$\boxed{№1}$

а) $X_1, \ldots, X_n \sim Bin(m, \theta)$

$\square$

$P_t(x) = C_m^x t^x (1-t)^{m-x}$

$$q(t|\vec{x}) \propto q(t) \cdot \prod^n C_m^{x_i} t^{x_i} (1-t)^{m-x_i} =$$

$$= q(t) \cdot t^{\sum x_i} \cdot (1-t)^{mn - \sum x_i} \prod C_m^{x_i}$$

$$Q_\alpha(t) \propto (1-t)^{\beta-1} \cdot t^{\alpha-1}$$

Попробуем $q(t) = \dfrac{t^{\alpha-1} \cdot (1-t)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} \sim Beta(\alpha, \beta)$

$$q(t|\vec{x}) \propto \frac{t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} \cdot t^{\sum x_i} (1-t)^{mn - \sum x_i} =$$

$$= \frac{B(\alpha + \sum x_i, \beta + mn - \sum x_i)}{B(\alpha,\beta)} \cdot \frac{t^{\sum x_i + \alpha - 1} \cdot (1-t)^{\beta + mn - \sum x_i - 1}}{B(\alpha + \sum x_i, \beta + mn - \sum x_i)} \sim$$

$\sim \boxed{Beta(\alpha + \sum x_i, \beta + mn - \sum x_i)}$ - апостер. распр.

~~найдем апо~~ $\boxed{Beta(\alpha, \beta)}$ - сопр. пр-во

$$\boxed{\hat{\theta} = E(\theta|\vec{X}) = \frac{\alpha + \sum x_i}{\alpha + \beta + mn}}$$

$$m(\theta|\vec{X}) = \arg\max_{t} (1-t)^{\beta+mn-\sum x_i-1}\, t^{\alpha+\sum x_i-1} \quad (*)$$

Обозначим $a = \beta+mn-\sum x_i-1$

$b = \alpha+\sum x_i-1$

Будем искать $\arg\max_t \ln((1-t)^a t^b)$.

В силу монотонности он совпадает с $(*)$

$$(\ln((1-t)^a t^b))' = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{t} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow at + (1-t)b = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{\alpha-\beta-mn+2\sum x_i}$$

В итоге $\boxed{m(\theta|\vec{X}) = \dfrac{1}{\alpha-\beta-mn+2\sum x_i}}$

$$\mu(\theta|\vec{x}) = \mu_{\frac{1}{2}}, \text{ где } \int_0^{\mu} \frac{(1-t)^{\beta+mn-\sum x_i-1}\, t^{\alpha+\sum x_i-1}}{\mathrm{B}(\alpha+\sum x_i, \beta+mn+\sum x_i)}\,dt$$

$$= \left[\begin{array}{l} a=\beta+mn-\sum x_i-1 \\ b=\alpha+\sum x_i-1 \end{array}\right] = \int_0^{\mu} \frac{(1-t)^a t^b}{\mathrm{B}(b+1, a+1)}\,dt = \frac{1}{2}$$

б) $X_1,\dots,X_n \sim U(0,\theta)$

$$p_t(\vec{x}) = \frac{1}{(t)^n}\,\mathbb{I}\{x_{(n)} < t\}$$

$$q(t|\vec{x}) \propto q(t)\cdot p(\vec{x}|t) = q(t)\cdot\frac{1}{(t)^n}\,\mathbb{I}\{x_{(n)}<t\} \propto$$

$$\propto q(t)\frac{1}{(t)^n}\,\mathbb{I}\{\alpha<t\} \propto q(t)\cdot\frac{1}{t^n}$$

Рассм $q(t) = \frac{\beta}{t^{\beta+1}} \sim Pareto(\beta)$

$\boxed{q(t|\vec{x}) \propto \dfrac{\beta}{t^{n+\beta+1}} \sim Pareto(n+\beta)}$ - апост. распр

$\boxed{Q - \text{Pareto}(\beta) - \text{сопр. к } U(0, \theta)}$

$$\boxed{E(\theta|\vec{X}) = \frac{n+\beta}{n+\beta-1}}$$

$$\boxed{\mu(\theta|\vec{X}) = \arg\max_t \frac{\beta}{t^{n+\beta+1}} \cdot \mathbb{I}\{x_{(n)} < t\} = x_{(n)}}$$

$$\mu(\theta|\vec{X}) = u : \int_0^u \frac{\beta+n}{t^{n+\beta+1}} \cdot \mathbb{I}\{x_{(n)} < t\}\, dt \ominus$$

$$\ominus \int_0^u d\frac{1}{t^{n+\beta}} = \frac{1}{u^{n+\beta}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{u = (2)^{\frac{1}{n+\beta}}} = \mu(\theta|\vec{X})$$

c) $X_1, \ldots, X_n \sim Cat(\theta_1, \ldots, \theta_k)$

$$P(X_1 = i) = \theta_i$$

$$q(\vec{t}|\vec{x}) = q(\vec{t}) \cdot \prod_{i=1}^{n} t_i^{\overbrace{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}\{x_j = i\}}^{n_i}} = q(\vec{t}) \cdot \prod_{i=1}^{n} t_i^{n_i}$$

Рассм. $q(\vec{t}) = \frac{1}{B(\alpha)} \prod_{i=1}^{n} t_i^{\alpha_i - 1} \sim Dir(\alpha)$

многомерная бета-функция

$$\boxed{\begin{gathered} q(\vec{t}|\vec{x}) \sim Dir(\alpha_1 + n_1, \ldots, \alpha_k + n_k) \text{ - апост. распр.} \\ Dir(\vec{\alpha}) \text{ - сопр. распр.} \end{gathered}}$$

Обозн. $\alpha_0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$

Тогда $\boxed{E(\theta_i|\vec{x}) = \frac{\theta_i + n_i}{\alpha_0 + n}}$

$$\boxed{m(\vec{\theta}|\vec{x}) = \arg\max_{\vec{\theta}} \prod_{i=1}^{k} x_i^{\alpha_i + n_i - 1} \ominus}$$

$$\boxed{\ominus \left(\frac{\alpha_1 + n_1 - 1}{\alpha_0 + n - k}, \ldots, \frac{\alpha_k + n - 1}{\alpha_0 + n - k} \right)}$$

$\mu(\theta|\vec{X})$ - ~~не сущ~~ невычисл. в общ. случае

$\boxed{№2}$

$X_1, \ldots, X_n \sim P \in \mathcal{P} = \{P_t \mid t \in \Theta\}$ - эксп. класс распр.

Док-ть: сущ. сопр. к $\mathcal{P}$ сем-во Q, которое тоже принадлежит эксп. классу.

□

$$p_t(x) = \frac{g(x)}{h(t)} e^{\langle a(t), u(x)\rangle}$$

$$p_t(\vec{x}) = e^{\langle a(t), \sum u(x_i)\rangle} \cdot \frac{1}{h^n(t)} \cdot \prod_{i=1}^{n} g(x_i)$$

Рассм. $q(t) = \frac{\tilde{g}(t)}{\tilde{h}(t)} e^{\langle \tilde{a}(\alpha), a(t)\rangle}$ - принадл. эксп. кл.

Тогда

$$q(t|\vec{x}) = \frac{\tilde{g}(t) \prod_{i=1}^{n} g(x_i)}{\tilde{h}(t) \cdot h^n(t)} e^{\langle a(t), \tilde{a}(\alpha) + \Sigma(x_i)\rangle}$$

- принадл. эксп. классу.

■

№3

$\mathcal{Q} = \{Q_\alpha \mid \alpha \in A\}$ - сопр. к $\mathcal{P}$, причем если в качестве априорного было взято Q_α, то апост. будет $Q_{f(\alpha)}$.

Найти: апостериорное распр, если распр. выборки лежит в $\mathcal{P}$, а в качестве априорного взято распределение $Q_{\alpha} = \sum_{j=1}^{k} \pi_j Q_{\alpha_j}$, где $\sum_{j=1}^{k} \pi_j = 1$

$\square$

$$Q_\alpha(\theta \mid X) = Q_{f(\alpha)}(\theta)$$

$$(*)\ Q_{\alpha_i}(\theta) = \frac{Q_{\alpha_i}(\theta \mid X) \cdot P(X)}{P(X \mid \theta)} = \frac{P(X)}{P(X \mid \theta)} \cdot Q_{f(\alpha_i)}(\theta)$$

$$Q(\theta \mid X) = \frac{P(X \mid \theta)\, Q(\theta)}{P(X)} = \frac{P(X \mid \theta) \sum_{i=1}^{k} \pi_i Q_{\alpha_i}(\theta)}{P(X)} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{P(X \mid \theta)}{P(X)} \sum_{i=1}^{k} \pi_i \cdot \frac{P(X)}{P(X \mid \theta)} Q_{f(\alpha_i)}(\theta) = \sum_{i=1}^{k} \pi_i Q_{f(\alpha_i)}(\theta)$$

Таким образом, апостериорное: $\sum_{i=1}^{k} \pi_i Q_{f(\alpha_i)}$

$\blacksquare$

№4

$\theta \sim Bern(\alpha)$

Получить неинформативное распределение по методу Джеффриса.

□

$X_1, \dots, X_n \sim Bern(\theta)$

$$L_x(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{X_i} \cdot (1-\theta)^{1-X_i} = \theta^{\sum X_i} (1-\theta)^{n-\sum X_i}$$

$$l_x(\theta) = (\sum X_i) \ln \theta + (n - \sum X_i) \ln(1-\theta)$$

$$U_x(\theta) = \frac{\partial l_x(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\sum X_i}{\theta} - \frac{n - \sum X_i}{1-\theta} = \frac{\sum X_i - n\theta}{\theta(1-\theta)}$$

$$U_{X_1}(\theta) = \frac{X_1 - \theta}{\theta(1-\theta)}$$

$$i_{X_1}(\theta) = D\left(\frac{X_1 - \theta}{\theta(1-\theta)}\right) = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

Т.о. $\boxed{q(\theta) = \sqrt{\frac{1}{\theta(1-\theta)}} \text{ - неинф. априорное распр.}}$

Заметим, что тогда $q(\theta) \sim Beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) =$
$= \pi \cdot Beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

■