$\boxed{№1}$

1) Наблюдательный подход

- $X=(X_{it})$, $Y=(Y_{it})$ - контрольная и экспериментальная выборки соотв.
- $i=\overline{1,\frac{n}{2}}$ - номер пользователя
- $t=1,\dots,T$ - номер врем. интервала

Оценка эффекта привыкания

$$\hat{\delta}_t=(Y_{\cdot t}-Y_{\cdot 1})-(X_{\cdot t}-X_{\cdot 1})$$

Аддитивность эффектов:

- $EX_{it}=\alpha+\beta_t$
- $EY_{it}=\alpha+\beta_t+\tau+\delta_t$

где: $\alpha=const$, β_t - общий эффект, τ - основной эффект, δ_t - эффект привыкания

$$E\hat{\delta}_{it}=(\cancel{\alpha}+\cancel{\beta_t}+\cancel{\tau}+\delta_t-\cancel{\alpha}-\cancel{\beta_1}-\cancel{\tau}-\delta_1)-(\cancel{\alpha}+\cancel{\beta_t}-\cancel{\alpha}-\cancel{\beta_1})=$$

$=\delta_t-\delta_1=\delta_t$, т.к. в начальный момент привыкания нет.

Значит $\boxed{\hat{\delta}_{it}\text{ - несмещ. оценка в набл. подходе}}$

Пусть $DX_{it}=DY_{it}=\sigma^2$, $corr(X_{it},X_{i1})=corr(Y_{it},Y_{i1})=\rho$ не зависят от t. Найдем $D\hat{\delta}_t$

$$D\hat{\delta}_t=D(Y_{\cdot t}-Y_{\cdot 1})+D(X_{\cdot t}-X_{\cdot 1})-2\,cov(Y_{\cdot t}-Y_{\cdot 1},X_{\cdot t}-X_{\cdot 1})$$

1. $D(Y_{\cdot t} - Y_{\cdot 1}) = D(Y_{\cdot t}) + D(Y_{\cdot 1}) - 2\operatorname{cov}(Y_{\cdot t}, Y_{\cdot 1})$

$D(Y_{\cdot t}) = D\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n/2} Y_{it}\right) = \frac{2}{n}\sigma^2$

$D(Y_{\cdot 1}) = \frac{2}{n}\sigma^2$

$\operatorname{cov}(Y_{\cdot t}, Y_{\cdot 1}) = \operatorname{cov}\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} Y_{it}, \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n/2} Y_{j1}\right) =$

$= [i \neq j: \operatorname{cov}(Y_{it}, Y_{j1}) = 0] = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \operatorname{cov}(Y_{it}, Y_{i1}) =$

$= \frac{4}{n^2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \rho \cdot \sigma^2 = \frac{2}{n}\rho\sigma^2$

$D(Y_{\cdot t} - Y_{\cdot 1}) = \frac{4}{n}\sigma^2 - 2 \cdot \frac{2\rho\sigma^2}{n} = \frac{4(1-\rho)\sigma^2}{n}$

2. $D(X_{\cdot t} - X_{\cdot 1}) = \frac{4(1-\rho)\sigma^2}{n}$

3. ~~cov~~ $\operatorname{cov}(Y_{\cdot t} - Y_{\cdot 1}, X_{\cdot t} - X_{\cdot 1}) = 0$

В ~~ито~~ итоге:

$$\boxed{D(\hat{\delta}_t) = D(Y_{\cdot t} - Y_{\cdot 1}) + D(X_{\cdot t} - X_{\cdot 1}) - 2\operatorname{cov}(Y_{\cdot t} - Y_{\cdot 1}, X_{\cdot t} - X_{\cdot 1}) = \frac{4(1-\rho)\sigma^2}{n} + \frac{4(1-\rho)\sigma^2}{n} = \frac{8(1-\rho)\sigma^2}{n}}$$

2) Cookie-Cookie-Day

- Y_{it} – экспериментальная выборка
- X_{itj} – T контрольных выборок

$$\hat{\delta}_t = Y_{\cdot t} - X_{\cdot tt}$$

- $EY_{it} = \alpha + \beta_t + \tau + \delta_t$

- $EX_{itj} = \alpha + \beta_t + \tau \cdot \mathbb{I}\{t=j\}$ – эффекта привыкания нет, т.к. подействовали единожды.

Тогда:

$$E\hat{\delta}_t = EY_{\cdot t} - EX_{\cdot tt} = \alpha + \beta_t + \tau + \delta_t - \alpha - \beta_t - \tau\,\mathbb{I}\{t=t\} =$$

$$= \delta_t \Rightarrow \underline{\hat{\delta}_t \text{ - несмещ. оценка } \delta_t}$$

Найдем дисперсию:

$$D(Y_{\cdot t} - X_{\cdot tt}) = D(Y_{\cdot t}) + D(X_{\cdot tt}) - \underbrace{2\operatorname{cov}(Y_{\cdot t}, X_{\cdot tt})}_{0} =$$

$$= \frac{T+1}{n}\cdot\sigma^2 + \frac{T+1}{n}\sigma^2 = \frac{2(T+1)}{n}\sigma^2$$

$$\boxed{D(\hat{\delta}_t) = \frac{2(T+1)}{n}\sigma^2}$$

Найдем при каком T дисперсия в наб. подходе становится гарантированно меньше, чем в CCD подходе:

$$\frac{\cancel{2}(T+1)}{\cancel{n}}\cancel{\sigma^2} > \frac{\cancel{8}(1-\rho)}{\cancel{n}}\cancel{\sigma^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T > 3 - \cancel{4}\,4\rho}$$