Démonstration – Supposons que $\vec{x}$ admette deux décompositions :

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_p\vec{e}_p, \quad \vec{x} = \mu_1\vec{e}_1 + \mu_2\vec{e}_2 + \ldots + \mu_p\vec{e}_p,$$

alors par différence on a

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \mu_1)\vec{e}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\vec{e}_2 + \ldots + (\lambda_p - \mu_p)\vec{e}_p$$

ce qui implique $\lambda_i = \mu_i$, $i = 1, \ldots, p$, puisque la famille est libre.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.2.2 Familles génératrices

Exercices :
Exercice A.1.13
Exercice A.1.14

Définition I.2.2. *On dit que la famille (finie)* $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ *de vecteurs de* **E** *est* **génératrice de** E *si tout vecteur de* E *est combinaison linéaire de* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p$*.*
On dit qu'un espace vectoriel est de **type fini** *s'il admet une famille génératrice finie.*

Tous les espaces vectoriels ne sont pas de type fini. Par exemple si E est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, si on définit pour tout i entier les polynômes p_i par $\forall t \in \mathbb{R}, \quad p_i(t) = t^i$, une famille génératrice serait $\{p_0, p_1, p_2, p_3, \dots\}$. Il n'existe pas dans ce cas de famille génératrice ayant un nombre fini d'éléments.

Proposition I.2.5. *Soit* $\mathcal{L} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p\}$ *une famille génératrice de* E *et* $\vec{x}$ *un vecteur quelconque de* E*, alors* $\mathcal{L} \cup \{\vec{x}\}$ *est génératrice de* E *: toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.*

La démonstration est à faire en exercice.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.2.3 Sous-espaces vectoriels engendrés

Exercices :
Exercice A.1.15

Définition I.2.3. *Soit* $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ *une famille de vecteurs d'un espace vectoriel. On appelle* **sous-espace vectoriel engendré par la famille** *de vecteurs* $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$*, et on note* vect $< \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n >$*, l'espace vectoriel défini par*

$$\text{vect} < \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n >= \{\vec{x} \in E | \vec{x} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{x}_n, \alpha_i \in K\}$$

Définition I.2.4. *Dans un espace vectoriel* E*, un sous-espace engendré par un vecteur non-nul est dit* **droite vectorielle***. Et l'espace engendré par une famille libre de deux vecteurs est dit* **plan vectoriel***.*

Vous pouvez vérifier que les sous-espaces vectoriels
$F = \{\vec{x} \in E | x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ et $G = \{\vec{x} \in E | x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$
de l'exercice A.1.16 sont respectivement une droite et un plan vectoriels.

Il est évident que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ est une famille génératrice de vect $< \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n >$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.2.4 Bases

Exercices :
Exercice A.1.16
Exercice A.1.17

Exemples :
Exemple B.1.4

Documents :
Document C.1.2

Définition I.2.5. *Une famille qui est libre et génératrice est appelée une* **base**.

Si l'on considère $\mathbb{R}^3$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, la famille $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ définie par $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ est une base. En effet, elle est libre car $\{\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 = \vec{0}\} \Rightarrow \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0\}$. Elle est génératrice car si $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ alors $\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$. On appelle cette base la **base canonique** de $\mathbb{R}^3$. Evidemment ce résultat se généralise à $\mathbb{R}^n$.

Proposition I.2.6. *Une condition nécessaire et suffisante pour que la famille $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ soit une base de E est que tout vecteur $\vec{x} \in E$ se décompose de manière unique sur $\mathcal{E}$.*

Démonstration – Si $\mathcal{E}$ est une base alors la décomposition existe puisque $\mathcal{E}$ est génératrice et elle est unique puisque $\mathcal{E}$ est libre (Proposition I.2.4).
Réciproquement si tout élément de E admet une décomposition sur $\mathcal{E}$ alors $\mathcal{E}$ est génératrice. Montrons que si cette décomposition est unique alors $\mathcal{E}$ est libre. Soient $(\lambda_i)_{1\le i\le n}$ tels que

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n = \vec{0}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

on peut écrire également que

$$0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + \ldots + 0\vec{e}_n = \vec{0}$$

mais comme par hypothèse, la décomposition de $\vec{0}$ sur $\mathcal{E}$ est unique on a nécessairement $\lambda_i = 0$, pour $i = 1, \ldots, n$, ce qui montre que $\mathcal{E}$ est libre.

Définition I.2.6. *Les coefficients de la décomposition (unique) de $\vec{x}$ sur la base $\mathcal{E}$, c'est à dire les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que $\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n$ sont appelés les* **composantes (ou coordonnées) de $\vec{x}$ sur la base $\mathcal{E}$**.

I.2.5 Existence de bases

Exercices :
Exercice A.1.18

Documents :
Document C.1.3

Théorème I.2.1. *Soit dans E une famille génératrice $\mathcal{G} = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_p\}$ et $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ une famille libre. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que*

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}.$$

Théorème I.2.2. *Tout espace vectoriel de type fini différent de $\{\vec{0}\}$ admet une base.*

Théorème I.2.3. *dit théorème de la base incomplète.*
Soit E un espace vectoriel de type fini et $\mathcal{L} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_q\}$ une famille libre de E. Alors il existe une base de E, $\mathcal{E}$ qui vérifie $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$.

Les démonstrations de ces théorèmes se trouvent dans le document référencé.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.2.6 Dimension d'un espace vectoriel

Exercices :
Exercice A.1.19
Exercice A.1.20

Documents :
Document C.1.4
Document C.1.5

Il résulte du théorème I.2.2 qu'un espace vectoriel de type fini différent de $\{\vec{0}\}$ admet au moins une base. On veut montrer dans ce paragraphe que toutes les bases ont le même nombre d'éléments, ce nombre sera alors appelé dimension. Nous allons démontrer ce résultat dans le théorème suivant.

Théorème I.2.4. *Dans un espace vectoriel de type fini toutes les bases ont le même nombre d'éléments.*

De ce théorème (démontré dans le document attaché) nous en déduisons la définition suivante :

Définition I.2.7. *Soit E un espace vectoriel de type fini différent de $\{\vec{0}\}$, on appelle* **dimension** *de E, et on note* $\dim(E)$, *le nombre d'éléments d'une base quelconque de E. Si $E = \{\vec{0}\}$, sa dimension est nulle par définition (c'est d'ailleurs le seul espace vectoriel de dimension nulle).*

Un sous-espace vectoriel F de E étant par définition un espace vectoriel, la notion de base de F est définie de la même manière que pour E. De plus si E est de type fini alors F l'est également.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

La dimension d'un espace vectoriel dépend de K. Par exemple on peut considérer l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ de deux manières différentes :

– $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On peut alors choisir pour base les deux éléments $\{1, i\}$: tout nombre complexe peut en effet s'écrire $z = \alpha + i\beta$ où les coefficients α et β appartiennent à $K = \mathbb{R}$. Dans ce cas $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2.
– $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On peut alors choisir pour base l'élément $\{1\}$: tout nombre complexe peut en effet se décomposer en $z = z \times 1$ où le coefficient z appartient à $K = \mathbb{C}$. Dans ce cas $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 1.

Proposition I.2.7. *Soit E un espace vectoriel de dimension n ($n > 0$),*

1. *toute famille libre de n vecteurs est une base,*
2. *toute famille génératrice de n vecteurs est une base,*
3. *toute famille de (strictement)plus de n vecteurs est liée,*
4. *toute famille de (strictement) moins de n vecteurs ne peut être génératrice.*

Démonstration –

1. D'après le théorème I.2.3 on peut compléter cette famille $\mathcal{L}$ de façon à obtenir $\mathcal{B}$ une base de E. Puisque la dimension de E est n, cette base $\mathcal{B}$ a nécessairement n vecteurs. Donc $\mathcal{L} = \mathcal{B}$. Donc $\mathcal{L}$ est une base de E.
2. Puisque $n > 0$, il existe au moins un vecteur non nul dans la famille génératrice $\mathcal{G}$, notons $\vec{x}$ ce vecteur et $\mathcal{L} = \{\vec{x}\}$ la famille libre contenant ce seul vecteur. On a donc $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ D'après le théorème I.2.1, il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$. Cette base $\mathcal{B}$ a nécessairement n vecteurs. Donc $\mathcal{G} = \mathcal{B}$. Donc $\mathcal{G}$ est une base de E.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

3. D'après le théorème I.2.3 si cette famille était libre, on pourrait la compléter en une base qui aurait donc nécessairement plus de n éléments, ce qui contredit le théorème I.2.4.
4. D'après le théorème I.2.1, si cette famille était génératrice on pourrait en extraire une base qui aurait donc nécessairement moins de n éléments, ce qui contredit le théorème I.2.4.

Proposition I.2.8. *Soit E un espace vectoriel de dimension n, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors*

1. $\dim(F) \leq \dim(E)$,
2. $\dim(F) = \dim(E) \Leftrightarrow E = F$,
3. $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$
4. $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$
5. $E = F \oplus G \Leftrightarrow \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ *et* $F \cap G = \{\vec{0}\}$
6. $E = F \oplus G \Leftrightarrow \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ *et* $E = F + G$

Démonstration –

1. Soit $\mathcal{B}$ une base de F, alors c'est une famille libre de E et on peut la compléter pour obtenir une base de E, d'où $\dim(F) \leq \dim(E)$.
2. Dans ce point, il suffit de démontrer que E est inclus dans F.
   Soit $n = \dim E = \dim F$. Soit $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, ..., \vec{f_n}\}$ une base de F, cette famille est donc libre. De plus les vecteurs $\vec{f_i}$ appartiennent à F donc à E. Cette famille libre de n vecteurs est donc une base de E. Donc tout vecteur de E s'écrit comme une combinaison linéaire des $\vec{f_i}$, donc appartient à F.

3. La démonstration est faite dans le document attaché.
4. Si F et G sont en somme directe, alors $F \cap G = \{\vec{0}\}$, donc dim $F \cap G = 0$, donc on obtient le résultat en utilisant le point 3.
5. D'après le point 4,

$$E = F \oplus G \Rightarrow \text{dim } (E) = \text{dim } F \oplus G = \text{dim } (F) + \text{dim } (G) \text{ et } F \cap G = \{\vec{0}\}.$$

   Réciproquement, si $F \cap G = \{\vec{0}\}$, F et G sont en somme directe et l'on a $F \oplus G \subset E$.
   Mais d'après le point 4 dim $(F \oplus G) =$ dim $(F) +$ dim $(G) =$ dim (E).
   Donc d'après 2, on a $E = F \oplus G$
6. $E = F \oplus G \Rightarrow$ dim $(E) =$ dim $(F \oplus G) =$ dim $(F) +$ dim $(G) =$ et $E = F + G$
   Réciproquement,

$$\{E = F + G \text{ et dim } (E) = \text{dim } (F) + \text{dim } (G)\} \Rightarrow \text{dim } F \cap G = 0 \Leftrightarrow F \cap G = \{\vec{0}\}.$$

   On est alors ramené à la réciproque du point 5.

Remarque très importante :
Si dans un espace vectoriel E de dimension n on se fixe une base

$$\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\},$$

alors on peut représenter tout vecteur $\vec{x}$ par ses composantes sur $\mathcal{E}$

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \vec{e}_i$$

et le vecteur $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in K^n$ peut être considéré comme représentant $\vec{x}$. Lorsque la base de E est fixée, il est donc possible de construire une bijection entre E et K^n et d'assimiler le vecteur $\vec{x}$ et le vecteur $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices du chapitre I

Exercice A.1.1 Ch1-Exercice 1

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ représentent les ensembles des nombres entiers naturels, entiers relatifs, rationnels, $+$ et $\times$ sont l'addition et la multiplication.
$(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \times)$, $(\mathbb{Z}, \times)$, $(\mathbb{Z}, -)$, $(\mathbb{Q}, \times)$, $(\mathbb{Q}^+, \times)$,$(\mathbb{Q}^*, \times)$ ont-ils des structures de groupe ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2 Ch1-Exercice 2

Soit $\mathcal{P}_n$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Montrer que $(\mathcal{P}_n,+)$ est un groupe commutatif. Qu'en est-il pour $(\mathcal{P}_n,\times)$?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.3 Ch1-Exercice 3

Dans chacun des cas suivants dire si E est un espace vectoriel sur K (les lois sont l'addition et le produit par un scalaire) :

1. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des fonctions réelles, continues, positives ou nulles.

2. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des fonctions réelles, continues.

3. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des fonctions réelles vérifiant $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

4. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des éléments (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ solutions du système

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 & = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 & = 0 \end{cases}$$

5. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des réels solutions de l'équation $cos x = 0$

6. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des fonctions réelles continues vérifiant $f(\frac{1}{2}) = 0$.

7. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des fonctions réelles continues vérifiant $f(\frac{1}{2}) = 1$.

8. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des fonctions réelles impaires.

Exercice A.1.3
Ch1-Exercice 3

9. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des fonctions réelles paires.

10. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$, vérifiant
$$f(a) = \int_a^b t^3 f(t)dt.$$

11. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$, vérifiant
$$f(a) = \int_a^b t f^3(t)dt.$$

12. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des polynômes réels de degré exactement n.

13. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des polynômes ne comportant pas de terme de degré sept.

14. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des fonctions réelles dérivables vérifiant $f' + f = 0$.

15. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des primitives de la fonction xe^x sur $\mathbb{R}$.

16. K=$\mathbb{C}$, E est l'ensemble des nombres complexes d'argument $\frac{\pi}{4} + k\pi$,($k \in \mathbb{Z}$).

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4 Ch1-Exercice 4

Les ensembles E de l'exercice A.1.3 sont-ils des sous-espaces vectoriels ? Si oui de quel espace vectoriel ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.5 Ch1-Exercice 5

Montrer que :
- E et $\{\vec{0}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E
- Tous les sous-espaces vectoriels contiennent $\{\vec{0}\}$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.6 Ch1-Exercice 6

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E dans les cas suivants :

1. F : ensemble des suites convergentes, E : ensemble des suites réelles.
2. $F = \mathcal{C}^1[0,1]$ ensemble des fonctions continûment différentiables sur $[0,1]$, $E = \mathcal{C}^0[0,1]$.
3. F est l'ensemble des $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ de la forme :
   $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p, 0, 0, \dots, 0), p < n$, $E = \mathbb{R}^n$.
   On remarque que F peut être identifié à $\mathbb{R}^p$ par la bijection suivante : à tout $\vec{x} \in F$ on associe le vecteur $\vec{y} \in \mathbb{R}^p$ par :
   $$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p, 0, 0, \dots, 0),\ \vec{y} = (x_1, x_2, \dots, x_p).$$
4. $F = \{\vec{y} \in E / \vec{y} = \lambda.\vec{x}, \lambda \in K\}$, où $\vec{x}$ est un vecteur non-nul de E (F est dit **droite vectorielle** engendrée par $\vec{x}$).

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.7 Ch1-Exercice 7

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que l'ensemble H défini par
$H = \{\vec{x} \in E | \ \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}, \vec{y} \in F, \vec{z} \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E. H est noté noté $F + G$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.8 Ch1-Exercice 8

Montrer que $F + F = F$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.9 Ch1-Exercice 9

1. F est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(1,0)$, G est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(0,1)$.
   – A-t-on une somme directe ?
   – F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$?
2. F est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(1,1)$, G est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(0,1)$.
   – Montrer que F et G sont en somme directe. On note $H = F \oplus G$.
   – Pour chaque élément $\vec{x} = (x_1, x_2)$ de H donner sa décomposition unique sur F et G, c'est-à-dire trouver le couple $\vec{y} \in F, \vec{z} \in G$ tel que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$.
   – F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.10 Ch1-Exercice 10

1. On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on définit les vecteurs
   $\vec{v}_1 = (1,1)$, $\vec{v}_2 = (0,1)$, $\vec{v}_3 = (2,2)$,$\vec{v}_4 = (1,0)$, $\vec{v}_5 = (2,3)$.
   Pour chacune des familles suivantes dire si elle est liée ou libre :
   $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_5\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_1\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_5\}$.

2. On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on définit les vecteurs
   $\vec{w}_1 = (1,1,1)$, $\vec{w}_2 = (1,0,0)$,$\vec{w}_3 = (1,1,0)$, $\vec{w}_4 = (0,0,1)$, $\vec{w}_5 = (2,2,0)$.
   Pour chacune des familles suivantes dire si elle est liée ou libre :
   $\{\vec{w}_1, \vec{w}_5\}$, $\{\vec{w}_2, \vec{w}_5\}$, $\{\vec{w}_3, \vec{w}_5\}$, $\{\vec{w}_4, \vec{w}_5\}$, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$, $\{\vec{w}_5, \vec{w}_3, \vec{w}_1\}$, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$.

3. Dans un espace vectoriel quelconque montrer que deux vecteurs non nuls sont indépendants si et seulement si ils ne sont pas colinéaires. Donner un exemple prouvant que ce résultat est faux pour trois vecteurs.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.11 Ch1-Exercice 11

Montrer les propriétés suivantes :

1. $S = \{\vec{x}\}$ est liée si et seulement si $\vec{x} = \vec{0}$.
2. Une famille de 2 vecteurs ou plus est liée si et seulement si un (au moins) des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres.
3. Si deux vecteurs d'une famille $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ sont égaux (par exemple $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$) alors la famille S est liée.
4. Si l'un quelconque des vecteurs de S est le vecteur nul, alors S est liée.
5. Si $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ est liée et si $\vec{v}$ est un vecteur quelconque de E, alors $S \cup \{\vec{v}\}$ est liée. Autrement dit, toute sur-famille d'une famille liée est liée.
6. Si $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ est libre, la famille $\{\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ est libre. Autrement dit, toute sous-famille d'une famille libre est libre.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.12 Ch1-Exercice 12

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on définit les vecteurs
$\vec{w}_1 = (1,1,1)$, $\vec{w}_2 = (1,0,0)$, $\vec{w}_3 = (1,1,0)$, $\vec{w}_4 = (0,0,1)$.

1. Trouver la décomposition unique du vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ sous la forme $\vec{x} = \lambda_1\vec{w}_1 + \lambda_2\vec{w}_2 + \lambda_3\vec{w}_3$.
2. Trouver pour ce même vecteur deux décompositions sous la forme $\vec{x} = \lambda_1\vec{w}_1 + \lambda_2\vec{w}_2 + \lambda_3\vec{w}_3 + \lambda_4\vec{w}_4$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.13 Ch1-Exercice 13

1. On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on définit les vecteurs
   $\vec{v}_1 = (1,1)$, $\vec{v}_2 = (0,1)$, $\vec{v}_3 = (2,2)$, $\vec{v}_4 = (1,0)$, $\vec{v}_5 = (2,3)$.
   Pour chacune des familles suivantes dire si elle est génératrice :
   $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_5\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_1\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_5\}$.

2. On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on définit les vecteurs
   $\vec{w}_1 = (1,1,1)$, $\vec{w}_2 = (1,0,0)$,$\vec{w}_3 = (1,1,0)$,$\vec{w}_4 = (0,0,1)$, $\vec{w}_5 = (2,2,0)$.
   Pour chacune des familles suivantes dire si elle est génératrice :
   $\{\vec{w}_1, \vec{w}_5\}$, $\{\vec{w}_2, \vec{w}_5\}$, $\{\vec{w}_3, \vec{w}_5\}$, $\{\vec{w}_4, \vec{w}_5\}$, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$, $\{\vec{w}_5, \vec{w}_3, \vec{w}_1\}$, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$.

3. On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on définit $F = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une famille génératrice de F.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.14 Ch1-Exercice 14

Montrer la propriété suivante : Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice d'un espace vectoriel E et si $\vec{x}$ est un vecteur quelconque de E, alors $\mathcal{G} \cup \{\vec{x}\}$ est encore une famille génératrice de E.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.15 Ch1-Exercice 15

Montrer que $vect < \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n >$ est un sous-espace vectoriel de E.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.16 Ch1-Exercice 16

1. On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on définit les vecteurs
   $\vec{v}_1 = (1,1)$, $\vec{v}_2 = (0,1)$, $\vec{v}_3 = (2,2)$,$\vec{v}_4 = (1,0)$, $\vec{v}_5 = (2,3)$.
   Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^2$:
   $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$, $\{\vec{v}_1,\vec{v}_3\}$, $\{\vec{v}_1,\vec{v}_5\}$, $\{\vec{v}_1,\vec{v}_1\}$, $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$, $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_5\}$.

2. On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on définit les vecteurs
   $\vec{w}_1 = (1,1,1)$, $\vec{w}_2 = (1,0,0)$, $\vec{w}_3 = (1,1,0)$, $\vec{w}_4 = (0,0,1)$, $\vec{w}_5 = (2,2,0)$.
   Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$:
   $\{\vec{w}_1,\vec{w}_5\}$, $\{\vec{w}_2,\vec{w}_5\}$, $\{\vec{w}_3,\vec{w}_5\}$, $\{\vec{w}_4,\vec{w}_5\}$, $\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3\}$, $\{\vec{w}_1,\vec{w}_3,\vec{w}_4\}$, $\{\vec{w}_5,\vec{w}_3,\vec{w}_1\}$, $\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3,\vec{w}_4\}$.

3. On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on définit $F = \{\vec{x} = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 | 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0\}$.
   Déterminer une base de F.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.17 Ch1-Exercice 17

Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ une base de E et (x_1, x_2, x_3) les composantes du vecteur $\vec{x}$ sur $\mathcal{E}$.

1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?
   - $F = \{\vec{x} \in E | x_1 = 1\}$
   - $F = \{\vec{x} \in E | x_1 + x_2^2 = 0\}$
   - $F = \{\vec{x} \in E | x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_2 = 1\}$
   - $F = \{\vec{x} \in E | x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_2 = 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$
   - $F = \{\vec{x} \in E | x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, x_1 - x_3 = 0\}$
   - $F = \{\vec{x} \in E | x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$
   - $F = \{\vec{x} \in E | x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$
2. Lorsque F est un sous-espace vectoriel déterminer une base de F.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.18 Ch1-Exercice 18

1. Dans $\mathbb{R}^3$ on définit les vecteurs
   $\vec{w}_1 = (1,1,1)$, $\vec{w}_2 = (1,0,0)$, $\vec{w}_3 = (0,1,1)$, $\vec{w}_4 = (0,0,1)$,
   la famille $\mathcal{G} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$ est génératrice, la famille $\mathcal{L} = \{\vec{w}_2\}$ est libre. Déterminer une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

2. Dans $\mathbb{R}^3$ on définit les vecteurs $\vec{w}_1 = (1,1,-1)$, $\vec{w}_2 = (1,1,1)$, $\vec{w}_3 = (2,2,3)$. Montrer que la famille $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ est liée et que la famille $\mathcal{L} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ est libre. Déterminer une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.19 Ch1-Exercice 19

Quelles sont les dimensions des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}^n, \mathcal{P}_n$?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.20 Ch1-Exercice 20

Reprendre les exercices A.1.10, A.1.13, A.1.15 et essayer de répondre plus rapidement à certaines questions en utilisant la notion de dimension.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exercices de TD

Exercice A.2.1 TD1-Exercice 1

On appelle *permutation* une application bijective de $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans lui-même. Montrez que l'ensemble des permutations de $\{1, 2, 3\}$ est un groupe non commutatif pour la composition (si u et v sont des permutations, on note $u \circ v(x) = u(v(x))$). Ecrire la table de la loi.

Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.2 TD1-Exercice 2

1. On munit $\mathbb{R}^2$ des lois définies par :
   (i) $(x_1, x_2)\hat{+}(y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ et (ii) $\lambda.(x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

   Obtient-on ainsi un espace vectoriel ?
2. Même question si on remplace (ii) par (ii)' $\lambda.(x_1, x_2) = (\lambda x_1, x_2) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Exercice A.2.3 TD1-Exercice 3

Le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^3$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Répondre à cette question dans les cas suivants :

1. $F_1 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{rl} x_1 + x_2 - x_3 & = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = 0 \end{array} \right\} \right\}$
2. $F_2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_1 - x_2 = 0 \right\}$.
3. $F_3 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$.
4. $F_4 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 \geq 0 \right\}$.
5. $F_5 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \mid x_1 \mid = \mid x_2 \mid \right\}$.
6. $F_6 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 x_2 x_3 = 0 \right\}$.
7. $F_7 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3 \right\}$.

Question 1	Aide 1	Aide 2	Aide 3	
Question 2	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4
Question 3	Aide 1	Aide 2	Aide 3	
Question 4	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4
Question 5	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4
Question 6	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4
Question 7	Aide 1	Aide 2	Aide 3	

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.4 TD1-Exercice 4

Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions numériques de la variable t définies sur l'intervalle $I =]0, 2[$. Le sous-ensemble $\mathcal{H}$ de $\mathcal{F}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ dans les cas suivants :

1. $\mathcal{H}_1$ est l'ensemble des applications de $\mathcal{F}$ s'annulant pour $t = 1$.
2. $\mathcal{H}_2$ est l'ensemble des applications de $\mathcal{F}$ prenant la valeur 1 pour $t = 1$.
3. $\mathcal{H}_3$ est l'ensemble des applications de $\mathcal{F}$ admettant une limite (à droite) finie en 0.
4. $\mathcal{H}_4$ est l'ensemble des applications de $\mathcal{F}$ qui tendent vers l'infini quand t tend vers 0 par valeurs supérieures.
5. $\mathcal{H}_5$ est l'ensemble des applications de $\mathcal{F}$ continues en $t = 1$.
6. $\mathcal{H}_6$ est l'ensemble des applications de $\mathcal{F}$ croissantes sur $]0, 2[$.
7. $\mathcal{H}_7$ est l'ensemble des applications de $\mathcal{F}$ monotones sur $]0, 2[$.

Question 1	Aide 1	Aide 2	Aide 3	
Question 2	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4
Question 3	Aide 1	Aide 2	Aide 3	
Question 4	Aide 1	Aide 2	Aide 3	
Question 5	Aide 1	Aide 2	Aide 3	
Question 6	Aide 1	Aide 2	Aide 3	
Question 7	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.5 TD1-Exercice 5

F et G étant des sous-espaces vectoriels de E, montrer l'équivalence suivante :
$F \cup G$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si F est contenu dans G ou G est contenu dans F.

Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6 TD1-Exercice 6

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{E}$ l'ensemble de ses sous-espaces vectoriels.
On définit sur $\mathcal{E}$ la loi $\tilde{+}$: $\quad A, B \in \mathcal{E}, \quad A\tilde{+}B = \{\vec{x} = \vec{a}\hat{+}\vec{b} \mid \vec{a} \in A, \vec{b} \in B\}$.

1. Montrez que $A\tilde{+}B$ est un sous-espace vectoriel de E, et que c'est le plus petit s.e.v. (au sens de l'inclusion) contenant A et B.
2. Montrez que la loi $\tilde{+}$ de $\mathcal{E}$ est une loi de composition interne.

   Etudiez ses propriétés : associativité, commutativité, neutre, symétrique –ou opposé–, élément idempotent ($\vec{x}$ est idempotent pour la loi $\circ$ si $\vec{x} \circ \vec{x} = \vec{x}$).
3. Montrez que $A\tilde{+}(B \cap C) \subset (A\tilde{+}B) \cap (A\tilde{+}C)$. Y a-t-il distributivité de $\tilde{+}$ sur $\cap$?

Par la suite, $\hat{+}$ et $\tilde{+}$ seront notées classiquement $+$. Evitez les confusions !

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 3 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.7 TD1-Exercice 7

Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur l'intervalle $I = [-a, a]$, ($a > 0$ donné).

1. Montrez que l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions paires définies sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.

   Même question pour l'ensemble $\mathcal{I}$ des fonctions impaires sur I.
2. Déterminez $\mathcal{I} \cap \mathcal{P}$.
3. Montrez que $\mathcal{I} + \mathcal{P} = \mathcal{F}$ (quel est ce $+$?).
4. Montrez que $\mathcal{F} = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$.

Question 1	Aide 1	Aide 2
Question 2	Aide 1	Aide 2
Question 3	Aide 1	Aide 2
Question 4	Aide 1	

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.8 TD1-Exercice 8

Soit E un espace vectoriel réel, soit $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ deux vecteurs de E linéairement indépendants . Les vecteurs $\vec{u}_1 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ et $\vec{u}_2 = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$ sont-ils linéairement indépendants ? Même question avec $\vec{w}_1 = 3\vec{v}_1 - \alpha\vec{v}_2$ et $\vec{w}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ (discuter suivant les valeurs du réel α) ?

Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.9 TD1-Exercice 9

Soit F et G les deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ définis par :

$$F = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + x_2 = 0\right\},\ G = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 = 0\right\}.$$

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ et en donner une base.
2. Montrer que $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.
3. Même question avec :
   $F = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - 2x_2 = 0\right\}$. $G = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1 + 2x_2 = 0\right\}$

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4
Question 3 Aide 1 Aide 2

Exercice A.2.10 TD1-Exercice 10

1. Soit la famille $\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ où
   $\vec{v}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{v}_2 = (-1, 2, 1)$ et $\vec{v}_3 = (3, -4, -3)$.
   $\mathcal{F}$ est-elle libre ?
   Existe-t-il une relation linéaire entre les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$?
   $\mathcal{F}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?
   Soit F le sous-espace engendré par $\mathcal{F}$, donner une base de F.
2. Mêmes questions avec $\mathcal{F}$ la famille de vecteurs définis par
   $\vec{v}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{v}_2 = (-1, 2, 1)$ et $\vec{v}_3 = (0, 2, 2)$.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.11 TD1-Exercice 11

Reprendre les sous-ensembles de l'exercice A.2.3. Lorsque ce sont des sous-espaces vectoriels, en déterminer une base.

Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.12 TD1-Exercice 12

Soit E l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. On définit les polynômes

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad p_0(t) = 1, p_1(t) = t, p_2(t) = t(t-1), p_3(t) = t(t-1)(t-2).$$

1. Montrer qu'ils forment une base de E.
2. Quelles sont, en fonction de a, b, c, d, les coordonnées dans cette base d'un polynôme p de E défini par $p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.13 TD1-Exercice 13

1. (a) Soit $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, est-ce que la famille de vecteurs $\{1, i\}$ est libre ? Est-ce que cette famille est génératrice ?
   (b) Mêmes questions quand $\mathbb{C}$ est considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
2. (a) On définit les vecteurs $(1, i, 0), (0, 1, i), (i, 0, 1)$ de $\mathbb{C}^3$. On veut que cette famille soit une base. Faut-il considérer $\mathbb{C}^3$ comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel
   (b) Exprimer alors les coordonnées du vecteur $(1, 1, 1)$ dans cette base.

Question 1a Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 1b Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Exercice A.2.14 TD1-Exercice 14

Soit F_1 et F_2 les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par $\{(0,-1,1),(1,1,1)\}$ et $\{(1,-1,1),(1,-1,-1)\}$. Trouvez une base et la dimension de F_1, F_2, $F_1 \cap F_2$ et $F_1 + F_2$.

Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.15 TD1-Exercice 15

Soit $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ une base d'un espace vectoriel E.
Soient $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, ..., $\vec{f}_k = \vec{e}_k + \vec{e}_{k+1}$, ..., $\vec{f}_n = \vec{e}_n$.
Montrez que $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n\}$ est aussi une base de E.

Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.16 TD1-Exercice 16

Soit $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ trois vecteurs d'un espace vectoriel E.
Montrer que si vect $< \vec{v}_1, \vec{v}_2 >=$ vect $< \vec{v}_1, \vec{v}_3 >$, alors les 3 vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sont liés.
La réciproque est-elle exacte ? Justifier la réponse.

Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.17 TD1-Exercice 17

1. Montrer qu'une famille de polynômes non nuls, de degrés tous distincts est une famille libre
2. Montrer qu'une famille de polynômes non nuls, de valuations toutes distinctes est une famille libre.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.18 TD1-Exercice 18

1. Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par : $F = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\right\}$. Déterminer un supplémentaire G de F dans $\mathbb{R}^3$
2. Plus généralement, soit E un espace vectoriel de dimension n, soit F un sous-espace vectoriel de E dont on connaît une base $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\}$. Comment peut-on construire un supplémentaire de F ?

Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.19 TD1-Exercice 19

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit A et B deux sous-espaces vectoriels de E.

1. On suppose que $A \cap B = \{\vec{0}\}$. Soit $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p\}$ une base de A et $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_q\}$ une base de B.
   (a) Montrez que $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p\} \cup \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_q\}$ est une base de $A \oplus B$.
   (b) En déduire que $\dim\,(A \oplus B) = \dim\, A + \dim\, B$.
2. On ne suppose plus que $A \cap B = \{\vec{0}\}$.
   On appelle H un supplémentaire dans A de $A \cap B$ (i.e. $A = H \oplus A \cap B$).
   (a) Montrez que $A \cap B$ est bien un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Montrez que $H \cap B = \{\vec{0}\}$.
   (c) Montrez que $A + B = H + B$.
   (d) Déduisez de $A = H \oplus A \cap B$ et de $A + B = H \oplus B$ que

$$\dim\,(A + B) = \dim\, A + \dim\, B - \dim\,(A \cap B).$$

Question 1a Aide 1 Aide 2
Question 1b Aide 1
Question 2a Aide 1
Question 2b Aide 1 Aide 2
Question 2c Aide 1 Aide 2
Question 2d Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe B
Exemples

B.1 Exemples du chapitre I

Exemple B.1.1

Le groupe des rotations dans le plan (de centre O, d'angle θ compris entre 0 et π) est une groupe commutatif pour la loi ($\circ$) de composition des applications :

$$rot_{\theta_1} \circ rot_{\theta_2} = rot_{\theta_2} \circ rot_{\theta_1} (= rot_{\theta_1+\theta_2}).$$

Vous vérifierez que la composition est associative, que $rot_0 = I_d$ est l'élément neutre et que $rot_{-\theta}$ est le symétrique de rot_θ.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.2

1. $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si on le munit de l'addition comme loi interne et du produit d'un nombre réel par un nombre complexe comme loi externe. En effet, si l'on note $a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, un nombre complexe, alors $\mathbb{C}$ est un groupe commutatif pour l'addition des nombres complexes avec $0+i0$ comme élément neutre et $-a-ib$ l'opposé de $a+ib$. Il suffit alors de vérifier les quatre propriétés de la loi externe. Par exemple la première donne :

$$(\lambda\mu).(a+ib) = \lambda\mu a + i\lambda\mu b \quad \text{et} \quad \lambda.(\mu.(a+ib)) = \lambda.(\mu a + i\mu b) = \lambda\mu a + i\lambda\mu b$$

2. $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ si on le munit de l'addition comme loi interne et du produit d'un nombre complexe par un nombre complexe comme loi externe.

3. L'ensemble des suites à valeur dans $\mathbb{C}$ muni de l'addition et du produit par un complexe est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

4. L'ensemble $\mathcal{C}^0[0,1]$ des fonctions réelles continues sur $[0,1]$ muni de l'addition et du produit par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.3

$\mathcal{P}_5$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}_9$ puisque $\mathcal{P}_5$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}_9$ et que $\mathcal{P}_5$ est un espace vectoriel avec les mêmes lois que $\mathcal{P}_9$. De façon plus générale l'ensemble $\mathcal{P}_m$ $(m \leq k)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des polynômes $\mathcal{P}_k$.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.4

1. Si l'on considère K^n comme un espace vectoriel sur K, si on définit :
   $\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \vec{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$
   on pourrait montrer de manière générale que la famille $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ est une base de K^n si l'on se souvient que 1 est l'élément unité et 0 l'élément neutre de K.

2. Dans l'espace vectoriel des polynômes $\mathcal{P}_3$ de degré ≤ 3, les vecteurs sont des polynômes et ne seront donc pas notés avec des flèches. On va utiliser la notation classique (vue en MT21) $1, X, X^2, \ldots$. On rappelle que 1 est le (vecteur) polynôme constant qui à tout t associe 1, X est le polynôme qui à tout t associe t, X^2 est le polynôme qui à tout t associe t^2, ... etc. Alors $\{1, X, X^2, X^3\}$ est une base de $\mathcal{P}_3$. En effet la famille est libre car si l'on a $\lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \lambda_3 X^3 = 0$ alors cette égalité représente un polynôme nul dont tous les coefficients sont donc nuls, soit $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. De même un polynôme quelconque de $\mathcal{P}_3$ s'écrit naturellement comme une combinaison linéaire de $\{1, X, X^2, X^3\}$, qui est donc génératrice. Cette base est appelée **base canonique** de $\mathcal{P}_3$.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe C
Documents

C.1 Documents du chapitre I

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.1 Anneaux et corps

Définition C.1.1. *On appelle* **anneau** *un ensemble A muni de deux lois de composition* *interne notées, en général* "$\hat{+}$" *et* "$\times$" *telles que*
- *(i)* $(A, \hat{+})$ *constitue un groupe commutatif,*
- *(ii) la loi $\times$ est associative,*
- *(iii) la loi $\times$ est distributive par rapport à l'addition :*

$$\forall x, y, z \in A \text{ on a } x \times (y \hat{+} z) = (x \times y) \hat{+} (x \times z) \text{ et } (x \hat{+} y) \times z = (x \times z) \hat{+} (y \times z).$$

- *(iv) la loi $\times$ admet un élément neutre.*

Pour que $(A, \times)$ soit un groupe il faudrait que tout élément admette un inverse pour la loi $\times$ (ceci sera (presque) vrai pour un corps). L'ensemble $(\mathbb{Z}, +, \times)$, l'ensemble des polynômes $(\mathbb{R}(X), +, \times)$ ont une structure d'anneau. Par ailleurs on dit que l'anneau est **commutatif** si la deuxième loi, c'est à dire $\times$, est commutative (on verra par la suite que l'ensemble des matrices carrées constitue un exemple d'anneau non commutatif).

Définition C.1.2. *On appelle* **corps commutatif** *un ensemble K qui, muni de deux lois de composition interne, constitue un anneau commutatif $(K, \hat{+}, \times)$ et qui possède la propriété suivante : si on note e l'élément neutre de la loi $\hat{+}$, alors tout élément de K, sauf précisément e, admet un inverse pour la loi $\times$.*

Les exemples classiques de corps sont : $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$ et le corps des fractions rationnelles à coefficients réels, noté souvent $\mathbb{R}[X]$. Ces exemples correspondent tous à des **corps commutatifs**.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.2 Propriétés caractéristiques des bases

Définition C.1.3. $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ *une famille génératrice de E est dite génératrice minimale si pour tout* k *la famille* $\mathcal{E} \backslash \vec{e}_k$ *(*$\mathcal{E}$ *à laquelle on a enlevé* $\vec{e}_k$*) n'est plus génératrice.*

Théorème C.1.1. *Soit* $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ *une famille d'éléments de E. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{E}$ *est une base,*

(ii) $\mathcal{E}$ *est une famille génératrice minimale,*

Démonstration du théorème C.1.1

(i) $\Rightarrow$ (ii) - Comme $\mathcal{E}$ est une base elle est génératrice. On raisonne par l'absurde : supposons qu'elle ne soit pas minimale, cela veut dire qu'il existe k tel que la famille $\mathcal{E} \setminus \vec{e}_k$ est encore génératrice. Ceci implique que $\vec{e}_k$ est combinaison linéaire des autres éléments de $\mathcal{E}$ ce qui contredit le fait que $\mathcal{E}$ soit libre.

(ii) $\Rightarrow$ (i) - Si $\mathcal{E}$ est une famille génératrice minimale, pour qu'elle soit une base il suffit de montrer qu'elle est libre. On raisonne encore par l'absurde, si elle n'était pas libre l'un des élements, soit $\vec{e}_k$ serait combinaison linéaire des autres, on aurait donc

(1) $$\vec{e}_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i \vec{e}_i$$

Soit alors $\vec{x}$ un élément quelconque de E, comme $\mathcal{E}$ est génératrice, il admet une décomposition

(2) $$\vec{x} = \xi_1 \vec{e}_1 + \xi_2 \vec{e}_2 + \ldots + \xi_n \vec{e}_n$$

soit en utilisant (1)

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$$\vec{x} = \sum_{i \neq k} (\xi_i + \alpha_i \xi_k) \vec{e}_i,$$

ce qui montre que $\mathcal{E} \setminus \vec{e}_k$ est encore génératrice donc $\mathcal{E}$ n'est pas minimale.

Définition C.1.4. *$\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ une famille libre de E est dite libre maximale si pour tout $x \in E$ la famille $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n, \vec{x}\}$ est liée*

Théorème C.1.2. *Soit $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ une famille d'éléments de E. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{E}$ est une base,

(ii) $\mathcal{E}$ est une famille libre maximale

Démonstration du théorème C.1.2

(i) $\Rightarrow$ (ii) - Soit $\vec{x} \notin \mathcal{E}$, alors, comme $\mathcal{E}$ est une base, $\vec{x}$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{E}$ et donc la famille $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n, \vec{x}\}$ est liée ce qui montre qu'on ne peut pas adjoindre à $\mathcal{E}$ un élément de façon à obtenir encore une famille libre.

Réciproque (ii) $\Rightarrow$ (i). Pour tout $\vec{x} \in E$, la famille $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n, \vec{x}\}$ est donc liée et comme $\mathcal{E}$ est libre, il résulte de la proposition I.2.3 que $\vec{x}$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{E}$ ce qui montre que $\mathcal{E}$ est génératrice.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.3 Démonstration du théorème de la base incomplète

Démonstration du théorème I.2.1

Considérons toutes les familles libres $\mathcal{E}$ de E telles que

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{G}.$$

Il en existe au moins une, par exemple $\mathcal{L}$, et il y en a un nombre fini puisque $\mathcal{G}$ est une famille finie. Parmi ce nombre fini de familles, il en existe au moins une qui ne soit incluse dans aucune des autres. Soit $\mathcal{B}$ cette famille. Cela veut dire que pour tout k tel que $\vec{g}_k \notin \mathcal{B}$ alors $\mathcal{B} \cup \vec{g}_k$ est liée. Cela implique (on utilise encore la proposition I.2.3) que tout élément de $\mathcal{G}$ qui n'appartient pas à $\mathcal{B}$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$. Cela veut dire a fortiori que tout élément de $\mathcal{G}$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$, comme $\mathcal{G}$ est génératrice cela entraine que $\mathcal{B}$ est également génératrice, donc c'est une base.

Démonstration du théorème I.2.2

Si E est de type fini il existe une famille génératrice $\mathcal{G} = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_p\}$. L'un au moins des $\vec{g}_i$ est non nul puisque E est différent de $\{\vec{0}\}$ donc $\mathcal{L} = \{\vec{g}_i\}$ est une famille libre. On applique alors le théorème I.2.1 et on obtient le résultat.

Démonstration du théorème I.2.3

Comme E est de type fini il admet une famille génératrice $\mathcal{G}$ et, a fortiori, la famille $\mathcal{G}' = \mathcal{G} \cup \mathcal{L}$ est génératrice. On applique alors le théorème I.2.1 à $\mathcal{L}$ et $\mathcal{G}'$.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.4 Démonstration du théorème de la dimension

Pour démontrer le théorème I.2.4 nous allons commencer par un résultat "technique", qui est une étape incontournable pour aboutir au résultat principal.

Proposition C.1.1. *Soient* $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ p *vecteurs de* E *et* $\mathcal{Y} = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_{p+1}\}$ $p+1$ *vecteurs obtenus par combinaison linéaire des éléments de* $\mathcal{X}$*. Alors la famille* $\mathcal{Y}$ *est liée.*

Démonstration.– On peut tout d'abord remarquer que si un des vecteurs $\vec{y}_i$ est nul la famille $\mathcal{Y}$ est liée. On va donc démontrer ce résultat dans le cas où tous les vecteurs $\vec{y}_i$ sont non nuls. La démonstration se fait par récurrence sur $p = card(\mathcal{X})$.

- Pour $p = 1$ la proposition est évidente puisqu'on a

$$\vec{y}_1 = \alpha_1 \vec{x_1} \text{ et } \vec{y}_2 = \alpha_2 \vec{x_1}$$

avec α_1, α_2 non nuls puisque les $\vec{y}_i$ sont non nuls. D'où

$$\alpha_2 \vec{y}_1 - \alpha_1 \vec{y}_2 = \vec{0}$$

ce qui montre que $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2\}$ est liée.

- Supposons la propriété vraie pour $p-1$ vecteurs $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{p-1}\}$ et montrons la pour p vecteurs. Pour tout $\vec{y}_j \in \mathcal{Y}$ on peut écrire

(3) $$\vec{y}_j = \vec{z}_j + \alpha_j \vec{x}_p, j = 1, 2, \ldots, p+1,$$

où $\vec{z}_j$ est combinaison linéaire de $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{p-1}\}$.

- Si tous les scalaires α_j sont nuls alors, d'après l'hypothèse de récurrence, les $\vec{y}_j$ sont liés car ils sont combinaisons linéaires de $p-1$ vecteurs.

- Sinon soit k tel que $\alpha_k \neq 0$, alors on peut écrire

$$\vec{x}_p = \frac{\vec{y}_k - \vec{z}_k}{\alpha_k}$$

et en reportant dans les autres équations (3) on obtient

$$(4) \qquad \vec{y}_j = \vec{z}_j + \frac{\alpha_j}{\alpha_k}(\vec{y}_k - \vec{z}_k), j = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, p+1.$$

Les relations (4) montrent que l'ensemble des vecteurs $\{\vec{y}_j - \frac{\alpha_j}{\alpha_k}\vec{y}_k\}_{j \neq k}$ constitue un système de p vecteurs combinaisons de $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{p-1}\}$, il est donc lié par hypothèse de récurrence. Il en résulte une relation de dépendance linéaire entre tous les vecteurs de $\mathcal{Y}$.

Démonstration du théorème I.2.4

Comme E est de type fini il admet une base. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases dont on note, respectivement, n et n' le nombre d'éléments. Supposons que $n + 1 \leq n'$ alors on peut, en particulier, exprimer $n + 1$ éléments de $\mathcal{B}'$ en fonction des n éléments de $\mathcal{B}$ et donc, d'après la proposition précédente, $\mathcal{B}'$ est liée, ce qui est impossible. En échangeant les rôles de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ dans ce qui précède, on montre que l'on ne peut pas avoir non plus $n' + 1 \leq n$ et donc $n = n'$.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.5 Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels

On pose $r = \dim\,(F \cap G)$, $p = \dim\,(F)$ et $q = \dim\,(G)$. Nous allons montrer que $\dim\,(F + G) = p + q - r$.
Soit $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_r\}$ une base de l'espace vectoriel $F \cap G$, par le théorème de la base incomplète, on obtient respectivement deux bases de F et de G (car $F \cap G$ est à la fois un sous-espace vectoriel de F et de G) qu'on désigne par $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_r, \vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_p\}$ et $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_r, \vec{v}_{r+1}, \ldots, \vec{v}_q\}$. Il suffit maintenant de montrer que la famille $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_r, \vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_p, \vec{v}_{r+1}, \ldots, \vec{v}_q$ est une base de l'espace vectoriel $F + G$. En effet, pour tout $\vec{x} \in F + G$, il existe $\vec{x}_1 \in F$ et $\vec{x}_2 \in G|\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ avec
$\vec{x}_1 = a_1\vec{e_1} + \ldots + a_p\vec{e_p}$
$\vec{x}_2 = b_1\vec{e_1} + \ldots + b_r\vec{e_r} + b_{r+1}\vec{v_{r+1}} + \ldots + b_q\vec{v_q}$
Par conséquent, $\vec{x} = (a_1+b_1)\vec{e_1}+\ldots+(a_r+b_r)\vec{e_r}+a_{r+1}\vec{e_{r+1}}+\ldots+a_p\vec{e_p}+b_{r+1}\vec{v_{r+1}}+\ldots+b_q\vec{v_q}$
Ce qui montre que la famille S est génératrice de l'espace $F + G$.
Il reste à montrer que S est une famille libre.
Supposons que

$$\alpha_1\vec{e_1} + \ldots + \alpha_r\vec{e_r} + \alpha_{r+1}\vec{e_{r+1}} + \ldots + \alpha_p\vec{e_p} + \beta_{r+1}\vec{v_{r+1}} + \ldots + \beta_q\vec{v_q} = \vec{0} \qquad \text{(C.1.1)}$$

et montrons que $\alpha_i = 0$ et $\beta_i = 0$.
Or, $\alpha_1\vec{e_1} + \ldots + \alpha_r\vec{e_r} \in F \cap G$
$\alpha_{r+1}\vec{e_{r+1}} + \ldots + \alpha_p\vec{e_p} \in F$
Et $\beta_{r+1}\vec{v_{r+1}} + \ldots + \beta_q\vec{v_q} \in G$
Donc, d'après C.1.1, $\beta_{r+1}\vec{v_{r+1}} + \ldots + \beta_q\vec{v_q} \in F$ et par conséquent c'est un élément de $F \cap G$. D'où l'existence de scalaires $c_i|\ \beta_{r+1}\vec{v_{r+1}} + \ldots + \beta_q\vec{v_q} = c_1\vec{e_1} + \ldots + c_r\vec{e_r}$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Ce qui implique que $(\alpha_1 + c_1)\vec{e_1} + \ldots + (\alpha_r + c_r)\vec{e_r} + \alpha_{r+1}\vec{e_{r+1}} + \ldots + \alpha_p\vec{e_p} = 0$ et donc $\alpha_{r+1} = \ldots = \alpha_p = 0$
De l'équation C.1.1, on déduit que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$ et $\beta_{r+1} = \ldots = \beta_q = 0$

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Solution de l'exercice A.1.1

$(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{N},\times)$, $(\mathbb{Z},\times)$: non car pas de symétrique.
$(\mathbb{Z},-)$: non car $-$ pas associative.
$(\mathbb{Q},\times)$, $(\mathbb{Q}^+,\times)$: non car 0 n'a pas de symétrique.
Mais $(\mathbb{Q}^*,\times)$ oui.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.2

$(\mathcal{P}_n, +)$ est un groupe car la loi est de composition interne, associative, le polynôme nul est élément neutre, $(-p)$ est le polynôme symétrique de p.
$(\mathcal{P}_n, \times)$ n'est pas un groupe car la loi n'est pas de composition interne.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.3

Voir le corrigé avec l'exercice A.1.4.

Retour à l'exercice ▲

1. non, si $\lambda \in \mathbb{R}^-$, $\lambda f \notin E$.
2. oui, sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions réelles.
3. oui, sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions réelles.
4. oui, sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et plus précisément de $vect < (\frac{10}{7}, \frac{13}{7}, 1)$> (voir la notion de sous-espace vectoriel engendré).
5. non, par exemple $\frac{\pi}{2} \in E$, $\frac{3\pi}{2} \in E$ mais $2\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \notin E$.
6. oui, sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions réelles.
7. non, $+$ n'est pas une loi de composition interne.
8. oui, sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions réelles.
9. oui, sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions réelles.
10. oui, sous-espace vectoriel des fonctions continues.
11. non, $+$ n'est pas une loi de composition interne, par exemple $(f+g)^3 \neq f^3 + g^3$.
12. non, $+$ n'est pas une loi de composition interne, par exemple $t^n + (-t^n + 1) \notin P_n$.
13. oui, sous-espace vectoriel de l'ensemble des polynômes.
14. oui, sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions réelles.
15. non, $+$ n'est pas une loi de composition interne.
16. non, $E = \{z \in \mathbb{C}, z = a + ia, a \in \mathbb{R}\}$, si on a $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda = i$ par exemple, alors $\lambda z = ia - a \notin E$.
    Par contre si on considère $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ alors E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$, on montre en effet facilement que si $z_1, z_2 \in E, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, alors $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \in E$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.5

Evident, il suffit de vérifier les propriétés caractéristiques d'un sous-espace vectoriel.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.6

On vérifie que $F \neq \emptyset$ et que F est stable.
Pour $4)$ dans le cas particulier $\vec{x} = \vec{0}, F = \{\vec{0}\}$, c'est bien sûr un sous-espace vectoriel mais ce n'est pas une droite vectorielle.

Retour à l'exercice ▲

H est non vide puisque $0 = 0 + 0$ appartient à H.
On montre que H est stable, en effet si $\vec{x}_1 \in H, \vec{x}_2 \in H$, on a $\vec{x}_1 = \vec{y}_1 + \vec{z}_1, \vec{x}_2 = \vec{y}_2 + \vec{z}_2$ donc $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) + (\vec{z}_1 + \vec{z}_2) \in H$. On a utilisé l'associativité et la commutativité de la loi $+$ et la stabilité des sous-espaces vectoriels F et G. On effectue un raisonnement similaire avec la loi externe.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.8

Si $\vec{x} \in F$, on peut écrire $\vec{x} = \vec{x} + \vec{0}$ donc $\vec{x} \in F + F$. On a donc démontré que : $F \subset F + F$.
Réciproquement si $\vec{x} \in F + F, \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ donc $\vec{x} \in F$ ce qui démontre que $F + F \subset F$.
On a donc $F = F + F$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.9

1. – somme directe car $F \bigcap G = \{\vec{0}\}$
   – F et G supplémentaires.
2. – $\vec{x} \in F \bigcap G \iff \vec{x} = (\alpha, \alpha) = (0, \beta) \iff \alpha = \beta = 0 \iff \vec{x} = 0$. Donc F et G sont en somme directe. On notera donc la somme $F \oplus G$.
   – Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, alors $\vec{x} = (x_1, x_2) = (x_1, x_1 + (x_2 - x_1)) = (x_1, x_1) + (0, x_2 - x_1)$.
   Or $(x_1, x_1) \in F, (0, x_2 - x_1) \in G$, on vient donc de démontrer que $\mathbb{R}^2 \subset F \oplus G$.
   – Bien sûr on avait que $F \oplus G \subset \mathbb{R}^2$.
   On a donc $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$, donc F et G sont supplémentaires.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.10

1. – $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 = (\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2 = (0,0) \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ donc la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est libre.
   – $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_3\vec{v}_3 = (\lambda_1 + 2\lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_3 = (0,0)$ est possible avec $\lambda_1 = -2, \lambda_3 = 1$ donc la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$ est liée.
   – On montre de même que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_5\}$est libre.
   – $\{\vec{v}_1, \vec{v}_1\}$ est bien sûr liée puisque $\vec{v}_1 - \vec{v}_1 = \vec{0}$!
   – $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 = (0,0)$ avec par exemple : $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$ donc la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est liée, ce résultat plus général sera démontré plus loin. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
   – $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_5\}$ est liée (on peut choisir par exemple $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, \lambda_5 = 1$).
2. – $\{\vec{w}_1, \vec{w}_5\}$ est libre, $\{\vec{w}_2, \vec{w}_5\}$ est libre, $\{\vec{w}_3, \vec{w}_5\}$ est liée,$\{\vec{w}_4, \vec{w}_5\}$ est libre, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ est libre.
   – $\{\vec{w}_1, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$ est liée (prendre par exemple ($\lambda_1 = 1, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = -1$).
   – $\{\vec{w}_1, \vec{w}_3, \vec{w}_5\}$ est liée, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_3, \vec{w}_4, \vec{w}_2\}$ est liée : ce sont des sur-familles de familles liées.
3. On montre que $\{\vec{z}_1, \vec{z}_2\}$ liée$\Longleftrightarrow$ $\vec{z}_1, \vec{z}_2$ sont colinéaires. Le résultat est faux avec 3 vecteurs, en effet la famille $\{\vec{w}_1, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$ est liée et les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Retour à l'exercice ▲

1. Raisonnons par double implication : soit $S = \{\vec{0}\}$, on sait d'après la propriété de la loi externe que $1\vec{0} = \vec{0}$, donc il existe bien un coefficient non nul $\lambda = 1$ tel que $\lambda\vec{0} = \vec{0}$.

   Réciproquement : si $S = \{\vec{x}\}$ est liée, alors il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda\vec{x} = 0$ donc d'après la proposition I.1.2 $\vec{x} = \vec{0}$.

2. Raisonnons par double implication : Si la famille $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ est liée, alors il existe des coefficients non tous nuls $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ tels que $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_p\vec{v}_p = \vec{0}$, supposons que $\lambda_k \neq 0$, alors $\lambda_k\vec{v}_k = -\lambda_1\vec{v}_1 - \lambda_2\vec{v}_2 - \ldots - \lambda_{k-1}\vec{v}_{k-1} - \lambda_{k+1}\vec{v}_{k+1} - \ldots - \lambda_p\vec{v}_p$, il suffit alors de diviser par λ_k qui est non nul pour obtenir le résultat.

   Réciproquement, s'il existe un vecteur combinaison linéaire des autres, par exemple $\vec{v}_k$, alors $\vec{v}_k = a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_{k-1}\vec{v}_{k-1} + a_{k+1}\vec{v}_{k+1} + \ldots + a_p\vec{v}_p$, donc $a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_{k-1}\vec{v}_{k-1} - \vec{v}_k + a_{k+1}\vec{v}_{k+1} + \ldots + a_p\vec{v}_p = \vec{0}$. On a donc trouvé une combinaison linéaire nulle avec des coefficients non tous nuls ($\lambda_k = -1$), ce qui prouve que la famille est liée.

3. $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 + \ldots + 0\vec{v}_p = \vec{0}$, $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1)$: la famille est liée.

4. Si $\vec{v}_1 = \vec{0}$ on a $1\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \ldots + 0\vec{v}_p = \vec{0}$, $(\lambda_1 = 1)$: la famille est liée.

5. Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ est liée,

   alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ non tous nuls tels que $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_p\vec{v}_p = \vec{0}$

   on a donc $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_p\vec{v}_p + 0\vec{v} = \vec{0}$, la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p, \vec{v}\}$ est donc liée.

6. si $\{\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ était liée alors $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ serait liée car sur-famille, ce n'est pas le cas donc $\{\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ est libre : toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.12

1. On a $\left\{\begin{array}{rcccc} x_1 & = & \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 \\ x_2 & = & \lambda_1 & & +\lambda_3 \\ x_3 & = & \lambda_1 & & \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & x_3 \\ \lambda_2 & = & x_1 - x_2 \\ \lambda_3 & = & x_2 - x_3 \end{array}\right.$
2. On a par exemple $\vec{x} = x_3\vec{w}_1 + (x_1 - x_2)\vec{w}_2 + (x_2 - x_3)\vec{w}_3 + 0\vec{w}_4 = \frac{x_3}{2}\vec{w}_1 + (x_1 - x_2)\vec{w}_2 + (x_2 - \frac{x_3}{2})\vec{w}_3 + \frac{x_3}{2}\vec{w}_4$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.13

1. Si $\vec{x} = (x_1, x_2)$, on peut écrire :
   - $\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + (x_2 - x_1)\vec{v}_2$ donc $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est génératrice.
   - $\vec{x} = (3x_1 - 2x_2)\vec{v}_1 + (x_2 - x_1)\vec{v}_5$ donc $\{\vec{v}_1, \vec{v}_5\}$ est génératrice.
   - $\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + (x_2 - x_1)\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$ donc $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est génératrice.
   - $\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + (x_2 - x_1)\vec{v}_2 + 0\vec{v}_5$ donc $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_5\}$ est génératrice.
   - Bien sûr $\{\vec{v}_1, \vec{v}_1\}$ n'est pas génératrice.
2. - $\{\vec{w}_1, \vec{w}_5\}, \{\vec{w}_2, \vec{w}_5\}, \{\vec{w}_3, \vec{w}_5\}, \{\vec{w}_4, \vec{w}_5\}$ ne sont pas génératrices.
   - $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ est génératrice.
   - $\{\vec{w}_1, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_3, \vec{w}_5\}$ ne sont pas génératrices.
   - $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$ est génératrice. On va montrer le résultat plus général suivant : toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.14

Si on note $\mathcal{G} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\}$, alors $\forall \vec{y} \in E$ on a $\vec{y} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \ldots + \lambda_p \vec{e}_p$.
Donc $\vec{y} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \ldots + \lambda_p \vec{e}_p + 0\vec{x}$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.15

$$F = \textbf{vect} < \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n > \Longrightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 \in F \text{ donc } F \text{ n'est pas vide} \\ F \text{ est stable} \end{cases} \quad F \text{ est donc un sous-espace vectoriel.}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.16

1. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}, \{\vec{v}_1, \vec{v}_5\}$ sont des bases
   $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_1\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_5\}$ ne sont pas des bases car elles ne sont pas libres.
2. $\{\vec{w}_1, \vec{w}_5\}, \{\vec{w}_2, \vec{w}_5\}, \{\vec{w}_3, \vec{w}_5\}, \{\vec{w}_4, \vec{w}_5\}$ ne sont pas des bases car pas génératrices.
   $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ est une base.
   $\{\vec{w}_1, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_3, \vec{w}_5\}$, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$ ne sont pas des bases car pas libres.
3. $\vec{x} \in F \iff x_2 = -2x_1 - 3x_3 \iff \vec{x} = (x_1, -2x_1 - 3x_3, x_3) = x_1(1, -2, 0) + x_3(0, -3, 1)$. Donc les vecteurs de F, $\vec{v}_1 = (1, -2, 0), \vec{v}_2 = (0, -3, 1)$ forment une famille génératrice de F. D'autre part on montre facilement que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est libre : c'est donc une base de F.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.17

$F=\{\vec{x}\in E, x_1=1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel, ($\vec{0}\notin F$).
$F=\{\vec{x}\in E, x_1+x_2^2=0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel.
$F=\{\vec{x}\in E, x_1+x_2=0, x_1-x_2=1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel.
$F=\{\vec{x}\in E, x_1+x_2=0, x_1-x_2=0, x_1+2x_2+3x_3=0\}$ est un sous-espace vectoriel , on a $F=\{\vec{0}\}$.

$$F=\{\vec{x}\in E, x_1+x_2+x_3=0, x_1+2x_2+3x_3=0, x_1-x_3=0\}=\{\vec{x}\in E, x_1=x_3, x_2=-2x_3\}=$$
$$\{\vec{x}\in E, \vec{x}=x_3(\vec{e}_1-2\vec{e}_2+\vec{e}_3)=vect<(\vec{e}_1-2\vec{e}_2+\vec{e}_3)>:$$

F est un sous-espace vectoriel, c'est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e}_1-2\vec{e}_2+\vec{e}_3$

$$F=\{\vec{x}\in E, x_1+x_2=0, x_1-x_2+x_3=0\}=\{\vec{x}\in E, x_1=-x_2, x_3=2x_2\}=$$
$$\{\vec{x}\in E, \vec{x}=x_2(-\vec{e}_1+\vec{e}_2+2\vec{e}_3)=vect<(-\vec{e}_1+\vec{e}_2+2\vec{e}_3)>:$$

F est un sous-espace vectoriel, c'est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(-\vec{e}_1+\vec{e}_2+2\vec{e}_3)$

$$F=\{\vec{x}\in E, x_1+2x_2+x_3=0\}=\{\vec{x}\in E, x_1=-2x_2-x_3\}=$$
$$\{\vec{x}\in E, \vec{x}=x_2(-2\vec{e}_1+\vec{e}_2)+x_3(-\vec{e}_1+\vec{e}_3)=vect<(-2\vec{e}_1+\vec{e}_2),(-\vec{e}_1+\vec{e}_3)>:$$

F est un sous-espace vectoriel, c'est le plan vectoriel engendrée par les vecteurs $(-2\vec{e}_1+\vec{e}_2),(-\vec{e}_1+\vec{e}_3)$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.18

1. $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_4\}, \{\vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$ répondent à la question.
2. $\frac{1}{2}\vec{w}_1 - \frac{5}{2}\vec{w}_2 + \vec{w}_3 = \vec{0}$: donc $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ est liée. On montre facilement que $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ est libre. On peut définir $\vec{w}_4 = (1, 0, 0)$ par exemple alors $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_4\}$ est libre et est génératrice donc c'est une base.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.19

$\mathbb{R}^n$ est de dimension n, $\mathcal{P}_n$ est de dimension $n+1$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.20

Les propriétés de la dimension auraient permis de répondre beaucoup plus rapidement à certaines questions des exercices A.1.10, A.1.13, A.1.15. Par exemple dans ces exercices la famille $\{\vec{y}_1, \vec{y}_3, \vec{y}_4, \vec{y}_2\}$ est forcément liée puisque $\mathbb{R}^3$ a pour dimension 3, donc il n'existe pas de famille libre ayant strictement plus de 3 éléments. De même la famille $\{\vec{y}_1, \vec{y}_5\}$ ne peut être génératrice puisque dans un espace vectoriel de dimension 3 toute famille génératrice a au moins 3 éléments. De même dans $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2, la famille $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ ne peut être une base puisque toute base d'un espace vectoriel de dimension 2 possède exactement 2 éléments.Reprenez ces exercices et voyez s'il était possible de conclure plus rapidement.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Groupe". Utiliser la table pour démontrer que la composition est une loi interne, ...

Retour à l'exercice ▲

Montrer que, par définition, la loi est interne et associative et utiliser la table pour vérifier les autres propriétés.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Exercice A.2.1

- *associativité* :

$$(u \circ v) \circ w(x) = u \circ v(w(x)) = u(v(w(x))) = u(v \circ w(x)) = u \circ (v \circ w)(x),$$

- l'*élément neutre* est l'identité i ($i(1) = 1$, $i(2) = 2$, $i(3) = 3$),
- l'*inverse* de la permutation p ($p(1) = 1$, $p(2) = 3$, $p(3) = 2$) est elle-même (le vérifier), l'*inverse* de la permutation q ($q(1) = 2$, $q(2) = 3$,$q(3) = 1$) est la permutation r ($r(1) = 3$, $r(2) = 1$,$r(3) = 2$) (le vérifier) etc.
- la loi est non commutative (chercher dans la table deux permutations telles que $p \circ q \neq q \circ p$).

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Espace vectoriel". Vérifier les propriétés de la définition.

Retour à l'exercice ▲

La loi $\hat{+}$ est-elle interne ? Montrer que $(\mathbb{R}^2, \hat{+})$ est un groupe commutatif. Vérifier, dans l'ordre que vous voulez, les propriétés de la loi externe.

Retour à l'exercice ▲

La propriété

$$1.(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$$

est-elle vérifiée ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 1, Exercice A.2.2

Les lois définies ne font pas de $\mathbb{R}^2$ un espace vectoriel.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.2

Voir le paragraphe "Espace vectoriel". Vérifier les propriétés de la définition.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.2

La loi $\hat{+}$ est-elle interne ? Montrer que $(\mathbb{R}^2, \hat{+})$ est un groupe commutatif. Vérifier, dans l'ordre que vous voulez, les propriétés de la loi externe.

Retour à l'exercice ▲

La propriété $(\lambda + \mu).(x_1, x_2) = \lambda.(x_1, x_2) + \mu.(x_1, x_2)$ **est-elle vérifiée ?**

Retour à l'exercice ▲

Les lois définies ne font pas de $\mathbb{R}^2$ un espace vectoriel.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Sous-espace vectoriel".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.3

Si l'on pense que l'ensemble est un sous-espace vectoriel, il faut montrer qu'il est non vide, puis que la proposition I.1.4 est vérifiée pour tous les $\vec{x}, \vec{y}, \lambda, \mu$.
Si l'on pense que l'ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel, il faut montrer qu'il est vide ou il faut trouver $\vec{x}, \vec{y} \in F, \lambda, \mu \in K$ tels que $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \notin F$.

Retour à l'exercice ▲

$F_1 \neq \emptyset$, pourquoi ?

$$(x_1, x_2, x_3) \in F_1, (y_1, y_2, y_3) \in F_1 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_2 - x_3 = 0, & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ y_1 + y_2 - y_3 = 0, & 2y_1 + 3y_2 + y_3 = 0 \end{array} \right.$$

alors

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) + \mu(y_1, y_2, y_3) = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3) \in F_1$$

car

$$(\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) - (\lambda x_3 + \mu y_3) = \lambda(x_1 + x_2 - x_3) + \mu(y_1 + y_2 - y_3) = 0,$$

vérifier la deuxième relation de la même manière.
Donc F_1 est un sous-espace vectoriel, il n'était pas nécessaire de résoudre le système pour conclure.
Des ensembles comme F_1, on en retrouvera dans cet exercice et surtout dans les chapitres suivants quand on parlera des noyaux.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Sous-espace vectoriel".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.3

Si l'on pense que l'ensemble est un sous-espace vectoriel, il faut montrer qu'il est non vide, puis que la proposition I.1.4 est vérifiée pour tous les $\vec{x}, \vec{y}, \lambda, \mu$.
Si l'on pense que l'ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel, il faut montrer qu'il est vide ou il faut trouver $\vec{x}, \vec{y} \in F, \lambda, \mu \in K$ tels que $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \notin F$.

Retour à l'exercice ▲

Si $\lambda \neq 1$ **on a :**

$$(\lambda x_1)^2 \neq \lambda x_1^2.$$

Retour à l'exercice ▲

F_2 n'est pas un sous-espace vectoriel car $(1, 2, 0) \in F_2$ mais $2.(1, 2, 0) \notin F_2$ (le vérifier).

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Sous-espace vectoriel".

Retour à l'exercice ▲

Si l'on pense que l'ensemble est un sous-espace vectoriel, il faut montrer qu'il est non vide, puis que la proposition I.1.4 est vérifiée pour tous les $\vec{x}, \vec{y}, \lambda, \mu$.
Si l'on pense que l'ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel, il faut montrer qu'il est vide ou il faut trouver $\vec{x}, \vec{y} \in F, \lambda, \mu \in K$ tels que $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \notin F$.

Retour à l'exercice ▲

On montre que F_3 est un sous-espace vectoriel (revoir la démarche adoptée pour F_1).

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Sous-espace vectoriel".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 4, Exercice A.2.3

Si l'on pense que l'ensemble est un sous-espace vectoriel, il faut montrer qu'il est non vide, puis que la proposition I.1.4 est vérifiée pour tous les $\vec{x}, \vec{y}, \lambda, \mu$.
Si l'on pense que l'ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel, il faut montrer qu'il est vide ou il faut trouver $\vec{x}, \vec{y} \in F, \lambda, \mu \in K$ tels que $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \notin F$.

Retour à l'exercice ▲

Si un nombre réel a est positif, λa n'est pas toujours positif.

Retour à l'exercice ▲

$$\vec{x} = (1, 1, 1) \in F_4, -2.\vec{x} \notin F_4$$

Donc F_4 n'est pas un sous-espace vectoriel.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Sous-espace vectoriel".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 5, Exercice A.2.3

Si l'on pense que l'ensemble est un sous-espace vectoriel, il faut montrer qu'il est non vide, puis que la proposition I.1.4 est vérifiée pour tous les $\vec{x}, \vec{y}, \lambda, \mu$.
Si l'on pense que l'ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel, il faut montrer qu'il est vide ou il faut trouver $\vec{x}, \vec{y} \in F, \lambda, \mu \in K$ tels que $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \notin F$.

Retour à l'exercice ▲

Si a et b sont deux nombres réels, on peut avoir

$$|a+b| \neq |a| + |b|$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 5, Exercice A.2.3

$$\vec{x} = (1, -1, 0) \in F_5, \vec{y} = (2, 2, 0) \in F_5, \vec{x} + \vec{y} \notin F_5.$$

Le vérifier et en déduire que F_5 n'est pas un sous-espace vectoriel.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Sous-espace vectoriel".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 6, Exercice A.2.3

Si l'on pense que l'ensemble est un sous-espace vectoriel, il faut montrer qu'il est non vide, puis que la proposition I.1.4 est vérifiée pour tous les $\vec{x}, \vec{y}, \lambda, \mu$.
Si l'on pense que l'ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel, il faut montrer qu'il est vide ou il faut trouver $\vec{x}, \vec{y} \in F, \lambda, \mu \in K$ tels que $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \notin F$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 6, Exercice A.2.3

En général on a :

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \neq x_1x_2 + y_1y_2.$$

Retour à l'exercice ▲

$$\vec{x} = (1,0,1) \in F_6, \vec{y} = (0,1,1) \in F_6, \vec{x} + \vec{y} \notin F_6.$$

Le vérifier et en déduire que F_6 n'est pas un sous-espace vectoriel.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Sous-espace vectoriel".

Retour à l'exercice ▲

Si l'on pense que l'ensemble est un sous-espace vectoriel, il faut montrer qu'il est non vide, puis que la proposition I.1.4 est vérifiée pour tous les $\vec{x}, \vec{y}, \lambda, \mu$.
Si l'on pense que l'ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel, il faut montrer qu'il est vide ou il faut trouver $\vec{x}, \vec{y} \in F, \lambda, \mu \in K$ tels que $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \notin F$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 7, Exercice A.2.3

Là encore , F_7 s'étudie comme F_1, on pourrait même le définir de façon tout à fait similaire par

$$x_1 - x_2 = 0, x_2 - x_3 = 0$$

et bien sûr on montre de façon similaire que F_7 est un sous-espace vectoriel.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Sous-espace vectoriel" et plus particulièrement la proposition I.1.4.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.4

On remarque tout d'abord que si f et g sont définies sur $I =]0,2[$, $f+g$, λf sont définies sur $I =]0,2[$.
On rappelle de plus que :

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a),$$

$$(\lambda f)(a) = \lambda(f(a)).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1, Exercice A.2.4

$$\left\{ \begin{array}{lll} \left\{ \begin{array}{lll} f \in \mathcal{H}_1 & \Rightarrow & f(1) = 0 \\ g \in \mathcal{H}_1 & \Rightarrow & g(1) = 0 \end{array} \right. & \Rightarrow f(1) + g(1) = 0 & \Rightarrow f + g \in \mathcal{H}_1 \\ f \in \mathcal{H}_1 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 0 & \Rightarrow (\lambda f)(1) = \lambda f(1) = 0 & \Rightarrow \lambda f \in \mathcal{H}_1 \end{array} \right.$$

Donc $\mathcal{H}_1$ est un sous-espace vectoriel

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Sous-espace vectoriel" et plus particulièrement la proposition I.1.4.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.4

On remarque tout d'abord que si f et g sont définies sur $I =]0,2[$, $f+g$, λf sont définies sur $I =]0,2[$
On rappelle de plus que :

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a),$$

$$(\lambda f)(a) = \lambda(f(a)).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.4

$$1 + 1 \neq 1.$$

Retour à l'exercice ▲

Si on choisit

$$f(t) = t, g(t) = 1$$

$f \in \mathcal{H}_2, g \in \mathcal{H}_2$.
Mais

$$(f + g)(1) = 1 + 1$$

donc $f + g \notin \mathcal{H}_2$, donc $\mathcal{H}_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Sous-espace vectoriel" proposition I.1.4.

Retour à l'exercice ▲

Revoir les résultats sur les limites de $f + g$ et de λf.

Retour à l'exercice ▲

Si f admet une limite ℓ, si g admet une limite ℓ', alors $f+g$ admet une limite $\ell+\ell'$ et λf admet une limite $\lambda\ell$.
Donc $\mathcal{H}_3$ est un sous-espace vectoriel

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Sous-espace vectoriel" et plus particulièrement la proposition I.1.4.

Retour à l'exercice ▲

Si deux fonctions tendent vers l'infini quand t tend vers 0, est-il possible de conclure quant à la limite de leur somme ?

Retour à l'exercice ▲

On définit
$$f(t) = \frac{1}{t}, g(t) = -\frac{1}{t}$$
$f, g \in \mathcal{H}_4$ mais $f + g = 0$, donc $f + g \notin \mathcal{H}_4$
Donc $\mathcal{H}_4$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Sous-espace vectoriel" et plus particulièrement la proposition I.1.4.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 5, Exercice A.2.4

Revoir les propriétés sur les fonctions continues.

Retour à l'exercice ▲

Si f est continue en $t = 1$, si g est continue en $t = 1$,alors $f + g$ est continue en $t = 1$;
si f est continue en $t = 1$,
alors λf est continue en $t = 1$;
donc $\mathcal{H}_5$ est un sous-espace vectoriel.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 6, Exercice A.2.4

Voir le paragraphe "Sous-espace vectoriel" et plus particulièrement la proposition I.1.4.

Retour à l'exercice ▲

Si f et g sont croissantes, est ce que $f+g$ est croissante ?
Si f est croissante, est-ce que λf est croissante ?

Retour à l'exercice ▲

Si f et g sont croissantes, $f + g$ est croissante : le montrer.
Si f est croissante, λf n'est pas croissante lorsque λ est négatif : le montrer.
Donc $\mathcal{H}_6$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Sous-espace vectoriel" et plus particulièrement la proposition I.1.4.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 7, Exercice A.2.4

Si f et g sont monotones, est-ce que $f + g$ est monotone ?
Si f est monotone, est ce que λf est monotone ?

Retour à l'exercice ▲

Si f et g sont monotones, $f+g$ n'est pas toujours monotone : trouver un contre-exemple.
Si f est monotone, λf est monotone : le montrer.

Retour à l'exercice ▲

On peut choisir les deux fonctions monotones sur $]0,2[$ définies par :

$$f(t) = t^2, g(t) = -t$$

Vérifier que $f+g$ n'est pas monotone sur $]0,2[$. Donc $\mathcal{H}_7$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.5

Appelons A la proposition " $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel".
Appelons B la proposition "$F \subset G$ ou $G \subset F$".
Une des implications est évidente.

Retour à l'exercice ▲

Si $F \subset G, F \cup G = G$, donc $F \cup G = G$ est un sous-espace vectoriel.
On peut faire un raisonnement similaire dans le cas $G \subset F$,
on a donc

$$B \Rightarrow A.$$

Pour la réciproque, montrer la contraposée

$$\text{non } B \Rightarrow \text{non } A$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Exercice A.2.5

On suppose que non B est vraie c'est-à-dire F n'est pas contenu dans G et G n'est pas contenu dans F, on veut montrer que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Exercice A.2.5

Si F n'est pas contenu dans G et G n'est pas contenu dans F, il est possible de trouver

$$\vec{x} \in F, \vec{x} \notin G, \vec{y} \in G, \vec{y} \notin F$$

On a donc $\vec{x}, \vec{y} \in F \cup G$, montrer qu'il n'est pas possible que $\vec{x} + \vec{y} \in F \cup G$.
Pour cela raisonner par l'absurde.

Retour à l'exercice ▲

On suppose que $\vec{x} + \vec{y} \in F \cup G$,
on a par exemple $\vec{x} + \vec{y} \in F$,
on écrit $\vec{y} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{x}$, on aurait $\vec{y} \in F$ ce qui n'est pas possible .
Un raisonnement similaire montre qu'il n'est pas possible que $\vec{x} + \vec{y} \in G$,
donc il n'est pas possible que $\vec{x} + \vec{y} \in F \cup G$
donc $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Sous-espace vectoriel". La notion de "plus petit sev vérifiant une propriété" signifie que si un autre sev vérifie la propriété il contient forcément celui-là.

Retour à l'exercice ▲

- Utiliser la proposition I.1.4 pour montrer que $A\tilde{+}B$ est un sev de $\mathbf{E}$.
- Montrer que $A \subset A\tilde{+}B$ et $B \subset A\tilde{+}B$, puis montrer que si C est un sev qui contient A et B, alors il contient $A\tilde{+}B$.

Retour à l'exercice ▲

- On montre que $A\tilde{+}B$ est un sous-espace vectoriel.
  - $\vec{0} \in A, \vec{0} \in B$, donc $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \in A\tilde{+}B$, l'ensemble n'est donc pas vide.
  - Soient $\vec{x}_1 = \vec{a}_1 \hat{+} \vec{b}_1$ et $\vec{x}_2 = \vec{a}_2 \hat{+} \vec{b}_2$ avec $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in A$, $\vec{b}_1, \vec{b}_2 \in B$ alors en utilisant la commutativité et l'associativité de la loi $\hat{+}$ on obtient :

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = (\vec{a}_1 \hat{+} \vec{b}_1) \hat{+} (\vec{a}_2 \hat{+} \vec{b}_2) = (\vec{a}_1 \hat{+} \vec{a}_2) \hat{+} (\vec{b}_1 \hat{+} \vec{b}_2).$$

    Or A et B sont des sous-espaces vectoriels, donc $(\vec{a}_1 \hat{+} \vec{a}_2) \in A, (\vec{b}_1 \hat{+} \vec{b}_2) \in B$, donc $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in A\tilde{+}B$.
  - De même en utilisant les propriétés de la loi externe :

$$\lambda \vec{x}_1 = \lambda(\vec{a}_1 \hat{+} \vec{b}_1) = \lambda \vec{a}_1 \hat{+} \lambda \vec{b}_1.$$

    Or A et B sont des sous-espaces vectoriels, donc $\lambda \vec{a}_1 \in A, \lambda \vec{b}_1 \in B$, donc $\lambda \vec{x}_1 \in A\tilde{+}B$.
- $A \subset A\tilde{+}B$, en effet :

$$\vec{x} \in A \Rightarrow \vec{x} = \vec{x} + \vec{0} \Rightarrow \vec{x} \in A\tilde{+}B, \text{ puisque } \vec{x} \in A, \vec{0} \in B.$$

  De même $B \subset A\tilde{+}B$.
- Soit C un sous-espace vectoriel contenant A et B, montrons que $A\tilde{+}B \subset C$.
  Soit $\vec{x} = \vec{a} \hat{+} \vec{b} \in A\tilde{+}B$ or $\vec{a} \in C$ et $\vec{b} \in C$ donc $\vec{x} \in C$ (sev).Donc $A\tilde{+}B \subset C$.
- Donc $A\tilde{+}B$ est le plus petit sev qui contienne A et B.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Groupe".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.6

Puisque si A est un sev de $\mathbf{E}$ et B est en sev de E, alors (question précédente) $A\tilde{+}B$ est en sev de $\mathbf{E}$, alors la loi $\tilde{+}$ est une loi de composition interne de $\mathcal{E}$.
L'associativité provient de l'associativité de $\hat{+}$, mais attention il faut procéder par équivalence puisqu'il s'agit d'égalité d'ensembles !
Chercher le sev "élément neutre" et chercher si un sev peut posséder un "symétrique".

Retour à l'exercice ▲

– l'*associativité* s'écrit :

$$\vec{x} \in (A \tilde{+} B) \tilde{+} C \Leftrightarrow \vec{x} = (\vec{a} \hat{+} \vec{b}) \hat{+} \vec{c} = \vec{a} \hat{+} (\vec{b} \hat{+} \vec{c}) \Leftrightarrow \vec{x} \in A \tilde{+} (B \tilde{+} C),$$

– Il est simple de montrer que la loi est commutative,
– L'*élément neutre* est l'ensemble $O = \{\vec{0}\}$: (le vérifier).
– Etant donné A, on cherche un sous-espace vectoriel B tel que $A \tilde{+} B = O$, si B existait on aurait alors

$$A \subset A \tilde{+} B = O = \{\vec{0}\}.$$

Ceci est impossible si $A \neq \{\vec{0}\}$.
– tout sev est idempotent (le montrer).

Retour à l'exercice ▲

Pour montrer $E \subset F$, choisir $\vec{x} \in E$ et montrer que $\vec{x} \in F$.

Retour à l'exercice ▲

Que signifie distributivité ?

Retour à l'exercice ▲

On montre facilement que :

$$A\tilde{+}(B \cap C) \subset (A\tilde{+}B) \cap (A\tilde{+}C)$$

Retour à l'exercice ▲

On n'arrive pas à montrer que dans le cas général :

$$(A\tilde{+}B) \cap (A\tilde{+}C) \subset A\tilde{+}(B \cap C),$$

donc on cherche un exemple pour lequel cette inclusion n'est pas vérifiée.

Retour à l'exercice ▲

On définit

$$A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2, x_2 = 0\}, B = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2, x_1 = 0\}, C = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2, x_1 = x_2\}$$

Montrer que $A \tilde{+} B = \mathbb{R}^2, A \tilde{+} C = \mathbb{R}^2, B \cap C = \{\vec{0}\}$ conclure que l'inclusion suivante n'est pas vérifiée :

$$(A \tilde{+} B) \cap (A \tilde{+} C) \subset A \tilde{+} (B \cap C)$$

Donc il n'y a pas distributivité.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Sous-espace vectoriel".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.7

Que signifie "f est paire" ?
On suppose f paire et g paire, que vaut $(f+g)(-t)$, $\lambda f(-t)$?

Retour à l'exercice ▲

Que signifie "f est paire" ? Que signifie "f est impaire" ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.7

Montrer que si f est paire et impaire $f(t) = -f(t)$
Conclure que $f = 0$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.7

Si on note f la fonction définie par $f(t) = e^t$,
f_i la fonction définie par $f_i(t) = sht$,
f_p la fonction définie par $f_p(t) = cht$,
on obtient que

$$f = f_i + f_p.$$

Dans ce cas on a donc trouvé une décomposition de f en une somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Revoir les définitions et propriétés du sinus et cosinus hyperboliques.
Inspirez vous de ce cas particulier pour construire f_i et f_p dans le cas d'un f quelconque.

Retour à l'exercice ▲

On définit

$$f_p(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}$$

Vérifier que f_p est paire , construire f_i impaire telle que $f = f_p + f_i$

Retour à l'exercice ▲

Il suffit d'utiliser les deux questions précédentes.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Liée, libre".

Retour à l'exercice ▲

$\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 = \vec{0} \;\Rightarrow\; \alpha_1 = \alpha_2 = 0$?
Utiliser l'indépendance linéaire de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Exercice A.2.8

$\alpha_1(2\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \alpha_2(\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2) = (2\alpha_1 + \alpha_2)\vec{v}_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)\vec{v}_2 = \vec{0}$ et l'indépendance linéaire de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ implique $2\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ et $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$. Finir le calcul ...
Pour les vecteurs $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$, on obtient $3\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ et $-\alpha\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ ce qui ne donne pas toujours $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (discuter en fonction de α).

Retour à l'exercice ▲

Voir les paragraphes "Liée, libre", "Génératrice" et "Base".

Retour à l'exercice ▲

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels en utilisant la proposition I.1.4. Pour trouver une base de F on essaie d'obtenir une famille génératrice de F, puis on montre que cette famille est libre.
Ecrire $\vec{x} = (x_1, x_2) \in F \;\Leftrightarrow\; \vec{x} = (x_1, -2x_1) \;\Leftrightarrow\; \vec{x} = x_1(1, -2)$.
Même calcul pour G.

Retour à l'exercice ▲

$\{(1,-2)\}$ est une base de F puisque c'est une famille libre ($\alpha(1,-2) = (0,0) \Rightarrow \alpha = 0$) et une famille génératrice de F puique tout élément $\vec{x}$ de F s'écrit $\vec{x} = x_1(1,-2)$. Montrer de même que $\{(1,1)\}$ est une base de G.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Supplémentaires".

Retour à l'exercice ▲

Montrer que :
$F + G \subset \mathbb{R}^2$ (trivial),
$\mathbb{R}^2 \subset F + G$ (beaucoup moins trivial : donner la forme générale des éléments de $F + G$),
$F \cap G = \{(0, 0)\}$ (facile).

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.9

– Il faut montrer que tout élément $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^2$ est un élément de $F+G$.
  Il faut donc montrer que :

$$\forall x_1, x_2, \exists \alpha, \beta \text{ tel que } (x_1, x_2) = \alpha(1,-2) + \beta(1,1).$$

– Il faut montrer que :

$$\vec{x} \in F \cap G \Leftrightarrow \vec{x} = (0,0).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 2, Exercice A.2.9

Etant donné $\vec{x} = (x_1, x_2)$ **on trouve :**

$$(x_1, x_2) = \alpha(1, -2) + \beta(1, 1) \textbf{ avec } \alpha = \frac{x_1 - x_2}{3}, \beta = \frac{2x_1 + x_2}{3},$$

$$\vec{x} \in F \cap G \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in F \cap G \;\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$$

Retour à l'exercice ▲

Voir les aides des questions précédentes.

Retour à l'exercice ▲

Une base de F est $\{(2,1)\}$.
Une base de G est $\{(2,-3)\}$.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Sous-espace vectoriel engendré".

Retour à l'exercice ▲

– Etudier la relation $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ et montrer que cela n'implique pas $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.
– Montrer que $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice : pour cela il suffit de trouver des vecteurs $\vec{x}$ qui ne peuvent s'écrire $\vec{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3$.
– Ecrire F à l'aide de la définition I.2.3 et en déduire une base.

Retour à l'exercice ▲

– On a :

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3=0\\ 2\alpha_2-4\alpha_3=0\\ -\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3=0\\ 2\alpha_2-4\alpha_3=0\end{array}\right.$$

On peut choisir par exemple :

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_3=1\\ \alpha_2=2\\ \alpha_1=-1\end{array}\right.$$

ces constantes non nulles vérifient

$$-\vec{v}_1+2\vec{v}_2+\vec{v}_3=\vec{0}$$

– Etant donné $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$, essayer de trouver $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ tels que $\vec{x}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\alpha_3\vec{v}_3$, con clure.
– Utiliser la relation entre les vecteurs pour montrer que, par exemple, $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ est une base de F.

Retour à l'exercice ▲

– la famille n'est pas libre.
– $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$
– Après calculs on voit que si $x_1 \neq -x_3$ il n'est pas possible d'écrire $\vec{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3$.
  Par exemple $(1, 0, 1)$ n'est pas combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.
  La famille n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.
– tout élément de F est combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ par définition de F,
  donc tout élément de F est combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, pourquoi ?
  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est libre
  c'est donc une base de F

Reprenez cet exercice lorsque vous connaîtrez la notion de dimension.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Sous-espace vectoriel engendré".

Retour à l'exercice ▲

Etudier la relation

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \vec{0}$$

$\mathcal{F}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Retour à l'exercice ▲

$\mathcal{F}$ est libre.
$\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$ car :

$$\forall \vec{x}\ \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \textbf{ vérifiant } \vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3.$$

Retour à l'exercice ▲

$\mathcal{F}$ est génératrice de F par définition de F.
$\mathcal{F}$ est libre
donc $\mathcal{F}$ est une base de F.
Ici $F = \mathbb{R}^3$.
Reprenez cet exercice lorsque vous connaîtrez la notion de dimension.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.11

Lorsque l'ensemble est un sous-espace vectoriel, essayer de trouver des vecteurs $\vec{u}, \ldots, \vec{v}$ qui vérifient :

$$\vec{x} \in F \Leftrightarrow \vec{x} = \alpha\vec{u} + \ldots + \beta\vec{v}$$

où les vecteurs $\vec{u}, \ldots, \vec{v}$ formant une famille libre sont à déterminer.

Retour à l'exercice ▲

Après calculs, on obtient :

$$\vec{x} \in F_1 \Leftrightarrow \vec{x} = x_3(4, -3, 1).$$

Faire de même pour F_3 et F_7.

Retour à l'exercice ▲

– F_1 est une droite vectorielle (c'est normal c'est l'intersection de 2 plans) une base (possible) de F_1 est $\{(4, -3, 1)\}$. Vous auriez pu dans ce cas particulier retrouver une base de F_1, c'est à dire un vecteur directeur de la droite F_1 en déterminant les vecteurs normaux aux 2 plans et en effectuant leur produit vectoriel.
– F_3 est un plan vectoriel. Une base (possible) de F_1 est $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$
– F_7 est une droite vectorielle (c'est normal c'est l'intersection de 2 plans). Une base (possible) de F_1 est $\{(1, 1, 1)\}$.

Retour à l'exercice ▲

Montrer que la famille est libre et utiliser les dimensions.

Retour à l'exercice ▲

$$\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = 0$$

(le second membre correspond au polynôme nul !) on a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t(t-1) + \alpha_3 t(t-1)(t-2) = 0$$

soit

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3)t + (\alpha_2 - 3\alpha_3)t^2 + \alpha_3 t^3 = 0.$$

Retour à l'exercice ▲

Un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 non nul admet au plus trois racines réelles, donc ici il s'agit du polynôme nul, donc

$$\alpha_0 = 0, \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, (\alpha_2 - 3\alpha_3) = 0, \alpha_3 = 0.$$

Retour à l'exercice ▲

On déduit que les coefficients sont nuls, donc la famille $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ est libre. La dimension de E est 4, donc $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ est une base de E.

Retour à l'exercice ▲

On essaye d'écrire p sous la forme
$p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t(t-1) + \alpha_3 t(t-1)(t-2)$

Retour à l'exercice ▲

On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R} f(t) = \alpha_0 - d + (\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 - c)t + (\alpha_2 - 3\alpha_3 - b)t^2 + (\alpha_3 - a)t^3 = 0.$$

Concluez.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.12

Là encore le polynôme $f(t)$ est donc nul, donc

$$\alpha_0 = d, \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = c, (\alpha_2 - 3\alpha_3) = b, \alpha_3 = a.$$

On résout le système pour obtenir les α_i en fonction de a, b, c, d

Retour à l'exercice ▲

Après calculs on obtient :

$$p = dp_0 + (c + a + b)p_1 + (b + 3a)p_2 + ap_3$$

Retour à l'exercice ▲

Quelle est la différence entre $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Retour à l'exercice ▲

Si $\mathbb{C}$ est considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, les scalaires sont complexes, par exemple, pour savoir si une famille $\{z_1, z_2\}$ de nombres complexes est libre, on cherche $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ vérifiant $\alpha z_1 + \beta z_2 = 0$.

Retour à l'exercice ▲

Si $\mathbb{C}$ est considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + i\beta = 0 \\ \alpha, \beta \in \mathbb{C} \end{array} \right.$$

peut être obtenu avec par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = -i \\ \beta = 1 \end{array} \right.$$

Donc $\{1, i\}$ n'est pas libre dans $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Ce résultat était prévisible puisque $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est de dimension 1. (Donner une base possible).
La famille $\{1, i\}$ est bien sûr génératrice car tout nombre complexe z s'écrit $z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$, donc $a, b \in \mathbb{C}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1b, Exercice A.2.13

Quelle est la différence entre $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1b, Exercice A.2.13

Si $\mathbb{C}$ est considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, les scalaires sont réels, par exemple pour savoir si une famille $\{z_1, z_2\}$ de nombres complexes est libre, on cherche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vérifiant $\alpha z_1 + \beta z_2 = 0$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1b, Exercice A.2.13

Si $\mathbb{C}$ est considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + i\beta = 0 \\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{array} \right. \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

Donc $\{1, i\}$ est libre.
La famille $\{1, i\}$ est bien sûr génératrice car tout nombre complexe z s'écrit $z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$.
La famille $\{1, i\}$ est donc une base de $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
On retrouve que $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est de dimension 2.

Retour à l'exercice ▲

Quelle est la dimension de $\mathbb{C}^3$ considéré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?
Quelle est la dimension de $\mathbb{C}^3$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Retour à l'exercice ▲

Montrer que la famille est libre pour $\mathbb{C}^3$ considéré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel et pour $\mathbb{C}^3$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Retour à l'exercice ▲

En déduire que
la famille est génératrice pour $\mathbb{C}^3$ considéré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel
la famille n'est pas génératrice pour $\mathbb{C}^3$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel
Utiliser les dimensions.

Retour à l'exercice ▲

On résout $\left\{\begin{array}{l}\alpha_1 + i\alpha_3 = 1\\ i\alpha_1 + \alpha_2 = 1\\ i\alpha_2 + \alpha_3 = 1\end{array}\right.$.

Retour à l'exercice ▲

Exercice de synthèse du chapitre et paragraphe "Supplémentaires".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.14

Les bases de F_1 et F_2 vous sont données, pourquoi ?
Pour $F_1 \cap F_2$, écrire la caractérisation d'un élément de $F_1 \cap F_2$.
Ecrire la définition de $F_1 + F_2$ et trouver une base.

Retour à l'exercice ▲

- Montrer que $(0,-1,1)$ et $(1,1,1)$ sont linéairement indépendants et en déduire une base de F_1 .
- $\vec{x} \in F_1 \cap F_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{x} \in F_1$ et $\vec{x} \in F_2$ ce qui s'écrit $\left\{\begin{array}{c} \vec{x} = \alpha_1(0,-1,1) + \alpha_2(1,1,1) \\ \text{et} \\ \vec{x} = \beta_1(1,-1,1) + \beta_2(1,-1,-1) \end{array}\right.$

  … soit encore (après calculs) $\vec{x} = \beta_2(-1,1,-3)$.

  En déduire que $(-1,1,-3)$ est une base de $F_1 \cap F_2$.
- $\vec{x} \in F_1 + F_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{x} = \alpha_1(0,-1,1) + \alpha_2(0,1,1) + \beta_1(1,-1,1) + \beta_2(1,-1,-1)$ d'où une famille génératrice de 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ (il y en a au moins un de trop pour obtenir une base !). Exhiber alors 3 vecteurs linéairement indépendants et en déduire que $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$.

Retour à l'exercice ▲

Il suffit de vérifier que la famille est libre, pourquoi ?

Retour à l'exercice ▲

Ecrire :

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n = 0.$$

Ne pas oublier que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_3\}$ est une famille libre, donc si une combinaison linéaire de ces vecteurs est nulle, tous les coefficients sont nuls.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.16

Voir le paragraphe "Sous-espace vectoriel engendré".

Retour à l'exercice ▲

Ecrire, par exemple, que $\vec{v}_2 \in vect < \vec{v}_1, \vec{v}_3 >$. Pour la réciproque, essayer de la démontrer et si vous n'y arrivez pas, pensez que la seule hypothèse sur les vecteurs est qu'ils sont liés.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Exercice A.2.16

On a $\vec{v}_2 = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_3$, en déduire que les vecteurs sont liés. Pour la réciproque il suffit de voir que si l'on prend $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ linéairement indépendant, on a un contre-exemple (donner un contre-exemple précis dans $\mathbb{R}^2$).

Retour à l'exercice ▲

Voir paragraphe "Liée, libre".

Retour à l'exercice ▲

Si vous ne voyez pas très bien comment aborder le problème, traitez un cas particulier, n'oubliez pas que les polynômes de la base canonique forment une famille libre.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1, Exercice A.2.17

La difficulté est un problème de notation.
On va supposer que les N polynômes p_i sont de degré d_i tels que $d_1 < d_2 < \ldots < d_N$, ce qui est l'hypothèse (il suffit de "ranger" les polynômes de la famille).

Ecrire alors $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i p_i = 0$ et conclure.

Retour à l'exercice ▲

Seul p_N a un monôme de degré d_N, d'où $\alpha_N = 0$ et il reste $\displaystyle\sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i p_i = 0$ et on continue le raisonnement ...

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.17

On rappelle que la valuation d'un polynôme est le degré du monôme de plus bas degré.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.17

La difficulté est un problème de notation. On va supposer que les N polynômes p_i sont de valuation v_i tels que $v_1 < v_2 < \ldots < v_N$, ce qui est l'hypothèse (il suffit de "ranger" les polynômes de la famille). Ecrire alors $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i p_i = 0$ et conclure.

Retour à l'exercice ▲

Seul p_1 a un monôme de degré v_1, d'où $\alpha_1 = 0$ et il reste $\sum_{i=2}^{N} \alpha_i p_i = 0$ et on continue le raisonnement ...

Retour à l'exercice ▲

Voir les paragraphes "Supplémentaires" et "base incomplète".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.18

Donner une base de F, compléter cette base pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$ et montrer que les vecteurs que vous avez rajoutés engendrent un supplémentaire de F.

Retour à l'exercice ▲

$\{(1,1,1)\}$ est une base de F (le démontrer).
Si l'on rajoute les vecteurs (très simples) $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$ on obtient une base de $\mathbb{R}^3$ (le démontrer).
Alors $G = vect < (1,0,0),(0,1,0) >$ est un supplémentaire de F.
En effet $F \cap G = \{(0,0,0)\}$ (le démontrer) et si $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$,
on a
$(x_1,x_2,x_3) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,0,0) + \gamma(0,1,0)$ (base de $\mathbb{R}^3$)
avec $\alpha(1,1,1) \in F$ et $\beta(1,0,0) + \gamma(0,1,0) \in G$,
d'où
$(x_1,x_2,x_3) \in F + G$ (finir le raisonnement).

Retour à l'exercice ▲

On montre facilement que la famille est génératrice.
Pour montrer qu'elle est libre n'oubliez pas que
$A \cap B = \{\vec{0}\}$,
$\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p\}$ est une famille libre,
$\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_q\}$ est une famille libre.

Retour à l'exercice ▲

Pour montrer que la famille est génératrice on utilise :
la définition de $A + B$ et
le fait que $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p\}$ est une famille génératrice de A,
le fait que $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_q\}$ est une famille génératrice de B.
Pour montrer que la famille est libre on écrit :

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_p\vec{a}_p + \beta_1\vec{b}_1 + \ldots + \beta_q\vec{b}_q = 0 \Leftrightarrow \alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_p\vec{a}_p = -\beta_1\vec{b}_1 - \ldots - \beta_q\vec{b}_q$$

Le vecteur de gauche appartient à A, le vecteur de droite appartient à B, ces 2 vecteurs sont donc nuls ($A \cap B = \{\vec{0}\}$). De plus les familles $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p\}$ et $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_q\}$ sont libres donc tous les coefficients α et β sont nuls.
On conclut.

Retour à l'exercice ▲

Il suffit de compter les vecteurs dans la base de $A \oplus B$.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Sous-espace vectoriel" et plus particulièrement la proposition I.1.4.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2b, Exercice A.2.19

On choisit

$$\vec{x} \in H \cap B$$

et on traduit les propriétés de l'intersection et de H pour montrer que $\vec{x} = \vec{0}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2b, Exercice A.2.19

$$\vec{x} \in H \cap B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{x} \in H \Rightarrow \vec{x} \in A \\ \vec{x} \in B \end{array} \right. \Rightarrow \vec{x} \in A \cap B$$

De plus $\vec{x} \in H$, conclure.

Retour à l'exercice ▲

Montrer la double inclusion. Une inclusion est évidente.

Retour à l'exercice ▲

$H \subset A \Rightarrow H + B \subset A + B$
Pour montrer l'inclusion inverse,
choisissez un élément $\vec{x}$ de $A + B$,
traduire le fait que $A = H \oplus A \cap B$,
ne pas oublier que $A \cap B$ est inclus dans B
se souvenir que B est un espace vectoriel,
en déduire que $\vec{x}$ appartient à $H + B$

Retour à l'exercice ▲

Quelle est la dimension d'une somme directe ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2d, Exercice A.2.19

Exprimer la dimension de A à partir de la dimension de H et de celle de $A \cap B$.
Exprimer la dimension de $A + B$ à partir de la dimension de H et de celle de B.
Regrouper les 2 relations et conclure.

Retour à l'exercice ▲