№3

$(\xi_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ - марковская цепь.

$\xi_0 = 0$

$P(\xi_{n+1} = k+1 | \xi_n = k) = p$, $P(\xi_{n+1} = k | \xi_n = k) = 1-p$, $k, n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$

Найти: распр. ξ_n

Док-ть: посл. $\tau_0 = 0$, $\tau_k = \min\{n | \xi_n = k\}$ также явл. марк. цепью

$\square$

$$P(\xi_1 = 0) = 1-p$$
$$P(\xi_1 = 1) = p$$

$$P(\xi_2 = 0) = 1-p$$
$$P(\xi_2 = 1) = P(\xi_2 = 1 | \xi_1 = 0) \cdot P(\xi_1 = 0) +$$
$$+ P(\xi_2 = 1 | \xi_1 = 1) \cdot P(\xi_1 = 1) = C_2^1 p \cdot (1-p) = \cancel{2p} \, 2p(1-p)$$

$$P(\xi_2 = 2) = P(\xi_2 = 2 | \xi_1 = 1) \cdot P(\xi_1 = 1) = p^2$$

Док-м по индукции, что $\xi_n \sim Bin(n, p)$

База док-на выше.

Шаг: Пусть для ξ_{n-1} уже док-но, тогда:

$$P(\xi_n = m) = P(\xi_n = m | \xi_{n-1} = m) \cdot P(\xi_{n-1} = m) + P(\xi_n = m | \xi_{n-1} = m-1) \cdot$$
$$\cdot P(\xi_{n-1} = m-1) = (1-p) \cdot C_{n-1}^m p^m (1-p)^{n-m-1} + p \cdot C_{n-1}^{m-1} \cdot p^{m-1} (1-p)^{n-m} =$$
$$= p^m \cdot (1-p)^{n-m} \underbrace{(C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1})}_{C_n^m} = C_n^m \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}$$

Т.о. шаг док-н и $\xi_n \sim Bin(n, p)$

Теперь рассмотрим τ_0 и τ_n

$P(\cancel{\tau_k = m \mid \tau_k})$

Пусть $a_{k-1}, \dots, a_1 \in \mathcal{X}$

Рассм.

$P(\tau_k = m \mid \tau_{k-1} = l, \tau_{k-2} = a_{k-2}, \dots, \tau_1 = a_1) \ominus$

Заметим τ_k - не убывает, и $l \geq a_i \quad \forall i \in \overline{1, k-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Эти значения не несут доп. информации, так. в нем важно лишь достижение макс. узла $\Rightarrow$

$\Rightarrow \ominus P(\tau_k = m \mid \tau_{k-1} = l)$

Значит цепь марковская

Найдем ~~переход~~ переходные вер-ти:

$P(\tau_k = m \mid \tau_{k-1} = m-1) = P(\tau_k = m \mid \xi_{m-1} = k-1) =$

$= P(\xi_m = k \mid \xi_{m-1} = k-1) = \boxed{p}$

$\blacksquare$

№4

$(\xi_n, n \in \mathbb{N}_0)$ - марковская цепь

$S = \{1, \dots, N\}$ - фазовое пр-во.

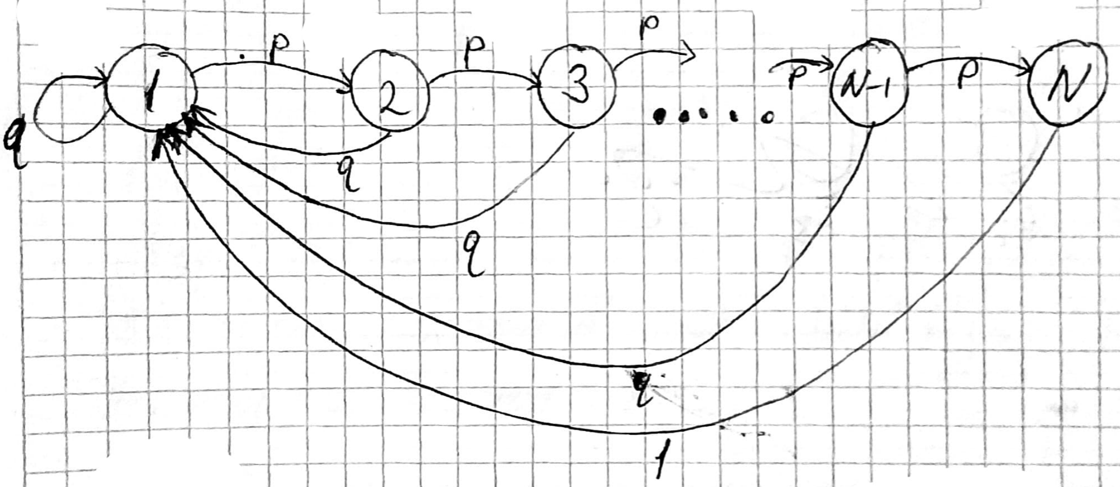
$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ q & 0 & 0 & p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q & 0 & 0 & 0 & \cdots & p \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

Найти: граф соотв. марковской цепи.

Предельное распределение.

□



Заметим $\exists n_0^{N-2} : P^{(n_0)} > 0 \Rightarrow$ выполнены усл. эрг. теоремы $\Rightarrow \sum \pi_i = 1$

$\pi_1(n) = q(\pi_1(n-1) + \pi_2(n-1) + \ldots + \pi_{N-1}(n-1)) + \pi_N(n-1)$

$\forall k \geq 2: \quad \pi_k(n) = p\,\pi_{k-1}(n-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_k(n) = p^{k-1}\pi_1(n-k+1) \Rightarrow \pi_k = p^{k-1} \cdot \pi_1$

Итак: $\pi_1 \sum\limits_{i=1}^{N} p^{i-1} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \pi_1 = \dfrac{1-p}{1-p^N} \\ \pi_k = \dfrac{p^{k-1}\cdot(1-p)}{1-p^N} \end{array}}$$