# Exercices du chapitre IV avec corrigé succinct

## Exercice IV.1 Ch4-Exercice1

Quels sont les vecteurs propres de l'application identité ? Préciser les valeurs propres associées.

**Solution** : Tous les vecteurs, sauf le vecteur nul, sont vecteurs propres de l'identité, la valeur propre associée est $1$.

---

## Exercice IV.2 Ch4-Exercice2

On demande de répondre à cet exercice de façon intuitive , on verra plus loin comment l'aborder de façon plus systématique :

- Si $u$ est la projection de l'espace sur un plan parallèlement à une droite, citer des vecteurs propres de $u$ et les valeurs propres associées.
- Si $u$ est la rotation du plan d'angle $\alpha$ :
  - quand $\alpha = \pi$, citer des vecteurs du plan qui soient vecteurs propres de $u$, préciser les valeurs propres associées,
  - quand $\alpha = \frac{\pi}{3}$, pouvez-vous citer des vecteurs du plan qui soient vecteurs propres de $u$ ?

**Solution** :

- Pour la projection, les vecteurs non nuls du plan sont des vecteurs propres associés à la valeur propre $1$, les vecteurs non nuls de la droite sont des vecteurs propres associés à la valeur propre $0$.
- Pour la rotation si :
  - $\alpha = \pi$, la rotation est alors une symétrie, tout vecteur non nul du plan est vecteur propre associé à la valeur propre $-1$.
  - $\alpha = \frac{\pi}{3}$, on ne peut citer aucun vecteur propre.

---

## Exercice IV.3 Ch4-Exercice3

Montrer que si $Y$, est vecteur propre de $A$, alors $\alpha Y$ est vecteur propre de $A$ (pour tout $\alpha \in K$ non nul).

**Solution** : $\alpha Y \neq 0$,
$A(\alpha Y) = \alpha(AY) = \alpha\lambda Y = \lambda(\alpha Y)$,
donc $\alpha Y$ est vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$.

---

**Exercice IV.4** Ch4-Exercice4

1. Soit $I$ la matrice identité de $\mathcal{M}_{n,n}$, déterminer ses vecteurs propres et ses valeurs propres.
2. – Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3.5 & 0 & 0 \\ 0 & 5.2 & 0 \\ 0 & 0 & 6.9 \end{pmatrix}.$$
   – Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice diagonale.
3. Montrer que : $A$ non inversible $\Longleftrightarrow 0$ est valeur propre de $A$.

**Solution** :

1. Tout vecteur non nul $Y$ est vecteur propre de $I$ car $IY = Y$ : la valeur propre associée est $1$.
2. – Si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $AY = \begin{pmatrix} 3.5y_1 \\ 5.2y_2 \\ 6.9y_3 \end{pmatrix} = \lambda Y \Longleftrightarrow \begin{cases} 3.5y_1 = \lambda y_1 \\ 5.2y_2 = \lambda y_2 \\ 6.9y_3 = \lambda y_3 \end{cases}$.
   Ce système admet comme solutions :
   – $\lambda = 3.5, y_2 = 0, y_3 = 0, y_1$ quelconque non nul (pour que $Y \neq 0$) :
   $Y = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
   – $\lambda = 5.2, y_1 = 0, y_3 = 0, y_2$ quelconque non nul (pour que $Y \neq 0$) :
   $Y = y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   – $\lambda = 6.9, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3$ quelconque non nul (pour que $Y \neq 0$) :
   $Y = y_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   – Ce résultat se généraliserait au cas d'une matrice diagonale quelconque :
   $\lambda = a_{ii}$ est valeur propre, les vecteurs propres associés sont proportionnels à la i-ème colonne de $I$. On a en effet d'après les propriétés du produit matriciel :
   $AI = A \Rightarrow AI_i = A_i = a_{ii}I_i$
   donc
   $A(\alpha I_i) = \alpha AI_i = \alpha a_{ii} I_i = a_{ii}(\alpha I_i)$
   On a donc un couple propre $(a_{ii}, \alpha I_i)$.
   On retrouve sur ces exemples très simples que si $Y$ est vecteur propre associé à $\lambda$ alors $\alpha Y$ est également vecteur propre associé à $\lambda$.
3. $A$ non inversible $\Leftrightarrow \exists Y \neq 0\ ,\ AY = 0$ ,
   en effet le système $AY = 0$ admet toujours la solution nulle, et ce système admet une solution non nulle (c'est à dire n'admet pas de solution unique) si et seulement si $A$ n'est pas inversible. On a donc :
   $A$ non inversible $\Leftrightarrow 0$ est valeur propre de $A$

**Exercice IV.5** Ch4-Exercice5

– Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres réels ($K = \mathbb{R}$) des matrices : $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,
$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

– Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres complexes ($K = \mathbb{C}$) des matrices précédentes puis de la matrice :$A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i+1 & 2i \end{pmatrix}$.

**Solution** : Pour $A_1$ :

$\pi_A(s) = (s+1)(s+2) - 2 = s^2 + 3s = s(s+3)$ :
2 valeurs propres simples $0$ et $-3$.
Recherche des vecteurs propres :

– $\lambda = 0$,
$(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow -y_1 + 2y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 2y_2 \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$ .
– $\lambda = -3$,
$(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow 2y_1 + 2y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = -y_2 \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Il était prévisible que $0$ était valeur propre de cette matrice. En effet puisque ses 2 colonnes sont proportionnelles, elle n'est pas inversible, donc $0$ est valeur propre.

Pour $A_2$ :

$\pi_A(s) = (s+1)(s+2) - 2 = s^2 + 3s = s(s+3)$,
on obtient le même polynôme caractéristique que pour la matrice $A_1$. Ce résultat est général : les matrices sont transposées l'une de l'autre.
Recherche des vecteurs propres :

– $\lambda = 0$,
$(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow -y_1 + y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2 \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$ .
– $\lambda = -3$,
$(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow 2y_1 + y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2 = -2y_1 \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$.

On remarque en revanche que les vecteurs propres ne sont pas les mêmes que pour la matrice $A_1$.

Si on cherche les valeurs et vecteurs propres complexes de $A_1$ et $A_2$ on obtient bien sûr les mêmes valeurs propres (réelles donc complexes), quant aux vecteurs propres ils appartiennent maintenant à $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ donc on choisit les coefficients $\alpha$ complexes.

Pour la matrice suivante tourner la page.

Pour $A_3$ :
$\pi_A(s) = (s-1)^2 + 1$ :
il n'existe pas de valeurs propres réelles.

Si on cherche les valeurs propres complexes, on obtient 2 valeurs propres complexes $1+i$ et $1-i$ (on peut remarquer que ces valeurs propres sont conjuguées : ce résultat est général, on le démontrera ultérieurement).
Recherche des vecteurs propres :

- $\lambda = 1+i$,
  $(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow -iy_1 - y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2 = -iy_1 \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{C}$ .
- $\lambda = 1-i$,
  $(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow -iy_1 + y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2 = iy_1 \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{C}$ .

Pour la matrice suivante tourner la page.

Pour $A_4$ :
$\pi_A(s) = s(s-2)+1 = s^2-2s+1 = (s-1)^2$ :
on a une valeur propre double $\lambda = 1$
Recherche des vecteurs propres :

- $\lambda = 1$,
  $(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow -y_1 - y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = -y_2 \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$ .

Si on cherche les valeurs et vecteurs propres complexes de $A_4$ on obtient bien sûr la même valeur propre (réelle donc complexe), quant aux vecteurs propres ils appartiennent maintenant à $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ donc on choisit les coefficients $\alpha$ complexes.

Pour la matrice suivante tourner la page.

Pour $A_5$ :
$\pi_A(s) = (s-1)^2(s-2)$ :
$\lambda = 1$ est valeur propre double, $\lambda = 2$ est valeur propre simple.
Recherche des vecteurs propres :

- $\lambda = 1$,
  $(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow y_3 = 0 \Leftrightarrow$
  $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
- $\lambda = 2$,
  $(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} -y_1 + y_3 & = 0 \\ -y_2 & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -y_1 = y_3 \\ y_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$
  $Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$

Pour $A_6$ :
$\pi_A(s) = (s-1)^2(s-2)$,
$\lambda = 1$ est valeur propre double, $\lambda = 2$ est valeur propre simple.
Recherche des vecteurs propres :

- $\lambda = 1$,
  $(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$ .
- $\lambda = 2$,
  $(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} -y_1 + y_2 = 0 \\ y_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$
  $Y = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$

Si on cherche les valeurs et vecteurs propres complexes de $A_5$ et $A_6$ on obtient bien sûr les mêmes valeurs propres (réelles donc complexes), quant aux vecteurs propres ils appartiennent maintenant à $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ donc on choisit les coefficients $\alpha$ et $\beta$ complexes.

Pour la matrice suivante tourner la page.

Pour $A_7$ :
$\pi_A(s) = (s-1)(s-2)(s+1)$,
1, 2, $-1$ sont valeurs propres simples.
Recherche des vecteurs propres :

- $\lambda = 1$,
  $$(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} y_2 + y_3 = 0 \\ y_2 + 3y_3 = 0 \\ y_3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_3 = 0 \\ y_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$
  $$Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$
- $\lambda = 2$,
  $$(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} -y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = y_2 \\ y_3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$
  $$Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$
- $\lambda = -1$,
  $$(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 2y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ 3y_2 + 3y_3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = -y_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$
  $$Y = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

On démontrera plus tard la propriété que l'on vient de constater sur les matrices $A_5, A_6, A_7$ : à savoir les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments de sa diagonale.
Si on cherche les valeurs et vecteurs propres complexes de $A_7$ on obtient bien sûr les mêmes valeurs propres (réelles donc complexes), quant aux vecteurs propres ils appartiennent maintenant à $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ donc on choisit les coefficients $\alpha$ complexes.

Pour la matrice suivante tourner la page.

Pour $A_8$,
$\pi_A(s) = (s-1)(s-2i) - (i+1) = s^2 + s(-1-2i) + i - 1 = (s-i-1)(s-i)$
on obtient 2 valeurs propres complexes $1+i$ et $i$ .
Recherche des vecteurs propres :

- $\lambda = 1+i$,
  $(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow -iy_1 + y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2 = iy_1 \Leftrightarrow Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{C}$ .
- $\lambda = i$,
  $(A-\lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow (1-i)y_1 + y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2 = (i-1)y_1 \Leftrightarrow$
  $Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i-1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{C}$ .

---

## **Exercice IV.6** Ch4-Exercice6

Démontrer la propriété suivante : si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est une matrice triangulaire ses valeurs propres sont ses termes diagonaux.

**Solution** : Si $A$ est triangulaire, il en est de même pour $sI - A$ donc det $(sI - A)$ est le produit des termes diagonaux c'est à dire :

$$\pi_A(s) = \prod_{k=1}^{n} (s - a_{kk}),$$

d'où les racines évidentes.

---

## **Exercice IV.7** Ch4-Exercice7

Démontrer les propriétés suivantes : si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ :

1. $\{\lambda$ valeur propre de $A\} \Longleftrightarrow \{\bar{\lambda}$ valeur propre de $\bar{A}\}$ ( avec la même multiplicité).
2. Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, alors :

   $\{\lambda$ valeur propre de $A\} \Longleftrightarrow \{\bar{\lambda}$ valeur propre de $A$ ( avec la même multiplicité) $\}$.

**Solution** :

1. $$\pi_A(s) = \text{det } (sI - A) = \overline{\text{det } (\bar{s}I - \bar{A})} = \overline{\pi_{\bar{A}}(\bar{s})}.$$

   On en déduit donc la propriété suivante :
   $\lambda$ valeur propre de $A \Leftrightarrow \pi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \pi_{\bar{A}}(\bar{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \bar{\lambda}$ valeur propre de $\bar{A}$
2. On utilise la question précédente : si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, alors $A = \bar{A}$ donc si $\lambda$ est valeur propre de $A$, $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de $A$ (on a constaté cette propriété pour la matrice $A_3$ de l'exercice IV.5)

---

## **Exercice IV.8** Ch4-Exercice8

Les matrices $A$ et $A^T$ ont-elles les mêmes vecteurs propres ?

**Solution** : Les matrices $A$ et $A^T$ n'ont pas les mêmes vecteurs propres, voir les matrices $A_1$ et $A_2$ de l'exercice IV.5.

---

## **Exercice IV.9** Ch4-Exercice9

Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. On peut vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. On définit $B = P^{-1}AP$, calculer $B$, ses valeurs propres et ses vecteurs propres, comparer avec ceux de $A$. Qu'en pensez-vous ?

**Solution** : On obtient :

$$B = \begin{pmatrix} 33 & 72 \\ -12 & -26 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6,$$

$$Y_1 = \alpha \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}, Y_2 = \alpha \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

On avait déja calculé les valeurs et vecteurs propres de la matrice $A$ dans le paragraphe "Polynôme caractéristique" . $A$ et $B$ ont les mêmes valeurs propres $1$ et $6$. Les vecteurs propres de A étaient :

$$X_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, X_2 = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres de $A$ et $B$ ne sont pas les mêmes, mais on a les relations

$$Y_1 = P^{-1}X_1 \ , \ Y_2 = P^{-1}X_2$$

---

## **Exercice IV.10** Ch4-Exercice10

Vérifier sur les matrices de l'exercice IV.5 que $\sum_{i=1}^{p} r_i = n$ (notations de la proposition IV.2.1).

## **Exercice IV.11** Ch4-Exercice11

Pour chacune des affirmations suivantes répondre par VRAI ou FAUX en justifiant votre réponse à l'aide de démonstrations, d'exemples ou de contre-exemples selon le cas.

1. Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ admet $2$ valeurs propres réelles.
2. Il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ qui admettent $2$ valeurs propres réelles.
3. Il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$ qui admettent $2$ valeurs propres réelles.
4. Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ admet $2$ valeurs propres complexes distinctes ou non.

5. Il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ qui admettent $1$ valeur propre réelle et $1$ valeur propre complexe non réelle.
6. Il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ qui admettent $1$ seule valeur propre réelle simple.
7. Il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ qui n'admettent pas de valeur propre réelle.

**Solution** : Dans cet exercice on fait référence aux matrices de l'exercice IV.5.

1. FAUX : voir la matrice $A_3$.
2. VRAI : prendre par exemple la matrice $A_1$.
3. VRAI : on peut prendre comme précédemment la matrice $A_1$, ou si l'on cherche une matrice à coefficients complexes non réels, on peut prendre $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1-i & -i \\ i & 1+i \end{pmatrix}$.
4. VRAI : $A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{22}(\mathbb{C})$ (voir le paragraphe "Valeurs propres - existence et multiplicité").
5. FAUX : une matrice $A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ admet 2 valeurs propres complexes (éventuellement confondues, éventuellement réelles), mais si $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, sont valeurs propres de $A$ , $\bar{\lambda}_2$ est également valeur propre de $A$, or comme $\lambda_2$ n'est pas réelle, $\bar{\lambda}_2$ n'est pas réelle donc différente de $\lambda_1$, de plus $\bar{\lambda}_2 \neq \lambda_2$, on aurait donc une matrice ($\in \mathcal{M}_{22}$ ) avec 3 valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_2$ ce qui est impossible.
6. FAUX : si $A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$, alors $A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{C})$ donc $A$ admet 2 valeurs propres complexes, or $A$ a une seule valeur propre réelle simple, donc la 2e valeur propre serait non réelle et on serait ramené à 5).
7. FAUX Les valeurs propres complexes non réelles vont par 2 (les 2 complexes conjugués) et 3 n'est pas un multiple de 2 !

---

## **Exercice IV.12** Ch4-Exercice12

Vérifier sur les matrices de l'exercice IV.5 que la trace d'une matrice est la somme de ses valeurs propres et que son déterminant est le produit de ses valeurs propres.

**Solution** :

- trace$A_1 = -3 = 0 + (-3)$ , det $A_1 = 0 = 0 \times (-3)$, idem pour $A_2$,
- trace$A_3 = 2 = (1+i) + (1-i)$ , det $A_3 = 2 = (1+i) \times (1-i)$,
- trace$A_4 = 2 = 1 + 1$ , det $A_4 = 1 = 1 \times 1$,
- trace$A_5 = 4 = 1 + 1 + 2$ , det $A_5 = 2 = 1 \times 1 \times 2$, idem pour $A_6$,
- trace$A_7 = 2 = 1 + 2 + (-1)$ , det $A_7 = -2 = 1 \times 2 \times (-1)$,
- trace$A_8 = 2i + 1 = (1+i) + i$ , det $A_8 = i - 1 = (1+i) \times i$

---

**Exercice IV.13** Ch4-Exercice13

On définit : :

$$V_\lambda = \{Y \in \mathcal{M}_{n1} \mid AY = \lambda Y\}.$$

montrer que : $V_\lambda$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n1}$

**Solution :** On montre que :
$V_\lambda \neq \emptyset$ car $0 \in V_\lambda$,
$V_\lambda$ est stable : $Y_1$ et $Y_2 \in V_\lambda \Longrightarrow \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 \in V_\lambda$

---

**Exercice IV.14** Ch4-Exercice14

Soit $A$ la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Reprendre les calculs qui ont déja été faits dans le paragraphe "Valeur et vecteur propres d'une matrice" pour donner une base de $V_0$ et $V_1$.

**Solution :** Une base de $V_0$ est $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $V_0$ est de dimension $1$.
Une base de $V_1$ est $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $V_1$ est de dimension $2$.

---

**Exercice IV.15** Ch4-Exercice15

Reprendre les matrices de l'exercice IV.5 dans le cas $K = \mathbb{C}$. Pour chacune d'elles, donner la multiplicité $r_i$ de chacune de ses valeurs propres $\lambda_i$ et préciser la dimension $d_i$ du sous espace propre $V_{\lambda_i}$. Vérifier l'inégalité entre $r_i$ et $d_i$.

**Solution :**

1. pour $\lambda = 0, r = 1, d = 1$ ; pour $\lambda = -3, r = 1, d = 1$
2. pour $\lambda = 0, r = 1, d = 1$ ; pour $\lambda = -3, r = 1, d = 1$
3. pour $\lambda = 1 + i, r = 1, d = 1$ ; pour $\lambda = 1 - i, r = 1, d = 1$
4. pour $\lambda = 1, r = 2, d = 1$
5. pour $\lambda = 1, r = 2, d = 2$ ; pour $\lambda = 2, r = 1, d = 1$
6. pour $\lambda = 1, r = 2, d = 1$ ; pour $\lambda = 2, r = 1, d = 1$
7. pour $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$ ou $\lambda = -1, r = 1, d = 1$
8. pour $\lambda = 1 + i, r = 1, d = 1$ ; pour $\lambda = i, r = 1, d = 1$

---

## Exercice IV.16 Ch4-Exercice16

Montrer que si $A = PDP^{-1}$ où la matrice $D$ est diagonale, alors les colonnes de $P$ sont vecteurs propres de $A$, les éléments de la diagonale de $D$ sont les valeurs propres de $A$.

**Solution** :

$$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow AP = PD \Leftrightarrow AP_i = PD_i = d_{ii}P_i :$$

ce que l'on vient d'écrire découle uniquement des propriétés du produit matriciel, on a bien sûr utilisé de plus le fait que $D$ est diagonale.
On obtient donc que $P_i$ est vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $d_{ii}$.

---

## Exercice IV.17 Ch4-Exercice17

Les matrices de l'exercice IV.5 sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$ ?
Si oui, donner une matrice $D$ diagonale et une matrice $P$ régulière telle que $D = P^{-1}AP$.

**Solution** :

- Les matrices $A_1, A_2, A_7$ sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$ donc dans $\mathbb{C}$ puisqu'elles admettent n valeurs propres distinctes, on a

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, D_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

  Comme on l'a vu une matrice $P$ possible est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres, donc par exemple :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, P_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- La matrice $A_3$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, mais diagonalisable dans $\mathbb{C}$ (ses valeurs propres sont distinctes)

$$D_3 = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}.$$

- Les matrices $A_4, A_6$ ne sont pas diagonalisables (ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$) car la valeur propre $1$ a pour multiplicité 2, la dimension de $V_1$ est égal à 1 donc $d < r$.
- La matrice $A_5$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ car

$$r_1 = d_1 = 2, r_2 = d_2 = 1, \sum_{k=1}^{2} r_k = 3.$$

$$D_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

## **Exercice IV.18** Ch4-Exercice18

Soit $B \in \mathcal{M}_{n,n}$ et soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ (vecteur non nul), est-ce que $BX = 0 \Longrightarrow B = 0$?
Montrer que si $\{X_1, \ldots, X_n\}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}$, alors

$$BX_i = 0, \forall i = 1, \ldots, n \implies B = 0.$$

**Solution** : Soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

on a $BX = 0$ et pourtant $B \neq 0$ et $X \neq 0$.
En revanche si $BX_i = 0$ pour tous les vecteurs $X_i$ d'une base $\mathcal{E}$ de $\mathcal{M}_{n,1}$ , on obtient que $BX = 0$ pour tout vecteur $X$ de $\mathcal{M}_{n,1}$ (il suffit de décomposer $X$ sur la base $\mathcal{E}$).
Ensuite, si on choisit successivement pour $X$ les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}$, on obtient que toutes les colonnes de $B$ sont nulles, donc $B$ est nulle.

---

## **Exercice IV.19** Ch4-Exercice19

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ telle que

$$\pi_A(s) = s^n - 1$$

Donner $A^{-1}$ en fonction de $A$.

**Solution** : $A^n - I = 0$ donc $AA^{n-1} = I$, l'inverse de $A$ est $A^{n-1}$.

---