Лабораторна робота N4

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ОДНОКРОКОВИМ МЕТОДОМ ЗІ ЗМІННИМ КРОКОМ

Скласти програму для розв'язування задачі Коші:

$$\mathbf{y' = f(x, y)\ , y(x_0) = y_0\ ,\ x \in [a, b]\ .}$$

У табл.1.6 наведено варіанти рівнянь. Обчислення зробити тричі - з кроком $\mathbf{h_0}$ та кроками $\mathbf{h_1=h_0/5}$, $\mathbf{h_2=h_0/25}$.

Таблиця 1.6

Номер варі-анта	Рівняння	Початкова умова	a	b	h_o	Точний розв'зок
1	$\varepsilon y' + (1+x)y = \frac{5}{2}(1+x)$ при $\varepsilon=0.03$	-1	0	1	0.2	$\frac{5}{2} - 3{,}5\exp\left(\frac{-\frac{x^2}{2} - x}{\varepsilon}\right)$
2	$\varepsilon y' + y = g(x) + \varepsilon g'(x)$ $g(x) = 10 - (10+x)e^{-x}$ при $\varepsilon = \frac{1}{200}$	10	0	1	0.2	$g(x) + 10\exp(-\frac{x}{\varepsilon})$
3	$y' = -2ky^2$ при $k=500$	10	0	1	0.2	$\frac{10}{1+20kx}$
4	$10y' = y - y^2$	0.5	0	1	0.2	$\frac{e^{\frac{x}{10}}}{e^{\frac{x}{10}} + 1}$
5	$y' = \frac{xy}{1+x^2}$	1	0	6	0.8	$y = C\sqrt{1+x^2}$
6	$y' = (x-y)^2 + 1$	-1	0	2	0.2	$x - \frac{1}{x+1}$

7	$y'+2xy=2xy^2$	0.5	0	2	0.4	$\frac{1}{1+e^{x^2}}$
8	$xy'+y=y^2\ln x$	0.5	1	2	0.2	$\frac{1}{1+x+\ln x}$
9	$y'=\frac{1+y^2}{1+x^2}$	1	0	0.9	0.1	$\frac{1+x}{1-x}$
10	$xy'-4y-x^2\sqrt{y}=0$	0	1	2	0.2	$\frac{x^4\ln^2\lvert x\rvert}{4}$
11	$y'-y+y^2\cos x=0$	1	0	3	0.5	$\frac{2e^x}{1+e^x(\cos x+\sin x)}$
12	$y'=\frac{e^x}{e^{-y}}$	0	0	10	0.9	$-\ln(2-e^x)$
13	$yy'=(1-2x)\frac{1}{y}$	1	0	2	0.4	$\sqrt[3]{1+3x-3x^2}$
14	$y'=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$	0.74	2	3	0.5	xe^{1-x}
15	$y+\sqrt{x^2+y^2}-$ $-xy'=0$	-0.5	0	1	0.2	$\frac{x^2-1}{2}$
16	$xy'=x\sin\frac{y}{x}+y$	$\frac{\pi}{2}$	1	3	0.2	$2x\ \mathrm{arctg}x$
17	y^2-4xy+ $+4x^2y'=0$	0.54	2	3	0.2	$\frac{4x}{\ln x}$
18	$\sin x+\frac{y'}{\sqrt{y}}=0$	1	0	5	0.5	$\frac{(1+\cos x)^2}{4}$
19	$y'=x(y^2+1)$	1	0	1	0.2	$\mathrm{tg}(\frac{x^2}{2}+\frac{\pi}{4})$

20	$y'+xy=x^3y^3$ (Рівняння Бернуллі)	1	0	1	0.2	$(x^2+1+Ce^{x^2})^{-\frac{1}{2}}$, C=0
21	$(y')^2+y^2=1$	0	0	3	0.5	$\sin x$
22	$y'=3x^2y+$ $+x^5+x^2$	1	0	1	0.2	$\frac{1}{3}(5e^{x^3}-(2+x^3))$
23	$y'=-2y+4x$	0	0	10	1	$e^{-2x}+2x-1$
24	$y'=2xy-3xe^{-x^2}$	1	0	1	0.2	$e^{-x^2}(1+\frac{x^2}{2})$
25	$y'+y=\cos x$	1.5	0	2	0.4	$e^{-x}+\frac{\cos x+\sin x}{2}$

Перед складанням програм слід упевнитися у правильності розв'язку підстановкою його в рівняння і початкові умови.

Для кожної величини кроку на одному полі треба зробити графіки точного та наближеного розв"язків. При кожному значенні аргументу друкувати

$$\mathbf{x_k\ ,\ y(x_k)\ ,\ y_k\ ,\ y(x_k)-y_k=D\ ,\ \frac{D}{y(x_k)}\cdot 100}\ .$$

Залежно від варіанта використовувати один із таких методів:

1) явний Ейлера ;
2) неявний Ейлера;
3) Ейлера-Коші;
4) трапецій;
5) удосконалений Ейлера;
6) Ейлера-Коші з ітераціями;
7) Хойне;
8) Рунге-Кутта третього порядку;
9) Кутта-Мерсона;
10) Рунге-Кутта-Фельберга першого порядку;
11) Рунге-Кутта-Фельберга другого порядку;
12) Рунге-Кутта-Фельберга третього порядку;
13) Рунге-Кутта-Фельберга четвертого порядку;
14) Рунге-Кутта-Фельберга п"ятого порядку;

15) Рунге-Кутта-Фельберга сьомого порядку;

Розрахункові формули методів наведені в табл.1.7 .

Таблиця 1.7

Метод	Порядок	Розрахункова формула
1	2	3
Ейлера	1	$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$
Неявний Ейлера	1	$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1})$
Удосконалений Ейлера	2	$y_{k+1} = y_k + hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + k_1)$; $k_1 = \frac{h}{2} f(x_k, y_k)$
Ейлера-Коші	2	$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + k_1)]$; $k_1 = hf(x_k, y_k)$
Трапецій	2	$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right]$
Хойне	3	$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$; $k_1 = hf(x_k, y_k)$; $k_2 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2})$; $k_3 = hf(x_k + h, y_2 - k_1 + 2k_2)$
Рунге-Кутта третього порядку	3	$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3)$; $k_1 = hf(x_k, y_k)$; $k_2 = hf(x_k + \frac{h}{3}, y_k + \frac{k_1}{3})$; $k_3 = hf(x_k + \frac{2}{3}h, y_k + \frac{2}{3}k_2)$

Рунге-Кутта четверто-го порядку	4	$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$ $k_1 = hf(x_k, y_k);\ k_2 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2});$ $k_3 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_2}{2});$ $k_4 = hf\left(x_k + h, y_k + k_3\right)$
Кутта-Мерсона	4	$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}\left(k_1 + 4k_4 + k_5\right);$ $k_1 = \frac{h}{3}f\left(x_k, y_k\right);\ k_2 = \frac{h}{3}f(x_k + \frac{h}{3}, y_k + k_1);$ $k_3 = \frac{h}{3}f(x_k + \frac{h}{3},\ y_k + \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2});$ $k_4 = \frac{h}{3}f(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{3}{8}k_1 + \frac{9}{8}k_3);$ $k_5 = \frac{h}{3}f(x_k + h,\ y_k + \frac{3}{2}k_1 - \frac{9}{2}k_3 + 6k_4)$
Рунге-Кутта-Фельберга	1	$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{256}\left(k_0 + 255k_1\right);$ $k_0 = hf\left(x_k, y_k\right);$ $k_1 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_0}{2});$
Рунге-Кутта-Фельберга	2	$y_{k+1} = y_k + \frac{214}{891}k_0 + \frac{1}{33}k_1 + \frac{650}{891}k_2;$ $k_0 = hf\left(x_k, y_k\right);\ k_1 = hf(x_k + \frac{h}{4}, y_k + \frac{k_0}{4});$ $k_2 = hf(x_k + \frac{27}{40}h,\ y_k - \frac{189}{300}k_0 + \frac{729}{800}k_1);$
Рунге-Кутта-Фельберга	3	$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}k_0 + \frac{27}{52}k_2 + \frac{49}{156}k_3;$

		$k_0 = hf(x_k, y_k);$ $k_1 = hf(x_k + \frac{h}{4}, y_k + \frac{k_0}{4});$ $k_2 = hf(x_k + \frac{4}{9}h, y_k + \frac{4}{81}k_0 + \frac{32}{81}k_1);$ $k_3 = hf(x_k + \frac{6}{7}h, y_k + \frac{57}{98}k_0 - \frac{437}{343}k_1 + \frac{1053}{686}k_2);$
Рунге-Кутта-Фельберга	4	$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{9}k_0 + \frac{9}{20}k_2 + \frac{16}{43}k_3 + \frac{1}{12}k_4;$ $k_0 = hf(x_k, y_k);$ $k_1 = hf(x_k + \frac{2}{9}h, y_k + \frac{2}{9}k_0);$ $k_2 = hf(x_k + \frac{h}{3}, y_k + \frac{1}{12}k_0 + \frac{1}{4}k_1);$ $k_3 = hf(x_k + \frac{3}{4}h, y_k + \frac{69}{128}k_0 - \frac{243}{128}k_1 +$ $+ \frac{135}{64}k_2);$ $k_4 = hf(x_k + h, y_k - \frac{17}{12}k_0 + \frac{27}{4}k_1 - \frac{27}{5}k_2 +$ $+ \frac{16}{15}k_3);$
Рунге-Кутта-Фельберга	5	$y_{k+1} = y_k + \frac{31}{384}k_0 + \frac{1125}{2816}k_2 + \frac{9}{32}k_3 +$ $+ \frac{125}{768}k_4 + \frac{5}{66}k_5;$ $k_0 = hf(x_k, y_k);$ $k_1 = hf(x_k + \frac{1}{6}h, y_k + \frac{1}{6}k_0);$ $k_2 = hf(x_k + \frac{4}{15}h, y_k + \frac{4}{75}k_0 + \frac{16}{75}k_1);$ $k_3 = hf(x_k + \frac{2}{3}h, y_k + \frac{5}{6}k_0 - \frac{3}{8}k_1 + \frac{5}{2}k_2);$

		$k_4 = hf(x_k + \frac{4}{5}h, y_k - \frac{8}{5}k_0 - \frac{144}{25}k_1 - 4k_2 + \frac{16}{25}k_3);$ $k_5 = hf(x_k + h, y_k + \frac{361}{320}k_0 - \frac{18}{5}k_1 + \frac{407}{128}k_2 -$ $- \frac{11}{80}k_3 + \frac{55}{128}k_4);$
Рунге-Кутта-Фельберга	7	$y_{k+1} = y_k + \frac{41}{840}k_0 + \frac{34}{105}k_1 + \frac{9}{35}\left(k_6 + k_7\right) +$ $+ \frac{9}{280}\left(k_8 + k_9\right) + \frac{41}{840}k_{10},$ $k_0 = h\, f\left(x_k, y_k\right);$ $k_1 = h\, f(x_k + \frac{2}{27}h, y_k + \frac{2}{27}k_0);$ $k_2 = h\, f(x_k + \frac{1}{9}h, y_k + \frac{1}{36}k_0 + \frac{1}{12}k_1);$ $k_3 = hf(x_k + \frac{1}{6}h, y_k + \frac{1}{24}k_0 + \frac{1}{8}k_2);$ $k_4 = hf(x_k + \frac{5}{12}h, y_k + \frac{5}{12}k_0 - \frac{25}{16}k_2 + \frac{25}{16}k_3);$ $k_5 = hf(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{20}k_0 + \frac{1}{4}k_3 + \frac{1}{5}k_4);$ $k_6 = hf(x_k + \frac{5}{6}h, y_k - \frac{25}{508}k_0 + \frac{125}{508}k_3 - \frac{65}{27}k_4 +$ $+ \frac{125}{54}k_5);$ $k_7 = hf(x_k + \frac{1}{6}h, y_k + \frac{31}{300}k_0 + \frac{61}{225}k_4 - \frac{2}{9}k_5 +$ $+ \frac{13}{900}k_6);$ $k_8 = hf(x_k + \frac{2}{3}h, y_k + 2k_0 - \frac{53}{6}k_3 + \frac{704}{45}k_4 -$ $- \frac{107}{9}k_5 + \frac{67}{90}k_6 + 3k_7);$

		$k_9 = hf(x_k + \frac{1}{3}h, y_k - \frac{91}{108}k_0 + \frac{23}{108}k_3 - $ $- \frac{976}{135}k_4 + \frac{311}{54}k_5 - \frac{19}{60}k_6 + \frac{17}{6}k_7 - \frac{1}{12}k_8);$ $k_{10} = hf(x_k + h, y_k + \frac{2383}{4100}k_0 - \frac{341}{164}k_3 +$ $+ \frac{4496}{1025}k_4 - \frac{301}{82}k_5 + \frac{2133}{4100}k_6 + \frac{45}{82}k_7 +$ $+ \frac{45}{164}k_8 + \frac{18}{41}k_9);$

У висновках до роботи порівняти величини $\mathbf{e(x_k,h)=y(x_k)-y_k}$ для $\mathbf{h_0}$, $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$ і двох значень аргументу, один з яких $\mathbf{x=b}$. Порівняти зменшення похибки **e** при зменшенні кроку з теоретично очікуваним.

Залежно від варіанта виконати одне з додаткових завдань.

1. Накреслити графіки функцій $\mathbf{e(x)}$ при $\mathbf{h_0}$, $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$ на одному полі зі спільним масштабом;
2. Накреслити графіки функцій $\mathbf{e(x)/y(x_k)}$ при $\mathbf{h_0}$,$\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$ на одному полі зі спільним масштабом;
3. Побудувати таблицю, в графах якої розміщені

$$\mathbf{h\ ,\ y(b) - y_n\ ,\ \frac{y(b) - y_n}{y(b)} \cdot 100}$$

4. Побудувати стовпцеву діаграму величини

$$\mathbf{\frac{y(x_k) - y_k}{y(x_k)} \cdot 100}$$

при $\mathbf{x_k=b}$ і $\mathbf{h_0}$,$\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$.

5. Побудувати на одному полі графіки повної локальної похибки $\mathbf{e(x_k) = y(x_k)-y_k}$ і теоретично очікуваної локальної похибки урізання при $\mathbf{h=h_2}$.

Замінити у програмі розрахункові формули свого методу розрахунковими формулами методу Рунге-Кутта четвертого порядку і повторити обчислення . Порівняти одержані результати.

Варіанти індивідуальних завдань наведені в табл.1.8 .

Таблиця 1.8

Номер варіанта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Метод	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Додаткове завдання	5	1	2	3	4	1	2	3	4	1	3

Номер варіанта	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Метод	13	14	15	1	4	5	4	7	8	9	10	11	12	13
Додаткове завдання	3	5	4	5	1	5	2	3	4	1	2	3	4	1

Варіант 26 = Варіант 12
Варіант 27 = Варіант 4