$\boxed{№2}$

1) Док-м $V_{in} \sim \chi^2_{N-k} \cdot \sigma^2$

Рассм. $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \}n_1, \ldots, \quad V_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \}n_k$

$\alpha = \mathrm{Lin}\{V_1, \ldots, V_k\}, \quad X = (X_{11}, \ldots, X_{n_k k}) \overset{H_0}{\sim} N(0, \sigma^2 \cdot I_N)$

$\underline{\dim \alpha = k}$

$\mathrm{proj}_{V_j} X = \frac{\langle V_j, X \rangle}{\|V_j\|^2} V_j = X_{\cdot j} \cdot V_j$

Тогда $\mathrm{proj}_{\alpha^\perp} X = X - \sum_{j=1}^{k} \mathrm{proj}_{V_j} X = \begin{pmatrix} X_{11} - X_{\cdot 1} \\ \vdots \\ X_{n_k k} - X_{\cdot k} \end{pmatrix}$

~~dim~~

Откуда, по Т. о разл. гаус. вектора (т.к. $E\,\mathrm{proj}_{\alpha^\perp} X = 0$):

$$\boxed{\|\mathrm{proj}_{\alpha^\perp} X\|^2 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - X_{\cdot j})^2 = V_{in} \sim \sigma^2 \cdot \chi^2_{N-k}}$$

2) Док-м ~~$\frac{1}{\sigma}$~~ $V_{out} \sim \chi^2_{k-1}$

Рассм. $V = \begin{pmatrix} \sqrt{n_1} \\ \vdots \\ \sqrt{n_k} \end{pmatrix}$

~~$\mathrm{proj}_V X$~~ Пусть $Y = (\sqrt{n_1} X_{\cdot 1}, \ldots, \sqrt{n_k} X_{\cdot k}) \overset{H_0}{\sim} N(0, \sigma^2 \cdot I_k)$

~~$\mathrm{proj}_V X$~~ Заметим $\langle V, Y \rangle = \sum_{j=1}^{k} n_j X_{\cdot j} = N X_{\cdot\cdot}$, или

$X_{\cdot\cdot} = \frac{\langle V, Y \rangle}{\|V\|^2}$

$\mathrm{proj}_V Y = \frac{\langle V, Y \rangle}{\|V\|^2} V$

Заметим $E\,\mathrm{proj}_{V^\perp} Y = 0$

~~$\|\mathrm{pro}$~~ Тогда по Т. о разл. гаус. вектора

$\|\mathrm{proj}_{V^\perp} Y\|^2 = \|Y - \frac{\langle V, Y \rangle}{\|V\|^2} V\|^2 = \sum_{j=1}^{k} n_j (X_{\cdot j} - X_{\cdot\cdot})^2 =$

$= V_{out} \sim \sigma^2 \cdot \chi^2_{k-1}$

Отсюда получаем желаемую статистику:

$$F(X) = \frac{V_{out}\,(N-k)}{V_{in}\,(k-1)} \sim F_{k-1,\,N-k}$$

и критерий:

$$\boxed{S = \{F(x) > F_{k-1,\,N-k,\,1-\alpha}\}}$$