Algorithmique et structures de données NF16

Aziz Moukrim

Aziz.Moukrim@utc.fr

Poste 49 52

Références

- Brassard, P. Bratlez, "Algorithmique, conception et analyse", Masson, 1987
- Les Goldschlager, Andrew Lister, "Informatique et algorithmique", InterEdition, Paris, 1986
- Peter Grogono, "La programmation en Pascal", InterEdition, Paris, 1986
- J. Courtin, I. Kowavski, "Initiation à l'algorithmique et aux structures de données", Tome 1, 2, 3, Dunod, 1989
- **Robert Sedgewick, “Algorithms”, Addison-Wesley, 1988**
- **D. Beauquier, J. Berstel, Ph. Chrétienne “Eléments d’algorithmique”, Masson, 1992**
- **T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest “Introduction à l’algorithmique”, Dunod, 1994**
- Brassard, P. Bratlez, "Algorithmique, conception et analyse", Masson, 1987
- Baynat, Chrétienne, Hanen, Kedad-Sidhoum, Munier-Kordon et Picouleau (2003) Exercices et problèmes d'algorithmique (Dunod)

Algorithmique et structures de données NF16

Analyse des algorithmes

Analyse des algorithmes

- Exemples :
  - P1 : Multiplication de deux nombres
  - P2 : Problème des tours de Hanoï
  - P3 : Problème du voyageur de commerce
  - P4 : Problème du meilleur coup à jouer aux échecs
  - P5 : stratégie gagnante Table / pièces pour deux joueurs

Analyse des algorithmes

- Spécifications d'un algorithme :
  - La spécification d'un algorithme décrit ce que l'algorithme fait, sans détailler comment il le fait.
- Exemple :
  - {*Ce programme recherche la place d'un élément X dans une liste L. Si X n'est pas dans la liste le résultat est zéro. La liste est représentée par un tableau. Elle comporte n éléments*.}
    - j=1;
    - Tant que ($j \leq n$) et ($L[j] \neq X$) faire j:=j+1;
    - Si j>n alors j:=0;

Analyse des algorithmes

- Cette spécification est imprécise :
  - Est-ce que la liste peut être vide ?
  - Que fait-on s'il y a deux occurrences de X ?
  - Quels sont les données et les résultats ?
- Spécification précise :
  - {Les données sont L et X. L est un tableau de n éléments qui représente une liste. Cette liste peut être vide (n=0). On recherche l'indice de l'élément X dans L. L'algorithme termine avec la variable j égale à l'indice de la première occurrence de X dans L, s'il y en a une. S*i X n'est pas dans la liste, la variable j vaut zéro à la fin de l'algorithme*.}

Analyse des algorithmes

- Spécification formelle :
  - Card(L)=n, $n \geq 0$
  - Si $X \notin L$ alors j = 0
  - Si (X=L[k]) et (pour tout i dans [1, k-1] $X \neq L[i]$) alors j = k

Analyse des algorithmes

- Performances croissantes des ordinateurs en rapidité et en taille-mémoire
- « coût » de l'algorithme
  - Nombre d'opérations élémentaires
  - Quantité de mémoire requise
- Certains problèmes peuvent demander des temps prohibitifs quels que soient l'algorithme « connu » et la machine utilisés

Analyse des algorithmes

- Certains problèmes, par contre, demandent un temps prohibitif avec certains algorithmes de résolution et « raisonnable » avec d'autres.
  - Il faut pouvoir comparer les performances de différents algorithmes disponibles pour résoudre un problème particulier.
    - Comment évaluer de telles performances ?
  - Ces évaluations ne devraient dépendre ni du langage ni de la machine utilisés

Analyse des algorithmes

- Définition : Un algorithme est un ensemble de règles opératoires dont l'application permet de résoudre un problème énoncé au moyen d'un nombre fini d'opérations
- Instance : Une instance d'un problème est définie par la fourniture des diverses valeurs attendues
  - 58*36 est une instance du problème P1
- Taille du problème : il existe toujours une donnée entière positive n caractérisant le volume de données manipulées :
  - Nombre de disques de la tour de Hanoï
  - Nombre d'éléments à trier par un algorithme de tri

Analyse des algorithmes

- Complexité temporelle : on appelle complexité temporelle d'un algorithme une fonction mesurant le temps nécessaire à l'exécution de cet algorithme pour une instance de taille n

- Complexité spatiale : on appelle complexité spatiale d'un algorithme une fonction mesurant la place utilisée en mémoire par celui-ci pour une instance de taille n.

Comportement asymptotique

- Calcul de la complexité d'un algorithme : somme du
  - Nombre d'affectations,
  - Nombre d'opérations arithmétiques,
  - Nombre d'opérations logiques.

- Exemple :
  - Plus grand élément dans un tableau
  - Recherche séquentielle d'un élément dans un tableau

Analyse d'un algorithme

- **Invariants de boucle**

  Tant que Cond faire

  Inst;

  Fin tantque

  Une propriété A est un invariant de boucle ssi

  -- A est vraie avant d'entrer dans la boucle

  -- Si A et C sont vraies au début d'une itération k alors A est encore vraie à la fin de l'itération k

  Donc à l'arrêt de la boucle A et (non C) sont vraies.

Analyse d'un algorithme

- **Conditions d'arrêt**

  Une quantité de contrôle m restant >= 0

  -- montrer que (m >= 0) est un invariant de la boucle

  -- montrer que chaque exécution de la boucle fait décroître m au moins de 1.

  Cette quantité m prend donc des valeurs entières, strictement décroissantes, minorées par zéro : cette suite de valeurs est finie. Il en est de même du nombre d'exécution de la boucle.

Complexité en moyenne et au pire

- Soit D_n l'ensemble des données de taille n
- Cout(d) la complexité en temps (affectations, opérations) sur la donnée d
- Complexité dans le meilleur des cas :
  - Min(n) = min {cout(d), d $\in$ D_n }
- Complexité dans le pire des cas :
  - Max(n) = max {cout(d), d $\in$ D_n }

Complexité en moyenne et au pire

- Complexité en moyenne

Comportement asymptotique

- Paramètres ne pouvant influencer que d'un facteur multiplicatif :
  - Machine,
  - langage,
  - compilateur,
  - génie du programmeur.

Comportement asymptotique
10^6 opérations /seconde

	10	20	30	40	50	60
n	.00001s	.00002s	.00003s	.00004s	.00005s	.00006s
n^2	.0001s	.0004s	.0009s	.0016s	.0025s	.0036s
n^3	.001s	.008s	.027s	.064s	.124s	.216s
n^5	.1s	3.2s	24s	1.7mn	5.2mn	13mn
2^n	.001s	1s	18mn	13j	36a	366s.
3^n	.06s	58mn	6.5a	3800s.	10^8s.	10^{13}s.
n!	3.6s	770s.	10^{17}s.	10^{32}s.	10^{49}s.	10^{66}s.

Comportement asymptotique

- Grandes valeurs du paramètre n qui mesure la taille d'une instance d'un problème
- **Complexité dans le pire cas : pour l'instance pour laquelle notre algorithme fonctionne le moins bien**

Comportement asymptotique

- La notation O (« de l'ordre de » ou « grand O ») définit une borne asymptotique supérieure.
- Pour une fonction f(n) donnée, on note O(f(n)) l'ensemble des fonctions tel que :
  - $O(f(n)) = \{T(n) : \text{il existe des constantes strictement positives } c \text{ et } n_0 \text{ telles que } 0 \leq T(n) \leq c.f(n) \text{ pour tout } n \geq n_0\}$

- Exemples :
  - $f(n)= n^2$ et $T(n)=13n^2+7n+11$
  - $f(n)= n^2$ et $T(n)=1/2n^2-3n$

Comportement asymptotique

- Règle du maximum :

  Si f, g : N $\rightarrow R^+$ alors $O(f(n)+g(n)) = O(\max(f(n), g(n)))$
- La relation « $\in O$ » est réflexive et transitive
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)/g(n) \in R^*_+$ alors $f(n) \in O(g(n))$ et $g(n) \in O(f(n))$
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)/g(n) = 0$ alors $f(n) \in O(g(n))$ mais $g(n) \notin O(f(n))$
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)/g(n) = +\infty$ alors $g(n) \in O(f(n))$ mais $f(n) \notin O(g(n))$

Comportement asymptotique

- Un algorithme de l'ordre de n log(n) est dans $O(n^2)$, dans $O(n^3)$, etc…
- La notation Ω définit une borne asymptotique inférieure.
- Pour une fonction f(n) donnée, on note $\Omega(f(n))$ l'ensemble des fonctions tel que :
  - $\Omega(f(n)) = \{T(n)$: il existe des constantes strictement positives c et n_0 telles que $0 \leq cf(n) \leq T(n)$ pour tout $n \geq n_0\}$

Comportement asymptotique

- La notation Θ définit l'ordre exact d'une fonction.
- Pour une fonction f(n) donnée, on note $\Theta(f(n))$ l'ensemble des fonctions tel que :
  - $\Theta(f(n))$ = {T(n) : il existe des constantes strictement positives c_1, c_2 et n_0 telles que $0 \leq c_1 f(n) \leq T(n) \leq c_2 f(n)$ pour tout $n \geq n_0$}

- Exemples :
  - $f(n)= n^2$ et $T(n)=1/2n^2 -3n$

Comportement asymptotique

- Analyse du temps d'exécution d'un algorithme
  - Affectation ou opération élémentaire : O(1)
  - Instruction composée :
    - Si $T_1(n) = O(f_1(n))$ et $T_2(n) = O(f_2(n))$ avec $f_2(n) = O(f_1(n))$ alors $T_1(n)+T_2(n)$ est en $O(f_1(n))$.
  - Bloc d'instructions : règle de sommation
  - « Si »
    - Si $O(f_{Si})$ et $O(f_{Sinon})$ sont des bornes supérieures des blocs « Si » et « Sinon » alors $O(\max\{f_{Si}(n), f_{Sinon}(n)\})$ est une borne supérieure du temps d'exécution de l'instruction « Si »
  - « Pour, Tant_que, repeter »
    - Si O(f(n)) est une borne supérieure du corps de la boucle et O(g(n)) est une borne supérieure du nombre d'itérations alors O(f(n)g(n)) est une borne supérieure de la boucle.

Récursivité

- La définition d'un objet X est récursive si elle contient une référence à l'objet X lui même (récursivité directe) ou à un objet Y qui fait référence (directement ou indirectement) à l'objet X (récursivité croisée ou indirecte).
- Exemple : Un ascendant d'une personne est :
  - Soit son père
  - Soit sa mère
  - Soit un ascendant de son père ou de sa mère

Récursivité

- On appelle profondeur de la récursivité à un instant donné de l'exécution de l'algorithme, le nombre d'appels imbriqués.
- Tout algorithme récursif doit contenir une condition qui assure la finitude du nombre d'appels emboîtés (cas trivial).
- Exemple :
  - N!
  - Tour de Hanoi
  - Suite de Fibonacci

Récursivité

- Mécanisme de la récursivité :
  - pile des environnements
- Arbre des appels d'un programme récursif :
  - N! T(n) =
  - Tour de Hanoi T(n) =
  - Suite de Fibonacci T(n) =

Récursivité

- Calculs redondants
  - Méthode de marquage
  - Analyse du graphe des appels
- Algorithmes récursifs admettant une version itérative

Algorithmique et structures de données NF16

Structures linéaires

Ensembles dynamiques

- Les ensembles manipulés par les algorithmes peuvent croître ou diminuer. On dit qu'ils sont dynamiques.
- Chaque élément d'un ensemble est représenté généralement par un objet dont l'un des champs est une clé servant d'identifiant et dont les autres champs contiennent les données satellites.

Opérations

- Rechercher (S, k) :
  - Etant donné un ensemble S et une valeur de clé k, retourne un pointeur x sur un élément de S tel que cle[x] = k ou NIL si l'élément en question n'est pas dans S
- Insérer (S, x) :
  - Ajout de l'élément pointé par x à l'ensemble S
- Supprimer(S, x) :
  - Suppression de l'élément pointé par x de l'ensemble S
- Un dictionnaire est un ensemble dynamique supportant ces opérations.

Opérations

- Minimum(S)
- Maximum(S)
- Successeur(S, x)
- Prédécesseur(S, x)

Tableau

- Un tableau est un ensemble d'emplacements mémoire contigus en nombre **fixé** contenant le **même type** de donnée, chacun d'eux étant accessible via un indice.
- Exemples : vecteurs, matrices, …

Tableau

- Recherche
  - j=1;
  - Tant que ($j \leq n$) et ($T[j] \neq X$) faire j:=j+1;
  - Si j>n alors j:=0;
- Supprimer, insérer, minimum, maximum, successeur, prédécesseur

Listes chaînées

- Une liste consiste en une liste d'éléments contenant un champ clé et un champ pointeur, qui pointe sur l'élément qui suit
- Cellule : donnée élémentaire, informations de chaînage
- création de cellule, gestion de la mémoire

Listes chaînées

- succ[x] : successeur de la cellule x
- pred[x] : prédécesseur de la cellule x
- tete[L] : première cellule de la liste L
- cle[x] : valeur de clé de la cellule x

Conventions

- Notion d'absence d'information : NIL
  - valeur particulière dans le système de gestion du chaînage des cellules, dépend du système de gestion de l'information choisi
- Quand une liste est vide tete[L] = NIL
  - cette convention peut être remplacée par une autre plus avantageuse (Cf. sentinelle)

Liste chaînée simple

- Recherche_liste(L, k)

  x := tete[L]
  Tant que x ≠ NIL et cle[x] ≠ k
  faire x := succ[x]
  Retourner(x)

- Inserer_tete_liste(L, x)

  succ[x] := tete[L]
  tete[L] := x

Liste chaînée simple

- Inserer_queue_liste(L, y)

```
Si tete[L] = NIL
      alors tete[L] := y
sinon
     x := tete[L]
    Tant que succ[x] ≠ NIL
      faire    x := succ[x]
     succ[x] := y
```

Liste chaînée simple

- Inserer_ trier_liste(L, z)

```
x := tete[L]
si (cle[z] < cle[x]) ou (x = NIL)
alors Inserer_tete_liste( L, z)
sinon Tant que succ[x] ≠ NIL et cle[z] > cle[succ[x]]
                faire    x := succ[x]
          succ[z] := succ[x]
          succ[x] := z
```

Liste chaînée simple

- Pred(x)

```
si x = tete[L]
        alors retourner(NIL)
sinon y := tete[L]
        Tant que succ[y] ≠ x
        faire    y := succ[y]
        retourner(y)
```

Liste chaînée simple

- Suppression(L, x)

```
y := pred(x)
si y = NIL
      alors  si succ[x] = NIL
                  alors tete[L] := NIL
                  sinon tete[L] := succ[x]
      sinon succ[y] := succ[x]
```

Liste chaînée double

- Inserer_tete_liste(L, x)

  succ[x] := tete[L]
  si tete[L] ≠ NIL
  alors pred[tete[L]] := x
  tete[L] := x
  pred[x] := NIL

Liste chaînée double

- Supprimer_liste(L, x)

  Si pred[x] ≠ NIL
  alors succ[pred[x]] := succ[x]
  sinon tete[L] := succ[x]
  Si succ[x] ≠ NIL
  alors pred[succ[x]] := pred[x]

Sentinelles

- Il est souvent pratique de définir un nœud factice appelé sentinelle qui remplace les valeurs NIL du prédécesseur de la tête ainsi que du successeur de la queue de la liste. Ainsi, une liste doublement chaînée avec sentinelle devient circulaire.

- Objectif : simplifier les conditions limites.

Sentinelles

- conventions :
  - succ[nil[L]] = tete[L]
  - pred[nil[L]] = queue[L]
  - succ[queue[L]] = nil[L]
  - pred[tete[L]] = nil[L]

- ListeInserer(L, x)

- ListeSupprimer(L, x)

Tableau trié

- Recherche dichotomique :
  - Dicho(X, T, g, d, res)
    - {cette procédure récursive recherche par dichotomie l'élément X dans le tableau T[1…n] dont les éléments sont triés en ordre croissant ; le résultat de la procédure est contenu dans la variable res : c'est 0 si X n'appartient pas au tableau, et c'est i $\in$ {1, …, n} si X se trouve à l'indice i du tableau}

Tableau trié

- Recherche dichotomique :
  - Dicho(X, T, g, d, res)
    - Si g ≤ d alors

```
debut
    m := (g+d) / 2
    If X = T[m] alors res := m
        sinon if X < T[m] alors dicho(X, T, g, m-1, res)
                    sinon dicho(X, T, m+1, d, res)
Fin
Sinon
    res := 0
```

  - Initialisation : g:=1 et d:=n.

Tableau trié

- Justification de Dicho
  - dicho termine toujours (soit avec res > 0, soit avec res=0)
  - S'il existe un entier i entre 1 et n tel que X=T[i] alors après exécution de dicho, on a res > 0 et T[res] =X
  - Réciproque : si res > 0 alors il existe un entier i entre 1 et n tel que X=T[i]

Tableau trié

- Recherche dichotomique :
  - Dicholter(X, T, res)
    - g:=1 ; d:=n
    - Tant que g < d faire

      debut

      m := (g+d) / 2

      If X ≤ T[m] alors d := m

      sinon g:=m+1

      Fin
    - Si T[g]=X alors res:=g sinon res := 0

Tableau trié

- DicholIter :
  - Invariant
  - La boucle se termine

- Recherche dichotomique : Complexité

Tableau trié

- Recherche par interpolation
  - Si les nombres forment une progression régulière
  - X sera recherché autour de la place
    - p = g + ((d-g).(X-T[g]) div (T[d]-T[g]))
  - Si X = T[p], on a terminé
  - Si X < T[p], on recommence une recherche par interpolation de X sur T[g] … T[p-1]
  - Si X > T[p], on recommence une recherche par interpolation de X sur T[p+1] … T[d]

Tableau trié

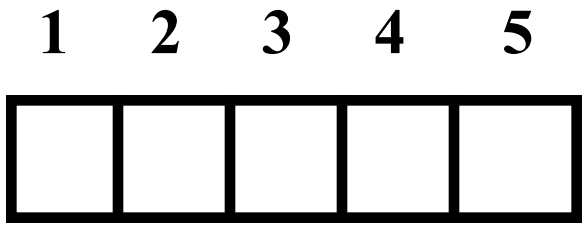
- Algorithmes et complexité :
  - Recherche
  - Insertion
  - Suppression

Piles (structure LIFO)

- Implantation par tableau
- Convention :
  - sommet[P] pointe sur le dernier élément ajouté et vaut 0 initialement
  - Longueur [P] (= MAX_P) donne la taille maximale de la pile
- Débordements par excès et défaut
- Algorithmes :
  - Créer_pile, Pile_vide, Pile_pleine, Empiler et Dépiler
  - Insérer

Pile

- Créer_Pile(MAX_P) crée et retourne une Pile de taille MAX_P éléments



Sommet [P] = 0 (initialement)

Pile

```
Pile_vide(P)

Si sommet[P] = 0
        alors retourner(vrai)
        sinon retourner(faux)
Fin_si
```

```
Pile_pleine(P)

Si sommet[P] = Longueur[P]
        alors retourner(vrai)
        sinon retourner(faux)
Fin_si
```

Pile

```
Empiler(P, x)

Si (Pile_pleine(P) = vrai)
   alors    Erreur('débordement par excès')
   sinon    sommet[P] := sommet[P] +1
            P[sommet[P]] := x
Finsi
```

Pile

Dépiler(P)

Si Pile_vide(P)
alors Erreur('débordement par défaut')
sinon sommet[P] := sommet[P] - 1
Retourner(P[sommet[P] + 1])

Pile

Insérer(P, x)

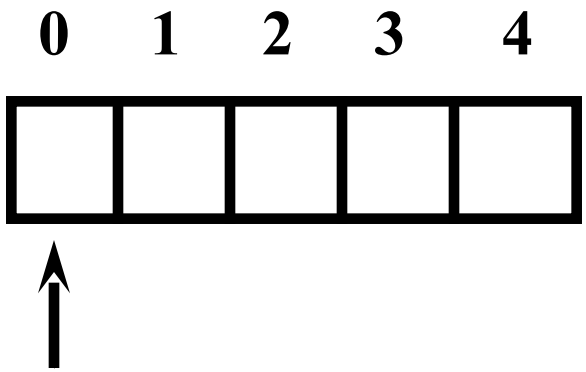
Si Pile_vide(P) ou x < P[sommet[P]]
alors Empiler(P, x)
sinon y := Dépiler(P)
Insérer(P, x)
Empiler(P, y)

Files (structure FIFO)

- Implantation par tableau en file tournante
- Conventions :
  - Tête[F] pointe sur le premier élément à défiler
  - Queue[F] pointe sur le premier emplacement libre
  - Initialement Tête[F]=Queue[F]=0
  - Longueur[F] retourne la taille maximale de F
  - On dit que la File est vide si Tête[F]=Queue[F]
  - On dit que la File est pleine si Tête[F]=modulo(Queue[F]+1, longueur[F])
- Débordements par excès et défaut
- Algorithmes :
  - Créer_file, File_vide, File_pleine, Enfiler et Défiler

File

- Créer_file(MAX_F) crée et retourne une file de taille MAX_F éléments donc longueur[F] retournera la valeur MAX_F



Tête[F] = Queue[F] = 0

File

```
Enfiler(F, x)

Si     File_pleine(F)
alors Erreur('La file est pleine')
sinon       F[Queue[F]] := x
            Si Queue[F] = longueur[F] - 1
            alors       Queue[F] := 0
            sinon       Queue[F] := Queue[F] + 1
```

File

```
Défiler(F)

Si File_vide(F) = vrai
alors Erreur('La file est vide')
sinon       x := F[Tête[F]]
            Si Tête[F] = longueur[F] - 1
            alors       Tête[F] := 0
            sinon       Tête[F] := Tête[F] + 1
            Retourner(x)
Finsi
```

Algorithmique et structures de données NF16

Structures arborescentes

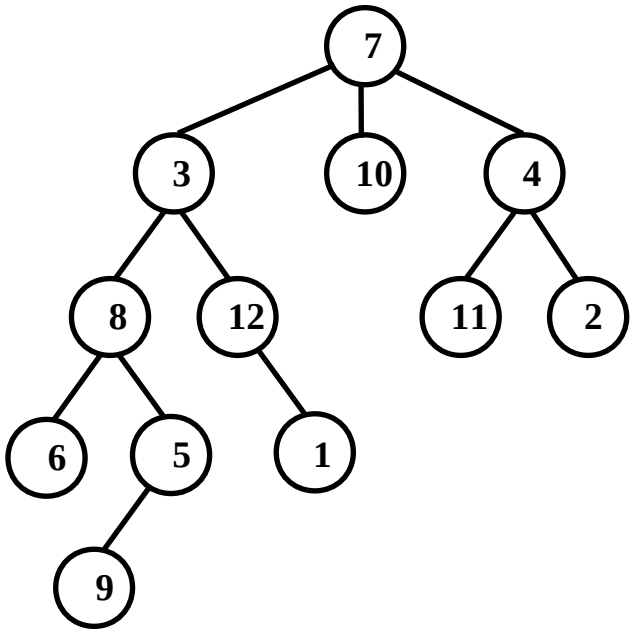
Définitions

- Graphe, sommets, arêtes
- Forêt : graphe non orienté acyclique
- Arbre : graphe non orienté connexe acyclique
- Arborescence : arbre orienté, chaque sommet (sauf un) a exactement un prédécesseur. Le sommet sans prédécesseur est la racine (r) de l'arborescence
- Ancêtre, Descendant, Père, fils, frères

Définitions

- Nœud externe (ou feuille) : nœud sans fils
- Nœud interne : n'est pas une feuille
- Degré d'un nœud x : nombre de fils de x
- Longueur d’un chemin = nombre d’arcs sur ce chemin
- Profondeur(x) : longueur du chemin entre la racine r et le nœud x
- Hauteur : plus grande profondeur d’un nœud

Définitions



- Hauteur = 4
- Profondeur de 7 est 0
- Profondeur de 3, 10 et 4 est 1

Définitions

- Arbre binaire : aucun nœud (arbre vide) ou un nœud racine et un sous-arbre gauche binaire et un sous arbre droit binaire
- Arbre k-aire : aucun nœud (NIL) ou un nœud racine et au plus k sous-arbres k-aires
- Arbre complet d'arité k : arbre d'arité k pour lequel toutes les feuilles ont la même profondeur et tous les nœuds internes ont pour degré k
- Nombre de nœuds internes d'un arbre binaire complet de hauteur h vaut $2^h - 1$.

Définitions

- Arbre parfait : Arbre binaire dont les feuilles sont situées sur deux niveaux au plus, l'avant dernier niveau est complet, et les feuilles du dernier niveau sont regroupées le plus à gauche possible
- Les informations (data) gérées dans un arbre peuvent comprendre une clé
- Les nœuds peuvent avoir une étiquette (nom, label) qui peut être une valeur numérique ou alphanumérique

Parcours d'arbres binaires

- Parcours d'un arbre : accéder une fois et une seule fois à tous les nœuds de l'arbre
- Parcours_Prefixe(x)
  - Si x <> nil alors
    - Imprimer clé[x]
    - Parcours_Prefixe(gauche[x])
    - Parcours_Prefixe(droit[x])

Parcours d'arbres binaires

- Parcours_Postfixe(x)
  - Si x <> nil alors
    - Parcours_Postfixe(gauche[x])
    - Parcours_Postfixe(droit[x])
    - Imprimer clé[x]
- Parcours_Infixe(x)
  - Si x <> nil alors
    - Parcours_Infixe(gauche[x])
    - Imprimer clé[x]
    - Parcours_Infixe(droit[x])
- Versions non récursives : Piles et Files (voir TD/TP)

Arbres Binaires de Recherche

- Arbre Binaire de Recherche
  - Soit x est nœud d'un ABR. Si y est un nœud du sous-arbre gauche de x, alors clé[y] < clé[x]. Si y est un nœud du sous-arbre droit de x, alors clé[x] < clé[y].

- ABR_Rechercher(x, k)
  - Si x = nil ou k = clé[x] alors retourner x
  - Si k < clé[x] alors retourner ABR_Rechercher(gauche[x], k)
    sinon retourner ABR_Rechercher(droit[x], k)

Arbres Binaires de Recherche

- ABR_Rechercher_Itératif(x, k)
  - Tant_que x <> nil et k <> clé[x] faire
    - Si k < clé[x] alors x := gauche[x]
      sinon x := droit[x]
  - Retourner (x)

- ABR_Minimum(x)
  - Tant_que gauche[x] <> nil faire
    - x := gauche[x]
  - Retourner (x)

Arbres Binaires de Recherche

- ABR_Maximum(x)
  - Tant_que droit[x] <> nil faire
    - x := droit[x]
  - Retourner (x)

- ABR_Successeur(x)
  - Si droit[x] <> nil alors retourner ABR_Minimum(droit[x])
  - y := pere[x]
  - Tant_que y <> nil et x = droit[y] faire
    - x := y
    - y := pere[y]
  - Retourner (y)

Arbres Binaires de Recherche

- ABR_Insérer(T, z)
  - y := nil
  - x := racine[T]
  - Tant_que x <> nil faire
    - y := x
    - Si clé[z] < clé[x] alors x := gauche[x]
      sinon x := droit[x]
  - Pere[z] := y
  - Si y = nil alors racine[T] := z
    sinon si clé[z] < clé[y] alors gauche[y] := z
    sinon droit[y] :=z

Algorithmique et structures de données NF16

Arbres équilibrés

Arbres équilibrés : AVL

- Construire des ABR :
  - 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
  - 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1
  - 4, 2, 6, 1, 3, 5, 7

- Un arbre est dit H-équilibré ssi en tout nœud x,

  $$|\text{hauteur}(\text{droit}(x)) - \text{hauteur}(\text{gauche}(x))| \leq 1$$

- équilibre(x) = hauteur(droit(x)) – hauteur(gauche(x))

Arbres équilibrés : AVL

- Rotations simples
  - À droite
  - À gauche
- Rotations doubles
  - Gauche - droite
  - Droite – gauche
- Les opérations de rotations conservent la propriété d'ABR.

Arbres équilibrés : AVL

- Tout arbre H-équilibré ayant n nœuds a une hauteur h vérifiant :
  - $\log_2 (n+1) \leq h+1$
  - $h + 1 < 1{,}44 \log_2 (n + 2)$

Arbres équilibrés : AVL

- Insertion dans un AVL :
  - Réorganisation pour une insertion gauche – gauche dans le cas d'un arbre de racine P : **Rotation droite**

    - P1 := gauche[P] ;
    - gauche[P] := droit[P1] ;
    - droit[P1] := P ;
    - équilibre[P] := 0 ;
    - P := P1 ;
    - équilibre[P] :=0;

Arbres équilibrés : AVL

- Insertion dans un AVL :
  - Réorganisation pour une insertion gauche – droite dans le cas d'un arbre de racine P :

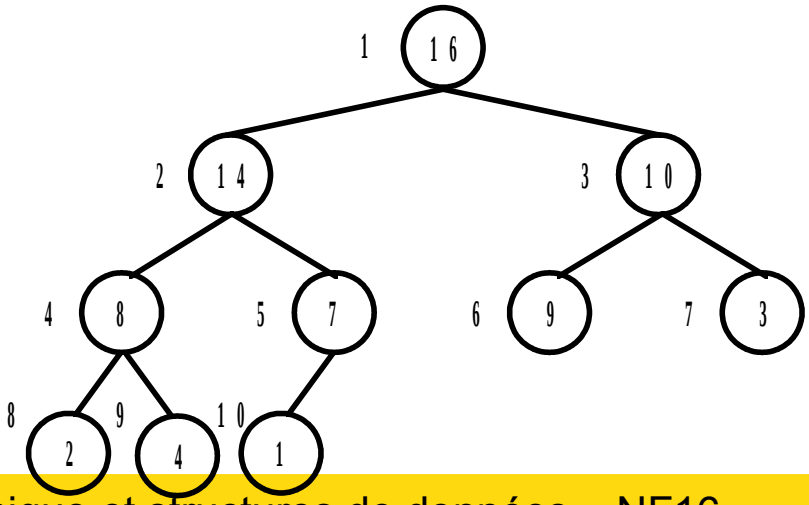
Rotation gauche - droite

Algorithmique et structures de données NF16

Structure de tas

Structure de tas

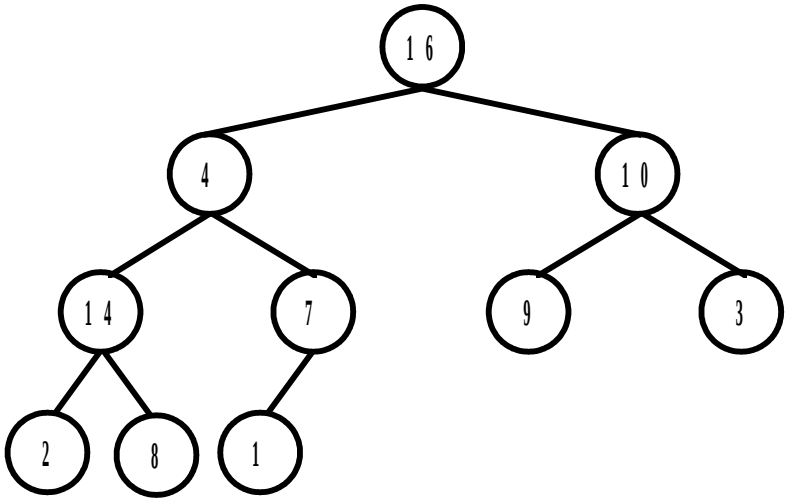
- **Un tas est un objet qui peut être vu comme un arbre binaire stocké de manière compacte et trié verticalement.**
- **Un tableau A sert à stocker les données**
- **Une donnée possède une clé**
- **Le tableau A a pour taille maximale longueur[A]**
- **Le nombre de données dans le tas est de taille[A] (qui est ≤ longeur[A] nombre d'éléments du tas)**



Propriétés

- **Racine(A) ← Retourner(1)**
- **Pere(i) ← Retourner(⌊ i/2 ⌋)**
- **Gauche(i) ← Retourner(2i)**
- **Droit(i) ← Retourner(2i + 1)**
- **A[i] ≤ A[Pere(i)] (dans ce cours)**
- **Les éléments entre les indices ⌊taille[A]/2 ⌋ + 1 et taille[A] sont des feuilles**

Entasser(A, i)



ex : Entasser(A, 2)

l ← Gauche[i]
r ← Droit[i]
Si l ≤ taille[A] et A[l] > A[i]
  alors max ← l
  sinon max ← i
Si r ≤ taille[A] et A[r] > A[max]
  alors max ← r
Si max ≠ i
  alors echange(A[i], A[max])
         Entasser(A, max)

Construire_tas(A)

taille[A] ← longueur[A]
Pour i← ⌊ longueur[A] /2 ⌋ à 1
faire
Entasser(A, i)

Trier_tas (A)

Construire_tas(A)

Pour i← longueur[A] à 2

faire echange(A[1], A[i])

taille[A] ← taille[A] - 1

Entasser(A, 1)

File de priorité

Extraire_Max_tas(A)

```
Si taille[A] < 1
   alors Erreur('débordement négatif')
max ← A[1]
A[1] ← A[taille[A] ]
taille[A] ← taille[A] - 1
Entasser(A, 1)
Retourner(max)
```

File de priorité

Inserer_tas(A, cle)

```
taille[A] ← taille[A] +1
i ← taille[A]
Tant que i > 1 et A[Pere(i)] < cle
    faire      A[i] ← A[Pere(i)]
               i ← Pere(i)
A[i] ← cle
```

Algorithmique et structures de données NF16

Méthodes de tri

Définitions

- Tri interne : s'effectue sur des données présentes en mémoire centrale. L'accès aux informations prenant très peu de temps on ne considère que le nombre de comparaisons et de permutations pour évaluer le temps de calcul.
- Tri externe : s'effectue sur des données résidant en mémoire secondaire. Dans ce cas le temps d'accès aux informations devient crucial, et l'on cherche donc à minimiser le nombre d'accès à la mémoire secondaire.

Définitions

- Un tri est stable s'il ne modifie pas l'ordre initial de deux éléments de clés égales. Un tri stable est intéressant dans le cas d'éléments multiclés. Il permet de conserver l'ordre établi pour une clé, en cas d'ex æquo dans un tri sur une autre clé.
- Complexité d'un tri comparatif :
  - Une borne inférieure pour le pire des cas : Ω (n log(n))

Méthodes de tri interne

- Tri par insertion.
  - L'insertion de l'élément frontière est effectuée par décalage ou par permutation.
  - Stable.
  - Complexité :
    - $O(n^2)$.
    - O(n) si le tableau est déjà trié.

- Tri par bulles.
  - Dans cette méthode, on effectue un certain nombre de parcours du tableau à classer. Un parcours consiste à aller d'un bout à l'autre du tableau en effectuant la comparaison de deux éléments successifs et en les permutant s'ils ne sont pas classés.
  - Complexité : $O(n^2)$.

Tri rapide

- Tri_Rapide(A, p, r)

```
Si p < r alors
        q := Partitionner (A, p, r)
        Tri_Rapide(A, p, q)
        Tri_Rapide(A, q+1, r)
```

- Partitionner(A, p, r)

```
x := A[p] ; i := p – 1 ; j := r + 1;
Tant que vrai faire
    répéter j := j – 1 jusqu'à A[j] ≤ x
    répéter i := i + 1 jusqu'à A[i] ≥ x
    si i < j alors échanger (A[i], A[j])
              sinon retourner j
```

Tri rapide

- Dans Partitionner :
  - Les indices i et j ne font jamais référence à un élément de A hors de l'intervalle [p..r].
  - L'indice j n'est pas égal à r quand Partitionner se termine : le découpage n'est jamais trivial.
  - Chaque élément de A[p..j] est inférieur ou égal à chaque élément de A[j + 1 .. r] quand Partitionner se termine.

- Complexité :
  - Pire des cas : $O(n^2)$.
  - Meilleur des cas : O(n log(n)).
  - Tableau trié par ordre croissant ?
  - Tableau trié par ordre décroissant ?

Tri par dénombrement

- Tri_Dénombrement(A, B, k)

```
Pour i = 1 à k faire C[i] := 0
Pour j = 1 à longueur[A] faire
    C[A[j]] := C[A[j]] + 1
// C[i] contient ici le nombre d'éléments de A qui sont égaux à i
Pour i = 2 à k faire
    C[i] := C[i] + C[i - 1]
// C[i] contient ici le nombre d'éléments de A qui sont inférieurs ou égaux à i
Pour j = longueur[A] à 1 faire
    B[C[A[j]]] := A[j]
    C[A[j]] := C[A[j]] - 1
```

Algorithmique et structures de données NF16

Table de hachage