MT22-PARTIEL 2 : Durée 1 heure
Seules 4 pages format A4 sont autorisées

Exercice 1 *Soient S_1 et S_2 deux surfaces définies respectivement par*

$$S_1 = \{M(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)); (u,v) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\begin{cases} x(u,v) = u + v \\ y(u,v) = -\frac{v}{2} + \frac{1}{2} \\ z(u,v) = u \end{cases}$$

$$S_2 = \{M(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)); (u,v) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2} \end{cases}$$

1. *Soit $M_0 = (0,1,1)$, déterminer (u_0, v_0) tel que $M_0 = M(u_0, v_0) \in S_2$.*
2. *Déterminer l'équation du plan tangent Π_2 à S_2 au point M_0.*
3. *Donner les équations cartésiennes de S_1 et de S_2, et préciser la nature des surfaces.*
4. *Retrouver l'équation du plan tangent Π_2 à S_2 au point M_0.*
5. *Soit maintenant la courbe $C = S_1 \cap S_2$. On désigne par Π_i de normale $\overrightarrow{N_i}$, le plan tangent à S_i au point M_0, $i = 1, 2$.*
   Soit $\overrightarrow{V}$ un vecteur directeur de la droite Δ, tangente la courbe C au point M_0.
   (a) *Montrer que les plans Π_1 et Π_2 ne sont pas parallèles*
   (b) *Montrer que $\overrightarrow{V}.\overrightarrow{N_i} = 0$ pour $i = 1, 2$ (vous pouvez admettre cette question et passer à la suite).*
   (c) *En déduire que*
   $$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   est un vec teur directeur de Δ.
   (d) *Donner les équations paramétriques et cartésiennes de la droite tangente Δ.*

Exercice 2 *Soit F un champ de vecteurs défini sur le domaine $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y > z\}$ par*

$$\overrightarrow{F} = \begin{cases} y - z \\ z - x \\ x - y \end{cases}$$

1. *Calculer $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{F})$*
2. *Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. Soit g la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x,y,z) = y - z$.*
   On définit la fonction $h = fog$ et on rapelle que $\overrightarrow{rot}(h\overrightarrow{F}) = h\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{\nabla h} \Lambda \overrightarrow{F}$.
   (a) *On pose $t = y - z$, montrer que $\overrightarrow{rot}(h\overrightarrow{F}) = 0 \Leftrightarrow tf'(t) + 2f(t) = 0$.*
   (b) *En déduire que le champ de vecteurs $\frac{1}{(y-z)^2}\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel scalaire v à déterminer.*