

14

Дано: $X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\theta_1, \theta_2)$

$$p_\theta(x) = \theta_2 \cdot e^{\theta_2(\theta_1 - x)} \cdot \mathbb{I}\{x \geq \theta_1\}$$

Найти: апостериорное распр.

□

1) Непараметрическую апrior.

$$q(t) \propto q_1(t_1) \cdot q_2(t_2) \propto 1 \cdot \frac{1}{t_2} = \frac{1}{t_2}$$

$$q(t|X) \propto \frac{1}{t_2} \cdot t_2^n \cdot e^{t_2(nt_1 - \sum X_i)} = t_2^{n-1} \cdot e^{t_2(nt_1 - \sum X_i)} \cdot \mathbb{I}\{X_{(1)} \geq t_1\}$$

$$q(t_1|X) \sim U(-\infty, X_{(1)})$$

$$q(t_2|t_1, X) \sim \Gamma(n, \sum X_i - nt_1)$$

2) Сопределенное распр.

$$\text{Поскольку } q_1(t_1) \propto \mathbb{I}\{t_1 < c\} \sim U(-\infty, c)$$

$$q_2(t_2) \propto t_2^{\beta-1} \cdot e^{-\alpha t_2} \sim \Gamma(\alpha, \beta)$$

$$\text{и } q(t|X) \propto \mathbb{I}\{t_1 < c\} \cdot t_2^{\beta-1} \cdot e^{-\alpha t_2} \cdot t_2^n \cdot e^{t_2(nt_1 - \sum X_i)} \cdot \mathbb{I}\{t_1 \leq X_{(1)}\} \propto t_2^{\beta+n-1} \cdot e^{t_2(nt_1 - \alpha - \sum X_i)} \cdot \mathbb{I}\{t_1 < c\} \cdot \mathbb{I}\{t_1 \leq X_{(1)}\}$$

$$q(t_1|X) \propto U(-\infty, \min(c, X_{(1)}))$$

$$q(t_2|t_1, X) \propto \Gamma(\alpha + \sum X_i - nt_1, \beta + n)$$