Глава 5. Основи диференційного числення для функції однієї змінної

5.1. Похідна

Похідною функції $y=f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції до відповідного приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, і позначається:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Поняття похідної широко використовується в багатьох областях. Так, наприклад, якщо функція $y=f(x)$ описує закон руху матеріальної точки, то в цьому випадку похідна визначає *миттєву швидкість* точки в момент часу x. Якщо функція $y=f(x)$ визначає кількість електрики y, що протікає через поперечний переріз провідника за час x, то $f'(x)$ буде визначати *силу струму*, що проходить через поперечний переріз провідника в момент часу x. *Теплоємність* тіла є похідною від кількості тепла за температурою і т.д.

Найпростіші правила обчислення похідних

Нехай функції $u=\varphi(x)$ і $v=\psi(x)$ мають у певній точці похідні u',v'. Тоді функції

1). $y=cu$, (c=const); 2). $y=u\pm v$; 3). $y=uv$; 4). $y=\dfrac{u}{v},\ v\neq 0$

також мають похідні в цій точці, які обчислюються за формулами, поданими в табл. 5.1.

Таблиця 5.1 − Правила обчислення похідних

$(cu)'=cu'$
$(u\pm v)'=u'\pm v'$
$(u\cdot v)'=u'v+uv'$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2},\ v\neq 0.$

З таблиці видно, що:

- постійний множник можна виносити за знак похідної, тобто $(cu)' = cu'$;
- похідна від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі похідних доданків, тобто $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
- похідна добутку двох функцій дорівнює сумі двох добутків: похідної першої функції на другу та похідної другої функції на першу, тобто $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;
- похідна частки дорівнює дробу, знаменник якого є квадратом даного знаменника, а чисельник – різницею добутків: похідної чисельника на знаменник та чисельника на похідну знаменника, тобто $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $v \neq 0$.

Нехай функція $u = \varphi(x)$ має в деякій точці x_0 похідну $u'_x = \varphi'(x_0)$, а функція $y = f(u)$ має у відповідній точці $u_0 = \varphi(x_0)$ похідну $y' = f'(u_0)$. Тоді *складна функція* $y = f(\varphi(x))$ в зазначеній точці x_0 також буде мати похідну, яка визначається за формулою

$$y'(x_0) = f'(u_0)u'(x_0)$$

або

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Іншими словами, похідна складної функції дорівнює добутку похідної даної функції за проміжним аргументом та похідної проміжного аргументу за незалежною змінною.

Якщо функція $y = f(x)$ задовольняє умовам теореми про існування оберненої функції і в точці x_0 має похідну $f'(x_0) \neq 0$, то для оберненої функції $x = g(y)$ у відповідній точці $x_0 = g(y_0)$ також існує похідна, яка визначається за формулою

$$x'(y_0) = \frac{1}{y'(x_0)}$$

або

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Нижче наведена таблиця похідних простіших елементарних функцій в припущенні, що аргумент u є деякою функцією від x.

Таблиця 5.2 − Таблиця похідних

1) $c'=0$	9) $\left(\sin u\right)'=\cos u\cdot u'$
2) $\left(u^{n}\right)'=nu^{n-1}\cdot u'$	10) $\left(\cos u\right)'=-\sin u\cdot u'$
3) $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	11) $\left(\operatorname{tg}u\right)'=\dfrac{1}{\cos^{2}u}\cdot u'$
4) $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^{2}}$	12) $\left(\operatorname{ctg}u\right)'=-\dfrac{1}{\sin^{2}u}u'$
5) $\left(\log_{a}u\right)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$	13) $\left(\arcsin u\right)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^{2}}}$
6) $\left(\ln u\right)'=\dfrac{u'}{u}$	14) $\left(\arccos u\right)'=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^{2}}}$
7) $\left(a^{u}\right)'=a^{u}\ln a\cdot u'$	15) $\left(\operatorname{arctg}u\right)'=\dfrac{u'}{1+u^{2}}$
8) $\left(e^{u}\right)'=e^{u}u'$	16) $\left(\operatorname{arcctg}u\right)'=-\dfrac{u'}{1+u^{2}}$.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y=\dfrac{3x^{2}-5+7\sqrt[5]{x}}{x}$.

Розв’язання. Подамо дану функцію у вигляді

$$y=3x-5\cdot\frac{1}{x}+7\cdot x^{\frac{1}{5}-1}=3x-5\cdot\frac{1}{x}+7\cdot x^{-\frac{4}{5}}.$$

Тепер, користуючись таблицею, обчислимо похідну

$$y'=3\left(x\right)'-5\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'+7\cdot\left(x^{-\frac{4}{5}}\right)'=3+5\cdot\frac{1}{x^{2}}+7\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot x^{-\frac{4}{5}-1}=3+\frac{5}{x^{2}}-\frac{28}{5\sqrt[5]{x^{9}}}.$$

Приклад 2 Знайти похідну функції $y=\ln\sin x$.

Розв’язання. Позначимо $u=\sin x$, тоді дана функція $y=\ln u$ є складною функцією по відношенню до аргументу x, тобто u є проміжним аргументом. Використовуючи правило диференціювання складної функції, маємо: $\left(\ln u\right)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$, $\quad u'=\left(\sin x\right)'=\cos x$, то $y'=\dfrac{1}{\sin x}\cdot\cos x$.

Приклад 3. Знайти похідну функції $y=\mathrm{tg}^{12}\left(\sqrt[3]{\cos x+4x}\right)$.

Розв’язання. Дана функція є степеневою функцією, основою якої є складна функція. Знаходження похідної будемо виконувати послідовно, використовуючи правила диференціювання складної функції. Перш за все обчислимо похідну степеневої функції за формулою $\left(u^n\right)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$, де $u=\mathrm{tg}\left(\sqrt[3]{\cos x+4x}\right),\ n=12$.

$$y'=12\,\mathrm{tg}^{11}\left(\sqrt[3]{\cos x+4x}\right)\cdot\left(\mathrm{tg}\left(\sqrt[3]{\cos x+4x}\right)\right)'.$$

Надалі знайдемо похідну від тангенса, потім від його аргументу, тобто від $\mathrm{tg}\,v$ $\left(v=\sqrt[3]{\cos x+4x}\right)$, далі від кореня кубічного $\sqrt[3]{w}$ $(w=\cos x+4x)$ і нарешті від підкореневого виразу. Таким чином, маємо

$$y'=12\,\mathrm{tg}^{11}\left(\sqrt[3]{\cos x+4x}\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\sqrt[3]{\cos x+4x}\right)}\cdot\left(\sqrt[3]{\cos x+4x}\right)'=$$

$$=12\,\mathrm{tg}^{11}\left(\sqrt[3]{\cos x+4x}\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\sqrt[3]{\cos x+4x}\right)}\cdot\frac{1}{3}\left(\cos x+4x\right)^{-2/3}\left(\cos x+4x\right)'=$$

$$=12\,\mathrm{tg}^{11}\left(\sqrt[3]{\cos x+4x}\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\sqrt[3]{\cos x+4x}\right)}\cdot\frac{1}{3}\left(\cos x+4x\right)^{-2/3}\left(-\sin x+4\right).$$

Зауваження. На практиці проміжні аргументи $u,v,w,...$ зазвичай не вводяться, при знаходженні похідних необхідно завжди аналізувати аргумент тієї функції, від якої береться похідна.

Приклад 4. Знайти похідну функції

$$y=\mathrm{arctg}\left(3x+5\right)\cdot 3^{\sin^2 2x}+\frac{x^{\frac{5}{8}}}{\lg\left(1+\mathrm{tg}\,x\right)}.$$

Розв’язання. Дана функція є сумою двох доданків. Перший доданок в свою чергу є добутком, а другий – часткою. Тому послідовно використовуємо правила диференціювання суми, добутку, частки, а також складної функції.

$$y'=\frac{3\cdot 3^{\sin^2 2x}}{1+\left(3x+5\right)^2}+\mathrm{arctg}\left(3x+5\right)\cdot 3^{\sin^2 2x}\ln 3\cdot 2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot 2+$$

$$+\frac{\frac{5}{8}x^{-\frac{3}{8}}\lg\left(1+\operatorname{tg}x\right)-x^{\frac{5}{8}}\frac{1}{1+\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\ln 10}}{\lg^2\left(1+\operatorname{tg}x\right)}.$$

Диференціювання неявних функцій

Якщо рівняння

$$F(x,y)=0 \tag{5.1}$$

є тотожністю, коли в ньому у замінюється функцією $f(x)$, то говорять, що $y=f(x)$ є *неявною функцією*, яка визначається даним рівнянням (5.1). Для того щоб знайти похідну y' функції $y=f(x)$, яка задана неявно рівнянням (5.1), треба продиференціювати обидві частини тотожності $F(x,y(x))\equiv 0$ за змінною x, користуючись правилом диференціювання складної функції. Потім отримане рівняння розв'язати відносно y'.

Приклад. Знайти похідну функції $y=y\left(x\right)$, яка задана рівнянням

$$\sqrt{x}\cdot y+\sin x\cdot\operatorname{tg}y=0.$$

Розв’язання. Диференціюючи за x задане рівняння, де y вважаємо функцією від x, одержимо

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}y+\sqrt{x}y'+\cos x\operatorname{tg}y+\sin x\frac{y'}{\cos^2 y}=0,\left(\sqrt{x}+\frac{\sin x}{\cos^2 y}\right)y'=-\frac{y}{2\sqrt{x}}-\cos x\operatorname{tg}y,$$

звідки знаходимо y':

$$y'=-\frac{\left(y+2\sqrt{x}\cos x\operatorname{tg}y\right)\cos^2 y}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}\cos^2 y+\sin x\right)}.$$

Логарифмічне диференціювання

Нехай функція $y=f(x)$ має похідну $y'=f'\left(x\right)$, яку важко обчислити за допомогою тих правил та формул, що були наведені раніше, але натуральним логарифмом цієї функції $\ln f(x)$ є функція, яка диференціюється без зайвих зусиль. Тоді для знаходження похідної застосовується метод логарифмічного диференціювання, який полягає в послідовному логарифмуванні початкової функції $\ln y=\ln f(x)$, а потім диференціюванні її як функції, що задана неявно. Тоді якщо $\ln y=\varphi\left(x\right)$, то після диференціювання одержимо

$$\frac{y'}{y}=\varphi'\left(x\right),$$

звідки знаходимо

$$y' = y \cdot \varphi'(x)$$

або

$$y' = f(x) \cdot \varphi'(x).$$

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = \left(x^3 + 5x^2\right)^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання. Формули для диференціювання даної функції в таблиці немає. Скористуємось методом логарифмічного диференціювання. Прологарифмуємо цю функцію:

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln\left(x^3 + 5x^2\right).$$

Диференціюючи обидві частини рівності, знаходимо

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2}\ln\left(x^3 + 5x^2\right) + \frac{1}{x} \cdot \frac{3x^2 + 10x}{x^3 + 5x^2},$$

звідки

$$y' = \left(x^3 + 5x^2\right)^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\ln\left(x^3 + 5x^2\right) + \frac{3x + 10}{x^3 + 5x^2}\right).$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = \sqrt[3]{\frac{x\left(x^2 + 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2}}$.

Розв'язання. Безпосереднє обчислення похідної цієї функції є громіздким, в той час як натуральний логарифм y легко диференціюється. Прологарифмуємо цю функцію:

$$\ln y = \frac{1}{3}\left(\ln x + \ln\left(x^2 + 1\right) - 2\ln\left(x^2 - 1\right)\right).$$

Диференціюємо обидві частини тотожності, розглядаючи y як функцію від x, тоді

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 + 1} - 2\frac{2x}{x^2 - 1}\right),$$

звідки

$$y' = \sqrt[3]{\frac{x\left(x^2 + 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2}} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 + 1} - 2\frac{2x}{x^2 - 1}\right).$$

Геометричний зміст похідної. Рівняння дотичної та нормалі

Похідна функції в даній точці дорівнює кутовому коефіцієнту *дотичної* до неперервної кривої в цій точці. Звідки отримаємо, що *рівняння невертикальної дотичної* до кривої $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Рівняння вертикальної дотичної $x = x_0$.

Нормаллю до кривої в точці $M_0(x_0, y_0)$ називається пряма, яка є перпендикулярною до дотичної, що проведена до кривої в даній точці. Рівняння *негоризонтальної нормалі* має вигляд $y - y_0 = -\dfrac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$.

Рівняння горизонтальної нормалі $y = y_0$.

Приклад. Записати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3 - 3x^2 - 2$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Розв'язання. Ордината точки дотику $y_0 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 2 = -4$. Кутовий коефіцієнт дотичної $k = y'\big|_{x=1} = \left(3x^2 - 6x\right)\big|_{x=1} = 3 - 6 = -3$. Рівняння дотичної

$y+4=-3(x-1)$ або $3x+y+1=0$.

Кутовий коефіцієнт нормалі $k_{нор} = -\dfrac{1}{k_{кас}} = \dfrac{1}{3}$. Рівняння нормалі $y + 4 = \dfrac{1}{3}(x - 1)$ або $x - 3y - 13 = 0$.

5.2. Диференціал функції

Функція $y=f(x)$ називається диференційованою в даній точці x, якщо приріст Δy цієї функції в точці x, який відповідає приросту аргументу Δx, може бути подано у вигляді

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x, \tag{5.2}$$

де A – деяке число, яке не залежить від Δx, а α – функція аргументу Δx, яка є нескінченно малою при $\Delta x \to 0$. Головна частина приросту функції $A \cdot \Delta x$, лінійна відносно Δx, називається *диференціалом функції* і позначається $dy = A\Delta x$.

Теорема. Для того щоб функція $y=f(x)$ була *диференційована* в точці x, необхідно і достатньо, щоб вона мала в цій точці *скінченну похідну*.

При доведенні цієї теореми з’ясовується зміст A, а саме встановлюється, що

$$A = y'(x).$$

Враховуючи цю рівність, формулу для диференціала функції можна записати так:

$$dy = y'\Delta x. \tag{5.3}$$

На основі цієї теореми можна ототожнювати поняття диференційованості функції в даній точці з поняттям існування похідної функції в цій точці. Тому операція знаходження похідної називається *диференціюванням*.

Теорема. Якщо функція $y=f(x)$ *диференційована* в точці x, то вона *неперервна* в цій точці. Зворотнє твердження не завжди правильне. Наприклад, функції $y=|x|$ (рис. 5.1,*а*), $y=\sqrt[3]{x}$ (рис. 5.1,*б*) є неперервними в точці $x=0$, однак вони не диференційовані в цій точці.

Диференціал незалежної змінної x дорівнює її приросту, $dx=\Delta x$, тому формулу (5.3) можливо записати як

$$dy = y'dx. \tag{5.4}$$

Вираз (5.4) ми називатимемо *канонічним виразом* диференціала функції. З цієї формули маємо, що $y' = \frac{dy}{dx}$, тобто похідну від функції y за x можна розглядати як частку від ділення диференціала функції y на диференціал (приріст) незалежної змінної dx.

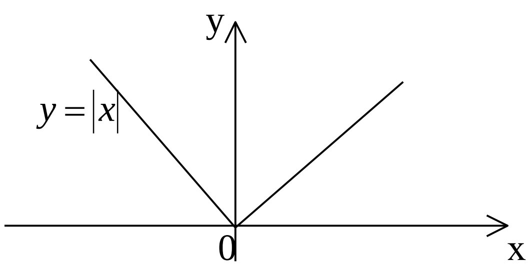


Рис. 5.1.а)

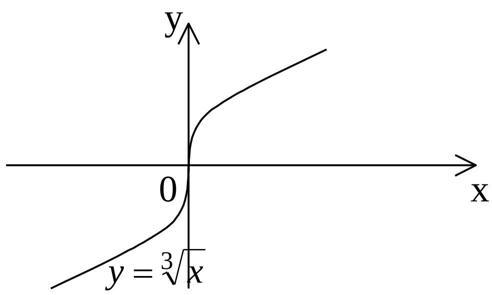


Рис. 5.1.б)

Приклад. Знайти диференціал функції $y = \ln \operatorname{tg}\sqrt{x}$.

Розв’язання. $dy = \dfrac{dx}{\operatorname{tg}\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}} = \dfrac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sin 2\sqrt{x}}.$

Диференціювання функцій, які задані параметрично

Якщо функція задана *параметрично*, тобто $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

то її похідну за змінною x можна подати таким чином:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t dt}{x'_t dt} = \frac{y'_t}{x'_t}, \text{ тобто } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Приклад. Знайти похідну y'_x функції, яку задано параметрично:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо похідні функцій $x = x(t)$, $y = y(t)$ відносно аргументу t. $x'_t = a(1-\cos t)$, $y'_t = a\sin t$. Тоді $y'_x = \dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$.

Геометричний зміст диференціала функції

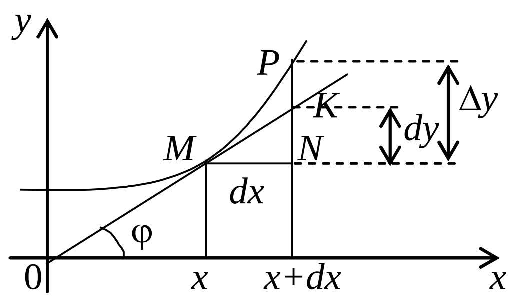


Рис. 5.2

З формули (5.3) випливає, що диференціал функції $y=f(x)$ дорівнює $dy = f'(x)dx$. Враховуючи, що $f'(x) = \mathrm{tg}\,\varphi$ (рис. 5.2.), отримаємо $dy = \mathrm{tg}\,\varphi dx$, тобто геометричний зміст диференціала полягає в тому, що він дорівнює приросту ординати дотичної, яка проведена до кривої $y=f(x)$ в точці з абсцисою x, при переході від точки дотику в точку з абсцисою $x + \Delta x$ ($dy=|KN|$).

Інваріантність формули диференціала І порядку

Нехай задана функція $y=f(x)$, де $x=\varphi(t)$, тобто $y=f(\varphi(t))$ є складною функцією. Припустимо, що f та φ – диференційовані функції. Обчислимо dy:

$$dy = y'_t dt = f'_x x'_t dt = \| x'_t dt = dx \| = f'_x dx = f'(x)dx.$$

Таким чином, диференціал функції має один і той самий вираз як у випадку, коли аргумент є незалежною змінною, так і у випадку, коли аргумент є функцією функції. Цю властивість диференціала називають *інваріантністю* формули (або форми) диференціала. Слід звернути увагу на те, що інваріантна (незмінна) саме форма диференціала, тому що зміст формули диференціала складної функції суттєво відрізняється від змісту формули диференціала функції від незалежної змінної. Саме у формулі

$$dy = f'(x)dx$$

dx є не тільки диференціалом, але і приростом Δx аргументу *x*, якщо *x* – незалежна змінна. Якщо аргумент *x* є в свою чергу функцією деякої змінної *t*, то *dx* є диференціалом *x*, який не збігається з Δx.

Застосування диференціала до наближених обчислень

При достатньо малому Δx можна замінити приріст функції її диференціалом, тобто $f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)\approx f'\left(x_0\right)\Delta x$.

І звідси знайти наближене значення шуканої величини за формулою

$$f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\Delta x. \tag{5.5}$$

Приклад. Обчислити наближено *arctg0,*97.

Розв'язання. Застосовуючи формулу (5.5), одержимо, що $\operatorname{arctg}\left(x_0+\Delta x\right)\approx\operatorname{arctg}x_0+arctg'\left(x_0\right)\Delta x$;

де $\quad x_0+\Delta x=0{,}97;\ x_0=1;\ \Delta x=-0{,}03;\ \left(\operatorname{arctg}x\right)'=\dfrac{1}{1+x^2}.$

Тоді $\quad \operatorname{arctg}0{,}97\approx\operatorname{arctg}1-\dfrac{0{,}03}{1+1^2}=\dfrac{\pi}{4}-0{,}015\approx0{,}7554.$

5.3. Похідні та диференціали вищих порядків

Нехай функція $y=f\left(x\right)$ диференційована на деякому проміжку $\left(a,b\right)$. Значення похідної $f'\left(x\right)$, загалом говорячи, залежить від x, тобто похідна від $f'\left(x\right)$ являє собою також функцію від x. Якщо ця функція сама є диференційованою в деякій точці x інтервалу $\left(a,b\right)$, тобто має в цій точці похідну, то вказана похідна називається другою похідною (або похідною другого порядку) і позначається як

$$y''=\left(y'\right)'=f''\left(x\right).$$

Так само можна ввести поняття третьої похідної, потім четвертої і взагалі похідної n-го порядку.

Для похідної n -го порядку справедливі правила:

1. $\left(u+v\right)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$;
2. $\left(cu\right)^{(n)}=cu^{(n)},\ c=const$;
3. $\left(uv\right)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\dfrac{n(n-1)}{1\cdot2}u^{(n-2)}v''+\ldots+uv^{(n)}$. $\qquad$ (5.6)

Формула (5.6) називається *формулою Лейбніца*.

Нехай задана функція *y=f(x)*, де *x* − незалежна змінна. Диференціал цієї функції $dy = y'dx$ є деяка функція від *x*, при цьому від *x* залежить тільки y'. Якщо y' у свою чергу − диференційована функція, то можна визначити диференціал другого порядку. Диференціалом другого порядку називається диференціал диференціала функції, тобто

$$d(dy)=d(y'dx)=y''dx^2=d^2y,$$

або

$$d^2y = y''dx^2.$$

Взагалі диференціалом *n*-го порядку називається перший диференціал диференціала (*n*−1)-го порядку, що позначається так:

$$d^n y = d\left(d^{n-1}y\right) = y^{(n)}dx^n.$$

Користуючись диференціалами різних порядків, похідну будь-якого порядку можна подати як відношення диференціалів відповідних порядків:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx};\ y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2};\dots\ y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}. \qquad (5.7)$$

Зауваження. Одержані рівності при *n*>1 є вірними тільки в тому випадку, коли *x* є незалежною змінною.

5.4. Застосування похідної до дослідження функцій та побудови графіків. Обчислення границь

5.4.1. Основні теореми диференційного числення

Теорема Ролля. *Якщо функція f(x) неперервна на сегменті [a,b] має похідну в інтервалі (a,b) і на кінцях відрізка [a,b] має рівні значення, то в інтервалі (a,b) існує принаймні одна точка x=c, в якій похідна даної функції дорівнює нулю, тобто* $f'(c)=0$.

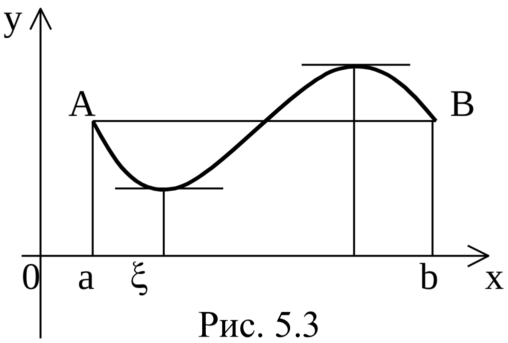


Рис. 5.3

На рисунку 5.3. подана геометрична ілюстрація теореми Ролля.

Теорема Лагранжа (про скінченні прирости). *Якщо функція f(x) неперервна на сегменті* $[a,b]$ *і має похідну* $f'(x)$ *в інтервалі (a,b), то існує принаймні одна* *така точка* ξ *в інтервалі (a,b), що*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

Геометрично теорема Лагранжа тлумачиться так. На дузі АВ (рис. 5.4) неперервної кривої, до якої можна провести дотичну в будь-якій точці, знайдеться принаймні одна точка С, в якій дотична паралельна хорді, що стягує кінцеві точки цієї кривої. Теорема Ролля випливає з теореми Лагранжа як частковий випадок при $f(a)=f(b)$, тобто коли хорда *AB* паралельна осі *Ox*.

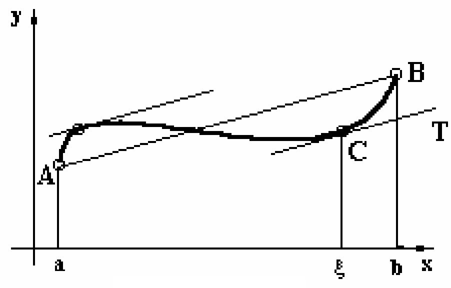


Рис. 5.4

Теорема Коші (про середнє значення). *Якщо функції f(x) та* $\varphi(x)$ *неперервні на сегменті [a,b], мають похідні* $f'(x)$ *та* $\varphi'(x)$ *в інтервалі (a,b), при цьому* $\varphi'(x)\neq 0$*, то в інтервалі (a,b) існує принаймні одна точка* ξ*, така, що*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},\ \text{де } a<\xi<b.$$

Теорема Коші є узагальненням теореми Лагранжа.

5.4.2. Розкриття невизначеностей за правилом Лопіталя

Правило Лопіталя використовується для розкриття невизначеностей вигляду $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ та $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$ та може бути сформульовано у вигляді теорем:

Теорема 1. *Нехай однозначні функції* $f(x)$ *та* $\varphi(x)$ *диференційовані всюди в околі точки* a*, тобто при* $|x-a|<\varepsilon$*, і перетворюються в нуль при* $x=a$ *або прямують до нескінченності, при цьому* $\varphi'(x)\neq 0$*. ,Тоді, якщо існує границя (скінченна чи нескінченна) відношення похідних у цій точці, то відношення функцій має ту саму границю, тобто*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\left(\left\|\frac{0}{0}\right\| \text{ або } \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|\right)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Теорема 2 ($x \to \infty$). $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \left(\left\| \dfrac{0}{0} \right\| \text{ або } \left| \dfrac{\infty}{\infty} \right| \right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Зауваження. Підкреслимо ще раз , що існування границі відношення похідних гарантує існування границі відношення функцій. Зворотне твердження неправильне, тому що *границя відношення функцій може існувати при відсутності границі відношення похідних*.

Приклад. $f(x) = x + \sin x;\ f'(x) = 1 + \cos x;$

$\varphi(x) = x;\ \varphi'(x) = 1.$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to\infty} (1 + \cos x) \text{ – не існує.}$$

Обчислити границі, користуючись правилом Лопіталя.

Приклад 1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{ctg} x - 1}{\sin 4x} = \left\| \dfrac{0}{0} \right\| = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{-\dfrac{1}{\sin^2 x}}{\cos 4x \cdot 4} = \left\| \dfrac{-2}{-1 \cdot 4} \right\| = \dfrac{1}{2}$.

Приклад 2

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{e^{\frac{3}{x}} - 1} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2\dfrac{1}{1+x^2}}{e^{\frac{3}{x}} \cdot \left(-\dfrac{3}{x^2} \right)} = \frac{2}{3} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{2}{3}.$$

Зауваження. Правило Лопіталя може бути застосовано декілька разів, якщо відношення похідних знову призводить до невизначеності, а самі похідні задовольняють умовам правила Лопіталя.

Приклад 3

$$\lim_{x\to3} \frac{\cos x \ln(x-3)}{\ln\left(e^x - e^3\right)} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \cos 3 \lim_{x\to3} \frac{\dfrac{1}{x-3}}{\dfrac{1}{e^x - e^3} e^x} = e^{-3} \cos 3 \lim_{x\to3} \frac{e^x - e^3}{x-3} = \left\| \frac{0}{0} \right\| =$$

$$= e^{-3} \cos 3 \lim_{x\to3} \frac{e^x}{1} = \cos 3.$$

Приклад 4

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\frac{x^2}{2}-1}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{x^2}{2}-x-1}{-\sin x+x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{-\cos x+1}=$$

$$=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}=1.$$

<u>Невизначені вирази інших типів:</u> $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞.

Розкриття невизначеностей вигляду $0\cdot\infty$ та $\infty-\infty$ проводять за допомогою тотожних перетворень, які переводять ці невизначеності до вигляду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, а потім застосовують таблицю еквівалентних нескінченно малих та правило Лопіталя.

а) Нехай $y=f(x)\cdot\varphi(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$. Тоді

$$\lim_{x\to x_o} f(x)\varphi(x)=\|0\cdot\infty\|=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{-\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}},\text{ або}$$

$$\lim_{x\to x_o} f(x)\varphi(x)=\|0\cdot\infty\|=\lim_{x\to x_o}\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to x_o}\frac{\varphi'(x)}{-\frac{f'(x)}{f^2(x)}}.$$

Приклад 5

$$\lim_{\varphi\to a}\left(\left(a^2-\varphi^2\right)\operatorname{tg}\frac{\pi\varphi}{2a}\right)=\|0\cdot\infty\|=\lim_{\varphi\to a}\frac{a^2-\varphi^2}{\operatorname{ctg}\frac{\pi\varphi}{2a}}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{\varphi\to a}\frac{-2\varphi}{-\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\pi\varphi}{2a}}}=\frac{4a^2}{\pi}.$$

Приклад 6

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}\ln(1-x)}=\left\|\frac{1}{0\cdot\infty}\right\|=\lim_{x\to 1}\frac{\cos^{-1}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to 1}\frac{-\cos^{-2}\frac{\pi x}{2}\overbrace{\left(-\sin\frac{\pi x}{2}\right)}^{\to -1}\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{1-x}(-1)}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\frac{\pi}{2}\lim_{x\to 1}\frac{1}{2\cos\frac{\pi x}{2}\left(-\sin\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\pi}{2}}=\infty.$$

б) Якщо $y = f(x) - \varphi(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$, то записуємо

$$y = f(x)\left(1 - \frac{\varphi(x)}{f(x)}\right),$$

$$\lim_{x\to x_o}\left(f(x) - \varphi(x)\right) = \left\|\infty - \infty\right\| = \lim_{x\to x_o} f(x)\left(1 - \frac{\varphi(x)}{f(x)}\right) =$$

$$= \left\|\infty\left(1 - \frac{\infty}{\infty}\right),\ A = \lim_{x\to x_o}\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right\| = \begin{cases}\left\|\infty\cdot 0\right\|, & A = 1\\ \infty, & A \neq 1\end{cases}.$$

Приклад 7

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right) = \left\|\infty - \infty\right\| = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x - \frac{\pi}{2}}{\cos x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x + x\cos x}{-\sin x} = -1.$$

Приклад 8

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+a)(x+b)(x+c)} - x\right) = \left\|\infty - \infty\right\| = \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)\left(1+\frac{c}{x}\right)} - 1\right) =$$

$$= \left\|\begin{matrix}\frac{1}{x} = z\\ z \to 0\end{matrix}\right\| = \lim_{z\to 0}\frac{\left((1+az)(1+bz)(1+cz)\right)^{1/3} - 1}{z} = \left\|\frac{0}{0}\right\| =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{\frac{1}{3}\left((1+az)(1+bz)(1+cz)\right)^{-2/3}\left(a(1+bz)(1+cz) + b(1+az)(1+cz) + c(1+az)(1+bz)\right)}{1} =$$

$$= \frac{a+b+c}{3}.$$

Приклад 9

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2\left(1-\sqrt{x}\right)} - \frac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\right) = \left\|\infty - \infty\right\| = \lim_{x\to 1}\frac{3\left(1 - x^{\frac{1}{3}}\right) - 2\left(1 - x^{\frac{1}{2}}\right)}{6\left(1 - x^{\frac{1}{2}}\right)\left(1 - x^{\frac{1}{3}}\right)} = \left\|\frac{0}{0}\right\| =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{3\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}} - 2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}}}{6\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\left(1 - x^{\frac{1}{3}}\right) + \left(1 - x^{\frac{1}{2}}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}}\right)} = \left\|\frac{-1+1}{6(0+0)} = \frac{0}{0}\right\| =$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-x^{-\frac{2}{3}}\left(1-x^{\frac{1}{6}}\right)}{-x^{-\frac{2}{3}}\left(3x^{\frac{1}{6}}\left(1-x^{\frac{1}{3}}\right)+2\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)\right)}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}}{3\left(\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}\left(1-x^{\frac{1}{3}}\right)+x^{\frac{1}{6}}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}}\right)+2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}}}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}}{\underbrace{\frac{1}{2}x^{-\frac{5}{6}}\left(1-x^{\frac{1}{3}}\right)}_{\to0}-x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}=\left\|\frac{-\frac{1}{6}}{-2}\right\|=\frac{1}{12}.$$

в) Якщо $y=\left[f\left(x\right)\right]^{\varphi(x)}$, то ми можемо дістати, відшукуючи границю, невизначеності: ∞^0; 0^0; 1^∞. В такому випадку попереднім перетворенням степенево-показникового виразу за основною логарифмічною тотожністю $a\equiv e^{\ln a}$ знаходимо спочатку границю виразу $\ln y=\varphi(x)\ln f\left(x\right)$, потім границю $y=e^{\ln y}$.

У результаті цих дій отримуємо "формальний" запис невизначеності в показникові:

а) $\infty^0=e^{\ln\infty^0}=e^{0\cdot\ln\infty}=e^{0\cdot\infty}=e^{\frac{0}{1/\infty}}=e^{\frac{0}{0}}$;

б) $0^0=e^{\ln 0^0}=e^{0\cdot\ln 0}=e^{0\cdot\infty}=e^{\frac{0}{1/\infty}}=e^{\frac{0}{0}}$;

в) $1^\infty=e^{\ln 1^\infty}=e^{\infty\cdot\ln 1}=e^{\infty\cdot 0}=e^{\frac{0}{1/\infty}}=e^{\frac{0}{0}}$.

При обчисленні границь зазвичай *об'єднують застосування еквівалентних нескінченно малих за правилом Лопіталя*. Всі множники, які наближаються до скінчених границь, що відмінні від нуля, *відразу замінюють* на ці границі.

Приклад 1

$$\lim_{x\to0} x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}} = \left\|0^0\right\| = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}\ln x} = \left\|e^{\frac{\infty}{\infty}}\right\| = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{e^x-1}\underset{\to1}{e^x}}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}} = \left\|e^1\right\| = e\,.$$

Приклад 2

$$\lim_{x\to0}\left(\cos5x\right)^{\frac{2}{x^2}} = \left\|1^\infty\right\| = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{x^2}\ln\cos5x} = \left\|e^{\frac{0}{0}}\right\| = e^{2\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos5x}\left(-\sin5x\right)\cdot5}{2x}} =$$

$$= \left\|\begin{matrix}\sin5x \underset{x\to0}{\sim} 5x\\ \cos5x \underset{x\to0}{\to} 1\end{matrix}\right\| = e^{-5\lim\limits_{x\to0}\frac{5x}{x}} = e^{-25}.$$

Приклад 3

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}} = \left\|\infty^0\right\| = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(x+2^x\right)} = \left\|e^{\frac{\infty}{\infty}}\right\| = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+2^x}\left(1+2^x\ln2\right)}{1}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x\left(\underset{\to0}{\frac{1}{2^x}}+\ln2\right)}{2^x\left(\underset{\to0}{\frac{x}{2^x}}+1\right)}} = \left\|e^{\ln2}\right\| = 2.$$

Приклад 4

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x\right)^{2x-\pi} = \left\|\infty^0\right\| = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2x-\pi\right)\ln\operatorname{tg}x} = \left\|e^{0\cdot\infty}\right\| = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\left(2x-\pi\right)^{-1}}} = \left\|e^{\frac{\infty}{\infty}}\right\| =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2x}}{-\left(2x-\pi\right)^{-2}\cdot2}} = e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\underset{\to0}{\frac{\left(2x-\pi\right)^2}{\sin x\cdot\cos x}}} = e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\left(2x-\pi\right)\cdot2}{-\sin x}} = \left\|e^0\right\| = 1\,.$$

Приклад 5

$$\lim_{x\to0}\left(1+kx\right)^{\frac{m}{x}} = \left\|1^\infty\right\| = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{m}{x}\ln\left(1+kx\right)} = \left\|e^{\frac{0}{0}}\right\| = e^{m\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1+kx}\cdot k} = e^{km}.$$

Зауваження. Існує ряд границь, в яких невизначеність може бути усунена тільки за допомогою правила Лопіталя.
Наведемо деякі з них.

Приклад 1. Обчислити границю функції $y=\dfrac{a^x}{x^n}$, $n\in N$ при $x\to\infty$.

Розв'язання

Нехай $a>1$, тоді

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x(\ln a)^2}{n(n-1)x^{n-2}}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x(\ln a)^n}{n!}=+\infty .$$

Тут правило Лопіталя застосовано n разів.

Якщо $0<a<1$, то

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n}=0 .$$

Приклад 2

$$\lim_{x\to+0}x^n\log_a x=\|0\cdot\infty\|=\lim_{x\to+0}\frac{\log_a x}{x^{-n}}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x\ln a}\cdot\frac{1}{-nx^{-n-1}}=$$

$$=-\frac{1}{n\ln a}\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^{-n}}=-\frac{1}{n\ln a}\lim_{x\to+0}x^n=0,\ a>0,\ a\neq 1,\ n\in N.$$

5.4.3. Формула Тейлора

Нехай функція *f(x)* має всі похідні до (*n*+1)-го порядку включно, в деякому проміжку, який містить у собі точку *x*=*a*, для будь-якого *x* з цього проміжку є справедливою формула

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\qquad 0<\theta<1. \qquad (5.7)$$

Ця формула називається ***формулою Тейлора*** для функції *f*(*x*). Якщо у формулі (5.7) покласти *a*=0, то вона запишеться у вигляді

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0<\theta<1. \tag{5.8}$$

Формула (5.8) називається формулою Маклорена. Наведемо приклади розкладення деяких функцій за формулою Маклорена.

Приклад 1. Розкладення показникової функції $f(x)=e^x$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},\ 0<\theta<1.$$

Приклад 2. Розкладення тригонометричних функцій $f(x)=\sin x, \quad f(x)=\cos x$:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+R_{2k},$$

де $|R_{2k}|=\left|\frac{x^{2k}}{(2k)!}f^{(2k)}(\theta x)\right|=o\left(x^{2k-1}\right)$.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+R_{2k+1},$$

де $|R_{2k+1}|=\left|\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}f^{(2k+1)}(\theta x)\right|=o\left(x^{2k}\right)$.

Приклад 3. $f(x)=(1+x)^m$:

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right).$$

Приклад 4. Розкладення логарифмічної функції $f(x)=\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right).$$

Приклад 5. Наблизити функцію $y=\operatorname{tg}x$ поліномом третього ступеня в околі точки $a=\frac{\pi}{4}$.

Розв’язання

Перш за все обчислимо значення функції та її похідних до третього порядку в заданій точці.

$f(x)=\operatorname{tg}x$, $\qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1.$

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}, \qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2.$$

$$f''(x)=\left(\cos^{-2} x\right)'=2\cos^{-3} x\cdot\sin x, \qquad f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=4.$$

$$f'''(x)=2\left(\cos^{-2} x+3\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\right), \qquad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)=16.$$

Тоді задану функцію наближено можливо подати як

$$\operatorname{tg} x\approx 1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3.$$

5.4.4. Умови монотонності функції. Екстремуми

Теорема 1. *Якщо функція f(x) неперервна на* $[a,b]$ *та диференційована на* (a,b), *то для того, щоб вона була постійною на* $[a,b]$, *необхідно та достатньо, щоб* $f'(x)=0\ \forall x\in(a,b)$.

Теорема 2. *Нехай f(x) неперервна на* $[a,b]$ *та диференційована на (a,b), тоді:*

а) *якщо* $f'(x)>0\ \forall x\in(a,b)$, *то f(x) зростає на* (a,b)*;*

б) *якщо* $f'(x)<0\ \forall x\in(a,b)$, *то f(x) спадає на* (a,b).

Теорема 3. *Якщо диференційована на проміжку* (a,b) *функція f(x) зростає, то* $f'(x)\ge 0\ \forall x\in(a,b)$. *Якщо функція f(x) спадає, то* $f'(x)\le 0\ \forall x\in(a,b)$.

Точка x_0 називається точкою *локального максимуму* (*мінімуму*) функції $y=f(x)$, якщо існує такий її окіл $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, в якому $f(x_0)$ є найбільшим (найменьшим) серед усіх інших значень цієї функції. Точки локального максимуму та мінімуму функції називаються точками екстремуму цієї функції.

Теорема 4. (*Необхідна ознака існування екстремуму.*) *Якщо неперервна функція f(x) має в точці* $x=x_0$ *екстремум, то похідна функції* $f'(x_0)=0$ *або не існує.*

Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними*.

Теорема 5. (*Достатня ознака існування екстремуму функції за першою похідною*)

Нехай x_0 *– критична точка. Тоді якщо функція f(x) має похідну* $f'(x)$ *в деякому околі точки* x_0 *і якщо похідна* $f'(x)$ *при переході через точку* x_0 *змінює знак з плюса на мінус, то функція в цій точці має максимум, а при зміні знака з мінуса на плюс – мінімум.*

Теорема 6. (*Достатня ознака існування екстремуму функції за другою похідною*)

Якщо функція f(x) в деякому околі точки x_0 *неперервна та двічі диференційована, при цьому* $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, *тоді якщо* $f''(x_0)>0$, *то в точці* x_0 *функція має мінімум; якщо* $f''(x_0)<0$, *то функція в точці* x_0 *має максимум.*

Приклад 1. Знайти проміжки монотонності та екстремуми функції $y = x\ln x$.

ОДЗ: $x>0$.

Для знаходження проміжків монотонності функції необхідно:

1) Знайти її похідну

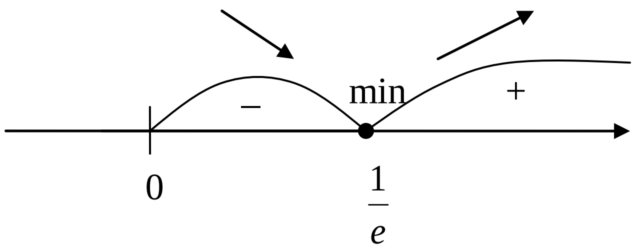
$$y' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

2) Визначити критичні точки (ті точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує):

$$\ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}, \text{ тобто } x = \frac{1}{e}.$$

Кожна критична точка ділить область визначення на два інтервали, на кожному з яких похідна зберігає свій знак.

3) Визначити знак похідної на кожному з отриманих проміжків (інтервалів):



На проміжку $\left(0;\ \frac{1}{e}\right)$ функція спадає, бо на цьому проміжку $y'<0$.

На проміжку $\left(\frac{1}{e};\ +\infty\right)$ функція зростає, бо на цьому проміжку $y'>0$.

$x=\dfrac{1}{e}$ – точка мінімуму, бо похідна при переході через цю точку змінює знак з «–» на «+».

4) Значення мінімуму функції знаходиться в результаті підстановки знайденого значення $x=\dfrac{1}{e}$ в аналітичний вираз для $y=x\ln x$:

$y_{\min}=\dfrac{1}{e}\cdot\ln\dfrac{1}{e}=\dfrac{1}{e}\cdot(-1)=-\dfrac{1}{e}$.

Приклад 2. Знайти проміжки монотоності та екстремуми функції $y=\dfrac{x^2+4}{x}$.

ОДЗ: $x\neq 0$.

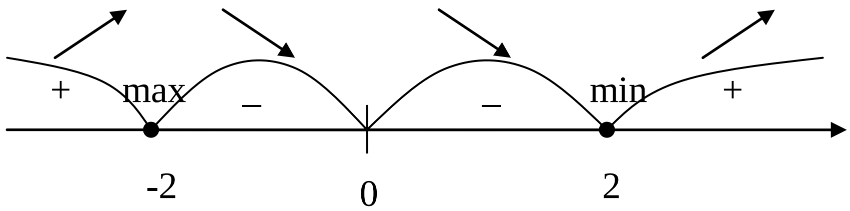
1) Знайдемо похідну даної функції:

$$y'=\frac{2x\cdot x-\left(x^2+4\right)}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x^2}.$$

2) Знаходимо критичні точки:

$$y'=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm 2;$$

y' не існує в точці $x=0$. Точка $x=0$ не є критичною, тому що вона не входить до ОДЗ.



3) Знайдемо проміжки монотонності, для цього визначимо знак похідної на проміжках $(-\infty;2)$, $(-2;0)$, $(0;2)$, $(2;+\infty)$ (див. рис.).

Функція спадає при $x\in(-2;\ 0)\cup(0;\ 2)$.

Функція зростає при $x\in(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$.

$x=-2$ – точка максимуму; $x=2$ – точка мінімуму.

4) Обчислимо значення максимуму та мінімуму функції, підставляючи відповідні значення $x=\pm 2$ в аналітичний вираз для $y=\dfrac{x^2+4}{x}$.

Мінімум функції: $y_{\min}(2)=4$.

Максимум функції: $y_{\max}(-2)=-4$.

5.4.5. Опуклість і угнутість кривої. Точки перегину

Крива називається *опуклою* в точці x_0, якщо в деякому околі цієї точки ($x_0 - \delta,\ x_0 + \delta$) вона розташована нижче своєї дотичної (рис. 5.5,*а*), проведеної в точці з цією ж абсцисою x_0. Якщо крива розташована вище своєї дотичної, то вона називається *угнутою* (рис. 5.5,*б*).

Теорема 1. *Якщо функція f(x) у деякому околі точки* x_0 *двічі неперервно диференційована та* $f''(x_0) \neq 0$, *то необхідною й достатньою умовою опуклості кривої у точці* x_0 *є умова* $f''(x_0) < 0$; *угнутості –* $f''(x_0) > 0$.

Точка $M(x_1, f(x_1))$ називається *точкою перегину* даної кривої (рис. 5.5,*а*), якщо існує такий окіл точки x_1, що при $x < x_1$ у цьому околі

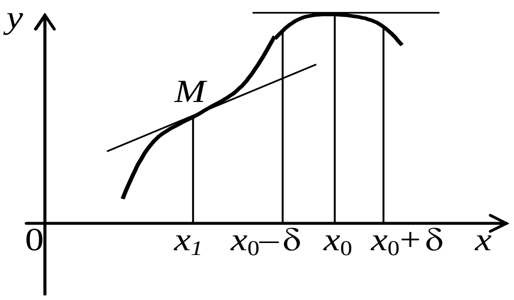


Рис. 5.5,*а*

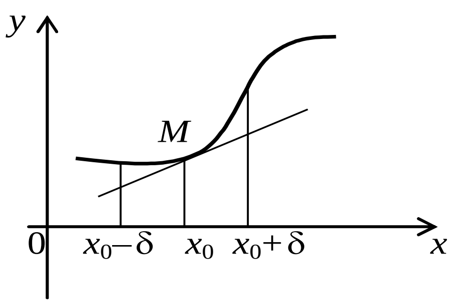


Рис. 5.5,*б*

угнутість кривої спрямована в один бік, а при $x > x_1$ − в інший бік (рис. 5.5,*а*).

Для того щоб точка $x = x_0$ була точкою перегину даної кривої необхідно, щоб друга похідна функції в цій точці або дорівнювала нулю ($f''(x_0) = 0$), або не існувала.

Теорема 2. (Достатня умова існування *точки перегину*) *Нехай крива визначається рівнянням y=f(x). Якщо* $f''(x_0) = 0$ *або* $f''(x_0)$ *не існує та при переході через* $x = x_0$ *похідна* $f''(x)$ *змінює знак, то точка кривої з абсцисою* x_0 *є точкою перегину.*

Точки, в яких друга похідна функції дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками другого роду.*

Приклад 1. Знайти інтервали опуклості, угнутості та точки перегину графіка функції $y = \ln\left(x^2 + 1\right) + x$.

ОДЗ: $x \in R$.

1) Знайдемо першу, а потім другу похідну функції.

$$y' = \frac{2x}{x^2+1} + 1 = \frac{2x + x^2 + 1}{x^2+1}.$$

$$y'' = \left(\frac{2x + x^2 + 1}{x^2+1}\right)' = \frac{(2+2x)\left(x^2+1\right) - \left(2x + x^2 + 1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 2x^3 + 2 + 2x - 4x^2 - 2x^3 - 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x^2 + 2x^3 + 2 + 2x - 4x^2 - 2x^3 - 2x}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

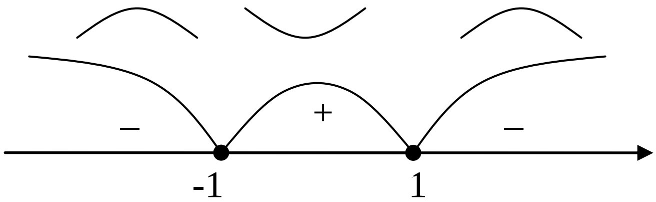
$$= \frac{2 - 2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = 2\cdot\frac{1 - x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = 2\cdot\frac{(1-x)(1+x)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

2) Знайдемо точки, у яких друга похідна дорівнює 0 або не існує.

$y'' = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$.

Немає точок, у яких би y'' не існувала.

3) Критичні точки $x_{1,2} = \pm 1$ ділять числову вісь на три інтервали, на кожному з яких друга похідна зберігає знак.



Графік функції опуклий при $x \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$; угнутий при $x \in (-1;\ 1)$.

Усі критичні точки є точками перегину. Знайдемо ординати точок перегину, підставляючи значення абсцис $x = \pm 1$ в аналітичний вираз заданої функції $y = \ln\left(x^2+1\right) + x$, тобто

$$x = 1 \Rightarrow y(1) = \ln\left(1^2+1\right) + 1 = \ln 2 + 1$$

$$x = -1 \Rightarrow y(-1) = \ln\left((-1)^2+1\right) - 1 = \ln 2 - 1$$

Точки перегину графіка даної функції мають такі координати:

$(-1;\ \ln 2 - 1)$, $(1;\ \ln 2 + 1)$.

Приклад 2. Знайти інтервали опуклості, угнутості та точки перегину графіка функції $y=\left(x^2-1\right)^3$.

ОДЗ: $x\in R$.

1) Знайдемо першу похідну функції, а потім другу.

$$y'=3\left(x^2-1\right)\cdot 2x=6x\left(x^2-1\right)^2.$$

$$y''=\left(6x\left(x^2-1\right)^2\right)'=6\left(x^2-1\right)^2+6x\cdot 2\left(x^2-1\right)\cdot 2x=$$

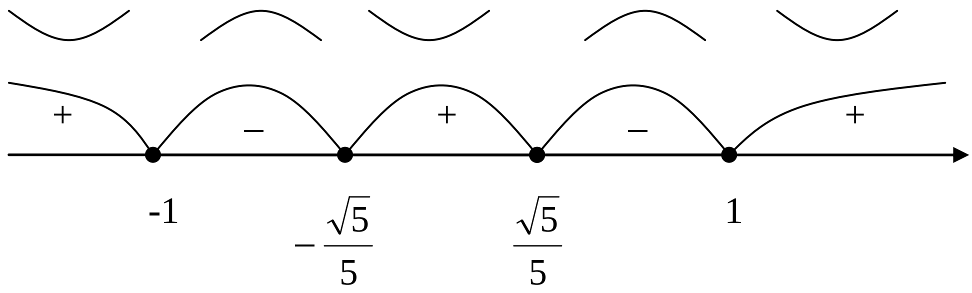
$$=6\left(x^2-1\right)\left(x^2-1+4x^2\right)=6\left(x^2-1\right)\left(5x^2-1\right)=$$

$$=6(x-1)(x+1)(\sqrt{5}x-1)(\sqrt{5}x+1)$$

2) Визначимо точки, у яких друга похідна дорівнює 0. Зазначимо, що друга похідна визначена всюди, тому шукати точки, у яких y'' не існує, в цьому випадку не треба.

$$y''=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm 1;\ x_{3,4}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Критичні точки $x_{1,2}=\pm 1;\ x_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ ділять числову вісь на п'ять інтервалів, на кожному з яких друга похідна зберігає знак.



Графік функції опуклий при $x\in\left(-1;\ -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{5}}{5};\ 1\right)$; угнутий при $x\in\left(-\infty;\ -1\right)\cup\left(-\frac{\sqrt{5}}{5};\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\cup\left(1;\ +\infty\right)$.

Усі критичні точки є абсцисами точок перегину. Визначимо ординати цих точок за допомогою формули $y=\left(x^2-1\right)^3$.

$$x=\pm 1 \Rightarrow y(\pm 1)=\left((\pm 1)^2-1\right)^3=(1-1)^3=0$$

$$x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow y\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=\left(\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-1\right)^3=(\frac{1}{5}-1)^3=\left(-\frac{4}{5}\right)^3=-\frac{64}{125}$$

Точки перегину графіка даної функції мають координати:

$(-1;\ 0)$, $(1;\ 0)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5};\ -\frac{64}{125}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}}{5};\ -\frac{64}{125}\right)$.

5.4.6. Асимптоти кривих

*Визначення***.** Під асимптотою графіка функції *y=f(x*) розуміють пряму, до якої точка кривої необмежено наближається при віддаленні в нескінченність, тобто відстань від прямої до змінної точки на кривій наближується до нуля, якщо точка, рухаючись уздовж кривої, необмежено віддаляється ($x\to\pm\infty$).

Очевидно, що пряма $x=x_0$ буде *вертикальною асимптотою*, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$. При знаходженні вертикальних асимптот досліджуються точки розриву функції другого роду. У цих точках обчислюються однобічні границі.

Приклад. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$.

Дана функція не визначена (тобто має нескінченний розрив) у точках $x=\pm 1$.

Обчислимо такі границі:

$$\lim_{x\to 1\pm 0}\frac{1}{1-x^2}=\mp\infty;$$

$$\lim_{x\to -1\pm 0}\frac{1}{1-x^2}=\pm\infty.$$

Прямі $x=\pm 1$ є вертикальними асимптотами, тому що $\lim\limits_{x\to\pm 1} y(x)=\pm\infty$.

Рівняння *похилої асимптоти* має вигляд *y=kx+b*. Зокрема, якщо *k=0,* асимптота є горизонтальною. Якщо похила асимптота існує, то *k* і *b* обчислюються за формулами: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)$.

Якщо хоча б одна з границь не існує, то похилих асимптот крива не має. Асимптоти можуть бути різними при $x \to +\infty$ й при $x \to -\infty$.

Приклад 1. Знайти асимптоти графіка функції $y = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}$.

Розв'язання. Вертикальна асимптота: $x = 1$, тому що $\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 1} = \left| \dfrac{2}{\pm 0} \right| = \pm\infty$.

Знайдемо похилі асимптоти.

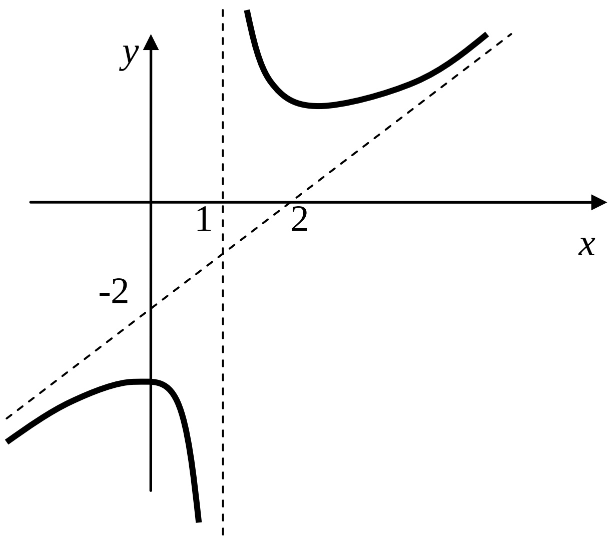
$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{x(x-1)} = \left| \begin{matrix} x^2 - 3x + 4 \underset{x \to \infty}{\sim} x^2 \\ x(x-1) \underset{x \to \infty}{\sim} x^2 \end{matrix} \right| = 1.$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 4}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3x + 4 - x^2 + x}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-2x + 4}{x - 1} = \left| \begin{matrix} -2x + 4 \underset{x \to \infty}{\sim} -2x \\ x - 1 \underset{x \to \infty}{\sim} x \end{matrix} \right| = -2 .$$

Таким чином, рівняння похилої асимптоти має вигляд $y = kx + b = x - 2$, тобто $y = x - 2$ – рівняння похилої асимптоти графіка даної функції.

На рисунку зображено схематично поведінку графіка функції поблизу асимптот.



Приклад 2. Знайти похилі асимптоти графіка функції $y = x - 2\,\mathrm{arctg}\, x$.

Розв'язання

Очевидно, що задана функція не має вертикальних асимптот. Для визначення похилих асимптот знайдемо k та b.

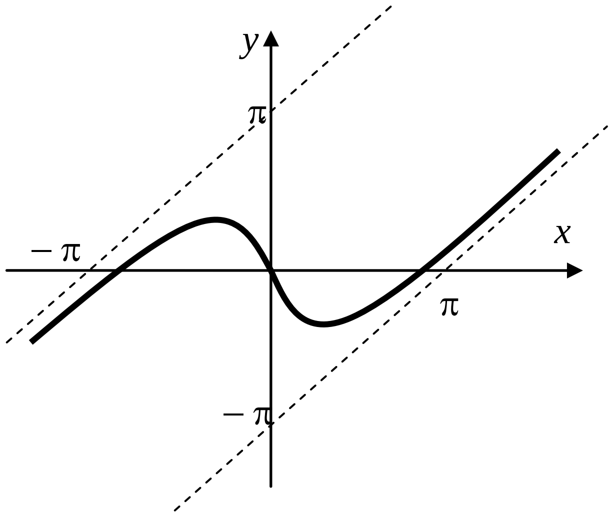
$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-2\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)=1,\text{ тому що }\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=\left|\frac{\pm\frac{\pi}{2}}{\pm\infty}\right|=0.$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left(x-2\operatorname{arctg}x-x\right)=\lim_{x\to+\infty}(-2\operatorname{arctg}x)=-2\cdot\frac{\pi}{2}=-\pi.$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}\left(x-2\operatorname{arctg}x-x\right)=\lim_{x\to-\infty}(-2\operatorname{arctg}x)=-2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$$

Графік даної функції має дві різні асимптоти: $y=x-\pi$ при $x\to+\infty$ та $y=x+\pi$ при $x\to-\infty$.

На рисунку зображено схематично поведінку графіка функції поблизу асимптот.



5.4.7. Загальна схема дослідження функції і побудови її графіка

1) Визначення області існування функції.

2) Дослідження функції на неперервність. Визначення точок розриву функції і їхнього характеру. Знаходження вертикальних асимптот.

3) Дослідження функції на парність і непарність.

4) Дослідження функції на періодичність.

5) Знаходження похилих і горизонтальних асимптот.

6) Дослідження функції на екстремум. Визначення інтервалів монотонності функції.

7) Визначення точок перегину функції, інтервалів опуклості й угнутості.

8) Знаходження точок перетинання з осями координат.

9) Дослідження поведінки функції на нескінченності.

Приклад 1. Побудувати графік функції $y=\dfrac{x^3}{2\left(x+1\right)^2}$.

1) Визначимо область існування функції: $\left(x+1\right)^2\neq 0,\ x\neq -1.$

2) Досліджуємо неперервність функції: $x=-1$ – точка розриву функції другого роду, тому що $\lim\limits_{x\to -1\pm 0}\dfrac{x^3}{2\left(x+1\right)^2}=-\infty$.

Отже, $x=-1$ – вертикальна асимптот. Зобразимо схематично поведінку графіка функції поблизу вертикальної асимптоти.

3) Досліджуємо функцію на парність:

$$y\left(-x\right)=\frac{\left(-x\right)^3}{2\left(-x+1\right)^2}=-\frac{x^3}{2\left(-x+1\right)^2};\ y\left(-x\right)\neq y\left(x\right),\ y\left(-x\right)\neq -y\left(x\right).$$

Функція загального вигляду.

4) Функція неперіодична, тому що не існує такого числа T, щоб виконувалася рівність $f\left(x+T\right)=f\left(x\right),\ \forall x\in D\left(f\right)$.

5) Визначимо похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2\left(x+1\right)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f\left(x\right)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{2\left(x+1\right)^2}-\frac{1}{2}x\right)\left|\infty-\infty\right|=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x\left(x+1\right)^2}{2\left(x+1\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3-2x^2-x}{2\left(x+1\right)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-x}{2\left(x+1\right)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2-\frac{1}{x}}{2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}=-1.$$

Отже, $y=\dfrac{1}{2}x-1$ – похила асимптота.

6) Визначимо інтервали монотонності і екстремуми функції. Для цього необхідно знайти її першу похідну і визначити точки, у яких вона дорівнює нулю або не існує:

$$y'=\frac{6x^2(x+1)^2-4(x+1)x^3}{4(x+1)^4}=\frac{x^2\left(3x^2+6x+3-2x^2-2x\right)}{2(x+1)^4}=\frac{x^2\left(x^2+4x+3\right)}{2(x+1)^4}$$

$$y'=\frac{x^2(x+1)(x+3)}{2(x+1)^4}=\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}=0,$$

$x^2=0,\ \ x=0, x+3=0, x=-3, x+1\neq 0, x\neq -1.$

y′   +   -   +   +

-3   -1   0   x

При $x\in(-\infty;-3)\cup(-1;0)\cup(0;+\infty)$ функція зростає; при $x\in(-3;-1)$ функція спадає. $y_{\max}(-3)=-\dfrac{27}{2\cdot 4}=-\dfrac{27}{8}$.

7) Визначимо інтервали опуклості та угнутості, а також точки перегину. З цією метою знайдемо другу похідну:

$$y''=\frac{1}{2}\frac{\left(2x(x+3)+x^2\right)(x+1)^3-3(x+1)^2x^2(x+3)}{(x+6)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{3x^3+6x^2+3x^2+6x-3x^3-9x^2}{(x+1)^4}=\frac{3x}{(x+4)^4}=0,\ \ x=0, x\neq -1.$$

y″   –   –   +

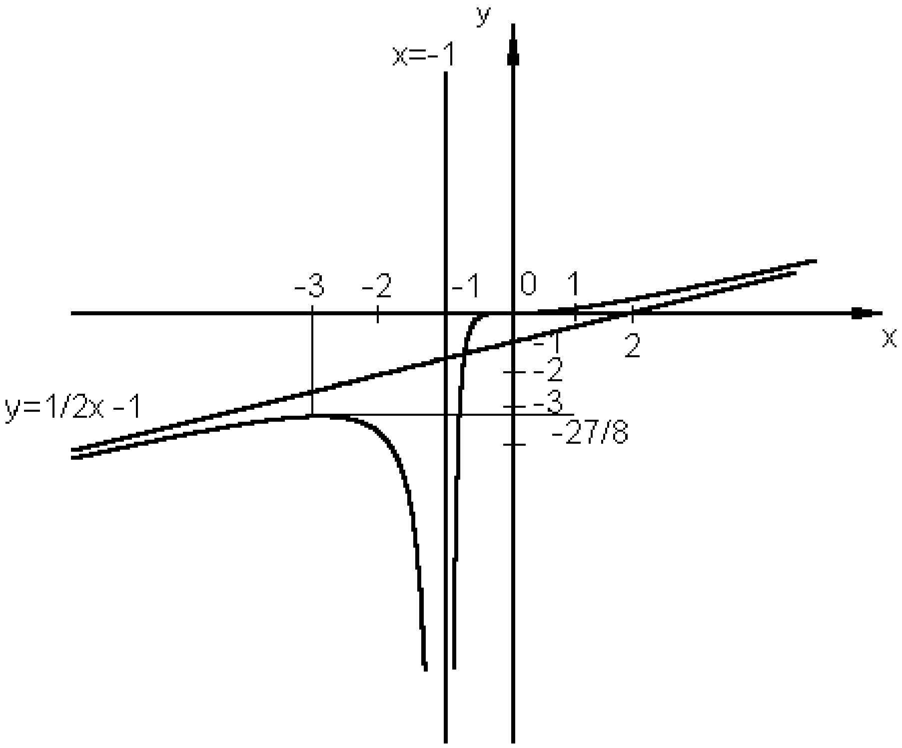
-1   0   x

При $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)$ графік опуклий; $x\in(0;+\infty)$ графік угнутий. Точка $O(0;0)$ − точка перегину.

8) Знайдемо точки перетинання графіка з осями координат: $x=0$, $y=0$.

9) Досліджуємо поводження функції на нескінченності:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=\pm\infty.$$



Приклад 2. Побудувати графік функції $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

1) ОДЗ: $x > 0$.

2) $x = 0$ – точка розриву функції, тому що

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x} = \left|\frac{\ln(+0)}{+0} = \frac{-\infty}{+0} = -\infty\cdot\frac{1}{+0} = -\infty\cdot(+\infty)\right| = -\infty .$$

$x = 0$ – вертикальна асимптота (однобічна, тому що $x > 0$).

3) Функція загального вигляду, тому що вона визначена на півосі.

4) Функція не періодична.

5) Знайдемо похилі асимптоти $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2} = \left|\frac{1}{\infty}\right| = 0.$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \left|\frac{1}{\infty}\right| = 0.$$

$y = 0$ – горизонтальна асимптота.

6) Знайдемо інтервали монотонності і екстремуми функції.

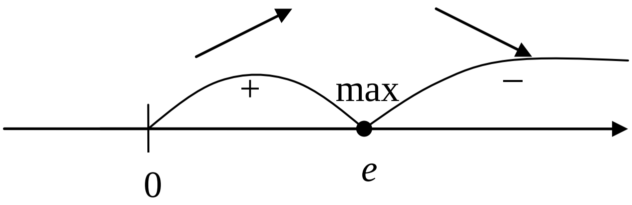
$$y' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Знайдемо критичні точки:

$y' = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$

y' не існує в точці $x = 0$. Точка $x = 0$ не може бути критичною, тому що в ній функція не визначена.

Критична точка ділить область визначення функції на два інтервали, на кожному з яких перша похідна зберігає знак.



На інтервалі $(0,\ e)$ функція зростає, а на інтервалі $(e,\ +\infty)$ функція спадає.

Точка $x = e$ – точка максимуму.

Максимум функції: $y_{\max}(e) = \dfrac{\ln e}{e} = \dfrac{1}{e}$.

7) Знайдемо інтервали опуклості, угнутості та точки перегину графіка функції.

$$y'' = \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)' = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x - 2x(1 - \ln x)}{x^4} =$$

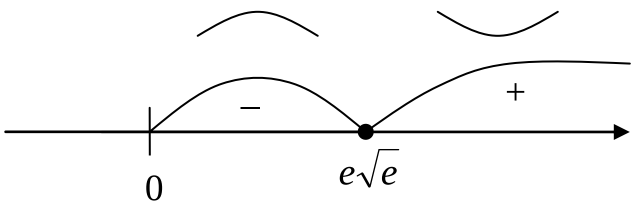
$$= \frac{-1 - 2 + 2\ln x}{x^3} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}.$$

Знаходимо точки, у яких друга похідна дорівнює 0 або не існує.

$$y'' = 0 \Rightarrow 2\ln x - 3 = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e}.$$

y'' не існує в точці $x = 0$. Точка $x = 0$ не може бути абсцисою точки перегину, тому що в ній функція не визначена.

Критична точка $x = e\sqrt{e}$ ділить область визначення функції на два інтервали, на кожному з яких друга похідна зберігає знак.



Графік функції опуклий на інтервалі $\left(0;\ e\sqrt{e}\right)$, тому що на цьому інтервалі $y'' < 0$; угнутий на інтервалі $\left(e\sqrt{e};\ +\infty\right)$, тому що на цьому інтервалі $y'' > 0$.

При переході через точку $x = e\sqrt{e}$ друга похідна змінює знак, випливає, що ця точка є абсцисою точки перегину графіка функції.

Знайдемо ординату точки перегину: $y\left(e\sqrt{e}\right) = \dfrac{\ln e\sqrt{e}}{e\sqrt{e}} = \dfrac{\ln e^{\frac{3}{2}}}{e\sqrt{e}} = \dfrac{3}{2e\sqrt{e}}$.

Точка $\left(e\sqrt{e};\ \dfrac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$ – точка перегину графіка функції.

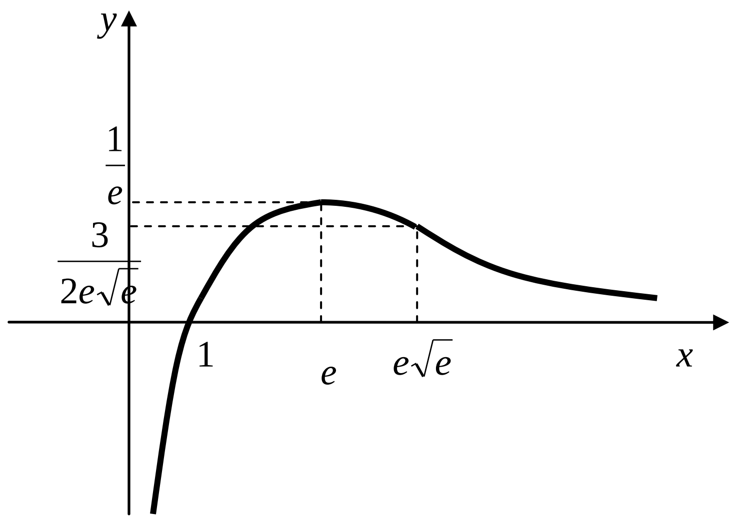
8) Знайдемо точки перетинання з осями координат.

$y = 0 \Rightarrow \dfrac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1.$

Точка $(1;\ 0)$ – точка перетинання з віссю Ox.

9) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \left|\dfrac{\infty}{\infty}\right| = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, тобто при $x \to +\infty$ функція наближується до нуля.

Побудуємо графік функції.



5.4.8. Найбільше і найменше значення функцій на відрізку

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на сегменті $[a,b]$. Тоді, за теоремою Вейєрштрасса, на цьому відрізку вона досягає свого найбільшого значення і так само свого найменшого значення. Ці значення можуть досягатися на кінцях відрізка або у внутрішніх точках, які є точками екстремуму функції. Звідси випливає така схема відшукання найбільших і найменших значень:

1) Знайти всі критичні точки функції, що лежать усередині відрізка $[a,b]$.

2) Обчислити значення функції в знайдених критичних точках і на кінцях відрізка.

3) Із усіх отриманих значень вибрати найбільше і найменше. Вони й будуть шуканими значеннями, тобто значеннями абсолютного максимуму і мінімуму.

Приклад 1. Визначити найбільше й найменше значення функції $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ на відрізку $[-1,4]$.

Розв'язання

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.

$3x(x-2) = 0$ при $x = 0$ й $x = 2$.

Таким чином, дана функція має дві стаціонарні точки $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$ усередині відрізка $[-1,4]$. Обчислимо значення функції в цих точках і на кінцях відрізка:

$f(0) = 1;\ f(2) = -3;\ f(-1) = -3;\ f(4) = 17$.

Випливає, найбільшого значення функція набуває на правому кінці відрізка, найменшого – у внутрішній точці x=2 і на лівому кінці відрізка.

За допомогою теорії екстремумів розв’язується багато задач геометричного і фізичного характерів. Припустимо, що задано дві величини, які зв'язані функціональною залежністю, і потрібно відшукати значення однієї з них (укладене в деякому інтервалі, що може бути й необмеженим), при якому інша набуває найменшого або найбільшого значення.

Для розв'язання такої задачі насамперед варто скласти вираз для функції, за допомогою якої одна величина виражається через іншу, а потім знайти найбільше або найменше значення отриманої функції в даному інтервалі.

Приклад 2. Які повинні бути розміри циліндра, щоб при даному об'ємі його повна поверхня була найменшою?

Розв'язання. Позначимо через R радіус основи циліндра і через H його висоту. Тоді його повна поверхня

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi RH .$$

Оскільки об'єм циліндра заданий, то одна із шуканих величин, наприклад H, може бути виражена через R із формули $V = \pi R^2 H$, звідки $H = \dfrac{V}{\pi R^2}$.

Підставляючи цей вираз у формулу для S, одержимо

$$S = 2\left(\pi R^2 + \frac{V}{R}\right).$$

Таким чином, S є функцією однієї змінної R, де $R \in (0, \infty)$.

Знайдемо найменше значення цієї функції в даному інтервалі:

$$\frac{dS}{dR} = 2\left(2\pi R - \frac{V}{R^2}\right);\; 2\pi R - \frac{V}{R^2} = 0,$$

Звідки $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Оскільки $S \to \infty$ при $R \to 0$ і $S \to \infty$ при $R \to \infty$ та усередині цього інтервалу маємо лише одну стаціонарну точку, то дійдемо висновку, що при

$R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ повна поверхня S й буде найменшою. При цьому

$$H = \frac{V}{\pi R^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} .$$

Приклад 3. Прямо над центром круглого майданчика радіуса R потрібно повісити ліхтар. На якій висоті потрібно це зробити, щоб він якнайкраще освітлював доріжку, яка обмежує майданчик (Степінь освітлення предмета прямо пропорційний косинусу кута падіння променів і обернено пропорційний квадрату відстані предмета від джерела світла).

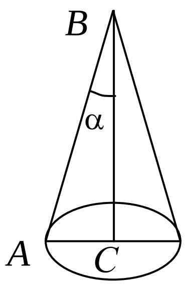


Рис.5.7

Позначимо степінь освітленості через Q. Тоді $Q = \dfrac{k\cos\alpha}{AB^2}$ (див. рис. 5.7). Позначимо шукану висоту BC через x. $AC = R$. Тоді $AB^2 = x^2 + R^2$, $\cos\alpha = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$.

Таким чином, $Q=\frac{kx}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$, де $x\in\left(0,\infty\right)$. Знайдемо похідну від утвореної функції

$$Q'=\frac{k\left(x^2+R^2\right)^{3/2}-kx\frac{3}{2}\left(x^2+R^2\right)^{1/2}2x}{\left(x^2+R^2\right)^3}=\frac{k\left(R^2-2x^2\right)}{\left(x^2+R^2\right)^{5/2}}=0.$$

Звідси знайдемо $x=\frac{R\sqrt{2}}{2}$. Оскільки при $x\to 0$ і $x\to\infty$ $Q\left(x\right)\to 0$, а усередині інтервалу маємо єдину стаціонарну точку і $Q\left(x\right)>0\ \forall\ x\in\left(0,\infty\right)$, то в знайденій точці $x=\frac{R\sqrt{2}}{2}$ функція $Q\left(x\right)$ набуває найбільшого значення. Випливає, ліхтар треба повісити на висоті $BC=\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Приклад 4. До ріки шириною a м під прямим кутом побудовано канал шириною b м (рис.5.8.). Якої максимальної довжини кораблі можуть входити в цей канал?

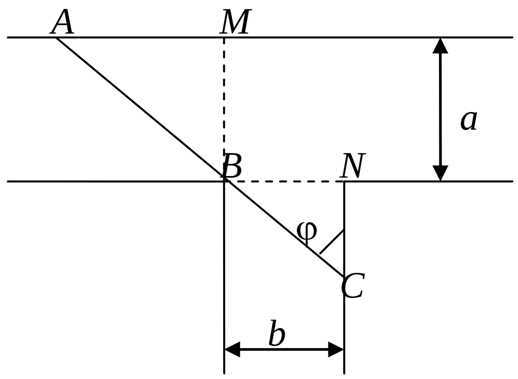


Рис. 5.8

Нехай $l=AC$ – довжина корабля. Позначимо $\angle ACN$ через φ. Очевидно, $\angle ABM=\varphi$. Тоді довжину корабля $AC=AB+BC$ можна знайти, розглядаючи прямокутні трикутники AMB та BNC.

Із трикутника AMB: $AB=\frac{a}{\cos\varphi}$, а із трикутника BNC: $BC=\frac{b}{\sin\varphi}$.

Випливає, що $l=\frac{b}{\sin\varphi}+\frac{a}{\cos\varphi}$, де $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$.

Знайдемо найменше значення функції $l(\varphi)$ на даному інтервалі.

$\dfrac{dl}{d\varphi}=-\dfrac{b\cos\varphi}{\sin^2\varphi}+\dfrac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}=0$ або $-b\cos^3\varphi+a\sin^3\varphi=0$, звідки знаходимо $\varphi=\operatorname{arctg}\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$.

Оскільки при $\varphi\to 0$ і $\varphi\to\dfrac{\pi}{2}$ $l\to\infty$, то при $\varphi=\operatorname{arctg}\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$ функція $l(\varphi)$ набуває мінімального значення, тобто максимально припустима довжина корабля є:

$$l=\frac{b}{\sin\left(\operatorname{arctg}\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)}+\frac{a}{\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)}.$$

$$\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^{2/3}}}=\frac{a^{1/3}}{\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}};$$

$$\sin\left(\operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)=\frac{b^{1/3}}{\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}.$$

Тоді $l=b^{2/3}\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}+a^{2/3}\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}=\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}$.

5.5. Елементи диференціальної геометрії

Диференціал дуги плоскої кривої обчислюється за формулами:

а) якщо крива задана рівнянням в явному вигляді $y=f(x)$, тоді $ds=\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$;

б) якщо крива задана параметричними рівняннями $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$, тоді $ds=\sqrt{\left(\varphi_t'\right)^2+\left(\psi_t'\right)^2}\,dt$.

Кривиною кривої називається границя відношення кута суміжності двох дотичних до нескінченно малої дуги кривої: $k=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}$.

Під кутом суміжності розуміють кут між дотичними, які проведено в початковій та кінцевій точках дуги M_1M_2 (рис.5.9).

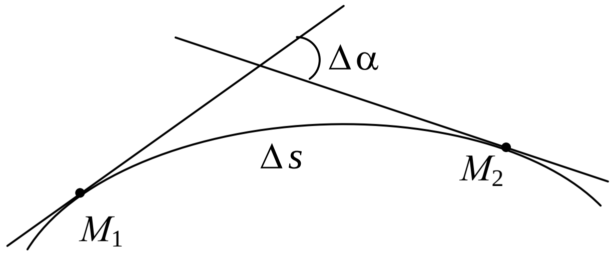


Рис. 5.9

Обчислюється кривина за формулами:

а) якщо крива явно задана, то $k=\dfrac{|f''|}{\left(1+(f')^2\right)^{3/2}}$;

б) якщо крива задана параметрично, то $k=\dfrac{|\varphi'\psi''-\varphi''\psi'|}{\left((\varphi')^2+(\psi')^2\right)^{3/2}}$.

Радіусом кривини кривої називається величина $R=\dfrac{1}{k}$.

Центр кривини кривої лежить на нормалі, в бік угнутості кривої, на відстані радіуса кривини від відповідної точки кривої.

Геометричне місце центрів кривини називається *еволютою* даної кривої. Сама ж крива по відношенню до своєї еволюти називається *евольвентою*.

5.6. Фізичні застосування похідної

Значення похідної в даній точці характеризує швидкість зміни функції в цій точці в порівнянні зі швидкістю зростання незалежної похідної. Враховуючи це, можно використовувати поняття похідної при визначенні швидкості різних фізичних процесів.

Приклад 1. Резервуар, який має форму напівкулі з внутрішнім радіусом R(м), заповнюється водою зі швидкістю Q(л) на секунду. Визначити швидкість підвищення рівня води в резервуарі в той момент, коли він буде дорівнювати 0,5 R.

Розв'язання. Позначимо через h рівень води в метрах, а через V її об'єм в м^3.

Об'єм сегмента кулі: $V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$.

Продиференціюємо цю рівність за часом t:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt} = \pi\left(2h\left(R-\frac{h}{3}\right)-\frac{1}{3}h^2\right)\cdot\frac{dh}{dt} = \pi\left(2Rh - h^2\right)\frac{dh}{dt}.$$

За умовою

$$\frac{dV}{dt} = 0{,}001Q \quad \frac{м^3}{с}.$$

Отже,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0.001Q}{\pi h(2R-h)} \quad \left(\frac{м}{с}\right).$$

При $h = \frac{R}{2}$ отримаємо $\frac{dh}{dt} = \frac{0{,}004Q}{3\pi R^2} \quad \left(\frac{м}{с}\right)$.

Приклад 2. Пліт підтягується до берега за допомогою каната, який намотується на коловорот зі швидкістю 3 м/хв. Визначити швидкість руху плоту в той момент, коли відстань від нього до берега буде дорівнювати 25 м, якщо коловорот розташований на березі вище поверхні води на 4 м.

Розв'язання. Позначимо через S довжину каната між коловоротом та плотом і через x – відстань від плоту до берега, тоді $S^2 = x^2 + 4^2$.

Продиференціюємо це співвідношення за часом t:

$$2S\frac{dS}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}, \quad \text{звідки} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{S}{x}\frac{dS}{dt}.$$

Оскільки $\frac{dS}{dt} = 3$; $x = 25$, то $S = \sqrt{25^2 + 4^2}$.

Звідки одержуємо $\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{25^2+4^2}}{25}\cdot 3 \approx 3.03$ м/хв.

Приклад 3. Драбина довжиною 10 м одним кінцем притулена до вертикальної стіни, а іншим спирається на підлогу. Нижній кінець відсувається від стіни зі швидкістю 2 м/хв. З якою швидкістю опускається верхній кінець драбини, починаючи з того моменту, коли основа знаходиться на відстані 6 м від стіни? Який напрямок має вектор швидкості?

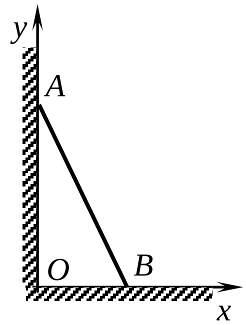


Рис. 5.8

Розв'язання. Нехай драбина в момент часу t займає положення AB (рис 27). Відрізок OB дорівнює $2t$ м, довжину AO

знайдемо за теоремою Піфагора: $AO = S(t) = \sqrt{100 - 4t^2}$, де $0 \le t \le 5$.

Закон зміни швидкості опускання верхнього кінця драбини знайдемо як похідну від функції $S(t)$.

Нижній кінець драбини буде знаходитися на відстані 6 м від стіни в кінці третьої хвилини. При цьому $\upsilon(3) = -12/8$ (м/хв). Знак мінус вказує на те, що вектор швидкості буде спрямований вертикально вниз.

Приклад 4. Без урахування опору повітря та внутрішнього тертя струмінь води, що витікає з насадки дощувального апарата під кутом α до горизонту, рухається за законом

$$\begin{cases} x = \upsilon_0 t \cos\alpha \,, \\ y = \upsilon_0 t \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2} \,, \end{cases} \tag{5.9}$$

де υ_0 – початкова швидкість струменя; g – прискорення вільного падіння. Визначити величину швидкості струменя в довільний момент часу t та в момент його удару об землю.

Розв'язання. Вилучимо в струмені води елементарну частинку. Траєкторія її польоту – струмінь, який може бути описаний параметричними рівняннями (5.9). Вектор швидкості υ руху частинки в довільний момент часу t спрямований по дотичній до траєкторії. Величини υ_x та υ_y складових вектора швидкості по осях координат Ox та Oy дорівнюють відповідно похідним від функцій $x(t)$ та $y(t)$ за часом t:

$$\upsilon_x = x'_t = \upsilon_0 \cos\alpha \,, \quad \upsilon_y = y'_t = \upsilon_0 \sin\alpha - gt \,.$$

Величину υ швидкості руху частинки, а отже, і струменя, в довільний момент часу t знайдемо як геометричну суму величин її складових υ_x та υ_y:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{(\upsilon_0 \cos\alpha)^2 + (\upsilon_0 \sin\alpha - gt)^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2\upsilon_0 gt \sin\alpha + g^2 t^2} \,.$$

Момент удару струменя об землю знайдемо з умови y=0, що дає $t_0 = (2\upsilon_0 / g)\sin\alpha$. Підставляючи знайдене значення t_0 у вираз для υ, знайдемо величину швидкості струменя в момент його удару об землю:

$$\upsilon(t_0) = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2\upsilon_0 \sin\alpha \frac{g \cdot 2\upsilon_0}{g} \sin\alpha + \frac{g^2 \cdot 4\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{g^2}} =$$

$$= \sqrt{\upsilon_0^2 - 4\upsilon_0^2 \sin^2\alpha + 4\upsilon_0^2 \sin^2\alpha} = \upsilon_0 \,.$$

Приклад 5. Швидкість руху тіла пропорційна часу. Скласти рівняння руху тіла, якщо відомо, що за перші 3 секунди руху воно пройшло шлях довжиною 18 м.

Розв'язання. Згідно з умовою, швидкість руху пропорційна часу, тобто може бути подана у вигляді $V = kt$, де k − коефіцієнт пропорційності. Знайдемо прискорення, з яким рухається тіло. Як відомо, прискорення визначається як похідна від швидкості $a = V' = k$. Рух тіла рівноприскорений (прискорення є сталою величиною), тобто воно описується рівнянням $S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$. В початковий момент часу $t_0 = 0$, швидкість тіла дорівнює $V_0 = kt_0 = 0$. Тоді закон руху тіла виглядає так: $S = \frac{kt^2}{2}$. В момент часу $t = 3$с цей шлях дорівнює $S = 18$м, знайдемо значення коефіцієнта пропорційності $k -\ 18 = \frac{k3^2}{2} \Rightarrow k = 4$(м/с^2). Рівняння руху тіла $S = \frac{4t^2}{2} = 4t^2$ (м).

Приклад 6. Залежність шляху від часу при прямолінійному русі точки задається рівнянням $S = \frac{t^5}{5} + \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)$($t$ – в секундах, S – в метрах). Визначити швидкість руху в кінці другої секунди.

Розв'язання. Знаходимо похідну шляху за часом

$$\frac{dS}{dt} = t^4 + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi t}{8}\right).$$

При $t = 2$ маємо $\frac{dS}{dt} = 16 + \frac{1}{8}\sqrt{2} \approx 16{,}18$. Тобто $v \approx 16{,}18$м/с.

Приклад 7. Заданий закон зміни кількості електрики Q, яка протікає через поперечний переріз провідника за час t: $Q = -2\cos 2t$. Знайти силу струму в будь-який момент часу; при $t = 2\pi(c)$.

Розв'язання. Сила струму в будь-який момент часу визначається як $I = \frac{dQ}{dt} = 4\sin 2t$, в момент часу $t = 2\pi(c)$ сила струму дорівнює $I = 4\sin 4\pi = 0\,(a)$.

Контрольні приклади до гл. 5

Приклад 5.1. Знайти похідну функції $y = 3\cdot\sqrt[3]{x} - 7\cdot\log_5 x + \dfrac{4}{x}$.

Розв'язання. $y' = \boxed{*}\cdot x^{\boxed{*}} - \dfrac{7}{x\cdot\boxed{*}} - \dfrac{\boxed{*}}{x^2}$.

Приклад 5.2. Знайти похідну функції $y = \sin^3(\operatorname{tg}2x - 5)$.

Розв'язання. $y' = \boxed{*}\cdot\sin^2\left(\boxed{*}\right)\cdot\cos(\operatorname{tg}2x-5)\cdot\dfrac{\boxed{*}}{\cos^2\left(\boxed{*}\right)}$.

Приклад 5.3. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = e^{\arcsin x}$ в точці $M_0(0;1)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$: $\quad y - f\left(\boxed{*}\right) = f'(x_0)\left(x - \boxed{*}\right)$.

Знайдемо похідну:

$y'(x) = e^{\boxed{*}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\boxed{*}}}$, $x_0 = \boxed{*}$;

визначити кутовий коефіцієнт дотичної: $y'(x_0) = \boxed{*}$. Рівняння дотичної: $y - \boxed{*} = \boxed{*}\cdot x$.

Приклад 5.4. Знайти диференціал функції $y = (\operatorname{ctg} x)^{e-6x}$.

Розв'язання. Запишемо формулу для диференціала функції: $dy = \boxed{*}dx$. Знайдемо $y'(x)$ за допомогою логарифмічного диференціювання: $\ln y = \left(\boxed{*}\right)\cdot\ln\operatorname{ctg} x \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = \boxed{*}\cdot\ln\operatorname{ctg} x + \left(\boxed{*}\right)\cdot\dfrac{1}{\boxed{*}}\cdot\dfrac{-1}{\sin^2 x}$.

$dy = (\operatorname{ctg} x)^{e-6x}\cdot\left[\boxed{*}\cdot\ln\operatorname{ctg} x + \left(\boxed{*}\right)\cdot\dfrac{1}{\boxed{*}}\cdot\dfrac{-1}{\sin^2 x}\right]\cdot\boxed{*}$.

Приклад 5.5. Обчислити приблизно $3^{0,01} - 0,01^3$.

Розв'язання. Формула для наближених обчислень:

$y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + y'(x_0)\cdot\boxed{*}$.

Уведемо функцію $y = 3^x - x^3$, $x_0 + \Delta x = 0.01$, $x_0 = 0$; $\Delta x = \boxed{*}$,

$y(x_0) = \boxed{*}$. $\quad y'(x) = \boxed{*}\cdot 3^x - 3x^{\boxed{*}} \Rightarrow y'(x_0) = \boxed{*}$; $3^{0,01} - 0,01^3 \approx \boxed{*} + \boxed{*}\cdot 0,01$.

Приклад 5.6. Знайти другий диференціал функції $y = x^{20} - \frac{1}{6}\cos 3x$.

Розв'язання. Запишемо формулу для обчислення диференціала другого порядку: $d^2y = \boxed{*} \cdot dx^2$.

$y' = \boxed{*} \cdot x^{19} + \boxed{*} \cdot \sin \boxed{*}$, $y'' = \boxed{*} \cdot x^{\boxed{*}} + \boxed{*} \cdot \cos 3x$, $d^2y = \left(\boxed{*} \cdot x^{\boxed{*}} + \boxed{*} \cdot \cos 3x\right)\boxed{*}$.

Приклад 5.7. За допомогою правила Лопіталя обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \cdot e^{-0.01\cdot x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \cdot e^{-0.01\cdot x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^{\boxed{*}\cdot x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{\boxed{*} \cdot e^{\boxed{*}\cdot x}} = \left\| \dfrac{\infty}{\infty} \right\| = \boxed{*} \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^{\boxed{*}\cdot x}} =$

$= \boxed{*} \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\boxed{*} \cdot e^{\boxed{*}\cdot x}} = \left\| \dfrac{1}{\boxed{*}} \right\| = \boxed{*}$.

Лабораторна робота 5. Обчислення похідних і побудова графіків функцій у системі Maple

Завдання 1. Знайти похідні функцій, заданих явно:

1) $y = \operatorname{arctg}(3x+5) \cdot 3^{\sin 2x} + \dfrac{x^{\frac{5}{8}}}{\ln(1+\cos x)}$,   2) $y = \dfrac{1-x^3}{1+x^3} \cdot \arccos 5x$,

3) $y = (\cos 5x)^x$;

4) знайти похідну параметрично заданої функції $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$;

5) знайти похідну функції, заданої неявно: $\sqrt{x} \cdot y + \sin(x+y) = 4$;

6) написати рівняння дотичній і нормалі до кривої $y = x^3 - 3x^2 - 2$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Виконання. Для знаходження похідних явно заданих функцій використаємо команду **diff(expr,var)**, де **expr –** вираз, що диференціюється, **var –** змінна, за якою ведеться диференціювання.

1) **> diff(arctan(3*x+5)*3^sin(2*x)+x^(5/8)/ln(1+cos(x)),x);**

$$3\frac{3^{\sin(2x)}}{1+(3x+5)^2} + 2\operatorname{arctg}(3x+5) \cdot 3^{\sin(2x)} \cdot \cos(2x)\ln(3) +$$

$$+\frac{5}{8}\frac{1}{x^{\frac{3}{8}}\cdot\ln\left(1+\cos(x)\right)}+\frac{x^{\frac{5}{8}}\cdot\sin(x)}{\ln^2\left(1+\cos(x)\right)\cdot\left(1+\cos(x)\right)},$$

2) > **diff(((1-x^3)/(1+x^3))*arccos(5*x),x);**

$$-3\frac{x^2\arccos(5x)}{1+x^3}-3\cdot\frac{\left(1-x^3\right)\cdot\arccos(5x)\cdot x^2}{\left(1+x^3\right)^2}-5\frac{\left(1-x^3\right)}{\left(1+x^3\right)\left(1-25x^2\right)^{1/2}},$$

3) > **diff((cos(5*x))^x,x);**

$$\left(\cos(5x)\right)^x\left(\ln\left(\cos(5x)\right)-5\frac{x\sin(5x)}{\cos(5x)}\right).$$

4) Для обчислення похідної параметрично заданої функції використаємо формулу $\frac{dy}{dx}=\frac{\left(dy/dt\right)}{\left(dx/dt\right)}$, позначимо $\frac{dy}{dx}=$ proizv.

> **proizv:=diff(3*(1-cos(t)),t)/diff(3*(t-sin(t)),t);**

$$proizv=\frac{3\sin t}{3-3\cos t},$$

спрощуємо отриманий вираз

>**simplify(proizv);**

$$-\frac{\sin t}{-1+\cos t}.$$

5) Для одержання явного виразу похідної функції, заданої неявно, складемо невелику програму.

> **restart;**

> **alias(y=y(x)):** (задаємо *y* як функцію від *x*),

> **expr:=sqrt(x)*y+sin(x+y)=4;** (рівняння неявно заданої функції);

$$\exp r:=x^{\frac{1}{2}}y+\sin(x+y)=4;$$

> **s:=diff(expr,x);**

$$s:=\frac{1}{2}\frac{y}{x^{\frac{1}{2}}}+x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\cos(x+y)\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)=0;$$

> **p:=indets(s);** (ця команда перераховує всі компоненти у виразі **s, що** містять змінні):

$$p := \left(\left(\frac{dy}{dx}\right),\ \cos(x+y),\ x,\ y,\ \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}},\ x^{\frac{1}{2}} \right),$$

оскільки вираз $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ знаходиться в списку першим, то він сприймається пакетом як $p[1]$. Розв'яжемо рівняння s щодо змінної $p[1]$ і присвоємо отримане значення змінної proiz, це й буде похідна функції, заданої неявно.

> **proiz:=solve(s,p[1]);**

$$proiz := -\frac{1}{2}\frac{y + 2\cos(x+y)\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x + \cos(x+y)\cdot x^{\frac{1}{2}}}.$$

6) У даній програмі прийняті позначення f – рівняння кривої, x0,y0 − координати точки, через яку проходять шукані дотична і нормаль, k1 − кутовий коефіцієнт дотичної, k2 − кутовий коефіцієнт нормалі, k − аналітичний вираз похідної $\left(\frac{df}{dx}\right)$.

> **restart;**

> **f:=x^3-3*x^2-2;**

$$f := x^3 - 3x^2 - 2;$$

> **x0:=1;**

x0 := 1,

> **y0:=subs(x=x0,f);** (обчислення $y0$);

y0 := -4,

>**k:=diff(f,x);**

$$k := 3x^2 - 6x;$$

> **k1:=subs(x=x0,k);** (обчислення значення похідної при $x = x0$);

$$k1 := -3,$$

> **k2:=-1/k1;**

$$k2 := 1/3,$$

> **'KASATELNAYA';(y-y0)=k1*(x-x0);** (складається і виводиться рівняння дотичної):

KASATELNAYA

$$y + 4 := -3x + 3,$$

> **'NORMAL';(y-y0)=k2*(x-x0);** (складається і виводиться рівняння нормалі),

$$NORMAL$$
$$y+4:=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}.$$

Завдання 2. Методами диференціального числення дослідити функцію $f(x)=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ і побудувати її графік.

Виконання. Дане завдання зручніше виконувати в інтерактивному режимі. Для визначення точок, у яких порушується неперервність виразу **expr** за змінною **x,** буде використана команда **discont(expr,x)**; для побудови графіка функції буде використана команда **plot**([name1,name2], x=x1..x2, y=y1..y2, color=[black,black], thickness=[1,3]), де name1,name2 – ідентифікатори або рівняння зображуваних ліній, x1..x2, y1..y2 – межі зміни змінних x і y на графіку, color[], thickness[] – параметри, що керують кольорами і товщиною зображуваних кривих. Уведено наступні позначення: **f** – досліджувана функція, **a** – масив, що містить координати точок розриву (формується автоматично при виконанні команди **discont**); **r1, r2** – значення лівосторонньої і правосторонньої границь у точці розриву; **k1, b1 –** кутовий коефіцієнт і вільний член у рівнянні похилої асимптоти при $x\to\infty$(**eqn1 –** рівняння цієї асимптоти); **k2, b2, eqn2** – аналогічні величини при $x\to-\infty$; **proizv –** вираз похідної функції **f**; **krit1** – масив значень критичних точок; **rez1, rez2, rez3, rez4 –** значення похідної на інтервалах монотонності; **maximum** – значення функції в точці максимуму; **asymp − ідентифікатор** похилої асимптоти.

> **restart:**

> **f:=x^3/(2*(x+1)^2);** (задаємо функцію)

$$f:=\frac{1}{2}\frac{x^3}{(x+1)^2},$$

> **a:=discont(f,x);** **(**знаходимо точку розриву),

$$a:=\{-1\},$$

знаходимо однобічні границі,

> **r1:=limit(f,x=a[1],left);**

> **r2:=limit(f,x=a[1],right);**

$$r1:=-\infty,\quad r2:=-\infty.$$

Оскільки обидві однобічні границі нескінченні, то в точці $x=-1$ функція має розрив другого роду, тобто, $x=-1$ − рівняння вертикальної асимптоти.
Знаходимо похилі асимптоти:
> **k1:=limit(f/x,x=infinity);**

$$k1 := \frac{1}{2},$$

> **b1:=limit(f-k1*x,x=infinity);**

$$b1 := -1,$$

> **eqn1:=y=k1*x+b1;**

$$eqn1 := y = \frac{1}{2}x - 1,$$

> **k2:=limit(f/x,x=-infinity);**

$$k2 := \frac{1}{2},$$

> **b2:=limit(f-k2*x,x=-infinity);**

$$b2 := -1,$$

> **eqn2:=y=k2*x+b2;**

$$eqn2 := y = \frac{1}{2}x - 1.$$

Графік функції має одну похилу асимптоту при $x \to \pm\infty$.
> **asymp:=k1*x+b1:**
> **proizv:=simplify(diff(f,x));** (обчислюємо похідну і спрощуємо отриманий вираз),

$$proizv := \frac{1}{2}\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3};$$

> **eqn3:=proizv=0;** (дорівнюємо похідну нулю),

$$eqn3 := \frac{1}{2}\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3} = 0;$$

> **solve(eqn3);** (знаходимо точки, у яких похідна дорівнює нулю),

$$-3, 0, 0;$$

> **discont(proizv,x);** (знаходимо точки, у яких похідна не існує),

$$\{-1\};$$

> **krit1:=[-3,-1,0];** (масив критичних точок першого роду),

$$krit1 := [-3, -1, 0];$$

інтервали монотонності функції $(-\infty,-3),(-3,-1),(-1,0),(0,+\infty)$.Визначимо знак похідної на кожному з інтервалів.

> **rez1:=subs(x=-4,proizv);**

$$rez1 := \frac{8}{27},$$

на інтервалі $(-\infty,-3)$ похідна додатна, тому функція зростає;

> **rez2:=subs(x=-2,proizv);**

$$rez2 := -2,$$

на інтервалі $(-3,-1)$ похідна від'ємна, тому функція спадає;

> **rez3:=subs(x=-0.5,proizv);**

$$rez3 := 2{,}50000,$$

на інтервалі $(-1,0)$ похідна додатна, тому функція зростає;

> **rez4:=subs(x=1,proizv);** $\qquad rez4 := \frac{1}{4},$

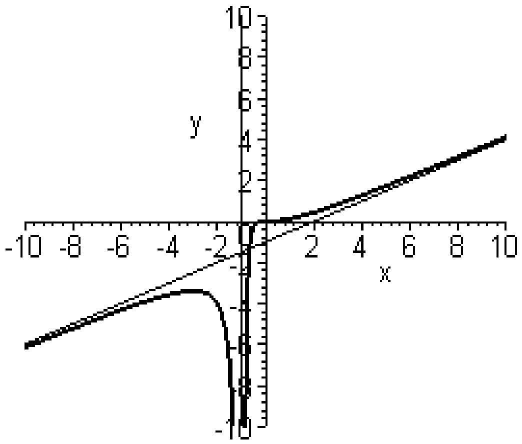
на інтервалі $(0,+\infty)$ похідна додатна, тому функція зростає. У точці $x=-3$ похідна змінює знак з "+" на "-",
отже, у цій точці функція має максимум. Обчислимо значення функції в точці максимуму.

> **maximum:=subs(x=-3,f);**

$$\max imum := \frac{-27}{8}.$$

Будуємо графік функції.

>plot([f,asymp,[[-1,10],[-1,-10]]],x=-10..10,y=-10..10, color=[black,black], thickness=[2,1,1]);



Контрольні завдання до гл. 5

Завдання 1. У задачах – пункти "1", "2","3","4" – знайти похідні даних функцій; у пункті "5" продиференціювати неявно задану функцію; у пункті "6" обчислити наближено за допомогою диференціала значення функції при даному значенні *x*; у пункті "7" розв'язати задачу.

5.1.1.

1) $y = e^{2x}\operatorname{arctg}2x + \dfrac{\ln x}{x}$; 2) $y = \ln^5\left(\operatorname{tg}\sqrt[3]{x}\right)$; 3) $y = \left(\ln x\right)^{\sin 3x}$;

4) $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t}, \\ y = \dfrac{t-1}{t}; \end{cases}$ 5) $\sqrt{xy} + \sin x + \sin a = 0$; 6) $y = x^3 + 3x^2 - 7, \quad x = 2{,}03.$

7) Написати рівняння дотичної до кривої $y=x\ln x$, що паралельна прямій $y-x-5=0$.

5.1.2.

1) $y = (x^2 - 2x + 3)e^{3x} - \dfrac{x}{\ln x}$; 2) $y = 5^{\arcsin^2(x^3 - x + 1)}$; 3) $y = \left(\cos 3x\right)^x$;

4) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$ 5) $y^3\sin x + a^2\cos 2x = 5a$; 6) $y = e^{x^2 - x}, \quad x = 1{,}12.$

7). Написати рівняння нормалі до кривої $y=x-1/x$, яка паралельна прямій $2y+x+3=0$.

5.1.3.

1) $y = x\operatorname{tg}3x - \dfrac{5^x}{\sqrt{7x}}$; 2) $y = \arccos^2\left(\ln\dfrac{x}{1+x^2}\right)$; 3) $y = \left(\sin 3x\right)^{\ln x}$;

4) $\begin{cases} x = \ln\left(1 + t^2\right), \\ y = t - \operatorname{arctg}t; \end{cases}$ 5) $y^2 - 2xy + \sin(x+y) = \cos a$; 6) $y = e^{2-x}, \quad x = 1{,}97.$

7) Записати рівняння дотичної до кривої $y = 2 - \sqrt{x}$, яка перпендикулярна до прямої $y - 4x - 4=0$.

5.1.4.

1) $y = \dfrac{e^{2x}\left(\cos 3x + \sin 3x\right)}{\ln x}$; 2) $y = \sin^3\left(\cos 3x\right)$; 3) $y = \left(\sin\dfrac{3}{x}\right)^{x^3}$;

4) $\begin{cases} x = t\ln t, \\ y = \dfrac{t-1}{\sin t}; \end{cases}$ 5) $x^4 + y^4 = x^2y^2$; 6) $y = \left(x^2 - 3\right)^2\left(x + 2\right), \quad x = 3{,}011.$

7) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=\dfrac{x^2+1}{x^3-1}$ в точці з абсцисою $x_0=-1$.

5.1.5. 1) $y=x^{\frac{2}{3}}\arccos 2x-\dfrac{2x+3}{\operatorname{tg}3x}$; 2) $y=\ln^3 x+3^{\operatorname{tg}3x}$; 3) $y=(\sin x)^{\sqrt{x}}$;

4) $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=b\sin^3 t; \end{cases}$ 5) $\sin(x+y)+\cos(x+y)=\sin a$; 6) $y=\arcsin 3x, x=0,05.$

7) Записати рівняння дотичної до кривої $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x^2}$ в точці з абсцисою $x_0=3$.

5.1.6. 1) $y=\sqrt{x}\cos x+\dfrac{3x^2+7}{\arcsin 2x}$; 2) $y=e^{\cos^3\left(\ln\frac{1-x}{x^2}\right)}$; 3) $y=x^{\sin x}$;

4) $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t; \end{cases}$ 5) $x^y=y^x$; 6) $y=\operatorname{arctg}x, \quad x=0,98.$

7) Записати рівняння дотичної до кривої $y=\dfrac{1}{1+x^2}$, що перпендикулярна прямій $y=2x$.

5.1.7. 1) $y=3^{\sin^2\ln x}$; 2) $y=\dfrac{x^2e^{2x}}{\operatorname{arctg}2x}$; 3) $y=x^{\cos 2x}$;

4) $\begin{cases} x=4-t^2, \\ y=t-t^3; \end{cases}$ 5) $\cos(xy)=\sin(xy)$; 6) $y=2^{x-3}, \quad x=2,08.$

7) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$ в точці з абсцисою $x_0=1$.

5.1.8. 1) $y=\dfrac{x\cos 4x}{1+\operatorname{tg}4x}$; 2) $y=\sin^5\left(4^{\operatorname{arctg}2x}\right)$; 3) $y=(\cos 2x)^{\operatorname{tg}2x}$;

4) $\begin{cases} x=t(1-\sin t), \\ y=t\cos t; \end{cases}$ 5) $ye^x-\operatorname{tg}xy=e^a$; 6) $y=\ln x, \quad x=1,13.$

7) Записати рівняння дотичної до кривої $y=x\cos x$, яка перпендикулярна прямій $y+x+3=0$.

1) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}\,2^x}{1+\cos 5x}$; 2) $y=e^{\sqrt{\cos^3 x}\,\mathrm{tg}\,3x}$; 3) $y=(\mathrm{tg}\,3x)^x$;

5.1.9. 4) $\begin{cases} x=\dfrac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y=\dfrac{t}{t^2-1}; \end{cases}$ 5) $y-x=\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{y}$; 6) $y=\sqrt{1+x}$, $x=3{,}01$.

7) Записати рівняння нормалі до кривої $y=e^{1-x^2}$, яка перпендикулярна прямій $y+2x-4=0$.

5.1.10. 1) $y=\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{x+x}}\right)\cos 4x$; 2) $y=\ln^3 \mathrm{tg}\,\dfrac{x-1}{1-2x}$; 3) $y=(\sin 5x)^{x^5}$;

4) $\begin{cases} x=e^t \sin t, \\ y=e^t \cos t; \end{cases}$ 5) $y\sin x-\cos(x-y)=0$; 6) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$, $x=0{,}02$.

7) Записати рівняння нормалі до кривої $y=\sqrt[3]{1-x}$ в точці з абсцисою $x_0=0$.

5.1.11. 1) $y=\left(\sqrt{x+x^3}\right)\mathrm{tg}\,3x$; 2) $y=\cos\left(5^{\ln x}\right)$; 3) $y=\dfrac{x^3 e^{3x}\sin 2x}{\cos 3x}$;

4) $\begin{cases} x=5\cos^3 t, \\ y=5\sin^3 t; \end{cases}$ 5) $x\sin y-\cos y+\cos 2x=0$; 6) $y=\arccos x$, $x=0{,}01$.

7) Записати рівняння дотичної до кривої $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$, яка паралельна прямій $2y-x+5=0$.

5.1.12. 1) $y=\dfrac{\arccos 3x}{\arcsin 6x}$; 2) $y=\mathrm{tg}^3\sin(\ln 2x)$; 3) $y=\left(1+x^2\right)^{x^3}$; 4) $\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t}, \\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^3}; \end{cases}$

5) $x+y=\arcsin x+\arcsin y$; 6) $y=x^3-4x^2+6x+3$, $x=1{,}04$.

7) Записати рівняння дотичної до кривої $y=\mathrm{arctg}x$, яка перпендикулярна прямій $y+2x+3=0$.

5.1.13. 1) $y=\dfrac{3x^3-5x^2+7}{\mathrm{arctg}\,3x}$; 2) $y=\sqrt[3]{\ln^2\dfrac{\sin x}{5-x^2}}$; 3) $y=x^2\sin 2x(x+3)^5$;

4) $\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t); \end{cases}$ 5) $3^{x+y}=3^x-3^y$; 6) $y=\sqrt[3]{1+x}$, $x=6{,}93$.

7) Записати рівняння нормалі до кривої y=arccos$3x$, яка перпендикулярна прямій y+3x+3=0.

5.1.14.

1) $y = \cos 4x \cdot 2^x - 5\operatorname{tg} 4x$; 2) $y = 3^{\arccos^2(\operatorname{tg} 4x)}$; 3) $y = (\operatorname{tg} 4x)^{\ln x}$;

4) $\begin{cases} x = 5^t\left(t^2+1\right), \\ y = 5^t(1-t); \end{cases}$ 5) $y\ln(x+y) = \ln a$; 6) $y = e^{2-x-x^2}$, $x = -1{,}94$.

7) Записати рівняння дотичної до кривої $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ в точці з абсцисою x_0=2.

5.1.15.

1) $y = e^{3x}\ln x - 3\arccos 3x$; 2) $y = \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 \ln\sqrt{x}}$; 3) $y = (\sin 2x)^{\operatorname{ctg} 2x}$;

4) $\begin{cases} x = \dfrac{1-t^2}{t}, \\ y = \dfrac{t^3}{1+t}; \end{cases}$ 5) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$; 6) $y = \sqrt{9+x^2}$, $x = 4{,}01$.

7) Записати рівняння нормалі до кривої $y = \sqrt{1+x^2}$ в точці з абсцисою x_0=0.

5.1.16.

1) $y = \dfrac{\cos 7x + 3}{\ln x + 4}$; 2) $y = \sin^2 \dfrac{x^5 - x}{2-x}$; 3) $y = (\sin 5x)^{\cos 5x}$;

4) $\begin{cases} x = 3^t \cos t, \\ y = 3^t \sin t; \end{cases}$ 5) $\operatorname{tg} y = a\operatorname{tg} x$; 6) $y = \sqrt[3]{3x + \cos x}$, $x = 0{,}01$.

7) Записати рівняння дотичної до кривої y=$x$sin2x , яка паралельна прямій $y+\pi x$+9=0.

5.1.17.

1) $y = 4x^{-3/2} + x\sqrt[4]{x} - 1$; 2) $y = \sin\sqrt[3]{1+x^3}$; 3) $y = \left(x^3+5\right)^{\operatorname{ctg} 5x}$;

4) $\begin{cases} x = t^3 \ln t, \\ y = (1-t)\sqrt{t}; \end{cases}$ 5) $y = \operatorname{tg}^2(y-x)$; 6) $y = \operatorname{arctg} x^2$, $x = 0{,}97$.

7) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = \dfrac{x^3+1}{x^2+4}$ в точці з абсцисою x_0=–1.

1) $y=\cos 2x\cdot 2^{x}-5\operatorname{tg}3x$; 2) $y=\dfrac{\ln x}{\cos^{3}3x}$; 3) $y=\left(\cos 3x\right)^{\sin 5x}$;

5.1.18. 4) $\begin{cases} x=t^{3}\cos t, \\ y=\left(t^{2}-1\right)\sin t; \end{cases}$ 5) $e^{xy}=\arcsin x$; 6) $y=\sqrt[3]{2+x^{2}}$, $x=4{,}97$.

7) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=e^{\sqrt{x}-1}$ в точці з ординатою y_0=e.

1) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}\cdot\operatorname{tg}3x}{1+\cos 4x}$; 2) $y=\sqrt{\dfrac{2-\sin x}{2+\sin x}}$; 3) $y=\left(\operatorname{ctg}5x\right)^{x/3}$;

5.1.19. 4) $\begin{cases} x=\dfrac{t^{3}-3}{2t}, \\ y=\dfrac{t^{2}+1}{\ln t}; \end{cases}$ 5) $x^{3}+ax^{2}y+y^{3}=a$; 6) $y=\dfrac{x^{3}-2}{x^{2}+1}$, $x=1{,}07$.

7) Записати рівняння дотичної до кривої $y=e^{\cos x}$, яка паралельна прямій $y+x+3=0$.

1) $y=\dfrac{x+\arcsin 2x}{3x+\operatorname{arctg}3x}$; 2) $y=\arcsin\left(\cos x^{3}\right)$; 3) $y=\left(\arcsin 3x\right)^{x}$;

5.1.20. 4) $\begin{cases} x=\cos^{3}t, \\ y=\sin^{3}t; \end{cases}$ 5) $\cos(xy)=e^{x+y}$; 6) $y=\sqrt[4]{2x-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$, $x=1{,}03$.

7) Записати рівняння дотичної до кривої $y=x^3-3x^2-5$, яка перпендикулярна прямій $2x-6y+1=0$.

1) $y=\sqrt[3]{x}\left(x^{2}-3\sqrt{x}+6\right)$; 2) $y=\arccos\left(\sin x^{2}\right)$; 3) $y=\left(\operatorname{arctg}3x\right)^{x+3}$;

5.1.21. 4) $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t; \end{cases}$ 5) $2y\ln y=e^{x}$; 6) $y=\left(x^{2}-1\right)^{3}\left(x+2\right)$, $x=2{,}03$.

7) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=x\ln(1+x^2)$ в точці з абсцисою $x_0=1$.

1) $y=((x+\sqrt{x}-1)\operatorname{tg}5x)/x^{3}$; 2) $y=\sqrt[4]{\ln\operatorname{tg}\frac{x}{3}}$; 3) $y=\left(\operatorname{arctg}5x\right)^{7+x}$;

5.1.22. 4) $\begin{cases} x=t/(1-t^{2}), \\ y=t^{2}/(1-t^{2}); \end{cases}$ 5) $2^{x+y}=\ln(x+y)$; 6) $y=\dfrac{x^{2}+1}{1-x}$, $x=-0{,}93$.

7) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=\sin x+\cos x$ в точці з абсцисою $x_0=\pi/4$.

5.1.23.

1) $y=\dfrac{e^{2x}\operatorname{arctg}3x}{\cos 4x}$; 2) $y=\ln^3 x+\ln(\operatorname{ctg}3x)$; 3) $y=(\sin 3x)^{\frac{5}{x}}$;

4) $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^3}, \\ y=t\sqrt{1+t}; \end{cases}$ 5) $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}=\ln y$; 6) $y=\arcsin 2x,\quad x=0{,}249.$

7) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=4^{x-x^2}$ в точці з абсцисою x_0=1.

5.1.24.

1) $y=\sqrt[4]{x^3}+3^{-2x}$; 2) $y=\sqrt[3]{\ln\sin\frac{x}{2}}$; 3) $y=(\arccos 5x)^{x+7}$;

4) $\begin{cases} x=\dfrac{t-2}{t}, \\ y=\dfrac{1-t}{\sqrt{t}}; \end{cases}$ 5) $y^3-3y+2a\ln x=0$; 6) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2},\quad x=1{,}02.$

7) Записати рівняння дотичної до кривої $y=1-\dfrac{1}{x^2}$, яка паралельна прямій $2y+32x+7=0$.

5.1.25.

1) $y=\dfrac{xe^{2x}}{\sin 2x}$; 2) $y=4^{\frac{x}{\cos 2x}}$; 3) $y=\dfrac{(x-1)^2\sqrt[3]{(x+1)^5}\,(x-3)^3}{(x^2+1)\sqrt[3]{(1-x)^5}}$;

4) $\begin{cases} x=t^5, \\ y=1-\cos t; \end{cases}$ 5) $\operatorname{arctg}\sqrt{x/y}+\sin y=\ln a$; 6) $y=\sqrt{5-x^2},\quad x=0{,}98.$

7) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=x-\operatorname{arctg}x$ в точці з абсцисою x_0=1.

5.1.26.

1) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}\cdot 2^x}{\sin 3x}$; 2) $y=5^{\operatorname{ctg}^3(\ln\sqrt{x})}$; 3) $y=(\operatorname{ctg}5x)^{\frac{7}{x}}$;

4) $\begin{cases} x=\sin t+\ln t, \\ y=\cos t+\ln t; \end{cases}$ 5) $\sin\sqrt{x+y}=\ln\operatorname{tg}y$; 6) $y=e^{2x-x^2},\quad x=2{,}014.$

7) Записати рівняння нормалі до кривої $y=x-\sqrt{x}$, яка перпендикулярна прямій $4y-3x+5=0$.

5.1.27.

1) $y=\dfrac{x\operatorname{arctg}4x}{\ln x}$; 2) $y=\ln^2 x+\ln(\ln x)$; 3) $y=(\cos 2x)^{\frac{3}{x}}$;

4) $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=\sqrt[3]{t}; \end{cases}$ 5) $\arcsin xy=2^x$; 6) $y=(3x-1)^2(x+1),\quad x=1{,}01.$

7) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=\frac{x^3-2}{x^2-4}$ в точці з абсцисою x_0=3.

5.1.28.

1) $y=\frac{e^{2x}\cdot\sin 3x}{\sqrt[4]{x}+x^2}$; 2) $y=3^{\mathrm{tg}^2\left(\ln\sqrt{x}\right)}$; 3) $y=\left(\mathrm{tg}\,4x\right)^{\frac{6}{x}}$;

4) $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t, \\ y=\sin t-t\cos t; \end{cases}$ 5) $x\ln(x+y)=a$; 6) $y=\mathrm{arctg}\frac{x}{2}$, $x=2,031$.

7) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=\sqrt[3]{x^2-1}$ в точці з абсцисою x_0=1.

5.1.29.

1) $y=\frac{\sqrt{x}\cdot\cos 5x}{e^{2x}}$; 2) $y=5^{\frac{\sin 3x}{x}}$; 3) $y=\sqrt[3]{\frac{x^2\left(x^3+1\right)\sin 2x}{x^2-2}}$;

4) $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=1+t^3; \end{cases}$ 5) $\arccos\frac{x}{y}=2^a$; 6) $y=x^4-2x^2+5$, $x=2,03$.

7) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=xe^{-x^2}$ в точці з абсцисою x_0=1.

5.1.30

1) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}\arcsin 2x$; 2) $y=\cos^3\left(\sin 2x\right)$; 3) $y=\left(\cos\frac{5}{x}\right)^{x^2}$;

4) $\begin{cases} x=e^t\left(t^3+1\right); \\ y=e^t\left(1-t^3\right); \end{cases}$ 5) $\ln\mathrm{tg}\frac{y}{x}=a$; 6) $y=\sqrt{1+x+\sin x}$; $x=0,02$.

7) Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=x^3+\sqrt[3]{x}$ в точці з абсцисою x_0= −1.

Завдання 2. Обчислити границі за правилом Лопіталя

5.2.1 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\,\sin 3x}{\ln\,\sin 7x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

5.2.2. а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

5.2.3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{\sin 2x-tg 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\mathrm{tg}\,x\right)^{2x-\pi}$.

5.2.4. а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x$.

5.2.5. а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$ $(a>0)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x+x)^x$.

5.2.6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to +0}\ln(\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}x}$.

5.2.7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to +0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

5.2.8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln\dfrac{1}{\arcsin x}\right)^{\operatorname{tg}x}$.

5.2.9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x\right)^{1/\ln x}$.

5.2.10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\operatorname{ctg}x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{3}{1+\ln x}}$.

5.2.11. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln x\right)^{1/x}$.

5.2.12. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\arcsin x-\ln x}{\operatorname{tg}^2 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg}x)^x$.

5.2.13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}$.

5.2.14. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(e^x-1\right)-\ln x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{1/x}$.

5.2.15. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\ln(1+x))-\ln x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

5.2.16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{ctg}x-1}{\operatorname{tg}^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

5.2.17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^x$.

5.2.18. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

5.2.19. а) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{1/x}}{e}\right)^{1/x}$.

5.2.20. а) $\lim\limits_{x\to 0} x^3 e^{-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

5.2.21. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x - \ln(1+2x)}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^{1/\ln x}$.

5.2.22. а) $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\left(\dfrac{x-a}{a}\right) ctg\left(x-a\right)$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\operatorname{arcctg} x\right)^{1/\ln x}$.

5.2.23. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\operatorname{ctg} x\right)^{1/\ln\left(e^x+x\right)}$.

5.2.24. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{\ln x - x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\ln\cos x\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

5.2.25. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^a-a^a}{x^2}$ $(a>0)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right)^{\operatorname{ctg}(x-1)}$.

5.2.26. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

5.2.27. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\operatorname{ctg} x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\cos x\right)^{\operatorname{tg} x}$.

5.2.28. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+\operatorname{arctg} x\right)^{1/x}$.

5.2.29. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(a^x+x\ln a\right)^{\operatorname{ctg} x}$ $(a>0)$.

5.2.30. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)^{\operatorname{tg}(x-1)}$.

Завдання 3. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки

5.3.1. а) $y=\dfrac{x}{2(x-1)^2}$; б) $y=\dfrac{x}{e^x}$.

5.3.2. а) $y=\dfrac{8x}{4+x^2}$; б) $y=\dfrac{e^x}{x}$.

5.3.3. а) $y=\dfrac{3x-2}{x^2}$; б) $y=\dfrac{e^{\frac{1}{2}(x+1)}}{x+1}$.

5.3.4. а) $y=\dfrac{x^2}{x-1}$; б) $y=\ln\left(1+x^2\right)$.

5.3.5. а) $y=\dfrac{x^3+125}{12x}$; б) $y=\ln(x+1)-x$.

5.3.6. а) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$; б) $y=2e^{-x^2}x$.

5.3.7. а) $y=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

5.3.8. а) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$; б) $y=4xe^{-x}$.

5.3.16 а) $y=\dfrac{x^4-81}{3x^2}$; б) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$.

5.3.17. а) $y=\dfrac{16}{x^2(x-4)}$; б) $y=2\ln\dfrac{x}{x+1}-1$.

5.3.18. а) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; б) $y=4e^{-x^2/2}$.

5.3.19. а) $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$; б) $y=(3-x)e^{x-2}$.

5.3.20. а) $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$; б) $y=x\ln x$.

5.3.21. а) $y=x^2-\dfrac{2}{x}$; б) $y=2xe^{-1/2x}$.

5.3.22. а) $y=\dfrac{1-x^3}{x^2}$; б) $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$.

5.3.23. а) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; б) $y=\dfrac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}$.

5.3.9. $a)\ y=\frac{x^4-3}{x}$;

$б)\ y=(2x+3)e^{-2(x+1)}$.

5.3.10. $a)\ y=\frac{2x}{x^2+1}$;

$б)\ y=\frac{4\ln x}{x}$.

5.3.11. $a)\ y=\frac{x^4+4}{x^2}$;

$б)\ y=3-3\ln\frac{x}{x+4}$.

5.3.12. $a)\ y=x-1+\frac{1}{x+1}$;

$б)\ y=2xe^{-1/2x}$.

5.3.13 $a)\ y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$;

$б)\ y=\frac{e^{2(x+2)}}{2(x+2)}$.

5.3.14. $a)\ y=\frac{2x^3}{x^2+1}$;

$б)\ y=\ln\left(x^2-2x+2\right)$.

5.3.15. $a)\ y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$;

$б)\ y=8xe^{-x/2}$.

5.3.24. $a)\ y=\frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^2+2}$;

$б)\ y=\frac{x}{\ln x}$.

5.3.25. $a)\ y=\frac{4x}{(x+1)^2}$;

$б)\ y=\ln\frac{x}{x-2}-2$.

5.3.26. $a)\ y=\frac{x}{x^2-4}$;

$б)\ y=3x\ln x$.

5.3.27. $a)\ y=\frac{1-2x}{x^2}$;

$б)\ y=\frac{e^{3-x}}{3-x}$.

5.3.28. $a)\ y=\frac{x}{3-x^2}$;

$б)\ y=\frac{e^{2x}}{x}$.

5.3.29. $a)\ y=\frac{x^3-4}{2x^2}$;

$б)\ y=2\ln\frac{x+3}{x}-3$.

5.3.30. $a)\ y=\frac{x}{(1-x)^2}$;

$б)\ y=\frac{\ln x}{2x}$.

Завдання 4

5.4.1. У дану кулю вписано циліндр, що має найбільшу повну поверхню. Знайти його висоту.

5.4.2. Щоб огородити клумбу, яка має форму кривого сектора, є шматок дроту довжиною 20 м. Яким має бути радіус кола, щоб площа клумби була найбільшою?

5.4.3. Вписати в даний конус циліндр з найбільшою бічною поверхнею, якщо площі та центри основ циліндра та конуса збігаються.

5.4.4. У прямокутній системі координат дана точка $(1,2)$. Провести через цю точку пряму лінію так, щоб вона утворювала з додатними напрямками осей координат трикутник найменшої площі.

5.4.5. На осі параболи $y^2 = 2px$ дана точка M на відстані a від вершини. Знайти абсцису найближчої до неї точки кривої.

5.4.6. З усіх конусів з даною твірною l знайти конус найбільшого об'єму.

5.4.7. У кулю радіуса R вписаний прямий круговой конус з найбільшою площею бічної поверхні. Знайти висоту цього конуса.

5.4.8. Об'єм правильної трикутної призми дорівнює v. Якою має бути сторона основи, щоб повна поверхня призми була найменшою?

5.4.9. Треба виготувати конічну лійку з твірною, що дорівнює 20 см. Якою має бути висота лійки, щоб її об'єм, був найбільшим?

5.4.10. Периметр рівнобічного трикутника дорівнює $2p$. Якою має бути його сторона, щоб об'єм тіла, що утворений обертанням цього трикутника навколо його основи був найбільшим?

5.4.11. Периметр рівнобічного трикутника дорівнює $2p$. Якими мають бути його сторони, щоб об'єм конуса, який утворено обертанням цього трикутника навколо висоти, що опущена на основу, був би найбільшим?

5.4.12. Знайти сторони прямокутника найбільшого периметра, який вписано в півколо радіуса R.

5.4.13. Знайти кут при вершині осьового перерізу конуса найменшої бічної поверхні, який описано навколо даної кулі.

5.4.14. Знайти висоту конуса найменшого об'єму, який описано навколо напівкулі радіуса R (центр основи конуса лежить в центрі шара).

5.4.15. Довести, що конічний шатро даної місткості потребує найменшої кількості тканини, коли його висота в $\sqrt{2}$ разів більше радіуса основи.

5.4.16. Через дану точку $P(1,4)$ провести пряму так, щоб сума довжин додатних відрізків, які вона відсікає на координатних осях, була найменшою.

5.4.17. Знайти сторони прямокутника найбільшої площі, який вписано в еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

5.4.18. На сторінці книжки друкований текст має займати *S* квадратних сантиметрів. Поля зверху та знизу мають бути по *a* см, праве та ліве – по *b* см. Якщо брати до уваги тільки питання економії, то якими мають бути найбільш економічні розміри сторінки.

5.4.19. Посланець має дістатися з пункта *A*, який знаходиться на одному березі річки, в пункт *B*, що знаходиться на другому. Знаючи, що швидкість руху на березі в *k* разів більше швидкості руху по воді, визначити, під яким кутом посланець має перепливти річку, щоб дістатися в *B* за найкоротший час. Ширина річки – *h*, відстань між пунктами *A і B* (вздовж берега) – *d*.

5.4.20. Знайти співвідношення між радіусом *R* і висотою *H* циліндра, який має при даному об’ємі найменшу повну поверхню.

5.4.21. Міноносець стоїть на якорі в 9 км від найближчої точки берега; з міноносця треба вислати посланця в табір, який розташований в 15 км, рахуючи по берегу від найближчої до міноносця точки берега (табор розташований на березі). Якщо посланець може робити пішки по 5 км/год, а на веслах по 4 км/год, то в якому пункті берега він має пристати, щоб потрапити до табору за найкоротший час?

5.4.22. Лампа висить над центром круглого столу радіуса *r*. При якій висоті лампи над столом освітленість предмета, який лежить на краю стола, буде найкращою? (Освітленість прямо пропорційна коефіцієнту кута падіння променів світла та обернено пропорційна квадрату відстані від джерела світла).

5.4.23. Витрати на паливо для топки пароплава пропорційні кубу його швидкості. Відомо, що при швидкості в 10 км/год витрати на паливо складають 30 грн на годину, інші витрати (які не залежать від швидкості) складають 480 грн на годину. При якій швидкості пароплава загальна сума витрат на 1 км шляху буде найменшою? Якою буде при цьому загальна сума витрат на годину?

5.4.24. Три пункти *A, B і C* розташовані так, що $\angle ABC=60°$. З пункта *A* виходить автомобіль, а одночасно з пункта *B* потяг. Автомобіль рухається в напрямку до *B* зі швидкістю 80 км/год, потяг в напрямку до *C* зі швидкістю 50 км/год. У який момент часу (від початку руху) відстань між потягом та автомобілем буде найменшою, якщо AB=200 км?

5.4.25. Знайти висоту прямого конуса найменшого об'єму, який описано навколо кулі радіуса R.

5.4.26. У сегмент параболи $y^2 = 2px$, що відсікається прямою $x = 2a$, треба вписати прямокутник найбільшої площі.

5.4.27. Число 36 розкласти на два таких множника, щоб сума їх квадратів була найменшою.

5.4.28. Яким має бути кут при вершині рівнобічного трикутника даної площі S, щоб радіус вписаного в цей трикутник кола був найбільшим?

5.4.29. З трьох дошок однакової ширини збивається жолоб. При якому куті нахилу бокових стінок площа поперечного перерізу жолоба буде найбільшою?

5.4.30. Вікно має форму прямокутника, який зверху завершується півколом. Визначити розміри вікна, що має при даному периметрі найбільшу площу.

Завдання 5

5.5.1. Тіло, маса якого 6 г рухається прямолінійно за законом $S = -1 + \ln(t+1) + (1+t)^2$ (S в сантиметрах, t в секундах). Знайти кінетичну енергію через 1 секунду після початку руху.

5.5.2. Тіло масою 160 кг рухається прямолінійно за законом $S = 2t^2 + 3t + 1$. Визначити кінетичну енергію тіла через 5 с після початку руху.

5.5.3. Штучні супутники Землі рухаються навколо Землі по еліптичних орбітах. Відстань r супутника від центру Землі може бути наближено виражена залежно від часу t таким рівнянням:

$$r = a\left(1 - \varepsilon\cos M - \frac{\varepsilon^2}{2}(\cos 2M - 1)\right), \text{ де } M = \frac{2\pi}{p}(t - t_0).$$

Тут a, ε, p, t_0 − постійні. Знайти так звану радіальну швидкість ШСЗ, тобто швидкість зміни відстані r ШСЗ від центру Землі.

5.5.4. Неоднорідний стрижень AB має довжину 12 см. Маса його частини AM зростає пропорційно квадрату відстані даної точки M від кінця A

і дорівнює 10 г при AM=2 см. Знайти лінійну щільність стрижня в будь-якій точці M.

5.5.5. Залежність між кількістю X речовини, яка отримується під час деякої хімічної реакції, і часом t виражається рівнянням $X = A\left(1 - e^{-kt}\right)$. Визначити швидкість реакції.

5.5.6. За законом Клапейрона об'єм V, який займає газ, тиск газу p і абсолютна температура T пов'язані формулою $pV = RT$, де R – газова стала. Знайти наближений вираз для приросту ΔV об'єму V при зміні тиску на величину Δp, вважаючи температуру незмінною.

5.5.7. Тіло, яке кинуте вверх, рухається за законом $S = -4{,}905t^2 + 981t + 950$ (S – в метрах, t – в секундах). Знайти, в який момент часу швидкість тіла буде дорівнювати нулю і якої найбільшої висоти воно досягне в цей момент.

5.5.8. Точка робить коливальні рухи за законом $x = A\sin\omega t$. Довести, що прискорення руху пропорційне відхиленню x.

5.5.9. У резервуар, що має форму прямого конуса, який опущено вершиною вниз, надходить рідина з постійною швидкістю $a\ \left(м^3/с\right)$. З якою швидкістю підвищується рівень h рідини в резервуарі, якщо його висота дорівнює H (м), а радіус основи R (м)?

5.5.10. Тіло рухається прямолінійно за законом $S(t) = \left(29 - 6t - 3t^2\right)$ м. Який шлях пройшло тіло за час від початку руху до моменту, коли швидкість його руху стала дорівнювати нулю? Чому дорівнює прискорення в цей момент часу?

5.5.11. Цегла звалилася з будинку, висота якого 81 м. Через скільки секунд вона вдариться об землю? Якою буде її швидкість у цей момент?

5.5.12. Залежність барометричного тиску p від висоти описується функцією $\ln(p/p_0) = \mathrm{c}h$, де p_0 − нормальний (на рівні моря) тиск. На висоті 5540 м тиск досягає половини нормального. Знайти швидкість зміни барометричного тиску залежно від висоти.

5.5.13. Кількість електрики в дроті змінюється за законом $Q = \left(2t^2 - 4t\right)$ Кл. Знайти: *а*) середню величину струму за перші дві секунди; *б*) величину струму в кінці другої та в кінці п'ятої секунд.

5.5.14. Маса m неоднорідного стрижня розподіляється за законом $m=\left(l^2+3l+5\right)$, де l – довжина стрижня. Знайти : *а*) середню лінійну щільність стрижня довжиною 5 см, рахуючи від його початку; *б*) лінійну щільність стрижня при l=5 см.

5.5.15. Залежність кількості теплоти Q, яка отримана тілом при нагріванні, від температури τ визначається за законом $Q=\left(0,24\tau^2+e^{0.4\tau}\right)$. Знайти теплоємність c тіла при $\tau=4^oC$. (Теплоємність c характеризує швидкість зміни теплоти тіла).

5.5.16. Період коливань маятника $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{980}}$ с, де l=20 см – довжина маятника. Як треба змінити довжину, щоб період коливань зменшився на 0,1 с?

5.5.17. Тіло, яке кинуте під кутом α до горизонту, в безповітряному просторі описує під дією сили ваги криву (параболу), рівняння якої $\begin{cases} x=v_0\cos\alpha t \\ y=v_0\sin\alpha t-\dfrac{gt}{2} \end{cases}$. Знаючи, що $\alpha=60^o$, $v_0=50$ м/с, визначити напрямок руху при: 1) $t=2$ с; 2) $t=7$ с. Зробити рисунок.

5.5.18. Махове колесо, що затримується гальмом, за t секунд повертається на кут $\varphi=a+bt-ct^2$ $\left(a,b,c>0\right)$. Знайти кутову швидкість та прискорення руху. Коли колесо зупиниться?

5.5.19. Показати, що якщо тіло рухається за законом $s=ae^t+be^{-t}$, то його прискорення дорівнює пройденому шляху.

5.5.20. Закон руху тіла задається формулою $s=a+bt+ct^2$. Показати, що діюча сила є сталою.

5.5.21. Людина зростом 1,7 м віддаляється від джерела світла, що знаходиться на висоті h м $\left(h>1,7\right)$, зі швидкістю 5 км/год. Знайти швидкість переміщення тіні її голови.

5.5.22. З пункту O по двох прямих, які нахилені під кутом 60^o, одне до одного рухаються два тіла. Перше тіло рухається рівномірно зі швидкістю 5 км/год. Закон руху другого тіла визначається за формулою $S_2=2t^2+t$ (S_2 – в кілометрах, t – в годинах). Визначити, з якою швидкістю вони віддаляються одне від одного в момент, коли перше тіло знаходиться від пункту O на відстані 10 км.

5.5.23. Драбина довжиною a м, що прихилена до вертикальної стінки, падає, ковзаючи одним кінцем об стіну, а другим об підлогу. З якою швидкістю опускається верхній кінець драбини в момент, коли нижній кінець, який відсувається від стіни з постійною швидкістю v м/с, знаходиться від неї на відстані b м?

5.5.24. Важка балка довжиною a м стоїть вертикально біля стіни так, що нижній її кінець прикріплений до невеликої вагонетки, а верхній утримується канатом, який намотаний на коловорот. Бажаючи опустити балку, канат звертають зі швидкістю v м/с. З яким прискоренням відкочується вагонетка в момент, коли вона віддалиться від стіни на відстань b м?

5.5.25. Точка рухається по прямій $y = 2x + 3$ так, що абсциса її зростає з постійною швидкістю $v = 3$. З якою швидкістю змінюється ордината?

5.5.26. Точка рухається в першій чверті по дузі кола $x^2 + y^2 = 100$ так, що її ордината зростає з постійною швидкістю $v = 2$. З якою швидкістю змінюється абсциса? Знайти швидкість зміни абсциси, коли ордината дорівнює 6.

5.5.27. Точка рухається в першій чверті по кубічній параболі $48y = x^3$ від точки $M(0,0)$. Яка з координат (x або y) при цьому змінюється швидше ?

5.5.28. Швидкість тіла, що рухається прямолінійно, визначається формулою $v = t^2 + 3t$ см/с. Яке прискорення буде через 4 с після початку руху?

5.5.29. Точки A і B одночасно виходять з початку координат і рухаються по осях Ox і Oy відповідно, при цьому $V_A = 50$, $V_B = 10$. З якою швидкістю вони віддаляються одна від одної ?

5.5.30. Вздовж осі Ox зі швидкістю $v = 0,2$ см/с рухається точечне джерело світла A, від якого точка $M(2,2)$ відкидає тінь на вісь Oy. З якою швидкістю рухається ця тінь в той момент, коли $OA = 3$см ?

Глава 6. Невизначений інтеграл. Методи інтегрування

6.1. Первісна. Властивості невизначеного інтеграла

Функція $F(x)$ називається *первісною* для даної функції $f(x)$ на інтервалі (a, b), якщо $F(x)$ є диференційовною функцією $\forall x \in (a,\ b)$ і в усіх точках цього інтервалу справджується співвідношення $F'(x) = f(x)$.

Для первісної функції справедливі такі властивості:

1. Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на інтервалі (a, b), то $F(x)+C$, де C – довільна стала, також є первісною для цієї функції на цьому інтервалі.

2. Якщо $F_1(x)$ та $F_2(x)$ – будь-які дві первісні для функції $f(x)$ на одному й тому самому інтервалі, то вони відрізняються одна від одної лише на сталу величину, тобто $F_1(x) - F_2(x) = C$, звідки $F_1(x) = F_2(x) + C$. Таким чином, знаючи одну первісну функції, ми знайдемо всі інші додаванням до неї довільної сталої.

Сукупність первісних $F(x)+C$ для функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* від цієї функції і позначається

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Властивості невизначеного інтеграла

1^o. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

2^o. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$

3^o. $\int dF(x) = F(x) + C.$

4^o. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx.$

5^o. $\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx.$

Таблиця основних невизначених інтегралів

1. $\int dx = x + C.$	13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C.$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1).$	14. $\int \mathrm{tg}x dx = -\ln\|\cos x\| + C.$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C \quad x \neq 0$.	15. $\int \mathrm{ctg}x dx = \ln\|\sin x\| + C.$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad 0 < a \neq 1$.	16. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C.$
5. $\int e^x dx = e^x + C.$	17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$	18. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right\| + C.$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$	19. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C.$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C.$	
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C.$	20. $\int \mathrm{sh}\, x\ dx = \mathrm{ch}\, x + C.$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$	
11. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg}x + C \\ -\mathrm{arcctg}x + C \end{cases}$	21. $\int \mathrm{ch}\, x dx = \mathrm{sh}\, x + C.$
	22. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C.$
12. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a + x}{a - x}\right\| + C.$	23. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\, x + C.$

При інтегруванні функцій можливість безпосередньо використовувати основні формули надається не досить часто. Як правило, підінтегральну функцію доводиться так чи інакше перетворювати для того, щоб інтеграл звести до табличного. Нижче наведені деякі приклади таких перетворень.

Приклади

1. $\int\left(5\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}+x^3\right)dx=5\int\sqrt{x}dx-3\int x^{\frac{-2}{3}}dx+\int x^3dx=5\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2}-3\frac{x^{\frac{1}{3}}}{1/3}+$

$+\frac{x^4}{4}+C=\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}-9\sqrt[3]{x}+\frac{1}{4}x^4+C.$

2. $\int\frac{x3^x-4+x\sqrt[3]{x}}{x}dx=\int 3^x dx-4\int\frac{dx}{x}+\int\sqrt[3]{x}dx=\frac{3^x}{\ln 3}-4\ln|x|+\frac{x^{\frac{4}{3}}}{4/3}+C=$

$=\frac{3^x}{\ln 3}-4\ln|x|+\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C.$

3. $\int\frac{(1+x)^2}{x\sqrt{x}}dx=\int\frac{1+2x+x^2}{x^{3/2}}dx=\int x^{-3/2}dx+2\int x^{-1/2}dx+\int x^{1/2}dx=$

$=-2x^{-1/2}+4x^{1/2}+\frac{2}{3}x^{3/2}+C.$

4. $\int\frac{1+2x^2\quad dx}{x^2\quad 1+x^2}=\int\frac{1+x^2\quad +x^2}{x^2\quad 1+x^2}dx=\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{1+x^2}=-\frac{1}{x}+\operatorname{arctg}x+C$**.**

5. $\int\frac{dx}{\left(x^2-1\right)\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{2}{\left(x^2-1\right)\left(1+x^2\right)}dx=\left\|x^2+1-\left(x^2-1\right)\equiv 2\right\|=$

$=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-\quad x^2-1}{x^2-1\quad 1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$

6. $\int\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx=\int\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$

$=\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+\arcsin x+C\ .$

7. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C.$

8. $\int\frac{dx}{1-\cos 2x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x+C.$

9. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx=\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}dx=\int \frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\cos x-\sin x}dx=$

$=\int (\cos x+\sin x)dx=\sin x-\cos x+C$.

10. $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx=\int \frac{2^{x+1}}{10^x}dx-\int \frac{5^{x-1}}{10^x}dx=2\int \frac{2^x}{10^x}dx-\frac{1}{5}\int \frac{5^x}{10^x}dx=2\int \left(\frac{1}{5}\right)^x dx$-

$-\frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx=2\frac{(1/5)^x}{\ln 1/5}-\frac{1}{5}\frac{(1/2^x)}{\ln 1/2}+C.$

11. $\int \frac{dx}{4x^2+25}=\int \frac{dx}{4(x^2+25/4)}=\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+25/4}=\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{25/4}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{25/4}}+C=$

$=\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{2x}{5}+C.$

12. $\int \frac{e^x\cos^3 x-\sin x\cos^2 x}{\cos^3 x}dx=\int \frac{e^x\cos^3 x}{\cos^3 x}-\int \frac{\sin x\cos^2 x}{\cos^3 x}dx=$

$=e^x+\ln|\cos x|+C/$

13. $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=\int \frac{dx}{\cos^2 x}+\int \frac{dx}{\sin^2 x}=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C.$

14. $\int \operatorname{ch}^2\frac{x}{2}dx=\left\| \begin{array}{c} 1+\operatorname{ch}x=2\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} \\ \operatorname{ch}^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(1+\operatorname{ch}x) \end{array} \right\|=\int \frac{1}{2}(1+\operatorname{ch}x)dx=\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sh}x}{2}+C.$

Зауваження. При інтегруванні однієї й тієї ж функції результати можуть відрізнятися своїм зовнішнім виглядом. В дійсності ж вони або тотожні, або відрізняються між собою тільки на сталу величину.

Теорема (*про інваріантність формул інтегрування*). Вигляд формули інтегрування залишається незмінним незалежно від того, чи є змінна інтегрування незалежною змінною чи деякою диференційовною функцією, тобто якщо $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f(\varphi(x))d\varphi(x)=F(\varphi(x))+C$.

Наведена теорема дозволяє багато інтегралів зводити до табличних. Звичайно це здійснюється введенням під знак диференціала деякого виразу $(\varphi(x))$ з наступним поданням підінтегральної функції через цей вираз. При цьому варто пам'ятати, що:

1) до виразу, що стоїть під знаком диференціала, завжди можна додати константу, тому що $d\left(x+a\right)=dx$ і інтеграл $\int f\left(x\right)dx=\int f\left(x\right)d\left(x+a\right)$;

2) якщо вираз, що стоїть під знаком диференціала, помножити на константу $a\neq 0$, то й весь інтеграл помножиться на цю константу, тому що $d\left(a\cdot x\right)=a\cdot dx$. Тому при множенні виразу, що стоїть під знаком диференціала, для збереження рівності весь інтеграл потрібно розділити на це число. Таким чином одержуємо, що $\int f\left(x\right)dx=\frac{1}{a}\int f\left(x\right)d\left(a\cdot x\right)$.

Приклади

1. $$\int(2x-5)^{100}dx=\left\|\frac{1}{2}d(2x-5)=dx\right\|=\frac{1}{2}\int(2x-5)^{100}d(2x-5)=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{(2x-5)^{101}}{101}+C$$

2. $$\int xe^{x^2}dx=\left\|xdx=\frac{1}{2}d\left(x^2\right)\right\|=\frac{1}{2}\int e^{x^2}d\left(x^2\right)=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

3. $$\int\sin^5 x\cos xdx=\left\|\cos xdx=d\ \ \sin x\ \right\|=\int\sin^5 xd\ \ \sin x\ =\frac{\sin^6 x}{6}+C.$$

4. $$\int\frac{\operatorname{arctg} x\ ^{2}}{1+x^2}dx=\left\|\frac{dx}{1+x^2}=d\ \ \operatorname{arctg} x\ \right\|=\int\ \operatorname{arctg} x\ ^{2}d\ \ \operatorname{arctg} x\ =\frac{\operatorname{arctg} x\ ^{3}}{3}+C.$$

5. $$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}=\left\|xdx=\frac{1}{2}d(x^2)=\frac{1}{2}d(x^2-4)\right\|=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-4)}{\sqrt{(x^2-4)}}=\sqrt{(x^2-4)}+C$$

6. $$\int\frac{xdx}{\sqrt{4-x^4}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\ \ x^2}{\sqrt{2^2-\ \ x^2\ ^{2}}}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{2}+C.$$

7. $$\int\frac{5^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}=\left\|\frac{dx}{\sqrt{x}}=2d(\sqrt{x})\right\|=2\int 5^{\sqrt{x}}d(\sqrt{x})=2\frac{5^{\sqrt{x}}}{\ln 5}+C$$

8. $$.\int\frac{x^2dx}{(4x^3+9)^4}=\left\|x^2dx=\frac{1}{3}d(x^3)=\frac{1}{12}d(4x^3+9)\right\|=\frac{1}{12}\int\frac{d(4x^3+9)}{(4x^3+9)^4}=$$
$$=\frac{1}{12}\frac{1}{(-3)}\frac{1}{(4x^3+9)^3}+C.$$

$$9.\ \int \frac{(8x+3)dx}{4x^2+3x-8} = \left\| (8x+3)dx = d(4x^2+3x-8) \right\| = \int \frac{d(4x^2+3x-8)}{4x^2+3x-8} =$$

$$= \ln\left|4x^2+3x-8\right| + C\ .$$

$$10.\ \int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{x^2+8x+1}} = \left\| (x+4)dx = \frac{1}{2}d(x^2+8x+1) \right\| = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+8x+1)}{\sqrt{x^2+8x+1}} =$$

$$= \frac{1}{2}2\sqrt{x^2+8x+1}\ = \sqrt{x^2+8x+1} + C\ .$$

$$11.\ \int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-x^2-1}} = \left\| xdx = \frac{1}{2}d(x^2) \right\| = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{(x^2)^2-(x^2)-1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-\frac{1}{2})}{\sqrt{(x^2-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}}} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-\frac{1}{2}+\sqrt{(x^2-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}}\right| + C\ .$$

$$12.\ \int \frac{dx}{x\ln x} = \left\| \frac{dx}{x} = d\ \ \ln x\ \ \right\| = \int \frac{d\ \ \ln x}{\ln x} = \ln\left|\ln x\right| + C.$$

$$13.\ \int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}} = \left\| e^x dx = d\ \ e^x\ \ \right\| = \int \frac{d\ \ e^x}{\sqrt{2^2-\ \ e^x\ \ ^2}} = \arcsin\frac{e^x}{2} + C.$$

$$14.\ \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{7-3\sin^2 x}} = \left\| \cos x dx = d(\sin x) = \frac{1}{\sqrt{3}}d(\sqrt{3}\sin x) \right\| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}\sin x)}{\sqrt{7-(\sqrt{3}\sin x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}\sin x}{\sqrt{7}} + C\ .$$

$$15.\ \int \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}dx = \left\| d(x\sin x) = (\sin x + x\cos x)dx \right\| = \int \frac{d(x\sin x)}{(x\sin x)^2} =$$

$$= -\frac{1}{x\sin x} + C\ .$$

$$16.\ \int \frac{\sin x\cos x dx}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}} = \left\| 2\ \ a^2-b^2\ \ \sin x\cos x dx = d\ \ a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x\ \ \right\| =$$

$$= \frac{1}{2\ \ a^2-b^2}\int \frac{d\ \ a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}} = \frac{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}{a^2-b^2} + C,\ a\neq b\ .$$

17. $$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}} = \left\| \begin{matrix} \cos x dx = d\ \ \sin x \\ \cos 2x = 1-2\sin^2 x \\ 2+\cos 2x = 3-2\sin^2 x \end{matrix} \right\| = \int \frac{d\ \ \sin x}{\sqrt{3-2\sin^2 x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\ \ \sqrt{2}\sin x}{\sqrt{3-2\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{3}} + C.$$

18. $$\int \frac{2^x 5^x}{25^x - 4^x} dx = \int \frac{2^x 5^x}{4^x \left(\left(\frac{25}{4} \right)^x - 1 \right)} dx = \int \frac{\left(\frac{5}{2} \right)^x}{\left(\frac{5}{2} \right)^{2x} - 1} dx = \frac{1}{\ln \frac{5}{2}} \int \frac{d \left(\left(\frac{5}{2} \right)^x \right)}{\left(\frac{5}{2} \right)^{2x} - 1} =$$

$$= \frac{1}{2\ln \frac{5}{2}} \ln \left| \frac{\left(\frac{5}{2} \right)^x - 1}{\left(\frac{5}{2} \right)^x + 1} \right| + C.$$

19. $$\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{\cos^2 x \operatorname{tg} x dx}{\cos^4 x\ \ 1+\operatorname{tg}^4 x} = \int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x\ \ 1+\operatorname{tg}^4 x} =$$

$$= \left\| \frac{\operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{2} d\ \ \operatorname{tg}^2 x\ \right\| = \frac{1}{2} \int \frac{d\ \ \operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^4 x} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\ \ \operatorname{tg}^2 x\ \ + C.$$

20. $$J = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$$

Позбуваючись ірраціональності в знаменнику, одержимо:

$$J = \frac{1}{2} \int \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \right) dx = \frac{1}{2} \int (x+1)^{1/2} d(x+1) - \frac{1}{2} \int (x-1)^{1/2} d(x-1) =$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{(x-1)^3} + C.$$

21. $$\int \operatorname{ch}(8x+7) dx = \frac{1}{8} \int \operatorname{ch}(8x+7) d(8x+7) = \frac{1}{8} \operatorname{sh}(8x+7) + C.$$

22. $$\int \frac{x dx}{\operatorname{sh}^2(3x^2+5)} = \left\| x dx = \frac{1}{6} d(3x^2+5) \right\| = \frac{1}{6} \int \frac{d(3x^2+5)}{\operatorname{sh}^2(3x^2+5)} =$$

$$=-\frac{1}{6}\operatorname{cth}(3x^2+5)+C.$$

23. $\int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch} x dx = \left\| \operatorname{ch} x dx = d(\operatorname{sh} x) \right\| = \int \operatorname{sh}^4 x d(\operatorname{sh} x) = \frac{\operatorname{sh}^5 x}{5} + C.$

24. $\int (10x+7)\operatorname{sh}(5x^2+7x+9)dx = \left\| (10x+7)dx = d(5x^2+7x+9) \right\| =$

$$=\int \operatorname{sh}(5x^2+7x+9)d(5x^2+7x+9) = \operatorname{ch}(5x^2+7x+9)+C.$$

25. $\int \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch}^4 x - \operatorname{sh}^4 x} d(2x) = \left\| \begin{array}{c} \operatorname{ch}^4 x - \operatorname{sh}^4 x = \\ = (\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x)(\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x) = \\ = \operatorname{ch} 2x \cdot 1 \end{array} \right\| = \int \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 2x \cdot 1} dx =$

$$= \left\| \begin{array}{l} \operatorname{sh} 2x dx = \\ = \frac{1}{2} d \ \operatorname{ch} 2x \end{array} \right\| = \frac{1}{2}\int \frac{d \ \operatorname{ch} 2x}{\operatorname{ch} 2x} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\operatorname{ch} 2x\right| + C.$$

26. $I = \int x^3 \sqrt[3]{1+x^2}dx = \left\| xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right) \right\| = \frac{1}{2}\int x^2 \sqrt[3]{1+x^2} d\left(x^2\right) =$

$$= \frac{1}{2}\int\left(x^2+1-1\right)\sqrt[3]{1+x^2}d\left(x^2+1\right) = \frac{1}{2}\int\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{1+x^2}d\left(x^2+1\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\int\sqrt[3]{1+x^2}d\left(x^2+1\right) = \frac{1}{2}\int\left(x^2+1\right)^{4/3}d\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2}\int\left(x^2+1\right)^{1/3}d\left(x^2+1\right) =$$

$$\frac{3}{14}\left(x^2+1\right)^{7/3} - \frac{3}{8}\left(x^2+1\right)^{4/3} + C.$$

6.2. Методи інтегрування

6.2.1. Метод заміни змінної, або підстановки

Одним з основних методів обчислення інтегралів є метод заміни змінної, суть якого полягає в тому, що якщо функція $x=\varphi(t)$ має неперервну похідну на певному інтервалі та монотонна, то на цьому інтервалі справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt.$$

Нижче цей метод проілюстровано на ряді прикладів.

Приклад 1. $I=\int\frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx.$

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у знаменнику

$4x^2-4x+17=4\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+16=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+16.$ Тоді

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{3x-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4}dx=\left\|\begin{array}{l}x-\frac{1}{2}=u\\ x=u+\frac{1}{2}\\ dx=du\end{array}\right\|=\frac{1}{4}\int\frac{3\left(u+\frac{1}{2}\right)-1}{u^2+4}du=\frac{3}{4}\int\frac{udu}{u^2+4}+$$

$$+\frac{1}{8}\int\frac{du}{u^2+4}=\frac{3}{8}\ln\ u^2+4\ +\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{u}{2}+C=\frac{3}{8}\ln\left(x^2-x+\frac{17}{4}\right)+$$

$$+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4}+C.$$

Приклад 2. $I=\int\frac{2x+5}{\sqrt{x^2+6x+2}}dx.$

Розв'язання. Перетворимо підкореневий вираз, виділяючи повний квадрат $x^2+6x+2=(x+3)^2-7$, тоді

$$I=\int\frac{2x+5}{\sqrt{(x+3)^2-7}}dx=\left\|\begin{array}{l}x+3=u\\ x=u-3\\ dx=du\end{array}\right\|=\int\frac{2(u-3)+5}{\sqrt{u^2-7}}du=\int\frac{d\left(u^2-7\right)}{\sqrt{u^2-7}}-\int\frac{du}{\sqrt{u^2-7}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{u^2-7}}-\ln\left|u+\sqrt{u^2-7}\right|+C=\frac{2}{\sqrt{x^2+6x+2}}-\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+2}\right|+C.$$

Приклад 3. $I=\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}.$

Перший спосіб (заміна змінної)

$$I=\left\|\begin{array}{ll}x=\operatorname{arctg}t & dx=\frac{dt}{\cos^2 t}\\ x^2+1^{\ 3/2}=\frac{1}{\cos^3 t} & \end{array}\right\|=\int\cos t dt=\sin t+C=\left\|\begin{array}{l}1+\operatorname{ctg}^2 t=\frac{1}{\sin^2 t}\\ \sin t=\sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2 t}{1+tg^2 t}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\end{array}\right\|=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

Другий спосіб (безпосереднє обчислення)

$$I=\int\frac{dx}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}}=-\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-3/2}d\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}(-2)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

Приклад 4. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x+6\sin x\cos x-16\cos^2 x}=$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+6\frac{\sin x}{\cos x}-16\right)}=\int\frac{d\ \operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^2 x+6\operatorname{tg}x-16}=\|t=\operatorname{tg}x\|=$$

$$=\int\frac{dt}{t+3\ ^2-25}=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{t-2}{t+8}\right|+C=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x-2}{\operatorname{tg}x+8}\right|+C.$$

Приклад 5. $\displaystyle\int\frac{\cos^3 x}{2+\sin x}dx=\|t=\sin x\|=\int\frac{1-t^2\ dt}{2+t}=$

$$=\int\left(-t+2-\frac{3}{2+t}\right)dt=-\frac{t^2}{2}+2t-3\ln\ 2+t\ +C=$$

$$=-\frac{\sin^2 x}{2}+2\sin x-3\ln\ 2+\sin x\ +C.$$

6.2.2. Застосування методу заміни змінної при обчисленні невизначених інтегралів від ірраціональних функцій

1. Інтеграли вигляду $\displaystyle\int R\left(x^{\frac{m}{n}},x^{\frac{l}{s}},\ldots,x^{\frac{p}{r}}\right)dx,$ де R – раціональна функція своїх аргументів, обчислюються заміною $x=t^k$ (k – спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}$, $\frac{l}{s}$,…,$\frac{p}{r}$), що дозволяє позбутися ірраціональності.

Зауваження. Функція $f(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, де $y_1, y_2, ..., y_n$ – деякі функції від x, називається раціональною від x, $y_1, y_2, ..., y_n$, якщо значення цієї функції для певних значень аргументів дістаємо застосуванням лише арифметичних операцій: додаванням, відніманням, множенням і діленням.

Приклади

1. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$.

Розв'язання

Перший спосіб. У даному прикладі k=2, тому варто зробити заміну $x = t^2$. Тоді

$$I = \int \frac{2tdt}{t\ t^2+1} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg} t + C = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$$

Цей інтеграл можна обчислити й безпосередньо.

Другий спосіб.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\ x+1} = \left\| \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\ \sqrt{x} \right\| = 2\int \frac{d\ \sqrt{x}}{\sqrt{x}\ ^2 + 1} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C\,.$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}} = \left\| \begin{matrix} x = t^4 \\ \sqrt[4]{x} = t \\ dx = 4t^3dt \end{matrix} \right\| = \int \frac{4t^3dt}{t+t^2} = 4\int \frac{t^2dt}{t+1} = 4\int \frac{(t^2-1)+1}{t+1}dt =$

$$= 4\left(\int\ t-1\ dt + \int \frac{dt}{t+1}\right) = 4\left(\frac{t-1\ ^2}{2} + \ln\ t+1\ \right) + C =$$

$$= 4\left(\frac{\sqrt[4]{x}-1\ ^2}{2} + \ln\ \sqrt[4]{x}+1\ \right) + C.$$

3. $\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})} = \left\| \begin{matrix} x = t^{12},\ t = \sqrt[12]{x} \\ dx = 12t^{11}dt \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x} = t^4+t^3 \end{matrix} \right\| = \int \frac{t^2 12t^{11}dt}{t^{12}(t^4+t^3)} =$

$$= 12\int \frac{1}{t^2(t+1)}dt = 12\int \frac{(1-t^2)+t^2}{t^2(t+1)}dt = 12\int \frac{(1-t^2)dt}{t^2(t+1)} +$$

$$+\ 12\int\frac{t^2dt}{t^2(t+1)}=12\int\frac{dt}{t^2}-12\int\frac{dt}{t}+12\int\frac{d(t+1)}{t+1}=$$

$$=12\left(-\frac{1}{t}-\ln t+\ln(t+1)\right)+C=12\left[\ln\left|\frac{t+1}{t}\right|-\frac{1}{t}\right]+C\ =$$

$$=12\ln\left|\frac{\sqrt[12]{x}+1}{\sqrt[12]{x}}\right|-\frac{12}{\sqrt[12]{x}}+C=\ln\frac{(\sqrt[12]{x}+1)^{12}}{x}-\frac{12}{\sqrt[12]{x}}+C.$$

2. Інтеграли вигляду

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\frac{m_s}{n_s}}\right)dx,$$

де R – раціональна функція своїх аргументів, обчислюються заміною $\frac{ax+b}{a_1x+b_1}=t^k$ (k – найменше спільне кратне знаменників показників $\frac{m_1}{n_1},\frac{m_2}{n_2},\ldots,\frac{m_s}{n_s}$), що дозволяє позбутися ірраціональності.

Приклад 1. $\int\frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx=\left\|\begin{matrix}1+x=t^6;x=t^6-1;dx=6t^5dt\\ \sqrt{1+x}=\sqrt{t^6}=t^3;\sqrt[3]{1+x}=\sqrt[3]{t^6}=t^2\end{matrix}\right\|=$

$$=\int\frac{(t^6-1)^2+t^3}{t^2}6t^5dt=6\int\left[(t^6-1)^2+t^3\right]t^3dt=6\int(t^{15}-2t^9+t^6+t^3)dt=$$

$$=6\left[\frac{t^{16}}{16}-\frac{2t^{10}}{10}+\frac{t^7}{7}+\frac{t^4}{4}\right]+C=6t^4\left[\frac{t^{12}}{16}-\frac{t^6}{5}+\frac{t}{7}+\frac{1}{4}\right]+C=\left|t=\sqrt[6]{1+x}\right|=$$

$$=6\sqrt[3]{(1+x)^2}\left[\frac{(1+x)^2}{16}-\frac{1+x}{5}+\frac{\sqrt[6]{1+x}}{7}+\frac{1}{4}\right]+C.$$

Приклад 2. $\int\sqrt{\frac{2-x}{x-6}}dx=\int\sqrt{\frac{(2-x)(2-x)}{(x-6)(2-x)}}dx=\int\frac{(2-x)dx}{\sqrt{8x-x^2-12}}=$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{8-2x}{\sqrt{8x-x^2-12}}dx+\int\frac{(-4+2)d(x-4)}{\sqrt{4-(x-4)^2}}\ =$$

$$=\frac{1}{2}2\sqrt{8x-x^2-12}-2\arcsin\frac{x-4}{2}+C.$$

Приклад 3. $I=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$.

Розв'язання. Перетворимо знаменник

$$\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}=\sqrt[4]{\frac{(x-1)^3(x-1)^5(x+2)^5}{(x-1)^5}}=\sqrt[4]{(x-1)^8\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^5}=$$

$=(x-1)^2\,\frac{x+2}{x-1}\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$. Тоді

$$I=\int\frac{dx}{\frac{x+2}{x-1}(x-1)^2\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}}=\left\|\begin{array}{l}\frac{x+2}{x-1}=t^4,\ \frac{(x-1)-(x+2)}{(x-1)^2}dx=4t^3dt\\ \frac{-3dx}{(x-1)^2}=4t^3dt,\ \frac{dx}{(x-1)^2}=-\frac{4}{3}t^3dt\end{array}\right\|=$$

$$=-\frac{4}{3}\int\frac{t^3dt}{t^4\cdot t}=\frac{4}{3t}+C=\frac{4}{3\cdot\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}}+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C.$$

Приклад 4. $\int\frac{e^{\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}}dx}{(3+x)\sqrt{9-x^2}}=\int\frac{e^{\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}}dx}{(3+x)^2\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}}=$

$$=\left\|\begin{array}{c}t=\sqrt{\frac{3-x}{3+x}};t^2=\frac{3-x}{3+x}\\ 2tdt=\frac{-(3+x)-(3-x)dx}{(3+x)^2}=\frac{-6dx}{(3+x)^2}\end{array}\right\|=$$

$$=\int\frac{e^t\,2tdt}{t(-6)}=-\frac{1}{3}e^t+C=-\frac{1}{3}e^{\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}}+C.$$

3. Інтеграли вигляду $\int R\left(x,\sqrt{x^2\pm a^2}\right)dx$, де R – раціональна функція своїх аргументів. При знаходженні цих інтегралів використовують заміни:

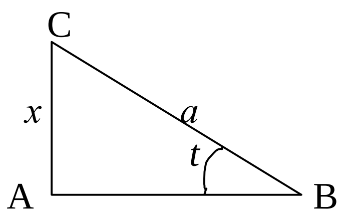
а) $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$.

Підстановкою $x=a\sin t\ \ (a\cos t),\ a>0$ інтеграл зводиться до раціональної функції від $\sin t$ і $\cos t$.

$x = a\sin t,\ dx = a\cos t dt,\ a^2 - x^2 = a^2 - a^2\sin^2 t = a^2\cos^2 t$;

$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$, $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx = \int R(a\sin t, a\cos t)a\cos t dt$.

Після інтегрування потрібно повернутися до колишньої змінної.



Розглянемо трикутник:

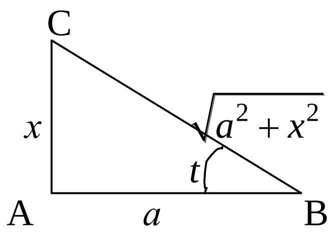
$\frac{x}{a} = \sin t$, катет $AB = \sqrt{a^2 - x^2}$, $\cos t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$, $\operatorname{tg} t = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

б) $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$.

Застосуємо підстановку $x = a \cdot \operatorname{tg} t$ $(a \cdot \operatorname{ctg} t)$, $dx = a\frac{1}{\cos^2 t}dt$,

$a^2 + x^2 = a^2(1 + \operatorname{tg}^2 t) = a^2\frac{1}{\cos^2 t}$, $\int R\ x, \sqrt{a^2 + x^2}\ dx = \int R\left(a\operatorname{tg} t, a\frac{1}{\cos t}\right)\frac{adt}{\cos^2 t}$.

Повернемося до старої змінної, використовуючи трикутник:



$\frac{x}{a} = \operatorname{tg} t$, $CB = \sqrt{a^2 + x^2}$, $\sin t = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$, $\cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

в) $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$.

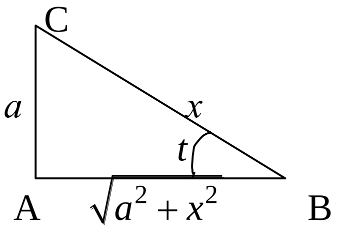
Для того щоб позбутися радикала в підінтегральному виразі, зручною буде підстановка:

$x = \frac{a}{\sin t}$ або $x = \frac{a}{\cos t}$ $dx = -\frac{a\cos t}{\sin^2 t}dt$,

$$x^2-a^2=\frac{a^2}{\sin^2 t}-a^2=\frac{a^2(1-\sin^2 t)}{\sin^2 t}=\frac{a^2\cos^2 t}{\sin^2 t},\ \sqrt{x^2-a^2}=\frac{a\cos t}{\sin t},$$

$$\int R\ \ x,\sqrt{x^2-a^2}\ \ dx=\int R\left(\frac{a}{\sin t};\frac{a\cos t}{\sin t}\right)\cdot\left(-\frac{a\cos t}{\sin^2 t}\right)dt.$$

Повернемося до колишньої змінної:



$$\sin t=\frac{a}{x},\ \cos t=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x},\ \mathrm{tg}\, t=\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Приклади

1. $$\int x^2\sqrt{1-x^2}dx=\left\|\begin{matrix}x=\sin t\\ dx=\cos tdt\end{matrix}\right\|=\int\sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=\int\sin^2 t\cos^2 tdt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\sin^2 2tdt=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{1}{8}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\arcsin x-\frac{\sin\ \ 4\arcsin x}{4}\right)+C.$$

2. $$I=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}}=\left\|\begin{matrix}x=\mathrm{ch}\, t\\ dx=\mathrm{sh}\, tdt\end{matrix}\right\|=\int\frac{\mathrm{ch}^2 t\ \ \mathrm{sh}\, tdt}{\sqrt{\mathrm{ch}^2 t-1}}=\int\frac{\mathrm{ch}^2 t\ \ \mathrm{sh}\, tdt}{\mathrm{sh}\, t}=\int\mathrm{ch}^2 tdt=$$

$$=\int\frac{1+\mathrm{ch}\, 2t}{2}dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\mathrm{sh}\, 2t\right)+C=\frac{1}{2}\left(arc\,\mathrm{ch}\, x+\frac{1}{2}\mathrm{sh}\ \ 2arc\,\mathrm{ch}\, x\ \ \right)+C\ .\square$$

3. $$J=\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Розв’язання

Перший спосіб (заміна змінної)

$$J=\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}\left\|\begin{matrix}x=\sin t,\ \ dx=\cos tdt\\ \sqrt{1-x^2}=\cos t\end{matrix}\right\|=\int\sin^5 tdt=-\int\ 1-\cos^2 t\ \ ^2 d\cos t=$$

$$=-\int\ 1-2\cos^2 t+\cos^4 t\ \ d\cos t=-\cos t+\frac{2}{3}\cos^3 t-\frac{1}{5}\cos^5 t=$$

$$=\left\|\begin{matrix} x=\sin t \\ \cos t=\sqrt{1-x^2} \end{matrix}\right\| = -\sqrt{1-x^2}\left(1-\frac{2}{3}\,1-x^2\ +\frac{1}{5}\,1-x^2\ ^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{15}\sqrt{1-x^2}\left(8+4x^2+3x^4\right)+C\,.$$

Другий спосіб.

$$J=\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left\|\begin{matrix} t^2=1-x^2,\ 2tdt=-2xdx \\ x^4=1-2t^2+t^4,\quad x^5dx=-\left(1-2t^2+t^4\right)tdt \end{matrix}\right\|=$$

$$=-\int\frac{t\left(1-2t^2+t^4\right)}{t}dt=-\int\left(1-2t^2+t^4\right)dt=-\left(t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\right)+C=$$

$$-\frac{1}{15}\left(8+4x^2+3x^4\right)\sqrt{1-x^2}+C.$$

4. $$\int\frac{x^4dx}{(4-x^2)^{3/2}}=\left\|\begin{matrix} x=2\sin t,\dfrac{x}{2}=\sin t \\ dx=2\cos tdt;(4-x^2)=4\cos^2 t \\ \cos t=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2};\mathrm{tg}\,t=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} \end{matrix}\right\|=\int\frac{2^4\sin^4 t\,2\cos tdt}{(2\cos t)^3}=$$

$$=4\int\frac{\sin^4 t}{\cos^2 t}dt=4\int\frac{(1-\cos^2 t)^2}{\cos^2 t}dt=4\int\frac{1-2\cos^2 t+\cos^4 t}{\cos^2 t}dt=4\int\frac{dt}{\cos^2 t}-8\int dt+$$

$$+4\int\cos^2 tdt=4\,\mathrm{tg}\,t-8t+2\int(1+\cos 2t)dt=$$

$$=4\,\mathrm{tg}\,t-8t+2t+\sin 2t+C=4\,\mathrm{tg}\,t-6t+2\sin t\cos t+C=$$

$$=4\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}-6\arcsin\frac{x}{2}+2\frac{x}{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}+C=\frac{4x}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}-6\arcsin\frac{x}{2}+$$

$+C.$

5. $$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}=\left\|\begin{matrix} x=a\cdot\mathrm{tg}\,t;\dfrac{x}{a}=\mathrm{tg}\,t \\ dx=\dfrac{adt}{\cos^2 t};t=\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} \\ a^2+x^2=\dfrac{a^2}{\cos^2 t};\sin t=\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \end{matrix}\right\|=\int\frac{adt\cos t}{\cos^2 t a^4\,\mathrm{tg}^4\,t a}=$$

$$=\frac{1}{a^4}\int\frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}dt=\frac{1}{a^4}\int\frac{(1-\sin^2 t)\cos t dt}{\sin^4 t}=\frac{1}{a^4}\int\frac{(1-\sin^2 t)d(\sin t)}{\sin^4 t}=$$

$$=\frac{1}{a^4}\int\frac{d(\sin t)}{\sin^4 t}-\frac{1}{a^4}\int\frac{d(\sin t)}{\sin^2 t}=-\frac{1}{a^4}\frac{1}{3\sin^3 t}+\frac{1}{a^4}\frac{1}{\sin t}+C=-\frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3a^4x^3}+$$

$$\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^4x}+C.$$

6. $$\int\frac{dx}{x(x^2-9)^{5/2}}=\left\|\begin{array}{c} x=\dfrac{3}{\cos t};\cos t=\dfrac{3}{x};t=\arccos\dfrac{3}{x} \\ dx=\dfrac{3\sin t dt}{\cos^2 t};\operatorname{ctg} t=\dfrac{3}{\sqrt{x^2-9}} \\ x^2-9=\dfrac{9}{\cos^2 t}-9=\dfrac{9(1-\cos^2 t)}{\cos^2 t}=9\operatorname{tg}^2 t \end{array}\right\|=$$

$$=\int\frac{3\sin t\cos t dt}{3\cos^2 t(3\operatorname{tg} t)^5}=\frac{1}{3^5}\int\frac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg}^5 t}dt=$$

$$=\frac{1}{3^5}\int\operatorname{ctg}^4 t dt=\left\|\operatorname{ctg}^2 t=\frac{1}{\sin^2 t}-1\right\|=\frac{1}{243}\int\operatorname{ctg}^2 t(\frac{1}{\sin^2 t}-1)dt=\frac{1}{243}\int\operatorname{ctg}^2 t\frac{dt}{\sin^2 t}-$$

$$-\frac{1}{243}\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=-\frac{1}{243}\frac{\operatorname{ctg}^3 t}{3}+\frac{1}{243}\operatorname{ctg} t+t+C-$$

$$-\frac{27}{729\sqrt{(x^2-9)^3}}+\frac{1}{243}\frac{3}{\sqrt{(x^2-9)}}+\arccos\frac{3}{x}+C=$$

$$=-\frac{1}{27\sqrt{(x^2-9)^3}}+\frac{1}{81\sqrt{(x^2-9)}}+\arccos\frac{3}{x}+C.$$

7. $$I=\int\frac{\sin x dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}=\left\|\begin{array}{l}\cos x=t \\ -\sin x dx=dt\end{array}\right\|=-\int\frac{dt}{t\sqrt{2-t^2}}=-\int\frac{d\left(\frac{\sqrt{2}}{t}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{t}\right)^2-1}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}}{t}+\sqrt{\frac{2}{t^2}-1}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-\cos^2 x}}{\cos\ x}\right|+C.$$

4. Інтеграли вигляду $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ обчислюються за допомогою *виділення повного квадрата* під коренем.

Приклади

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^2+1}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-1)}{\sqrt{(3x-1)^2+1}} =$

$= \frac{1}{3}\ln\left|3x-1+\sqrt{(3x-1)^2+1}\right| + C$.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5-(x^2+2x+1-1)}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{6-(x+1)^2}} = \arcsin\frac{x+1}{\sqrt{6}} + C$.

3. $\int \frac{(5x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x-4}} = \frac{5}{2}\int \frac{(2x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x-4}} + \int \frac{-5/2\cdot 2+2}{\sqrt{(x+1)^2-5}}d(x+1) =$

$= \frac{5}{2}2\sqrt{x^2+2x-4} - 3\ln\left|x+1-\sqrt{(x+1)^2-5}\right| + C$.

4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{(-1-2x)dx}{\sqrt{1-x-x^2}} + \int \frac{-1/2d(x+1/2)}{\sqrt{5/4-(x+1/2)^2}} = -\frac{1}{2}2\sqrt{1-x-x^2} -$

$-\frac{1}{2}\arcsin\frac{x+1/2}{\sqrt{5/4}} + C$.

5. Інтеграли вигляду:

$$\text{а) } \boxed{\int \frac{P_m(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}},\ \text{б) } \boxed{\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}}.$$

Інтеграл б) підстановкою $x-\alpha=\frac{1}{z}$ зводиться до інтегралу а). Інтеграл а) обчислюється *методом невизначених коефіцієнтів* за формулою:

$$\int \frac{P_m(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{m-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + A\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

де P_m – багаточлен m-го степеня; Q_{m-1} – багаточлен степеня m–1 з невизначеними коефіцієнтами; A – стала. Для знаходження невизначених коефіцієнтів диференціюють обидві частини рівності і приводячи до спільного знаменника, порівнюють коефіцієнти при однакових степенях x.

Приклади

1. $I=\int\frac{\left(x^2+1\right)dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$.

Розв'язання

$$\int\frac{\left(x^2+1\right)dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}=(ax+b)\sqrt{-x^2+3x-2}+c\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}.$$

Продиференціюємо обидві частини отриманої рівності:

$$\frac{\left(x^2+1\right)}{\sqrt{-x^2+3x-2}}=(ax+b)\frac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x-2}}+a\sqrt{-x^2+3x-2}+\frac{c}{\sqrt{-x^2+3x-2}}.$$

Помножимо обидві частини рівності на $\sqrt{-x^2+3x-2}$:

$x^2+1=-ax^2+\frac{3}{2}ax-bx+\frac{3}{2}b-ax^2+3ax-2a+c$, або

$$x^2+1=-2ax^2+x\left(\frac{3}{2}a-b+3a\right)+\frac{3}{2}b-2a+c.$$

Зрівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$-2a=1\ \Rightarrow\ a=-\frac{1}{2}$.

$\frac{9}{2}a-b=0\ \Rightarrow\ b=\frac{9}{2}a=\frac{-9}{2\cdot 2}=-\frac{9}{4}$.

$\frac{3}{2}b-2a+c=1\ \Rightarrow\ c=1+2a-\frac{3}{2}b=1-1+\frac{27}{8}=\frac{27}{8}$.

Тоді

$$I=-\frac{1}{4}(2x+9)\sqrt{-x^2+3x-2}+\frac{27}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}=-\frac{2x+9}{4}\sqrt{-x^2+3x-2}+$$

$$+\frac{27}{8}\arcsin\ (2x-3)+C.$$

2. $\int\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx=(Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2-2x+5}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.

Розв'язання. Продиференціюємо ліву і праву частини:

$$\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}=(2Ax+B)\sqrt{x^2-2x+5}+\frac{(Ax^2+Bx+C)(2x-2)}{2\sqrt{x^2-2x+5}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}};$$

$$\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}=\frac{(2Ax+B)(x^2-2x+5)}{\sqrt{x^2-2x+5}}+\frac{(Ax^2+Bx+C)(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+5}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}};$$

$3x^3-7x^2+1 \equiv (2Ax+B)(x^2-2x+5)+(Ax^2+Bx+C)(x-1)+\lambda$;

при x^3: $3 = 2A + A$, звідси $A = 1$.

x^2: $-7= -4A + B - A + B$, звідси $B = -1$.

x: $0= 10A - 2B - B + C$, звідси $C = -13$.

x^0: $1= 5B - C + \lambda$, звідси $\lambda = -7$.

$$\int\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx=(x^2-x-13)\sqrt{x^2-2x+5}-7\int\frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+4}}=$$

$$=(x^2-x-13)\sqrt{x^2-2x+5}-7\ln\left|(x-1)+\sqrt{(x-1)^2+4}\right|+C.$$

6. Підстановки Ейлера. Розглянемо інтеграл вигляду

$$\int R\left(x\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R(t)dt\ .$$

При обчисленні інтегралів подібного типу застосовують одну з підстановок:

1. $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x+t$, якщо $a>0$.
2. $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt\pm\sqrt{c}$, якщо $c>0$.
3. $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-x_1)t,$

якщо $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, x_1, x_2 – дійсні корені.

Застосування підстановок Ейлера зводить інтеграли такого типу до інтегралів від раціональної функції. Однак при розв'язанні задач підстановки Ейлера призводять до громіздких обчислень, тому на практиці використовують інші, більш практичні способи інтегрування.

Приклад 1. $\int \frac{xdx}{(\sqrt{7x-x^2-10})^3}$.

Застосуємо підстановку Ейлера:

$$\sqrt{7x-x^2-10}=\sqrt{(x-2)(5-x)}=t(x-2);t=\frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2};\ x=\frac{5+2t^2}{1+t^2};\ \ dx=-\frac{6tdt}{(1+t^2)^2};$$

$$(\sqrt{7x-x^2-10})^3=\frac{27t^3}{(1+t^2)^3}.\quad \int\frac{xdx}{(\sqrt{7x-10-x^2})^3}=-\frac{6}{27}\int\frac{5+2t^2}{t^2}dt=-\frac{2}{9}(-\frac{5}{t}+2t)+C=$$

$$=\frac{10}{9}\frac{x-2}{\sqrt{7x-10-x^2}}-\frac{4}{9}\frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}+C.$$

6.2.3. Метод інтегрування частинами

Нехай функції $u=u(x)$, $v=v(x)$ мають неперервні похідні, тоді справедлива формула *інтегрування частинами*

$$\boxed{\int udv=uv-\int vdu}.$$

Зауваження. Назва *інтегрування частинами* пояснюється тим, що наведена формула не дає остаточного результату, а тільки зводить задачу знаходження інтеграла $\int udv$ до задачі знаходження іншого інтеграла $\int vdu$, який при *вдалому* виборі u і v виявляється більш простим.

Загальних правил вибору функцій u і v немає, однак можна дати деякі рекомендації для окремих випадків.

Як правило, метод інтегрування частинами застосовується у випадку, коли підінтегральна функція містить добуток раціональних і трансцендентних функцій і при цьому інші методи непридатні.

Наприклад, $\int P_n\ x\ \cos\alpha xdx,$ $\int P_n\ x\ \sin\alpha xdx,$ $\int P_n(x)e^{\alpha x}dx,$ $\int x^k \operatorname{arctg} xdx$, $\int x^k \ln xdx$ і т.д., де $P_n(x)$ – багаточлен n-го степеня.

Якщо підінтегральна функція має вигляд $P_n\;\;x\;\cos\alpha x,\;\;P_n\;\;x\;\sin\alpha x,$ $P_n(x)e^{\alpha x}$, то за u беруть багаточлен $P_n(x)$.

Якщо підінтегральна функція є добутком логарифмічної або оберненої тригонометричної функції й багаточлена, то за u приймають ці функції.

Приклади

1. $$\int x\sin x dx = \begin{Vmatrix} u = x, \;\; du = dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{Vmatrix} = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

2. $$\int x \operatorname{arctg} x dx = \begin{Vmatrix} u = \operatorname{arctg} x; \;\; du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = x dx; \;\; v = \dfrac{x^2}{2} \end{Vmatrix} = \operatorname{arctg} x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1\;\;-1}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C\;\;.$$

У деяких випадках за допомогою методу інтегрування частинами вдається одержати рівняння щодо початкового інтеграла.

3. $I = \int \sqrt{a^2+x^2}dx$**.**

Розв’язання

Перший спосіб (інтегрування частинами):

$$I = \int\sqrt{a^2+x^2}dx = \begin{Vmatrix} u = \sqrt{a^2+x^2}, \; du = \dfrac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}} \\ dv = dx, \; v = x \end{Vmatrix} = x\sqrt{a^2+x^2} -$$

$$-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = x\sqrt{a^2+x^2} - \int\frac{x^2+a^2\;\;-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = x\sqrt{a^2+x^2} -$$

$$-\underbrace{\int\sqrt{a^2+x^2}dx}_{I} + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = x\sqrt{a^2+x^2} - I + a^2\ln\;\;x+\sqrt{x^2+a^2}\;\;+2C.$$

Таким чином, отримано рівняння щодо початкового інтеграла, тобто відносно *I*. Розв’язуючи це рівняння, одержимо

$$2I = x\sqrt{a^2+x^2} + a^2 \ln\left| x+\sqrt{x^2+a^2} \right| + 2C;$$

$$I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2} + a^2 \ln\left| x+\sqrt{x^2+a^2} \right| \right) + C.$$

Другий спосіб (інтегрування методом заміни змінних):

$$I = \int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \left\| \begin{matrix} x = a\operatorname{sh} t \\ dx = a\operatorname{ch} t dt \\ \sqrt{a^2+x^2} = a\operatorname{ch} t \end{matrix} \right\| = a^2 \int \operatorname{ch}^2 t dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int \left(1+\operatorname{ch} 2t\right) dt = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4}\operatorname{sh} 2t + C = \left\| \begin{matrix} \operatorname{sh} t = \frac{x}{a} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ e^t = \frac{x \pm \sqrt{a^2+x^2}}{a}, \quad \text{т.к. } e^t > 0, \text{ то} \\ t = \ln\left| x+\sqrt{x^2+a^2} \right| - \ln a \\ \operatorname{sh} 2t = 2sh\; t\; ch\;\; t = \frac{2x\sqrt{a^2+x^2}}{a^2} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left| x+\sqrt{a^2+x^2} \right| + C.$$

4. $I = \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \left\| \begin{matrix} u = \frac{1}{\cos x}, \; du = \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x}, \; v = \operatorname{tg} x \end{matrix} \right\| = \frac{1}{\cos x}\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx =$

$$= \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} - \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} - \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}dx = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} - \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} - I + \ln\left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + 2C.$$

Аналогічно, як і у прикладі 3, нами отримано рівняння відносно I, розв’язання якого дає

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} + \ln\left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right) + C.$$

5. $I = \int e^{ax} \cos nx dx.$

$$\int e^{ax}\cos nxdx = \left\| \begin{matrix} u = e^{ax},\ du = ae^{ax}dx \\ dv = \cos nxdx,\ v = \dfrac{\sin nx}{n} \end{matrix} \right\| = e^{ax}\frac{\sin nx}{n} - \frac{a}{n}\int e^{ax}\sin nxdx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = e^{ax},\ du = ae^{ax}dx \\ dv = \sin nxdx,\ \ v = -\dfrac{\cos nx}{n} \end{matrix} \right\| = e^{ax}\frac{\sin nx}{n} - \frac{a}{n}\left(-e^{ax}\frac{\cos nx}{n} + \frac{a}{n}\underbrace{\int e^{ax}\cos nxdx}_{I} \right) =$$

$$= \frac{e^{ax}}{n}\left(\sin nx + \frac{a\cos nx}{n} \right) - \frac{a^2}{n^2}I + C.$$

$$I\left(1 + \frac{a^2}{n^2}\right) = \frac{e^{ax}}{n^2}\ \ n\sin nx + a\cos nx\ \ + C\,.$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2 + n^2}\ \ n\sin nx + a\cos nx\ \ + \frac{C}{a^2+n^2}n^2 = \frac{e^{ax}}{a^2+n^2}\ \ n\sin nx + a\cos nx\ \ + C_1.$$

6. $I = \int \cos(\ln x)dx = \left\| \begin{matrix} u = \cos(\ln x); dv = dx; v = x \\ du = -\sin(\ln x)(1/x)dx \end{matrix} \right\| = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\dfrac{1}{x}xdx =$

$$= \left\| \begin{matrix} u = \sin(\ln x) \\ du = \cos(\ln x)\dfrac{dx}{x} \\ dx = dv; v = x \end{matrix} \right\| = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \underbrace{\int \cos(\ln x)dx}_{I}.$$

Перенесемо в ліву частину $\int \cos(\ln x)dx$.

$$2\int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) + C$$

$$\int \cos(\ln x)dx = \frac{x}{2}\ \cos(\ln x) + \sin(\ln x)\big] + C\,.$$

7.

$$\int \operatorname{ch} ax\cos bxdx = \left\| \begin{matrix} u = \operatorname{ch} ax; du = a\operatorname{sh} axdx \\ \cos bxdx = dv; v = (1/b)\sin bx \end{matrix} \right\| = \frac{1}{b}\operatorname{ch} ax\sin bx - \frac{a}{b}\int \operatorname{sh} ax\sin bxdx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = \operatorname{sh} ax; du = a\operatorname{ch} axdx \\ dv = \sin bxdx; v = -\dfrac{1}{b}\cos bx \end{matrix} \right\| = \frac{1}{b}\operatorname{ch} ax\sin bx - \frac{a}{b}\left[-\frac{1}{b}\operatorname{sh} ax\cos bx + \right.$$

$$\left. + \frac{a}{b}\int \operatorname{ch} ax\cos bxdx \right] = \frac{1}{b}\operatorname{ch} ax\sin bx + \frac{a}{b^2}\operatorname{sh} ax\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int \operatorname{ch} ax\cos bxdx\ .$$

Перенесемо інтеграл із правої частини в ліву і одержимо, поділивши на $\dfrac{a^2+b^2}{b^2}$:

$$\int \operatorname{ch} ax \cos bx dx = \frac{b \operatorname{ch} ax \sin bx + a \operatorname{sh} ax \cos bx}{a^2+b^2} + C.$$

8. $\displaystyle\int \sin x \ln(\cos x) dx = \left\| \begin{gathered} u = \ln(\cos x); du = -\frac{\sin x}{\cos x} dx \\ \sin x dx = dv; v = -\cos x \end{gathered} \right\| = \cos x \ln(\cos x) -$

$$-\int \cos x \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\cos x \ln(\cos x) + \cos x + C = \cos x (1 - \ln \cos x) + C.$$

9. $\displaystyle\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left\| \begin{gathered} u = \arcsin x; du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = dv; v = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \\ = -\frac{1}{2} 2\sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-x^2} \end{gathered} \right\| =$

$$= -\sqrt{1-x^2} \arcsin x + \int \sqrt{1-x^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + C.$$

10. $\displaystyle\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \left\| \begin{gathered} u = \operatorname{arctg} x; du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = \frac{x^2 dx}{1+x^2}; v = \int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2} dx = \\ = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x \end{gathered} \right\| = (x - \operatorname{arctg} x) \operatorname{arctg} x -$

$$-\int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = (x - \operatorname{arctg} x) \operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} + \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx =$$

$$= \; x - \operatorname{arctg} x \;\; \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} \; +$$

$$+ \int \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) = (x - \operatorname{arctg} x) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C.$$

11. $\displaystyle\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx =$

$$=\left\|\begin{array}{c} u=\ln(x+\sqrt{1+x^2}); du=\dfrac{\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{(x+\sqrt{1+x^2})dx}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} \\ du=\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}; dv=dx; v=x \end{array}\right\|=$$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int x\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{1}{2}\int\frac{d(\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C\ .$$

Метод інтегрування частинами часто спрощує обчислення інтеграла й у тому випадку, коли даний інтеграл можна знайти методом підстановки. Розглянемо деякі приклади.

12. $$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}=\left\|\begin{array}{c} u=x^2; du=2xdx \\ \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}=dv; v=\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}= \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1} \end{array}\right\|=x^2\sqrt{x^2+1}-\int\sqrt{x^2+1}2xdx=$$

$$=x^2\sqrt{1+x^2}-\int\sqrt{1+x^2}d(1+x^2)=x^2\sqrt{1+x^2}-\frac{2(1+x^2)^{3/2}}{3}+C.$$

Розв'язання. Побудуємо рекурентну формулу для обчислення інтеграла вигляду:

$I_n=\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, при $n\geq 2$.

$$I_n=\frac{1}{a^2}\int\frac{(x^2+a^2)-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^n}dx-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}\ .$$

$$I_n=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\mathrm{I}_{n-1}-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}\ .$$

Візьмемо частинами інтеграл:

$$\int \frac{x^2dx}{x^2+a^2\;^{n}}=\left\|\begin{array}{c} x=u;\dfrac{xdx}{(x^2+a^2)^n}=dv \\ dx=du; v=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{d(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^n} \\ v=-\dfrac{1}{(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}} \end{array}\right\|=$$

$$=\frac{-x}{(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{2n-2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{-x}{(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}}+$$

$$+\frac{1}{2n-2}\mathrm{I}_{n-1}.$$

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\mathrm{I}_{n-1}+\frac{x}{a^2(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{a^2(2n-2)}\mathrm{I}_{n-1}\,.$$

Рекурентна формула має вигляд:

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{x}{a^2(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{a^2(2n-2)}\mathrm{I}_{n-1}\,.$$

Використаємо рекурентну формулу для знаходження інтеграла:

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^3}=\frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{a^2 4}\left[\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+\frac{1}{a^2 2}\int\frac{dx}{x^2+a^2}\right]=$$

$$=\frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2}+\frac{3x}{8a^4(x^2+a^2)}+\frac{3}{8a^5}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

13. $$\int x^3\cos x dx=\left\|\begin{array}{c} u=x^3; du=3x^2dx \\ \cos x dx=dv \\ v=\displaystyle\int\cos x dx=\sin x \end{array}\right\|=x^3\sin x-3\int x^2\sin x dx=$$

$$=\left\|\begin{array}{c} x^2=u; du=2xdx \\ \sin x dx=dv; v=-\cos x \end{array}\right\|=x^3\sin x-3\left(-x^2\cos x+2\int x\cos x dx\right)=x^3\sin x+$$

$$+3x^2\cos x-6(x\sin x+\cos x)+C=x^3\sin x+3x^2\cos x-6x\sin x-6\cos x=$$

$$=(x^3-6x)\sin x+(3x^2-6)\cos x+C\,.$$

Часто метод інтегрування частинами застосовується разом з методом заміни змінних.

14.

$$I=\int \sin^2 \sqrt{x}\ dx=\left\|\begin{matrix} x=t^2 \\ dx=2tdt \end{matrix}\right\|=2\int t\sin^2 tdt=2\int t\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{t^2}{2}-\int t\cos 2tdt=$$

$$=\left\|\begin{matrix} u=t,\ du=dt \\ dv=\cos 2tdt,\ v=\dfrac{\sin 2t}{2} \end{matrix}\right\|=\frac{t^2}{2}-t\frac{\sin 2t}{2}+\frac{1}{2}\int \sin 2tdt=\frac{t^2}{2}-t\frac{\sin 2t}{2}-$$

$$-\frac{1}{4}\cos 2t+C=\frac{\sqrt{x}}{2}\ \sqrt{x}-\sin 2\sqrt{x}\ -\frac{1}{4}\cos 2\sqrt{x}+C.$$

6.2.4. Інтегрування раціональних дробів

Первісна функція існує для всякої неперервної функції (це можна строго довести). Однак задача знаходження аналітичного виразу первісної функції в замкнутому вигляді, тобто у вигляді скінченної комбінації елементарних функцій, має точне р**озв'язання** тільки в окремих випадках. У таблиці подані приклади інтегралів, які за зовнішнім виглядом дуже схожі, однак у першому рядку інтеграли можуть бути подані в скінченному вигляді, у другому рядку – ті, які не інтегруються в скінченному вигляді.

$\int \frac{dx}{\sin x}$	$\int e^{-\sqrt{x}}dx$	$\int \frac{\ln xdx}{x}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$	$\int e^{\arcsin x}dx$	$\int \sqrt{\operatorname{tg} x}dx$
$\int \frac{\sin xdx}{x}$	$\int e^{-x^2}dx$	$\int \frac{dx}{\ln x}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$	$\int e^{\operatorname{arctg} x}dx$	$\int \sqrt{\sin x}dx$

У скінченному вигляді інтегрується досить вузький клас функцій. Наприклад, Чебишовим була доведена теорема про те, що інтеграл від *диференціального бінома*

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx,$$

де n, m, p – раціональні числа, обчислюється через елементарні функції тільки в трьох випадках:

1) якщо p – ціле число. (Покладемо $x = t^N$, де N – спільний знаменник дробів m, n).

2) $\dfrac{m+1}{n}$ – ціле число. (Заміна змінних $a + bx^n = t^N$, де N – знаменник дробу p).

3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ – ціле число. (Заміна змінних $b + ax^{-n} = t^N$, де N – знаменник дробу p).

Інших випадків інтегрування цих виразів в елементарних функціях немає.

Приклад

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \left\| \begin{matrix} p = \dfrac{1}{3}, n = \dfrac{1}{4} \\ m = -\dfrac{1}{2}, t^3 = 1 + \sqrt[4]{x}, x = (t^3 - 1)^4, dx = 12(t^3-1)^3 t^2 dt \end{matrix} \right\| =$$

$$= \int 12(t^3 - 1)t^3 dt = 12\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4}\right) + c = \frac{12}{7}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^7 - 3\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4} + C.$$

Раціональні дроби належать до класу функцій, які інтегруються у скінченному вигляді. Під раціональним дробом розуміють відношення двох багаточленів *n*-го та *m*-го степенів, тобто

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}.$$

Алгебраїчний раціональний дріб називається правильним, якщо степінь чисельника нижчий, ніж степінь знаменника, тобто $n < m$. В іншому разі дріб є неправильним.

Будь-який неправильний раціональний дріб може бути поданий як сума багаточлена та елементарних (найпростіших) дробів. Під елементарними або найпростішими дробами розуміють дроби таких чотирьох видів:

а) $\dfrac{A}{x-a}$;

б) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$;

в) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, де $(p^2 - 4q) < 0$;

г) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, де $(p^2 - 4q) < 0$.

Знаходження інтегралів від раціональних дробів рекомендується виконувати за такою схемою:

1. Якщо $n \geq m$ (дріб *неправильний*), то слід *виділити цілу частину,* подавши підінтегральну функцію у вигляді суми цілої частини (багаточлена) і правильного раціонального дробу.

2. Знаменник правильного раціонального дробу $Q_m(x)$ розкласти на множники, що відповідають дійсним значенням x і парам комплексно сполучених коренів, тобто на множники вигляду $(x-a)^k, (x^2+px+q)^r$, де $(p^2-4q)<0$.

3. Розкласти правильний раціональний дріб на найпростіші, використовуючи теорему.

Теорема

Якщо $Q_m(x)=b_0(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x^2+px+q)^{\mu}\ldots(x^2+lx+s)^{\nu}$, *то правильний нескоротний раціональний дріб* $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *може бути подано у вигляді*

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)}+\frac{B}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+$$

$$+\ldots+\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}}+\ldots+\frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{(x^2+px+q)}+\ldots+$$

$$+\frac{Px+Q}{(x^2+lx+s)^{\nu}}+\frac{P_1x+N_1}{(x^2+lx+s)^{\nu-1}}+\ldots+\frac{P_{\nu-1}x+N_{\nu-1}}{(x^2+lx+s)}.$$

Коефіцієнти $A, A_1, \ldots, B, B_1, \ldots$ можна визначити з таких міркувань. Написана рівність є тотожністю. Тому, якщо привести дріб до спільного знаменника, отримаємо тотожні багаточлени в чисельниках праворуч і ліворуч. Дорівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $A, A_1, \ldots, B, B_1, \ldots$.

Поряд із цим для визначення коефіцієнтів можна скористатися таким зауваженням: оскільки багаточлени, що знаходяться в чисельниках у правій і лівій частинах рівності, після приведення до спільного знаменника повинні бути тотожно рівні, то їхні значення рівні при будь-яких значеннях x. Надаючи x конкретні значення, отримаємо рівняння для визначення коефіцієнтів. За такі значення зручно вибирати дійсні корені знаменника. На практиці для знаходження коефіцієнтів можна використати обидва підходи одночасно.

4. Інтеграли від найпростіших раціональних дробів знаходяться за формулами:

а) $\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C$;

б) $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n} d(x-a) = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C,\ n \neq 1$;

в)

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}\ 2x+p\ -\frac{A}{2}p+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln\ x^2+px+q\ +$$

$$+\left(B-\frac{A}{2}p\right)\int \frac{d\ \ x+{}^{p}\!/_{2}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}} = \frac{A}{2}\ln\ x^2+px+q\ + \frac{B-\frac{A}{2}p}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} +$$

$+C$, де $(p^2-4q)<0$.

При обчисленні інтегралів від дробів четвертого типу (г) необхідно виконати такі перетворення підінтегральної функції

г) $$\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)-\frac{A}{2}p+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx = \frac{A}{2}\int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{\left(x^2+px+q\right)^n} +$$

$$+\left(B-\frac{A}{2}p\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n} = \frac{A}{2}\frac{\left(x^2+px+q\right)^{-n+1}}{1-n} + \left(B-\frac{A}{2}p\right)\cdot$$

$$\cdot\int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^n} = \left\| \begin{array}{l} x+\frac{p}{2}=t \\ dx=dt \\ q-\frac{p^2}{4}=a^2 \end{array} \right\| = \frac{A}{2}\frac{\left(x^2+px+q\right)^{-n+1}}{1-n} + \left(B-\frac{A}{2}p\right)\cdot$$

$\cdot\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$, де $q-\frac{p^2}{4}>0$.

Для обчислення інтеграла $I_n=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$, $n\in N$ або застосовують спосіб, що дозволяє виразити інтеграл I_n через I_{n-1}, або підстановку $t=a\cdot\operatorname{tg}z$.

Приклади інтегрування раціональних дробів

1. $I=\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$.

1) Дріб $\frac{x^3+1}{x^3-x^2}$ неправильний, тому що степінь чисельника дорівнює степеню знаменника. Виділимо цілу частину:

$$\frac{x^3+1}{x^3-x^2}=\frac{x^3-x^2\ \ +(1+x^2)}{x^3-x^2}=1+\frac{x^2+1}{x^3-x^2}.$$

Тоді заданий інтеграл зводиться до наступних двох інтегралів:

$$I=\int\left(1+\frac{x^2+1}{x^3-x^2}\right)dx=\int dx+\int\frac{1+x^2}{x^2\left(x-1\right)}dx.$$

2) Знаменник дробу в другому інтегралі має дійсні кратні корені і може бути поданий у вигляді добутку $x^2\left(x-1\right)$.

Розкладемо підінтегральний вираз на найпростіші дроби:

$$\frac{x^2+1}{x^2\left(x-1\right)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-1}.$$

Приведемо до спільного знаменника і зрівняємо чисельники:

$$1+x^2=A\left(x-1\right)+B\left(x-1\right)x+Cx^2.$$

Для знаходження коефіцієнтів покладемо спочатку x=1, одержимо 2=C; потім, поклавши x=0, знаходимо коефіцієнт A= –1. Зрівнявши коефіцієнти при x, знайдемо B з рівняння: A–B=0, B= –1.

Випливає, $I=x-\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{x-1}=x+\frac{1}{x}+\ln\left|\frac{(x-1)^2}{x}\right|+C$.

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-1} = \int \frac{dx}{x-1 \quad x^2+x+1}$.

Розкладемо дріб на найпростіші: $\displaystyle\frac{1}{x-1 \quad x^2+x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+c}{x^2+x+1}$,

тоді $\quad 1 = A\left(x^2+x+1\right) + \left(Bx+c\right)\left(x-1\right)$.

Нехай x=1, тоді 1=3A, A=1/3.

Зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x (наприклад, при першому та другому), одержимо систему рівнянь для знаходження інших коефіцієнтів:

x^1 0=A+C-B; C= –2/3;

x^2 0=A+B $\Rightarrow$ B= –1/3.

Тоді $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\int \frac{d \quad x-1}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx =$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{2} \quad 2x+1 \quad -\frac{1}{2}+2}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln \quad x^2+x+1 \quad -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d \quad x+1/2}{x+1/2 \quad ^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln \quad x^2+x+1 \quad - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

3. $\displaystyle\int \frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}dx$.

Підінтегральний дріб правильний, розкладемо його на найпростіші дроби.

$$\int \frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}dx \equiv \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+4} + \frac{C}{x-1}.$$

$$A = \frac{15x^2-4x-81}{(x+4)(x-1)}\Big|(x=3) = \frac{15(3)^2-4\cdot 3-81}{(3+4)(3-1)} = 3 \ .$$

$$B = \frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x-1)}\Big|(x=-4) = -5 \ .$$

$C=\frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)}\Big|(x=1)=7$.

$$\int\frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}dx=3\int\frac{dx}{x-3}+5\int\frac{dx}{x+4}+7\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=3\ln|x-3|+5\ln|x+4|+7\ln|x-1|+const.$$

4. $\int\frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}dx$.

Підінтегральна функція є правильний дріб, розкладемо його на найпростіші.

$$\frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}\equiv\frac{A}{(x-2)^3}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x-5}.$$

$$A=\frac{x^3-6x^2+9x+7}{x-5}\Big|_{x=2}=\frac{8-24+18+7}{-3}=\frac{9}{-3}=-3.$$

$$D=\frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3}\Big|_{x=5}=\frac{-25+45+7}{27}=1.$$

Для визначення B і C приведемо дріб в правій частині до спільного знаменника. Оскільки знаменники ліворуч і праворуч однакові, а дроби рівні тотожно, то рівні й чисельники.

$$\frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}\equiv\frac{A(x-5)+B(x-2)(x-5)+C(x-2)^2(x-5)+D(x-2)^3}{(x-2)^3(x-5)};$$

$$x^3-6x^2+9x+7\equiv A(x-5)+B(x-2)(x-5)+C(x-2)^2(x-5)+D(x-2)^3.$$

Зрівнюємо коефіцієнти при рівних степенях x зліва і справа:

при x^3:1=C+D, D=1, C=0;

x^2:–6 = B–5C–4C–6D, –6 = B–6, B = 0.

Підставимо коефіцієнти в розкладання й знайдемо інтеграл.

$$\int\frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}dx=\int\frac{-3dx}{(x-2)^3}+\int\frac{1dx}{x-5}=\frac{3}{2}\frac{1}{(x-2)^2}+\ln|x-5|+const.$$

5. $\int\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\equiv\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}=\frac{(Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+4)};$$

$x^2 \equiv (Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2+1)$.

при x^3 :0=A+$C \to A$= –C.

x^2 :1=B+D.

x: 0=4A+C, –3C=0, C=0, A=0.

x^0: 0=4B+D, 1=–3B, B= $-\frac{1}{3}$, D=$\frac{4}{3}$.

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \int \frac{-\frac{1}{3}}{x^2+1}dx + \int \frac{\frac{4}{3}}{x^2+4} = -\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + const.$$

6. $\int \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2}dx$.

$$\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+N}{x^2+1}.$$

$$A = \frac{x^3+3}{(x^2+1)^2}\Big|_{x=-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Приводимо праву частину до спільного знаменника:

$$\frac{A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x+1)+(Dx+N)(x^2+1)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)^2},$$

зрівнюємо чисельники:

$x^3+3 \equiv A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x+1)+(Dx+N)(x^2+1)(x+1)$:

при x^3: 1=D+N, підставимо в друге рівняння;

x^2: 0=2A+B+D+N, 2A+B+1=0, B= –2A–1= –2;

x: 0=B+C+D+N, C=1;

x^0: 3=A+C+N, N=$\frac{3}{2}$, D= $-\frac{1}{2}$.

$$\int \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2}dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}dx + \int \frac{-2x+1}{(x^2+1)^2}dx + \int \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln|x+1| -$$

$$-\int \frac{2xdx}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x+1\right| + \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right| + \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}\ .$$

Обчислимо окремо

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \left\| \begin{array}{c} x = \operatorname{tg} t; x^2+1 = \operatorname{tg}^2 t + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 t} \\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}; \sin t = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\ t = \operatorname{arctg} x; \cos t = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{array} \right\| = \int \frac{\cos^4 t dt}{\cos^2 t} = \int \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t) dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t \cos t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + C.$$

$$\int \frac{(x^3+3)dx}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\ln\left|x+1\right| + \frac{x+2}{2(x^2+1)} - \frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right| + 2\operatorname{arctg} x + C. \ \square$$

Розглянувши 4 випадки інтегрування дрібно-раціональної функції, ми бачимо, що інтеграл від неї є елементарною функцією, яка в загальному випадку є сумою логарифма, арктангенса і раціональної функції.

7. $\displaystyle\int \frac{2x^3-20x+8}{x(x-2)(x+4)}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є неправильний дріб.

Виділимо цілу частину:
$$\begin{array}{r|l} 2x^3-20x+8 & \underline{x^3+2x^2-8x} \\ -2x^3+4x^2-16x & \quad 2 \\ \hline -4x^2-4x+8 & \end{array}$$

$$\int \frac{2x^3-20x+8}{x(x-2)(x+4)}dx = \int \left(2 + \frac{-4x^2-4x+8}{x^3+2x^2-8x}\right)dx = \int 2dx - \int \frac{4x^2+4x-8}{x(x-2)(x+4)}dx =$$

$$= 2x - \int \frac{4x^2+4x-8}{x(x-2)(x+4)}dx.$$

Розкладемо підінтегральну функцію на найпростіші дроби:

$$\frac{4x^2+4x-8}{x(x-2)(x+4)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+4}.$$

$$A = \frac{4x^2+4x-8}{(x-2)(x+4)}\Big|_{x=0} = 1,\ B = \frac{4x^2+4x-8}{x(x+4)}\Big|_{x=2} = \frac{4}{3},\ C = \frac{4x^2+4x-8}{x(x-2)}\Big|_{x=-4} = \frac{5}{3}.$$

$$\int\frac{4x^2+4x-8}{x(x-2)(x+4)}dx=\int\frac{dx}{x}+\frac{4}{3}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{5}{3}\int\frac{dx}{x+4}=\ln\left|x\right|+\frac{4}{3}\ln\left|x-2\right|+\frac{5}{3}\ln|x+4|+$$
$+C$.

8. $\displaystyle\int\frac{7x^3-9}{x^2(x^2-5x+6)}dx=\int\frac{7x^3-9}{x^2(x-2)(x-3)}dx.$

Розв’язання. Розкладемо підінтегральну функцію на найпростіші дроби:

$$\frac{7x^3-9}{x^2(x-2)(x-3)}\equiv\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{(x-2)}+\frac{D}{(x-3)};A=-\frac{3}{2},D=20,C=-\frac{47}{4}.$$

Для знаходження B приведемо до спільного знаменника і прирівняємо чисельники:

$$7x^3-9\equiv A(x-2)(x-3)+Bx(x-2)(x-3)+Cx^2(x-3)+Dx^2(x-2),$$

при x^3: $7=B+3+D$, $B=-\dfrac{5}{4}$.

$$\int\frac{7x^3-9}{x^2(x-2)(x-3)}dx=\frac{3}{2x}-\frac{5}{4}ln\left|x\right|-\frac{47}{4}ln\left|x-2\right|+20ln\left|x-3\right|+C.$$

9. $\displaystyle\int\frac{2x^3+5x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx.$

Розв’язання. Підінтегральний дріб правильний. Розкладемо його на найпростіші дроби, враховуючи, що корені знаменника комплексні.

$$\frac{2x^3+5x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\equiv\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\equiv$$

$$\equiv\frac{Ax+B\quad x^2+1\ +\ Cx+D\quad x^2+x+1}{x^2+x+1\quad x^2+1}.$$

$$2x^3+5x^2+3x+2\equiv(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+x+1).$$

$x^3: 2=A+C\Rightarrow A=2-C=2-3=-1;$

$x^2: 5=B+C+D\ \Rightarrow\ 5=2+C, C=3;$

$x: 3=A+C+D\Rightarrow 3-A-C=D, D=3+1-3=1;$

$x^0: 2=B+D\Rightarrow B=2-D=2-1=1.$

$$\int\frac{2x^3+5x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx=\int\frac{-x+1}{x^2+x+1}dx+\int\frac{3x+1}{x^2+1}dx.$$

$$\int \frac{-x+1}{x^2+x+1}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} + \int \frac{1/2+1}{(x+1/2)^2+3/4}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| + \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3/4}}\operatorname{arctg}\frac{x+1/2}{\sqrt{3/4}} \ .$$

$$\int \frac{3x+1}{x^2+1}dx = 3\frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{3}{2}\ln\left|x^2+1\right| + \operatorname{arctg} x + C .$$

$$\int \frac{2x^3+5x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx = -\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{2}\ln\left|x^2+1\right| +$$

$$+\operatorname{arctg} x + C .$$

10. $I = \int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^2}$ **.**

Розв’язання. Підінтегральна функція є найпростіший раціональний дріб четвертого типу (г). Нижче подані два способи для знаходження інтегралів від цього дробу.

Перший спосіб

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^2} = \frac{1}{9}\int \frac{\left(9+x^2\right)-x^2}{\left(x^2+9\right)^2}dx = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x^2+9} - \frac{1}{9}\int x\frac{xdx}{\left(x^2+9\right)^2} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = x \quad dv = \dfrac{xdx}{\left(x^2+9\right)^2} \\ du = dx \quad v = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{d\left(x^2+9\right)}{\left(x^2+9\right)^2} = \\ = -\dfrac{1}{2\left(x^2+9\right)} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x^2+9} - \frac{1}{9}\left(-\frac{x}{2\left(x^2+9\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)} \right) =$$

$$= \frac{1}{18}\int \frac{dx}{x^2+9} + \frac{1}{18}\cdot\frac{x}{x^2+9} = \frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + \frac{1}{18}\cdot\frac{x}{x^2+9} + C .$$

Другий спосіб

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^2} = \left\| \begin{matrix} x = 3\operatorname{tg} z \quad \operatorname{tg} z = \dfrac{x}{3} \\ dx = \dfrac{3dz}{\cos^2 z} \end{matrix} \right\| = 3\int \frac{dz}{\cos^2 z\left(9\operatorname{tg}^2 z+9\right)^2} = \frac{1}{27}\int \cos^2 z dz =$$

$$\frac{1}{27}\int\frac{1+\cos 2z}{2}dz=\frac{1}{54}z+\frac{\sin 2z}{27\cdot 2}+C=\frac{1}{54}z+\frac{2\sin z\cos z}{27\cdot 2}+C=\frac{1}{54}z+$$

$$+\frac{\operatorname{tg} z}{54\ 1+\operatorname{tg}^2 z}+C=\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+\frac{1}{18}\cdot\frac{x}{x^2+9}+C\ .$$

Зауваження. При обчисленні інтегралів від раціональних функцій іноді можна обійтися без розкладання їх на найпростіші, застосовуючи інші підходи, а саме приклад 11.

11. $I=\int\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^2}dt$.

Розв'язання. Цей інтеграл можна знайти методом інтегрування частинами. Дійсно, взявши

$$u=t,\quad dv=\frac{tdt}{\left(t^2-1\right)^2}=\frac{1}{2}\frac{d\left(t^2-1\right)}{\left(t^2-1\right)^2};\quad du=dt,\quad v=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2-1\right)}{\left(t^2-1\right)^2}=-\frac{1}{2\left(t^2-1\right)},$$

одержимо

$$I=-\frac{t}{2\ t^2-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-1}=-\frac{t}{2\ t^2-1}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-C\,.$$

12.

$$\int\frac{dt}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+4\right)}=\left\|t^2+4-\left(t^2-1\right)\equiv 5\right\|=\frac{1}{5}\int\frac{t^2+4-\left(t^2-1\right)}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+4\right)}dt=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2-1}-$$

$$-\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C\,.$$

6.2.5. Інтегрування виразів, що містять тригонометричні функції

1. Інтеграли вигляду:

$$\int\sin(kx)\cos(lx)dx;\int\cos(kx)\cos(lx)dx;\int\sin(kx)\sin(lx)dx\,.$$

Із тригонометрії відомо, що добуток тригонометричних функцій перетворюється в суму за формулами:

$$\sin kx \cos lx = \frac{1}{2}\ \sin(k-l)x + \sin(k+l)x\ ;$$

$$\cos kx \cos lx = \frac{1}{2}\ \cos(k-l)x + \cos(k+l)x\ ;$$

$$\sin kx \sin lx = \frac{1}{2}\ \cos(k-l)x - \cos(k+l)x\ .$$

Приклади

1. $\int \sin 6x \cos 7x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 13x - \sin x) dx = \frac{1}{2}\int \sin 13x dx - \frac{1}{2}\int \sin x dx =$

$= -\frac{1}{26}\cos 13x + \frac{1}{2}\cos x + C$.

2. $\int \cos 5x \cos 9x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 14x + \cos 4x) dx = \frac{1}{2}\frac{1}{14}\sin 14x + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\sin 4x + C =$

$= \frac{1}{28}\sin 14x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$.

3. $\int \sin 12x \sin 4x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 8x - \cos 16x) dx = \frac{1}{16}\sin 8x - \frac{1}{32}\sin 16x + C$.

4. $\int \sin 2x \cos 5x \sin 9x dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\ \sin 4x + \sin 14x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x \sin 4x dx +$

$+\frac{1}{2}\int \sin 2x \sin 14x dx = \frac{1}{4}\int (\cos 2x - \cos 6x) dx + \frac{1}{4}\int (\cos 12x - \cos 16x) dx =$

$= \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin 6x + \frac{1}{48}\sin 12x - \frac{1}{64}\sin 16x + C\ .$

2. Інтеграли вигляду:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx, \quad m, n > 0.$$

а) Розглянемо випадок, коли показник степеня синуса є непарне число

$$m=2k+1.$$

$\sin^m x \cos^n x dx = \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = \sin^{2k} x \cos^n x \sin x dx = -(\sin^2 x)^k \cos^n x\, d(\cos x) =$
$= -(1-\cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x) = \left|\cos x = z\right| = -(1-z^2)^k z^n dz.$

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = -\int (1-z^2)^k z^n dz\, .$$

б) Другий випадок. Показник степеня косинуса є непарне число

n=2k+1.

$\sin^m x\ \cos^n x dx = \sin^m x\ \cos^{2k+1} x dx = \sin^m x\ \cos^{2k} x\ \cos x\ dx = \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k d(\sin x) =$

$|\sin x = z| = z^m (1 - z^2)^k dz$.

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx = \int z^m\ 1 - z^2\ ^k dz.$$

При обчисленні інтегралів такого вигляду задача зводиться до інтегрування степеневих функцій.

Приклади

1. $\int \sin^5 x \cos^2 x dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \sin x dx = -\int \sin^4 x \cos^2 x d(\cos x) =$

$= -\int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x d(\cos x) = |\cos x = z| = -\int (1 - z^2)^2 z^2 dz =$

$= -\int (1 - 2z^2 + z^4) z^2 dz = -\int (z^2 - 2z^4 + z^6) dz = -\left(\frac{z^3}{3} - 2\frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7}\right) + C =$

$= -\left(\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{2}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x\right) + C.$

2. $\int \sin^4 x \cos^7 x dx = \int \sin^4 x \cos^6 x \cos x dx = \int \sin^4 x (\cos^2 x)^3 d(\sin x) =$

$= \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^3 d(\sin x) = |\sin x = z| = \int z^4 (1 - z^2)^3 dz =$

$= \int z^4 (1 - 3z^2 + 3z^4 - z^6) dz = \int (z^4 - 3z^6 + 3z^8 - z^{10}) dz =$

$= \frac{z^5}{5} - 3\frac{z^7}{7} + 3\frac{z^9}{9} - \frac{z^{11}}{11} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{3}{7}\sin^7 x + \frac{1}{3}\sin^9 x - \frac{\sin^{11} x}{11} + C.$

3. Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x) dx$.

1. За допомогою універсальної тригонометричної підстановки

$$t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

інтеграл перетворюється в інтеграл від раціональної функції.

Зазначимо ще три випадки, в яких застосовуються більш прості підстановки, ніж універсальна тригонометрична.

2. Якщо $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, тобто функція непарна відносно $\sin x$, то за нову змінну приймають $t=\cos x$.

3. Якщо $R(\sin x,-\cos x)=-\ R(\sin x,\cos x)$, то $t=\sin x$.

4. Якщо $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, тобто функція парна відносно $\sin x$ і $\cos x$ водночас, то $t=\operatorname{tg} x$ або $t=\operatorname{ctg} x$.

Приклади

1. $$\int\frac{dx}{\sin^5 x}=\left\|\begin{matrix}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t\\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}\\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{matrix}\right\|=\int\frac{2(1+t^2)^5dt}{(1+t^2)(2t)^5}=\frac{1}{16}\int\frac{(1+t^2)^4dt}{t^5}=$$

$$=\frac{1}{16}\int\frac{(1+4t^2+6t^4+4t^6+t^8)dt}{t^5}=\frac{1}{16}\int\left(\frac{1}{t^5}+4\frac{1}{t^3}+\frac{6}{t}+4t+t^3\right)dt=$$

$$=\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{4}\frac{1}{t^4}-2\frac{1}{t^2}+6\ln|t|+\frac{t^4}{4}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4\frac{x}{2}-2\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}+6\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}\right)+\ C.$$

2. $$\int\frac{dx}{8+7\cos x+\sin x}=\left\|\begin{matrix}t=tg\dfrac{x}{2};\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}\\ dt=\dfrac{2dt}{1+t^2};\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right\|=$$

$$=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left[8+\dfrac{7(1-t^2)}{1+t^2}+\dfrac{2t}{1+t^2}\right]}=$$

$$=2\int\frac{dt}{8+8t^2+7-7t^2+2t}=2\int\frac{dt}{15+t^2+2t}=2\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2+14}=$$

$$=2\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2+14}=2\frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{\sqrt{14}}+C=\frac{2}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1\right)}{\sqrt{14}}+C.$$

3. $\int \frac{\cos^3 x dx}{2+\sin x} = \left\| \frac{(-\cos x)^3}{2+\sin x} = -\frac{\cos^3 x}{2+\sin x} \right\| =$

$\|$ оскільки функція непарна відносно $\cos x$, то за нову змінну приймаємо $t = \sin x$ $\|$

$$= \int \frac{\cos^2 x \cos x dx}{2+\sin x} = \int \frac{1-\sin^2 x \ \ d(\sin x)}{2+\sin x} = \left\| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = d(\sin x) \end{matrix} \right\| = \int \frac{(1-t^2)dt}{2+t} =$$

$$= \int (-t + 2 - \frac{3}{2+t})dt = -\frac{t^2}{2} + 2t - 3\int \frac{d(t+2)}{t+2} = -\frac{t^2}{2} + 2t - 3\ln|t+2| + C =$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{2} + 2\sin x - 3\ln|\sin x + 2| + C \ .$$

4. $\int \frac{\sin x \cos x dx}{(3+\cos x)^2} = \left\| \frac{(-\sin x)\cos x}{(3+\cos x)^2} = -\frac{\sin x \cos x}{(3+\cos x)^2} \right\| = -\int \frac{\cos x d(\cos x)}{(3+\cos x)^2} =$

$$= -\int \frac{tdt}{(3+t)^2} = -\int \frac{(3+t)-3}{(3+t)^2} dt = -\int \frac{d(t+3)}{3+t} + 3\int \frac{d(t+3)}{(3+t)^2} =$$

$$= -\ln|3+t| - \frac{3}{3+t} + C = C - \ln|3+\cos x| - \frac{3}{3+\cos x}.$$

5. $\int \operatorname{tg}^5 x dx$.

Перший спосіб

$$\int \operatorname{tg}^5 x dx = \left\| \begin{matrix} \operatorname{tg} x = t \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right\| = \int \frac{t^5}{1+t^2} dt = \left\| tdt = \frac{1}{2} d\ \ t^2 \right\| = \frac{1}{2}\int \frac{t^4 d\ \ t^2}{1+t^2} = \left\| t^2 = u \right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{u^2 du}{1+u} = \frac{1}{2}\int \frac{u^2 - 1 + 1}{1+u} du = \frac{1}{2}\left[\int \frac{u^2-1}{1+u} du + \int \frac{du}{1+u} \right] = \frac{1}{2}\int (u-1) du +$$

$$+ \frac{1}{2}\ln|1+u| = \frac{1}{2}\frac{u-1^{\ \ 2}}{2} + \frac{1}{2}\ln|u+1| + C = \left\| u = t^2, \quad t = \operatorname{tg} x, \quad u = tg^2 x \right\| =$$

$$= \frac{1}{4}\ \operatorname{tg}^2 x - 1^{\ \ 2} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}^2 x + 1\right| + C = \frac{1}{4}\ \operatorname{tg}^2 x - 1^{\ \ 2} - \frac{1}{2}\ln\ \cos^2 x\ + C.$$

Другий спосіб

$$\int \operatorname{tg}^5 x dx = \int \operatorname{tg}^3 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \int \operatorname{tg}^3 x d\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^3 x dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C.$$

6. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x} =$$

$$= \left\| \begin{array}{c} \dfrac{1}{(-\sin x)^2 - 4(-\sin x)(-\cos x) + 5(-\cos x)^2} = \\ = \dfrac{1}{\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x} \end{array} \right\| =$$

для переходу до нової змінної $t = \operatorname{tg} x$ поділимо чисельник і знаменник на $\cos^2 x$:

$$= \int \frac{dx/\cos^2 x}{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 4\dfrac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} + 5\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 5} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 - 4t + 5} = \int \frac{d(t-2)}{(t-2)^2 + 1} = \operatorname{arctg}(t-2) + C = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x - 2) + C\ .$$

4. Інтегрування парних степенів синуса і косинуса.

$$\int \sin^{2n} x dx,\ \int \cos^{2n} x dx,\ n \text{ – ціле, } n>0.$$

Застосуємо такі формули тригонометрії:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x);\quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

Застосування цих формул дозволяє знизити степінь синуса або косинуса і збільшити аргумент.

Приклади

1. $$\int \cos^4 x dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2 dx =$$

$$=\frac{1}{4}\int(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\int\cos^2 2xdx=$$

‖до останнього інтеграла застосовуємо прийом пониження степеня: ‖

$$=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

2. $\int\sin^6 xdx=\int(\sin^2 x)^3 dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 dx=\frac{1}{8}\int(1-\cos 2x)^3 dx=$

$$=\frac{1}{8}\int(1-3\cos 2x+3\cos^2 2x-\cos^3 2x)dx=\frac{1}{8}x-\frac{3}{16}\sin 2x+$$

$$+\frac{3}{8}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx-\frac{1}{8}\int\cos^2 2x\cos 2xdx=$$

$$=\frac{1}{8}x-\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{16}x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{16}\int(1-\sin^2 2x)d(\sin 2x)=$$

$$=\frac{5}{16}x-\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{16}\frac{\sin^3 2x}{3}+C\ .$$

3. $\int\sin^5 xdx=\int\sin^4 x\sin xdx=-\int(1-\cos^2 x)^2 d(\cos x)=$

$$=-\int(1-2\cos^2 x+\cos^4 x)d(\cos x)=-(\cos x-2\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{\cos^5 x}{5})+C\,.$$

4. $\int\cos^4 x\sin^2 xdx=\frac{1}{4}\int\cos^2 x4\cos^2 x\sin^2 xdx=\frac{1}{4}\int\cos^2 x\sin^2 2xdx=$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 2x}{2}\sin^2 2xdx=\frac{1}{8}\int\sin^2 2xdx+\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cos 2xdx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx+\frac{1}{16}\int\sin^2 2xd(\sin 2x)=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{16}\frac{\sin^3 2x}{3}+C\ .$$

5. Інтеграли вигляду $\int\mathrm{tg}^n xdx$, $\int\mathrm{ctg}^n xdx$.

До інтегралу $\int\mathrm{tg}^n xdx$ варто застосувати підстановку $\mathrm{tg}x = z$, $dx=\frac{dz}{1+z^2}$.

$\int tg^n xdx = \int \frac{z^n dz}{1+z^2}$. Виконуючи ділення z^n на (z^2+1), дійдемо до табличних інтегралів.

До інтеграла $\int \operatorname{ctg}^n xdx$ застосуємо підстановку $\operatorname{ctg} x = z, dx = -\frac{dz}{1+z^2}$.

$\int \operatorname{ctg}^n xdx = -\int \frac{z^n dz}{z^2+1}$, далі потрібно виконати ділення і знайти інтеграли.

Приклади

1. $\int \operatorname{ctg}^5 xdx = \left\| \begin{matrix} \operatorname{ctg} x = z \\ dx = -\dfrac{dz}{1+z^2} \end{matrix} \right\| = -\int \frac{z^5 dz}{z^2+1} = \left\| \frac{z^5}{z^2+1} = z^3 - z + \frac{z}{z^2+1} \right\| =$

$= -\int (z^3 - z + \frac{z}{z^2+1})dz = -(\frac{z^4}{4} - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|z^2+1\right|) + C =$

$= -(\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|z^2+1\right|) + C.$

2. $\int \operatorname{tg}^4 xdx = \left\| \begin{matrix} \operatorname{tg} x = z \\ dx = \dfrac{dz}{1+z^2} \end{matrix} \right\| = \int \frac{z^4}{z^2+1}dz = \int (z^2 - 1 + \frac{1}{z^2+1})dz = \frac{z^3}{3} - z +$

$+ \operatorname{arctg} z + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C$.

6. Інтеграл вигляду $\int \frac{1}{\sin^n x \cos^m x}$, де $n>0$, $m>0$.

Чисельник можна замінити тригонометричною одиницею в другому степені:

$$1^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2.$$

$$\int \frac{1}{\sin^n x \cos^m x}dx = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\sin^n x \cos^m x}dx = \int \frac{\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x}{\sin^n x \cos^m x}dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sin^{n-4} x \cos^m x}dx + 2\int \frac{1}{\sin^{n-2} x \cos^{n-2} x}dx + \int \frac{1}{\sin^n x \cos^{m-4} x}dx$$

і знову повторити той же прийом, зводячи інтеграли до табличних.

Приклади

1.

$$\int \frac{1}{\cos^4 x \sin^2 x}dx = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^4 x \sin^2 x}dx = \int \frac{\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^4 x \sin^2 x}dx =$$

$$= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx + 2\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) + 2\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg} x -$$

$$-\operatorname{ctg} x + C.$$

2. $$\int \frac{1}{\sin^3 x \cos^3 x}dx = \int \frac{\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x}{\sin^3 x \cos^3 x}dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} +$$

$$+2\int \frac{1}{\sin x \cos x}dx + \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} + 4\int \frac{dx}{\sin 2x} + \int \frac{d(\sin x)}{\sin^3 x} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 x} + 2\ln|tgx| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C.$$

7. Інтеграли вигляду $\int \frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2m} x}dx \ (m \geq n),\ \int \frac{\cos^{2m} x}{\sin^{2n} x}dx \ (n \geq m)$

обчислюються за допомогою підстановок $z = \operatorname{tg} x$ або $z = \operatorname{ctg} x$.

Якщо степінь чисельника більше степеня знаменника $n > m$, то

$$\int \frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2m} x}dx = \int \frac{(\sin^2 x)^n}{\cos^{2m} x}dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^n}{\cos^{2m} x}dx.$$

Приклад. $$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x} = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \left\| \begin{array}{c} \dfrac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x),\ \operatorname{tg} x = z \\ \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \end{array} \right\| =$$

$$= \int z^2(1+z^2)dz = \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C.$$

8. Інтеграли вигляду: $\int \frac{dx}{\sin^{2n} x}$ і $\int \frac{dx}{\cos^{2n} x}$.

а) $$\int \frac{dx}{\sin^{2n} x} = \int \frac{1}{\sin^{2n-2} x}\frac{dx}{\sin^2 x} = \left\| \begin{array}{c} \operatorname{ctg} x = z \\ \dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x = 1 + z^2 \end{array} \right\| =$$

$$=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^{n-1}\frac{dx}{\sin^2 x}=-\int \left(1+\operatorname{ctg}^2 x\right)^{n-1} d(\operatorname{ctg} x)=-\int(1+z^2)^{n-1}dz\ .$$

Приклад. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^8 x}=\int\frac{1}{\sin^6 x}\frac{dx}{\sin^2 x}=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^3\frac{dx}{\sin^2 x}=$

$$-\int(1+\operatorname{ctg}^2 x)^3 d(\operatorname{ctg} x)==-\left(\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg}^3 x+\frac{3}{5}\operatorname{ctg}^5 x+\frac{\operatorname{ctg}^6 x}{6}\right)+C\,.$$

б) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^{2m} x}=\int\frac{1}{\cos^{2m-2} x}\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{m-1}\frac{dx}{\cos^2 x}=$

$$=\left\|\begin{matrix}\operatorname{tg} x=z\\ \dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x=1+z^2\end{matrix}\right\|=\int \left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^{m-1} d(\operatorname{tg} x)=\int(1+z^2)^{m-1}dz\ .$$

Приклади

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{cos^6 x}=\int\frac{1}{cos^4 x}\frac{dx}{cos^2 x}=\int\left(\frac{1}{cos^2 x}\right)^2\frac{dx}{cos^2 x}=\left|tgx=z\right|=$

$$=\int(1+tg^2x)^2(\,dtgx\,)=\int\left(1+z^2\right)^2dz=\int(1+2z^2+z^4\,)dz=z+\frac{2}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5+C=$$

$$=tgx+\frac{2}{3}tg^3x+\frac{1}{5}tg^5x+C\ .$$

2.

$$\int\frac{\cos^6 x}{\sin^4 x}dx=\int\frac{(\cos^2 x)^3}{\sin^4 x}dx=\int\frac{\left(1-\sin^2 x\right)^3}{\sin^4 x}dx=\int\frac{1-3\sin^2 x+3\sin^4 x-\sin^6 x}{\sin^4 x}dx=$$

$$=\int\frac{dx}{\sin^4 x}-3\int\frac{dx}{\sin^2 x}+3\int dx-\int\sin^2 x dx=\int\frac{1}{\sin^2 x}\frac{dx}{\sin^2 x}+3\operatorname{ctg} x+3x-$$

$$-\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=-\int(1+\operatorname{ctg}^2 x)d(\operatorname{ctg} x)+3\operatorname{ctg} x+3x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x=$$

$$=-\operatorname{ctg} x-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+3\operatorname{ctg} x+\frac{5}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C\,.$$

Контрольні приклади до гл. 6

У наступних прикладах знаки * необхідно замінити виразами або числами.

Приклад 6.1. Знайти $I=\int x^2\sqrt[4]{1+2x^3}\,dx.$

Розв'язання. $I=\frac{1}{6}\int\left(1+2x^3\right)^{\frac{1}{4}}d\left(\boxed{*}\right)=\frac{2}{15}\left(1+2x^3\right)^{\boxed{*}}+C$.

Приклад 6.2. Знайти $I=\int\left(2+\frac{x}{2x^2+1}\right)\frac{dx}{2x^2+1}$.

Розв'язання. $I=\boxed{*}\int\frac{d\left(\boxed{*}\right)}{\left(\sqrt{2}x\right)^2+1}+\frac{1}{4}\int\frac{d\left(\boxed{*}\right)}{\left(2x^2+1\right)^2}=\sqrt{2}\,\text{arctg}\,\sqrt{2}x-\frac{1}{4\,\boxed{*}}+C$.

Приклад 6.3. Знайти $I=\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx.$

Розв'язання. Помножимо чисельник і знаменник підінтегрального виразу на x:

$$I=\int\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot x}{x^2}dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt{1-x^2}=t;\ 1-x^2=t^2\\ xdx=\boxed{*}dt\end{array}\right|=-\int\frac{t^2dt}{\boxed{*}}=\int\frac{\left(t^2-1\right)+\boxed{*}}{t^2-1}dt=$$

$$=t+\frac{1}{2}\ln\left|\boxed{\frac{*}{*}}\right|+C=\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right|+C.$$

Приклад 6.4. Знайти $I=\int\frac{2x^2}{1-x^2}dx.$

Розв'язання. $I=-2\int\frac{x^2}{\boxed{*}}dx=-2\int\frac{x^2-1+\boxed{*}}{x^2-1}dx=-2\int\left(1+\frac{\boxed{*}}{x^2-1}\right)dx=$

$$=-2\left(\boxed{*}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\boxed{*}}{1-x}\right|\right)+C.$$

Приклад 6.5. Знайти $I=\int\left(2-3x\right)\cdot e^{\frac{x}{3}}dx.$

Розв'язання. $I=\left\|\begin{array}{l}u=\boxed{*},\ \ du=\boxed{*}dx\\ dv=e^{\frac{x}{3}}dx,\ v=3\cdot e^{\frac{x}{3}}\end{array}\right\|=\left(\boxed{*}\right)\cdot 3\cdot e^{\frac{x}{3}}+\boxed{*}\cdot\int e^{\frac{x}{3}}dx=$

$$=\left(\boxed{*}\right)\cdot 3\cdot e^{\frac{x}{3}}+\boxed{*}\cdot e^{\frac{x}{3}}+C.$$

Приклад 6.6. Знайти $I=\int sin^3x\cdot cos^2xdx$.

Розв'язання. $I=\int \sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\sin x dx=\left\|\begin{matrix} t=\cos x \\ dt=\boxed{*}\cdot dx\end{matrix}\right\|=$

$$=-\int\left(1-\boxed{*}\right)\cdot t^2 dt=\int\left(t^{\boxed{*}}-t^2\right)dt=\frac{t^{\boxed{*}}}{\boxed{*}}-\frac{t^3}{3}+C=\boxed{*}\cdot\cos^{\boxed{*}}x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C.$$

Приклад 6.7. Знайти $\int\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx$.

Розв'язання. Виділимо цілу частину: $\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}=\boxed{*}+\frac{1}{x^4+3x^2}$.

Подамо правильний дріб у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{1}{x^4+3x^2}=\frac{1}{\boxed{*}\cdot\left(x^2+3\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{\boxed{*}}+\frac{\boxed{*}}{x^2+3}.$$

Зведемо до спільного знаменника та зрівняємо чисельники:

$1=\left(A+C\right)x^3+\left(B+D\right)x^2+\boxed{*}\cdot x+\boxed{*}$.

Зрівнюємо коефіцієнти при x^0, x, x^2, x^3. Одержимо систему:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ \boxed{*}=0 \\ \boxed{*}=1\end{cases},\quad \text{її розв'язання: } A=0, B=\boxed{*}, C=0, D=\boxed{*}.$$

Повертаємося до заданого інтеграла:

$$\int\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx=\int\left(\boxed{*}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{\boxed{*}\cdot\left(x^2+3\right)}\right)dx=\boxed{*}-\frac{1}{3x}-$$

$$-\boxed{*}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{\boxed{*}}+C.$$

Приклад 6.8. Знайти $I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-4\right)}$.

Розв'язання. Виконаємо заміну змінної.

$$I=\left\|\begin{matrix} x=t^{\boxed{*}} \\ dx=\boxed{*}\cdot t^{\boxed{*}}dt\end{matrix}\right\|=3\int\frac{t^{\boxed{*}}dt}{t\left(t-4\right)}=3\int\frac{\boxed{*}dt}{\left(t-4\right)}=$$

$$=3\int\frac{t-4+\boxed{*}}{t-4}dt=3\int\left(1+\frac{\boxed{*}}{t-4}\right)dt=3\ t+\boxed{*}\ln\left|\boxed{*}\right|\ +C=$$

$\|$ повертаємося до вхідної змінної x $\|$

$$=3\cdot x^{\boxed{*}}+\boxed{*}\ln\left|\boxed{*}-4\right|+C\ .$$

Лабораторна робота 6. Використання системи Maple для обчислення невизначених інтегралів

Завдання. Обчислити неневизначені інтеграли.

Виконання. У системі MAPLE для обчислення невизначених інтегралів існує команда **int(**expr,var**)**, де expr – підінтегральний вираз, var - змінна інтегрування. Результат інтегрування виводиться без сталої інтегрування, що дозволяє багаторазово використовувати результат у подальших обчисленнях.

Приклади:

1) $\int\sin^5 x\cdot\cos x\cdot dx$,

> int(sin(x)^5*cos(x),x);

$$\frac{1}{6}\sin^6 x\,.$$

2) $\int\frac{x}{\sqrt{4-x^4}}\cdot dx$,

>int(x/sqrt(4-x^4),x);

$$\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{2}x^2\right).$$

3) $\int\frac{dx}{x\cdot\ln x}$,

> int(1/(x*ln(x)),x);

$$\ln\ \ln\ x\quad .$$

4) $\int\frac{3x-1}{4x^2-4x+17}\cdot dx$,

> int((3*x-1)/(4*x^2-4*x+17),x);

$$\frac{3}{8}\ln\ 4x^2-4x+17\ +\frac{1}{16}\arctan\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right).$$

5) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+6x+2}} \cdot dx,$

> **int((2*x+5)/sqrt(x^2+6*x+2),x);**

$$2\left(x^2+6x+2\right)^{\frac{1}{2}} - \ln\left(x+3+\left(x^2+6x+2\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

6) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(x+1)} \cdot dx,$

> **int(1/(sqrt(x)*(x+1)),x);**

$$2\arctan\left(x^{\frac{1}{2}}\right).$$

7) $\int x^2\sqrt{1-x^2} \cdot dx,$

> **int(x^2*sqrt(1-x^2),x);**

$$-\frac{1}{4}\cdot x\cdot\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}\cdot x\cdot\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}\cdot\arcsin(x).$$

8) $\int \frac{1}{9+8\cos x+\sin x} \cdot dx,$

> **int(1/(9+8*cos(x)+sin(x)),x);**

$$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{4}\right).$$

9) $\int x\cdot \operatorname{arctg} x \cdot dx,$

> **int(x*arctan(x),x);**

$$\frac{1}{2}x^2\arctan(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan(x).$$

10) $\int e^{2x}\cdot\sin(3x)\cdot dx,$

>**int(exp(2*x)*sin(3*x),x);**

$$-\frac{3}{13}\exp(2x)\cos(3x) + \frac{2}{13}\exp(2x)\sin(3x).$$

11) $\int x^2\cdot \arccos x \cdot dx,$

> **int((x^2)*arccos(x),x);**

$$\frac{1}{3}\arccos(x)\,x^3 - \frac{1}{9}x^2\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{9}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

12) $\int \frac{1}{x^3-1}\cdot dx$,

int(1/(x^3-1),x);

$$\frac{1}{3}\ln\ -1+x\ -\frac{1}{6}\ln\ x^2+x+1\ -\frac{1}{3}3^{\frac{1}{2}}\arctan\left(\frac{1}{3}\ 2x+1\ 3^{\frac{1}{2}}\right).$$

Контрольні завдання до гл. 6

Завдання 1. Знайти невизначені інтеграли.

6.1. 1. а) $\int \sin^3 x\cos x dx$; б) $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$; в) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$;

г) $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+3x+1}}$; д) $\int \frac{3x^2-6x+1}{x^3-3x^2+2x}dx$; е) $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$;

ж) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}$; з) $\int \frac{5+\ln(x+5)}{x+5}dx$; и) $\int \frac{\cos^3 xdx}{\sin^3 x}$;

к) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$; л) $\int \sqrt{81-x^2}dx$; м) $\int \frac{\arcsin xdx}{x^2}$.

6.1.2. а) $\int \frac{\arcsin\ln x}{x}dx$; б) $\int x^2e^{-x}dx$; в) $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+1}$;

г) $\int \frac{(4x+1)dx}{\sqrt{-x^2-2x+1}}$; д) $\int \frac{2x^2-6x+1}{(x-1)^2(x-2)}dx$; е) $\int \frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}{x\sqrt{x}}dx$;

ж) $\int \mathrm{tg}^2 xdx$; з) $\int \frac{2\,\mathrm{arctg}\ 2x\ -x}{1+4x^2}dx$; и) $\int \frac{\sin^3 xdx}{\cos^4 x}$;

к) $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$; л) $\int \frac{dx}{\left(16+x^2\right)\sqrt{16+x^2}}$; м) $\int \mathrm{arctg}\ 1+\sqrt{x}\ dx$.

6.1.3. а) $\int \sin 4xe^{\sin 2x}dx$; б) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$; в) $\int \frac{\cos^2 xdx}{\sin^4 x}$;

г) $\int \frac{(7x-1)dx}{\sqrt{3x^2-6x+4}}$; д) $\int \frac{x^2-9x+14}{\left(x^2-4x+3\right)(x-4)}dx$; е) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{arctg}\,e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx$;

ж) $\int \frac{x^2-2}{x^3-4x}dx$; з) $\int \frac{(x-\sin x)dx}{x^2+2\cos x}$; и) $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$;

к) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$; л) $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{5-x^2}\right)^3}$; м) $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$.

6.1.4. а) $\int \sin^3 x\cos^{15} x dx$; б) $\int x^2 \sin 2x dx$; в) $\int \frac{dx}{7\cos x-6\sin x+9}$;

г) $\int \frac{(4x+3)dx}{\sqrt{-x^2+2x+4}}$; д) $\int \frac{3x^2-12x+10}{(x^2-5x+6)(x-2)}dx$; е) $\int \frac{\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^2}{x\sqrt[9]{x^8}}dx$;

ж) $\int \frac{\left(1+e^{2x}\right)^2}{e}dx$; з) $\int \frac{8x-\operatorname{arctg}2x\ ^2}{1+4x^2}dx$; и) $\int \frac{dx}{\cos^3 x\sin^3 x}$;

к) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{(x+1)^2+\sqrt{x+1}}dx$; л) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$; м) $\int \frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^5}}{x^6}dx$.

6.1.5. а) $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+2}$; б) $\int x^2\cos 5x dx$; в) $\int \frac{\arcsin\frac{1}{x+1}}{x+1\ ^2}dx$;

г) $\int \frac{(3x+4)dx}{\sqrt{9x^2+6x-5}}$; д) $\int \frac{2x^2+21x+50}{(x-6)^2(x-2)}dx$; е) $\int \frac{\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^2}{x^2\sqrt[9]{x}}dx$;

ж) $\int \sin 2x\cdot\cos x dx$; з) $\int \frac{\left(x^3-x\right)dx}{x^4+1}$; и) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}x\cos 2x}$;

к) $\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}dx$; л) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{\left(2-x^2\right)^3}}$; м) $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}\cdot\frac{dx}{x}$.

6.1.6. а) $\int e^{\frac{x^2}{2}}xdx$; б) $\int x\ln\left(x^2-6x-27\right)dx$; в) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^{17} x}dx$;

г) $\int \frac{(1-4x)dx}{\sqrt{-x^2-x+2}}$; д) $\int \frac{5x^2-18x+8}{(x^2-3x+2)(x-6)}dx$; е) $\int \frac{\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^3}{x^2}dx$;

ж) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$; з) $\int \frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)dx}{\sqrt{x^2+1}}$; и) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}$;

к) $\int \frac{2x+1}{(x+1)^{3/2}}dx$; л) $\int \frac{x^4dx}{\left(16-x^2\right)\sqrt{16-x^2}}$; м) $\int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt{(1+x)^3}}$.

6.1.7. а) $\int \sin^3 x \cos^9 x dx$; б) $\int \ln\ x-1\ dx$; в) $\int \frac{dx}{18\cos x - \sin x + 17}$;

г) $\int \frac{(2-5x)dx}{\sqrt{4x^2-8x+1}}$; д) $\int \frac{3x^2+2x-1}{(x+3)(x-1)(x-5)}dx$; е) $\int \frac{\arccos\frac{1}{\ln x}}{x\ln^2 x}dx$;

ж) $\int \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}}dx$; з) $\int \frac{x-\ \operatorname{arcctg} x\ ^4}{1+x^2}dx$; и) $\int \frac{\sin 2xdx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$;

к) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}$; л) $\int \sqrt{4+x^2}dx$; м) $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}dx$.

6.1.8. а) $\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x^2}dx$; б) $\int e^{\frac{x}{2}}x^2dx$; в) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$;

г) $\int \frac{(4x-1)dx}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$; д) $\int \frac{2x^2+3x-2}{\left(x^2-4x-12\right)(x+2)}dx$; е) $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{x\sqrt[8]{x^7}}dx$;

ж) $\int x \cdot \sqrt[3]{1-x}dx$; з) $\int \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; и) $\int \frac{dx}{4-2\cos^2 x}$;

к) $\int \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{x^3}dx$; л) $\int x^2\sqrt{3-x^2}dx$; м) $\int \frac{x^4}{x^{15}-1}dx$.

6.1.9. а) $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int \ln^2 xdx$; в) $\int \frac{dx}{3\sin x + 11\cos x + 12}$;

г) $\int \frac{(5x-3)dx}{\sqrt{2x^2-4x+5}}$; д) $\int \frac{6x^2+25x+16}{(x+4)(x+1)(x+2)}dx$; е) $\int \frac{\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^3}{x^2\sqrt[6]{x}}dx$;

ж) $\int \frac{x^3+x}{x^4+1}dx$; з) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$; и) $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^5 x}$;

к) $\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}dx$;   л) $\int x^3\sqrt{25-x^2}dx$;   м) $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

6.1.10. а) $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}dx$;   б) $\int x^2e^{5x}dx$;   в) $\int \frac{dx}{\cos^3 x\sin x}$;

г) $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{-x^2+x+4}}$;   д) $\int \frac{-4x^2+14x+11}{(x+1)^2(x-6)}dx$;   е) $\int \frac{\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)^2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

ж) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$;   з) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;   и) $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$;

к) $\int \frac{(3-4x)dx}{\left(1-2\sqrt{x}\right)^2}$;   л) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(64-x^2\right)^3}}$;   м) $\int \frac{\ln x-1\ dx}{\ln^2 x}$.

6.1.11. а) $\int \sin^3 x\cos^{12} x dx$;   б) $\int x^2e^x dx$;   в) $\int \frac{dx}{8\cos x+\sin x+9}$;

г) $\int \frac{(2x+4)dx}{\sqrt{4x^2-x-11}}$;   д) $\int \frac{2x^2-3x-7}{(x-1)(x+2)(x-5)}dx$;   е) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$;

ж) $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\ 3+x\ ^2}{x^2}dx$;   з) $\int \frac{xdx}{x^4+x^2+1}$;   и) $\int \frac{\sin^4 xdx}{\cos^6 x}$;

к) $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\right)^2}$;   л) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$;   м) $\int \frac{x\ln x}{\sqrt{\ x^2-1\ ^3}}dx$.

6.1.12. а) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$;   б) $\int \frac{x}{\sin^2 2x}dx$;   в) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sin x}$;

г) $\int \frac{(-3x+1)dx}{\sqrt{-x^2+3x-1}}$;   д) $\int \frac{5x^2-31x+31}{(x-1)^2(x-6)}dx$;   е) $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{x\sqrt[10]{x^9}}dx$;

ж) $\int x\cdot(1-x)^{10}dx$;   з) $\int \frac{\left(x^2+1\right)dx}{\left(x^3+3x+2\right)^2}$;   и) $\int \frac{\cos^6 xdx}{\sin^4 x}$;

к) $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}dx$;   л) $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{\left(6-x^2\right)^3}}$;   м) $\int xe^{x^2}\left(x^2+1\right)dx$.

6.1.13. а) $\int \sin^{13} x \cos^3 x dx$; б) $\int x^2 3^x dx$; в) $\int \frac{dx}{5\cos x - 5\sin x + 7}$;

г) $\int \frac{(-3x+6)dx}{\sqrt{6x^2-2x-7}}$; д) $\int \frac{7x^2-20x-3}{(x^2-1)(x-5)}dx$; е) $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$;

ж) $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$; з) $\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$; и) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}$;

к) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x-1}}$; л) $\int x\sqrt{4-x^2}dx$; м) $\int \frac{(x^2-1)dx}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}$.

6.1.14. а) $\int \frac{e^{c\operatorname{tg} x}}{\sin^2 x}dx$; б) $\int x^3 e^{3x} dx$; в) $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$;

г) $\int \frac{(3x-2)dx}{\sqrt{-x^2-3x-2}}$; д) $\int \frac{3x^2+29x+69}{(x+5)^2(x+4)}dx$; е) $\int \frac{\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^2}{x^2\sqrt[5]{x}}dx$;

ж) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$; з) $\int \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt{x^3+3x+1}}$; и) $\int \sin^5 x\sqrt[3]{\cos x}dx$;

к) $\int \frac{xdx}{x-\sqrt{x^2-1}}$; л) $\int x^2\sqrt{1+x^2}dx$; м) $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$.

6.1.15. а) $\int \frac{\cos x}{\sin^{11} x}dx$; б) $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$; в) $\int \frac{dx}{25\cos x + 2\sin x + 23}$;

г) $\int \frac{(4-x)dx}{\sqrt{x^2+8x+3}}$; д) $\int \frac{3x^2-20x+22}{(x^2-x+1)(x-4)}dx$; е) $\int \frac{e^{\sqrt{x^3+1}}x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$;

ж) $\int \frac{dx}{\sin^2 2x \cdot \cos^2 2x}$; з) $\int \operatorname{tg} x \cdot \ln\cos x dx$; и) $\int \sin^5 x dx$;

к) $\int \sqrt{\frac{x}{2-x}}dx$; л) $\int \frac{x^3 dx}{(9+x^2)^{3/2}}$; м) $\int \frac{xe^x dx}{(1+x)^2}$.

6.1.16. а) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int x^3 e^{-2x} dx$; в) $\int \frac{dx}{\cos x \sin^2 x}$;

г) $\int \frac{(3x-4)dx}{\sqrt{-x^2-x+5}}$; д) $\int \frac{x^2-12x+14}{(x^2-8x+15)(x-3)}dx$; е) $\int \frac{\left(1+\sqrt[5]{x^4}\right)^2}{x^2\sqrt[25]{x^{11}}}dx$;

ж) $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2+2\right)}$; з) $\int \frac{\left(2\cos x+3\sin x\right)dx}{\left(2\sin x-3\cos x\right)^4}$; и) $\int \sin^3\frac{x}{2}\cos^5\frac{x}{2}dx$;

к) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x-2}}$; л) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$; м) $\int \frac{xe^x dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

6.1.17. а) $\int \frac{\sin x}{\cos^{12} x}dx$; б) $\int x\operatorname{arctg} x dx$; в) $\int \frac{dx}{5\cos x+3\sin x+3}$;

г) $\int \frac{(1-x)dx}{\sqrt{3x^2-2x-8}}$; д) $\int \frac{3x^2+x+3}{\left(x^2+3x-4\right)(x-3)}dx$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{(x+2)^2}}$;

ж) $\int \left(e^x-e^{-x}\right)^2 dx$; з) $\int \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)dx}{\left(\sqrt{x}+x\right)^3}$; и) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$;

к) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}$; л) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}dx$; м) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^4}dx$.

6.1.18. а) $\int \frac{\operatorname{arcctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int x^3 e^{-x}dx$; в) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$;

г) $\int \frac{(2x+5)dx}{\sqrt{-x^2+2x+1}}$; д) $\int \frac{x^2+7x-37}{(x-4)^2(x+3)}dx$; е) $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{x\sqrt[3]{x^2}}dx$;

ж) $\int \frac{e^{2x}}{e^x-1}dx$ з) $\int \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)dx}{\sqrt{x}(x+1)}$; и) $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$;

к) $\int \frac{dx}{(2x+1)\left(1+\sqrt{2x+1}\right)}$; л) $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^6}dx$; м) $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{1+x^2\ \ ^2}dx$.

6.1.19. а) $\int \cos^{15} x\sin x dx$; б) $\int e^{\frac{3x}{4}}\cos 3x dx$; в) $\int \frac{dx}{2\cos x-3\sin x+1}$;

г) $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+6x+1}}$; д) $\int \frac{x^2-6x+6}{\left(x^2-5x+4\right)(x-2)}dx$; е) $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$;

ж) $\int \ \operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x\ ^{-1}dx$; з) $\int \frac{1+\ln^3 x}{x}dx$; и) $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$;

к) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}}$; л) $\int \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4}dx$; м) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^3}dx$.

6.1.20. а) $\int \frac{x}{1+x^4}dx$; б) $\int x^3 e^x dx$; в) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx$;

г) $\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$; д) $\int \frac{x^2-9x+22}{(x^2-6x+8)(x-4)}dx$; е) $\int \frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}{x\sqrt[9]{x^4}}dx$;

ж) $\int \sin^4 x dx$; з) $\int \frac{(1-\cos x)dx}{x-\sin x}$; и) $\int \operatorname{tg}^3 x dx$;

к) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$; л) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-3}}$; м) $\int \frac{dx}{\left(1-2^x\right)^4}$.

6.1.21. а) $\int \sin^{11} x \cos x dx$; б) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$; в) $\int \frac{dx}{7\cos x-\sin x+5}$;

г) $\int \frac{(1-5x)dx}{\sqrt{x^2+x+9}}$; д) $\int \frac{5x^2+16x+2}{(x^2-5x+4)(x+2)}dx$; е) $\int \frac{\arccos \frac{x-1}{x}}{x^2}dx$;

ж) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$; з) $\int \frac{(x\cos x+\sin x)dx}{(x\sin x)^2}$; и) $\int \cos x \cos^2 3x dx$;

к) $\int \frac{1-\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; л) $\int \frac{xdx}{\left(1-x^4\right)^{3/2}}$; м) $\int \frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1}dx$.

6.1.22. а) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1-2x}}dx$; б) $\int x^3 e^{-\pi^2 x}dx$; в) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}dx$;

г) $\int \frac{(1-2x)dx}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$; д) $\int \frac{x^2-3x-13}{(x^2+4x+4)(x+5)}dx$; е) $\int \frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}{x\sqrt[9]{x^5}}dx$;

ж) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-x}}dx$; з) $\int \frac{\arccos^3 x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; и) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$;

к) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$; л) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^4+4}}$; м) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$.

6.1.23. а) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^9 x} dx;$ б) $\int \operatorname{arcctg} 4x dx;$ в) $\int \frac{dx}{11\cos x + 8\sin x + 13};$

г) $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{6x^2+3x+5}};$ д) $\int \frac{4x^2-13x+3}{(x^2-1)(x-4)} dx;$ е) $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{x\sqrt[6]{x^5}} dx;$

ж) $\int \frac{x^2}{x+1} dx;$ з) $\int \frac{x^3 dx}{\left(x^2+1\right)^2};$ и) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^6 x};$

к) $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{1+e^x}};$ л) $\int \frac{x^4 dx}{\left(1+x^2\right)^3};$ м) $\int \frac{\operatorname{tg} x dx}{1+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x}.$

6.1.24. а) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx;$ б) $\int x^3 e^x dx;$ в) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx;$

г) $\int \frac{(3-2x)dx}{\sqrt{-x^2+5x-6}};$ д) $\int \frac{x^2-9x-21}{(x+2)^2(x-5)} dx;$ е) $\int \frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}{x\sqrt[12]{x^7}} dx;$

ж) $\int \frac{(1+x)^2}{x^2+1} dx;$ з) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}};$ и) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[4]{\cos^3 x}};$

к) $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x-1}} dx;$ л) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3} dx;$ м) $\int \frac{x\cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} e^{\sin x} dx.$

6.1.25. а) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^{18} x} dx;$ б) $\int x \operatorname{arctg} 2x dx;$ в) $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 2};$

г) $\int \frac{(4x+6)dx}{\sqrt{4x^2+5x+3}};$ д) $\int \frac{-x^2+x+6}{(x^2-3x+2)(x-4)} dx;$ е) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx;$

ж) $\int \frac{dx}{1+\cos x};$ з) $\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}};$ и) $\int \sin^4 x \cos^6 x dx;$

к) $\int \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} \frac{dx}{(x+2)^2};$ л) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{\left(16+x^2\right)^3}};$ м) $\int \frac{dx}{ae^{mx}+be^{-mx}}.$

6.1.26. а) $\int \frac{\ln^3 \ x-1}{x-1} dx;$ б) $\int xe^{-2x} dx;$ в) $\int \cos^2 x \sin^4 x dx;$

г) $\int \frac{(5-2x)dx}{\sqrt{-x^2+6x-5}}$; д) $\int \frac{x^2-9x+32}{(x-5)^2(x-2)}dx$; е) $\int \frac{\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)^2}{x^2\sqrt[3]{x}}dx$;

ж) $\int \cos^3 x - 3\cos x \cdot \sin^2 x \;dx$; з) $\int \frac{\ln x dx}{x\left(1-\ln^2 x\right)}$; и) $\int \mathrm{tg}^7\, x dx$;

к) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$; л) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{3-x^2}}$; м) $\int \frac{x\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}dx$.

6.1.27. а) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^{12} x}dx$; б) $\int x^2 e^{\frac{x}{4}}dx$; в) $\int \frac{dx}{7\sin x - 19\cos x - 17}$;

г) $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{3x^2+x+8}}$; д) $\int \frac{2x^2-3x-6}{x\left(x^2+5x+6\right)}dx$; е) $\int \frac{\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)^2}{x^2\sqrt[4]{x}}dx$;

ж) $\int \frac{2\cdot \mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}^2\, x+1}dx$; з) $\int \frac{\sqrt{\mathrm{tg}^3\, x} dx}{\cos^4 x}$; и) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\cos x \sin^{11} x}}$;

к) $\int \sqrt{\frac{1+x}{x}}\frac{dx}{x^2}$; л) $\int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$; м) $\int \frac{x^4 dx}{\left(x^2-1\right)(x+2)}$.

6.1.28. а) $\int \frac{e^{2x}\arccos e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}dx$; б) $\int x e^{4x}dx$; в) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$;

г) $\int \frac{(3+x)dx}{\sqrt{-x^2+6x-1}}$; д) $\int \frac{4x^2-18x+43}{\left(x^2-8x+4\right)(x-4)}dx$; е) $\int \frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}{x\sqrt[5]{x^3}}dx$;

ж) $\int 10^{\lg x+2}dx$; з) $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2+9}$; и) $\int \frac{\mathrm{sh}^3\, x dx}{\mathrm{ch}^2\, x}$;

к) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$; л) $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$; м) $\int \frac{\ln\; x+1 \;dx}{\sqrt{x+1}}$.

6.1.29. а) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}dx$; б) $\int x^2 e^{\frac{x}{2}}dx$; в) $\int \frac{dx}{-3\cos x + \sin x - 1}$;

г) $\int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{3x^2+x+1}}$; д) $\int \frac{3x^2-7x+1}{\left(x^2-3x+2\right)(x+3)}dx$; е) $\int \frac{\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)^2}{x^2\sqrt[20]{x^7}}dx$;

ж) $\int \lg 3^{x+x^2}\,dx$; з) $\int \frac{\left(x-x^3\right)dx}{\sqrt{1+x^4}}$; и) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x\cdot \operatorname{ch}^4 x}$;

к) $\int \frac{dx}{e^x\sqrt{e^x+1}}$; л) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx$; м) $\int x^2 \operatorname{sh} x dx$.

6.1.30. а) $\int \frac{\operatorname{arctg} x+1}{2+2x+x^2}dx$; б) $\int x\cos^2 x dx$; в) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}dx$;

г) $\int \frac{(x-5)dx}{\sqrt{-3x^2+x+1}}$; д) $\int \frac{5x^2-6x-7}{\left(x^2-x-6\right)(x-3)}dx$; е) $\int \frac{\left(1+\sqrt[5]{x^4}\right)^2}{x^2\sqrt[5]{x}}dx$;

ж) $\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{\sqrt{4\sin^2 x+9\cos^2 x}}dx$; з) $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; и) $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$;

к) $\int \frac{x^3dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$; л) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$; м) $\int \frac{dx}{x^3(x-1)^{1/2}}$.

Розділ 7. Визначений інтеграл та його застосування

7.1. Визначення, властивості, геометричний зміст визначеного інтеграла. Методи обчислення

Нехай на відрізку $[a,b]$ визначена функція $y = f(x)$. Розіб'ємо цей відрізок на n довільних частин точками

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b.$$

На кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$, візьмемо довільну точку ξ_i і побудуємо суму $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$,де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Сума S_n називається інтегральною сумою для функції $y = f(x)$, яка відповідає даному розбиттю відрізка $[a,b]$ і даному вибору точок ξ_i. Позначимо $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$, $i = \overline{1,n}$.

Визначення. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми S_n при $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\} \to 0$, яка не залежить від способу розбиття відрізку $[a,b]$ на елементарні ділянки і вибору точок ξ_i, то ця границя називається *визначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і позначається

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Функція $f(x)$ в цьому випадку називається інтегровною функцією на відрізку $[a,b]$. Числа a і b називаються відповідно нижньою і верхньою межами інтегрування.

Геометричний зміст визначеного інтеграла: якщо $f(x) \ge 0$ $\forall x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції з основою $[a,b]$, що обмежена прямими $x=a$, $x=b$ та кривою $y=f(x)$ (рис 7.1).

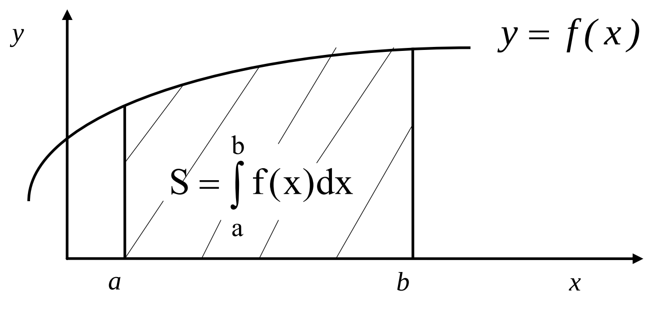


Рис. 7.1

У загальному випадку визначений інтеграл дорівнює алгебраїчній сумі площ фігур, обмежених лініями: $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, причому площі, розташовані вище осі *Ox,* входять у цю суму зі знаком «+», а площі, розташовані нижче осі *Ox,* – зі знаком «–» (рис.7.2).

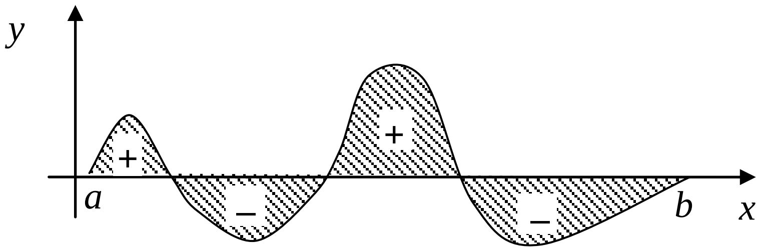


Рис. 7.2

Властивості визначеного інтеграла:

1. При переставлянні меж інтегрування знак інтеграла змінюється на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2. Якщо нижня і верхня межі інтегрування збігаються, то інтеграл дорівнює нулеві: $\int_a^a f(x)dx = 0.$

3. *Лінійність* . Якщо $f(x)$ і $g(x)$ – функції, інтегровні на $[a,b]$, то:

а) сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx, \ (C = \text{const});$$

б) інтеграл від алгебраїчної суми інтегровних функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

4. *Адитивність*. Якщо $f(x)$ – функція, інтегровна на $[a,c]$ і $[c,b]$, де $c \in (a,b)$, то вона інтегровна на $[a,b]$ і

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5. Якщо $a<b$ і $f(x)\geq 0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx\geq 0$, причому рівність нулеві можлива тільки в тому випадку, коли $f(x)\equiv 0, \forall x\in(a,b)$.

6. Якщо $a<b$ і $f(x)\geq g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx\geq\int\limits_a^b g(x)dx$, тобто нерівності можна інтегрувати.

7. Якщо $f(x)$ – функція, інтегровна на [a,b], то $|f(x)|$ також інтегровна на [a,b] функція і має місце нерівність:

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|\leq\int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

8. Теорема про оцінку визначеного інтеграла. Якщо $m\leq f(x)\leq M$, $m=\inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M=\sup\limits_{[a,b]} f(x)$, то

$$m(b-a)\leq\int\limits_a^b f(x)dx\leq M(b-a).$$

9. Теорема про середнє значення. Якщо $f(x)$ неперервна $\forall x\in[a,b]$, то $\exists\xi\in(a,b)$ таке, що

$$\int\limits_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a).$$

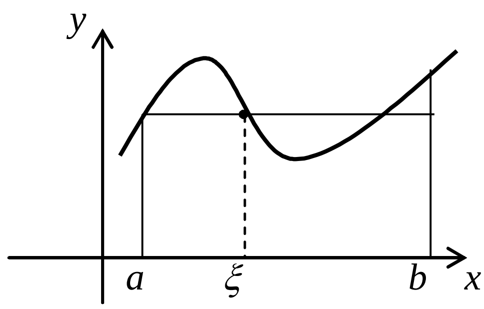


Рис. 7.3

Геометричний зміст теореми: нехай $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$, тоді існує принаймні одна точка $\xi\in(a,b)$, така, що площа криволінійної трапеції, обмежена зверху неперервною кривою $y=f(x)$, буде дорівнювати площі прямокутника з тією ж основою і висотою, яка дорівнює $f(\xi)$ (рис. 7.3).

10. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ – неперервні на [a, b], а $\varphi(x)$ – зберігає знак на цьому відрізку, то

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx=f(\xi)\int\limits_a^b \varphi(x)dx \quad a<\xi<b$$

(узагальнена теорема про середнє).

11. Якщо неперервна функція $f(x),\ x\in[-l,l]$ парна, то

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx.$$

Якщо $f(x)$ – непарна, то

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0,$$

тобто інтеграл з симетричними межами від непарної функції дорівнює нулю.

Якщо $F(x)$ є первісною для неперервної функції $f(x)$ на проміжку $[a,b]$, то має місце **формула Ньютона-Лейбниця**:

$$\boxed{\int_{a}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b)-F(a)},$$

яка встановлює зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралами і дозволяє знаходити значення визначеного інтеграла як різницю значень первісної на верхній та нижній межах визначеного інтеграла.

Приклади

1. Оцінити інтеграл $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ спадає на відрізку $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$, тому що її похідна

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\left\|x<tgx,\ x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]\right\|=\frac{(x-\mathrm{tg}x)\cos x}{x^2}<0.$$

Отже, найменше значення функції $m=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$, а найбільше значення функції $M=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. Скориставшись теоремою про оцінку інтеграла, одержимо

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\le\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right),$$

тобто

$$0{,}22\approx\frac{\sqrt{3}}{8}\le\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{\sqrt{2}}{6}\approx 0{,}24.$$

2. Оцінити абсолютну величину інтегралу $\int\limits_{10}^{19}\frac{\sin x}{1+x^8}dx$.

Розв'язання. Оскільки $|\sin x|\le 1$, то при $x>10$ виконується нерівність $\left|\frac{\sin x}{1+x^8}\right|\le 10^{-8}$. Використовуючи властивість 7, одержимо

$$\left|\int\limits_{10}^{19}\frac{\sin x}{1+x^8}dx\right|<\int\limits_{10}^{19}\left|\frac{\sin x}{1+x^8}\right|dx<(19-10)10^{-8}<10^{-7}.$$

3. Оцінити інтеграл зверху $I=\int\limits_0^1\frac{\sin x}{1+x^2}dx$.

Розв'язання. За узагальненою теоремою про середнє значення визначеного інтеграла маємо

$$\int\limits_0^1\frac{\sin x}{1+x^2}dx=\sin\xi\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\sin\xi\cdot\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\sin\xi\quad(0<\xi<1).$$

Оскільки на відрізку [0, 1] функція $\sin x$ зростає, то $\sin\xi<\sin 1$. Звідси маємо оцінку інтегралу зверху:

$$\int\limits_0^1\frac{\sin x}{1+x^2}dx<\frac{\pi}{4}\sin 1\approx 0{,}64.$$

Можна отримати кращу оцінку, якщо ту ж теорему використати у вигляді

$$\int\limits_0^1\frac{\sin x}{1+x^2}dx=\frac{1}{1+\xi^2}\int\limits_0^1\sin x dx=\frac{1}{1+\xi^2}(1-\cos 1)\Big|_0^1<1-\cos 1\approx 0{,}46.$$

4. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x(1-\cos^2 x)}dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|(\cos x)^{1/2}dx=$$

$= \left\|\ \text{Скористаємося парністю підінтегральної функції}\ \right\| =$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(\cos x)^{1/2}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{1/2}\,d(\cos x) =$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{1/2}\,d(\cos x) = -2\frac{(\cos x)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}.$$

5. Обчислити інтеграл, якщо $\alpha \neq 0$,

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} = \int_{-1}^{1} \frac{d(x-\cos\alpha)}{(x-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}.$$

Розв'язання

$$I = \frac{1}{\sin\alpha}\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} + \operatorname{arctg}\frac{x+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha}\left(\operatorname{arctg}\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} + \operatorname{arctg}\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$\frac{1}{\sin\alpha}\left(\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right)\right) = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sin\alpha}.$$

Метод заміни змінної у визначеному інтегралі

Теорема. *Нехай функція* $f(x)$ *неперервна на* $[a,b]$, *а функція* $x=\varphi(t)$ *монотонна і має неперервну похідну на відрізку* $[\alpha,\beta]$, *де* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. *Тоді має місце формула заміни змінної у визначеному інтегралі* $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

При заміні змінної інтегрування значення функції $\varphi(t)$ не повинні виходити за межі проміжку $[a, b]$, коли t змінюється на $[\alpha,\beta]$.

Якщо функція $\varphi(t)$ є монотонною на проміжку $[\alpha,\beta]$, то ця умова виконується.

Приклади

1. $I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

Розв'язання. Нехай $x = a\sin t$. Визначимо нові межі інтегрування для змінної *t*. Нехай $x = 0$, тобто беремо *x* рівним нижній межі інтегрування у заданому інтегралі. Тоді за *t* можна взяти будь-який розв'язок рівняння $a\sin t = 0$, наприклад $t = 0$. Для знаходження верхньої межі для змінної *t* замість *x* підставляємо верхню межу інтегрування, що дорівнює *a,* і розв'язуємо рівняння $a = a\sin t$, звідки $\sin t = 1$, $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in z$, тобто рівняння має нескінченну множину розв'язків. При цьому, взявши розв'язок $t = \frac{\pi}{2}$, який відповідає $n = 0$, ми отримаємо, що при змінюапнні *t* від 0 до $\frac{\pi}{2}$ змінна *x* буде монотонно змінюватися від 0 до *a*. У такий спосіб маємо

$$I = \left| \begin{array}{l} x = a\sin t, \\ dx = a\cos t dt \\ x = 0,\ \ t = 0 \\ x = a,\ \ t = \pi/2 \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\, a\cos t dt = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} \right) = \frac{\pi a^2}{4}.$$

2. $I = \int\limits_0^{-ln 2} \sqrt{1 - e^{2x}}\, dx$.

Розв'язання. Функція $\sqrt{1 - e^{2x}}$ є неперервною і монотонною на проміжку [–ln2,0]. Нехай $t = \sqrt{1 - e^{2x}}$. Знаходимо межі інтегрування для змінної *t*. Якщо *x*=0, маємо *t*=0; якщо *x*= – ln2, знаходимо $t = \sqrt{1 - e^{-2\ln 2}} = \sqrt{1 - e^{-\ln 4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Вочевидь, що функція, обернена до *t*, має вигляд $x = \frac{\ln(1 - t^2)}{2}$ і буде неперервною та диференційовною на проміжку $0 < t < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тоді

$$I = \int\limits_0^{-\ln 2} \sqrt{1 - e^{2x}}\, dx = \left\| \begin{array}{l} 1 - e^{2x} = t^2, -2e^{2x}dx = 2tdt, \\ dx = \dfrac{-tdt}{e^{2x}} = \dfrac{tdt}{t^2 - 1} \end{array} \right\| =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{t^2 dt}{t^2-1} = \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{(t^2-1)+1}{t^2-1} dt = \left(t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| \right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}\right| =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(2-\sqrt{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln\left(2-\sqrt{3}\right).$$

3. Обчислимо інтеграл $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$. Покажемо, що невиконання умов теореми при застосуванні метода підстановки призводять до помилок. Припустимо, ми хочемо використовувати наступну підстановку: $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Знаходимо нижню межу інтегрування $t = \operatorname{tg}0 = 0$, а потім верхню межу $t = \operatorname{tg}\pi = 0$. Тоді

$$I = 2\int_0^0 \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = 2\int_0^0 \frac{dt}{t^2+3} = 0,$$

що неможливо, тому що підінтегральна функція $\frac{1}{2+\cos x} > 0$. Пояснюється це тим, що функція $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ в точці $x = \pi \in [0, 2\pi]$ має розрив і, отже, не має неперервної похідної. Підстановка $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не може бути використана на проміжку $[0, 2\pi]$. Наведений інтеграл може бути обчислений у такий спосіб:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \left\| \begin{matrix} x-\pi = t \\ 0 \to -\pi \\ 2\pi \to \pi \end{matrix} \right\| = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{2-\cos t} = 2\int_0^{\pi} \frac{dt}{1+2\sin^2\frac{t}{2}} = \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sin^2\frac{t}{2}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}+1\right)} =$$

$$= -2\int_0^{\pi} \frac{d\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}} = -\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Формула інтегрування по частинам $\boxed{\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du}$,

де $u(x)$ та $v(x)$ – неперервно диференційовні на $[a,b]$ функції.

Приклади

1. $I = \int\limits_0^3 \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}dx$.

Розв'язання. Нехай $u = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$, тоді

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^2}}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\frac{dx}{(1+x)^2} = \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}, dv = dx, x = v.$$

$$I = x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\Bigg|_0^3 - \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x}(1+x)} = 3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \int\limits_0^3 \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 d\left(\sqrt{x}\right)}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} = 3\frac{\pi}{3} -$$

$$-\int\limits_0^3 \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2+1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}d\left(\sqrt{x}\right) + \int\limits_0^3 \frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} = \pi - \sqrt{x}\Big|_0^3 + \operatorname{arctg}\sqrt{x}\Big|_0^3 = \pi - \sqrt{3} + \operatorname{arctg}\sqrt{3} =$$

$$= \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}.$$

2. Обчислимо інтеграл $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx$.

Розв'язання. Нехай $u = \sin^{n-1} x$, тоді $du = (n-1)\sin^{n-2} x\cos x dx$, $dv = \sin x dx$, $v = -\cos x$. Маємо

$$I_n = -\cos x\sin^n x\Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\left(1-\sin^2 x\right)dx = (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx -$$

$$-(n-1)I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Таким чином, $I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$. Отримане рекурентне співвідношення дозволяє для будь-якого натурального n одержати значення інтеграла. При парному n:

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 3\cdot 1}{2k(2k-2)\ldots 2}I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}, \text{ де } I_0 = \int\limits_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

При n=2k+1 знаходимо

$$I_{2k+1}=\frac{2k(2k-2)\ldots 2}{(2k-1)(2k-3)\ldots 3\cdot 1}I_1=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!},\text{ де } I_1=\int_0^{\pi/2}\sin x dx=1.$$

Крім того, $\int_0^{\pi/2}\cos^n xdx=\int_0^{\pi/2}\sin^n xdx$ (що очевидно з геометричних міркувань і можна перевірити заміною $t=\frac{\pi}{2}-x$).

Таким чином,

$$\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx=\begin{cases}\dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}, & \text{якщо } n=2m, \text{ або якщо } n-\text{парне.}\\ \dfrac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & \text{якщо } n=2m+1, \text{ або якщо } n-\text{непарне.}\end{cases}$$

Наприклад,

$$I_6=\int_0^{\pi/2}\sin^6 xdx=\frac{5!!}{6!!}\frac{\pi}{2}=\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{32}.$$

7.2. Геометричні застосування визначених інтегралів: обчислення площ, об'ємів, довжин дуг

7.2.1. Обчислення площ плоских фігур

Якщо криволінійна трапеція обмежена кривою $y=f(x)$, прямими $x=a$, $x=b$, ($a<b$) $y=0$ і $f(x)\geq 0$, то її площа дорівнює $S=\int_a^b f(x)dx$.

Якщо $f_1(x)\geq f(x)$, то площа, обмежена цими кривими та прямими $x=a$ і $x=b$, дорівнює $S=\int_a^b (f_1(x)-f(x))dx$.

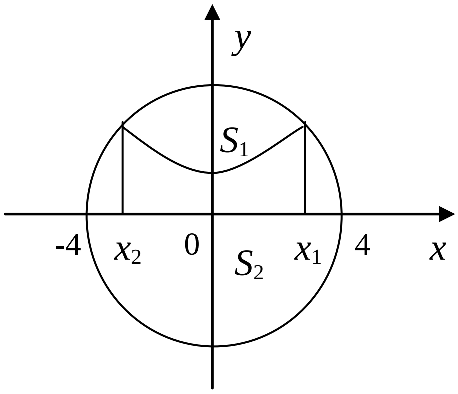
У випадку параметричного завдання кривої $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ $(t_1\leq t\leq t_2)$ за умови, що обхід контуру здійснюється проти годинникової стрілки, площа обчислюється

$$S=-\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt=\int_{t_1}^{t_2} x(t)y'(t)dt.$$

У полярних координатах площа фігури, обмеженої променями $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ та кривою $\rho=\rho(\varphi)$, дорівнює $S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi$.

Приклади:

1. Обчислити площу, що міститься між колом $x^2+y^2=16$ і параболою $x^2=12(y-1)$.



Розв'язання. Знайдемо точки перетину кривих $\begin{cases}x^2+y^2=16\\ x^2=12(y-1)\end{cases}\Rightarrow$

$16-y^2=12y-12$, $y^2+12y-12=0$

$y_1=-14$ не підходить, тому що $y\ge 0$.

$y_2=2\Rightarrow x^2=12\Rightarrow x_{1,2}=\pm 2\sqrt{3}$.

Даними кривими обмежені 2 фігури. Знайдемо площу S_1, тоді S_2 можна знайти як різницю площі круга $S=\pi R^2$ та S_1.

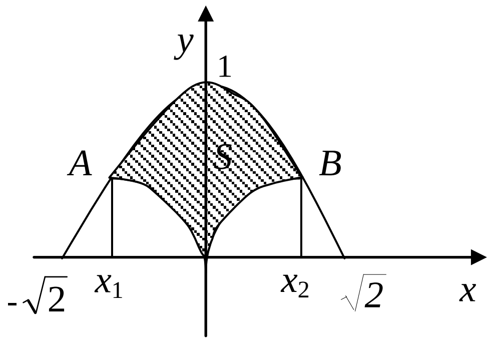
$$S_1=2\left(\int_0^{2\sqrt{3}}\sqrt{16-x^2}dx-\frac{1}{12}\int_0^{2\sqrt{3}}(x^2+12)dx\right)=2\left(I_1-\frac{1}{12}\left(\frac{x^3}{3}+12\right)\Bigg|_0^{2\sqrt{3}}\right)=2\left(I_1-\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$I_1=\int_0^{2\sqrt{3}}\sqrt{16-x^2}dx=\left\|\begin{matrix}x=4\sin t & dx=4\cos tdt\\ \sqrt{16-x^2}=4\cos t & \end{matrix}\right\|=$$

$$=16\int_0^{\pi/3}\cos^2 tdt=8\int_0^{\pi/3}(1+\cos 2t)dt=8\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/3}=8\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

$$S_1=\frac{16}{3}\left(\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\Rightarrow S_2=16\pi-\frac{16}{3}\left(\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{32}{3}\pi+\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

2. Обчислити площу S, що знаходиться між кривими $y=2-x^2$ і $y^2=x^3$.



Розв'язання. Розв'язуючи спільно систему рівнянь $\begin{cases}y=2-x^2\\ y^2=x^3\end{cases}$, знаходимо межі інтегрування $x_1=-1$ і x_2=1.

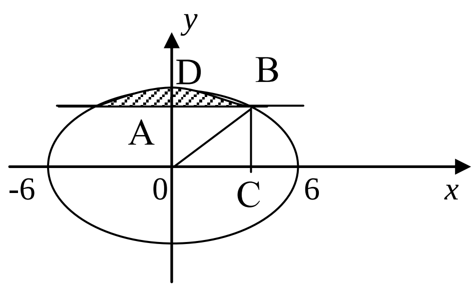
За формулою $S = \int\limits_a^b (y_1 - y)dx$ одержимо:

$$S = \int\limits_{-1}^{1} \left(2 - x^2 - x^{2/3}\right)dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{5}x^{5/3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 2\frac{2}{15}.$$

3. Знайти площу фігури, обмежену кривими, що задано параметричними рівняннями $\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$ і $y = 2\sqrt{3}\left(y \geq 2\sqrt{3}\right)$.

Розв'язання. Знайдемо точку перетину еліпса та прямої: $2\sqrt{3} = 4\sin t$; $\Rightarrow$ $\sin t = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow x = 6\cos\dfrac{\pi}{3} = 3.$

Фігура являє собою сегмент еліпса, заданого параметрично. В силу симетрії заданої фігури обчислимо половину площі



$$\frac{S}{2} = S_1 - S_2 = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt - S_2,$$

де S_2 – площа прямокутника OABC. Очевидно, $S_2 = 3 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

Для криволінійної трапеції ODBC параметр t змінюється від $\dfrac{\pi}{3}$ до $\dfrac{\pi}{2}$. Оскільки x при цьому спадає, то необхідно змінити знак перед інтегралом на протилежний.

$$S_1 = -\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 4\sin t \cdot 6(-\sin t)dt = 24\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^2 dt = 24\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2}dt = 12\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 12\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 12\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 2\pi + 3\sqrt{3}.$$

Відповідь: $S = 2\left(2\pi + 3\sqrt{3} - 6\sqrt{3}\right) = 4\pi - 6\sqrt{3}$.

4. Обчислити площу, обмежену віссю абсцис і однією аркою циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ $\quad (0 \leq t \leq 2\pi)$.

Розв'язання. Площа $S =$

$$\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,dt = a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)dt = a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = a^2\left(\frac{3}{2}2\pi-2\sin 2\pi+\frac{\sin 4\pi}{2}\right) = 3\pi a^2 \text{ од.кв.}$$

5. Знайти площу фігури, що обмежена петлею лінії:

$$\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}.$$

Розв'язання. Оскільки $x = x(t)$ – парна, а $y = y(t)$ – непарна, то $x = x(y)$ –парна, тобто

графік буде симетричним відносно осі Ox.

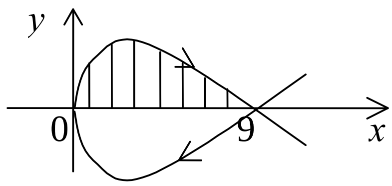
$$y = t\left(3-t^2\right), \quad y = 0.$$

При $t_1 = 0 \Rightarrow x = 0$. $t_{2,3} = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = 9$.

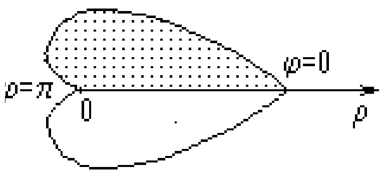
З огляду на симетрію обчислимо площу і результат подвоїмо:

$$S = 2\int_0^{\sqrt{3}}\left(3t-t^3\right)6t\,dt = 12\int_0^{\sqrt{3}}\left(3t^2-t^4\right)dt = 12\left(t^3-\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = 12\left(3\sqrt{3}-\frac{9\sqrt{3}}{5}\right) =$$

$$= \frac{12\cdot 6\sqrt{3}}{5} = \frac{72\sqrt{3}}{5}.$$



6. Обчислити площу фігури, що обмежена кардіоїдою $\rho = a(1+\cos\varphi)$.



Розв'язання. Площа фігури в полярних координатах знаходиться за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

З міркувань симетрії одержимо

$$S = \frac{1}{2}a^2\cdot 2\int_0^\pi (1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^\pi (1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi =$$

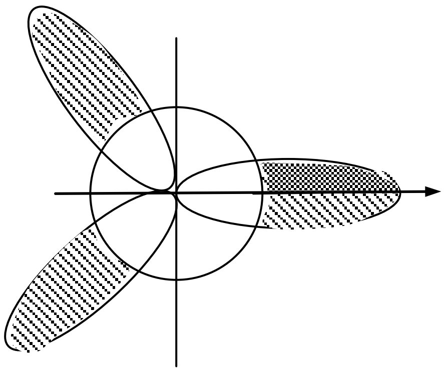
$$=a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi=a^2\left(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

7. Знайти площу, що обмежена кривою $r=2a\cos 3\varphi$ і лежить поза колом $r=a$.

Розв'язання. $r=2a\cos 3\varphi$ – трипелюсткова троянда, тому що

$$r\geq 0 \quad \cos 3\varphi\geq 0 \quad \Rightarrow -\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq 3\varphi\leq\frac{\pi}{2}+2k\pi \ \Rightarrow -\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}.$$

Таким чином, одержимо фігуру з трьох пелюстків з осями:



$$\varphi_1=0,\ \varphi_2=\frac{2\pi}{3}\ \ \varphi_3=\frac{4\pi}{3};$$

$$r_{\min}=0,\ r_{\max}=2a.$$

З огляду на симетрію обчислимо $\frac{1}{6}$ частину площі за формулою

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2 d\varphi.$$

Знайдемо точки перетину кривої та кола:

$$\begin{cases} r=2a\cos 3\varphi \\ r=a \end{cases} \Rightarrow \quad \cos 3\varphi=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \varphi=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}.$$

1) Знайдемо $\frac{1}{2}$ площі одного з трьох пелюстків:

$$S_1=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/9}4a^2\cos^2 3\varphi d\varphi=2a^2\int_0^{\pi/9}\frac{1+\cos 6\varphi}{2}d\varphi=$$

$$=a^2\left(\varphi+\frac{\sin 6\varphi}{6}\Bigg|_0^{\pi/9}\right)=a^2\left(\frac{\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{12}\right).$$

2) S_2- площа сектора круга радіуса a, з кутом, що дорівнює $\frac{\pi}{9}$.

$$S_2=\frac{R^2\varphi}{2}=\frac{a^2\pi}{2\cdot 9}=\frac{\pi a^2}{18}.$$

Оскільки $\frac{1}{6}S=S_1-S_2$, то $S=6\left(\frac{\pi a^2}{9}+\frac{a^2\sqrt{3}}{12}-\frac{\pi a^2}{18}\right)=\frac{a^2}{6}\left(2\pi+3\sqrt{3}\right).$

7.2.2. Обчислення довжини дуги

Довжина дуги кривої в декартових координатах:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx \quad (a<b).$$

У випадку параметричного завдання кривої $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases}$ маємо

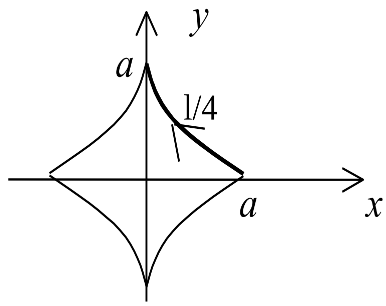
$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt; \quad (\alpha<\beta).$$

У полярних координатах $\quad L=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi)+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi; \ \left(\varphi_1\le\varphi_2\right).$

Приклади

1. Знайти довжину астроїди $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

Розв'язання



Перший спосіб

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left(y_x'\right)^2}\,dx.$$

Диференціюючи рівняння астроїди, одержимо

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{2}{3}y^{-1/3}y_x'=0 \quad\Rightarrow\quad y_x'=\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}.$$

Тому довжина дуги однієї чверті астроїди:

$$\frac{1}{4}l=\int_0^a \sqrt{1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx=\int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\,dx=\left.\frac{3a^{1/3}x^{2/3}}{2}\right|_0^a=\frac{3a}{2} \ \Rightarrow l=6a.$$

Другий спосіб (параметричний)

$$l=\left|\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}\,dt\right|.$$

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}, \ \begin{cases} x_t'=-3a\cos^2 t\sin t \\ y_t'=3a\sin^2 t\cos t \end{cases}.$$

$$\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2=9a^2\cos^2 t\sin^2 t, \quad \sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}=3a\cos t\sin t.$$

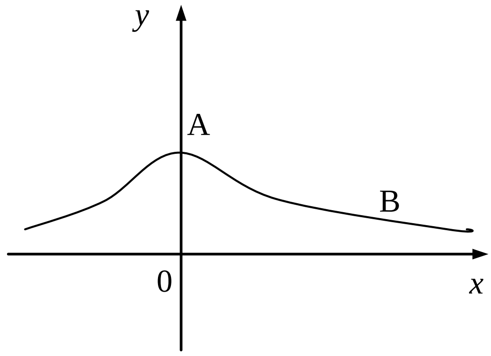
$$\frac{1}{4}l = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = \frac{3a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -\frac{3a}{4}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3a}{4}(-2) = \frac{3a}{2}.$$

$l = 6a$.

2. Знайти довжину дуги трактриси

$$\begin{cases} x = a\left(\cos t + \ln \mathrm{tg}\,\dfrac{t}{2}\right) \\ y = a\sin t \end{cases}$$

від точки $A(0,a)$ до точки $B(x,y)$.



Розв'язання. $l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt.$

$a\sin t_1 = a \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2}$, $\quad t_2 = \arcsin\frac{y}{a}$. $\qquad x_t' = a\left(-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right)$, $\quad y_t' = a\cos t.$

$$(\mathrm{x}_\mathrm{t}')^2 + (\mathrm{y}_\mathrm{t}')^2 = \mathrm{a}^2\left(\sin^2 \mathrm{t} - 2 + \frac{1}{\sin^2 \mathrm{t}} + \cos^2 \mathrm{t}\right) =$$

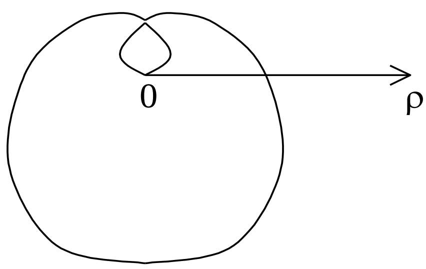
$$= \mathrm{a}^2\left(\frac{1}{\sin^2 \mathrm{t}} - 1\right) = \mathrm{a}^2\left(\frac{1-\sin^2}{\sin^2 \mathrm{t}}\right) = \frac{\mathrm{a}^2\cos^2 \mathrm{t}}{\sin^2 \mathrm{t}}.$$

Тому що $\arcsin\frac{y}{a} < \frac{\pi}{2}$, маємо

$$l = \int_{\arcsin y/a}^{\pi/2} \frac{a\cos t}{\sin t}dt = a\ln \quad \sin t\Big|_{\arcsin y/a}^{\pi/2} = -a\ln\frac{y}{a} = a\ln\frac{a}{y}.$$

3. Знайти довжину кривої $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$, якщо φ змінюється від 0 до 3π.

Розв'язання. $\mathrm{r}' = \mathrm{a}\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$.



$$l = \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2\sin^6\frac{\varphi}{3} + a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi =$$

$$= a\int_0^{3\pi} \sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi = \frac{a}{2}\int_0^{3\pi}\left(1 - \cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi = \frac{3a\pi}{2}.$$

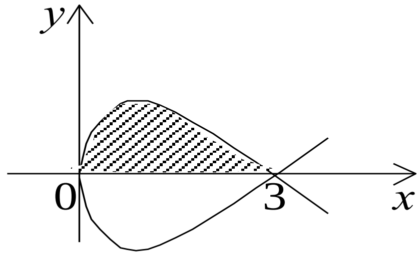
7.2.3. Обчислення площі поверхні обертання

Площа поверхні обертання дорівнює $S = 2\pi\int\limits_a^b ydl$ або, у випадку параметричного завдання кривої,

$$S = 2\pi\int\limits_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

1. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox петлі кривої:

$$9y^2 = x(3-x)^2.$$



Розв'язання. Для верхньої частини кривої при $0 \le x \le 3$ маємо $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$. Тоді диференціал дуги $dl = \frac{x+1}{2\sqrt{x}}dx$. На підставі формули $S = 2\pi\int\limits_a^b ydl$ площа поверхні

$$S = 2\pi\int\limits_0^3 \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}\,\frac{x+1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{\pi}{3}\int\limits_0^3 \left(2x - x^2 + 3\right)dx = \frac{\pi}{3}(9-9+9) = 3\pi.$$

2. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням однієї арки циклоїди навколо осі OX :

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases} \quad (0 \le t \le \pi).$$

Розв'язання

$$S = 2\pi\int\limits_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt = 8\pi a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt =$$

$$= 8\pi a^2\int\limits_{zz0}^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}dt = 8\pi a^2\left(-2a\cos\frac{t}{2} + \frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 8\pi a^2\left(2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

7.2.4. Обчислення об'ємів тіл

1. *Об’єм тіла за площами паралельних перерізів*.

Нехай тіло має обє'м *V*. Будемо вважати, що площа $S(x)$ переріза цього тіла площиною, перпендикулярною до осі *Ox*, є відома функция, неперервна на відрізку $[a,b]$ (рис. 7.3). Тоді обє'м тіла обчислюється за формулою

$$V=\int_a^b S(x)dx.$$

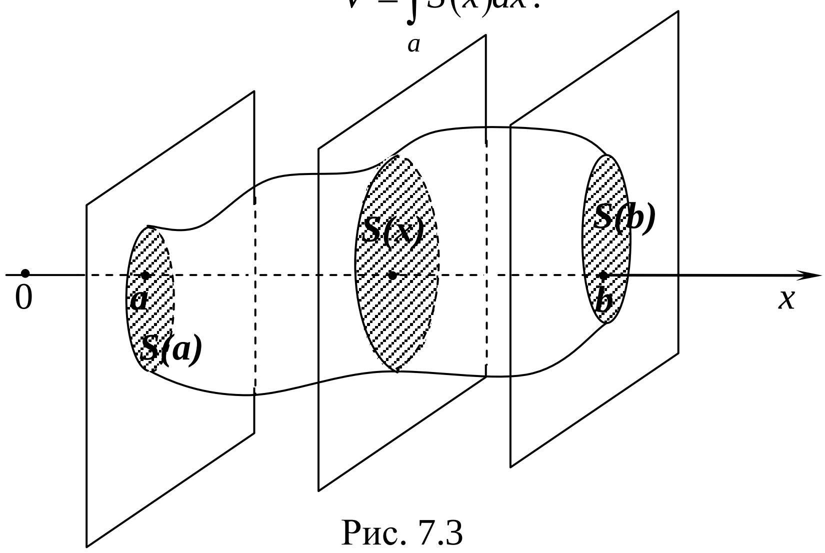


Рис. 7.3

2. *Об'єм тіла, отриманого при обертанні криволінійної трапеції*, що обмежена зверху кривою $y=f(x)$, прямими $x=a$, $x=b$, $y=0$, навколо осі *OX* (рис. 7.4), знаходиться за формулою

$$V_{ox}=\pi\int_a^b y^2dx,$$

при обертанні навколо осі *OY* (рис. 7.5):

$$V_{oy}=2\pi\int_a^b xydx.$$

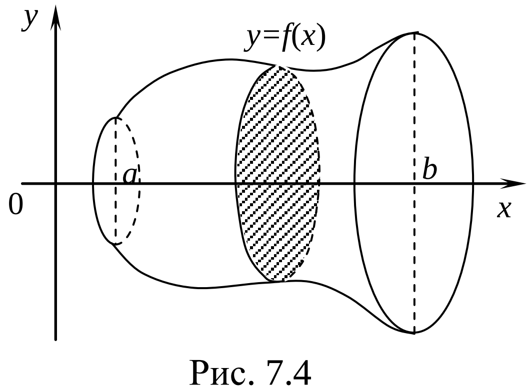


Рис. 7.4

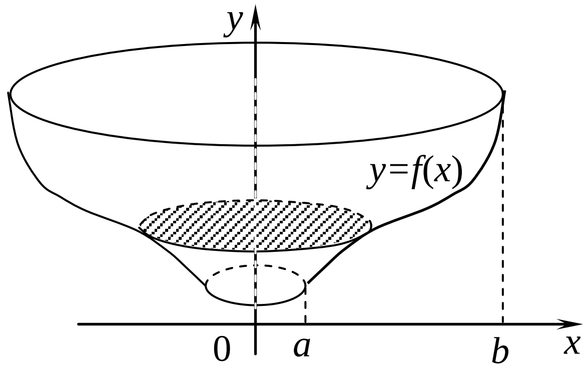
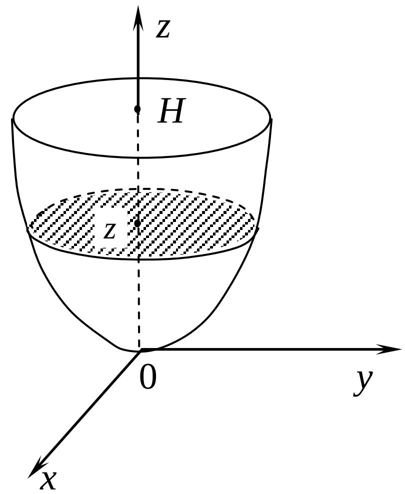


Рис. 7.5

Приклад 1. Обчислити об'єм тіла, обмеженого еліптичним параболоїдом $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ і площиною $z = H$.

Розв'язання. В перерізі параболоїда площиною, паралельною до площини *Oxy*, маємо еліпс. Для знаходження $S(z)$ перепишемо рівняння параболоїда таким чином



$$\frac{x^2}{(a\sqrt{z})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{z})^2} = 1.$$

Тоді півосі еліпса дорівнюють $a_1 = a\sqrt{z}$ і $b_1 = b\sqrt{z}$, а його площа

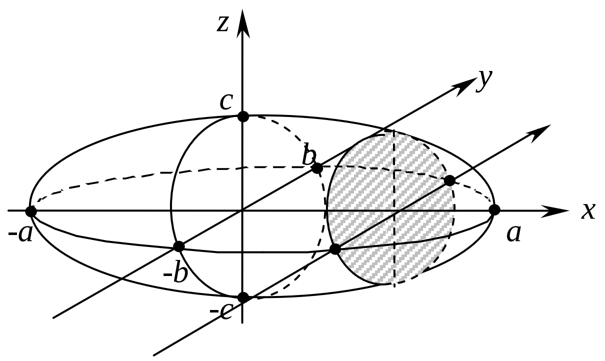
$$S(z) = \pi a_1 b_1 = \pi a\sqrt{z} b\sqrt{z} = \pi abz.$$

Остаточно маємо

$$V = \pi ab\int_0^H zdz = \pi ab\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^H = \frac{1}{2}\pi abH^2.$$

Приклад. Обчислити об'єм тривісного еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Розв'язання. В перерізі еліпсоїда, утвореного площиною, паралельною до площини *Oyz*, маємо еліпс



$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}; \qquad \text{або}$$

$$\frac{y^2}{\left(b\cdot\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\cdot\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1$$

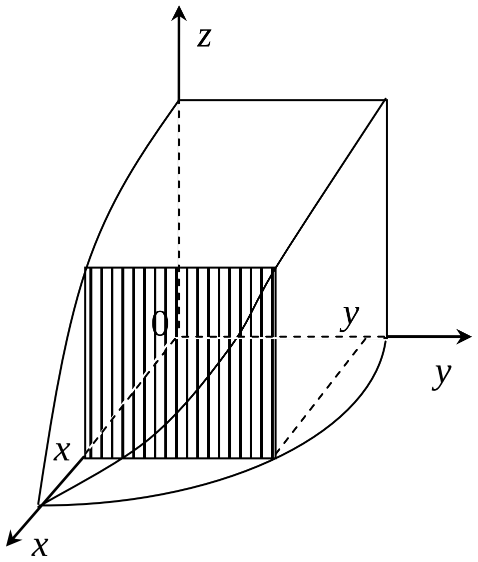
осі еліпса дорівнюють $b_1 = b\cdot\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ и $c_1 = c\cdot\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, а його площа $S(x) = \pi b_1 c_1 = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. Тоді об'єм еліпсоїда дорівнює

$$V = 2\pi bc\int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi bc\left.\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\right|_0^a = 2\pi bc\cdot\frac{2}{3}a = \frac{4}{3}\pi abc.$$

У випадку, коли $a=b=c$, маємо сферу, об’єм якої дорівнює

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3,\ R=a=b=c.$$

Приклад 3. Обчислити об'єм тіла, обмеженого двома прямими круговими циліндрами.



Розв’язання. В перерізі, перпендикулярному до осі Ox маємо квадрат. На рисунку зображена восьма частина тіла. Сторона квадрата дорівнює ординаті точці кола $x^2+y^2=R^2$, абсциса якої дорівнює x. Таким чином сторона квадрата дорівнює $y=\sqrt{R^2-x^2}$, а його площа $S(x)=y^2=R^2-x^2$.

Остаточно маємо $V=8\int_0^R\left(R^2-x^2\right)dx=\frac{16}{3}R^3$ (куб. од).

3. *Об'єм тіла, отриманого при обертанні фігури*, що обмежена лініями $y=y_2(x)$ і $y=y_1(x)$ $\left(y_1\le y_2\right)$,

$$V_{ox}=\pi\int_a^b\left(y_2^2-y_1^2\right)dx,\quad V_{oy}=2\pi\int_a^b x\left(y_2-y_1\right)dx.$$

Приклад 1. Обчислити об'єм кулі радіуса R з центром на початку координат.

Розв'язання. Кулю отримаємо оберненням навколо осі OX півкола $y=\sqrt{R^2-x^2}$. Тоді її об’єм обчислюється так:

$$V_{ox}=\pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=2\pi\int_0^R\left(R^2-x^2\right)dx=2\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R=2\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)=$$

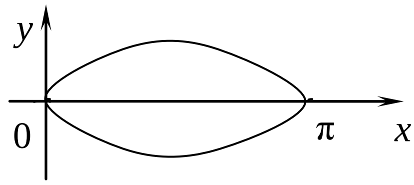
$$=\frac{4}{3}\pi R^3\text{(куб.од)}.$$

Приклад 2. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox однієї арки синусоїди $y=\sin x$.

Розв'язання

$$V = \pi\int_0^{\pi}\sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\left(1-\cos 2x\right)dx =$$

$$\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}.$$



7.3. Фізичні та механічні застосування визначених інтегралів

Розглянемо застосування визначеного інтеграла до розв'язання деяких фізичних задач.

1. *Маса неоднорідного стрижня.* Нехай стрижень розташовано на відрізку $[a,b]$. Лінійна щільність цього стрижня змінюється за законом $\rho=\rho(x)$. Тоді маса такого стрижня обчислюється за формулою

$$M = \int_a^b \rho(x)dx.$$

2. *Статичні моменти M_x, M_y та моменти інерції I_x, I_y, I_o плоскої однорідної кривої.*

Припустимо, що крива лінія *AB* має рівняння $y = f(x)$, $a \le x \le b$. Нехай ця дуга матеріальна з рівномірно розподіленою щільністю $\gamma(\gamma=\text{const})$. Тоді статичні моменти та моменти інерції обчислюються за формулами:

а) відносно осі *Ox* $\quad M_x = \frac{1}{2}\gamma\int_a^b yds, \quad I_x = \gamma\int_a^b y^2 ds;$

б) відносно осі *Oy* $\quad M_y = \gamma\int_a^b xds, \quad I_x = \gamma\int_a^b x^2 ds;$

в) момент інерції відносно початку координат $\quad I_o = \gamma\int_a^b \left(x^2+y^2\right)dS,$

де $\quad ds = \sqrt{1+y'^2}dx$ – диференціал дуги кривої.

3. *Статичні моменти M_x, M_y та моменти інерції I_x, I_y криволінійної трапеції.*

Нехай задано плоску фігуру (криволінійну трапецію), яка обмежена кривою $y = f(x)$, прямими $y = 0$, $x = a$, $x = b$ і має постійну поверхневу щільність $\gamma(\gamma = \text{const})$. Тоді статичні моменти та моменти інерції цієї трапеції обчислюються за формулами:

а) відносно осі *Ox* $\quad M_x = \frac{1}{2}\gamma\int_a^b y^2 dx, \quad I_x = \frac{1}{3}\gamma\int_a^b y^3 dx;$

б) відносно осі *Oy* $\quad M_y = \gamma\int_a^b xy dx, \quad I_x = \gamma\int_a^b x^2 y dx.$

4. *Координати центру ваги*:

а) плоскої кривої $y = f(x)$, $a \le x \le b$

$$x_c = \frac{1}{l}\int_a^b x ds, \qquad y_c = \frac{1}{l}\int_a^b y ds,$$

де l – довжина кривої, ds – диференціал дуги кривої;

б) криволінійної трапеції

$$x_c = \frac{1}{S}\int_a^b xy dx, \qquad y_c = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2 dx,$$

де S – площа трапеції.

в) плоскої однорідної фігури, обмеженої кривими $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, $x = a$, $x = b$. При цьому припускається, що функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ є неперервними, невід'ємними на сегменті $[a, b]$ та задовольняють умови $f(x) \ge \varphi(x)$ $\forall x \in [a, b]$. Координати центру ваги такої фігури вмзначаються за формулами:

$$x_c = \frac{\int_a^b x(f(x) - \varphi(x))dx}{\int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx}, \qquad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \left(f^2(x) - \varphi^2(x)\right)dx}{\int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx}.$$

Мають місце такі теореми.

Теорема (перша теорема Гульдіна). *Площа поверхні тіла, утвореного обертанням дуги плоскої кривої навколо деякої осі, що лежить у її площині і не перетинає її, дорівнює добутку довжини (s) даної дуги на довжину кола, описаного при цьому обертанні центром ваги дуги, тобто*

$$\Pi = s \cdot 2\pi\bar{y}.$$

Теорема (друга теорема Гульдіна). *Об'єм тіла, утвореного обертанням дуги плоскої фігури навколо деякої осі, що лежить у її площині і не перетинає її, дорівнює добутку площі (S) даної фігури на довжину кола, описаного при цьому обертанні центром ваги фігури, тобто*

$$V = S \cdot 2\pi\bar{y}.$$

Далі розглянемо ще деякі фізичні задачі, які можливо розв'язати за допомогою визначеного інтеграла.

Задача 1. Визначити роботу, необхідну для запуску ракети вагою P з поверхні Землі на висоту H. Чому дорівнює ця робота, якщо ракета повинна бути віддалена в нескінченність?

Розв'язання. Величина сили F, що виконує роботу при піднятті ракети з поверхні Землі, дорівнює величині сили тяжіння ракети Землею, тобто

$$F(x) = k\frac{MP}{qx^2},$$

де M – маса Землі, $\frac{p}{q}$ – маса ракети, k – сталий коефіцієнт, x – відстань від центру Землі до ракети. Сила F спрямована по радіусу від центру Землі. У тому ж напрямку відбувається і переміщення ракети із положення $a=R$ (R – радіус Землі) до положення $b=R+H$.

Розіб'ємо відрізок $[R,R+H]$ на частини $[x_i, x_{i+1}]$ та обчислимо приблизне значення роботи A_i на i-й ділянці. Через малість виділених ділянок Δx_i будемо вважати, що величина сили F на кожній ділянці є сталою і дорівнює значенню цієї сили в точці x_i. Тоді

$$A_i \approx F(x_i)\Delta x_i = \frac{kMP}{qx_i^2}\Delta x_i.$$

Робота, яка відповідає всьому відрізку $[R,R+H]$, приблизно визначається як

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \approx \sum_{i=1}^{n}\frac{kMP}{qx_i^2}\Delta x_i. \qquad (7.1)$$

Переходячи до границі в рівності (7.1) при $\lambda \to 0$, отримаємо, що точне значення роботи A визначається як

$$A = \lim_{\lambda\to 0}\sum\frac{kMP}{qx_i^2}\Delta x_i = \frac{kMP}{q}\int_R^{R+H}\frac{dx}{x^2} = \frac{kMP}{q}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H}\right). \qquad (7.2)$$

Враховуючи, що на поверхні Землі сила тяжіння $F=P$, а $x=R$, знайдемо коефіцієнт k:

$$P = \frac{kMP}{qR^2}, \text{ звідси } k = \frac{qR^2}{M}.$$

Вираз для роботи остаточно буде таким:

$$A = PR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H}\right).$$

При віддаленні ракети в нескінченність

$$\lim_{H\to\infty} A = \lim_{H\to\infty} PR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H}\right) = PR.$$

Задача 2. З якою силою дротове кільце маси M, радіуса R діє на матеріальну точку C маси m, що лежить на прямій, яка проходить через центр кільця перпендикулярно до його площини? Відстань від точки до центра кільця дорівнює a.

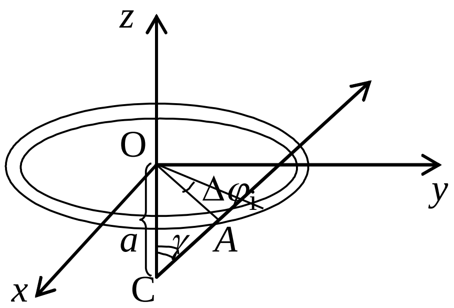


Рис. 7.6

Розв'язання. Розіб'ємо кільце на елементарні ділянки Δl_i, вважаючи кожну з отриманих ділянок матеріальною точкою маси:

$$m_i = \rho\Delta l_i = \frac{M}{2\pi R}\Delta l_i = \frac{M}{2\pi R}R\Delta\varphi_i = \frac{M}{2\pi}\Delta\varphi_i. \quad (7.3)$$

Тут ρ – щільність розподілу маси, а $\Delta\varphi_\mathrm{i}$ – кут, що відповідає ділянці дуги Δl_i (рис. 7.6). Визначимо силу $\vec{F}_i$ взаємодії матеріальної точки С з малою ділянкою кільця Δl_i. Для цього подамо $\vec{F}_i$ у вигляді розкладання по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{F}_i = F_{ix}\vec{i} + F_{iy}\vec{j} + F_{iz}\vec{k}, \quad (7.4)$$

де F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} – проекції $\vec{F}_i$ на осі координат. Очевидно, сила $\vec{F}$ являє собою рівнодіючу елементарних сил $\vec{F}_i$ і визначається як

$$\vec{\mathrm{F}} = \vec{i}\sum_{i=1}^{n} F_{ix} + \vec{j}\sum_{i=1}^{n} F_{iy} + \vec{k}\sum_{i=1}^{n} F_{iz}. \quad (7.5)$$

Варто зазначити, що з огляду на симетрію поставленої задачі

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0.$$

Таким чином, величина шуканої сили взаємодії визначається як сума проекцій $\vec{F}_i$ на вісь *Oz*. Обчислимо величину F_{iz}:

$$F_{iz} = F_i \cos\gamma, \qquad (7.6)$$

де γ – кут між віссю Oz і вектором $\vec{F}_i$, що є сталим для всіх $i = 0,1,2,\dots,n-1$ і знаходиться із прямокутного трикутника *COA*:

$$\cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}. \qquad (7.7)$$

Згідно з законом взаємодії двох точкових мас величина F_i визначається приблизно таким чином:

$$F_i \approx k\frac{mm_i}{r^2} = \frac{kmM}{\left(R^2 + a^2\right)2\pi}\Delta\varphi_i. \qquad (7.8)$$

Тут враховане значення m_i (7.3), а також відстань $r = \sqrt{a^2 + R^2}$ між точковими масами (рис. 7.6).

Тоді, підставляючи (7.8) и (7.7) в (7.6), та, підсумовуючи за *i*, одержимо, що

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{kmMa}{\left(R^2 + a^2\right)^{3/2} 2\pi}\Delta\varphi_i. \qquad (7.9)$$

За точне значення величини сили взаємодії ми візьмемо ту границю, до якої прямує інтегральна сума (7.9), коли довжина найбільшої з часткових ділянок Δl_i, а також і $\Delta\varphi_i$ наближаються до нуля.

$$F = \lim_{\lambda\to 0}\sum \frac{kmMa}{\left(R^2 + a^2\right)^{3/2} 2\pi}\Delta\varphi_i = \frac{kmMa}{\left(R^2 + a^2\right)^{3/2} 2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{kmMa}{\left(R^2 + a^2\right)^{3/2}}.$$

Задача 3. Знайти момент інерції відносно осі обертання тіла, обмеженого параболоїдом, радіус основи якого дорівнює *R*, а висота *H*.

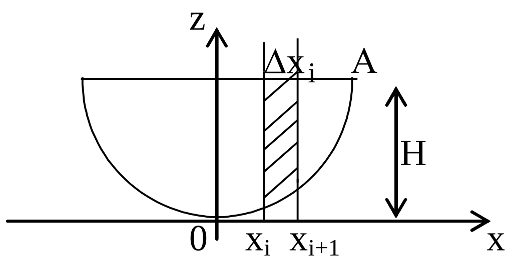


Рис. 7.7

Розв'язання. Параболоїд обертання являє собою поверхню, отриману при обертанні параболічного сегмента (*R*,*H*) навколо осі *Oz*. Рівняння параболи, зображеної на рис. 7.7, має вигляд $x^2 = 2pz$. Для визначення параметра p підставимо в рівняння параболи координати точки *A*, що належить цій параболі. Тоді $R^2 = 2pH, \quad 2p = R^2/H$, і рівняння параболи запишеться у вигляді $x^2 = \frac{R^2}{H} z$. Рівняння поверхні обертання ми одержимо, замінюючи x^2 на $x^2 + y^2$, тобто рівняння $z = \frac{H}{R^2}\left(x^2 + y^2\right)$ є рівнянням даного параболоїда обертання.

При розв'язанні задач на обчислення моменту інерції варто звернути увагу на те, що розбивку на елементарні ділянки потрібно здійснювати так, щоб усі точки виділеної *i*-тої ділянки приблизно знаходилися на однаковій відстані від осі обертання.

У даній задачі цього можна досягти, якщо параболоїд обертання розбити системою кругових циліндрів (рис. 7.8), осі яких збігаються з віссю обертання *Oz*. Тоді усі точки параболоїда обертання, розташовані між циліндрами радіусів x_i і x_{i+1} будуть знаходитися майже на однаковій відстані від осі обертання через малість Δx_i. Маса виділеної ділянки приблизно визначається як маса циліндричного кільця товщиною Δx_i і висотою h_i:

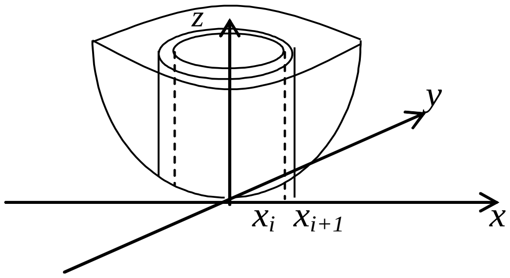


Рис. 7.8

$$h_i = H - Z(x_i, 0) = H - \frac{H}{R^2} x_i^2 = \frac{H}{R^2}\left(R^2 - x_i^2\right).$$

З огляду на зроблене розбиття виділену ділянку можна розглядати як матеріальну точку маси:

$$m_i \approx \pi(x_i + \Delta x_i)^2 h_i - \pi x_i^2 \approx 2\pi x_i \Delta x_i h_i = 2\pi x_i \frac{H}{R^2}\left(R^2 - x_i^2\right)\Delta x_i .$$

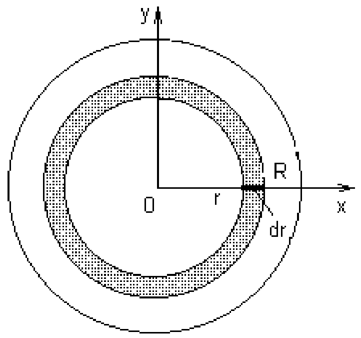
Тоді момент інерції *i*-тої ділянки приблизно дорівнює:

$$J_i \approx 2\pi \frac{H}{R^2} x_i^3 \left(R^2 - x_i^2\right)\Delta x_i .$$

Точне значення моменту інерції одержимо, якщо підсумуємо I_i по всіх $i = 0,1,2,\ldots,n-1$ та перейдемо до границі в отриманій інтегральній сумі при $max\,\Delta x_i \to 0$:

$$J = \int_0^R 2\pi \frac{H}{R^2}\left(x^3 R^2 - x^5\right)dx = 2\pi \frac{H}{R^2}\left(\frac{x^4 R^2}{4} - \frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^R = \frac{\pi R^4 H}{6} .$$

Задача 4. Обчислити кінетичну енергію диска маси M і радіуса R, що обертається з кутовою швидкістю ω навколо осі, що проходить через його центр перпендикулярно до його площини.



Розв'язання. Кінетична енергія елемента диска

$$dK = \frac{mV^2}{2} = \frac{\rho r^2 \omega^2}{2} ds,$$

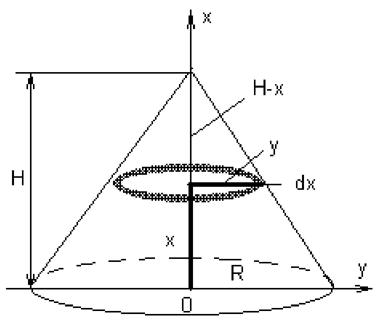
де r – відстань елемента диска (кругового кільця) до осі обертання. Поверхнева щільність маси

$\rho = \frac{M}{\pi R^2}$, тоді $dK = \frac{M\omega^2}{2\pi R^2} r^2 ds$; $ds = 2\pi r dr$.

Кінетична енергія диска

$$K = \frac{M\omega^2}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{M\omega^2}{R^2} \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^R = \frac{M\omega^2 R^2}{4}.$$

Задача 5. Знайти статичний момент однорідного конуса з радіусом основи цього конуса R и висотою H відносно площини основи цього конуса.



Розв'язання. З подібності трикутників маємо

$$\frac{y}{R} = \frac{H - x}{H},$$

звідки

$$y = R\left(1 - \frac{x}{H}\right).$$

Розбиття здійснене таким чином, що всі точки елементу об'єму знаходяться на однаковій відстані від основи конуса.

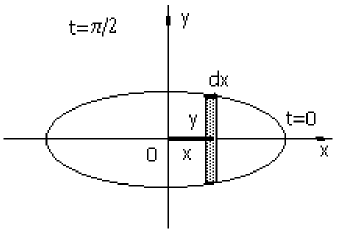
Маємо: $dV = \pi y^2 dx = \pi R^2 \left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 dx.$

Елементарний статичний момент дорівнює $dM = \pi R^2 \left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 x dx$, звідки

$$M=\pi R^2\int_0^H x\left(1-\frac{x}{H}\right)^2 dx=\pi R^2\int_0^H x\left(1-\frac{2x}{H}+\frac{x^2}{H^2}\right)dx=$$

$$=\pi R^2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3H}+\frac{x^4}{4H^2}\right)\Bigg|_0^H=\pi R^2\left(\frac{H^2}{2}-\frac{2}{3}H^2+\frac{H^2}{4}\right)=\frac{\pi R^2H^2}{12}.$$

Задача 6. Знайти момент інерції фігури, обмеженої еліпсом $x=a\cos t,\ y=b\sin t$, відносно осі OY. Вважаємо $\rho=1$.



Розв'язання. Як випливає з рисунка,

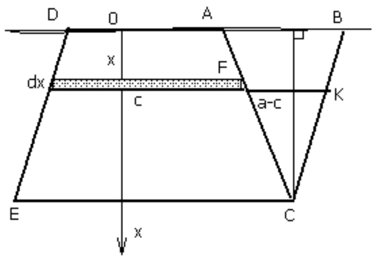
$$I_y=2\int_0^a x^2dS,$$

де $dS=2ydx=-2b\sin t\cdot a\sin tdt=-2ab\sin^2 tdt$ – елемент площі. Через рівність поверхневої щільності $\rho=1\ \Rightarrow\ dS=dm.$ Знаходимо:

$$I_y=-4ab\int_{\pi/2}^{0}a^2\cos^2 t\sin^2 tdt=a^3b\int_0^{\pi/2}\sin^2 2tdt=$$

$$=a^3b\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=a^3b\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin 4t}{8}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi a^3b}{4}.$$

Задача 7. Знайти силу тиску води на вертикальну стінку, що має форму трапеції, нижня основа якої a, верхня b, висота H, якщо основа b знаходиться на поверхні води $(a>b)$.



Розв'язання. За законом Паскаля тиск рідини на занурену в неї горизонтальну пластину дорівнює вазі стовпа рідини, що опирається на цю пластину, тобто добуткові площі пластини на її відстань від вільної поверхні рідини і на питому вагу рідини. Розбиваємо пластину на елементарні шари, які знаходяться на глибині занурення, що дорівнює x ($AD=b,\ EC=a$). $\Delta ABC\sim\Delta FKC$, тоді

$$\frac{a-c}{a-b}=\frac{H-x}{H}=1-\frac{x}{H};\ c=b+(a-b)\frac{x}{H}.$$

Тиск рідини на елементарний шар dx

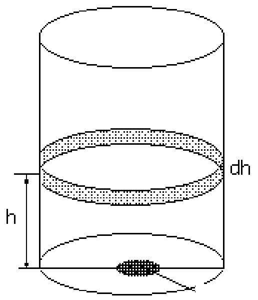
$dP = \left((b + a - b)\dfrac{x}{H}\, xdx \right)$ (питома вага води 1).

Тоді для знаходження тиску на всю пластину інтегруємо елемент тиску dP в межах зміни від 0 до H. Одержимо

$$P = \int_0^H \left(b + (a-b)\,\frac{x}{H} \right) xdx = \int_0^H \left(bx + \frac{ax^2}{H} - \frac{b}{H}\,x^2 \right) dx =$$

$$= \left(b\,\frac{x^2}{2} + \frac{(a-b)}{H}\,\frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^H = \frac{b}{2}H^2 + \frac{(a-b)H^3}{3H} = \frac{b+2a}{6}H^2.$$

Задача 8. За який час спорожниться наповнена доверху вертикальна циліндрична бочка радіуса R, висоти H через круглий отвір у дні радіуса r?



$S = \pi r^2$

Розв'язання. За законом Торічеллі швидкість витікання рідини дорівнює $v = k\sqrt{2gh}$, де h – висота рівня рідини над отвором. Кількість рідини, що витікає за час dt, дорівнює об'ємові $\pi R^2 dh$, де πR^2 – площа основи циліндра. Тоді швидкість витікання рідини через отвір, площа якого $S = \pi r^2$, буде дорівнювати $\dfrac{\pi r^2 dh}{dt}$, а з іншого боку $kS\sqrt{2gh}$.

Отримаємо рівність $\dfrac{\pi R^2 dh}{dt} = k\pi r^2\sqrt{2gh}$, звідки маємо

$$dt = \frac{\pi R^2 dh}{k\pi r^2\sqrt{2gh}} = \frac{R^2}{kr^2\sqrt{2g}}\,\frac{dh}{\sqrt{h}}.$$

Резервуар спорожниться при зміні h від 0 до H. Інтегруючи дану рівність, знаходимо час T спорожнювання циліндра.

$$T = \frac{R^2}{kr^2\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{R^2}{kr^2\sqrt{2g}}\,2\sqrt{h}\Big|_0^H = \sqrt{\frac{2H}{g}}\,\frac{R^2}{kr^2}.$$

Контрольні приклади і запитання до гл. 7

Перш ніж приступити до виконання індивідуального розрахункового завдання, читач може разом з нами розв'язати кілька типових задач, заміняючи знак $\boxed{*}$ необхідними числами та виразами.

Обчислення площі плоскої фігури

Для обчислення площі плоскої фігури використовують одну з наступних формул (залежно від того, як задані обмежуючу фігуру криві):

$$\text{а) } S=\int_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx; \qquad \text{б) } S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt; \qquad \text{в) } S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi .$$

Задача 7.1. Обчислити площу, що обмежена прямою $y=x$ і параболою $y=2-x^2$.

Розв'язання

1) Криві задані в декартовій системі координат, тому з перерахованих вище формул (а, б, в) для обчислення площі обираємо формулу $\boxed{*}$.

2) Для встановлення меж інтегрування a і b треба розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} y=x \\ y=2-x^2 \end{cases}$. Розв'язуючи систему, одержуємо $x_1=\boxed{*}$, $x_2=\boxed{*}$. Ці числа і є межами інтегрування.

3) Визначимо вигляд функцій f_1 і f_2 для даного випадку: $f_1(x)=\boxed{*}$, $f_2(x)=\boxed{*}$ на відрізку $\left[\boxed{*}, \boxed{*}\right]$.

4) Маємо площу $S=\int\limits_{\boxed{*}}^{\boxed{*}}\left(\left(2-x^2\right)-x\right)dx=$

$$=\left(2x-\frac{x^3}{\boxed{*}}-\frac{x^2}{\boxed{*}}\right)\Bigg|_{\boxed{*}}^{\boxed{*}}=\left(2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)-\left(\boxed{*}\cdot 4+\frac{\boxed{*}}{3}-2\right)=\frac{\boxed{*}}{2}.$$

Задача 7.2. Знайти площу, обмежену кривою $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Розв'язання

1) Оскільки крива задана в полярній системі координат, то з перерахованих формул треба вибрати формулу $\boxed{*}$.

2) Крива визначена в тій частині площини, де $\cos 2\varphi \geq 0$, тобто там, де $-\frac{\pi}{\boxed{*}} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{\boxed{*}}$ і $\frac{\boxed{*} \cdot \pi}{\boxed{*}} \leq \varphi \leq \frac{\boxed{*} \cdot \pi}{\boxed{*}}$.

3) Крива складається з двох однакових пелюстків, тому можна обчислити площу, обмежену пелюстком у правій півплощині S_1, і результат помножити на $\boxed{*}$.

4) Пелюсток у правій півплощині розташований між променями $\alpha = -\frac{\pi}{\boxed{*}}$ і $\beta = \frac{\pi}{\boxed{*}}$. Ці числа і є межами інтегрування у формулі (в)

$$S_1 = \frac{a^2}{2} \int_{\boxed{*}}^{\boxed{*}} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{\boxed{*}}.$$

5) Остаточно $S = \boxed{*} \cdot S_1 = a^2$.

6) Зверніть увагу, що площа, обмежена даною кривою (лемніскатою Бернуллі), дорівнює площі квадрата зі стороною $\boxed{*}$.

Обчислення довжини дуги

Довжина дуги обчислюється за однією з формул:

1. $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2 dx} \quad (a < b)$; 2. $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} dt$;

3. $L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi$.

Задача 7.3. Знайти довжину евольвенти кола

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases} \quad \text{от } t = 0 \text{ до } t = 2\pi.$$

Розв'язання

1) Оскільки крива задана параметрично, для обчислення довжини дуги використовуємо формулу $\boxed{*}$. Межами інтегрування тут є числа $\boxed{*}$ і $\boxed{*}$.

2) $x_t' = a\cdot\boxed{*}\cdot\cos t$, $y_t' = a\cdot\boxed{*}\cdot\sin t$, звідси $\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2 = a^{\boxed{*}}\cdot t^{\boxed{*}}$ й одержимо $\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2} = \boxed{*}\cdot t$.

3) $L = \int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}dt = \boxed{*}\cdot\int\limits_0^{2\pi}tdt = \frac{at^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = \boxed{*}\cdot a\pi^{\boxed{*}}$.

Задача 7.4. Знайти довжину кривої $9y^2 = x\left(x-3\right)^2$ між точками її перетину з віссю *Ox*.

Розв'язання

1) Крива задана в декартовій системі координат. Для обчислення довжини вибираємо формулу $\boxed{*}$.

2) Межами інтегрування є точки перетину з віссю *Ox*. $\left(y=\boxed{*}\right)$ Це точки: $x=\boxed{*}$, $x=\boxed{*}$.

3) Крива симетрична відносно осі *Ox*:

$y=\pm\frac{1}{3}\sqrt{x}\left|x-3\right| = \pm\frac{1}{3}\sqrt{x}\left(\boxed{*}-x\right)$, тому можна обчислити половину довжини L_1 і результат помножити на $\boxed{*}$.

4) $y=\frac{\sqrt{x}}{3}\left(3-x\right)$, знайдемо її похідну: $y' = \frac{\boxed{*}\cdot\left(1-x\right)}{\boxed{*}\cdot\sqrt{x}}$. Обчислимо підінтегральний вираз: $1+\left(y'\right)^2 = \frac{\left(\boxed{*}+x\right)^2}{\boxed{*}\cdot x}$.

5) $L_1 = \int\limits_0^{\boxed{*}}\frac{1+x}{\boxed{*}\cdot\sqrt{x}}dx = \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\boxed{*}}x^{3/2}\right)\Bigg|_0^3 = \boxed{*}\cdot\sqrt{3}$.

6) Довжина всієї лінії $L = 2L_1 = \boxed{*}\cdot\sqrt{3}$.

Обчислення об'єму тіла обертання

Задача 7.5. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox площі, що обмежена параболою $y = x^2 + 1$ і прямою $y = 3x - 1$.

Розв'язання

1) Якщо площа обмежена кривими $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ при $a \le x \le b$, то об'єм тіла, утвореного обертанням цієї площі навколо осі Ox, обчислюється за формулою $V_{0x} = \pi \int_a^b \left(y_2^2(x) - y_1^2(x) \right) dx$.

2) Для визначення меж інтегрування треба знайти точки перетину кривих. Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$, отримаємо $x_1 = \boxed{*}$, $x_2 = \boxed{*}$. Ці числа і є межами інтегрування.

3) На проміжку $\left[\boxed{*}, \boxed{*} \right]$ пряма $y = 3x - 1$ розташована вище параболи $y = x^2 + 1$, тому $y_1 = \boxed{*}$, $y_2 = \boxed{*}$.

4) $V = \pi \int_{\boxed{*}}^{\boxed{*}} \left((3x-1)^2 - \left(x^2 + 1 \right)^2 \right) dx =$

$$= \pi \int_{\boxed{*}}^{\boxed{*}} \left(\boxed{*} \cdot x^2 - \boxed{*} \cdot x - x^4 \right) dx = \pi \left[\frac{\boxed{*}}{3} x^3 - \boxed{*} \cdot x^2 - \frac{x^5}{*} \right] \Bigg|_{\boxed{*}}^{\boxed{*}} = \boxed{\frac{*}{*}} \pi .$$

Задача 7.6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена однією аркою циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ і віссю Ox.

Розв'язання. Одна арка циклоїди відповідає змінюванню параметра t від 0 до $\boxed{*}$. Запишемо формулу для обчислення об'єму тіла обертання у випадку параметричного завдання кривої: $V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) \cdot d\left(x(t) \right)$.

Обчислимо об'єм за цією формулою:

$$V = \pi \int_0^{\boxed{*}} a^2 (1 - \cos t)^2 \cdot a \left(\boxed{*} \right) dt = \pi a^3 \int_0^{\boxed{*}} \left(1 - 3\cos t + 3\boxed{*} - \cos^3 t \right) dt =$$

$$=\pi a^3\int_0^{\boxed{*}}\left(1-3\cos t+\frac{3}{2}\left(1+\boxed{*}\right)-\left(1-\sin^2 t\right)\cos t\right)dt=$$

$$=\pi a^3\left[\left(\boxed{*}\cdot t-3\sin t+\frac{3}{4}\boxed{*}\right)\Bigg|_0^{\boxed{*}}-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\boxed{*}}\left(1-\sin^2 t\right)d\left(\boxed{*}\right)\right]=\pi a^3\left[\boxed{*}\cdot 2\pi-\left(\sin t-\frac{\sin^{\boxed{*}} t}{\boxed{*}}\right)\Bigg|_0^{\boxed{*}}\right]=\boxed{*}\cdot\pi^2a^3.$$

Отже, об'єм тіла обертання $V=\boxed{*}\cdot\pi^2a^3$ од. куб.

Лабораторна робота 7. Використання системи Maple для обчислення визначених інтегралів

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли.

Виконання. Для обчислення визначених інтегралів у системі Maple використовується команда **int**(expr,var=val1..val2), де expr – підінтегральна функція, var – змінна інтегрування, val1, val2 – нижня і верхня межі інтегрування:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cdot dx$,

> int(sin(x)^6,x=0..pi/2);

$$-\frac{1}{6}\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)^5\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)-\frac{5}{24}\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)^3\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)-$$
$$-\frac{5}{16}\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)+\frac{5}{32}\pi$$

Для спрощення виразу використовуємо команду **combine**, яка по можливості знижує степінь тригонометричних виразів і поєднує показники степеневих функцій.

> combine(int(sin(x)^6,x=0..pi/2));

$$-\frac{1}{192}\sin(3\pi)+\frac{3}{64}\sin(2\pi)-\frac{5}{64}\sin(\pi)+\frac{5}{32}\pi.$$

Враховуючи, що $\sin(3\pi)=\sin(2\pi)=\sin(\pi)=0$, одержимо відповідь:

$$\frac{5}{32}\pi;$$

б) $\int\limits_{-1}^{1} x \cdot \mathrm{arctgx} \cdot dx$,

> int(x*arctan(x),x=-1..1);

$$\frac{1}{2}\pi - 1;$$

в) $\int\limits_{-1}^{3} x^3 \cdot \sqrt{x^2 - 1} \cdot dx$,

> int(x^3*sqrt(x^2-1),x=1..3);

$$\frac{464}{15}\sqrt{2};$$

г) $\int\limits_{1}^{2} \frac{1}{x^2 + x} \cdot dx$,

> int(1/(x^2+x),x=1..2);

$$2\ln(2) - \ln(3).$$

Спростимо отриманий вираз

> combine(int(1/(x^2+x),x=1..2));

$$\ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, що обмежені заданими лініями:

а) $y = -x^2,\ y = -x - 2.$

Виконання:

> **f1:=-x^2;**

> **f2:=-x-2;**

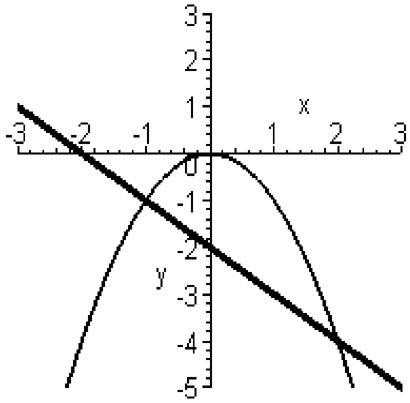
> **eqn:=f1=f2:** (складаємо рівняння для пошуку абсцис точок перетину заданих ліній),

>**pred_int:=solve(eqn,x);** (розв'язуємо рівняння, результат присвоюється масиву pred_int, який складається з двох елементів),

$$pred\_int = \{-1,2\}.$$

Будуємо графіки заданих функцій за допомогою команди **plot([f1,f2],x=a1..a2,y=b1..b2,color=[blue,red],style=[line,line],thickness=[2, 4]),** де a1..a2 – діапазон змінювання аргументу x, b1..b2 – інтервал, що виводиться по осі ординат, параметр **color** задає кольори графіків функцій, параметр **style** визначає вид ліній, параметр **thickness** визначає товщину ліній.

>plot([f1,f2],x=-3..3,y=-5..3, color=[black,black],style=[line,line],thickness=[2,4]);



З графіка видно, що зверху фігура обмежена лінією $f1$, а знизу – лінією $f2$, тому площу фігури обчислюємо, як інтеграл від різниці функцій $\left(f1 - f1\right)$ по змінній x при змінюванні її від $x = -1$ $\left(pred\_int[1] = -1\right)$ до $x = 2$ $\left(pred\_int[2] = 2\right)$.

> **S:=int(f1-f2,x=pred_int[1]..pred_int[2]);**

$$S = \frac{9}{2}.$$

Таким чином, площа фігури дорівнює 4,5 кв.од;

б) Обчислити площу фігури, що обмежена лініями $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 = 12\left(y - 1\right)$.

Виконання. Для побудови графіків функцій, заданих неявно, потрібно скористатися командою **implicitplot** із графічного пакета **plots**, попередньо викликавши його з бібліотеки.

> **with(plots):**

> **f1:=x^2+y^2=16;** (задано неявне рівняння кола),

$$f1 := x^2 + y^2 = 16,$$

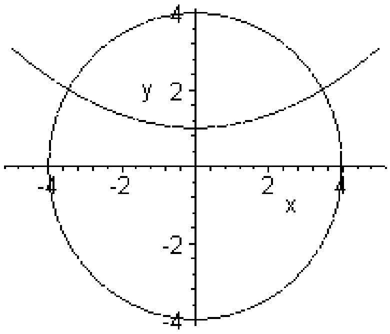
> **f2:=x^2=12*(y-1);** (задано неявне рівняння параболи),

$$f2 := x^2 = 12\left(y - 1\right),$$

>implicitplot({f1,f2},x=-5..5,y=-5..5,color=black);

>rez:=solve({f1,f2},{x,y}); (результат розв'язання рівняння присвоюється змінній **rez**),

$$rez := \left\{y = 2, x = 2RootOf(\_Z^2 - 3, label = \_L10)\right\}, \left\{y = -14, x = 6RootOf(\_Z^2 + 5, label = \_L12)\right\}$$



Якщо у виразі відповіді з'явився вираз *RootOf*, це означає, що Maple або не може виразити корені в радикалах, або це вимагає додаткових зусиль. Команда **allvalues** дозволяє подати розв'язок, використовуючи радикали. З рисунку видно, що корені рівняння, що відповідають $y=-14$, є зайвими, то обчислюємо абсциси тільки тих точок, ординати яких дорівнюють $y=2$.

> **pred_int:=allvalues(rez[1]);**

$$pred\_int := \{y=2, x=2\sqrt{3}\}, \{y=2, x=-2\sqrt{3}\}.$$

Виражаємо явним чином y як функцію від x з неявних рівнянь $y_1=\sqrt{16-x^2}$, $y_2=\dfrac{x^2+12}{12}$. З рисунку видно, що лінія y_1 обмежує фігуру зверху, а y_2 – знизу, змінна інтегрування x змінюється від $-2\sqrt{3}$ до $2\sqrt{3}$.

>S:=int(sqrt(16-x^2)-(x^2+12)/12,x=-2*sqrt(3)..2*sqrt(3));

`

$$S := -\frac{4}{3}\sqrt{3}+\frac{16}{3}\pi;$$

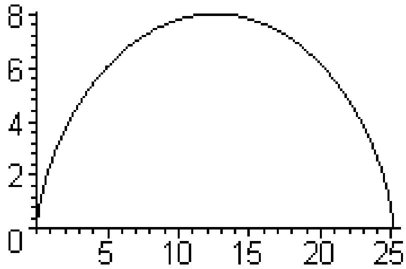
в) Обчислити площу фігури, що обмежена віссю абсцис і однією аркою циклоїди $\begin{cases} x=4(t-\sin t) \\ y=4(1-\cos t)\end{cases}$, $(0\le t\le 2\pi)$.

Виконання. Команду **plot** можна використати і для виведення параметрично заданої кривої **plot([funx(t), funy(t),t=a..b],options**), де **funx(t), funy(t) –** функції координат, що залежать від параметра *t*; *a* і *b* – межі інтервалу зміни параметра. Через *S* позначимо площу фігури.

> **restart:**

> **x:=4*(t-sin(t)): y:=4*(1-cos(t)):**

> **plot({[x,y,t=0..2*Pi]},color=black,thickness=1);**



> **s:=int(y*diff(x,t),t=0..2*pi);** **(**обчислення інтеграла $\int_0^{2\pi} y \cdot x_t' \cdot dt$),

$$s := 48\pi - 32\sin(2\pi) + 8\cos(2\pi)\sin(2\pi),$$

> **S:=subs(sin(2*pi)=0,s);** (обчислимо значення s, задав значення $\sin(2\pi) = 0$**),**

$$S := 48\pi.$$

Площа фігури дорівнює 48π кв.од;

г) Обчислити площу фігури, що обмежена кардіоїдою $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$.

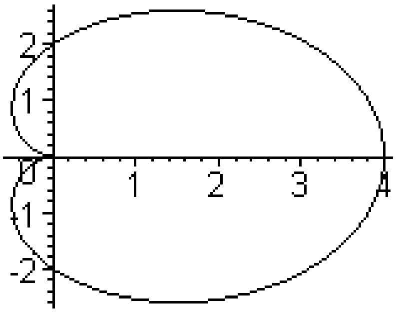
Виконання. Для побудови графіка в полярній системі координат використовується команда **polarplot(r,alf=a..b alf,[options]),** де **r –** рівняння кривої в полярній системі координат, **alf=a..b –** діапазон змінювання полярного кута **alf, [options]** – необов'язкові параметри**,** що керують кольором (color), товщиною (thickness), стилем (style) і т.ін. лінії, що виводиться.

> **restart:**

> **r:=2*(1+cos(alf)):**

> **with(plots):**

polarplot(r,alf=0..2*Pi,color=black);



Фігура симетрична відносно осі абсцис, тому обчислюємо визначений інтеграл на інтервалі $[0,\pi]$, а потім подвоюємо результат.

S:=2*int((1/2)*r^2,alf=0..pi);

$$S := 6\pi + 8\sin(\pi) + 2\cos(\pi)\sin(\pi),$$

> **S:=subs(sin(pi)=0,S);**

$$S := 6\pi.$$

д) Знайти площу, що обмежена кривою $\rho = 6\cos 3\varphi$ і лежить поза колом $\rho = 3$.

Виконання. Позначимо **r1** – рівняння трипелюсткової троянди $6\cos 3\varphi$, r2 – рівняння кола, **alf** – кут φ**, gr** – точки перетину кривих **r1** і **r2**.

> **restart:**

>r1:=6*cos(3*alf);

$$r1 := 6\cos 3\varphi;$$

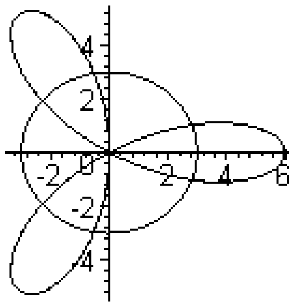
>r2:=3;

$$r2 := 3.$$

Зробимо рисунок фігури, площу якої потрібно обчислити.

> **with(plots):**

polarplot([r1,r2],alf=0..2*Pi,color=black);



Шукана площа складається з трьох однакових частин, які не перетинаються між собою, тому можна знайти площу однієї частини, а потім потроїти отримане значення. Знайдемо координати точок перетину кола та трипелюсткової троянди.

> **eqn:=r1=r2;**

$$eqn := 6\cos(3alf) = 3;$$

> **gr:=solve(eqn,alf);**

$$gr := \frac{\pi}{9};$$

таким чином, команда **solve** дозволяє отримати тільки головний розв'язок тригонометричного рівняння; щоб знайти всі розв'язки, необхідно ввести команду **_EnvAllSolutions:=true**, яка встановлює для змінної операційної середи **_EnvAllSolutions** значення **true**. Тепер розв'язок того ж рівняння виглядає так:

> **_EnvAllSolutions:=true:**

>**gr:=solve(eqn,alf);**

$$gr := \frac{1}{9}\pi - \frac{2}{9}\pi\_B!\sim + \frac{2}{3}\pi\_Z!\sim,$$

де $\_B!\sim, \_Z!\sim$ – натуральні числа. Виберемо із загального розв'язку ті значення, які відповідають точкам перетину першого пелюстка трипелюсткової троянди та кола.

> **subs(_B1=0,_Z1=0,gr);**

$$\frac{1}{9}\pi;$$

> **subs(_B1=1,_Z1=0,gr);**

$$-\frac{1}{9}\pi;$$

обчислюємо площу фігури

> **S:=3*(1/2)*int(r1^2-r2^2,alf=-pi/9..pi/9);**

$$S := 18\cdot\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)+3\pi;$$

> **S:=combine(S); (**виконуємо спрощення тригонометричного виразу);

$$S := 9\cdot\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)+3\pi.$$

Обчислюємо величину S, задавши значення $\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

> **S:=subs(sin(2*pi/3)=sqrt(3)/2,S);**

$$S := \frac{9}{2}\sqrt{3}+3\pi.$$

Завдання 3

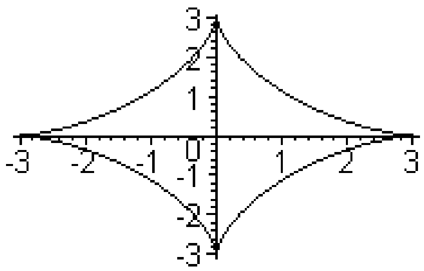
а) Знайти довжину дуги астроїди $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$.

Виконання. Позначимо через L довжину дуги астроїди. Так як астроїда є симетричною фігурою, можна знайти довжину лише однієї чверті ($0 \le t \le \frac{\pi}{2}$), а потім одержане значення помножити на чотири.

> **restart:**

> **x:=3*(cos(t))^3;y:=3*(sin(t))^3:**

> **plot({[x,y,t=0..2*Pi]},color=black,thickness=1);**



обчислимо довжину дуги за формулою $L = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt$,

> **L:=4*int(sqrt(diff(y,t)^2+diff(x,t)^2),t=0..Pi/2);**

$$L := 9\sqrt{4},$$

> **L:=simplify(L);** (спростимо отриманий вираз),

$$L := 18;$$

б) Знайти довжину дуги кривої $y := \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$, $1 \le x \le 2$.

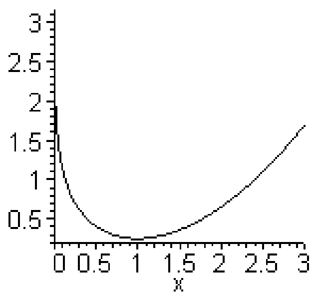
Виконання

> **restart:**

> **y:=x^2/4-ln(x)/2;**

$$y := \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x),$$

> **plot(y,x=0..3,color=black,thickness=1);**



обчислимо довжину дуги за формулою $L = \int\limits_1^2 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$,

> **L:=simplify(int(sqrt(1+diff(y,x)^2),x=1..2));**

$$y := \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln(2).$$

в) Знайти довжину дуги кривої $\rho = 4\,sin^3\left(\phi/3\right)$, при зміні φ від 0 до 3π.

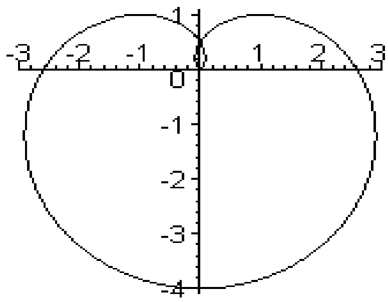
Виконання. Позначимо r – полярний радіус, alf – кут φ, $r1$ – похідна ρ'_{φ}, L – довжина дуги кривої.

> **r:=4*(sin(alf/3))^3;**

$$r := 4\sin\left(\frac{1}{3}alf\right)^3,$$

> **with(plots):**

> **polarplot(r,alf=0..3*Pi,color=black);**



> **r1:=diff(r,alf);**

$$r1 := 4\sin\left(\frac{1}{3}alf\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{3}alf\right),$$

обчислимо довжину дуги за формулою $L = \int\limits_0^{3\pi} \sqrt{(\rho)^2 + (\rho'_{\varphi})^2}\,d\varphi$,

> **L:=int(sqrt(r^2+r1^2),alf=0..3*Pi);**

$$L := \frac{3}{2}\pi\sqrt{16},$$

> **L:=simplify(L);** (спростимо одержаний вираз),

$$L := 6\pi.$$

Контрольні завдання до гл. 7

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли.

7.1.1. $\int\limits_0^1 \frac{\left(x^2+1\right)dx}{\left(x^3+3x+1\right)^3}$. **7.1.2.** $\int\limits_0^2 \frac{x^3}{x^2+4}dx$.

7.1.3. $\int_0^{\pi/4} \frac{2\cos x + 3\sin x}{(3\cos x - 2\sin x)^3} dx$.

7.1.4. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x - 2/x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

7.1.5. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2} dx$.

7.1.6. $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx$.

7.1.7. $\int_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx$.

7.1.8. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$.

7.1.9. $\int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx$.

7.1.10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx$.

7.1.11. $\int_{e+1}^{e^2+1} \frac{4 + \ln(x-1)}{x-1} dx$.

7.1.12. $\int_0^1 \frac{3\operatorname{arctg} x + x}{x^2+1} dx$.

7.1.13. $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2\sin x} dx$.

7.1.14. $\int_0^{1/2} \frac{8x + \operatorname{arctg} 2x}{4x^2+1} dx$.

7.1.15. $\int_0^1 \frac{xdx}{x^4+1}$.

7.1.16. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x - 1/x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

7.1.17. $\int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 - 2}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

7.1.18. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

7.1.19. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$.

7.1.20. $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

7.1.21. $\int_1^4 \frac{1/(2\sqrt{x}) + 1}{(\sqrt{x}+x)^2} dx$.

7.1.22. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x + \operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} dx$.

7.1.23. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}$.

7.1.24. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x + x\cos x}{(x\sin x)^2} dx$.

7.1.25. $\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$. **7.1.26.** $\int\limits_{-1}^{0}\frac{\mathrm{tg}^2(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$.

7.1.27. $\int\limits_{2}^{9}\frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$. **7.1.28.** $\int\limits_{0}^{\pi/4}\mathrm{tg}\,x\cdot\ln\cos x dx$.

7.1.29. $\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^4}dx$. **7.1.30.** $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^3+x}{x^4+1}dx$.

Завдання 2. Обчислити визначені інтеграли.

7.2.1. $\int\limits_{-2}^{0}(x+2)^2\cos 3xdx.$ 7.2.2. $\int\limits_{0}^{1}\frac{x+1}{x^2+6x+9}dx.$ 7.2.3. $\int\limits_{0}^{4}x^2\sqrt{16-x^2}dx.$

7.2.4. $\int\limits_{0}^{2}\frac{x}{1+x+x^2}dx.$ 7.2.5. $\int\limits_{0}^{2\pi}\left(3-7x^2\right)\cos 2xdx.$ 7.2.6. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin xdx.$

7.2.7. $\int\limits_{0}^{3}\left(x^2-3x\right)\sin 2xdx.$ 7.2.8. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+2\sin^2 x}.$ 7.2.9. $\int\limits_{1}^{4}x\ln xdx.$

7.2.10. $\int\limits_{0}^{1}x\sqrt{1-x^2}dx.$ 7.2.11. $\int\limits_{1}^{3}\frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$ 7.2.12. $\int\limits_{1}^{2}x\ln(1+x)dx.$

7.2.13. $\int\limits_{1}^{e^2}\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}dx.$ 7.2.14. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{e^x-e^{-x}}.$ 7.2.15. $\int\limits_{1}^{e}\sqrt{x}\ln^2 xdx.$

7.2.16. $\int\limits_{0}^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx.$ 7.2.17. $\int\limits_{2}^{3}(x-1)^2\ln(x-1)dx.$ 7.2.18. $\int\limits_{0}^{\pi}e^x\cdot\cos^2 xdx.$

7.2.19. $\int\limits_{-1}^{0}(x+2)\ln^2(x+2)dx.$ 7.2.20. $\int\limits_{0}^{4}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}dx.$ 7.2.21. $\int\limits_{-1}^{1}x^2e^{\frac{-x}{2}}dx.$

7.2.22. $\int\limits_{-2}^{0}x^3\sqrt{x^2+9}dx.$ 7.2.23. $\int\limits_{0}^{1}x^2e^{3x}dx.$ 7.2.24. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx.$

7.2.25. $\int\limits_0^3 \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}dx.$ 7.2.26. $\int\limits_0^1 \dfrac{x}{x^2+3x+2}dx.$ 7.2.27. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{4-7\,\mathrm{tg}\,x}{2+3\,\mathrm{tg}\,x}dx.$

7.2.28. $\int\limits_0^1 xe^{-2x}dx$ 7.2.29. $\int\limits_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}dx.$ 7.2.30. $\int\limits_0^{\pi} x\sin x dx.$

Завдання 3. Обчислити визначені інтеграли.

7.3.1. $\int\limits_0^{\pi/4} \dfrac{dx}{\cos x(1+\cos x)}.$

7.3.2. $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\sin xdx}{3+2\sin x}.$

7.3.3. $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\sin xdx}{2+\cos x}.$

7.3.4. $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}.$

7.3.5. $\int\limits_{\pi/2}^{2arctg2} \dfrac{dx}{\sin x(1+\sin x)}.$

7.3.6. $\int\limits_0^{2\pi/3} \dfrac{\cos^2 xdx}{(1+\cos x+\sin x)^2}.$

7.3.7. $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\sin^2 xdx}{(1+\cos x+\sin x)^2}.$

7.3.8. $\int\limits_{-\pi/2}^{0} \dfrac{\sin xdx}{(1+\cos x-\sin x)^2}.$

7.3.9. $\int\limits_{-2\pi/3}^{0} \dfrac{\cos^2 xdx}{(1+\cos x-\sin x)^2}.$

7.3.10. $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\sin xdx}{(1+\sin x)^2}.$

7.3.11. $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\sin xdx}{(1+\cos x+\sin x)^2}.$

7.3.12. $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\cos xdx}{(1+\cos x+\sin x)^2}.$

7.3.13. $\int\limits_0^{2\,\mathrm{arctg}(1/2)} \dfrac{(1-\sin x)dx}{\cos x(1+\cos x)}.$

7.3.14. $\int\limits_{-2\pi/3}^{0} \dfrac{\cos xdx}{(1+\cos x-\sin x)}.$

7.3.15. $\int\limits_{-\pi/2}^{0} \dfrac{\cos xdx}{(1+\cos x-\sin x)^2}.$

7.3.16. $\int\limits_0^{2\mathrm{arctg}(1/3)} \dfrac{\cos xdx}{(1+\cos x)(1-\sin x)}.$

7.3.17. $\int\limits_0^{2} \dfrac{\cos xdx}{(1+\cos x+\sin x)}.$

7.3.18. $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\sin xdx}{(1+\cos x+\sin x)}.$

7.3.19. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \dfrac{\cos xdx}{(1-\cos x+\sin x)}.$

7.3.20. $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\sin xdx}{5+4\sin x}.$

7.3.21. $\int\limits_{2\operatorname{arctg}(1/3)}^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{dx}{\sin x(1-\sin x)}$.

7.3.22. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{(1+\sin x)^2} dx$.

7.3.23. $\int\limits_{\pi/2}^{2\operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x(1+\cos x)}$.

7.3.24. $\int\limits_{\pi/2}^{2\operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}$.

7.3.25. $\int\limits_{2\operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1-\cos x)^3}$.

7.3.26. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{(1+\cos x)^2} dx$.

7.3.27. $\int\limits_{2\operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{dx}{(1+\sin x - \cos x)^2}$.

7.3.28. $\int\limits_{0}^{2\pi/3} \frac{1+\sin x}{(1+\cos x + \sin x)} dx$.

7.3.29. $\int\limits_{0}^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)^2} dx$.

7.3.30. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{1+\cos x}{(1+\sin x + \cos x)} dx$.

Завдання 4. Обчислити визначені інтеграли.

7.4.1. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{2\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 2}{3 - \operatorname{tg} x} dx$.

7.4.2. $\int\limits_{0}^{\arccos\sqrt{2/3}} \frac{(2+\operatorname{tg} x)dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x - 3}$.

7.4.3. $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{4\operatorname{tg} x - 3}{4\cos^2 x + 1 - \sin 2x} dx$.

7.4.4. $\int\limits_{\arccos 4/\sqrt{17}}^{\pi/4} \frac{(1+2\operatorname{ctg} x)dx}{(2\sin x + \cos x)^2}$.

7.4.5. $\int\limits_{-\operatorname{arctg} 1/3}^{0} \frac{(3\operatorname{tg} x + 1)dx}{1 + 2\sin 2x - 5\cos 2x}$.

7.4.6. $\int\limits_{\arcsin 1/\sqrt{37}}^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x dx}{3\sin 2x + 5\cos^2 x}$.

7.4.7. $\int\limits_{0}^{arctg 1/3} \frac{(8+\operatorname{tg} x)dx}{9\sin^2 x + \cos^2 x}$.

7.4.8. $\int\limits_{\pi/4}^{arctg 3} \frac{dx}{(3\operatorname{tg} x + 5)\sin 2x}$.

7.4.9. $\int\limits_{0}^{\arccos 1/\sqrt{7}} \frac{(3+2\operatorname{tg} x)dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x - 1}$.

7.4.10. $\int\limits_{0}^{\arccos 1/\sqrt{6}} \frac{(3\operatorname{tg}^2 x - 1)dx}{\operatorname{tg}^2 x + 5}$.

7.4.11. $\int\limits_{\arccos 1/\sqrt{10}}^{\arccos 1/\sqrt{26}} \frac{dx}{(6+5\operatorname{tg} x)\sin 2x}$.

7.4.12. $\int\limits_{-\arcsin 2/\sqrt{5}}^{\pi/4} \frac{(2-\operatorname{tg} x)dx}{(\sin x + 3\cos x)^2}$.

7.4.13. $\int\limits_{\pi/4}^{\arccos 1/\sqrt{26}} \frac{dx}{(6-\operatorname{tg} x)\sin 2x}$.

7.4.14. $\int\limits_{-\arccos 1/\sqrt{5}}^{0} \frac{(7-3\operatorname{tg} x)dx}{\operatorname{tg} x + 3}$.

7.4.15. $\displaystyle\int\limits_{\pi/4}^{\arcsin 2/\sqrt{5}} \frac{(4\mathrm{tg}x-5)dx}{4\cos^2 x-\sin 2x+1}$.

7.4.16. $\displaystyle\int\limits_{-\arccos 1/\sqrt{10}}^{0} \frac{(3\mathrm{tg}^2 x-50)dx}{2\mathrm{tg}x+7}$.

7.4.17. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{(3+\mathrm{tg}x)dx}{(\sin x+2\cos x)^2}$.

7.4.18. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\mathrm{arctg}\, 2/3} \frac{(4+\mathrm{tg}x)dx}{5\sin^2 x+3\cos^2 x}$.

7.4.19. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\mathrm{arctg}\, 3} \frac{(2+\mathrm{tg}x)dx}{\sin^2 x+9\cos^2 x}$.

7.4.20. $\displaystyle\int\limits_{\pi/4}^{\arccos 1/\sqrt{3}} \frac{\mathrm{tg}x dx}{\sin^2 x-5\cos^2 x+4}$.

7.4.21. $\displaystyle\int\limits_{\pi/4}^{\arcsin \sqrt{2/3}} \frac{\mathrm{tg}x dx}{7\sin^2 x+\cos^2 x}$.

7.4.22. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{(2-3\mathrm{tg}x)dx}{2+3\mathrm{tg}x}$.

7.4.23. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\arcsin 3/\sqrt{10}} \frac{(2\mathrm{tg}x-5)dx}{(4\cos x-\sin x)^2}$.

7.4.24. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\arcsin \sqrt{7/8}} \frac{\sin^2 x dx}{2+3\cos 2x}$.

7.4.25. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{(3\mathrm{tg}x+2)dx}{\sin 2x+5}$.

7.4.26. $\displaystyle\int\limits_{\arcsin 2/\sqrt{5}}^{\arcsin 3/\sqrt{10}} \frac{(2+\mathrm{tg}x)dx}{(5-tgx)\sin 2x}$.

7.4.27. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\arcsin \sqrt{3/7}} \frac{\mathrm{tg}x^2 dx}{3\sin^2 x+4\cos^2 x-7}$.

7.4.28. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\mathrm{arctg}\, 2} \frac{(11-\mathrm{tg}x)dx}{3\sin^2 x+\cos^2 x}$.

7.4.29. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{\sin^2 x dx}{3\cos 2x-4}$.

7.4.30. $\displaystyle\int\limits_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}\, 3} \frac{(1+\mathrm{ctg}x)dx}{(\sin x+2\cos x)^2}$.

Завдання 5. Обчислити визначені інтеграли.

7.5.1. $\displaystyle\int\limits_{2}^{4} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$.

7.5.2. $\displaystyle\int\limits_{3}^{6} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$.

7.5.3. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\left(16-x^2\right)^{3/2}}$.

7.5.4. $\displaystyle\int\limits_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}dx$.

7.5.5. $\displaystyle\int\limits_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}dx$.

7.5.6. $\displaystyle\int\limits_{0}^{3} \sqrt{9-x^2}dx$.

7.5.7. $\displaystyle\int\limits_{0}^{9/2} \frac{x^2}{\sqrt{81-x^2}}dx$.

7.5.8. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\left(4+x^2\right)^{3/2}}$.

7.5.9. $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx$.

7.5.10. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\left(4-x^2\right)^{3/2}}$.

7.5.11. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$.

7.5.12. $\int_0^3 \frac{dx}{\left(9+x^2\right)^{3/2}}$.

7.5.13. $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

7.5.14. $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx$.

7.5.15. $\int_0^3 \frac{dx}{\left(9+x^2\right)^{3/2}}$.

7.5.16. $\int_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\left(5-x^2\right)^{3/2}}$.

7.5.17. $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^4}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}dx$.

7.5.18. $\int_0^1 \frac{x^4dx}{\left(2-x^2\right)^{3/2}}$.

7.5.19. $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}dx$.

7.5.20. $\int_0^{\sqrt{2}} x^2\sqrt{2-x^2}dx$.

7.5.21. $\int_0^7 x^2\sqrt{49-x^2}dx$.

7.5.22. $\int_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\left(64-x^2\right)^{3/2}}$.

7.5.23. $\int_0^{2/\sqrt{2}} \frac{x^4dx}{\left(16-x^2\right)\sqrt{16-x^2}}$.

7.5.24. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

7.5.25. $\int_0^2 \frac{x^4}{\sqrt{\left(8-x^2\right)^3}}dx$.

7.5.26. $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx$.

7.5.27. $\int_0^{3/2} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx$.

7.5.28. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$.

7.5.29. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

7.5.30. $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4dx}{\left(4-x^2\right)^{3/2}}$.

Завдання 6. Обчислити площі фігур, що обмежені вказаними лініями.

7.6.1. $x=\frac{1}{y\sqrt{1+\ln y}}, \quad y=e^3, \quad y=1, \quad x=0$.

7.6.2. $y=\dfrac{1}{x^2}e^{1/x}, \quad y=0, \quad x=1, \quad x=2$.

7.6.3. $y=x^2\sqrt{16-x^2}, \quad (0\le x\le 4), \quad y=0$.

7.6.4. $x=\sqrt{4-y^2}, \quad x=0, \quad y=0, \quad y=1$.

7.6.5. $y=x^2\cos x, \quad x=0, \quad y=0, \quad x=\pi/2$.

7.6.6. $x=4-(y-1)^2, \quad x=y^2-4y+3$.

7.6.7. $y=x\sqrt{9-x^2}, \quad (0\le x\le 3), \quad y=0$.

7.6.8. $y=\sin x\cos^2 x, \quad (0\le x\le \pi/2), \quad y=0$.

7.6.9. $y=x^2\sqrt{4-x^2}, \quad (0\le x\le 2), \quad y=0$.

7.6.10. $y=\sqrt{e^x-1}, \quad x=\ln 2, \quad y=0$.

7.6.11. $y=\arccos x, \quad x=0, \quad y=0$.

7.6.12. $y=2x-x^2+3, \quad y=x^2-4x+3$.

7.6.13. $x=\arccos y, \quad x=0, \quad y=0$.

7.6.14. $y=x^2\sqrt{8-x^2}, \quad \left(0\le x\le 2\sqrt{2}\right), \quad y=0$.

7.6.15. $y=x\sqrt{1-x^2}, \quad (0\le x\le 1), \quad y=0$.

7.6.16. $y=\dfrac{1}{1+\cos x}, \quad x=-\pi/2, \quad x=\pi/2, \quad y=0$.

7.6.17. $y=\sin 2x\cos^3 x, \quad (0\le x\le \pi/2), \quad y=0$.

7.6.18. $x=4-y^2, \quad x=y^2-2y$.

7.6.19. $y=4-x^2, \quad y=x^2-2x$.

7.6.20. $y=\sqrt{4-x^2}, \quad (0\le x\le 1), \quad y=0$.

7.6.21. $y=\sin x\cos^2 x, \quad (0\le x\le \pi/2), \quad y=0$.

7.6.22. $y=2x-x^2+3, \quad y=x^2-4x+3$.

7.6.23. $y=(x-2)^3, \quad y=4x-8$.

7.6.24. $y=(x+1)^2, \quad y^2=x+1$.

7.6.25. $y=x\sqrt{49-x^2}, \quad (0\le x\le 7), \quad y=0$.

7.6.26. $y = x\,\mathrm{arctg}\,x, \quad x = \sqrt{3}, \quad y = 0$.

7.6.27. $x = \sqrt{e^y - 1}, \quad x = 0, \quad y = \ln 2$.

7.6.28. $y = \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}, \quad x = 1, \quad y = 0$.

7.6.29. $x = (y-2)^3, \quad x = 4y - 8$.

7.6.30. $y = \dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}, \quad x = 1, \quad y = 0$.

Завдання 7. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями, заданими параметричними рівняннями.

7.7.1. $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$ $x = 2 \quad (x \ge 2)$

7.7.2. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$ $y = 6, \left(0 < x < 8\pi,\ y \ge 6\right)$

7.7.3. $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}$ $y = 4\sqrt{3} \quad \left(y \ge 4\sqrt{3}\right)$

7.7.4. $\begin{cases} x = 32\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$ $x = 12\sqrt{3} \quad \left(x \ge 12\sqrt{3}\right)$

7.7.5. $\begin{cases} x = 8(t - \sin t) \\ y = 8(1 - \cos t) \end{cases}$ $y = 12, \left(0 < x < 16\pi,\ y \ge 4\right)$

7.7.6. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t \\ y = 5\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ $y = 5 \quad (y \ge 5)$

7.7.7. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ $y = 2, \left(0 < x < 4\pi,\ y \ge 2\right)$

7.7.8. $\begin{cases} x = 9\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$ $y = 2 \quad (y \ge 2)$

7.7.9. $\begin{cases} x = 24\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$ $x = 9\sqrt{3} \quad \left(x \ge 9\sqrt{3}\right)$

7.7.10. $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $y = 1, \left(0 < x < 2\pi,\ y \ge 1\right)$

7.7.11. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}$ $x = 1 \quad (x \ge 1)$

7.7.12. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 4\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ $y = 4 \quad (y \ge 4)$

7.7.13. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$
$x = 1 \quad (x \geq 1)$

7.7.14. $\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$
$y = 2\sqrt{3} \quad \left(y \geq 2\sqrt{3}\right)$

7.7.15. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}$
$y = 6, (0 < x < 12\pi,\ y \geq 6)$

7.7.16. $\begin{cases} x = 32\cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$
$x = 4 \quad (x \geq 4)$

7.7.17. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t \\ y = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$
$y = 3 \quad (y \geq 3)$

7.7.18. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$
$y = 3, (0 < x < 6\pi,\ y \geq 3)$

7.7.19. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$
$x = 6\sqrt{3} \quad \left(x \geq 6\sqrt{3}\right)$

7.7.20. $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 6\sin t \end{cases}$
$y = 3 \quad (y \geq 3)$

7.7.21. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$
$y = 4, (0 < x < 8\pi,\ y \geq 4)$

7.7.22. $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$
$x = 2 \quad (x \geq 2)$

7.7.23. $\begin{cases} x = 10(t - \sin t) \\ y = 10(1 - \cos t) \end{cases}$
$y = 15, (0 < x < 20\pi,\ y \geq 15)$

7.7.24. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$
$x = 3\sqrt{3} \quad \left(x \geq 3\sqrt{3}\right)$

7.7.25. $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}$
$y = 4 \quad (y \geq 4)$

7.7.26. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}$
$y = 9, (0 < x < 12\pi,\ y \geq 9)$

7.7.27. $\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$
$x = 4 \quad (x \geq 4)$

7.7.28. $\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$
$y = \sqrt{3} \quad \left(y \geq \sqrt{3}\right)$

7.7.29. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$
$y = 3, (0 < x < 4\pi,\ y \geq 3)$

7.7.30. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$
$x = 2 \quad (x \geq 2)$

Завдання 8. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями, заданими рівняннями в полярних координатах.

7.8.1. $\rho = \sin 3\varphi$.

7.8.2. $\rho = \cos 3\varphi$.

7.8.3. $\rho = \cos 2\varphi$.

7.8.4. $\rho = 4\sin 3\varphi,\ \rho = 2,\ (\rho \geq 2)$.

7.8.5. $\rho = \sin\varphi,\ \rho = \sqrt{2}\cos(\varphi - \pi/4);\ \left(0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}\pi\right)$.

7.8.6. $\rho = \frac{1}{2} + \sin\varphi$.

7.8.7. $\rho = \sqrt{2}\cos(\varphi - \pi/4),\ \rho = \sqrt{2}\sin(\varphi - \pi/4),\ \left(\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3}{4}\pi\right)$.

7.8.8. $\rho = \frac{1}{2} + \cos\varphi$.

7.8.9. $\rho = \sin\varphi,\ \rho = 2\sin\varphi$.

7.8.10. $\rho = \frac{5}{2}\sin\varphi,\ \rho = \frac{3}{2}\sin\varphi$.

7.8.11. $\rho = 2\cos 4\varphi$.

7.8.12. $\rho = \cos\varphi,\ \rho = 3\cos\varphi$.

7.8.13. $\rho = 4\sin 4\varphi$.

7.8.14. $\rho = \cos\varphi - \sin\varphi$.

7.8.15. $\rho = 4\sin\varphi,\ \rho = 2\sin\varphi$.

7.8.16. $\rho = 12\sin\varphi,\ \rho = 25\sin\varphi$.

7.8.17. $\rho = 3\cos 6\varphi$.

7.8.18. $\rho = \cos\varphi + \sin\varphi$.

7.8.19. $\rho = \frac{5}{2}\cos\varphi,\ \rho = \frac{3}{2}\cos\varphi$.

7.8.20. $\rho = 2\sin 6\varphi$.

7.8.21. $\rho = 1 + \sqrt{3}\cos\varphi$.

7.8.22. $\rho = 1 + \sqrt{2}\sin\varphi$.

7.8.23. $\rho = 2\cos\varphi,\ \rho = 5\cos\varphi$.

7.8.24. $\rho = \sin\varphi,\ \rho = \cos\varphi,\ \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

7.8.25. $\rho = 6\cos 3\varphi,\ \rho = 3,\ (\rho \geq 3)$.

7.8.26. $\rho = \cos\varphi,\ \rho = \sqrt{2}\cos(\varphi - \pi/4),\ \left(-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

7.8.27. $\rho = 2\cos 3\varphi,\ \rho = 1,\ (\rho \geq 1)$.

7.8.28. $\rho = 6\sin 3\varphi,\ \rho = 3,\ (\rho \geq 3)$.

7.8.29. $\rho=2\sqrt{3}\sin\varphi,\ \rho=2\cos\varphi,$ $\left(0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\right).$

7.8.30. $\rho=\sqrt{3}\cos\varphi,\ \rho=\sin\varphi,$ $\left(0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\right).$

Завдання 9. Обчислити довжини дуг кривих, заданих рівняннями в прямокутних декартових координатах.

7.9.1. $y=\ln\dfrac{5}{2x},\quad \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$.

7.9.2. $y=e^x+6,\quad \ln\sqrt{8}\le x\le\ln\sqrt{15}$.

7.9.3. $y=1-\ln\cos x,\quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{6}$.

7.9.4. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x,\quad 0\le x\le\dfrac{7}{9}$.

7.9.5. $y=\ln\left(x^2-1\right),\quad 2\le x\le 3$.

7.9.6. $y=-\ln\cos x,\quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{6}$.

7.9.7. $y=\arcsin x-\sqrt{1-x^2},$ $0\le x\le\dfrac{15}{16}.$

7.9.8. $y=2+\operatorname{ch}x,\quad 0\le x\le 1$.

7.9.9. $y=\ln\left(1-x^2\right),\quad 0\le x\le\dfrac{1}{4}$.

7.9.10. $y=2+\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2},$ $\dfrac{1}{4}\le x\le 1.$

7.9.11. $y=1-\ln\left(x^2-1\right),\quad 3\le x\le 4$.

7.9.12. $y=\left(1-e^x-e^{-x}\right)/2,\quad 0\le x\le 3$.

7.9.13. $y=4+\arccos\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2},$ $0\le x\le\dfrac{1}{2}.$

7.9.14. $y=e^x+e,\quad \ln\sqrt{3}\le x\le\ln\sqrt{15}$.

7.9.15. $y=\ln\dfrac{7}{4}-\ln x,\quad \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$.

7.9.16. $y=2+\ln\cos x,\quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{6}$.

7.9.17. $y=\left(e^{2x}+e^{-2x}+3\right)/4,$ $0\le x\le 2.$

7.9.18. $y=3+\operatorname{ch}x,\quad 0\le x\le 1$.

7.9.19. $y=1+\arcsin x-\sqrt{1-x^2},$ $0\le x\le\dfrac{3}{4}.$

7.9.20. $y=e^x+7,\quad \ln\sqrt{8}\le x\le\ln\sqrt{24}$.

7.9.21. $y=\ln\sin x,\quad \dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$.

7.9.22. $y=-\arccos x+\sqrt{1-x^2}+2,$ $0\le x\le\dfrac{9}{16}.$

7.9.23. $y=-\arccos\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}+5,$ $\frac{1}{9}\le x\le 1.$ **7.9.24.** $y=1-\ln\sin x,\quad \frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

7.9.25. $y=e^x-2,\quad \ln\sqrt{3}\le x\le\ln\sqrt{8}$. **7.9.26.** $y=\ln x,\quad \sqrt{3}\le x\le\sqrt{15}$.

7.9.27. $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2},\quad 1\le x\le 2$. **7.9.28.** $y=6-e^x,\quad \ln\sqrt{8}\le x\le\ln\sqrt{15}$.

7.9.29. $y=3+\left(e^x+e^{-x}\right)/2,\quad 0\le x\le 2$. **7.9.30.** $y=1-\ln\cos x,\quad 0\le x\le\frac{\pi}{6}$.

Завдання 10. Обчислити довжини дуг кривих, заданих рівняннями в полярних координатах.

7.10.1. $\rho=2(1-\sin\varphi),\quad -\frac{\pi}{4}\le\varphi\le 0$. **7.10.2.** $\rho=3(1+\sin\varphi),\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

7.10.3. $\rho=4(1-\cos\varphi),\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le-\frac{\pi}{4}$. **7.10.4.** $\rho=12e^{12\varphi/5},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$.

7.10.5. $\rho=4e^{4\varphi/3},\quad \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. **7.10.6.** $\rho=3(1-\cos\varphi),\quad -\frac{\pi}{4}\le\varphi\le 0$.

7.10.7. $\rho=21(1+\sin\varphi),\quad -\frac{\pi}{3}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$. **7.10.8.** $\rho=1-\sin\varphi,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

7.10.9. $\rho=7e^{7\varphi/12},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$. **7.10.10.** $\rho=\sqrt{3}e^{2\varphi},\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le-\frac{\pi}{4}$.

7.10.11. $\rho=\sqrt{2}e^{\varphi},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. **7.10.12.** $\rho=6e^{12\varphi/5},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$.

7.10.13. $\rho=8(1-\cos\varphi),\quad -\frac{2\pi}{3}\le\varphi\le 0$. **7.10.14.** $\rho=3\cos\varphi,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{6}$.

7.10.15. $\rho=6\sin\varphi,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. **7.10.16.** $\rho=11\varphi,\quad 0\le\varphi\le\frac{8}{7}$.

7.10.17. $\rho=3e^{3\varphi},\quad -\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$. **7.10.18.** $\rho=7e^{7\varphi/3},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$.

7.10.19. $\rho=2\sin\varphi,\quad 0\le\varphi\le\frac{2\pi}{3}$. **7.10.20.** $\rho=3\varphi,\quad 0\le\varphi\le\frac{4}{7}$.

7.10.21. $\rho=5(1-\cos\varphi),\quad -\frac{\pi}{3}\le\varphi\le 0$. **7.10.22.** $\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

7.10.23. $\rho=a\varphi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi$. **7.10.24.** $\rho=a(1+\cos\varphi),\quad 0\le\varphi\le 2\pi$.

7.10.25. $\rho=\dfrac{1}{\varphi},\quad \dfrac{1}{2}\le\varphi\le 2$.

7.10.26. $\rho=a\sec^2\dfrac{\varphi}{2},\quad 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$.

7.10.27. $\rho=4\varphi,\quad 0\le\varphi\le\dfrac{3}{4}$.

7.10.28. $\rho=6\cos\varphi,\quad 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$.

7.10.29. $\rho=\sqrt{3}e^{2\varphi},\quad -\dfrac{\pi}{3}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}$.

7.10.30. $\rho=2e^{4\varphi/3},\quad -\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$.

Завдання 11. Обчислити довжини дуг кривих, що задані параметрично.

7.11.1. $\begin{cases} x=5(t-\sin t), \\ y=5(1-\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le\pi.$

7.11.2. $\begin{cases} x=4(\cos t+t\sin t), \\ y=4(\sin t-t\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi.$

7.11.3. $\begin{cases} x=3(2\cos t-\cos 2t), \\ y=3(2\sin t-\sin 2t), \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi.$

7.11.4. $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases}$ $0\le t\le\pi.$

7.11.5. $\begin{cases} x=10\cos^3 t, \\ y=10\sin^3 t, \end{cases}$ $0\le t\le\pi/2.$

7.11.6. $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t), \\ y=e^t(\cos t-\sin t), \end{cases}$ $0\le t\le\pi.$

7.11.7. $\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t), \end{cases}$ $\pi\le t\le 2\pi.$

7.11.8. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\cos t-\dfrac{1}{4}\cos 2t, \\ y=\dfrac{1}{2}\sin t-\dfrac{1}{4}\sin 2t, \end{cases}$ $\pi/2\le t\le 2\pi/3.$

7.11.9. $\begin{cases} x=3(\cos t+t\sin t), \\ y=3(\sin t-t\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le\pi/3.$

7.11.10. $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases}$ $0\le t\le\pi/3.$

7.11.11. $\begin{cases} x=6\cos^3 t, \\ y=6\sin^3 t, \end{cases}$ $0\le t\le\pi/3.$

7.11.12. $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t), \\ y=e^t(\cos t-\sin t), \end{cases}$ $\pi/2\le t\le\pi.$

7.11.13. $\begin{cases} x=2{,}5(t-\sin t), \\ y=2{,}5(1-\cos t), \end{cases}$ $\pi/2\le t\le\pi.$

7.11.14. $\begin{cases} x=3{,}5(2\cos t-\cos 2t), \\ y=3{,}5(2\sin t-\sin 2t), \end{cases}$ $0\le t\le\pi/2.$

7.11.15. $\begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t), \\ y = 6(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi.$

7.11.16. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2.$

7.11.17. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/6.$

7.11.18. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi.$

7.11.19. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$ $\pi/2 \le t \le 2\pi/3.$

7.11.20. $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi.$

7.11.21. $\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t), \\ y = 8(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/4.$

7.11.22. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi.$

7.11.23. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$ $\pi/6 \le t \le \pi/4.$

7.11.24. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $0 \le t \le 3\pi/2.$

7.11.25. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2.$

7.11.26. $\begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi.$

7.11.27. $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t), \\ y = 2(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2.$

7.11.28. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 3\pi.$

7.11.29. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/4.$

7.11.30. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $\pi/6 \le t \le \pi/4.$

Завдання 12. Обчислити об'єми тіл, що обмежені поверхнями.

7.12.1. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{64} = 1,\ z = 0,\ z = 4.$

7.12.2. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1,\ z = 0, z = 2.$

7.12.3. $\frac{x^2}{27} + y^2 = 1, z = \frac{y}{\sqrt{3}}, z = 0, (y \ge 0).$

7.12.4. $z = x^2 + 9y^2, \quad z = 6.$

7.12.5. $z = x^2 + 3y^2, \quad z = 1$.

7.12.6. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{196} = 1,\ z = 0,\ z = 6$.

7.12.7. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1, z = 0, z = 3$.

7.12.8. $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1,\ z = y, z = 0, (y \geq 0)$.

7.12.9. $z = x^2 + 3y^2, z = 1$.

7.12.10. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1,\ z = 0,\ z = 3$.

7.12.11. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{100} = -1, \quad z = 20$.

7.12.12. $z = x^2 + 9y^2, \quad z = 4$.

7.12.13. $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{25} = 1, z = \frac{y}{\sqrt{3}}, z = 0, (y \geq 0)$.

7.12.14. $x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 3$.

7.12.15. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1, z = -2, z = 3$.

7.12.16. $z = 7x^2 + 4y^2, \quad z = 3$.

7.12.17. $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} - z^2 = 1, z = 0, z = 7$.

7.12.18. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1, z = 2, z = 0$.

7.12.19. $z = 9x^2 + y^2, \quad z = 3$.

7.12.20. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{64} = -1, \quad z = 16$.

7.12.21. $z = x^2 + 9y^2, \quad z = 4$.

7.12.22. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} - z^2 = 1, z = 2, z = -1$.

7.12.23. $x^2 + y^2 = 4, z = y, z = 0, (y \geq 0)$.

7.12.24. $\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1, \quad z = 3, \quad z = -1$.

7.12.25. $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1, \quad z = 3, \quad z = 0$.

7.12.26. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = -1, \quad z = 7$.

7.12.27. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{16} = 1, z = y\sqrt{3}, z = 0, (y \geq 0)$.

7.12.28. $z = 2x^2 + 7y^2, \quad z = 7$.

7.12.29. $x = 2y^2 + 18z^2, \quad x = 3$.

7.12.30. $y = x^2 + 9z^2, \quad y = 2$.

Завдання 13. Обчислити об'єм тіла, що утворюється обертанням фігури D навколо вказаної осі координат.

7.13.1. ***D*:** $y = 4 - x,\ x = 0,\ Oy$.

7.13.2. ***D*:** $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2},\ x = 0,\ y = 0,\ Ox$.

7.13.3. ***D*:** $x^2/9 + y^2/4 = 1,\ Oy$.

7.13.4. ***D*:** $y^3 = x^2,\ y = 1,\ Ox$.

7.13.5. ***D*****:** $x=6(t-\sin t),\ y=6(1-\cos t),\ Ox$.

7.13.6. ***D*****:** $x=3\cos^2 t,\ y=4\sin^2 t,\ (0\le t\le \pi/2),\ Oy$.

7.13.7. ***D*****:** $y^2=x,\ x^2=y,\ Ox$.

7.13.8. ***D*****:** $y^2=(x-1)^3,\ x=2,\ Ox$.

7.13.9. ***D*****:** $x=\sqrt{1-y^2},\ y=\sqrt{\frac{2}{3}x},\ y=0,\ y=0,\ Ox$.

7.13.10. ***D*****:** $y=\sin x,\ y=0,\ (0\le x\le \pi),\ Ox$.

7.13.11. ***D*****:** $y^2=4x,\ x^2=4y,\ Ox$.

7.13.12. ***D*****:** $x=2\cos t,\ y=5\sin t,\ Oy$.

7.13.13. ***D*****:** $y=x^2,\ 8x=y^2,\ Oy$.

7.13.14. ***D*****:** $y=e^x,\ x=0,\ y=0,\ x=1,\ Ox$.

7.13.15. ***D*****:** $y^2=4x/3,\ x=3,\ Ox$.

7.13.16. ***D*****:** $y=2x-x^2,\ y=0,\ Ox$.

7.13.17. ***D*****:** $\rho=2(1+\cos\varphi)$**,** полярна вісь.

7.13.18. ***D*****:** $x=7\,cos^3 t,\ y=7\,sin^3 t,\ Oy$.

7.13.19. ***D*****:** $x^2/16+y^2/1=1,\ Ox$.

7.13.20. ***D*****:** $(y-1)^2=x^3,\ x=0,\ y=0,\ Ox$.

7.13.21. ***D*****:** $xy=4,\ 2x+y-6=0,\ Ox$.

7.13.22. ***D*****:** $x=\sqrt{3}\cos t,\ y=2\sin t,\ Oy$.

7.13.23. ***D*****:** $y=2-x^2,\ x^2=y,\ Ox$.

7.13.24. ***D*****:** $y=-x^2+8,\ y=x^2,\ Ox$.

7.13.25. ***D*****:** $y^2=(x+4)^3,\ x=0,\ Ox$.

7.13.26. ***D*****:** $y=x^3,\ x=0,\ y=8,\ Oy$.

7.13.27. ***D*****:** $x=cos^3 t,\ y=sin^3 t,\ Ox$.

7.13.28. ***D*****:** $2y=x^2\ \ 2x+2y-3=0,\ Ox$.

7.13.29. ***D*****:** $y=x-x^2,\ y=0,\ Ox$.

7.13.30. ***D*****:** $y=2-x^2/2+8,\ y+x=2,\ Oy$.

Завдання 14. Обчислити площу поверхні, що утворюється обертанням дуги кривої L навколо вказаної осі.

7.14.1. L: $y = x^3/3$ $(-1/2 \le x \le 1/2)$, Ox.
7.14.2. L: $\rho = 2\cos\varphi$, полярна вісь.
7.14.3. L: $x = 10(t - \sin t)$, $y = 10(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$, Ox.
7.14.4. L: $y = x^2/2$, відтята прямою $y = 3/2$, Oy.
7.14.5. L: $3y = x^2$ $(0 \le x \le 2)$, Ox.
7.14.6. L: $y = \sqrt{x}$, відтята прямою $y = x$, Ox.
7.14.7. L: $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$, Ox.
7.14.8. L: $x = \cos t$, $y = 3 + \sin t$, Ox.
7.14.9. L: $3x = y^3$ $(0 \le y \le 2)$, Oy.
7.14.10. L: $y = x^3/3$ $(-1 \le x \le 1)$, Ox.
7.14.11. L: $x = \cos t$, $y = 1 + \sin t$, Ox.
7.14.12. L: $x^2 = 4 + y$, відтята прямою $y = 2$, Oy.
7.14.13. L: $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$, Ox.
7.14.14. L: $x = \cos^3 t$, $y = \sin t^3$, Ox.
7.14.15. L: $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$, полярна вісь.
7.14.16. L: $y^2 = 4 + x$, відтята прямою $x = 2$, Ox.
7.14.17. L: $y^2 = 2x$, відтята прямою $2x = 3$, Ox.
7.14.18. L: $3y = x^3$ $(0 \le x \le 1)$, Ox.
7.14.19. L: $\rho^2 = 4\cos 2\varphi$, полярна вісь.
7.14.20. L: $\rho = 6\sin\varphi$, полярна вісь.
7.14.21. L: $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $(0 \le t \le 2\pi)$, Ox.
7.14.22. L: $\rho = 2\sin\varphi$, полярна вісь.
7.14.23. L: $\rho = \frac{2}{3}\cos\varphi$, полярна вісь.
7.14.24. L: $x = 3\cos^3 t$, $y = 3\sin t^3$, Ox.
7.14.25. L: $x = 2\cos t$, $y = 3 + 2\sin t$, Ox.
7.14.26. L: $\rho^2 = 9\cos 2\varphi$, полярна вісь.

7.14.27. L: $y = x^3$ між прямими $x = \pm 2/3$, Ox

7.14.28. L: $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin t^3,\ Ox$.

7.14.29. L: $x = \cos t,\ y = 2 + \sin t,\ Ox$.

7.14.30. L: $\rho = 4\sin\varphi$, полярна вісь.

Завдання 15

7.15.1. Обчислити кінетичну енергію однорідного диска маси M і радіуса R, що обертається з кутовою швидкістю ω навколо осі, що проходить через його центр перпендикулярно до його площини.

7.15.2. Прямокутна пластинка вертикально занурена в судину з рідиною. Один з її боків довжиною a=0.3 м лежить на поверхні рідини, довжина вертикальних сторін b=0.5 м. На якій глибині треба розділити прямокутник горизонтальною прямою, щоб сили тиску на верхню та нижню частини площі виявились рівними між собою?

7.15.3. Судина, що має форму півкулі радіуса a, наповнена водою. За який час T витече вся вода через отвір S у дні судини (a=0.49 м S=0.000092м^2)? (Швидкість витікання рідини $v = \mu\sqrt{2gh}$, де h – висота стовпа рідини над отвором; g – прискорення сили ваги, для води μ=0,6).

7.15.4. Яку роботу треба витратити, щоб насипати піщану купу конічної форми з радіусом основи R=1.2 м і висотою H=1 м? (Питому вагу піску, що береться з поверхні землі, прийняти γ=2 г/см^3).

7.15.5. Прямокутні двері шлюзу мають довжину a=0.8 м, ширину d=0.3 м і утворюють кут θ=60° з горизонтальною площиною. Верхній край дверей на l=0.4 м по вертикалі нижче поверхні води. Обчислити силу тиску води на двері. (Питома вага води γ =1 т/м^3).

7.15.6. Обчислити роботу, яку потрібно витратити на викачування води з казана, що має форму півкулі радіуса R. (Питома вага води γ=1).

7.15.7. Обчислити силу тиску ртуті, що наповнює склянку з діаметром основи 0.06 м і висотою 0.1 м, на стінки склянки, вважаючи питому вагу ртуті рівною γ=13,6 т/м^3.

7.15.8. Два електричних заряди $q_1 = \frac{1}{3}10^{-7}K$ і $q_2 = \frac{2}{3}10^{-7}K$ знаходяться на відстані 10 см один від одного. Середовищем, що їх поділяє, є парафін. Спочатку обидва заряди закріплені нерухомо. Потім заряд q_2 звільняється і під дією сили відштовхування віддаляється від заряду q_1 на відстань 1 м. Яка робота буде при цьому здійснена силою відштовхування? (ε – діелектрична проникність щодо вакууму, для парафіну: $\varepsilon_{параф}=2$; ε_0 – електрична стала: $4\pi\varepsilon_0=1,11*10^{-10}$ ф/м).

7.15.9. Куля лежить на дні басейну глибиною H=1.4 м. Визначити роботу, необхідну для витягування кулі з води, якщо її радіус R=0.3 м, а питома вага матеріалу кулі γ=2т/м^3. (Питома вага води дорівнює 1т/м^3).

7.15.10. Квадратна пластинка занурена вертикально у воду так, що одна з її вершин лежить на поверхні води, а одна з діагоналей паралельна поверхні. Сторона квадрата дорівнює a. З якою силою вода тисне на кожний бік пластинки? (Питома вага води γ =1).

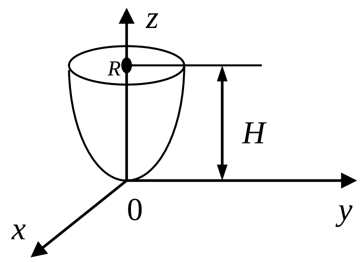
7.15.11. Квадрат зі стороною 8 м вертикально занурений у воду так, що одна з його сторін лежить на поверхні води. Визначити тиск води на квадрат і на кожну з частин, на які він поділяється діагоналлю. (Питома вага води γ =1т/м^3).

7.15.12. Круглий циліндр, радіус основи якого дорівнює R, а висота H, обертається навколо своєї осі з постійною кутовою швидкістю ω. Щільність матеріалу, з якого зроблено циліндр, дорівнює δ. Знайти кінетичну енергію циліндра.

7.15.13. Обчислити силу тиску рідини на бічні стінки кругового циліндра, висота якого дорівнює h, а радіус основи r. Питома вага рідини дорівнює γ, і рідина повністю заповнює циліндр.

7.15.14. Обчислити роботу на подолання сили тяжіння, яку необхідно затратити, щоб викачати воду з резервуара, що має форму конуса, оберненого вершиною вниз. Висота конуса H, радіус основи R. (Питома вага води γ =1).

7.15.15. Казан параболічної форми наповнено водою. Радіус основи R. Висота H. Яку роботу необхідно витратити, щоб викачати воду з цього казана? (Питома вага води γ =1).



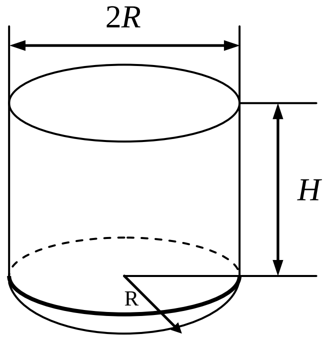
7.15.16. Знайти кінетичну енергію однорідної трикутної пластинки (висота h, основа a, товщина Δ), що обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо своєї основи (δ – щільність матеріалу пластини).

7.15.17. Яку роботу потрібно витратити, щоб наповнити водою цистерну з горизонтальною віссю, якщо радіус основи цистерни R, а довжина її H? (Питома вага води γ =1).

7.15.18. Знайти силу взаємодії однорідного стержня довжини l, маси M із точкою m.

7.15.19. Знайти силу тиску на один бік квадратної пластинки, що занурена в рідину вертикально вниз так, що одна з її вершин знаходиться на поверхні води, а одна з діагоналей паралельна поверхні води (сторона пластинки a). (Питома вага рідини γ).

7.15.20. Яку роботу потрібно витратити, щоб викачати рідину з судини, обмеженої циліндричною і напівсферичною поверхнями? (Питома вага рідини γ).



7.15.21. Гребля має форму рівнобічної трапеції, основи якої мають довжину відповідно a= 200 м і b=50 м, а висота дорівнює h=10 *м*. Обчислити тиск на греблю, якщо верхня основа лежить на рівні вільної поверхні води. (Питома вага води γ =1т/м^3).

7.15.22. Яку роботу треба витратити, щоб насипати купу піску конічної форми з радіусом r і висотою h, якщо питома вага піску γ=2?

2.15.23. Яку роботу треба витратити, щоб зупинити залізну кулю радіуса R, що обертається з кутовою швидкістю ω навколо свого діаметра, якщо питома вага заліза γ?

2.15.24. Куля радіусу r занурена у воду. Яку роботу необхідно витратити, щоб витягти кулю з води, якщо питома вага матеріалу кулі дорівнює γ, а питома вага води дорівнює 1?

2.15.25. Встановити, з якою силою однорідне дротове кільце маси M притягає матеріальну точку m, розташовану на відстані b від центра кільця. Радіус кільця дорівнює a.

2.15.26. Знайти силу тиску на півкруг радіуса r, занурений вертикально у воду так, що його діаметр лежить на поверхні води. (Питома вага води γ=1).

7.15.27. Обчислити кінетичну енергію прямого круглого однорідного конуса маси M, що обертається з кутовою швидкістю ω навколо своєї осі, якщо радіус основи конуса R, а висота H.

7.15.28. Обчислити силу тиску рідини на вертикальну стінку у формі еліпса з осями $2a$ і $2b$, центр якого занурено у рідину на рівень h. ($h \geq b$, питома вага рідини γ).

7.15.29. Знайти силу тиску води на греблю, що має форму параболічного сегмента ($2a$, h).(Питома вага води γ=1).

7.15.30. Обчислити роботу з подолання сили ваги, яку необхідно витратити, щоб викачати воду з резервуара, що має форму конуса, оберненого вершиною догори. Висота конуса H, радіус основи R. (Питома вага води γ =1).

Завдання 16.

Усі матеріальні тіла в задачах даного розділу вважати однорідними.

7.16.1. Знайти момент інерції відносно осі Oy дуги кола $x^2 + y^2 = a^2$, що лежить у I-му октанті.

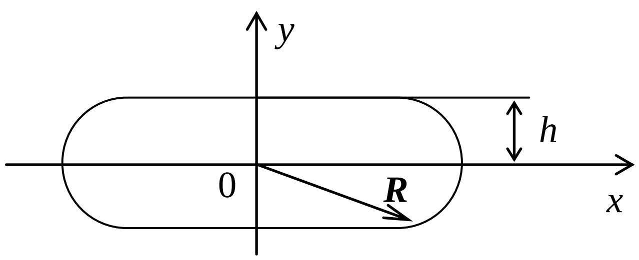
7.16.2. Знайти координати центра ваги дуги кардіоїди $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ від $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$.

7.16.3. Знайти центр ваги дуги першої арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

7.16.4. Знайти статичний момент відносно осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$.

7.16.5. Знайти момент інерції трапеції $ABCD$ відносно її основи AD, якщо $AD=a$, $BC=b$, а висота трапеції дорівнює h.

7.16.6. При розрахунку балкових дерев'яних мостів часто доводиться мати справу з круглими колодами, обтесаними на два канти. Визначити момент інерції подібного перетину щодо горизонтальної лінії.



7.16.7. Знайти координати центра ваги однорідної фігури, що обмежена параболами $x^2 = 20y, \quad y^2 = 20x$.

7.16.8. Знайти координати центра ваги однорідної пластини, що обмежена лініями $y = \cos x, \quad y = x^2 - \frac{\pi^2}{4}$.

7.16.9. Знайти координати центра ваги плоскої фігури, що обмежена кривою $ay^2 = x^3$ і прямою $x = a \quad (a > 0)$.

7.16.10. Обчислити момент інерції кола радіуса R відносно осі, що знаходиться з нею в одній площині і віддалена від її центра на відстань b ($b>R$).

7.16.11. Знайти момент інерції однорідної параболічної пластини висоти h щодо основи a, якщо пластина обертається зі сталою кутовою швидкістю ω навколо осі.

7.16.12. Знайти центр ваги плоскої фігури, що лежить у першому квадранті та обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, колом $x^2 + y^2 = a^2$ і віссю Oy.

7.16.13. Обчислити момент інерції сектора радіуса r, що відповідає центральному куту α, відносно одного з крайніх його радіусів.

7.16.14. Знайти центр ваги пластини, що має форму сегмента (R,h).

7.16.15. Знайти момент інерції тіла, обмеженого даними поверхнями, при обертанні навколо осі Oz.

$$x^2 + y^2 = 2z, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0.$$

7.16.16. Знайти координати центра ваги півкола радіуса r.

7.16.17. Знайти момент інерції кулі (радіуса a і маси M) відносно її діаметра.

7.16.18. Знайти центр ваги півкола, користуючись теоремою Гульдіна.

7.16.19. Знайти статичний момент кола $r = 2a\,sin\,\varphi$ відносно полярної осі.

7.16.20. Знайти момент інерції еліпса $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ відносно однієї з його осей.

7.16.21. Визначити положення центра ваги дуги астроїди $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, що лежить в першій чверті.

7.16.22. Знайти центр ваги однорідної півкулі радіуса R.

7.16.23. Знайти координати центра ваги однорідної фігури, обмеженої замкненою лінією $y^2 = x^2 - x^4$, $x \geq 0$.

7.16.24. Обчислити момент інерції півкола радіуса R відносно його діаметра.

7.16.25. Знайти момент інерції кругового конуса з радіусом основи R і висотою H відносно площини основи цього конуса.

7.16.26. Знайти координати центра ваги фігури, обмеженої осями координат і параболою $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

7.16.27. Знайти центр ваги чверті кола $x^2 + y^2 = R^2$, що розташоване в першому квадранті.

7.16.28. Знайти момент інерції квадрата зі стороною a відносно його вершини.

7.16.29. Знайти координати центра ваги однорідної пластини, обмеженої параболою $ay = z^2$ і прямою $y = a \quad (a > 0)$.

7.16.30. Знайти координати центра ваги плоскої однорідної пластини, що обмежена колом $x^2 + y^2 = R^2$ і двома радіусами $y = 0$ і $y = x\,\mathrm{tg}\alpha$.

Глава 8. Невласні інтеграли, питання їх збіжності

Дотепер при розгляді визначених інтегралів передбачалося, що проміжок інтегрування скінченний і підінтегральна функція обмежена на цьому проміжку. Якщо ж ці умови не виконуються, то кажуть про невласні інтеграли, що є узагальненням визначеного інтеграла для цих випадків.

8.1. Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування (I роду) та їхнє обчислення

Нехай функція $f(x)$ визначена на нескінченному проміжку $[a,+\infty)$ і інтегрована в будь-якій скінченній його частині $[a, A]$ $(A \geq a)$. Тоді якщо існує $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$, то цю границю називають *невласним інтегралом I роду* або інтегралом на нескінченному проміжку $[a,+\infty)$ від функції $f(x)$ і позначають $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Таким чином,

$$\boxed{\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx}.$$

У випадку, якщо межа існує і скінченна, невласний інтеграл *збігається*. Якщо ж границя нескінченна або взагалі не існує, то невласний інтеграл не існує, або *розбігається*.

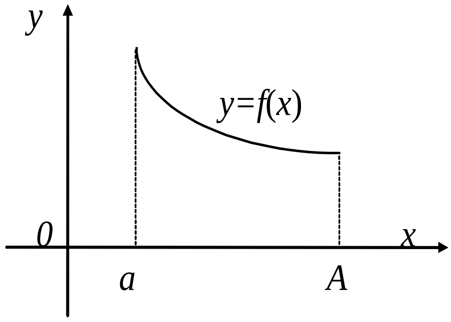
Аналогічно вводиться поняття інтеграла по нескінченному проміжку

$(-\infty, a]$, тобто $\int\limits_{-\infty}^a f(x)dx = \lim\limits_{B\to-\infty}\int\limits_B^a f(x)dx$.

Невласний інтеграл з обома нескінченними границями визначається рівністю $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^a f(x)dx + \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, *де* а – *будь-яке число. При цьому передбачається існування обох інтегралів, що стоять праворуч.*

Геометричний зміст невласного інтеграла

Якщо $f(x)\ge 0$ і неперервна $\forall x\in[a,A]$, то визначений інтеграл $\int\limits_a^A f(x)dx$ геометрично являє собою площу криволінійної трапеції, обмежену віссю Ox, кривою $y=f(x)$ і прямими $x=a$ і $x=A$. При зростанні A $(A\to+\infty)$ пряма $x=A$ переміщується вправо. Якщо невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, то його величину приймають за площу нескінченної криволінійної трапеції.



Приклад 1

$$\int\limits_0^{+\infty}\cos x dx=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^A\cos x dx=\lim_{A\to+\infty}\sin x\Big|_0^A=\lim_{A\to+\infty}(\sin A-\sin 0)=\lim_{A\to+\infty}\sin A.$$

Інтеграл розбігається, оскільки $\lim\limits_{A\to+\infty}\sin A$ не існує.

Приклад 2

Розглянемо $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ $(a>0)$. Дослідимо, при яких значеннях p інтеграл збігається.

Розв'язання

а) $p=1$. За визначенням знаходимо

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A\frac{dx}{x}=\lim_{A\to+\infty}\ln x\Big|_a^A=\lim_{A\to+\infty}(\ln A-\ln a)=+\infty,$$

інтеграл розбігається;

б) $p<1$;

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A x^{-p}dx=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_a^A\right)=\frac{1}{1-p}\lim_{A\to+\infty}\left(A^{1-p}-a^{1-p}\right)=+\infty,$$

інтеграл розбігається;

в) $p>1$.

При $p>1$ $\lim\limits_{A\to+\infty}A^{1-p}=0$ і тоді $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{a^{1-p}}{p-1}$, тобто збігається.

Отже, невласний інтеграл

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1,\quad \textit{çá³ãàºòüñÿ},\\ +\infty, & p\le 1,\quad \textit{ðîçá³ãàºòü ñÿ}.\end{cases}$$

Геометрично це означає, що при $p>1$ функція $\dfrac{1}{x^p}$ наближається до нуля при $x\to\infty$ настільки швидко, що площа нескінченної криволінійної трапеції виявляється скінченною.

Приклад 3

$$\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A}e^{-x}dx=-\lim_{A\to+\infty}e^{-x}\Big|_0^A=-\lim_{A\to+\infty}\left(e^{-A}-e^{0}\right)=1,\text{збігається.}$$

Узагальнена формула Ньютона-Лейбниця

Нехай $f(x)$ – неперервна на $[a,\infty)$ функція, а $F(x)$ – первісна для $f(x)$, тоді

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{A\to+\infty}\int_a^{A}f(x)dx=\lim_{A\to+\infty}F(x)\Big|_a^A=\lim_{A\to+\infty}\left(F(A)-F(a)\right)=$$
$$=F(\infty)-F(a)=F(x)\Big|_a^{\infty}.$$

Тут $F(\infty)=\lim\limits_{A\to\infty}F(A)$; скористуємося для стислості умовним записом

$$\int_a^{\infty}f(x)dx=F(x)\Big|_a^{\infty}=F(\infty)-F(a).$$

Приклад 4 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_1^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$

Для невласних інтегралів має місце формула *заміни змінної*. Часто в результаті заміни змінної інтегрування невласний інтеграл зводиться до визначеного.

Приклад 5

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}=\left|\begin{matrix}x=\operatorname{tg}z\\ dx=\dfrac{dz}{\cos^2 z}\end{matrix}\right|=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^4 z}{\cos^2 z}dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2z}{2}dz=\left(\frac{1}{2}z+\frac{\sin 2z}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

Приклад 6. $I = \int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \cdot dx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$.

Розв'язання Припускаючи $t = \operatorname{arctg} x$, знаходимо $\frac{dx}{1+x^2} = dt$, $x = \operatorname{tg} t$; $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cos t$. Межі інтегрування для змінної *t*: при *x*=0 маємо *t*=0; при $x \to \infty, t \to \frac{\pi}{2}$. Одержимо

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} t \cos t \, dt = \begin{Vmatrix} u = t & dv = \cos t dt \\ du = dt & v = \sin t \end{Vmatrix} = \left(t \sin t + \cos t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Невласні інтеграли, що збігаються, мають усі основні властивості визначених інтегралів. При розгляді невласного інтеграла насамперед необхідно з'ясувати, чи буде він збігатися. Питання про збіжність може бути вирішене або безпосереднім обчисленням невласного інтеграла, або за допомогою спеціальних ознак збіжності.

Приклад 7. Дослідити збіжність інтеграла

$$\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}} = \lim_{A \to \infty} \int\limits_e^{A} \frac{d \ln x}{(\ln x)^{3/2}} = \lim_{A \to \infty} \left. \frac{(\ln x)^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} \right|_e^A = -2 \lim_{A \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\ln A}} - \frac{1}{\sqrt{\ln e}} \right) = 2.$$

Випливає, інтеграл збігається.

У багатьох задачах, пов'язаних з невласними інтегралами, досить тільки з'ясувати питання про збіжність інтегралів, і не потрібно знаходити його значення. У цьому випадку, як правило, використовуються наступні ознаки збіжності.

Ознаки збіжності невласних інтегралів першого роду для невід'ємних функцій

<u>*Зауваження.*</u> Збіжність невласного інтегралу першого роду залежить від поводження функції на нескінченності, тобто якщо $b > a$, то невласні інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x) dx$ і $\int\limits_b^{+\infty} f(x) dx$ збігаються чи розбігаються одночасно.

Теорема 1. (Ознака порівняння).

Нехай при досить великих х виконується нерівність $0 \le f(x) \le g(x)$. *Тоді зі збіжності інтеграла* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *випливає збіжність інтеграла* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, *а з розбіжності інтеграла* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *випливає розбіжність інтеграла* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Приклад 8. У теорії імовірності важливу роль відіграє інтеграл Пуассона $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$. Дослідити його на збіжність.

Розв'язання

Невласний інтеграл не береться в елементарних функціях. Порівняємо цей інтеграл з інтегралом, що збігається: $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ (приклад 3). При $x \ge 1$ маємо $x^2 \ge x$, тоді $e^{-x^2} \le e^{-x}$. Отже, $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx \le \int_1^{+\infty} e^{-x}dx$.

Зі збіжності інтеграла $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Теорема 2. (Гранична форма ознаки порівняння).

Якщо існує $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \ (0 < \lambda < +\infty)$, *то невласні інтеграли* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *і* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *збігаються чи розбігаються одночасно.*

Приклад 9. Дослідити на збіжність $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Розв'язання

Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ при $x \to \infty$ є нескінченно малою величиною порядку $\frac{1}{x^2}$. Виберемо $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Оскільки інтеграл

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ $(p = 2 > 1)$ збігається, то за ознакою порівняння в граничній формі маємо $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1$. Отже, інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ збігається.

Невласні інтеграли від знакозмінних функцій

Теорема *(достатня ознака збіжності). Нехай функція* $f(x)$ *визначена* $\forall x \geq a$. *Тоді якщо* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *збігається, то збігається і інтеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$. Невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називається таким, що *умовно збігається,* якщо він збігається, а інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ розбігається.

Приклад 10. Покажемо, що інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$ збігається абсолютно. Дійсно, оскільки $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, а інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ $(p = 2 > 1)$ збігається, то через ознаку порівняння досліджуваний інтеграл абсолютно збігається.

Приклад 11. Дослідити збіжність інтеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$.

Розв'язання. Ознаку порівняння застосувати безпосередньо не можна. Для доказу збіжності інтеграла застосуємо метод інтегрування частинами:

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\begin{vmatrix} u=\frac{1}{x}; du=-\frac{1}{x^2} \\ \sin x dx=dv; v=-\cos x\end{vmatrix}=-\frac{1}{x}\cos x\Big|_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx=$$

$$=\cos 1-\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Застосовуючи тепер ознаку порівняння, одержимо

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|dx\le\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\ \ (p=2).$$

Інтеграл збігається.

Отже, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ збігається. Покажемо тепер, що інтеграл $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ розбігається, тобто досліджуваний інтеграл збігається умовно. Дійсно, оскільки число $|\alpha|<1$ більше свого квадрата, тобто $|\alpha|>\alpha^2$, то $\left|\frac{\sin x}{x}\right|\ge\frac{\sin^2 x}{x}$.

Застосовуючи ознаку порівняння, досить довести розбіжність інтеграла $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$. Але $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, а

$$\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x}dx=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx.$$

Збіжність інтеграла $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$ доводиться інтегруванням частинами, але інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ $(p=1)$ розбігається. Тому інтеграл $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ також розбігається.

Приклад 12. Обчислити інтеграл, встановивши його збіжність:

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^3}dx.$$

Розв'язання. x=0 – особлива точка, оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$. З'ясуємо поводження функції $f(x)=\dfrac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^3}$ при $x\to +0$:

$$\lim_{x\to +0}\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^3}=\|0\cdot\infty\|=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left|\text{çà ïðàâèëîì Ëîï³òàëÿ}\right|=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0.$$

Отже, при $x\to +0$ підінтегральна функція є обмеженою. Дослідимо поводження функції на нескінченності. Оскільки при $x\to\infty$ $\ln x<x$, то

$$\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^3}<\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3}<\frac{1}{x^4}.$$

Оскільки $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}$ збігається, то збігається і досліджуваний інтеграл.

Інтегруємо частинами. Нехай $u=\ln x$, тоді

$$du=\frac{dx}{x},\ dv=\frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^3},\ v=\frac{1}{2}\int\left(1+|\,x^2\right)^{-3}d\left(1+x^2\right)=-\frac{1}{4\left(1+x^2\right)^2}.$$

Знайдемо первісну:

$$F(x)=-\frac{\ln x}{4\left(1+x^2\right)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x\left(1+x^2\right)^2}=-\frac{\ln x}{4\left(1+x^2\right)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{\left(1+x^2\right)-x^2}{x\left(1+x^2\right)^2}dx=$$

$$=-\frac{\ln x}{4\left(1+x^2\right)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x\left(1+x^2\right)}-\frac{1}{4}\int\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=-\frac{\ln x}{4\left(1+x^2\right)^2}+$$

$$+\frac{1}{4}\int\frac{\left(1+x^2\right)-x^2dx}{x\left(1+x^2\right)}+\frac{1}{8\left(1+x^2\right)}=-\frac{\ln x}{4\left(1+x^2\right)^2}+\frac{1}{4}\ln x-\frac{1}{8}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{1}{8\left(1+x^2\right)}.$$

Знайдемо $\lim\limits_{x\to +0}F(x)=\lim\limits_{x\to +0}\left(-\dfrac{\ln x}{4\left(1+x^2\right)^2}+\dfrac{1}{4}\ln x-\dfrac{1}{8}\ln\left(1+x^2\right)+\dfrac{1}{8\left(1+x^2\right)}\right)=$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\lim_{x\to +0}\ln x\left(1-\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\right)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\lim_{x\to +0}\frac{x^2\left(2+x^2\right)\ln x}{\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{8}+$$

$$+\frac{2}{4}\lim_{x\to +0}x^2\ln x=\|0\cdot\infty\|=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{x^{-2}}=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\lim_{x\to +0}\frac{1}{x(-2)x^{-3}}=\frac{1}{8}.$$

$\lim\limits_{x\to +\infty}F(x)=0$. Отже, $I=\dfrac{1}{8}$.

Приклад 13. Дослідити збіжність невласного інтеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(2x+1)\ln^{3/2}(3x+7)}.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція є величиною того ж порядку малості, що й $\frac{1}{(3x+7)\ln^{3/2}(3x+7)}$, тому що $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(3x+7)\ln^{3/2}(3x+7)}{(2x+1)\ln^{3/2}(3x+7)} = \frac{3}{2}$, тобто $\frac{1}{(2x+1)\ln^{3/2}(3x+7)} = 0^{*}\left(\frac{1}{(3x+7)\ln^{3/2}(3x+7)}\right)$.

Розглянемо

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(3x+7)\ln^{3/2}(3x+7)} = \frac{1}{3}\int_1^{+\infty} \frac{d(\ln(3x+7))}{\ln^{3/2}(3x+7)} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\ln^{1/2}(3x+7)}\Bigg|_1^{\infty} = \frac{2}{3\sqrt{\ln 10}}.$$

Отже, інтеграл збігається. Звідси, завдяки граничній ознаці порівняння, випливає збіжність досліджуваного інтеграла.

Приклад 14. Дослідити збіжність інтеграла

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x^2}.$$

Розв'язання. Досліджуємо підінтегральну функцію $f(x)=\left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}$ в околі точки $x=0$. Оскільки

$$\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}=\frac{x}{2\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)}-\frac{1}{2}=\left\|\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\operatorname{sh}x\right\|=\frac{x}{2\operatorname{sh}x}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{x-\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}x}\right).$$

Розкладемо за формулою Маклорена $\operatorname{sh}x = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$

Тоді $x-\operatorname{sh}x \sim \frac{1}{6}x^3$, $\operatorname{sh}x \sim x$, $x\to 0$.

Таким чином,

$$\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}=\frac{x-\operatorname{sh}x}{2\operatorname{sh}x}=\left|\begin{matrix} x-\operatorname{sh}x=0\left(x^3\right) \\ \operatorname{sh}x\sim x\end{matrix}\right|=0\left(x^2\right).$$

Отже, в околі точки $x=0$ підінтегральна функція є обмеженою (при $x\to 0$ підінтегральна функція наближається до $-\frac{1}{12}$).

При $x\to\infty$ $\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)=0^*\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $(p=2>1)$. Отже, інтеграл збігається.

Приклад 15. Дослідити збіжність інтеграла

$$I=\int_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln\ln x}.$$

Розв'язання. Ми маємо невласний інтеграл I роду

$$\int_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln\ln x}=\int_{e^2}^{\infty}\frac{d\ln x}{\ln\ln x}=\left|\begin{matrix}\ln x=t\\ x=e^2,\ t=\ln e^2=2\\ x\to\infty,\ t\to\infty\end{matrix}\right|=\int_{2}^{\infty}\frac{dt}{\ln t}.$$

Оскільки $\ln t<t$ при $t\geq 2$, звідси випливає нерівність $\frac{1}{\ln t}>\frac{1}{t}$.

Досліджуваний інтеграл розбігається за ознакою порівняння, тому що $\int_2^{\infty}\frac{dt}{t}$ розбігається.

Приклад 16. При яких значеннях k збігаються інтеграли

$$I_1=\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^k\ln x}\qquad \text{і}\qquad I_2=\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}.$$

Розв'язання

Розглянемо інтеграл I_1.

а) Нехай $k<0$, тоді оскільки $\ln x<x$ при $x\to\infty$, то $\frac{1}{x^k\ln x}>\frac{1}{x^{k+1}}$.

Оскільки $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^{k+1}}$ розбігається при $k+1\leq 1$, тобто при $k\leq 0$, то і досліджуваний інтеграл за ознакою порівняння розбігається при $k\leq 0$.

б) Якщо $0<k\leq 1$, то при $x>1$, $x^k\leq x$, Отже, $\frac{1}{x^k\ln x}\geq\frac{1}{x\ln x}$.

Інтеграл же $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\int_2^{\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\infty$, тобто розбігається. Тому і досліджуваний інтеграл за ознакою порівняння також розбігається.

в) Нехай $k>1$. Порівняємо підінтегральну функцію з $\dfrac{1}{x^k}$:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^k\ln x}:\dfrac{1}{x^k}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^k}{x^k\ln x}=0$, тобто підінтегральна функція спадає швидше, ніж $\dfrac{1}{x^k}$, ($k>1$). Оскільки інтеграл $\int\limits_2^\infty\dfrac{dx}{x^k}$ збігається при $k>1$, звідси випливає збіжність інтеграла I_1 при $k>1$.

Остаточно маємо, що

$$I_1-\begin{cases}\text{çá³ãàºòüñÿ ïðè } k>1,\\ \text{ðî çá³ãàºòüñÿ ïðè } k\le 1.\end{cases}$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^\varepsilon}=0$ при будь-якому як завгодно малому $\varepsilon>0$, а інтеграл $\int\limits_2^\infty\dfrac{dx}{x^k}$ збігається при $k>1$, звідси випливає збіжність інтеграла (1) при $k>1$.

Дослідимо збіжність I_2.

За визначенням $\int\limits_2^\infty\dfrac{dx}{x(\ln x)^k}=\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_2^A\dfrac{dx}{x(\ln x)^k}=\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_2^A\dfrac{d\ln x}{x(\ln x)^k}=$

$$=\lim_{A\to\infty}\left.\frac{(\ln x)^{-k+1}}{-k+1}\right|_2^A=\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{(1-k)(\ln A)^{k-1}}-\frac{1}{(1-k)(\ln 2)^{k-1}}\right)=\frac{1}{(1-k)(\ln 2)^{k-1}}$$

при $k>1$;

при $k>1$ інтеграл розбігається (перевірити при $k=1$ самостійно).

$$I_2-\begin{cases}\text{çá³ãàºòüñÿ ïðè } k>1,\\ \text{ðî çá³ãàºòüñÿ ïðè } k\le 1.\end{cases}$$

Приклад 17. При яких значеннях m інтеграл $\int\limits_0^{\pi/2}\dfrac{1-\cos x}{x^m}dx$ збігається?

Розв'язання. Особлива точка підінтегральної функції $x=0$. Оскільки $1-\cos x\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{x^2}{2}$, звідси випливає $\dfrac{1-\cos x}{x^m}=0^*\left(\dfrac{1}{x^{m-2}}\right)$.

Невласний інтеграл II роду $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ збігається при $\alpha<1$. Отже, досліджуваний інтеграл буде збігатися при $m-2<1$ або $m<3$; при $m\geq 3$ інтеграл розбігається.

Приклад 18. Дослідити збіжність інтеграла $\int\limits_1^{+\infty}\sin x^2 dx$ (*інтеграл Френеля*).

Розв'язання. В раніше наведених прикладах невласних інтегралів, що збігаються, підінтегральна функція наближається до 0 при $x\to+\infty$. Але ця умова не є необхідною. Дійсно, $\int\limits_1^{+\infty}\sin x^2 dx$ збігається, хоча при як завгодно великих x підінтегральна функція коливається між –1 та +1.

Використовуючи підстановку $x=\sqrt{t}$ і потім інтегруючи частинами, отримаємо:

$$\int\limits_1^{+\infty}\sin x^2 dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=-\frac{1}{2\sqrt{t}}\cos t\,\Big|_1^{+\infty}-\frac{1}{4}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{3/2}}dt=\frac{\cos 1}{2}-\frac{1}{4}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{3/2}}dt.$$

Оскільки $\left|\frac{\cos t}{t^{3/2}}\right|\leq\frac{1}{t^{3/2}}$, досліджуваний інтеграл збігається.

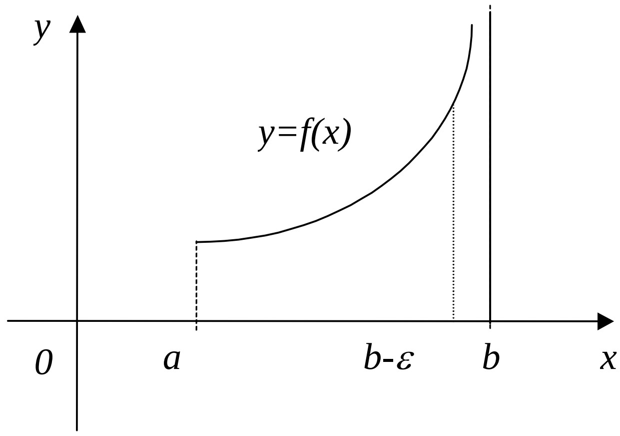
Приклад 19. Дослідити збіжність і обчислити інтеграл

$$J=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція є нескінченно малою величиною порядку $p=3$ відносно $\frac{1}{x}$: $\frac{\operatorname{arctg} x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}\underset{x\to\infty}{=}0^*\left(\frac{1}{x^3}\right)$. Оскільки $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^3}\left(p=3>1\right)$ збігається, то звідси випливає збіжність досліджуваного інтеграла.

8.2. Невласні інтеграли другого роду (інтеграли від необмежених функцій)

Нехай функція $f(x)$ визначена на півінтервалі $[a,b)$, інтегрована на відрізку $[a,b-\varepsilon]$, де $0<\varepsilon<b-a$ і $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$. Точка b називається при цьому особливою точкою функції $f(x)$. Тоді якщо існує $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то його називають *невласним інтегралом другого роду*, позначають $\int\limits_a^b f(x)dx$ і говорять, що інтеграл *збігається*, якщо



$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Якщо ж границя дорівнює нескінченності або взагалі не існує, то інтеграл розбігається.

Якщо особливою точкою функції $f(x)$ є точка $x=a$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon_1}^{b} f(x)dx.$$

Якщо $C\in(a,b)$ є особливою точкою функції $f(x)$, то за властивістю аддитивності $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^C f(x)dx+\int\limits_C^b f(x)dx$ і

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_a^{\tilde{N}-\varepsilon_1} f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int\limits_{\tilde{n}+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx.$$

Якщо хоча б один із інтегралів $\int\limits_a^C f(x)dx$ або $\int\limits_C^b f(x)dx$ розбігається, то невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ також розбігається.

Приклади.

1. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція в точці $x=a$ має нескінченний розрив.

а) $\alpha \neq 1$. За визначенням невласного інтеграла маємо:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{1-\alpha}(x-a)^{1-\alpha}\Bigg|_{a+\varepsilon}^{b} =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[(b-a)^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}\right] = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha}, \ \alpha<1 \ - \text{çá³ãàºòüñÿ}, \\ +\infty, \ \alpha>1 \ - \text{ðî çá³ãàºòüñÿ}. \end{cases}$$

б) $\alpha=1$. $\int\limits_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln(b-a) - \ln\varepsilon\right] = +\infty \lim_{x\to\infty}$, таким чином, інтеграл розбігається.

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} - \begin{cases} \textit{çá³ãàºòüñÿ}, \ \textit{ïðè} \ \ \alpha<1, \\ \textit{ðîçá³ãàºòü ñÿ}, \ \textit{ïðè} \ \ \alpha\geq 1. \end{cases}$$

Зокрема, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ при $\alpha<1$ збігається; при $\alpha\geq 1$ розбігається.

2. Обчислити невласний інтеграл другого роду

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0\right) = \frac{\pi}{2}$$

(інтеграл збігається).

Ознаки збіжності невласних інтегралів другого роду для невід'ємних функцій

Теорема 1. (Ознака порівняння).

Якщо функції $f(x)$ *і* $g(x)$ *неперервні* $\forall x\in[a,b]$, *за винятком скінченного числа точок, причому* $0\leq f(x)\leq g(x)$, $\forall x\in[a,b]$, *то:*

а) якщо $\int\limits_a^b g(x)dx$ *збігається, то і* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *збігається;*

б) якщо $\int\limits_a^b f(x)dx$ *розбігається, то і* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *розбігається.*

Приклад. Дослідити збіжність інтеграла $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}dx$.

Тут $0 \le \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$. Оскільки інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ $\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$ збігається, то і даний інтеграл, за ознакою порівняння, збігається.

Теорема 2. (Гранична форма ознаки порівняння).

Якщо функції $f(x)$ *і* $g(x)$ *невід'ємні, неперервні* $\forall x \in [a,b)$ *і зазнають нескінченний розрив у точці* $x = b$*;* $\lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$ $(0 < \lambda < \infty)$, *то невласні інтеграли від обох функцій збігаються або розбігаються водночас.*

Приклади

1. Розглянемо $J = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$; особлива точка $x = 1$. Інтеграл розбігається, оскільки

$$J = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{1+\varepsilon}^2 \frac{d \ln x}{\ln x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln(\ln x)\Big|_{1+\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon \to 0}\Big(\ln(\ln 2) - \ln\big(\ln(1+\varepsilon)\big)\Big) = +\infty.$$

2. Дослідити збіжність інтеграла $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$.

Розв'язання

Підінтегральна функція має особливу точку $x = 1$. Порівняємо з інтегралом, що збігається, тобто з інтегралом $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ $\left(\alpha = \frac{1}{3} < 1\right)$. Тоді

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{\dfrac{e^x}{\sqrt[3]{1-x^3}}}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}} = \lim_{x \to 1-0} \frac{e^x \sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{1+x+x^2}} = \frac{e}{\sqrt[3]{3}}.$$

Звідси випливає збіжність розглянутого інтеграла.

3. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} - \sin x}$.

Розв'язання. Особлива точка $x=0$. Оскільки знаменник підінтегральної функції $\sqrt{x}-\sin x \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}$, то виберемо $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\left(\alpha=\frac{1}{2}<1\right)$.

Оскільки $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}-\sin x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sin x}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$, звідси випливає збіжність досліджуваного інтеграла, тому що $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ збігається.

Невласні інтеграли другого роду від знакозмінних функцій досліджуються аналогічно невласним інтегралам першого роду.

4. Дослідити збіжність інтеграла $\int\limits_0^1\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Розв'язання. Розглянемо $\int\limits_0^1\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\right|dx$. Тут $\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\right|\le\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ $\alpha=\frac{1}{3}<1$, звідси випливає абсолютна збіжність невласного інтеграла.

5. Розглянемо $I=\int\limits_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx$.

Розв'язання. Оскільки $\ln x<0$ при $0<x<1$, то подамо вихідний інтеграл у вигляді $I=-\int\limits_0^1\frac{-\ln x}{1-x^2}dx$. Особливі точки підінтегральної функції $x=0$ і $x=1$ належать проміжку $[0;1]$. Знайдемо

$$\lim_{x\to1-0}\frac{\frac{e^x}{\sqrt[3]{1-x^3}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}}=\lim_{x\to1-0}\frac{e^x\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{1+x+x^2}}=\frac{e}{\sqrt[3]{3}}.$$

$\lim\limits_{x\to1-0}\frac{\ln x}{1-x^2}\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to1-0}\frac{\frac{1}{x}}{-2x}=-\frac{1}{2}$. Отже, підінтегральна функція обмежена в околі точки $x=1$.

Обчислимо при $0<\alpha<1$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\frac{-\ln x}{1-x^2}}{\frac{1}{x^\alpha}}=-\lim_{x\to+0}\frac{1}{1-x^2}\cdot\lim_{x\to+0}\ln x\cdot x^\alpha\left|\infty\cdot 0\right|=-\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{-\alpha-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{x^\alpha}{\alpha}=0.$$

Підінтегральна функція в околі точки $x=0$ має порядок зростання нижче, ніж нескінченно велика в цьому околі функція $\frac{1}{x^\alpha}$ $(0<\alpha<1)$, Отже, досліджуваний інтеграл збігається.

6. Дослідити збіжність інтеграла $\int\limits_0^1 x^m \ln x \ dx$.

Розв'язання. $I=\int\limits_0^1 x^m \ln x dx\left|\begin{matrix} x=\frac{1}{t} & dx=-\frac{1}{t^2} \\ x\to+0 & t\to+\infty \\ x\to 1 & t\to 1 \end{matrix}\right|=-\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^{m+2}}dt$.

$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^{m+2}}dt$ – невласний інтеграл першого роду. При $m+2>1$, тобто при $m>-1$, цей інтеграл збігається, при $m+2\le 1$, тобто при $m\le -1$, – розбігається, бо в цьому випадку $\frac{\ln t}{t^{m+2}}>\frac{\ln t}{t}$.

7. $J=\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx=\int\limits_0^{a} x^{p-1}e^{-x}dx+\int\limits_a^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$, $\left(0<a<+\infty\right)$.

Розв'язання. При $x\to+0$ $x^{p-1}e^{-x}=0^*\left(\frac{1}{x^{1-p}}\right)$. Перший з інтегралів у правій частині рівності буде збігатися за умови $1-p<1$, тобто при $p>0$ (як невласний інтеграл другого роду). При $x\to+\infty$ підінтегральна функція $f\left(x\right)=x^{p-1}e^{-x}\to 0$, оскільки експоненціальна функція спадає швидше, ніж будь-яка функція вигляду $\frac{1}{x^{\alpha}}$ $(\alpha > 1)$. Тому другий інтеграл збігається $\forall\ p \in R$. Звідси випливає збіжність розглянутого інтеграла при $p > 0$.

8. Обчислити невласний інтеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання. $x=1$ – особлива точка, підінтегральна функція

$$\frac{1}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}+2}\right) \underset{x\to1}{=} 0^*\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) \Rightarrow$$

інтеграл збігається, оскільки інтеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}$ при $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ збігається.

Замінюємо $x = \sin t$, тоді $dx = \cos t dt$.

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos t dt}{\cos^2 t + 2\cos t} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt}{\cos t + 2} = \left| \begin{matrix} z = \operatorname{tg}\frac{t}{2} & \cos t = \frac{1-z^2}{1+z^2} \\ dt = \frac{2dz}{1+z^2} & \end{matrix} \right| =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \frac{dz}{\left(1+z^2\right)\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}+2\right)} = 2\int\limits_0^1 \frac{dz}{z^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

9. Дослідити збіжність інтеграла $I = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx$.

Перший спосіб

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx = \left| \begin{matrix} u = \ln\sin x & dv = \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ du = \frac{\cos x dx}{\sin x} & v = 2\sqrt{x} \end{matrix} \right| = 2\sqrt{x}\ln\sin x\Big|_0^{\pi/2} - 2\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{x}\frac{\cos x}{\sin x}dx =$$

$$= -2\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{x}\cos x}{\sin x}dx.$$

Тут $\lim\limits_{x\to0} \ln\sin x\sqrt{x} = 0$ (перевірити), а $\frac{\sqrt{x}\cos x}{\sin x} \underset{x\to0}{=} 0^*\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Отже, інтеграл збігається.

Другий спосіб

Порівняємо підінтегральну функцію в малому околі точки x=0 з нескінченно великою в цьому околі функцією $\frac{1}{x^{\lambda}}$, де $\frac{1}{2}<\lambda<1$. Маємо:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}:\frac{1}{x^{\lambda}}=\lim_{x\to+0}\frac{\ln(\sin x)}{x^{\frac{1}{2}-\lambda}}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to+0}\frac{\cos x}{\sin x\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)x^{-\frac{1}{2}-\lambda}}=$$

$$=\frac{1}{2-\lambda}\lim_{x\to+0}\frac{x^{\frac{1}{2}+\lambda}}{\sin x}=\frac{1}{2-\lambda}\lim_{x\to+0}\frac{x^{\frac{1}{2}+\lambda}}{x}=\frac{1}{2-\lambda}\lim_{x\to+0}x^{\lambda-\frac{1}{2}}=0.$$

Таким чином, порядок зростання підінтегральної функції нижчий, ніж порядок зростання нескінченно великої функції $\frac{1}{x^{\lambda}}$, ($\frac{1}{2}<\lambda<1$). Оскільки інтеграл $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{x^{\lambda}}$ збігається при $\frac{1}{2}<\lambda<1$, то за ознакою порівняння досліджуваний інтеграл також збігається.

8.3. Головні значення невласних інтегралів

Визначення. Якщо при $\forall\varepsilon>0$ існують власні інтеграли $\int_a^{c-\varepsilon}f(x)dx$ і $\int_{c+\varepsilon}^{b}f(x)dx$ ($a<c<b$), то під *головним значенням* у сенсі Коші (v.p.) розуміють число

$$\text{v.p.}\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_a^{c-\varepsilon}f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^{b}f(x)dx\right).$$

Аналогічно

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)dx.$$

Приклади

1. $\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-x}{1+x^2}dx=\lim_{A\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\,x\,|_{-A}^{A}-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)|_{-A}^{A}\right)=$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\,A-\operatorname{arctg}\,(-A)-\frac{1}{2}\ln\frac{1+A^2}{1+A^2}\right)=\lim_{A\to+\infty}2\operatorname{arctg}\,A=\pi.$$

2. Обчислити $J = v.p. \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$.

Розв'язання. Особливі точки підінтегральної функції $x = 1$ і $x = 2$; $A > 2$.

$$J = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} \left(\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Bigg|_0^{1-\varepsilon_1} + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Bigg|_{1+\varepsilon_1}^{2-\varepsilon_2} + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Bigg|_{2+\varepsilon_2}^{A} \right) + \lim_{B \to +\infty} \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Bigg|_A^B =$$

$$= -\ln 2 + \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} \left(\ln\frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} + \ln\frac{1+\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2} \right) + \lim_{B \to +\infty} \ln\frac{B-2}{B-1} = \ln\frac{1}{2}.$$

Контрольні приклади та запитання до гл. 8

Спочатку рекомендуємо читачеві разом з нами розв'язати декілька типових задач, замінюючи знак $\boxed{*}$ необхідними числами або виразами.

Приклад 8.1. Дослідити збіжність інтеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[3]{x} + x^2}$.

Розв'язання. Точка розриву підінтегральної функції $x = 0$. Перетворимо підінтегральну функцію у такий спосіб:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x} + x^2} = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}\left(1 + 2x^{\frac{1}{12}} + x^{\frac{7}{4}}\right)},$$

тобто виділимо головну частину. При $x \to 0$ будемо мати $f(x) \approx \boxed{*}$. Оскільки інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{\boxed{*}}}$ збігається, то досліджуваний інтеграл також збігається.

Приклад 8.2. Дослідити збіжність інтеграла $\int\limits_3^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4 + 1}}$.

Розв'язання. Застосуємо ознаку збіжності у формі нерівності. Інтеграл $\boxed{*}$, оскільки при $x > 1$ виконується нерівність $\frac{x}{\sqrt{x^4+1}} > \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^4}}$, а інтеграл $\int\limits_3^\infty \frac{dx}{x\sqrt{2}}$ $\boxed{*}$.

Приклад 8.3. Знайти невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Розв'язання. Оскільки область інтегрування необмежена, то даний невласний інтеграл є інтегралом $\boxed{*}$-го роду. Всередені інтервалу $(-\infty;+\infty)$ функція розривів не має (оскільки знаменник не перетворюється на 0).

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2+\boxed{*}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\boxed{*}}{(x+1)^2+\boxed{*}} = arctg\boxed{*}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \boxed{*} = \boxed{*}.$$

Отже, досліджуваний невласний інтеграл збігається і дорівнює $\boxed{*}$.

Приклад 8.4. Знайти невласний інтеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Розв'язання. Всередені області інтегрування функція зазнає розриву. Отже, досліджуваний інтеграл необхідно розбити на суму двох невласних інтегралів $\boxed{*}$-го роду.

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int\limits_0^{\boxed{*}} \frac{dx}{(x-1)^2} + \int\limits_{\boxed{*}}^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{b\to\boxed{*}} \int\limits_0^b \frac{d\boxed{*}}{(x-1)^2} + \lim_{a\to\boxed{*}} \int\limits_a^2 \frac{d\boxed{*}}{(x-1)^2} =$$

$$\lim_{b\to\boxed{*}} \left(\frac{1}{\boxed{*}}\right)\Bigg|_0^b + \lim_{a\to\boxed{*}} \left(\frac{1}{\boxed{*}}\right)\Bigg|_a^2 = \boxed{*}.$$

Оскільки невласний інтеграл дорівнює $\boxed{*}$, то він розбігається.

Приклад 8.5. Знайти площу, обмежену кривою $y = e^{-x/3}$ і віссю Ox при $x \geq 0$.

Розв'язання

Площу криволінійної трапеції знаходимо за формулою

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

У даному випадку $f(x) = e^{-x/3}$, $a = \boxed{*}, b = \boxed{*}$, і ми отримаємо невласний інтеграл 1-го роду:

$$S=\int_{\boxed{*}}^{\boxed{*}} e^{-x/3}dx=\boxed{*}\cdot e^{-x/3}\Big|_{\boxed{*}}^{\boxed{*}}=\boxed{*}\cdot\left(0-e^{0}\right)=\boxed{*}.$$

При обчисленнях використовували значення такої границі:

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x/3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x/3}}=\left\|\dfrac{1}{\boxed{*}}\right\|=\boxed{*}$, тобто площа дорівнює 3 кв. од.

Лабораторна робота 8. Обчислення невласних інтегралів у системі Maple

Завдання. Дослідити збіжність невласних інтегралів і обчислити, якщо вони збігаються.

Виконання. Для обчислення невласних інтегралів використовується команда **int**(expr,var=val1..val2), де expr – підінтегральна функція, var – змінна інтегрування, val1, val2 – нижня і верхня межі інтегрування.

1) $\int\limits_{1}^{\infty}\dfrac{1}{1+x^{2}}\cdot dx$,

> int(1/(1+x^2),x=1..infinity);

$$\frac{1}{4}\pi.$$

2) $\int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{arctgx}{\left(1+x^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot dx$,

> int(arctan(x)/((1+x^2)^(3/2)),x=0..infinity);

$$\frac{1}{2}\pi-1.$$

3) $\int\limits_{e}^{\infty}\dfrac{1}{x\cdot(\ln x)^{3/2}}\cdot dx$,

> int(1/(x*ln(x)^(3/2)),x=exp(1)..infinity);

$$2.$$

4) $\int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{x\cdot\ln x}{\left(1+x^{2}\right)^{3}}\cdot dx$,

> int(x*ln(x)/(1+x^2)^3,x=0..infinity);

$$-1/8.$$

5) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x \cdot \ln x} \cdot dx$,

> **int(1/(x*ln(x)),x=1..2);**

$$\infty.$$

6) $\int\limits_0^1 \frac{1}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$,

> **int(1/(1-x^2+2*sqrt(1-x^2)),x=0..1);**

$$\frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$$

7) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}-\sin x} \cdot dx$,

> **int(1/(sqrt(x)-sin(x)),x=0..1);**

Якщо інтеграл не виражається через елементарні функції, то Maple повертає вираз.

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x\sim^{\frac{1}{2}} - \sin(x\sim)} \cdot dx\sim.$$

Щоб з'ясувати, збігається даний невласний інтеграл чи ні, можна обчислити його чисельно. Для цього призначено команду evalf(**int**(expr,var=val1..val2)).

> **evalf(int(1/(sqrt(x)-sin(x)),x=0..1));**

$$5.110412535.$$

8) $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sqrt[3]{1-x^3}} \cdot dx$

>**int(exp(x)/(1-x^3)^(1/3),x=0..1);**

$$\int\limits_0^1 \frac{\exp(x)}{\left(1-x^3\right)^{1/3}} \cdot dx.$$

> **evalf(int(exp(x)/(1-x^3)^(1/3),x=0..1));**

$$2.228028318.$$

9) $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^5} \cdot dx$,

> **int(sin(x)/x^5,x=0..1);**

$$\infty.$$

Контрольні завдання до гл. 8

Завдання 1. Дослідити збіжність невласних інтегралів та обчислити.

8.1.1. $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-3x}dx$

8.1.2. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^6}$

8.1.3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$

8.1.4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{x}dx$

8.1.5. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$

8.1.6. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

8.1.7. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{xdx}{x^4+9}$

8.1.8. $\int\limits_{-\infty}^{-3} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

8.1.9. $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$

8.1.10. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

8.1.11. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x)^3}$

8.1.12. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

8.1.13. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

8.1.14. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^3e^{-x^2}dx$

8.1.15. $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

8.1.16. $\int\limits_{0}^{+\infty} x\sin xdx$

8.1.17. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\sin xdx$

8.1.18. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^4}$

8.1.19. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\cos xdx$

8.1.20. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx$

8.1.21. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$

8.1.22. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{(1+x)^2}$

8.1.23. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$

8.1.24. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

8.1.25. $\int\limits_{1}^{\infty} x\ln xdx$

8.1.26. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx$

8.1.27. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2+1}{1+x^4}dx$

8.1.28. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}dx$

8.1.29. $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{x}dx$

8.1.30. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{2+3x}{(2+x)x^2}dx$

Завдання 2. Дослідити збіжність невласних інтегралів і обчислити.

8.2.1. $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ 8.2.2. $\int_0^1 \ln x dx$ 8.2.3. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

8.2.4. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ 8.2.5. $\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx$ 8.2.6. $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt[4]{x^2-4}} dx$

8.2.7. $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$ 8.2.8. $\int_0^1 \frac{e^{2/x}}{x^2} dx$ 8.2.9. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-1}$

8.2.10. $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$ 8.2.11. $\int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx$ 8.2.12. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-6x+8}$

8.2.13. $\int_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}}$ 8.2.14. $\int_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$ 8.2.15. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}} dx$

8.2.16. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$ 8.2.17. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}}$ 8.2.18. $\int_0^{\pi} \frac{|\cos x| dx}{\sqrt{\sin x}}$

8.2.19. $\int_{-1/2}^{-1/4} \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$ 8.2.20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx$ 8.2.21. $\int_3^6 \sqrt{\frac{2-x}{x-6}} dx$

8.1.22. $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln^2 x}$ 8.1.23. $\int_0^3 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ 8.1.24. $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$

8.1.25. $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$ 8.1.26. $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln x}$ 8.1.27. $\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$

8.1.28. $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ 8.1.29. $\int_{-1}^1 \frac{x+2}{\sqrt[5]{x^3}} dx$ 8.1.30. $\int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

Завдання 3. Дослідити збіжність невласних інтегралів.

8.3.1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^x+1}{x^2+2x+5}dx$

8.3.2. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+7}dx$

8.3.3. $\int\limits_0^1 x\ln x dx$

8.3.4. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\ln(\operatorname{tg} x+1)}{x^3}dx$

8.3.5. $\int\limits_0^1 \frac{e^{\cos x}}{\sqrt[5]{x}}dx$

8.3.6. $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx$

8.3.7. $\int\limits_0^2 \frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{e^{3x}-1}dx$

8.3.8. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}dx$

8.3.9. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[7]{1-x^2}}$

8.3.10. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$

8.3.11. $\int\limits_0^{\pi/4} e^x \operatorname{ctg} x dx$

8.3.12. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{x^3}$

8.3.13. $\int\limits_0^2 \frac{\cos\frac{x}{2}-1}{\sqrt{x^5}}dx$

8.3.14. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{17+\sqrt{x^3}}dx$

8.3.15. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^5}dx$

8.3.16. $\int\limits_0^1 \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}dx$

8.3.17. $\int\limits_1^4 \frac{\sin(x-1)}{x \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}}dx$

8.3.18. $\int\limits_4^{+\infty} \frac{(2x-5)^2 x dx}{x^6-6x+1}$

8.3.19. $\int\limits_0^1 \frac{1-\cos^3 x}{x^3\cdot\sin\sqrt[3]{2x}}dx$

8.3.20. $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^4}dx$

8.3.21. $\int\limits_{-1}^0 \frac{1-\cos(1+x)}{(x+1)^3}dx$

8.3.22. $\int\limits_0^2 \frac{\arcsin x^2}{x^4+2\sqrt{x^5}}dx$

8.3.23. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^3}dx$

8.3.24. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3}dx$

8.3.25. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{1+x}dx$

8.3.26. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x dx}{1-x^2}$

8.3.27. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+x^3}$

8.3.28. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{x}}$

8.3.29. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\ln x}$

8.3.30. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x dx}{x}$

Відповіді до контрольних прикладів

Глава 1

1.1. *а*) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$; *б*) $\begin{pmatrix} \boxed{4} & -3 \\ \boxed{5} & \boxed{2} \end{pmatrix}$; *в*) $\begin{pmatrix} -25 & 10 \\ \boxed{-14} & \boxed{1} \end{pmatrix}$.

1.2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & \boxed{-6} \\ \boxed{-5} & 0 & 7 \end{vmatrix}$; $(-1)^{\boxed{3}} \cdot \begin{vmatrix} 3 & \boxed{-6} \\ \boxed{-5} & 7 \end{vmatrix} = \boxed{9}$.

1.3. $\boxed{3} \cdot \boxed{1} \cdot \boxed{2}$; $\boxed{2} \cdot \boxed{1} \cdot \boxed{1}$; $\boxed{-1}$; $(-1)^{\boxed{4}} \cdot \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{1}$; $\boxed{1}$; $(-1)^{\boxed{4}} \cdot \begin{vmatrix} 2 & \boxed{3} \\ -1 & \boxed{1} \end{vmatrix} = \boxed{5}$;

$A_{31} = (-1)^{\boxed{4}} \cdot \begin{vmatrix} \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{-1} & \boxed{0} \end{vmatrix}$; $\boxed{-4}$. $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ \boxed{-1} & 5 & \boxed{3} \\ 1 & \boxed{-6} & \boxed{-4} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-4} & \boxed{-3} \\ \boxed{1} & -5 & \boxed{-3} \\ \boxed{-1} & \boxed{6} & \boxed{4} \end{pmatrix}$.

1.4. 1) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & \boxed{-1} & \boxed{1} & -3 \\ \boxed{1} & 3 & \boxed{0} & \boxed{-3} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & -7 & 3 & \boxed{1} & \boxed{-3} \end{array}\right)$; **2)** $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & \boxed{-1} & \boxed{1} & -3 \\ 0 & 5 & \boxed{-3} & \boxed{1} & \boxed{-3} \\ \boxed{0} & -7 & 3 & \boxed{1} & \boxed{-3} \end{array}\right)$,

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & \boxed{-1} & \boxed{1} & -3 \\ 0 & 0 & 2 & \boxed{-4} & \boxed{12} \\ 0 & 0 & -4 & \boxed{8} & \boxed{-24} \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & \boxed{-1} & \boxed{1} & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{-2} & 6 \end{array}\right)$; **3)** $\boxed{3}$, $\boxed{3}$; **4)** $\boxed{а)}$; **5)** $\boxed{б)}$.

Глава 2.

2.1. $\cos\varphi = \dfrac{32 - \boxed{4} - 12}{\sqrt{\boxed{16} + 4 + \boxed{8}} \cdot \sqrt{64 + 36 - 48}} = \dfrac{\boxed{16}}{\sqrt{\boxed{28}} \cdot \sqrt{52}} = \boxed{\dfrac{4}{\sqrt{91}}}$,

$\varphi = \boxed{arccos \dfrac{4}{\sqrt{91}}}$.

2.2. $\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} - 6\vec{j} + \boxed{6\vec{k}}$, $\overrightarrow{CD} = \boxed{5\vec{j}} - 4\vec{k}$,

$np_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{CD} = \dfrac{-3 \cdot 0 - \boxed{6 \cdot 5} - 4 \cdot \boxed{6}}{\sqrt{9 + 36 + \boxed{36}}} = \dfrac{-54}{\boxed{9}} = \boxed{-6}$.

2.3. Якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$**,** то $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\boxed{0}\Rightarrow\boxed{3\alpha}-7\alpha+20=\boxed{0}$; $4\alpha=\boxed{20}$; $\alpha=\boxed{5}$. **2.4.** Якщо $\vec{x}\perp 0z$, то координата $\boxed{z}=0$, $\left(\vec{x},\vec{a}\right)=3x-\boxed{y}=9$, $\left(\vec{x},\vec{b}\right)=x+\boxed{2y}=-4$.

Розв'язуючи систему: $\begin{cases}3x-\boxed{y}=9\\ x+\boxed{2y}=-4\end{cases}$, одержимо: $\begin{cases}x=2\\ \boxed{y}=-3\end{cases}$.

Відповідь: $\vec{x}\left(2;\boxed{-3};\boxed{0}\right)$.

2.5. $S=\left|3\left[\vec{a},\vec{a}\right]-4\left[\vec{b},\vec{b}\right]+2\left[\vec{a},\vec{b}\right]-6\left[\vec{b},\vec{a}\right]\right|=$

$=\left|\boxed{0}-\boxed{0}+\boxed{8}\cdot\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=\boxed{8}\cdot5\cdot5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\boxed{100\sqrt{2}}$.

2.6. $\overrightarrow{AB}=-\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$; $\overrightarrow{AC}=5\vec{i}+\boxed{4\vec{j}}-8\vec{k}$;

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&2&-4\\5&\boxed{4}&-8\end{vmatrix}=\boxed{0\cdot\vec{i}}-28\vec{j}-\boxed{14\vec{k}}.$$

$S=\frac{1}{2}\sqrt{\boxed{0}+28^2+\boxed{14^2}}=7\sqrt{5}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{25+\boxed{16}+64}=\boxed{\sqrt{105}}$, $BD=\frac{\boxed{2}\cdot7\sqrt{5}}{\boxed{\sqrt{105}}}=$

$=\boxed{\frac{2}{3}\sqrt{21}}$.

2.7. $\overrightarrow{AB}\left(-1,3,\boxed{3}\right),\overrightarrow{AC}\left(0,\boxed{4},2\right),\overrightarrow{AD}\left(3,1,\boxed{-4}\right)$.

Умова компланарності трьох векторів: $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right)=\boxed{0}$.

Знайдемо: $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}-1&3&\boxed{3}\\0&\boxed{4}&2\\3&1&\boxed{-4}\end{vmatrix}=\boxed{0}$ $\Rightarrow$ вектори компланарні.

2.8. $\overrightarrow{AB}\left(-3,\boxed{3},0\right),\overrightarrow{AC}\left(-4,0,\boxed{4}\right),\overrightarrow{AD}\left(\boxed{5},2,0\right)$.

$$\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}-3&\boxed{3}&0\\-4&0&\boxed{4}\\\boxed{5}&2&0\end{vmatrix}=\boxed{84},\ V=\boxed{\frac{1}{6}\cdot84=14}.$$

2.9. **1)** *б*) три; **2)** *б*) ні; **3)** $A=\begin{vmatrix} 1 & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 3 & -1 & \boxed{2} \\ \boxed{-2} & \boxed{4} & 4 \end{vmatrix}$; **4)** *в*) трьом; **5)** *а*) так; **6)** *а*) так;

7) $x_a=\boxed{A^{-1}x_e}$; **8)** $A^{-1}=-\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -12 & \boxed{4} & 7 \\ \boxed{-16} & 10 & \boxed{7} \\ 10 & \boxed{-8} & -7 \end{pmatrix}$; **9)** $x_a=\begin{pmatrix} 3 \\ \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{pmatrix}$.

2.10.

1) $A\vec{x}=\boxed{\lambda\vec{x}}$; **2)** $\begin{cases} 7x_1-\boxed{6x_2}+6x_3=\lambda x_1 \\ \boxed{4x_1}-x_2+\boxed{4x_3}=\boxed{\lambda x_2} \\ 4x_1-\boxed{2x_2}+\boxed{5x_3}=\boxed{\lambda x_3} \end{cases}$; **3)** $\begin{cases} (7-\lambda)x_1-\boxed{6x_2}+6x_3=0 \\ \boxed{4x_1}+(-1-\lambda)x_2+\boxed{4x_3}=0 \\ 4x_1-\boxed{2x_2}+\boxed{(5-\lambda)x_3}=0 \end{cases}$;

4) *а*) дорівнював нулю; **5)** $\begin{vmatrix} 7-\lambda & \boxed{-6} & 6 \\ \boxed{4} & -1-\lambda & \boxed{4} \\ \boxed{4} & \boxed{-2} & \boxed{5-\lambda} \end{vmatrix}=0$; **6)** $\lambda_2=\boxed{3}$, $\lambda_3=\boxed{7}$;

7) *а*) $\begin{cases} 6x_1-6x_2+\boxed{6x_3}=0 \\ 4x_1-\boxed{2x_2}+4x_3=0 \\ \boxed{4x_1}-2x_2+\boxed{4x_3}=0 \end{cases}$; *б*) 2), *в*) 2), *г*) 2);

д) $\begin{cases} x_1-x_2=-x_3 \\ 2x_1+-\boxed{x_2}=\boxed{-2x_3} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1=-x_3 \\ x_2=\boxed{0} \end{matrix}$, *е*) $\vec{x}^{(1)}=\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{0} \\ -1 \end{pmatrix}$; **8)** $\vec{x}^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{1} \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$; **9)** $\vec{x}^{(3)}=\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{1} \\ 1 \end{pmatrix}$;

10) *б*); **11)** *а*); **12)** $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 3 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{7} \end{pmatrix}$.

Глава 3.

3.1. $x_0=\boxed{-1}$; $y_0=\boxed{2}$; $B=\boxed{-5}$; $C=\boxed{1}$;

$2\cdot\left(x+\boxed{1}\right)-\boxed{5}\cdot\left(y-\boxed{2}\right)+\boxed{1}\cdot(z+3)=0$; $\boxed{2}\cdot x-\boxed{5}\cdot y+\boxed{1}\cdot z+\boxed{15}=0$.

3.2. $\vec{n}_1 = \left(\boxed{2}; \lambda; \boxed{3}\right)$, $\vec{n}_2 = \left(\mu, \boxed{-6}, \boxed{-6}\right)$; $\dfrac{\boxed{2}}{\mu} = \dfrac{\lambda}{\boxed{-6}} = \dfrac{\boxed{3}}{\boxed{-6}}$; $\dfrac{\boxed{2}}{\mu} = \dfrac{3}{\boxed{-6}}$; $\dfrac{\lambda}{\boxed{-6}} = \dfrac{\boxed{3}}{-6}$;

$\mu = \boxed{-4}$, $\lambda = \boxed{3}$.

3.3. $\vec{n}_1 = \left(\boxed{5}\ ; \boxed{1}\ ; -3\right)$; $\vec{n}_2 = \left(\boxed{2}\ ; \lambda; \boxed{-3}\right)$; $5 \cdot \boxed{2} + \boxed{1} \cdot \lambda + (-3) \cdot \boxed{-3} = 0$;

$\lambda = \boxed{-19}$.

3.4. $b = -\dfrac{\boxed{-90}}{3} = \boxed{30}$; $c = -\dfrac{-90}{\boxed{-6}} = \boxed{-15}$; $V = \dfrac{1}{6}\left|\boxed{18} \cdot \boxed{30} \cdot \boxed{-15}\right| = \boxed{1350}$.

3.5. $\dfrac{x - \boxed{2}}{\boxed{2}} = \dfrac{y+5}{\boxed{-3}} = \dfrac{z - \boxed{3}}{0}$; $\vec{a} = \left(3; \boxed{-2}; \boxed{5}\right)$; $\dfrac{x - \boxed{2}}{3} = \dfrac{y+5}{\boxed{-2}} = \dfrac{z - \boxed{3}}{\boxed{5}}$.

3.6. $\dfrac{x + \boxed{2}}{2+2} = \dfrac{y - \boxed{7}}{-1 - \boxed{7}} = \dfrac{z-5}{\boxed{6} - \boxed{5}}$; $\dfrac{x - \boxed{2}}{\boxed{4}} = \dfrac{y - \boxed{7}}{\boxed{-8}} = \dfrac{z - \boxed{5}}{\boxed{1}}$.

3.7. $\vec{a}_1 = \left(2; \boxed{-1}\ ; \boxed{4}\right)$; $\vec{a}_2 = \left(\boxed{-1}\ ; \boxed{\dfrac{1}{2}}\ ; -2\right)$; $\dfrac{2}{\boxed{-1}} = \dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{1/2}} = \dfrac{\boxed{4}}{-2}$; *а*) $\boxed{\text{да}}$;

б) $\boxed{\text{паралельні}}$.

3.8. $\vec{a}_1 = \left(\boxed{2}\ ; \boxed{3}\ ; -1\right)$; $\vec{a}_2 = \left(1; \boxed{3}\ ; \boxed{11}\right)$; $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \boxed{2} \cdot 1 + \boxed{3} \cdot \boxed{3} + (-1) \cdot \boxed{11}$;

$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \boxed{0}$. Рівність $\boxed{0}$ означає, що прямі $\boxed{\text{перпендикулярні}}$.

3.9. $\vec{a}_1 = \left(\boxed{2}\ ; 2; \boxed{1}\right)$; $\vec{a}_2 = \left(2; \boxed{18}\ ; \boxed{-3}\right)$; $M_1\left(1; \boxed{3}\ ; \boxed{1}\right)$, $M_2\left(\boxed{-1}\ ; -3; \boxed{1}\right)$.

$\overrightarrow{M_1M_2} = \left(\boxed{-1} - 1; -3 - \boxed{3}; \boxed{1} - \boxed{1}\right)$; $\overrightarrow{M_1M_2} = \left(\boxed{-2}\ ; \boxed{-6}; \boxed{0}\right)$; $\begin{vmatrix} \boxed{2} & 2 & \boxed{1} \\ 2 & \boxed{18} & \boxed{-3} \\ \boxed{-2} & \boxed{-6} & \boxed{0} \end{vmatrix}$;

$\boxed{0}$, тобто, прямі $\boxed{\text{перетинаються}}$.

3.10. $k_2 = \dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{3}}$; $\lambda_1 = \boxed{6}$; $\lambda_2 = \boxed{2/3}$.

3.11. $\dfrac{x - \boxed{1}}{\boxed{2} - 1} = \dfrac{y-3}{5 - \boxed{3}}$, $\boxed{2} \cdot x - \boxed{1} \cdot y + \boxed{1} = 0$.

3.12. $d = \dfrac{\left|3 \cdot \boxed{3} - 4 \cdot (-5) + 10\right|}{\sqrt{9 + \boxed{16}}}$, $d = \dfrac{\boxed{39}}{\boxed{5}}$.

3.13. $x=\boxed{1}$; $y=\boxed{0}$.

3.14. 1) $A=\begin{pmatrix} 2 & \boxed{-2} \\ \boxed{-2} & 2 \end{pmatrix}$; **2)** $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\boxed{\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$;

3) ОСЛАР, $\begin{cases} \boxed{(2-\lambda)}\, x_1-2x_2=0 \\ \boxed{-2x_1}+(2-\lambda)x_2=0 \end{cases}$; **4)** $\Delta=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$;

5) $\lambda_1=0$, $\lambda_2=4$; **6)** *а*); **7)** $\begin{cases} -2x_1-\boxed{2x_2}=0 \\ \boxed{2x_1}-2x_2=0 \end{cases}$, $x_2=\boxed{-x_1}$; **8)** *в*);

9) $\vec{f}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{-1} \end{pmatrix}$; **10)** $\sqrt{2}$; **11)** $\vec{e}_1=\dfrac{\vec{f}_1}{\left|\vec{f}_1\right|}=\boxed{\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$; **12)** $\vec{e}_2=\boxed{\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$;

13) *а*); **14)** $C=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & \boxed{1/\sqrt{2}} \\ \boxed{-1/\sqrt{2}} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$; **15)** б; **16)** $A_e=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; **17)** $A=\boxed{4x'^2}$; **18)** $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\boxed{C^{-1}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; **19)** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\boxed{C}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$; **20)** $y=\boxed{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y'}$; **21)** $4x'^2-\boxed{8\sqrt{2}x'}+1=0$; **22)** пара паралельних прямих: $x'-\boxed{\sqrt{2}}=\pm 1$.

Глава 4

4.1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{12x^3+7x^2-2}{7x^3+5x+29}=\left\|\frac{\boxed{\infty}}{\infty}\right\|=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^3\cdot\left(1+\dfrac{7}{12x}-\boxed{\dfrac{1}{6x^3}}\right)}{7x^3\cdot\left(1+\boxed{\dfrac{5}{7x^2}}+\dfrac{29}{7x^3}\right)}=\boxed{\frac{12}{7}};$$

4.2. $$\lim_{\substack{x\to 2\\(x-2\to 0)}}\frac{x^2+5x-14}{x^3-4x}=\left\|\frac{4+10-\boxed{14}}{8-8}=\frac{\boxed{0}}{0}\right\|=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 2\\(x-2\to 0)}}\frac{(x-2)\left(\boxed{x+7}\right)}{x(x-2)\left(\boxed{x+2}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\boxed{x+7}}{x(x+2)}=\left\|\frac{\boxed{2+9}}{2(2+2)}\right\|=\boxed{\frac{11}{8}};$$

4.3. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\(x-2\to 0)}} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4} = \left\| \dfrac{\sqrt{2+7}-3}{2^2-4} = \dfrac{0}{\boxed{0}} \right\| = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\(x-2\to 0)}} \dfrac{x+7-\boxed{9}}{\left(\boxed{\sqrt{x+7}+3}\right)(x+2)(x-2)} =$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{\left(\boxed{\sqrt{x+7}+3}\right)(x+2)} = \left\| \dfrac{1}{(3+3)(2+2)} \right\| = \boxed{\dfrac{1}{24}};$

4.4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x-5^x}{2\sin 4x} = \left\| \dfrac{3^0-5^0}{2\sin 0} = \dfrac{\boxed{0}}{\boxed{0}} \right\| = \left\| \begin{matrix} a^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln a \\ \sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \end{matrix} \right\| =$

$= \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x\left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^x - \boxed{1}\right)}{\sin 4x} = \left\| \begin{matrix} 5^0=1 \\ \left(\dfrac{3}{5}\right)^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x\boxed{\ln\dfrac{3}{5}} \\ \sin 4x \underset{x\to 0}{\sim} 4x \end{matrix} \right\| = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\boxed{\ln\dfrac{3}{5}}}{\boxed{4}\cdot x} = \boxed{\dfrac{1}{8}\ln\dfrac{3}{5}};$

4.5. $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{x^2+2}{3x}} = \left\|1^\infty\right\| = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\boxed{5x}\left(x^2+2\right)}{\boxed{3x}}} = \boxed{e^{\frac{10}{3}}};$

4.6. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{5}{3x}} = \left\|1^\infty\right\| = \lim\limits_{x\to 0}\left((1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^{\boxed{2x\cdot\frac{5}{3x}}} = \boxed{e^{\frac{10}{3}}}$

4.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{2x+1}\right)^{\frac{x}{4}} = \left\|1^\infty\right\| = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{7}{2x+1}\right)^{\boxed{\frac{2x+1}{7}}}\right)^{\frac{7}{2x+1}\cdot\frac{x}{4}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\boxed{\frac{7x}{4(2x+1)}}} = \boxed{e^{\frac{7}{8}}}$

4.8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[7]{1+2x+x^3}-1}{e^{2x}-e^{-2x}} = \left\|\dfrac{0}{0}\right\| = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[7]{1+x\left(2+x^2\right)}-1}{e^{-2x}\cdot\left(\boxed{e^{-2x}}-1\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{7}\cdot x\left(2+x^2\right)}{\boxed{4x}} = \boxed{\dfrac{1}{14}}$

Глава 5

5.1. $y' = \boxed{1}\cdot x^{\boxed{-\frac{2}{3}}} - \dfrac{7}{x\cdot\boxed{\ln 7}} + \dfrac{\boxed{-4}}{x^2};$

5.2. $y' = \boxed{3}\cdot\sin^2\left(\boxed{\mathrm{tg}2x-5}\right)\cdot\cos(\mathrm{tg}2x-5)\cdot\dfrac{\boxed{2}}{\cos^2\boxed{2x}};$

5.3. $y'(x)=e^{\boxed{\arcsin x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\boxed{1-x^2}}}$, $x_0=\boxed{0}$, $y'(x_0)=\boxed{1}$, $y-\boxed{1}=\boxed{1}\cdot x$;

5.4. $\ln y=\left(\boxed{e-6x}\right)\cdot\ln\operatorname{ctg}x\Rightarrow\dfrac{y'}{\acute{y}}=\boxed{-6}\cdot\ln\operatorname{ctg}x+\left(\boxed{e-6x}\right)\cdot\dfrac{1}{\boxed{\operatorname{ctg}x}}\cdot\dfrac{-1}{\sin^2 x}$.

$$dy=(\operatorname{ctg}x)^{e-6x}\cdot\left[\boxed{-6}\cdot\ln\operatorname{ctg}x+\left(\boxed{e-6x}\right)\cdot\frac{1}{\boxed{\operatorname{ctg}x}}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}\right]\cdot\boxed{dx};$$

5.5. $x_0=\boxed{0}$; $\Delta x=\boxed{0.01}$, $y(x_0)=\boxed{1}$, $y'(x)=\boxed{\ln 3}\cdot 3^x-3x^{\boxed{2}}\Rightarrow y'(x_0)=\boxed{\ln 3}$,
$3^{0.01}-0.01^3\approx\boxed{1}+\boxed{\ln 3}\cdot 0.01$;

5.6. $y'=\boxed{20}\cdot x^{19}+\boxed{\dfrac{1}{2}}\cdot\sin\boxed{3x}$, $y''=\boxed{380}\cdot x^{\boxed{18}}+\boxed{\dfrac{3}{2}}\cdot\cos 3x$,

$$d^2y=\left(\boxed{380}\cdot x^{\boxed{18}}+\boxed{\frac{3}{2}}\cdot\cos 3x\right)\boxed{dx^2}.;$$

5.7. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot e^{-0.01\cdot x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^{\boxed{0.01}\cdot x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{\boxed{0.01}\cdot e^{\boxed{0.01}\cdot x}}=\left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|=$

$$=\boxed{200}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\boxed{0.01}\cdot x}}=\boxed{200}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\boxed{0.01}\cdot e^{\boxed{0.01}\cdot x}}=\left\|\frac{1}{\boxed{\infty}}\right\|=\boxed{0}.$$

Глава 6

6.1. $d\boxed{\left(1+2x^3\right)}$, $\dfrac{2}{15}\left(1+2x^3\right)^{\boxed{\frac{5}{4}}}+C$.

6.2. $I=\boxed{\dfrac{2}{\sqrt{2}}}\displaystyle\int\dfrac{d\left(\boxed{\sqrt{2}x}\right)}{(\sqrt{2}x)^2+1}+\dfrac{1}{4}\int\dfrac{d\boxed{\left(2x^2+1\right)}}{(2x^2+1)^2}=\sqrt{2}arctg\left(\sqrt{2}x\right)-\dfrac{1}{4\left(\boxed{2x^2+1}\right)}+C$.

6.3. $\boxed{-tdt}$, $\boxed{1-t^2}$, $\boxed{1}$, $\boxed{\dfrac{t-1}{t+1}}$.

6.4. $\displaystyle\int\frac{2x^2}{1-x^2}dx=-2\int\frac{x^2}{\boxed{x^2-1}}dx=-2\int\frac{x^2-1+\boxed{1}}{x^2-1}dx=-2\int\left(1+\frac{\boxed{1}}{x^2-1}\right)dx=$

$$=-2\left(\boxed{x}-\frac{1}{2}ln\left|\frac{\boxed{1+x}}{1-x}\right|\right)+C.$$

6.5. $\int(2-3x)\cdot e^{\frac{x}{3}}dx=\left\|\begin{matrix} u=\boxed{2-3x}, \ du=\boxed{-3}dx \\ dv=e^{\frac{x}{3}}dx, \ v=3\cdot e^{\frac{x}{3}} \end{matrix}\right\|=\left(\boxed{2-3x}\right)\cdot 3\cdot e^{\frac{x}{3}}+\boxed{9}\cdot\int e^{\frac{x}{3}}dx=$

$=\left(\boxed{2-3x}\right)\cdot 3\cdot e^{\frac{x}{3}}+\boxed{27}\cdot e^{\frac{x}{3}}+C$.

6.6. $\int\sin^3 x\cdot\cos^2 xdx=\int\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\sin xdx=\left\|\begin{matrix} t=\cos x \\ dt=\boxed{-\sin x}\cdot dx \end{matrix}\right\|=$

$=-\int\left(1-\boxed{t^2}\right)\cdot t^2 dt=\int\left(t^{\boxed{4}}-t^2\right)dt=\frac{t^{\boxed{5}}}{\boxed{5}}-\frac{t^3}{3}+C=\boxed{\frac{1}{5}}\cdot\cos^{\boxed{5}}x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$.

6.7. $\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}=\boxed{2x}+\frac{1}{x^4+3x^2}$.

$\frac{1}{x^4+3x^2}=\frac{1}{\boxed{x^2}\cdot\left(x^2+3\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{\boxed{x^2}}+\frac{\boxed{Cx+D}}{x^2+3}$.

$1=(A+C)x^3+(B+D)x^2+\boxed{3A}\cdot x+\boxed{3B}$.

$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ \boxed{3A}=0 \\ \boxed{3B}=1 \end{cases}$ її розв'язок: $A=0, B=\boxed{\frac{1}{3}}, C=0, D=\boxed{-\frac{1}{3}}$.

$\int\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx=\int\left(\boxed{2x}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{\boxed{3}\cdot\left(x^2+3\right)}\right)dx=\boxed{x^2}-\frac{1}{3x}-$

$-\boxed{\frac{1}{3\sqrt{3}}}\cdot\mathrm{arctg}\frac{x}{\boxed{\sqrt{3}}}+C$.

6.8. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-4\right)}=\left\|\begin{matrix} x=t^{\boxed{3}} \\ dx=\boxed{3}\cdot t^{\boxed{2}}dt \end{matrix}\right\|=3\int\frac{t^{\boxed{2}}dt}{t(t-4)}=3\int\frac{\boxed{t}dt}{(t-4)}=$

$=3\int\frac{t-4+\boxed{4}}{t-4}dt=3\int\left(1+\frac{\boxed{4}}{t-4}\right)dt=3\left(t+\boxed{4}ln\left|\boxed{t-4}\right|\right)+C=$

$=3\cdot x^{\boxed{\frac{1}{3}}}+\boxed{12}ln\left|\boxed{x^{\frac{1}{3}}}-4\right|+C$.

Глава 7

7.1. 1) $\boxed{a}$, 2) $x_1=\boxed{-2}$, $x_2=\boxed{1}$, 3) $f_2(x)=\boxed{2-x^2}$, $f_1(x)=\boxed{x}$, $\left[\boxed{-2},\boxed{1}\right]$,

4) $S=\int\limits_{\boxed{-2}}^{\boxed{1}}\left(\left(2-x^2\right)-x\right)dx=\left(2x-\dfrac{x^3}{\boxed{3}}-\dfrac{x^2}{\boxed{2}}\right)\Bigg|_{\boxed{-2}}^{\boxed{1}}=$

$\left(2-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\right)-\left(\boxed{-1}\cdot 4+\dfrac{\boxed{8}}{3}-2\right)=\dfrac{\boxed{9}}{2}$.

7.2. 1) $\boxed{в}$, 2) $-\dfrac{\pi}{\boxed{4}}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{\boxed{4}}$, і $\dfrac{\boxed{3}\pi}{\boxed{4}}\le\varphi\le\dfrac{\boxed{5}\pi}{\boxed{4}}$, 3) $\boxed{2}$, 4) $\alpha=-\dfrac{\pi}{\boxed{4}}$ и $\beta=\dfrac{\pi}{\boxed{4}}$,

$S_1=\dfrac{a^2}{2}\int\limits_{\boxed{-\frac{\pi}{4}}}^{\boxed{\frac{\pi}{4}}}\cos 2\varphi d\varphi=\dfrac{a^2}{\boxed{2}}$, 5) $S=\boxed{2}\cdot S_1=a^2$, 6) $\boxed{a}$.

7.3. 1) $\boxed{2}$, межі інтегрування $\boxed{0}$ і $\boxed{2\pi}$; 2) $x_t'(t)=a\boxed{t}\cos t$, $y_t'(t)=a\boxed{t}\sin t$,

$\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2=a^{\boxed{2}}\cdot t^{\boxed{2}}$, $\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}=\boxed{a}\cdot t$.

3) $L=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\left(x'\right)^2+\left(y'\right)^2}dt=\boxed{a}\int\limits_0^{2\pi}tdt=\dfrac{at^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=\boxed{2}a\pi^{\boxed{2}}$.

7.4. 1) формула $\boxed{1}$; 2) $\left(y=\boxed{0}\right)$, межами інтегрування є точки $x=\boxed{0}$, $x=\boxed{3}$;

3) $y=\pm\dfrac{1}{3}\sqrt{x}\left|x-3\right|=\pm\dfrac{1}{3}\sqrt{x}\left(\boxed{3}-x\right)$, доножити на $\boxed{2}$;

4) $y'=\dfrac{\boxed{1}(1-x)}{\boxed{2}\sqrt{x}}$, $1+\left(y'\right)^2=\dfrac{\left(\boxed{1}+x\right)^2}{\boxed{4}x}$;

5) $L_1=\int\limits_0^{\boxed{3}}\dfrac{1+x}{\boxed{2}\sqrt{x}}dx=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\boxed{3}}x^{3/2}\right)\Bigg|_0^3=\boxed{2}\cdot\sqrt{3}$; 6) $L=2L_1=\boxed{4}\sqrt{3}$.

7.5. 2) $x_1=\boxed{1}$, $x_2=\boxed{2}$; 3) $\left[[1],[2]\right]$, $y_1=\boxed{x^2+1}$, $y_2=\boxed{3x-1}$;

4) $V=\pi\int\limits_{\boxed{1}}^{\boxed{2}}\left(\left(3x-1\right)^2-\left(x^2+1\right)^2\right)dx=$

$=\pi\int\limits_{\boxed{1}}^{\boxed{2}}\left(\boxed{7}x^2-\boxed{6}x-x^4\right)dx=\pi\left[\dfrac{\boxed{7}}{3}x^3-\boxed{3}x^2-\dfrac{x^5}{\boxed{5}}\right]\Bigg|_{\boxed{1}}^{\boxed{2}}=\dfrac{\boxed{17}}{\boxed{15}}\pi$.

7.6. $\boxed{2\pi}$. $V=\pi\int\limits_0^{\boxed{2\pi}} a^2(1-\cos t)^2\cdot a\left(\boxed{1-\cos t}\right)dt=$

$$=\pi a^3\int\limits_0^{\boxed{2\pi}}\left(1-3\cos t+3\boxed{\cos^2 t}-\cos^3 t\right)dt=$$

$$=\pi a^3\int\limits_0^{\boxed{2\pi}}\left(1-3\cos t+\frac{3}{2}\left(1+\boxed{\cos 2t}\right)-\left(1-\sin^2 t\right)\cos t\right)dt=$$

$$=\pi a^3\left[\left(\boxed{\frac{5}{2}}\cdot t-3\sin t+\frac{3}{4}\boxed{\sin 2t}\right)\Bigg|_0^{\boxed{2\pi}}-\int\limits_0^{\boxed{2\pi}}\left(1-\sin^2 t\right)d\left(\boxed{\sin t}\right)\right]=$$

$$=\pi a^3\left[\boxed{\frac{5}{2}}\cdot 2\pi-\left(\sin t-\frac{\sin^{\boxed{3}} t}{\boxed{3}}\right)\Bigg|_0^{\boxed{2\pi}}\right]=\boxed{5}\cdot\pi^2 a^3.$$

Глава 8

8.1. $\boxed{x^{\frac{1}{4}}}$, $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^{\boxed{\frac{1}{4}}}}$, $\boxed{\text{збігається}}$.

8.2. $\boxed{\text{розбігається}}$, $\boxed{\text{розбігається}}$.

8.3. $\boxed{1}$-го роду. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2+\boxed{1}}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\boxed{x+1}}{(x+1)^2+\boxed{1}}=arctg\boxed{x+1}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\boxed{-\frac{\pi}{2}}=\boxed{\pi}$.

8.4. $\boxed{2}$-го роду. $\int\limits_0^2\frac{dx}{(x-1)^2}=\int\limits_0^{\boxed{1}}\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\limits_{\boxed{1}}^2\frac{dx}{(x-1)^2}=\lim\limits_{b\to\boxed{1-0}}\int\limits_0^b\frac{d\boxed{x-1}}{(x-1)^2}+\lim\limits_{a\to\boxed{1+0}}\int\limits_a^2\frac{d\boxed{x-1}}{(x-1)^2}=$

$$\lim_{b\to\boxed{1-0}}\left(\frac{1}{\boxed{1-x}}\right)\Bigg|_0^b+\lim_{a\to\boxed{1+0}}\left(\frac{1}{\boxed{1-x}}\right)\Bigg|_a^2=\boxed{\infty}.$$

8.5. $a=\boxed{0}, b=\boxed{+\infty}$. $S=\int\limits_{\boxed{0}}^{\boxed{+\infty}}e^{-x/3}dx=\boxed{-3}\cdot e^{-x/3}\Big|_{\boxed{0}}^{\boxed{+\infty}}=\boxed{-3}\cdot\left(0-e^0\right)=\boxed{3}$.

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x/3}=\left\|\frac{1}{\boxed{\infty}}\right\|=\boxed{0}.$$

Відповіді до контрольних завдань

Глава 1

Завдання 1

1. 36. **2.** 2048. **3.** –108. **4.** –416. **5.** 0. **6.** 30. **7.** 6. **8.** 8. **9.** 48. **10.** 1. **11.** 160. **12.** 12. **13.** 900. **14.** –58. **15.** 21. **16.** 0. **17.** 30. **18.** **–**10. **19.** 8. **20.** 28. **21.** 0. **22.** 0. **23.** 132. **24.** 24. **25.** –20. **26.** 30. **27.** –160. **28.** –32. **29.** 16. **30.** –70.

Завдання 2

1. (–1;2;0;1). **2.** (1;0;–1;0). **3.** (–1;2;1;5). **4.** (1;–2;1;1). **5.** (1;–1;–1;1). **6.** (2;–1;1;2). **7.** (–1;2;1;5). **8.** (1;1;–1;–1). **9.** (1;2; –1;–2). **10.** (–2;2;–3;3). **11.** (1,5;3;2;–0,5). **12.** (2;0;0;0). **13.** (1;–1;1;–1;1). **14.** (1;–1;0;2). **15.** (–2;2;–3;3). **16.** (–1;–1;0;1). **17.** (–1;2;0;1). **18.** (1;0;–1;0). **19.** (–1;2;4;3). **20.** (2;1;–3;1). **21.** (1;1;1;–2). **22.** (1;2;–2). **23.** (–5/2;10;17/2). **24.** (–8;3;6;0). **25.** (–2;1;4;3). **26.** (–1;3;–2;2). **27.** (2;0;0;0). **28.** (1;1;0;0). **29.** (–8;3;6;0). **30.** (3;1;–2;0).

Завдання 3

1. (3;1;–1). **2.** (7;2;1). **3.** (1;1;2). **4.** (5;–2;3). **5.** (3;1;1). **6.** (–2;1;–1). **7.** (2;–1;1). **8.** (2;2;–3). **9.** (2;–1;3). **10.** (1;1;1). **11.** (2;–2;3). **12.** (3;4;5). **13.** (2;3;5). **14.** (3;1;1). **15.** (1;2;–2). **16.** (2;1;3). **17.** (1;2;3). **18.** (2;–1;1). **19.** (1;2;3). **20.** (2;2;–3). **21.** (2;1;0). **22.** (–3;1;–1). **23.** (–10/9;–2/3;–17/15). **24.** (4;2;1). **25.** (11;4;–5). **26.** (1;–1;1). **27.** (2;1;0). **28.** (1/3;–10/3;5/3). **29.** (0;–1;1). **30.** (1;–1;–1).

Завдання 5

1. $\begin{pmatrix} 136 & 420 & 992 \\ 178 & 466 & 806 \\ 218 & 686 & 1622 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 60 & 48 & 36 \\ 42 & 51 & 33 \\ 18 & 15 & 21 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} 20 & -52 & 28 \\ 26 & -18 & 38 \\ 12 & -44 & 16 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 15 & 99 & -27 \\ -39 & -3 & -9 \\ -27 & -45 & 9 \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} 70 & 30 & -15 \\ -120 & -50 & 30 \\ -105 & -135 & 60 \end{pmatrix}$. **6.** $\begin{pmatrix} -32 & 10 & 42 \\ -26 & -6 & -14 \\ -12 & -10 & -28 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} -16 & -2 & -23 \\ 24 & 10 & 14 \\ -12 & 22 & -5 \end{pmatrix}$. **8.** $\begin{pmatrix} 18 & -2 & 1 \\ 7 & 5 & 7 \\ 11 & 5 & 15 \end{pmatrix}$. **9.** $\begin{pmatrix} -50 & -22 & 66 \\ -52 & -70 & 132 \\ 78 & -50 & -8 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} -4 & -13 & 1 \\ 36 & 46 & 18 \\ 93 & 121 & 73 \end{pmatrix}$. **11.** $\begin{pmatrix} 90 & 30 & 60 \\ -70 & -12 & -184 \\ -50 & -8 & -96 \end{pmatrix}$. **12.** $\begin{pmatrix} -44 & -10 & 8 \\ 23 & 0 & -5 \\ 3 & -16 & -22 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 103 & 62 & -1 \\ 222 & 131 & 5 \\ 180 & 102 & 13 \end{pmatrix}$. **14.** $\begin{pmatrix} 0 & -46 & 28 \\ -14 & 4 & -8 \\ -8 & 2 & -8 \end{pmatrix}$. **15.** $\begin{pmatrix} 8 & 43 & -36 \\ 0 & 8 & -8 \\ 3 & 45 & 2 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} -66 & -146 & 18 \\ 82 & 70 & -2 \\ -46 & -42 & -6 \end{pmatrix}$. **17.** $\begin{pmatrix} 66 & 128 & -32 \\ 24 & 42 & 22 \\ 8 & 12 & 10 \end{pmatrix}$. **18.** $\begin{pmatrix} 39 & -42 & 3 \\ 69 & -105 & -48 \\ -12 & 21 & -9 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 1 & 12 & -16 \\ -2 & 0 & -13 \\ -16 & 9 & 13 \end{pmatrix}$. **20.** $\begin{pmatrix} 18 & -2 & 1 \\ 7 & 5 & 7 \\ 11 & 5 & 15 \end{pmatrix}$. **21.** $\begin{pmatrix} 26 & -44 & 24 \\ 44 & -64 & 36 \\ -10 & 18 & -10 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 168 & 30 & 18 \\ 21 & 12 & 6 \\ -42 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. **23.** $\begin{pmatrix} 42 & 6 & 18 \\ -12 & 0 & -30 \\ 12 & 0 & 44 \end{pmatrix}$. **24.** $\begin{pmatrix} 9 & -3 & -7 \\ 14 & -4 & -11 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} -28 & -10 & -28 \\ 6 & 2 & 4 \\ 14 & 10 & -12 \end{pmatrix}$. **26.** $\begin{pmatrix} 21 & 4 & 2 \\ -18 & -1 & -14 \\ 0 & -6 & 11 \end{pmatrix}$. **27.** $\begin{pmatrix} 44 & -31 & 7 \\ 12 & 31 & -42 \\ 34 & -16 & 7 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} -5 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -2 \\ -4 & -6 & -4 \end{pmatrix}$. **29.** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -6 \\ 0 & 6 & -11 \\ -6 & 11 & -18 \end{pmatrix}$. **30.** $\begin{pmatrix} -8 & 20 & -10 \\ 1 & -16 & 8 \\ -36 & 156 & -78 \end{pmatrix}$.

Глава 2

Завдання 2

1. (1;2;3;4). **2.** (3;4;5;6). **3.** (4;5;6;7). **4.** (5;6;7;8). **5.** (1;–1;1;1). **6.** (6;7;8;9). **7.** (8;9;0;1). **8.** (9;0;1;2). **9.** (1;1;0;–1). **10.** (1;2;3;4). **11.** (0;1;2;–1). **12.** (2;1;–1;1). **13.** Не утворюють базис. **14.** (5;6;7;8). **15.** (6;7;8;9). **16.** (7;8;9;0). **17.** (3;4;1;2). **18.** (1;1;2;0). **19.** (0;1;–1;1). **20.** (–2;2;–3;3). **21.** (1.571;–4.571; 2.571;–1.714). **22.** (–66;43;–15;28). **23.** (2;2;–5;–9). **24.** Не утворюють базис. **25.** (–3.111;1.889;–1;0.222). **26.** (10.75;–5;7.25;–6). **27.** (–0.117;–0.191; 0.602; –0.053). **28.** (0.417;0.917;–1.583;0.417). **29.** (423;–628;66;–110). **30.** (–5;–0.5;3;–1.5).

Завдання 3

1. $\lambda_1 = -2,\ \vec{X}^{(1)} = (0;0;1);\ \lambda_2 = 1,\ \vec{X}^{(2)} = (1;-1;1);\ \lambda_3 = 5,\ \vec{X}^{(3)} = (7;7;3)$.

2. $\lambda_1 = -1,\ \vec{X}^{(1)} = (0;1;2);\ \lambda_2 = 2,\ \vec{X}^{(2)} = (-3;2;-17);\ \lambda_3 = 3,\ \vec{X}^{(3)} = (0;1;-2)$.

3. $\lambda_1=-1,\ \vec{X}^{(1)}=(0;0;1);\ \lambda_2=2,\ \vec{X}^{(2)}=(-3;9;5);\ \lambda_3=6,\ \vec{X}^{(3)}=(7;7;3).$

4. $\lambda_1=-3,\ \vec{X}^{(1)}=(0;7;-11);\ \lambda_2=1,\ \vec{X}^{(2)}=(28;-87;35);\ \lambda_3=8,\ \vec{X}^{(3)}=(0;1;0).$

5. $\lambda_1=-2,\ \vec{X}^{(1)}=(-4;3;0);\ \lambda_2=1,\ \vec{X}^{(2)}=(1;0;0);\ \lambda_3=3,\ \vec{X}^{(3)}=(33;4;10).$

6. $\lambda_1=-2,\ \vec{X}^{(1)}=(-7;3;-3);\ \lambda_2=1,\ \vec{X}^{(2)}=(1;0;0);\ \lambda_3=3,\ \vec{X}^{(3)}=(29;15;3).$

7. $\lambda_1=-1,\ \vec{X}^{(1)}=(0;0;1);\ \lambda_2=1,\ \vec{X}^{(2)}=(6;4;-5);\ \lambda_3=2,\ \vec{X}^{(3)}=(-3;-3;2).$

9. $\lambda_1=-1,\ \vec{X}^{(1)}=(0;0;1);\ \lambda_2=2,\ \vec{X}^{(2)}=(0;1;1);\ \lambda_3=4,\ \vec{X}^{(3)}=(10;15;13).$

10. $\lambda_1=1,\ \vec{X}^{(1)}=(7;-9;3);\ \lambda_2=2,\ \vec{X}^{(2)}=(-3;2;0);\ \lambda_3=4,\ \vec{X}^{(3)}=(1;0;0).$

11. $\lambda_1=-2,\ \vec{X}^{(1)}=(0;0;1);\ \lambda_2=-1,\ \vec{X}^{(2)}=(1;-1;3);\ \lambda_3=5,\ \vec{X}^{(3)}=(7;7;3).$

12. $\lambda_1=-3,\ \vec{X}^{(1)}=(0;1;1);\ \lambda_2=-2,\ \vec{X}^{(2)}=(0;1;2);\ \lambda_3=2,\ \vec{X}^{(3)}=(10;7;12).$

13. $\lambda_1=1,\ \vec{X}^{(1)}=(-1;1;0);\ \lambda_2=2,\ \vec{X}^{(2)}=(0;0;1);\ \lambda_3=6,\ \vec{X}^{(3)}=(16;4;15).$

14. $\lambda_1=-3,\ \vec{X}^{(1)}=(0;3;-8);\ \lambda_2=1,\ \vec{X}^{(2)}=(16;-33;28);\ \lambda_3=5,\ \vec{X}^{(3)}=(0;1;0).$

15. $\lambda_1=1,\ \vec{X}^{(1)}=(2;9;-3);\ \lambda_2=2,\ \vec{X}^{(2)}=(-1;2;0);\ \lambda_3=4,\ \vec{X}^{(3)}=(1;0;0).$

16. $\lambda_1=0,\ \vec{X}^{(1)}=(0;-1;7);\ \lambda_2=1,\ \vec{X}^{(2)}=(0;0;1);\ \lambda_3=4,\ \vec{X}^{(3)}=(12;3;-13).$

17. $\lambda_1=-4,\ \vec{X}^{(1)}=(1;0;0);\ \lambda_2=-1,\ \vec{X}^{(2)}=(1;3;-3);\ \lambda_3=2,\ \vec{X}^{(3)}=(1;2;0).$

18. $\lambda_1=-1,\ \vec{X}^{(1)}=(-7;4;16);\ \lambda_2=2,\ \vec{X}^{(2)}=(-1;1;1);\ \lambda_3=3,\ \vec{X}^{(3)}=(1;0;0).$

19. $\lambda_1=-1,\ \vec{X}^{(1)}=(2;0;-5);\ \lambda_2=2,\ \vec{X}^{(2)}=(-5;2;2);\ \lambda_3=4,\ \vec{X}^{(3)}=(1;0;0).$

20. $\lambda_1=-1,\ \vec{X}^{(1)}=(1;0;0);\ \lambda_2=2,\ \vec{X}^{(2)}=(1;9;-12);\ \lambda_3=5,\ \vec{X}^{(3)}=(1;0;3).$

21. $\lambda_1=-2,\ \vec{X}^{(1)}=(1;0;0);\ \lambda_2=1,\ \vec{X}^{(2)}=(1;-1;1);\ \lambda_3=5,\ \vec{X}^{(3)}=(3;7;7).$

22. $\lambda_1=-1,\ \vec{X}^{(1)}=(-1;2;1);\ \lambda_2=3,\ \vec{X}^{(2)}=(1;-2;1);\ \lambda_3=7,\ \vec{X}^{(3)}=(1;0;0).$

23. $\lambda_1=-1,\ \vec{X}^{(1)}=(1;0;0);\ \lambda_2=2,\ \vec{X}^{(2)}=(-5;-9;3);\ \lambda_3=6,\ \vec{X}^{(3)}=(3;7;7).$

24. $\lambda_1=-3,\ \vec{X}^{(1)}=(1;0;0);\ \lambda_2=1,\ \vec{X}^{(2)}=(7;-12;20);\ \lambda_3=6,\ \vec{X}^{(3)}=(1;9;0).$

25. $\lambda_1=1,\ \vec{X}^{(1)}=(0;0;1);\ \lambda_2=2,\ \vec{X}^{(2)}=(0;1;4);\ \lambda_3=4,\ \vec{X}^{(3)}=(1;1;3).$

26. $\lambda_1=1,\ \vec{X}^{(1)}=(0;4;1);\ \lambda_2=2,\ \vec{X}^{(2)}=(3;18;7);\ \lambda_3=5,\ \vec{X}^{(3)}=(0;0;1).$

27. $\lambda_1=-1,\ \vec{X}^{(1)}=(1;2;0);\ \lambda_2=1,\ \vec{X}^{(2)}=(1;0;0);\ \lambda_3=4,\ \vec{X}^{(3)}=(-8;9;15).$

28. $\lambda_1=-2,\ \vec{X}^{(1)}=(-3;5;0);\ \lambda_2=-3,\ \vec{X}^{(2)}=(7;-18;6);\ \lambda_3=3,\ \vec{X}^{(3)}=(1;0;0).$

29. $\lambda_1=-2,\ \vec{X}^{(1)}=(0;1;0);\ \lambda_2=1,\ \vec{X}^{(2)}=(2;-4;3);\ \lambda_3=2,\ \vec{X}^{(3)}=(-2;1;0).$

30. $\lambda_1=1,\ \vec{X}^{(1)}=(4;-3;1);\ \lambda_2=2,\ \vec{X}^{(2)}=(-2;1;0);\ \lambda_3=3,\ \vec{X}^{(3)}=(1;0;0).$

Глава 3

Завдання 2

1. $y+5=-\frac{1}{4}(x-3)^2$. **2.** $(x-1)^2+(y-3)^2=9$. **3.** $\frac{(x+3)^2}{4}-(y-2)^2=1$.

4. $\frac{(x+9)^2}{104}+\frac{(y+2)^2}{26}=1$. **5.** $(y+4)^2=2(x+3)$. **6.** $\frac{(x+2)^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$.

7. $\frac{x^2}{8}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$. **8.** $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{5}=1$. **9.** $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$.

10. $y+7=\frac{1}{4}(x-5)^2$. **11.** $-\frac{(x-3)^2}{3}+(y-2)^2=1$. **12.** $(x-3)^2+(y-4)^2=16$.

13. $2(y-2)^2=-(x-5)$. **14** $-\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$. **15.** $(x-7)^2+(y-4)^2=25$.

16. $2(y-1)^2=-(x-10)$. **17.** $-\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{12}=1$. **18.** $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$.

19. $\frac{(x-4)^2}{4}-y^2=1$. **20.** $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{5}=1$. **21.** $(x-2)^2-(y-1)^2=1$.

22. $\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$. **23.** $y+3=-2(x-2)^2$. **24.** $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$.

25. $(x-1)^2+(y+3)^2=16$. **26.** $\frac{(x+5)^2}{64}-\frac{(y-1)^2}{36}=1$. **27.** $\frac{(x-1)^2}{12}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$.

28. $(x+2)^2+y^2=9$. **29.** $\frac{(x-1)^2}{25/4}-(y+2)^2=1$. **30.** $y+3=-4(x-1)^2$.

Завдання 3

1. $O_1(1{,}0),\ \alpha=-\frac{\pi}{4},\ -\frac{x_2^2}{2}+\frac{y_2^2}{2/3}=1$. **2.** $O_1(1{,}1),\ \alpha=\frac{\pi}{4},\ x_2^2+\frac{y_2^2}{3}=1$.

3. $O_1(1,-1),\ \alpha=\frac{\pi}{4},\ -\frac{x_2^2}{2}+\frac{y_2^2}{2}=1$. **4.** $O_1(-1{,}1),\ \alpha=\frac{\pi}{4},\ x_2^2+\frac{y_2^2}{3}=-1$.

5. $O_1(-1{,}0),\ \alpha=\frac{\pi}{4},\ x_2^2+5y_2^2=-1$. **6.** $O_1(-1,-1),\ \alpha=-\frac{\pi}{4},\ x_2^2-y_2^2=1$.

7. $O_1(0,-1),\ \alpha=\frac{\pi}{4},\ -x_2^2+\frac{y_2^2}{3}=1$. **8.** $O_1(1,-1),\ \alpha=\frac{\pi}{4},\ \frac{x_2^2}{3}+\frac{y_2^2}{9/5}=1$.

9. $O_1(1,-1),\ \alpha=\frac{\pi}{4},\ \frac{x_2^2}{3}-\frac{y_2^2}{2}=1$. **10.** $\alpha=-\frac{\pi}{4},\ y_1=4\sqrt{2}\pm\sqrt{31}$**.**

11. $O_1(0,2),\ \alpha=-\frac{\pi}{4},\ \frac{x_2^2}{5}-\frac{y_2^2}{5/3}=1$. **12.** $\alpha=-\frac{\pi}{4},\ y_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm 2$.

13. $O_1(-1,1),\ \alpha=\frac{\pi}{4},\ \frac{x_2^2}{5}-\frac{y_2^2}{5}=1$. **14.** $O_1\left(-6/5,-6/5\right),\ \alpha=-\frac{\pi}{4},\ \frac{x_2^2}{77/15}+\frac{y_2^2}{77/25}=-1$.

15. $O_1(0,-2),\ \alpha=-\frac{\pi}{4},\ \frac{x_2^2}{13}+\frac{y_2^2}{13/5}=-1$. **16.** $O_1(2,-2),\ \alpha=-\frac{\pi}{4},\ \frac{x_2^2}{41}-\frac{y_2^2}{41/5}=1$.

17. $O_1(1,0),\ \alpha=\frac{\pi}{4},\ \frac{x_2^2}{2}+\frac{y_2^2}{1}=-1$. **18.** $O_1(-1,-1),\ \alpha=\frac{\pi}{4},\ -\frac{x_2^2}{1/2}+\frac{y_2^2}{1/2}=1$.

19. $O_1(-1,0),\ \alpha=\frac{\pi}{4},\ \frac{x_2^2}{2}+\frac{y_2^2}{4/5}=1$. **20.** $O_1(1,-1),\ \alpha=\frac{\pi}{4},\ -\frac{x_2^2}{5}+\frac{y_2^2}{5}=1$.

21. $O_1(-1,0),\ \alpha=\frac{\pi}{4},\ \frac{x_2^2}{3/2}+\frac{y_2^2}{1}=-1$. **22.** $\alpha=-\frac{\pi}{4},\ y_1=-\sqrt{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

23. $\alpha=\frac{\pi}{4},\ y_1^2=\sqrt{2}\left(x_1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$. **24.** $\alpha=\frac{\pi}{4},\ y_1^2=2\sqrt{2}\left(x_1-\frac{1}{8\sqrt{2}}\right)$**.**

25. $O_1(2,0),\ \alpha=-\frac{\pi}{4},\ \frac{x_2^2}{13/2}+\frac{y_2^2}{13/4}=-1$. **26.** $O_1(2,2),\ \alpha=-\frac{\pi}{4},\ \frac{x_2^2}{15/2}-\frac{y_2^2}{15/2}=1$.

27. $O_1(-1,1),\ \alpha=\frac{\pi}{4},\ \frac{x_2^2}{1}+\frac{y_2^2}{1/3}=0$. **28.** $O_1(0,-1),\ \alpha=-\frac{\pi}{4},\ -\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{4/3}=1$**.**

29. $O_1(1,-1),\ \alpha=\frac{\pi}{4},\ y_2=\pm x_2$. **30.** $O_1(-2,-2),\ \alpha=\frac{\pi}{4},\ \frac{x_2^2}{9}+\frac{y_2^2}{9/5}=-1$.

Завдання 5

1. *а)* $x-y-z=0$; *б)* $h=\sqrt{22}$; *в)* $(\vec{S}_1,\vec{S}_2)=0$. **2.** *а)* $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+5}{-5}$; *б)* Пряма лежить у площині; *в)* $2x-16y-13z+31=0$. **3.** *а)* $x+2y+3z-8=0$; *б)* $\begin{cases} x=5t-1, \\ y=-11t+4, \\ z=4t-2. \end{cases}$; *в)* $B(1,-2,2)$. **4.** *а)* $8x-22y+z-48=0$; *б)* $d-15$;

5. *в*) $B(4{,}1{,}-3)$. **5.** *а*) $2x-3y-z+15=0$; *б*) $\frac{x-2}{40}=\frac{y-2}{29}=\frac{z-1}{-17}$; *в*) $d=\frac{19}{11}$.

6. *а*) $\cos\varphi=-1/10$; *б*) $2x-3z+15=0$; *в*) $P(4{,}4{,}-2)$.

7. *а*) $\cos\alpha=\cos\gamma=6/11$, $\cos\beta=7/11$; *б*) $x-y+z=0$; *в*) $B(2{,}-3{,}2)$.

8. *а*) $B\left(5\frac{14}{83},-\frac{58}{83},\frac{80}{83}\right)$; *б*) $8x-9y-22z-59=0$; *в*) $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-7}$.

9. *а*) $\frac{x-27}{9}=\frac{y-15}{5}=z$; *б*) $13x+11y+19z-40=0$; *в*) $A(2{,}-3{,}6)$.

10. *а*) $6x-26y+13z+95=0$; *б*) $\cos\alpha=4/13$, $\cos\beta=-3/13$, $\cos\gamma=12/13$; *в*) не перпендикулярні. **11.** *а*) $7x+y-3z=0$; *б*) $B(-5{,}1{,}0)$; *в*) $d=25$.

12. *а*) $27x+11y+z-65=0$; *б*) $A(-72{,}25{,}114)$. **13.** *а*) $x-y-z=0$; *б*) $d=\sqrt{22}$; *в*) $c=-2$. **14.** *а*) $2x-3z-27=0$; *б*) $d=\sqrt{22}$; *в*) $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+5}{-5}$. **15.** *а*) $x+4y+7z+16=0$; *б*) $B\left(\frac{29}{7},-\frac{19}{7},\frac{10}{7}\right)$; *в*) $\cos\varphi=1/2$. **16.** *а*) $4x-y-2z-9=0$; *б*) $x-5=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{-11}$; *в*) $d=\sqrt{\frac{557}{17}}$.

17. *а*) $7x+y-5z=0$; *б*) прямі не паралельні. *в*) $B\left(\frac{339}{83},-\frac{112}{83},\frac{206}{83}\right)$.

18. *а*) $3x-16y+13z=0$; *б*) $2y-z+4=0$; *в*) $m=-3$.

19. *а*) $6x-5y+13z-41=0$; *б*) $2x-16y-13z+31=0$.

20. *а*) $13x-14y+11z+51=0$; *б*) $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-1}$; *в*) $10x+9y+5z-74=0$.

21. *а*) $\begin{cases}2x+3y+4z-13=0,\\ x+3y+1=0,\\ z-3=0.\end{cases}$ *б*) $7x-16y-11z+19=0$; *в*) $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-7}$, $B\left(\frac{279}{83},-\frac{145}{83},\frac{290}{83}\right)$. **22.** *а*) $B(-2{,}1{,}4)$; *б*) $B\left(\frac{674}{363},-\frac{373}{363},\frac{353}{363}\right)$; *в*) $13x+11y+19z-40=0$. **23.** *а*) $7x+y-3z=0$; *б*) $2x-16y-13z+31=0$; *в*) $h=\sqrt{22}$. **24.** *а*) $B(2{,}-3{,}5)$; *б*) $\frac{x-1}{2}=y=\frac{z-4}{-3}$; *в*) $\cos\varphi=4/13$.

25. *а*) $27x+11y+z-65=0$; *б*) $d=\sqrt{\frac{557}{17}}$; *в*) $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-1}$.

26. *а)* $x-8y-13z+9=0$; *б)* $\cos\varphi\approx 0{,}77$; *в)* $A(0{,}0{,}-2)$. **27.** *а)* $d=7$; *б)* $\frac{x-2}{9}=\frac{y+5}{5}=z-3$; *в)* $P^*(2{,}9{,}6)$. **28.** *а)* $\frac{x}{33}=\frac{y}{-26}=\frac{z}{27}$; *б)* $A\left(\frac{674}{363},-\frac{373}{363},\frac{353}{363}\right)$; *в)* $d\approx 8{,}78$. **29.** *а)* $2x-16y-13z+31=0$; *б)* так; *в)* $h=27$. **30.** *а)* $2x-22y+z-48=0$; *б)* $3x+2y-5z=0$; *в)* $V=1$(*куб.од.*).

Глава 4

Завдання 1

1. *а)* 10; *б)* 0; *в)* 0; *г)* $\frac{11}{13}$; *д)* $\frac{3}{16}$; *е)* $\frac{3}{2}$; *ж)* $\frac{1}{e}$. **2**. *а)* 2640; *б)* ∞; *в)* $\frac{5\sqrt{3}}{6}$; *г)* 0; *д)* $-\frac{1}{3}$; *е)* 1; *ж)* 2. **3**. *а)* $\frac{40}{7}$; *б)* ∞; *в)* ∞; *г)* ∞; *д)* 4; *е)* $\frac{1}{2}$; *ж)* $\frac{2}{3}$. **4**. *а)* – 14; *б)* ∞; *в)* 0; *г)* $\frac{1}{5}$; *д)* $\frac{2}{3}$; *е)* 8; *ж)* $e^{\frac{2}{3}}$. **5**. *а)* – 5; *б)* $\frac{4}{5}$; *в)* $\frac{3}{2}$; *г)* 0; *д)* 1; *е)* $\frac{5}{3}$; *ж)* – 5. **6**. *а)* – 17; *б)* $\frac{7}{2}$; *в)* 2; *г)* $\frac{1}{7}$; *д)* 3; *е)* 2; *ж)* – 1. **7**. *а)* $-\frac{45}{4}$; *б)* 0; *в)* 0; *г)* $\frac{23}{8}$; *д)* $\frac{1}{4}$; *е)* $-\frac{3}{2}$; *ж)* $e^{\frac{3}{2}}$. **8**. *а)* $-\frac{40}{3}$; *б)* $\frac{4}{3}$; *в)* ∞; *г)* ∞; *д)* $\frac{3}{2}$; *е)* $\cos a$; *ж)* 3. **9**. *а)* $-\frac{1}{2}$; *б)* ∞; *в)* $\frac{7}{2}$; *г)* 1; *д)* ∞; *е)* $\frac{1}{3}$; *ж)* $\frac{1}{2}$. **10**. *а)* 45; *б)* ∞; *в)* 2; *г)* $\frac{1}{2}$; *д)* $\frac{1}{3}$; *е)* $\frac{5}{3}$; *ж)* $e^{\frac{1}{2}}$. **11**. *а)* – 5; *б)* $\frac{7}{12}$; *в)* 0; *г)* 0; *д)* $\frac{1}{2\sqrt{a}}$; *е)* 2; *ж)* $\frac{1}{a}$. **12**. *а)* $\frac{16}{5}$; *б)* 0; *в)* 3; *г)* ∞; *д)* $\frac{1}{3}$; *е)* 8; *ж)* 2. **13**. *а)* $-\frac{19}{6}$; *б)* ∞; *в)* ∞; *г)* 3; *д)* $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; *е)* $\frac{4}{3}$; *ж)* $e^{\frac{1}{4}}$. **14**. *а)* – 3; *б)* 0; *в)* ∞; *г)* ∞; *д)* – 2; *е)* $\frac{2}{\pi}$; *ж)* – 4. **15**. *а)* 9; *б)* $\frac{11}{3}$; *в)* 0; *г)* $-\frac{190}{11}$; *д)* $-\frac{1}{56}$; *е)* $-\sin a$; *ж)* e^5. **16**. *а)* 12; *б)* 0; *в)* ∞; *г)* ∞; *д)* $\frac{2}{3}$; *е)* $\frac{2}{9}$; *ж)* 1. **17**. *а)* – 60; *б)* ∞; *в)* 0; *г)* $\frac{4}{11}$; *д)* 4; *е)* $\frac{1}{3}$; *ж)* ln2. **18**. *а)* $-\frac{27}{11}$; *б)* $\frac{8}{5}$; *в)* 1; *г)* 0; *д)* $\frac{3}{2}$; *е)* 9; *ж)* e^{10}. **19**. *а)* 0; *б)* ∞; *в)* ∞; *г)* ∞; *д)* $\frac{1}{2}$; *е)* $\frac{1}{2}$; *ж)* $-\frac{2}{3}$. **20**. *а)* – 15; *б)* $\frac{5}{6}$; *в)* $\sqrt[3]{3}$; *г)* $\frac{8}{9}$; *д)* 2; *е)* $\frac{5}{4}$; *ж)* $-\frac{3}{2}$. **21**. *а)* – 18; *б)* 0; *в)* 2; *г)* 0; *д)* $\frac{2}{3}$; *е)* $\frac{2}{\pi}$;

ж) e^3. **22**. *а*) 9; *б*) 0; *в*) $\sqrt{\frac{5}{2}}$; *г*) ∞; *д*) $\frac{9}{2}$; *е*) $\frac{\sin 2a}{2a}$; *ж*) – 2. **23**. *а*) – 13; *б*) ∞; *в*) $\sqrt[4]{\frac{25}{2}}$; *г*) $\frac{4}{9}$; *д*) $\frac{1}{6}$; *е*) $-\frac{1}{2}$; *ж*) $\frac{2}{3}\ln 2$. **24**. *а*) $-\frac{5}{2}$; *б*) ∞; *в*) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; *г*) ∞; *д*) $-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; *е*) 0; *ж*) e^{-2}. **25**. *а*) – 3; *б*) ∞; *в*) ∞; *г*) ∞; *д*) $\frac{1}{2}$; *е*) 2; *ж*) – 4.

26. *а*) $-\frac{61}{2}$; *б*) 0; *в*) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{7}}$; *г*) $-\frac{3}{2}$; *д*) $\frac{27}{8}$; *е*) 3; *ж*) $\ln 2$. **27**. *а*) 60; *б*) $\frac{3}{4}$; *в*) ∞; *г*) $\frac{3}{\sqrt{7}}$; *д*) $\frac{1}{40}$; *е*) $2\cos a$; *ж*) e^{-4}. **28**. *а*) $69\frac{1}{8}$; *б*) ∞; *в*) ∞; *г*) ∞; *д*) 9; *е*) $-\frac{4}{3}$; *ж*) – 10. **29**. *а*) 6; *б*) 2; *в*) $\frac{1}{\sqrt[4]{7}}$; *г*) $-\frac{1}{3}$; *д*) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; *е*) π; *ж*) $\frac{e^{-2}-e}{5}$. **30**. *а*) $\frac{5}{4}$; *б*) 0; *в*) 1; *г*) $2\sqrt{2}$; *д*) 0; *е*) 2; *ж*) – 10.

Завдання 3

1. 1. *а*) 9/4; *б*) 3/7. **2.** *а*) –8/63; *б*) $-2\big/21\sqrt[3]{4}$. **3.** *а*) –49/6; *б*) $\ln\frac{2}{3}\Big/2\pi$. **4.** $25e^{-2\pi}$. **5.** $-2\cos^2 3$. **6.** $-\sqrt{3}/3$. **7.** *а*) $\begin{cases}0, & x\to+\infty\\ \infty, & x\to-\infty\end{cases}$; *б*) e^9; *в*) $\begin{cases}\infty, & x\to+\infty\\ 0, & x\to-\infty\end{cases}$. **8.** $e^{0.3}$. **9.** $\sqrt{e^{21}}$.

2. 1. *а*) 19/17; *б*) –4/7. **2.** а) –1/2; *б*) 1/84. **3.** *а*) 3; *б*) $-\pi^2(\ln 2)/3$. **4.** –3/2. **5.** ∞. **6.** $-\pi/(8\ln 2)$. **7.** *а*) 1; *б*) 1; *в*) 1. **8.** 0. **9.** $e^{-1/2}$.

3. 1. *а*) –3/2; *б*) ∞. **2.** *а*) 1/24; *б*) –1/27. **3.** *а*) $-1/\pi$; *б*) $-8/9\pi$. **4.** $6(\ln 3)/\pi$. **5.** 9/2. **6.** $-1\big/\left(2\pi^2\right)$. **7.** *а*) $\begin{cases}0, & x\to+\infty\\ \infty, & x\to-\infty\end{cases}$; *б*) $e^{-5/4}$; *в*) $\begin{cases}\infty, & x\to+\infty\\ 0, & x\to-\infty\end{cases}$. **8.** $-\cos^2 3/\ln 2$. **9.** $e^{1/\pi}$.

4. 1. *а*) 4/3; *б*) 5. **2.** *а*) 1/8; *б*) –1/6. **3.** *а*) $5(\ln 2)/\pi$; *б*) $4\pi^2/5$. **4.** $-e^{2\pi}/2$. **5.** $-81(\ln 3)/\pi$. **6.** 0. **7.** *а*) $e^{-1/3}$; *б*) $\begin{cases}0, & x\to+\infty\\ \infty, & x\to-\infty\end{cases}$; *в*) $\begin{cases}\infty, & x\to+\infty\\ 0, & x\to-\infty\end{cases}$. **8.** $-8\ln 2$. **9.** e^2.

5. 1. *а*) 0; *б*) ∞. **2.** *а*) 1/2; *б*) 1/3. **3.** *а*) 3/10; *б*) $-(\ln 5)/2$. **4.** $-\pi/2$. **5.** 0. **6.** ∞. **7.** *а*) $\begin{cases}0, & x\to+\infty\\ \infty, & x\to-\infty\end{cases}$; *б*) e^{-6}; *в*) e^{-12}. **8.** $e^{-2/9}$. **9.** 9/4.

6. 1. *а*) –9/5; *б*) 0. **2.** *а*) –7/4; *б*) –1/16. **3.** *а*) $-(\ln 4)/6$; *б*) $4/\ln 2$. **4.** $-2\pi^3$. **5.** $1/\left(12\cos^2 1\right)$. **6.** $-e/4$. **7.** *а*) $\begin{cases} 0, & x\to+\infty \\ \infty, & x\to-\infty \end{cases}$; *б*) $\begin{cases} \infty, & x\to+\infty \\ 0, & x\to-\infty \end{cases}$; *в*) 1. **8.** 1. **9.** e^2.

7. 1. *а*) 0; *б*) –1/2. **2.** *а*) $-\sqrt[3]{16}$; *б*) –1/32. **3.** *а*) 1/8; *б*) $\ln 3\cdot\ln 2$. **4.** $-\pi/4$. **5.** $\sqrt{3}/2$. **6.** $1/\left(4\sin\frac{\pi}{7}\cos^2 7\right)$. **7.** *а*) $e^{-1/3}$; *б*) $\begin{cases} \infty, & x\to+\infty \\ 0, & x\to-\infty \end{cases}$; *в*) $\begin{cases} 0, & x\to+\infty \\ \infty, & x\to-\infty \end{cases}$.
8. 1. **9.** 1.

8. 1. *а*) –5/13; *б*) 0. **2.** *а*) 0; *б*) ∞. **3.** *а*) $-9(\ln 3)/2$; *б*) –1/20. **4.** ∞. **5.** $-10/3\pi$. **6.** $tg 4$. **7.** *а*) $e^{-4/3}$; *б*) $\begin{cases} \infty, & x\to+\infty \\ 0, & x\to-\infty \end{cases}$; *в*) $\begin{cases} 0, & x\to+\infty \\ \infty, & x\to-\infty \end{cases}$. **8.** e^{-3}. **9.** 1.

9. 1. *а*) –11/8; *б*) 17/12. **2.** *а*) 3/2; *б*) $\sqrt{2}/3$. **3.** *а*) –1/6; *б*) $(\ln 10\cdot\ln 3)/10$. **4.** $-6\sqrt{3}$. **5.** –8. **6.** $4/\cos 2$. **7.** *а*) $e^{1/2}$; *б*) $\begin{cases} \infty, & x\to+\infty \\ 0, & x\to-\infty \end{cases}$; *в*) $\begin{cases} 0, & x\to+\infty \\ \infty, & x\to-\infty \end{cases}$. **8.** 1. **9.** e^{-3}.

10. 1. *а*) 11; *б*) 0. **2.** *а*) $1/\left(\sqrt{2}\ln 20\right)$; *б*) –32/3. **3.** *а*) 0; б) $2\cos 2$. **4.** 0. **5.** $\left(\cos\sqrt{2}\right)/2\sqrt{2}$. **6.** –5/3. **7.** *а*) $\begin{cases} 0, & x\to+\infty \\ \infty, & x\to-\infty \end{cases}$; *б*) $e^{5/2}$; *в*) $\begin{cases} \infty, & x\to+\infty \\ 0, & x\to-\infty \end{cases}$. **8.** $e^{1/2}$. **9.** 1/7.

11. 1. *а*) 3/7; *б*) –13/3. **2.** *а*) –1/3; *б*) 10/9. **3.** *а*) $-45/(32\ln 2)$; *б*) $2\ln^2\frac{3}{7}$. **4.** $\left(-2^{\pi/2}\ln 2\right)/18$. **5.** $-1/(\pi\ln 4)$. **6.** $1/4\sqrt{3}$. **7.** *а*) $\begin{cases} \infty, & x\to+\infty \\ 0, & x\to-\infty \end{cases}$; *б*) $\begin{cases} 0, & x\to+\infty \\ \infty, & x\to-\infty \end{cases}$; *в*) 1. **8.** 1. **9.** $e^{-4ctg 2}$.

12. 1. *а*) –3/10; *б*) 0. **2.** *а*) –6/5; *б*) –4. **3.** *а*) $-(3\ln 3)/20$; *б*) $5/\left(24e^2\right)$. **4.** 1/12. **5.** –3/2. **6.** 0. **7.** *а*) $\begin{cases} 0, & x\to+\infty \\ \infty, & x\to-\infty \end{cases}$; *б*) e^{-3}; *в*) $\begin{cases} \infty, & x\to+\infty \\ 0, & x\to-\infty \end{cases}$. **8.** $e^{4/3}$. **9.** $e^{-2/3}$.

13. 1. *а*) $-\frac{1}{12}$; *б*) $-\frac{4}{5}$. **2.** *а*) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$; *б*) $\frac{40}{9}$. **3.** *а*) $\frac{3}{\cos^2 3}$; *б*) $\frac{1}{9}$. **4.** $\frac{\ln 2}{2}$. **5.** $\frac{5}{72\ln 3}$. **6.** 2/5. **7.** *а*) 0; *б*) ∞; *в*) ∞. **8.** $e^{-\frac{2}{\pi}}$. **9.** $e^{\frac{12}{5}}$.

14. 1. *а*) 0; *б*) 0. **2.** *а*) $\frac{8}{3}$; *б*) $\frac{5}{36}$. **3.** *а*) 1; *б*) $\frac{1}{12}$. **4.** 0. **5.** ∞; **6.** 12. **7.** *а*) 0; *б*) ∞; *в*) ∞. **8.** $e^{\frac{5}{2}\pi}$. **9.** 1.

15. **1**. *а*) 2; *б*) 0. **3**. *а*) $-\frac{1}{6}$; *б*) $-\frac{16}{9}$. **4**. 0. **5**. $-\frac{1}{4}$. **6**. –1. **7**. *а*) ∞; *б*) 0; *в*) 0. **8**. $e^{-\frac{3}{4}\pi^3}$. **9**. $e^{\frac{12}{\pi}}$.

16. **1**. *а*) $-\frac{1}{12}$; *б*)$-\frac{3}{7}$. **2**. *а*) $-\frac{7}{9}$; *б*)$-\frac{24}{5}$. **3**. *а*) $-\frac{1}{2\ln\frac{3}{2}}$; *б*) $6\ln 2$. **4**. $-\frac{4}{3}$. **5**. $-\frac{1}{3}$.

6. $\frac{4}{3}\pi$. **7**. *а*) $\begin{cases}0, & x\to+\infty\\ \infty, & x\to-\infty\end{cases}$; *б*) $e^{-\frac{4}{9}}$; *в*) ∞. **8**. $e^{\frac{1}{9\pi}}$. **9**.$\begin{cases}0, & x\to 1+0\\ \infty, & x\to 1-0\end{cases}$.

17. **1.** *а*)1; *б*)$\frac{1}{4}$. **2**. *а*) $-3\sqrt{3}$; *б*) $-\frac{9}{5}$; **3**. *а*) $16\ln 2$; *б*) $\frac{\sqrt{3}}{18\ln 2}$. **4**. $\frac{1}{24}$. **5**. $\frac{1}{2\pi}$. **6**. ∞. **7**. *а*) $\begin{cases}0, & x\to+\infty\\ \infty, & x\to-\infty\end{cases}$; *б*) e^{-3}; *в*) ∞. **8**. 1. **9**. e^{-6}.

18. **1**. *а*) $-\frac{1}{6}$; *б*) ∞ ; 2. *а*)$\frac{2}{3}$; *б*) $-\frac{7}{24}$. **3**. *а*) $\frac{18}{\ln^2 7}$; *б*) $-\frac{\sqrt{3}\ln 2}{\ln 3}$; **4**. $\frac{3}{8}$. **5**. $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$.

6. $-\frac{1}{3}$. **7**. *а*) 0; *б*) ∞; *в*) $\begin{cases}0, & x\to+\infty\\ \infty, & x\to-\infty\end{cases}$; **8**. $10^{-\frac{1}{2\pi^2}}$. **9.** 3^{-18}

19. 1. *а*) 1/2.; *б*) ∞. **2.** *а*) 1/6; *б*) –8. **3.** *а*) –1; *б*) –2*e*. **4.** $-1/4\sqrt{2}$. **5** $1/\sqrt{3}$.

6. $1/\pi^2$. **7.** *а*) ∞; *б*) 0; *в*) 1. **8.** $e^{6\pi}$**. 9.** e^{10}.

20. 1. *а*) 1/5; *б*) ∞. **2.** *а*) –6/5; *б*) 7/3. **3.** *а*) $-1/(48\cdot ln4)$; *б*) $-1/(ln5\cdot\ln\frac{2}{3})$. **4.** 2.

5. 0. **6**. $-5\sqrt{2}/8$. **7.** *а*) 0; *б*) $e^{-4/3}$; *в*) ∞. **8.** e^{-12}. **9.**$e^{-4/\pi}$.

21. 1. *а*) 49/2.; *б*) 3/2. **2.** *а*) –6/13; *б*) 5/72. **3.** *а*) 2; *б*) $1/(4e\cdot\ln 10)$. **4.** 0. **5.** 0.

6 – 4. **7.** *а*) $\begin{cases}0, & x\to+\infty\\ \infty, & x\to-\infty\end{cases}$; *б*) $\begin{cases}\infty, & x\to+\infty\\ 0, & x\to-\infty\end{cases}$; *в*) e^8. **8.** $e^{-5/4}$. 9. $\exp(\frac{7}{40\ln 10})$.

22. 1. *а*) ∞.; *б*) 0. **2.** *а*) $-21/2\sqrt{2}$; *б*) 1. **3.** *а*) 2; *б*) $-108/(e\cdot\ln 3)$. **4.** $2/\sqrt{3}$**.**

5. $(2b^2\ln 3)/\sin 2b$. **6** $\frac{9\pi}{4}\cdot\ln 3$. **7.** *а*) $\begin{cases}\infty, & x\to+\infty\\ 0, & x\to-\infty\end{cases}$; *б*) $\frac{1}{e}$; *в*) $\begin{cases}0, & x\to+\infty\\ \infty, & x\to-\infty\end{cases}$.

8. $\exp(-16/\pi^2)$. 9. *e*.

23. 1. *а*) ∞; *б*) 2. **2.** *а*) –11/6; *б*) 10. **3.** *а*) $(3ln\frac{7}{9})/50$; *б*) $-4\sqrt{2}$. **4** $-\sqrt{2}/4$.

5. $6\cdot\ln 2$.**6.**$-\frac{3}{4}\cdot$.**7.***а*) $\begin{cases}\infty, & x\to+\infty\\ 0, & x\to-\infty\end{cases}$;*б*)$e^{35/3}$;*в*) $\begin{cases}0, & x\to+\infty\\ \infty, & x\to-\infty\end{cases}$.**8.**$e^{3\sqrt{3}}$.**9.**$e^{-3}$.

24. 1. *а*) 0.; *б*) –8/7. **2.** *а*) 28/3; *б*) ∞. **3.** *а*) (4*ln*2)/9; *б*) 2/5. **4** 1/8. **5** 3*ln*3/5$\sqrt{2}$. **6** $-\sqrt{3}$. **7.** *а*) 1; *б*)$\begin{cases}\infty, & x\to+\infty\\ 0, & x\to-\infty\end{cases}$; *в*)$\begin{cases}0, & x\to+\infty\\ \infty, & x\to-\infty\end{cases}$. **8.** exp($\frac{\sqrt{3}\ln 2}{6}$). **9**. exp($-\frac{10}{3\ln 3}$).

25. **1**. *а*) ∞; *б*) – 3. **2**. *а*)$\frac{7}{4}$; *б*) $\frac{19}{4}$. **3**. *а*) 16; *б*) $-\frac{4}{3}e^2$. **4**. $\frac{3}{2\sqrt{2}}$. **5**. $\frac{3}{2\pi}$. **6**. $\frac{2}{e}$. **7**. *а*) $\begin{cases}0, & x\to+\infty\\ \infty, & x\to-\infty\end{cases}$; *б*) $\begin{cases}\infty, & x\to+\infty\\ 0, & x\to-\infty\end{cases}$; *в*) e^{12}. **8**. e^{-12}. **9**.$e^{7\,\mathrm{tg}3}$.

26. **1**. *а*) $-\frac{4}{7}$; *б*) 0. **2**. *а*) $\frac{1}{20}$; *б*) 52. **3**. *а*) $\frac{1}{4}\ln^2\frac{3}{2}$; *б*) $\frac{1}{18}$. **4**. $-\infty$. **5**. $-\frac{\cos 2}{3}$.
6.$-\frac{1}{10\ln 5}$. **7**. *а*) $\begin{cases}0, & x\to+\infty\\ \infty, & x\to-\infty\end{cases}$; *б*) e^{-2}; *в*) e^{-4}. **8**. e^{-6}. **9**. $e^{-4/9}$.

27. **1**. *а*) $\frac{1}{3}$; *б*) 0. **2**. *а*) $\frac{1}{5}$; *б*) 8. **3**. *а*) $\frac{10}{27\ln 2}$; *б*) $\frac{12}{\ln 15}$. **4**.$-\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}$. **5**. $\frac{88\ln 2}{\pi}$. **6**. $-\frac{\pi\ln 2}{3}$. **7**. *а*) $\begin{cases}0, & x\to+\infty\\ \infty, & x\to-\infty\end{cases}$; *б*) e^{25}; *в*) $\begin{cases}\infty, & x\to+\infty\\ 0, & x\to-\infty\end{cases}$. **8**. $e^{\frac{21\ln 2}{2}}$. **9**. $e^{1/\sqrt{3}}$.

28. **1**. *а*) 0; *б*) 0. **2**. *а*) $\frac{5}{12}$; *б*) 20. **3**. *а*) $\frac{\ln 3}{4}$; *б*) $\frac{1}{4}$. **4**. $-\frac{1}{2\pi}$. **5**. $\frac{1}{5}$. **6**. $-\ln 3$.
7. *а*) ∞; *б*) 0; в) $\begin{cases}0, & x\to-\infty\\ \infty, & x\to+\infty\end{cases}$. **8**. $\begin{cases}0, & x\to+0\\ \infty, & x\to-0\end{cases}$. **9**.$e^{-3/\ln 2}$.

29. **1**. *а*) 0; б) 0. **2**. *а*) $\frac{1}{4}$; б) $-\frac{12}{11}$. **3**. *а*) $2m-2n$; б) $\frac{2}{3\ln 2\ln 3}$. **4**. $\frac{e}{4}$. **5**. –2. **6**. 0.
7. *а*) $\begin{cases}0, & x\to+\infty\\ \infty, & x\to-\infty\end{cases}$; б) $\begin{cases}\infty, & x\to+\infty\\ 0, & x\to-\infty\end{cases}$; в) 1. **8**. e^4. **9**. $e^{1/6}$.

30. **1**. *а*) 3; б) ∞. **2**. *а*) $\frac{9}{4}$; б) $-\frac{8}{3}$. **3**. *а*) 2; б) $\frac{\ln 2-\ln 5}{2}$. **4**. 0. **5**. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
6. $1/90\,ln10$. **7**. *а*) $\begin{cases}\infty, & x\to+\infty\\ 0, & x\to-\infty\end{cases}$; б) e^{-1}; в) $\begin{cases}0, & x\to-\infty\\ \infty, & x\to+\infty\end{cases}$. **8**. e^{-5}. **9**. e^{-3}.

Глава 5

Завдання 1

1. 6) 13,72; 7) *x*–*y*–1=*0*. **2.** 6) 1,12; 7) 2*x*–*y*–4=0. **3.** 6) 1,03; 7) $\frac{1}{4}x-y-1=0$.
4. 6) 184,356; 7) 2*x*–*y*+1=0. **5.** 6) 0,15; 7) 9*y*+*x*–9=0. **6.** 6) 0,7754; 7) *x*+2*y*–

2=0. **7.** 6) 0,555; 7) –x–y+2=0. **8**. 6) 0,13; 7) x–y=0. **9.** 6) 2,0025; 7) y+2x–1=0. **10.** 6) 0,986; 7) 2x+y–3=0. **11.** 6) 3,1316; 7) 2y–x+1=0. **12.** 6) 6,04; 7) y–0,5x–0,2=0. **13.** 6) 2,194; 7) 3x+y–1,57=0. **14.** 6) 1,18; 7) 0,12x+y–0,64=0. **15.** 6) 5,08; 7) x–y+1=0. **16.** 6) 1,01; 7) $\pi x + y + \frac{\pi}{2} = 0$. **17.** 6) 0,8154; 7) 0,6x+y+0,6=0. **18.** 6) 2,988; 7) 0,67x–y=0, –1,47x+y=0. **19.** 6) –0,36; 7) x+y–2,57=0. **20.** 6) 0,015; 7) 8,09x+y–7,6=0. **21.** 6) 109,53; 7) 1,7x–y–1=0, 0,58x+y–1,28=0. **22.** 6) 0,996; 7) $y=\sqrt{2}$. **23.** 6) 0,523; 7) 1,38x+y–2,38=0. **24.** 6) –0,02; 7) 16x–y+5=0. **25.** 6) 2,01; 7) 0,5x–y–0,2=0, 2x+y–2,214=0. **26.** 6) 0,972; 7) 0,75x–y–1=0. **27.** 6) 10,8; 7) 1,56x+y–5,68=0, 0,64x–y–0,92=0. **28.** 6) 0,79; 7) y=0. **29.** 6) 13,72; 7) 0,367x+y–0,73=0, 2,7x–y–2,33=0. **30.** 6) 1,02; 7) 4x–y+2=0, x+4y+9=0.

Завдання 2

1. *а)* 1; *б)* 1. **2.** *а)* $-\frac{1}{2}$; *б)* e^3. **3.** *а)* 0; *б)* 1. **4.** *а)* $a^a \ln a - a^a$; *б)* $e^{-2/\pi}$.
5. *а)* $a^a \ln a$; *б)* 1. **6.** *а)* 1; *б)* 1; **7.** *а)* $\frac{1}{6}$; *б)* e. **8.** *а)* $\frac{1}{6}$; *б)* 1; **9.** *а)* 0; *б)* 1.
10. *а)* 0; *б)* 1. **11.** *а)* $\frac{1}{2}$; *б)* 1. **12.** *а)* 0; *б)* 1. **13.** *а)* 0,625; *б)* 1. **14.** *а)* 0,5; *б)* 1.
15. *а)* 0; *б)* 1. **16.** *а)* ∞; *б)* 1. **17.** *а)* 0; *б)* 1. **18.** *а)* 0; *б)* $e^{-\frac{1}{6}}$. **19**. *а)* –1; *б)* 1. **20.** *а)* 0; *б)* 1. **21.** *а)* 0; *б)* 1. **22.** *а)* $\frac{\cos^2 a}{a}$; *б)* 1. **23.** *а)* ∞; *б)* 1. **24.** *а)* –1; *б)* *е*. **25.** *а)* $\frac{1}{2}(a^a - a^{a-1})$; *б)* $\frac{1}{e^2}$. **26.** *а)* 2; *б)* $e^{-\frac{\pi}{2}}$. **27.** *а)* 0; *б)* 1. **28.** *а)* 0; *б)* e^2. **29.** *а)* $-\frac{1}{3}$; *б)* $e^{\ln a}$. **30.** *а)* ∞; *б)* 1.

Завдання 4

1. $R\sqrt{2}$. **2.** 5. **3.** Радіус основи циліндра $r = R/2$, де R – радіус основи конуса. **4.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$. **5.** $x = a - p$, якщо $a > p$ і x=0, якщо $a \le p$.
6. $V = \frac{2\pi e^3}{9\sqrt{3}}$. **7.** $\frac{4R}{3}$. **8.** $\sqrt[3]{4V}$. **9.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}$. **10.** Основа дорівнює P/2, бічна сторона 3P/4. **11.** Основа 4P/5, бічна сторона 3P/5.**12.** $\frac{4R}{\sqrt{5}}, \frac{R}{\sqrt{5}}$. **13.** $\approx 49°$.
14. $R\sqrt{3}$. **15.** . **16.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$. **17.** Сторони прямокутника: $a\sqrt{2}$ и $b\sqrt{2}$.

18. $2a+\sqrt{\dfrac{as}{b}}$ и $2b+\sqrt{\dfrac{bs}{a}}$. **19.** $\arccos\dfrac{1}{k}$. **20.** $R=\sqrt[3]{\dfrac{v}{\pi}}$. **21.** *3 км* від лагеря.

22. $r/\sqrt{2}$. **23.** V=20 *км/ч*, S=36 руб. **24.** ≈ 1,3 години. **25.** 4R. **26.** $\dfrac{4a}{3}$ і $4\sqrt{\dfrac{ap}{3}}$.

27. b і 6. **28.** π/3. **29.** π/3. **30.** Ширина $\dfrac{2P}{4+\pi}$, висота $\dfrac{P}{4+\pi}$.

Завдання 5

1. $468\dfrac{3}{4}$ (ерг). **2.** 26450. **3.** $V=\dfrac{2\pi a\varepsilon}{p}\sin M(1+2\varepsilon\cos M)$. **4.** 5 (г/см.)

5. $\dfrac{dX}{dt}=k(A-X)$. **6.** $\Delta V\approx-\dfrac{RT}{p^2}\Delta p$. **7.** t=100 с., $S(100)$=50 км. **8.** $a=-\omega^2 x$.

9. $\upsilon=\dfrac{A}{3\sqrt[3]{t^2}}$. **10.** $S(1)=32$ м., $a(1)=-6$ m/s^2.**11.** $t\approx 4$ (с.), $\upsilon\approx 39.8$ (м/с).

12. $\dfrac{dp}{dh}\approx-0.000125p$. **13.** а) $I_{cp}=0$; б) $I(2)=4a$, $I(5)=16a$. **14.** а) $\delta_{cp}=9$ (г/см), б) $\delta(5)=13$ (г/см) **15.** $c=1.92+0.4e^{1.6}\approx 16.3$ (Дж/К). **16.** зменшити на 4.46 см. **17.** $tg\varphi_1=0{,}948,\quad tg\varphi_2=-1{,}012$.**18.** $v=b-2ct,\ a=-2c,\ t_0=\dfrac{b}{2c}$.

21. $\dfrac{5h}{h-1{,}7}$ (км/год.). **22.** 7 (км/год.). **23.** $\dfrac{bv}{\sqrt{a^2-b^2}}$. **24.** $-\dfrac{a^2v^2}{b^3}$ (м/с^2). **25.** $v=6$. **26.** $-\dfrac{2y}{\sqrt{100-y^2}}$. $v=-1{,}5$. **27.** Якщо x<4, то x змінюється швидше; якщо $x=4$, то x і y змінюються однаково; якщо x>4, то y змінюється швидше. **28.** $a=11$ (см/с^2). **29.** $10t\sqrt{26}$. **30.** $-0{,}8$ (см/с).

Глава 6

Завдання 1

1. *а*) $\dfrac{sin^4 x}{4}+C$; *б*) $-xctgx+ln|sin x|+C$; *в*) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}ln\left|\dfrac{\sqrt{2}-1+tg\frac{x}{2}}{\sqrt{2}-1-tg\frac{x}{2}}\right|+C$;

г) $\sqrt{x^2+3x+1}+\dfrac{1}{2}ln\left|x+\dfrac{3}{2}+\sqrt{\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}}\right|+C$;

д) $\frac{1}{2}ln|x|+2ln|x-1|+\frac{1}{2}ln|x-2|+C$; *е*) $-\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}-8\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\sqrt[4]{x}+C$;

ж) $-\frac{1}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}+(x+2)^{\frac{3}{2}}\right)+C$; *з*) $5\ln|x+5|+\frac{1}{2}\ln^2|x+5|+C$;

и) $-\frac{1}{2\sin^2 x}-\ln|\sin x|+C$;

к) $\left(\frac{x\sqrt[6]{x}}{7}-\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}+\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\sqrt[6]{x}-\frac{1}{2}ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|+arctg\sqrt[6]{x}\right)\cdot 6+C$;

л) $\frac{81}{2}\arcsin\frac{x}{9}+\frac{x}{2}\sqrt{81-x^2}+C$; *м*) $-ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\frac{arcsin\,x}{x}+C$.

2. *а*) $\ln x\cdot\arcsin\ln x+\sqrt{1-\ln^2 x}+C$; *б*) $-e^{-x}x^2-2e^{-x}x-2e^{-x}+C$;

в) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}-1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}+1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$; *г*) $-4\sqrt{-x^2-2x+1}-3\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$;

д) $-\frac{3}{x-1}+5\ln|x-1|-3\ln|x-2|+C$; *е*) $-2\frac{1}{\sqrt{x}}-9\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-18\frac{1}{\sqrt[6]{x}}+6ln\left|\sqrt[6]{x}\right|+C$;

ж) $-x+tgx+C$ *з*) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 2x-\frac{1}{8}\ln\left|1+4x^2\right|+C$; *и*) $-\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3\cos^3 x}+C$;

к) $-2\operatorname{arctg}\sqrt{1-x}+C$; *л*) $\frac{1}{16}\frac{x}{\sqrt{16+x^2}}+C$;

м) $ln\left|x+2\sqrt{x}+2\right|+xarctg\left(1+\sqrt{x}\right)-\sqrt{x}+C$.

3. *а*) $e^{\sin 2x}(\sin 2x-1)+C$; *б*) $xtgx+\ln|\cos x|+C$;

в) $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+C$; *г*) $\frac{7}{3}\sqrt{3x^2-6x+4}+\frac{6}{\sqrt{3}}\ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2+\frac{1}{3}}\right|+C$;

д) $\ln|x-1|-\frac{5}{2}\ln|x-3|-2\ln|x-4|+C$; *е*) $e^{\sqrt{x}}\operatorname{arctg}e^{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{\sqrt{x}}\right)+C$;

ж) $ln\sqrt[4]{x^4-4x^2}+C$; *з*) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\cos x\right|+C$;

и) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)+2\ln\left|\frac{\sin x}{\cos x}\right|+C$; *к*) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}+C$; *л*) $\frac{1}{5}\frac{x}{\sqrt{5-x^2}}+C$;

м) $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\right)+C$.

4. *а*) $-\frac{1}{16}\cos^{16}x+\frac{1}{18}\cos^{18}x+C$; *б*) $-\frac{1}{2}x^2\cos^2 x+\frac{1}{2}x\sin^2 x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$;

в) $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{-\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}\right|+C$; *г*) $-4\sqrt{-x^2+2x+4}+7\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{5}}+C$;

д) $-\frac{2}{x-2}+2\ln|x-2|+\ln|x-3|+C$; *е*) $-\frac{9}{8\sqrt[9]{x^8}}-\frac{1}{\sqrt[9]{x^2}}+\frac{\sqrt[9]{x^4}}{4}+C$;

ж) $\frac{x}{e}+e^{2x-1}+\frac{1}{4}e^{4x-1}+C$; *з*) $\ln\left|4x^2+1\right|-\frac{1}{6}arctg^3 2x+C$;

и) $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)+\frac{1}{\cos^4 x}+3\ln\left|\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right|+C$; *к*) $\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{3}}+C$;

л) $-\frac{3}{2}\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+C$;

м) $ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^5}}{5x^5}-\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^3}-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$.

5. *а*) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{5-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$; *б*) $\frac{1}{5}x^2\sin 5x+\frac{2}{25}x\cos 5x-\frac{2}{75}\sin 5x+C$;

в) $\frac{\arcsin\frac{1}{x+1}}{x+1}+\sqrt{1-\frac{1}{(x+1)^2}}+C$; *г*) $\frac{1}{3}\sqrt{9x^2+6x-5}+\ln\left|x+\frac{1}{3}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{2}{3}}\right|+C$;

д) $-\frac{62}{x-6}-\frac{17}{4}\ln|x-6|+\frac{25}{4}\ln|x-2|+C$; *е*) $-\frac{9}{10\sqrt[9]{x^{10}}}-\frac{1}{2\sqrt[9]{x^4}}+\frac{\sqrt[9]{x^2}}{2}+C$;

ж) $-\frac{1}{6}cos\,3x-\frac{1}{2}cos\,x+C$; *з*) $\frac{1}{4}\ln\left|x^4+1\right|-\frac{1}{2}arctgx^2+C$;

и) $\ln|\sin x|-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C$; *к*) $\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}}\right|+\frac{\sqrt{2x+3}}{x}+C$;

л) $-\frac{3}{4}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x}{2\sqrt{2-x^2}}+\frac{x}{8}\sqrt{2-x^2}+C$;

м) $3\left(ln\left|\sqrt[3]{x}\right|-ln\left(1+\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}\right)-arcsin\sqrt[3]{x}\right)+C$.

6. *а*) $e^{\frac{x^2}{2}}+C$;

б) $\frac{1}{2}x^2\ln\left(x^2-6x-27\right)-\frac{1}{2}x^2-6x-30\ln\left|x^2-6x-27\right|+\frac{57}{2}\ln\left|\frac{3+x}{9-x}\right|+C$;

в) $\frac{1}{16}\frac{1}{\cos^{16}x}-\frac{1}{14}\frac{1}{\cos^{14}x}+C$; *г*) $4\sqrt{-x^2-x+2}+3\arcsin\frac{2x+1}{3}+C$;

д) $-\ln|x-1|+2\ln|x-2|+4\ln|x-6|+C$; *е*) $-\frac{1}{x}+9\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+x+C$;

ж) $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+2(x-1)^{\frac{1}{2}}+C$; *з*) $\sqrt{x^2+1}+\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|+C$; *и*) $-2\operatorname{ctg}^{1/2}x+\frac{2}{3}\frac{1}{\operatorname{ctg}^{3/2}x}+C$;

к) $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}+C$; *л*) $-24\arcsin\frac{x}{4}+\frac{16x}{\sqrt{16-x^2}}+\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2}+C$;

м) $\frac{15x^2+5x-2}{4x^2\sqrt{1+x}}+\frac{15}{8}ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|+C$.

7. *а*) $-\frac{\cos^{10}x}{10}+\frac{\cos^{12}x}{12}+C$; *б*) $x\ln(x-1)-x-\ln|x-1|+C$;

в) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{7+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{5-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$; *г*) $-\frac{5}{4}\sqrt{4x^2-8x+1}-\frac{3}{2}\ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2-\frac{3}{4}}\right|+C$;

д) $\frac{5}{8}\ln|x+3|-\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{21}{8}\ln|x-5|+C$; *е*) $\frac{1}{\ln x}\left(-\arcsin\frac{1}{\ln x}+\sqrt{\ln^2 x-1}\right)+C$;

ж) $\sqrt{x^2+1}+ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right|+C$;

з) $\frac{1}{2}\ln|1+x|+\frac{1}{5}\operatorname{arctg}^5 x+C$; *и*) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}^2 x\right)+C$;

к) $-4\sqrt[4]{5-x}+2\sqrt{5-x}-4\ln\left|1+\sqrt[4]{5-x}\right|+C$;

л) $\frac{x}{2}\sqrt{4+x^2}+2\ln\left|x+\sqrt{4+x^2}\right|+C$; *м*) $C-\frac{\sqrt{2x+1}}{x}+ln\left|\frac{\sqrt{1+2x}-1}{\sqrt{1+2x}+1}\right|$.

8. *а)* $\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+C$; *б)* $2x^2e^{\frac{x}{2}}-8xe^{\frac{x}{2}}+16e^{\frac{x}{2}}+C$;

в) $\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\frac{1}{\sin x}+C$; *г)* $-4\sqrt{-x^2-2x+3}-5\arcsin\frac{x+1}{2}+C$;

д) $\frac{5}{8}\ln|x+2|+\frac{11}{8}\ln|x-6|+C$; *е)* $-\frac{8}{7}\frac{1}{\sqrt[8]{x^7}}-\frac{1}{\sqrt[8]{x^3}}+24\sqrt[8]{x}+\frac{8}{5}\sqrt[8]{x^5}+C$;

ж) $\frac{3}{7}(1-x)^{\frac{7}{3}}+\frac{3}{4}(1-x)^{\frac{4}{3}}+C$; *з)* $\frac{1}{3}\arcsin^3 x+\arcsin x+C$;

и) $\frac{\sqrt{2}}{4}arctg\left(\sqrt{2}\cdot tgx\right)+C$; *к)* $-\frac{1}{x}-\frac{4}{3x\sqrt{x}}-\frac{1}{2x^2}+C$;

л) $\frac{8}{9}\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{x}{8}\sqrt{\left(3-x^2\right)^3}+\frac{x^3}{8}\sqrt{\left(3-x^2\right)}+C$;

м) $\frac{1}{30}ln\frac{\left(x^5-1\right)^2}{x^{10}+x^5+1}-\frac{\sqrt{3}}{15}arctg\frac{2x^5+1}{\sqrt{3}}+C$.

9. *а)* $\frac{\arccos^3 x}{3}+C$; *б)* $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$;

в) $\frac{2}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}{\sqrt{14}}+C$; *г)* $\frac{5}{2}\sqrt{2x^2-4x+5}+\sqrt{2}\ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2+\frac{3}{2}}\right|+C$;

д) $2\ln|x+4|-\ln|x+1|+5\ln|x+2|+C$; *е)* $-\frac{6}{7}\frac{1}{\sqrt[6]{x^7}}-\frac{1}{\sqrt{x}}+18\sqrt[6]{x}+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+C$;

ж) $\frac{1}{4}ln\left(x^4+1\right)+\frac{1}{2}arctgx^2+C$; *з)* $-\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right|+C$;

и) $\frac{1}{4\operatorname{tg}^4 x}-\frac{2}{\operatorname{tg}^2 x}+6\ln|\operatorname{tg}x|+2\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C$; *к)* $4x^2-\frac{3}{5}\sqrt[6]{32x^5}+C$;

л) $\frac{1}{5}\sqrt{\left(25-x^2\right)^5}-\frac{25}{3}\sqrt{\left(25-x^2\right)^3}+C$; *м)* $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{tgx}{\sqrt{2}}+C$.

10. *а)* $\frac{\operatorname{arctg}^4 x}{4}+C$; *б)* $\frac{x^2}{5}e^{5x}-\frac{2x}{25}e^{5x}+\frac{2}{5}e^{5x}+C$;

в) $\frac{1}{2\cos^2 x}-\ln|\cos x|+\frac{1}{2}\ln|\cos x-1|+\frac{1}{2}\ln|\cos x+1|+C$;

г) $-3\sqrt{-x^2+x+4}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{17}}+C$;

д) $-\frac{1}{x+1}-3\ln|x+1|-5\ln|x-6|+C$; *е*) $3\sqrt[3]{x}-\frac{24}{13}\sqrt[12]{x^{13}}+\frac{6}{11}\sqrt[6]{x^{11}}+C$;

ж) $-x+ctgx+C$; *з*) $-\arcsin\frac{1}{x}+C$; *и*) $-\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x}-\frac{3}{\operatorname{tg} x}+3\operatorname{tg} x+\frac{2}{5}\operatorname{tg}^{5/2} x+C$;

к) $x-2\sqrt{x}+\frac{1}{1-2\sqrt{x}}+C$; *л*) $\frac{1}{64}\frac{x}{\sqrt{64-x^2}}+C$; *м*) $\frac{x}{ln\, x}+C$.

11. *а*) $-\frac{\cos^{13} x}{13}+\frac{\cos^{15} x}{15}+C$; *б*) $x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$;

в) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{4}+C$; *г*) $\frac{1}{2}\sqrt{4x^2-x-11}+\frac{17}{8}\ln\left|x-\frac{1}{8}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{8}\right)^2-\frac{177}{64}}\right|+C$;

д) $\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{3}\ln|x+2|+\ln|x-5|+C$;

е) $6\left(\frac{\sqrt[6]{(x+1)^7}}{7}-\frac{1}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{x+1}-\sqrt[6]{x+1}+\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1}\right)+C$;

ж) $cos\frac{1}{x}+\frac{9}{x}+6ln\, x-x+C$; *з*) $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}+C$; *и*) $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+C$;

к) $3\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|+C$; *л*) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$; *м*) $arctg\sqrt{x^2-1}-\frac{ln\, x}{\sqrt{x^2-1}}+C$.

12. *а*) $e^{\operatorname{tg} x}+C$; *б*) $-\frac{x}{2}ctg\,2x+\frac{1}{4}\ln|\sin 2x|+C$;

в) $\ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{\cos x}+C$; *г*) $3\sqrt{-x^2+3x-1}-\frac{7}{2}\arcsin\frac{2x-3}{\sqrt{5}}+C$;

д) $\frac{1}{x-1}+4\ln|x-1|+\ln|x-6|+C$; *е*) $10\left(-\frac{1}{9\sqrt[10]{x^9}}-\frac{1}{2\sqrt[5]{x^2}}+\sqrt[10]{x}\right)+C$;

ж) $-\frac{(1-x)^{11}}{11}+\frac{(1-x)^{12}}{12}+C$; *з*) $-\frac{1}{3(x^3+3x+2)}+C$;

и) $-\frac{5x}{2}-2\operatorname{ctg}x+\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\frac{1}{4}\cos 2x+C$; *к)* $\frac{\sqrt{2x+1}}{x}+\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|+C$;

л) $\frac{x}{\sqrt{36-6x^2}}-\frac{3}{2\sqrt{6}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{6}}+\frac{x}{12\sqrt{6}}\sqrt{6-x^2}+C$; *м)* $\frac{x^2e^{x^2}}{2}+C$.

13. *а)* $\frac{\sin^{14}x}{14}-\frac{\sin^{16}x}{16}+C$; *б)* $\frac{x^2 3^x}{\ln 3}-\frac{2x3^x}{\ln^2 3}+\frac{2\cdot 3^x}{\ln^3 3}+C$; *в)* $-\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}{3-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$;

г) $-\frac{1}{2}\sqrt{6x^2-2x-7}+\frac{11}{2\sqrt{6}}\ln\left|x-\frac{1}{6}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{43}{36}}\right|+C$;

д) $2\ln|x-1|+2\ln|x+1|+3\ln|x-5|+C$; *е)* $6\left(\sqrt[6]{x}-\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right)+C$;

ж) $-\frac{2}{ln5}\left(\frac{1}{5}\right)^x+\frac{1}{5ln2}\left(\frac{1}{2}\right)^x+C$; *з)* $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\sin x\right|+C$;

и) $\frac{1}{3\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|+C$; *к)* $\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}+\frac{\sqrt{x-1}}{x}+C$;

л) $-\frac{1}{3}\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}+C$; *м)* $ln\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}+C$.

14. *а)* $e^{\operatorname{tg}x}+C$; *б)* $\left(x^3-x^3+\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}\right)\frac{e^{3x}}{3}+C$;

в) $\ln|tgx|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C$; *г)* $-3\sqrt{-x^2-3x-2}-\frac{13}{2}\arcsin(2x+3)+C$;

д) $-\frac{1}{x+5}+2\ln|x+5|+\ln|x+4|+C$; *е)* $15\left(\frac{1}{2}\sqrt[15]{x^2}-\frac{1}{18\sqrt[5]{x^6}}-\frac{1}{4\sqrt[15]{x^8}}\right)+C$;

ж) $\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C$; *з)* $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+3x+1}+C$;

и) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\cos^4 x}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^7 x}-\frac{3}{16}\sqrt[3]{\cos^{16}x}+C$; *к)* $\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}+C$;

л) $\sqrt{x^2+9}+\frac{9}{\sqrt{x^2+9}}+C$; *м)* $C-\frac{1}{\sqrt{15}}ln\left|\frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}\right|$.

15. *а)* $-\frac{1}{10\sin^{10}x}+C$; *б)* $-x\operatorname{ctg}x+\ln|\sin x|+C$;

в) $\dfrac{1}{10}\ln\left|\dfrac{4+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{6-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$; *г*) $-3\sqrt{x^2+8x+3}+8\ln\left|x+4+\sqrt{(x+4)^2-13}\right|+C$;

д) $\dfrac{49}{26}\ln\left|x^2-x+1\right|-\dfrac{10}{13}\ln|x-4|-\dfrac{99\sqrt{3}}{13}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$; *е*) $\dfrac{2}{3}e^{\sqrt{x^3+1}}+C$;

ж) $\dfrac{tg2x-ctg2x}{2}+C$; *з*) $-\dfrac{1}{2}\ln^2\cos x+C$; *и*) $-\cos x+\dfrac{2}{3}\cos^3 x-\dfrac{1}{5}\cos^5 x+C$;

к) $-\sqrt{2x-x^2}+\arcsin(x-1)+C$; *л*) $\sqrt{x^2+9}+\dfrac{9}{\sqrt{x^2+9}}+C$; *м*) $\dfrac{e^x}{1+x}+C$.

16. *а*) $\dfrac{\arcsin^4 x}{4}+C$; *б*) $-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\left(x^3+\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{4}\right)+C$;

в) $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|-\dfrac{1}{\sin x}+C$; *г*) $-3\sqrt{-x^2-x+5}-\dfrac{11}{2}\arcsin\dfrac{2x+1}{\sqrt{21}}+C$;

д) $-\dfrac{13}{2}\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{25}{4}\ln|x-3|-\dfrac{21}{4}\ln|x-5|+C$;

е) $25\left(\dfrac{1}{4}\sqrt[25]{x^4}-\dfrac{1}{36\sqrt[25]{x^{36}}}-\dfrac{1}{32\sqrt[25]{x^{16}}}\right)+C$; *ж*) $arctgx-\dfrac{1}{\sqrt{2}}arctg\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C$;

з) $-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(2\sin x-3\cos x)^3}+C$; *и*) $-\dfrac{\cos^6 x/2}{3}+\dfrac{\cos^8 x/2}{4}+C$;

к) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{(x+1)}{\sqrt{3}(x-1)}+C$; *л*) $\dfrac{1}{12}\dfrac{\sqrt{(x^2-4)^3}}{x^3}+C$;

м) $2x\sqrt{1+e^x}-4\sqrt{1+e^x}-2ln\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$.

17. *а*) $\dfrac{1}{11\cos^{11}x}+C$; *б*) $\dfrac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\dfrac{1}{2}x+\operatorname{arctg}x+C$;

в) $\dfrac{1}{5}\ln\left|\dfrac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{4-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$; *г*) $-\dfrac{1}{3}\sqrt{3x^2-2x-8}+\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\ln\left|x-\dfrac{1}{3}+\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{25}{9}}\right|+C$;

д) $-\dfrac{7}{10}\ln|x-1|-\dfrac{47}{35}\ln|x-3|+\dfrac{33}{14}\ln|x+4|+C$;

е) $-6\left(\sqrt[6]{x+6}-\frac{1}{2\sqrt[3]{x+2}}-\ln\left|1+\sqrt[6]{x+2}\right|\right)+C$; *ж)* $sh2x-2x+C$;

з) $-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\sqrt{x}+x\right)^2}+C$; *и)* $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+C$;

к) $\frac{3}{10}\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^5}+\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^4}+\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)+C$; *л)* $\frac{1}{6}\arccos\frac{3}{x}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}+C$;

м) $\frac{1}{6}ln\frac{1+x^2}{x^2}-\frac{arctgx}{3x^3}-\frac{1}{6x^2}+C$.

18. *а)* $2\left(\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\frac{1}{2}\ln|1+x|\right)+C$; *б)* $-e^{-x}\left(x^3+3x^2+6x+6\right)+C$;

в) $\frac{tg^3 x}{3}+C$; *г)* $-2\sqrt{-x^2+2x+1}+7\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C$;

д) $-\frac{1}{x-4}+2\ln|x-4|-\ln|x+3|+C$; *е)* $6\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}-\frac{1}{4\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2}{\sqrt[6]{x}}\right)+C$;

ж) $e^x+ln\left|e^x-1\right|$; *з)* $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\ln|x+1|+C$; *и)* $\operatorname{tg}x+\frac{2\operatorname{tg}^3 x}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C$;

к) $\ln\sqrt{2x+1}-\ln\left|1+\sqrt{2x+1}\right|+C$; *л)* $-\frac{1}{40}\frac{\sqrt{\left(x^2+4\right)^5}}{x^5}+\frac{1}{24}\frac{\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}}{x^3}+C$;

м) $\frac{x}{4\left(1+x^2\right)}-\frac{arctgx}{2\left(1+x^2\right)}+\frac{arctgx}{4}+C$.

19. *а)* $\frac{\cos^{16} x}{16}+C$; *б)* $\frac{16}{51}e^{\frac{3}{4}x}\left(\sin 3x+\frac{1}{4}\cos 3x\right)+C$; *в)* $\frac{1}{2\sqrt{12}}\ln\left|\frac{\sqrt{12}+3+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{12}-3-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$;

г) $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+6x+1}+\frac{9}{8}\ln\left|x+\frac{3}{4}+\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{5}{16}}\right|+C$;

д) $-\frac{1}{3}\ln|x-4|+\frac{1}{3}\ln|x-1|+\ln|x-2|+C$; *е)* $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$;

ж) $-\frac{1}{4}cos\,2x+C$; *з)* $\ln|x|+\frac{1}{4}\ln^4|x|+C$; *и)* $-\frac{ctg^3 x}{3}+ctgx+x+C$;

к) $3\sqrt[3]{x}-12\sqrt[6]{x}+24\ln\left|\sqrt[6]{x}+2\right|+C$; *л)* $\frac{1}{24}\frac{\sqrt{\left(x^2-8\right)^3}}{x^3}+C$;

м) $\frac{1}{4}ln\frac{|x+1|}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{arctgx}{2(1+x)^2}-\frac{1}{4(x+1)}+C$.

20. *а*) $\frac{1}{2}arctgx^2+C$; *б*) $e^{-x}\left(x^3-3x^2+6x-6\right)+C$;

в) $\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C$; *г*) $-2\sqrt{-x^2-3x+4}+C$;

д) $-\frac{1}{x-4}-\ln|x-4|+2\ln|x-2|+C$; *е*) $9\left(\frac{1}{5}\sqrt[9]{x^5}-\frac{1}{4\sqrt[9]{x^4}}+\frac{3}{2\sqrt[9]{x^2}}-\frac{3}{\sqrt[9]{x}}\right)+C$;

ж) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}sin2x+\frac{1}{32}sin4x+C$; *з*) $\ln|x-\sin x|+C$; *и*) $\frac{tg^2x}{2}-\frac{1}{2}\ln|tg^2x+1|+C$;

к) $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$; *л*) $\frac{1}{9}\frac{\sqrt{x^2-3}}{x}-\frac{1}{27}\frac{\sqrt{\left(x^2-3\right)^3}}{x^3}+C$;

м) $x-log_2\left|1-2^x\right|+\frac{1}{ln2}\left(\frac{1}{1-2^x}+\frac{1}{2\left(1-2^x\right)^2}+\frac{1}{3\left(1-2^x\right)^3}\right)+C$.

21. *а*) $\frac{\sin^{12}x}{12}+C$; *б*) $-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$; *в*) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{3-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$;

г) $5\sqrt{x^2+x+9}+\frac{7}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{35}{4}}\right|+C$;

д) $-\frac{23}{9}\ln|x-2|+\frac{79}{9}\ln|x-4|-\frac{5}{9}\ln|x+2|+C$;

е) $-\frac{1}{x}\arccos\frac{x-1}{x}+2arctg\sqrt{2x-1}+C$; *ж*) $\frac{1}{6}\left((x+2)^{\frac{3}{2}}-(x-2)^{\frac{3}{2}}\right)+C$;

з) $-\frac{1}{x\sin x}+C$; *и*) $\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{28}\sin 7x+C$; *к*) $2\sqrt{x}+2\cos\sqrt{x}+C$;

л) $\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}+C$; *м*) $arctg\left(e^x-e^{-x}\right)+C$.

22. *а*) $\sqrt{1-2x}arctg\sqrt{1-2x}-\frac{1}{2}\ln|2-2x|+C$;

б) $-e^{-\pi^2 x}\left(\frac{x^3}{\pi^2}+\frac{3}{\pi^4}x^2+\frac{6}{\pi^6}x+\frac{6}{\pi^8}\right)+C$; *в)* $-\frac{\mathrm{ctg}^5 x}{5}+C$;

г) $\frac{1}{8\cos^8 x}-\frac{1}{3\cos^6 x}+\frac{1}{4\cos^4 x}+C$; *д)* $\frac{1}{x+2}-2\ln|x+2|+3\ln|x+5|+C$;

е) $-\frac{9}{5}\sqrt[9]{x^5}-\frac{1}{\sqrt[9]{x^2}}+\sqrt[9]{x}+C$; *ж)* $3\left(\frac{1}{5}(x-1)^{\frac{5}{3}}+\frac{1}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}\right)+C$;

з) $-\frac{\arccos^4 x}{4}+\arccos x+C$; *и)* $\frac{1}{8}\sin^2 2x+\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{24}\sin 6x+C$;

к) $x+2\ln|x|+4\sqrt{x+1}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$;

л) $\frac{x^2}{2}\sqrt{x^4+4}-2\ln\left|x^2+\sqrt{x^4+4}\right|+C$; *м)* $ln\frac{1+e^x-\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}{1-e^x+\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}+C$.

23. *а)* $\frac{1}{8\cos^8 x}-\frac{1}{3\cos^6 x}+\frac{1}{4\cos^4 x}+C$; *б)* $x\,\mathrm{arctg}\,4x-\frac{1}{8}\ln\left(1+16x^2\right)+C$;

в) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{6+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{-2-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$; *г)* $\frac{1}{2}\sqrt{6x^2+3x+5}+\frac{5}{4\sqrt{6}}\ln\left|x+\frac{1}{4}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{5}{6}-\frac{1}{16}}\right|+C$;

д) $\ln|x-1|+2\ln|x+1|+\ln|x-4|+C$; *е)* $6\left(\sqrt[6]{x}-\frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)+C$;

ж) $\frac{1}{2}(1-x)^2+ln|1+x|+C$; *з)* $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}+C$;

и) $-\frac{1}{5\sin^5 x}+\frac{1}{3\sin^3 x}+C$; *к)* $e^x\cdot\sqrt{1+e^x}-\frac{2}{3}\sqrt{1+e^x}-2\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C$;

л) $\frac{3}{2}\mathrm{arctg}\,x-\frac{x}{2\left(1+x^2\right)}-\frac{x-x^3}{8\left(1+x^2\right)^3}+C$; *м)* $x-\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{1+2tgx}{\sqrt{3}}+C$.

24. *а)* $\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x}+C$; *б)* $e^x\left(x^3-3x^2+6x-6\right)+C$;

в) $\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$; *г)* $2\sqrt{-x^2+5x-6}-2\arcsin(2x-5)+C$;

д) $\frac{1}{7(x+2)}+\frac{90}{49}\ln|x+2|-\frac{41}{49}\ln|x-5|+C$;

е) $12\left(\frac{1}{7\sqrt[12]{x^7}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+3\sqrt[12]{x}+\frac{\sqrt[12]{x^5}}{5}\right)+C$; *ж*) $x+ln\left(1+x^2\right)+C$;

з) $\arcsin\left(\frac{\ln x}{2}\right)+C$; *и*) $\frac{4}{9}\sqrt[4]{\cos^9 x}-4\sqrt[4]{\cos x}+C$; *к*) $2\sqrt{\frac{x-1}{x}}+C$;

л) $\frac{1}{2}\arccos 1/x-\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2}+C$; *м*) $e^{\sin x}\left(x-\sec x\right)+C$.

25. *а*) $\frac{1}{17\sin^{17}x}+\frac{1}{15\sin^{15}x}+C$; *б*) $-\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}4x\right)+\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}2x+C$;

в) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{3+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{-1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$; *г*) $\sqrt{4x^2+5x+3}+\frac{7}{4}\ln\left|x+\frac{5}{8}+\sqrt{\left(x+\frac{5}{8}\right)^2+\frac{23}{64}}\right|+C$;

д) $2\ln|x-1|-2\ln|x-2|-\ln|x-4|+C$;

е) $6\left(\frac{\sqrt[6]{(x+1)^7}}{7}-\frac{\sqrt[6]{(x+1)^5}}{5}+\frac{\sqrt{(x+1)}}{3}-\sqrt[6]{(x+1)}+\operatorname{arctg}\sqrt[6]{(x+1)}\right)+C$;

ж) $tg\frac{x}{2}+C$; *з*) $\arcsin\left(e^{-x}\right)+C$; *и*) $\frac{3x}{256}-\frac{\sin 2x}{128}+\frac{\sin 4x}{1024}+\frac{\sin^5 2x}{320}+C$;

к) $\ln\left|\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}\right|+\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x+1}+C$; *л*) $\sqrt{16+x^2}+\frac{16}{\sqrt{16+x^2}}+C$;

м) $\frac{1}{m\sqrt{ab}}arctg\left(e^{mx}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+C$.

26. *а*) $\frac{ln^4(x-1)}{4}+C$; *б*) $-\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C$;

в) $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}+C$; *г*) $2\sqrt{-x^2+6x-5}-\arcsin\frac{x-3}{2}+C$;

д) $-\frac{4}{x-5}-\ln|x-5|+2\ln|x-2|+C$; *е*) $\frac{-3}{4\sqrt[3]{x^4}}-\frac{24}{7\sqrt[12]{x^7}}+6\sqrt[6]{x}+C$;

ж) $\frac{1}{3}\sin 3x+C$; *з*) $-\frac{1}{2}\ln\left|1-\ln^2 x\right|+C$; *и*) $\frac{tg^6 x}{6}-\frac{tg^4 x}{4}+\frac{tg^2 x}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|tg^2 x+1\right|+C$;

к) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$; *л*) $\frac{27}{4}\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{9x}{8}\sqrt{3-x^2}-\frac{x^4}{4}\sqrt{3-x^2}+C$;

м) $\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{x+2}{2}\sqrt{1-x^2}+C$.

27. *а*) $-\frac{1}{11\sin^{11}x}+\frac{1}{9\sin^{9}x}+C$; *б*) $e^{\frac{x}{4}}\left(4x^2-32x+128\right)+C$;

в) $-\frac{1}{11}ln\left|\frac{9+tg\frac{x}{2}}{2-tg\frac{x}{2}}\right|+C$; *г*) $\sqrt{3x^2+x+8}+\frac{3}{2\sqrt{3}}\ln\left|x+\frac{1}{6}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{95}{36}}\right|+C$;

д) $-\ln|x|-4\ln|x+2|+7\ln|x+3|+C$; *е*) $-\frac{4}{5\sqrt[4]{x^5}}-\frac{4}{\sqrt{x}}+4\sqrt[4]{x}+C$;

ж) $-\frac{1}{2}\sin 2x+C$; *з*) $\frac{2}{5}tg^{5/2}x+\frac{2}{9}tg^{9/2}x+C$; *и*) $-\frac{3ctg^{8/3}x}{8}-\frac{3ctg^{2/3}x}{3}+C$;

к) $-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3}+C$; *л*) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$; *м*) $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\frac{|x-1|(x+2)^{32}}{|x+1|^3}+C$.

28. *а*) $-\frac{1}{4}\arccos^2 e^{2x}+C$; *б*) $\frac{1}{4}e^{4x}\left(x-\frac{1}{4}\right)+C$; *в*) $\frac{\mathrm{tg}^5 x}{5}+\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3}+C$;

г) $-\sqrt{-x^2+6x-1}+6\arcsin\frac{x-3}{\sqrt{8}}+C$;

д) $-\frac{35}{3}\frac{1}{x-4}+\frac{7}{9}\ln|x-4|+\frac{29}{9}\ln|x-1|+C$;

е) $15\left(\sqrt[15]{x}-\frac{1}{9}\frac{1}{\sqrt[15]{x^9}}-\frac{1}{2}\frac{3}{\sqrt[15]{x^4}}\right)+C$; *ж*) $50x^2+C$; *з*) $\frac{3}{2}\ln\left|x^2+9\right|-\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{x}{3}+C$;

и) $chx-\frac{1}{chx}+C$; *к*) $2\ln\left|x^2+1\right|+4\sqrt[4]{x}-4\,\mathrm{arctg}\sqrt[4]{x}+C$;

л) $\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}+\arcsin\frac{x}{3}+C$; *м*) $2\sqrt{x+1}\left(ln|x+1|-2\right)+C$.

29. *а*) $\frac{\cos^2 x}{2}-2\ln|\cos x|-\frac{1}{2\cos^2 x}+C$; *б*) $2e^{\frac{x}{2}}\left(x^2-4x-8\right)+C$;

в) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+2}\right|+C$; *г*) $\frac{2}{3}\sqrt{3x^2+x+1}-\frac{10}{3\sqrt{3}}\ln\left|x+\frac{1}{6}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{36}}\right|+C$;

д) $\frac{3}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{5}\ln|x-2|-\frac{49}{20}\ln|x+3|+C$;

е) $-\frac{20}{27\sqrt[20]{x^{27}}}-\frac{10}{3\sqrt[5]{x^3}}+\frac{20}{3}\sqrt[20]{x^3}+C$; *ж)* $lg3\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)+C$;

з) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sqrt{1+x^4}\right|-\frac{1}{4}\sqrt{1+x^4}+C$; *и)* $\frac{1}{chx}-\frac{1}{3ch^3x}-2\ln\left|\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}\right|+C$;

к) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}+1}{\sqrt{e^x+1}-1}\right|-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{e^x+1}-1}+C$; *л)* $\ln\left|\frac{2+x+\sqrt{x^2-4}}{2+x-\sqrt{x^2-4}}\right|-\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}+C$;

м) $x^2chx-2xshx+2chx+C$.

30. *а)* $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2(x+1)+C$; *б)* $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$;

в) $-\frac{\operatorname{ctg}^3x}{3}-\frac{2\operatorname{ctg}^5x}{5}-\frac{\operatorname{ctg}^7x}{7}+C$; *г)* $-\frac{1}{3}\sqrt{-3x^2+x+1}-\frac{29}{6\sqrt{3}}\arcsin\frac{6x-1}{\sqrt{13}}+C$;

д) $-\frac{4}{x-4}+4\ln|x-3|+\ln|x+2|+C$; *е)* $15\left(\frac{1}{2}\sqrt[5]{x^2}-\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}-\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[5]{x^6}}\right)+C$;

ж) $-\frac{1}{5}\sqrt{4sin^2x+9cos^2x}$; *з)* $-2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\arcsin^{3/2}x+C$;

и) $-\operatorname{ctg}x-\frac{2\operatorname{ctg}^3x}{3}-\frac{\operatorname{ctg}^5x}{5}+C$;

к) $-\frac{1}{4}\ln\left|\sqrt[3]{\left(x^4+1\right)^2}-\sqrt[3]{x^4+1}+1\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x^4+1}-1}{\sqrt{3}}+C$;

л) $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|-\sqrt{x^2+1}+C$; *м)* $\frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}+\frac{3}{4}arctg\sqrt{x-1}+C$.

Глава 7

Завдання 1

1. $\frac{4}{25}$. **2.** $2(1-\ln 2)$. **3.** $\frac{17}{18}$. **4.** $\ln\frac{2}{3}+1=1+\ln\frac{2}{3}$. **5.** $\ln 2+\frac{\pi^2}{9}$. **6.** $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$.

7. $\frac{\pi}{6}-\ln 2$. **8.** $\frac{3}{2}$. **9.** $\frac{1}{2}\left(1+e^2\right)$. **10.** $\ln 2$. **11.** $\frac{11}{2}$. **12.** $3\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\ln 2$. **13.** $\ln 2$.

14. $\ln 2+\frac{\pi^2}{64}$. **15.** $\frac{\pi}{8}$. **16.** $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **17.** $-\frac{5}{6}$. **18.** $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **19.** $\frac{1}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$. **20.** $\frac{\pi}{12}$.

21. $\frac{1}{3}$. **22**. $\frac{\pi^4}{324}+\ln 4$. **23**. $\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. **24**. $\frac{4\sqrt{2}-2}{\pi}$. **25**. $\frac{1}{2\pi}$. **26**. $\frac{tg^3 1}{3}$.

27. 23,1. **28**. $-\frac{\ln^2 2}{4}$. **29**. $\frac{\sqrt{2}-4}{12}$. **30**. $\frac{1}{4}\ln 2+\frac{\pi}{8}$.

Завдання 2

1. $\frac{4}{9}-\frac{2}{27}\sin 6$. **2**. $\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{6}$. **3**. 16π. **4**. $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{5}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\ln 7$. **5**. -7π.

6. $\pi-2$. **7.** $\frac{1}{4}(3\sin 6+\cos 6-1)$. **8.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **9.** $8\ln 4-\frac{15}{4}$. **10.** $\frac{1}{3}$.

11. $3\sqrt[3]{3}\left(\ln^2 3-6\ln 3\right)$. **12.** $\frac{3}{2}\ln 3-\frac{1}{4}$. **13.** $8(e-2)$. **14.** $\frac{1}{2}ln\frac{3}{2}$. **15.** $\frac{10}{27}\sqrt{e^3}-\frac{16}{27}$.

16. $2-\frac{\pi}{2}$. **17**. $-\frac{7}{9}$. **18**. $\frac{3}{5}\left(e^{\pi}-1\right)$. **19.** $2\ln 2(\ln 2-1)+\frac{3}{4}$. **20**. $4\ln 2$.

21. $10\sqrt{e}-\frac{26}{\sqrt{e}}$. **22**. $\frac{994\sqrt{3}-486}{15}$. **23**. $\frac{5}{27}e^3-\frac{2}{27}$. **24.** $1-\frac{\pi}{4}$. **25.** $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$.

26. $\frac{1}{2}\ln 3+\frac{3}{2}\ln\frac{3}{4}=\ln\frac{9}{4\sqrt{4}}$. **27**. $\ln\frac{25}{8}-\frac{\pi}{4}$. **28**. $\frac{1}{4}\left(1-\frac{3}{e^2}\right)$. **29**. $\frac{29}{270}$. **30.** π.

Завдання 3

1. $\ln\left(\mathrm{tg}\frac{3\pi}{8}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}\right)$. **2.** $\frac{\pi}{4}-\frac{3}{\sqrt{5}}\left(\mathrm{arctg}\sqrt{5}-\mathrm{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. **3**. $\ln\frac{3}{2}$. **4.** $1-\ln 2$.

4. $\frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}+1-\frac{1}{1+\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}}-\ln\left(1+\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}\right)$ (якщо верхня межа $\frac{\pi}{2}\Rightarrow 1-\ln 2$).

5. $\ln 2-\frac{1}{3}$. **6.** $\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln 2$. **7**. $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$. **8**. $\frac{1}{2}-\ln 2$.

9. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\ln 4}{2}$. **10**. $\frac{1}{3}$. **11.** $\ln 2-\frac{1}{2}$. **12.** $\ln 2-\frac{1}{2}$. **13.** $2\ln\frac{3}{2}-1$. **14**. $\frac{\pi}{3}-\ln 2$.

15. $\ln 2-\frac{1}{2}$. **16**. $\ln\frac{9}{4}-\frac{1}{3}$. **17**. $1+\ln\cos 1$. **18**. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$. **19**. $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{12}$.

20. $\frac{\pi}{8}-\frac{5}{6}\left(arctg\,3-arctg\frac{4}{3}\right)$. **21**. $1+\ln\frac{3}{2}$. **22**. $\frac{1}{6}$. **23**. $\frac{29}{24}$. **24**. $\frac{41}{96}$. **25**. $\frac{13}{10}$.

26. $-\frac{1}{6}$. **27.** $\frac{2}{3}+\ln\frac{2}{3}$. **28.** $\ln 2+\frac{\pi}{3}$. **29.** $\frac{26}{3}$. **30.** $\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}$.

Завдання 4

1. $\frac{\pi}{40}+\frac{17}{10}\ln 3+\frac{37}{20}\ln 2$; **2.** $-\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}\pi+\ln 2\right)$; **3.** $\ln 4+\frac{\pi}{8}$; **4.** $2\ln 2-\frac{1}{2}$; **5.** $\frac{1}{4}\ln\frac{6}{5}$;
6. $\frac{5}{36}\left(1-\ln\frac{4}{6}\right)$; **7.** $\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{18}\ln 2$; **8.** $\frac{1}{10}\ln\frac{12}{7}$; **9.** $3+\frac{3}{2}\sqrt{6}$; **10.** $\frac{\pi}{\sqrt{5}}-\operatorname{arctg}\sqrt{5}$;
11. $\frac{1}{12}\ln\frac{35}{31}$; **12.** $\frac{15}{4}-\ln 4$; **13.** $\ln\frac{5}{6}$; **14.** $\frac{10}{3}-\ln 3$; **15.** $2\ln\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$;
16. $-\left(\ln\left(10\sqrt{7}\right)+7\operatorname{arctg}3\right)$; **17.** $1+\ln\frac{3}{2}$; **18.** $\frac{1}{10}\ln\frac{4}{27}+\frac{4}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{20}{27}}$;
19. $2\operatorname{arctg}3+\frac{1}{2}\ln 2$; **20.** $\frac{1}{10}\ln\frac{9}{4}$; **21.** $\frac{1}{14}\ln\frac{15}{8}$; **22.** $\frac{12}{13}\ln\frac{5}{2\sqrt{2}}-\frac{5}{13}\frac{\pi}{4}$;
23. $\frac{9}{4}-2\ln 4$; **24.** $\frac{\sqrt{5}}{6}\ln\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\sqrt{7}$;
25. $\frac{3}{10}\ln\frac{12}{5}+\frac{7}{5\sqrt{24}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{24}}\right)$; **26.** $\frac{9}{10}\ln\frac{3}{2}$; **27.** $\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{\pi}{4}-1\right)$;
28. $\frac{11}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{3}\right)-\frac{1}{6}\ln 13$; **29.** $\frac{1}{6}\left(\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{7}}{7}-\frac{\pi}{4}\right)$; **30.** $\frac{1}{4}\ln\frac{9}{5}+\frac{1}{15}$.

Завдання 5

1. $\frac{\sqrt{3}}{32}$. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{72}$. **3.** $\frac{\sqrt{3}}{48}$. **4.** $\frac{81\pi}{8}$. **5.** $\frac{\sqrt{3}}{16}$. **6.** $\frac{9\pi}{4}$. **7.** $27\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{8}$. **8.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}$.
9. $\frac{4}{3}\pi-2\sqrt{3}$. **10.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **11.** $\frac{\sqrt{3}}{8}$. **12.** $\frac{\sqrt{2}}{18}$. **13.** π – змінити межу на 2. **14.** 4π.
15. $\frac{\sqrt{2}}{18}$. **16.** $\frac{\sqrt{3}}{15}$. **17.** $\frac{5}{4}-\frac{3}{8}\pi$. **18.** $\frac{5}{2}-\frac{3}{4}\pi$. **19.** $\frac{3\pi}{4}$. **20.** $\frac{\pi}{4}$. **21.** $\frac{49^2\pi}{16}$. **22.** $\frac{\sqrt{3}}{64}$.
23. $20-6\pi$. **24.** $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$. **25.** $\frac{3}{32\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{6}=\frac{3}{16\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\frac{1}{16}$. **26.** $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$. **27.** $\frac{3\pi}{4}-\frac{9\sqrt{3}}{8}$. **28.** 1. **29.** $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{6}$. **30.** $5-\frac{3}{2}\pi$.

Завдання 6

1. 2. **2**. $e-e^{1/2}=\sqrt{e}\left(\sqrt{e}-1\right)$. **3**. 16π. **4**. $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5**. $\frac{\pi^2}{4}-2$. **6**. 9. **7**. 9. **8**. $\frac{1}{3}$.
9. π. **10**. $2-\frac{\pi}{2}$. **11**. 1. **12**. 9. **13**. 1. **14**. 4π. **15**. $\frac{1}{3}$. **16**. 2. **17**. $\frac{2}{5}$. **18**. 9. **19**. 9.
20. $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$. **21**. $\frac{1}{3}$. **22**. 9. **23**. 4. **24**. $\frac{1}{3}$. **25**. $\frac{343}{3}$. **26**. $\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **27**. $2-\frac{\pi}{2}$.
28. $\frac{5}{3}-2\ln 2$. **29**. 8. **30**. $\frac{1}{4}$.

Завдання 7

1. $\frac{3\pi}{4}-1$. **2**. $12\sqrt{3}$. **3**. $4\pi+6\sqrt{3}$. **4**. $6\pi-9\sqrt{3}$. **5**. $\frac{256}{3}+32\sqrt{3}$.
6. $5\pi-10$. **7**. $2\pi+8$. **8**. $12\pi-9\sqrt{3}$. **9**. $9\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **10**. $2+\frac{\pi}{2}$. **11**. 8π.
12. $2\pi-4$. **13**. $\frac{3\pi}{8}-\frac{1}{2}$. **14**. $4\pi-6\sqrt{3}$. **15**. $18\pi+72$. **16**. 2π. **17**. $3\pi-6$.
18. $\frac{9\pi}{2}+18$. **19**. $\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **20**. $4\pi-3\sqrt{3}$. **21**. $8\pi+32$. **22**. $\frac{3\pi}{2}-2$. **23**. $75\sqrt{3}$.
24. $2\pi-3\sqrt{3}$. **25**. $8\pi+6\sqrt{3}$. **26**. $27\sqrt{3}$. **27**. $\frac{3\pi}{2}-2$. **28**. $2\pi-3\sqrt{3}$. **29**. $3\sqrt{3}$.
30. 4π.

Завдання 8

1. π /4. **2.** π /4. **3.** π /4. **4.** $2\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi$. **5.** $\frac{\pi}{16}+\frac{7}{8}$. **6.** $\frac{\pi}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **7.** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.
8. $\frac{\pi}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **9.** $\frac{3\pi}{4}$. **10.** π. **11.** π. **12.** 2π. **13.** 4π. **14.** $\pi/2$. **15.** 3π. **16.** $\frac{481}{4}\pi$.
17. $\frac{3\pi}{4}$. **18.** $\pi/2$. **19.** π. **20.** π. **21.** 3/2 (π + 1). **22.** 3/2 (π +1). **23.** 21/4 π.
24. $\pi/8$ – 1/4. **25.** $3\pi+\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **26.** $\frac{3\pi}{8}+\frac{1}{4}$. **27.** $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$. **28.** $\frac{9\sqrt{3}}{2}+3\pi$.
29. $\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}$. **30.** $\frac{5\pi}{24}-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Завдання 9

1. $1+\ln\sqrt{3/2}$. **2.** $1+\ln\sqrt{6/5}$. **3.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **4.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **5.** $1+\ln\sqrt{3/2}$. **6.** $\frac{1}{2}\ln 3$.

7. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. ***8.*** *sh* 1. **9.** $\ln\frac{5}{3}-\frac{1}{4}$. **10.** 1. **11.** $1+\ln\sqrt{6/5}$. **12.** *sh* 3. **13.** $\sqrt{2}$.

14. $2+\ln\sqrt{\frac{6}{5}}$. **15.** $1+\ln\sqrt{3/2}$. **16.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **17.** 1/2 *sh* 3. **18.** *sh* 1. **19.** $\sqrt{2}$.

20. $2+\ln\sqrt{\frac{4}{3}}$. **21.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **22.** $\sqrt{2}/2$. **23.** 4/3. **24.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **25.** $1+\ln\sqrt{3/2}$.

26. $2+\ln\frac{3}{\sqrt{5}}$. **27.** $3/4+\ln\sqrt{2}$. **28.** $1+\ln\sqrt{6/5}$. **29.** *sh* 2. **30.** $\frac{1}{2}\ln 3$.

Завдання 10

1. $8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos\frac{3\pi}{8}\right)$. **2.** $6\sqrt{2}$. **3.** $16\left(\cos\pi/8-\sqrt{2}/2\right)$. **4.** $13\left(e^{4\pi/3}-1\right)$.

5. $5\left(e^{2\pi/3}-e^{\pi/3}\right)$. **6.** $12\left(1-\cos\pi/8\right)$. **7.** $42\sqrt{2}$. **8.** $4-2\sqrt{2}$. **9.** $\sqrt{193}\left(e^{7\pi/48}-1\right)$.

10. $\frac{\sqrt{15}}{2}\left(e^{-\pi/2}-e^{-\pi}\right)$. **11.** $2\left(e^{\pi/2}-1\right)$. **12.** $\frac{13}{2}\left(e^{3\pi/5}-1\right)$. **13.** 16. **14.** π /2.

15. 3π. **16.** $\frac{44\sqrt{113}}{49}+\frac{11}{2}\ln\frac{8+\sqrt{113}}{7}$. **17.** $\sqrt{10}\left(e^{3\pi/4}-e^{-3\pi/4}\right)$.

18. $\sqrt{58}\left(e^{7\pi/9}-1\right)$. **19.** $\frac{4\pi}{3}$. **20.** $\frac{6\sqrt{65}}{49}+\frac{3}{2}\ln\frac{4+\sqrt{65}}{7}$. **21.** $20\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

22. $\frac{a}{4}\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. **23.** $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. **24.** $8a$.

25. $\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-2)}$. **26.** $\frac{a}{2}\left(2\sqrt{2}+\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)$. **27.** $\frac{15}{8}+2\ln 2$.

28. $\frac{3\pi^2}{2}$. **29.** $\frac{\sqrt{15}}{2}\left(e^{2\pi/3}-e^{-2\pi/3}\right)$. **30.** $\frac{5}{2}\left(e^{2\pi/3}-e^{-2\pi/3}\right)$.

Завдання 11

1. 22 π. **2.** 70 π. **3.** 2. **4.** 6π. **5.** $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. **6.** $\frac{3312}{49}\pi$. **7.** $\frac{198}{5}\pi$. **8.** 2. **9.** $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. **10.** 72π.

11. 200π. **12.** $\frac{8\pi}{3}$. **13.** 50. **14.** 24π. **15.** $\frac{544\pi}{15}$. **16.** $\frac{9\pi}{4\sqrt{7}}$. **17.** $\frac{12740\pi}{3}$.
18. $\frac{460\pi}{27}$. **19.** $\frac{3\pi}{2}$. **20.** 128π. **21.** $\frac{8\pi}{3}$. **22.** 270π. **23.** 16/3. **24.** $\frac{80\pi}{3}$.
25. $\frac{117\sqrt{6}\pi}{8}$. **26.** $\frac{19\pi}{18}$. **27.** 32. **28.** $\frac{7}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\pi$. **29.** $\frac{3\pi}{4}$. **30.** $\frac{2\pi}{3}$.

Завдання 12.

1. $k=\frac{M\omega^2R^2}{4}$. **2.** $c\approx0{,}3535$ м. **3**. $T\approx12$ мін. **4.** $A=240\pi$ кгм≈754 кгм.
5. $P=\Upsilon ad(\ l+(d\ \sin\vartheta)/2)=0.127$ т=127 кг. **6.** $A=\frac{\gamma\pi R^4}{4}$ кгм. **7.** $P=0.3\pi\Upsilon*10^{-3}$ т$\approx$12,8 кг. **8.** $A=9*10^{-5}$дж. **9.** $A=(4/3)\pi R^3\ (\ R+(\gamma-1)H)=192{,}3$ кгм.=1896 дж.
10. $P=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **11.** $P_1=a^3/3;\ P_2=a^3/6;\ p=a^3/2$. **12.** $P=\delta\varpi^2\pi R^4H/4$.
13. $P=\gamma\pi h^2r$. **14.** $A=\gamma\pi R^2H^2/12$. **15.** $A=\gamma\pi R^2H^2/6$. **16.** $I=\delta\varpi^2ah^3\Delta/24$.
17. $A=\gamma\pi HR^3$. **18.** $\left|\vec{F}\right|=\frac{kmM}{a(a+l)}$. **19.** $P=\gamma a^3\sqrt{2}/2$.
20. $A=\gamma\pi R^2(6H^2+3R^2+8RH)/12$. **21.** $P_1=h^2(2a+b)/6=7500$ т; $P_2=h^2(a+2b)/6=500$ т. **22.** $A=\gamma\pi H^2R^2/12=\pi H^2R^2/6$. **23.** $K=4\gamma\omega^2\pi R^5/15$.
24. $A=4(2\gamma-1)\pi R^4/3$. **25.** $\left|\vec{F}\right|=\frac{kmMb}{(a^2+b^2)^{3/2}}$. **26.** $P=\frac{2}{3}R^3$.
27. $K=3M\omega^2R^2/20$. **28.** $I=\gamma\pi abh$. **29.** $P=8ah^2/15$. **30.** $A=\gamma\pi R^2H^2/4$.

Завдання 13.

1. $I_{oy}=\pi a^3/4$. **2.** В декартовій с/к: $X_c=Y_c=4a/5$; в полярной с/к: $r_c=\frac{4a\sqrt{2}}{5}$, $\varphi_c=\pi/4$. **3.** $X_c=\pi a;Y_c=4a/3$. **4.** $M_x=3/20$. **5.** $I_x=(a+3b)h^3/12$.
6. $I=\frac{R^4}{2}(\arcsin\frac{h}{r}-\frac{h\sqrt{R^2-h^2}(R^2-2h^2)}{R^4})$. **7.** $X_c=Y_c=9$. **8.** $X_c=0$; $Y_c=\frac{\pi^5+15\pi}{10(\pi^3+12)}$. **9.** $X_c=5a/7$; $Y_c=0$. **10.** $I=2\pi Rb^2+\pi R^3$. **11.** $I=32ah^3/105$.
12. $X_c=4(a+b)/3\pi$; $Y_c=4a/3\pi$. **13.** $I=\frac{r^4}{8}(\alpha-\frac{\sin2\alpha}{2})$.

14. $I{=}Y_c = \dfrac{\frac{2}{3}R(1-(\frac{R-h}{r})^2)^{3/2}}{\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{R-h}{R}-\frac{R-h}{R}\sqrt{1-(\frac{R-h}{R})^2}}$.

15. $I_{oz}=2\pi(16/3+148/5)\approx 219{,}5$. **16.** $X_c=0;\ Y_c=2r/\pi$. **17.** $I=\frac{2}{3}Ma^2$. **18.** $X_c=0;$ $Y_c=4R/3\pi$. **19.** $M_x=2\pi a^2$. **20.** $I_1=\pi ab^3/4$ або $I_2=\pi ba^3/4$. **21.** $X_c=2a/5;\ \ Y_c=2a/5$. **22.** $X_c=Y_c=0;\ Z_c=3R/8$. **23.** $Y_c=0;\ \ X_c=3\pi/16$. **24.** $I=\pi R^4/8$. **25.** $I=\pi R^2H^3/30$. **26.** $X_c=Y_c=a/5$. **27.** $X_c=Y_c=2R/\pi$. **28.** $I_0=7a^4/12$. **29.** $Z_c=0;\ \ Y_c=3a/5$. **30.** В декартовій с/к: $X_c=\frac{2R}{3}\frac{\sin\alpha}{\alpha};Y_c=\frac{2R(1-\cos\alpha)}{3\alpha}$; в полярной с/к: $r_c=\frac{4R}{3}\frac{\sin\alpha/2}{\alpha};\varphi_c=\frac{\alpha}{2}$.

Глава 8

Завдання 1

1. $\frac{1}{9}$. **2.** $\frac{\pi}{12}$. **3.** π. **4.** Розбігається. **5.** Розбігається. **6.** $\frac{\pi}{2}$. **7.** $\frac{\pi}{24}$. **8.** $-\frac{1}{20}$. **9.** $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$. **10.** $\frac{\pi}{2}$. **11.** $\frac{1}{2}$. **12.** $\frac{\pi}{4}$. **13.** $\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$. **14.** $\frac{1}{2}$. **15.** $\frac{1}{2}$. **16.** Розбігається. **17.** $\frac{1}{2}$. **18.** $\frac{1}{3}$. **19.** $\frac{1}{1+b^2}$. **20.** $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$. **21.** $\frac{\pi}{2}$. **22.** $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$. **23.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **24**. 0. **25**. $-\frac{1}{4}$. **26.** $\frac{\pi}{2}-1$. **27.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **28.** $\frac{1}{4}$. **29**. –1. **30.** $1+ln3$.

Завдання 2

1. $\frac{\pi}{2}$. **2.** –1. **3.** π. **4.** $3\left(\sqrt[3]{2}+1\right)$. **5.** $\frac{16}{3}$. **6.** $\frac{2}{3}\sqrt[4]{125}$. **7.** $6\sqrt[3]{2}$. **8.** Розбігається. **9.** Розбігається. **10.** $\frac{8}{3}$. **11.** $2+\pi$. **12.** Розбігається. **13.** Розбігається. **14.** $\frac{9\pi}{4}$. **15.** $-\frac{3}{2}$. **16.** $2ln3$. **17.** $\frac{\pi}{2}+ln\left(2+\sqrt{3}\right)$. **18.** 4. **19.** $2ln\left(\sqrt{2}-1\right)$. **20.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **21**. $\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}$. **22**. Розбігається **23**. Розбігається. **24**. $\frac{8}{3}$. **25**. Розбігається **26.** Розбігається. **27.** $\frac{33\pi}{2}$. **28**. $\frac{\pi}{3}$. **29**. $\frac{10}{7}$. **30.** $14\frac{4}{7}$.

Завдання 3.

1. Розбігається. **2.** Збігається. **3.** Збігається. **4.** Розбігається. **5.** Збігається **6.** Збігається. **7.** Збігається. **8.** Збігається. **9.** Збігається. **10.** Збігається. **11.** Розбігається. **12.** Розбігається. **13.** Збігається. **14.** Збігається. **15.** Збігається. **16.** Збігається. **17.** Збігається. **18.** Збігається **19.** Збігається. **20.** Розбігається. **21**. Розбігається. **22**. Збігається. **23**. Розбігається. **24**. Збігається. **25**. Збігається. **26.** Збігається. **27.** Збігається. **28**. Збігається. **29**. Розбігається. **30.** Розбігається.

Список літератури

1. Боревич, В.И. Определители и матрицы / В.И. Боревич. – М: Наука, 1970.
2. Бугров, Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М: Наука, 1960.
3. Головина, Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения / Л.И. Головина. – М: Наука, 1971.
4. Ильин, В.А. Линейная алгебра / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М: Наука, 1984.
5. Ильин, В.А. Аналитическая геометрия / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М: Наука, 1988.
6. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетеник. – М:Наука, 1969.
7. Рублев, А.Н. Линейная алгебра / А.Н. Рублев.– М: Высш.шк., 1968.
8. Цубербиллер, О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии / О.Н. Цубербиллер. – М: Физматгиз, 1958.
9. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Физматгиз, 1959. – Т.1.
10. Игнатьева, А.В. Курс высшей математики / А.В. Игнатьева, Т.И. Краснощекова, В.Ф. Смирнов. – М : Высш. шк., 1964.
11. Тер-Крикоров, А.М. Курс математического анализа / А.М. Тер-Крикоров, М.И. Шабунин. – М.: Наука, 1988.
12. Овчинников, П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика / П.Ф. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко; под ред. П.Ф. Овчинникова.– К.: Вища шк., 1987.

13. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов / Н.С. Пискунов. – М: Наука, 1985. – Т.1,2.
14. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956.
15. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М.: Наука, 1985.
16. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты) : учебное пособие для втузов / Л.А. Кузнецов. – М.: Высш. шк., 1983.
17. Вища математика. Розв'язання задач та варіанти типових розрахунків. Т. 1 : навч. посібник / за ред. Л.В. Курпи. – Харків: НТУ «ХПІ», 2002. – 316 с.
18. Higher mathematics. Problems solving and variants of typical calculations. V. I : educational textbook / under edition of Dr.Sci.Tech Kurpa L.V. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2004. – 320 p. – English.
19. Высшая математика. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: решение задач и варианты типовых расчетов. Т. 1. : навч. посібник / за ред. Л.В. Курпи. – Х.: НТУ «ХПІ», 2006. – 344 с.
20. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной: решение задач и варианты типовых расчетов Т. 2. : навч. посібник / за ред. Л.В. Курпа. – Х.: НТУ «ХПІ», 2006. – 540 с.

Зміст

Навчальне видання

КУРПА Лідія Василівна
КАШУБА Жанна Борисівна
ЛІННИК Ганна Борисівна
МОРАЧКОВСЬКА Ірина Олегівна
ОДИНЦОВА Олена Володимирівна
РУДНЄВА Гаяне Валериківна
ЧИСТИЛІНА Ганна Вікторівна
ШМАТКО Тетяна Валентинівна

Вища математика в прикладах і задачах

Том 1: Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної

Навчальний посібник

За редакцією проф. Курпа Л.В.

Роботу до видання рекомендував Д.В. Бреславський

Редактори В.М. Баранов
О.С. Самініна

План 2008 р. п. 105 / 37-09

Підп. до друку 20.03.2009р. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$. Папір офісний.
Riso-друк. Гарнітура Таймс.Ум. друк. арк. 30,9. Наклад 500 прим.
Зам. № 97 Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ "ХПІ". 61002, м. Харків, вул. Фрунзе, 21.
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК №116 від 10.07.2000 р.

Друкарня НТУ "ХПІ". 61002, м. Харків, вул. Фрунзе, 21