

Exercice 1.

Soit A un ABR, et x un sommet de celui-ci. Soit y le fils de gauche de x . Notons B et C les sous-arbres gauche et droit de y , et D le sous-arbre droit de x . L'arbre $A' = \text{Rot}_d(A, x)$ résultant de la rotation droite de A autour de x est constitué en remplaçant dans A le sous-arbre de racine x par l'arbre dont la racine est y , le sous-arbre gauche est B , et le sous-arbre droit est de racine x , de sous-arbre gauche C et de sous-arbre droit D .

- A. Montrer que $\text{Rot}_d(A, x)$ est un ABR.
- B. La transformation inverse de Rot_d est une rotation gauche. En supposant qu'un sommet de l'arbre porte les champs « g », « d » et « pere », écrire les algorithmes correspondant à une rotation gauche et une rotation droite qui mettent à jour ces informations.
- C. Montrer que la hauteur du sous-arbre modifié par Rot_d varie de la façon suivante : elle diminue de 1 si et seulement si $h(B) > \max(h(D), h(C))$. Elle augmente de 1 si et seulement si $h(D) > \max(h(B), h(C))$. Sinon, elle reste identique.
- D. Soit v un sommet. Etudier la variation de hauteur de $A(v)$ selon que $A_g(v)$ ou $A_d(v)$ augmente ou diminue d'une unité.
- E. En supposant que les sommets de l'arbre portent également un champ h contenant leur hauteur, indiquer la séquence d'instructions qu'il faut ajouter à la procédure Rot_d de sorte que cette information soit mise à jour dans tout l'arbre après la rotation. Indiquer la complexité de l'algorithme.

Exercice 2.

Soit A un ABR sur un ensemble de clés E . Soit e appartenant à E et x le sommet de A qui porte la clé e (on suppose que ce sommet existe). On cherche à construire à partir des éléments de A un ABR dont la racine est x .

- A. Montrer que si $A_g(r_A)$ a pour racine x , alors une simple rotation permet de modifier l'arbre A de sorte que sa racine soit x . De même, lorsque $A_d(r_A)$ a pour racine x , quelle transformation simple faut-il utiliser pour enraciner A en x ?
- B. En déduire une fonction récursive « enraciner » qui transforme un ABR A en un ABR dont la racine porte la clé e , en renvoyant l'arbre modifié. On utilisera les rotations droite et gauche.
- C. Démontrer la validité de votre fonction et analyser sa complexité.