Статистика

DS-поток

Лекция 12

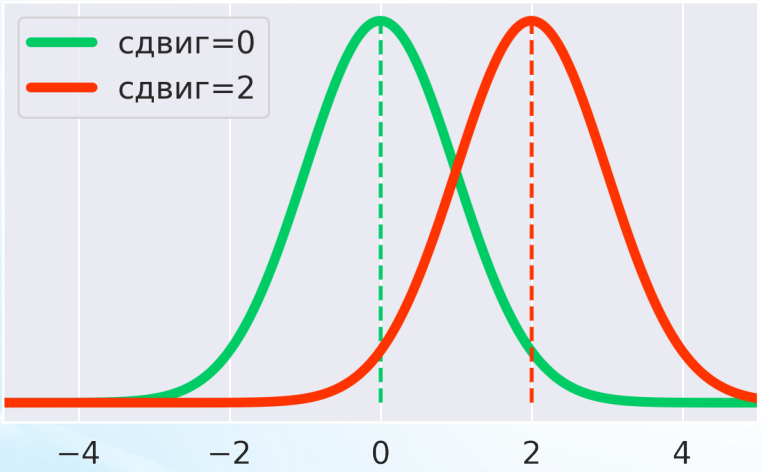
7.3 Обобщенная модель линейной регрессии

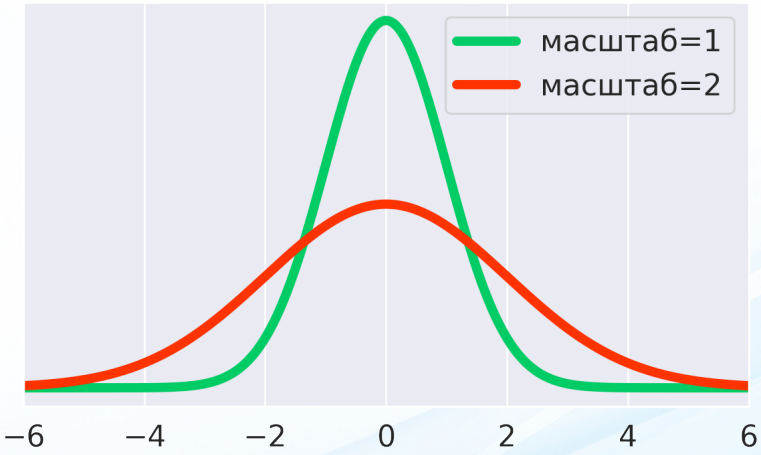
Сдвиг и масштаб

$\mathscr{P} = \{\mathrm{P}_\theta \mid \theta \in \Theta\}$ — семейство непрер. распр. с плотностью $p_\theta(x)$.

θ — параметр сдвига, если $p_\theta(x) = p_0(x - \theta)$.

θ — параметр масштаба, если $p_\theta(x) = \frac{1}{\theta} p_1(x/\theta)$ и $\Theta \subset (0, +\infty)$.





Примеры:

$\mathscr{P} = \{\mathcal{N}(a, \sigma^2) \mid a \in \mathbb{R}, \sigma > 0\}$:

a — параметр сдвига

σ — параметр масштаба.

$\mathscr{P} = \{U[0, \theta] \mid \theta > 0\}$:

θ — параметр масштаба.

Вспомним гауссовскую линейную модель

Данные $Y = X\theta + \varepsilon \sim \mathcal{N}(X\theta, \sigma^2 I_n)$

Строим модель вида $y(x) = x^T\theta$.

Что мы предсказываем?

Пусть x_0 новый объект.

Тогда $Y_0 = x_0^T\theta + \varepsilon_0 \sim \mathcal{N}(x_0^T\theta, \sigma^2)$.

Т.е. в качестве предсказания оцениваем $\mathsf{E}Y_0$ — *ожидаемый отклик*.

Итог

$y \in \mathbb{R}$ — значения наблюдаемого отклика

$\mathsf{E}_x Y$ — ожидаемый отклик

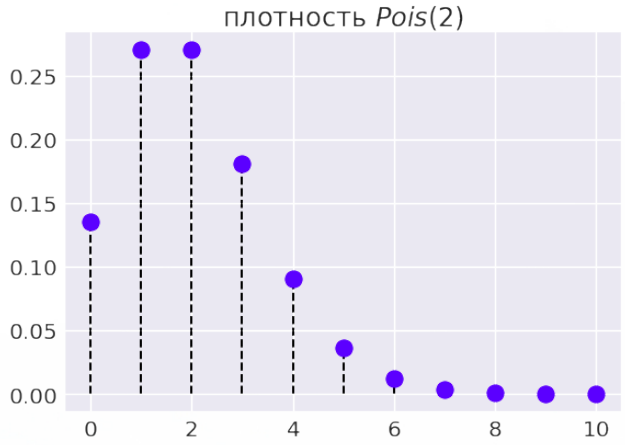
$Y_i \sim \mathcal{N}(x_i^T\theta, \sigma^2)$ — наблюдаемый отклик

Пуассоновское распределение

$$Pois(\lambda): \quad p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \; x \in \mathbb{Z}_+$$

Смысл: число событий,

произошедших за единицу времени



Условия:

1. события происходят с фиксированной интенсивностью λ.
2. независимо друг от друга.

Утверждение: время между двумя событиями имеет распр. $Exp(\lambda)$ (*см. пуассоновские случайные процессы*)

Примеры:

1. число клиентов в час
2. число запросов на сервер за минуту

События разной интенсивности

Интенсивность может зависеть от каких-то факторов.

$X_1, ..., X_n$ — факторы интервала времени

$Y_1, ..., Y_n$ — число событий, произошедших за интервал времени

Тем самым имеется $\lambda(x)$ — интенсивность событий для факторов x.

Получаем $Y_i \sim Pois(\lambda(x_i))$

Что предсказывать?

Нет смысла предсказывать сам Y_i,

т.к. помимо $\lambda(x_i)$ он содержит непрогнозируемый шум.

Тогда оценим $\mathsf{E}Y_i = \lambda(x_i)$ — *ожидаемый отклик*.

Как параметризовать $\lambda(x)$ для *линейной* модели?

Определимся с требованиями

Пусть значению $x_0^T\theta = 0$ соответствует интенсивность $\lambda_0 = 1$.

Значению $x_1^T\theta$ сопоставим интенсивность $\lambda_1 = 5$ событий в час.

Хотим чтобы значению $-x_1^T\theta$ соответствовала интенсивность $1/\lambda_1 = 0.2$ событий в час.

Линеаризация

Соответственно, нужно взять $\lambda_\theta(x) = \exp(x^T\theta)$.

Тогда $\ln \lambda_\theta(x) = x^T\theta$.

$g(z) = \ln z$ — **линеаризация** ожидаемого отклика.

Итог

$y \in \mathbb{Z}_+$ — значения наблюдаемого отклика

$\lambda_\theta(x) = \mathsf{E}_x Y$ — ожидаемый отклик

$Y_i \sim Pois(\lambda_\theta(x_i))$ — наблюдаемый отклик

Это **пуассоновская регрессия**.

Случай бинарной классификации

$X_1, ..., X_n$ — признаки объекта

$Y_1, ..., Y_n$ — бинарный класс

Тем самым имеется $\rho(x)$ — вероятность класса 1 для объекта x.

Получаем $Y_i \sim Bern(\rho(x_i))$

Что предсказывать?

Оцениваем $\mathsf{E}Y = \rho(x)$ — *ожидаемый отклик*.

Как параметризовать $\rho(x)$ для *линейной* модели?

Определимся с требованиями

Пусть значению $x_0^T\theta = 0$ соответствует вероятность 0.5.

Значению $x_1^T\theta$ сопоставим вероятность $\rho_0 = 0.9$.

Хотим чтобы значению $-x_1^T\theta$ соответствовала вероятность 0.1.

Что такое в 2 раза более/менее вероятно?

Возможно, 0.95 и 0.05, но это не точно.

Сведение к параметру масштаба

Заметим, что $\frac{\rho}{1-\rho}$ — насколько чаще выпадает класс 1

по сравнению с классом 0. Тем самым это параметр масштаба.

Линеаризация

Логит $g(z) = \ln \frac{z}{1-z}$ — линеаризация ожидаемого отклика.

Т.е. параметризация $\rho_\theta(x)$ должна быть такой, что $\ln \frac{\rho_\theta(x)}{1-\rho_\theta(x)} = x^T\theta$.

Тогда нужно взять $\rho_\theta(x) = \frac{1}{1+\exp(x^T\theta)}$.

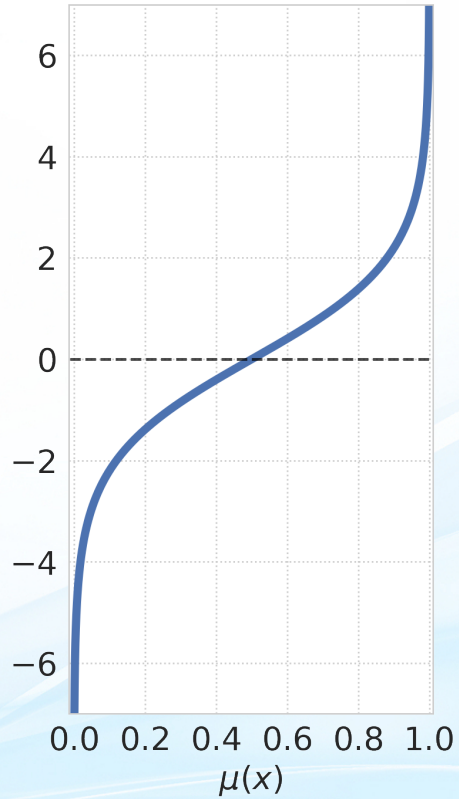
Бинарный отклик

$y \in \{0, 1\}$ — значения наблюдаемого отклика

$\rho_\theta(x) = \mathrm{P}_x(Y = 1)$ — ожидаемый отклик

$Y_i \sim Bern(\rho_\theta(x_i))$ — наблюдаемый отклик

Это **логистическая регрессия**.



Обобщенная модель линейной регрессии

Гауссовская линейная модель

Ожидаемый отклик:

$y = \mu_\theta(x) = x^T\theta.$

Наблюдаемый отклик:

$Y_i = x_i^T\theta + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$

или $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_\theta(x_i), \sigma^2)$

Оценка отклика:

$\widehat{y} = x^T\widehat{\theta}.$

Generalized Linear Models (GLM)

Ожидаемый отклик:

$y = \mu_\theta(x)$, причем $g(\mu_\theta(x)) = x^T\theta$,

т.е. g — линеаризация ожид. отклика

Наблюдаемый отклик:

$Y_i \sim \mathrm{P}_{\mu_\theta(x_i)}$,

где $\{\mathrm{P}_\psi \mid \psi \in \Psi\}$ — семейство распр.

Оценка отклика:

$\widehat{y} = g^{-1}\left(x^T\widehat{\theta}\right).$

Обобщенная модель линейной регрессии

Пуассоновская регрессия

Ожидаемый отклик:

$y = \mu_\theta(x) = \exp(x^T\theta)$.

$g(z) = \ln z$ — линеаризация

Наблюдаемый отклик:

$Y_i \sim Pois(\mu_\theta(x_i))$.

Оценка отклика:

$\widehat{y} = \exp(x^T\widehat{\theta})$.

Generalized Linear Models (GLM)

Ожидаемый отклик:

$y = \mu_\theta(x)$, причем $g(\mu_\theta(x)) = x^T\theta$,

т.е. g — линеаризация ожид. отклика

Наблюдаемый отклик:

$Y_i \sim \mathrm{P}_{\mu_\theta(x_i)}$,

где $\{\mathrm{P}_\psi \mid \psi \in \Psi\}$ — семейство распр.

Оценка отклика:

$\widehat{y} = g^{-1}\left(x^T\widehat{\theta}\right)$.

Обобщенная модель линейной регрессии

Логистическая регрессия

Ожидаемый отклик:

$y = \mu_\theta(x) = (1 + \exp(x^T\theta))^{-1}$.

$g(z) = \ln \frac{z}{1-z}$ — линеаризация

Наблюдаемый отклик:

$Y_i \sim Bern(\mu_\theta(x_i))$.

Оценка отклика:

$\widehat{y} = (1 + \exp(x^T\widehat{\theta}))^{-1}$.

Generalized Linear Models (GLM)

Ожидаемый отклик:

$y = \mu_\theta(x)$, причем $g(\mu_\theta(x)) = x^T\theta$,

т.е. g — линеаризация ожид. отклика

Наблюдаемый отклик:

$Y_i \sim \mathrm{P}_{\mu_\theta(x_i)}$,

где $\{\mathrm{P}_\psi \mid \psi \in \Psi\}$ — семейство распр.

Оценка отклика:

$\widehat{y} = g^{-1}\left(x^T\widehat{\theta}\right)$.

Свойства GLM

В качестве $\widehat{\theta}$ берется ОМП (ищется численно)

$$L_X(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p_{\mu_\theta(x_i)}(Y_i) = \prod_{i=1}^{n} p_{g^{-1}(x_i^T\theta)}(Y_i) \longrightarrow \max_\theta$$

Если $\{\mathrm{P}_\psi \mid \psi \in \Psi\}$ лежит в экспоненциальном классе, то $\widehat{\theta}$:

1. существует и единственна;
2. состоятельна;
3. асимптотически нормальна: $\sqrt{I(\theta)}\left(\widehat{\theta} - \theta\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, I_d)$,
   где $I(\theta) = \left(-\mathrm{E}\frac{\partial^2 \log L_X(\theta)}{\partial\theta_j \partial\theta_k}\right)_{jk}$ — информационная матрица Фишера.

Частные случаи:

1. Линейная (гауссовская): $I(\theta) = \sigma^{-2} X^T X$.
2. Логистическая: $I(\theta) = X^T \cdot \mathrm{diag}\left[\sigma\left(x_i^T\theta\right)\left(1 - \sigma\left(x_i^T\theta\right)\right)\right] \cdot X$.
3. Пуассоновская: $I(\theta) = X^T \cdot \mathrm{diag}\left[\exp\left(x_i^T\theta\right)\right] \cdot X$.

Примечание. Свойства работают если верны предположения модели.

Асимпт. доверительные интервалы в GLM

Для параметров ($\Longrightarrow$ критерий для гипотезы $\mathsf{H}_0\colon \theta_j = 0$)

$$\theta_j \quad \in \quad \left(\widehat{\theta}_j \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\left(I^{-1}(\widehat{\theta})\right)_{jj}}\right)$$

Для преобразованного ожидаемого отклика

$$x_0^T\theta \quad \in \quad \left(x_0^T\widehat{\theta} - \delta, x_0^T\widehat{\theta} + \delta\right)$$

Для ожидаемого отклика

$$\mu(x_0) = g^{-1}(x_0^T\theta) \quad \in \quad \left[g^{-1}\left(x_0^T\widehat{\theta} - \delta\right), g^{-1}\left(x_0^T\widehat{\theta} + \delta\right)\right],$$

$$\delta = z_{1-\alpha/2}\sqrt{x_0^T I^{-1}(\widehat{\theta})x_0}$$

Примечание. Для линейной регрессии вместо σ^2 нужно взять ее несмещ. оценку.

Проверка линейности логита

в логистической регрессии

Сглаженные диаграммы рассеяния

Пусть $(x_1, Y_1), \ldots, (x_n, Y_n)$ — обучающая выборка, где $Y_i \in \{0, 1\}$.

Выберем признак j и построим ядерную регрессию $y \sim x_j$:

$$\widehat{y}(x_j) = \sum_{i=1}^{n} q\left(\frac{x_j - x_{ij}}{h}\right) Y_i \Bigg/ \sum_{i=1}^{n} q\left(\frac{x_j - x_{ij}}{h}\right),$$

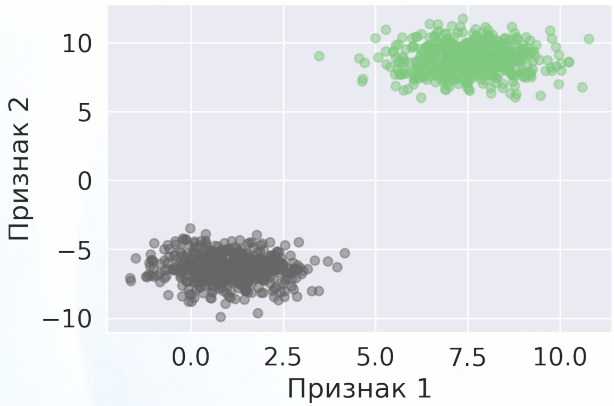
где x_{ij} — признак j объекта i,
x_j — признак j нового объекта (по сетке),
q — ядро,
$h > 0$ — ширина ядра.

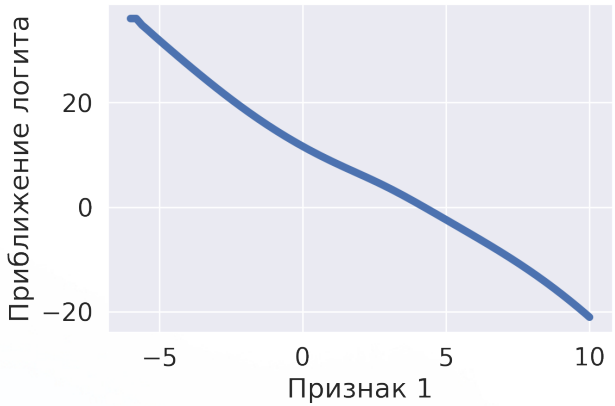
Эта регрессия — приближение вер-ти класса 1 в зависимости от x_j.

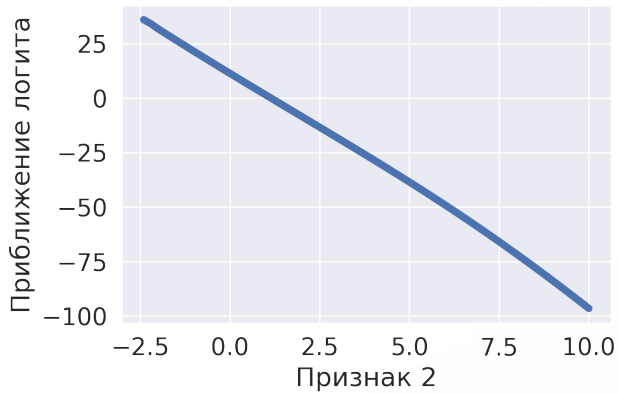
Отсюда делаем приближение логита:

$$logit(x_j) = \log \frac{\widehat{y}(x_j)}{1 - \widehat{y}(x_j)}.$$

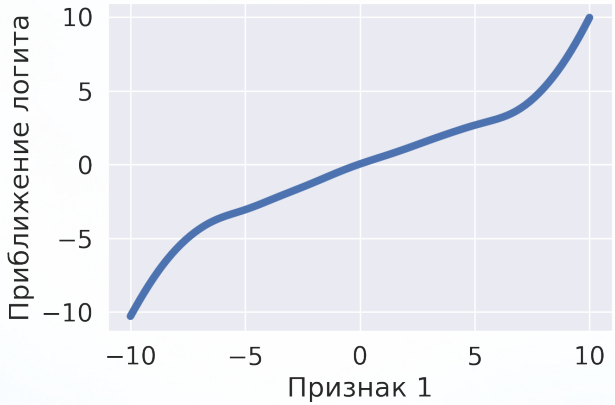
Проверка: график $logit(x_j)$ похож на прямую.

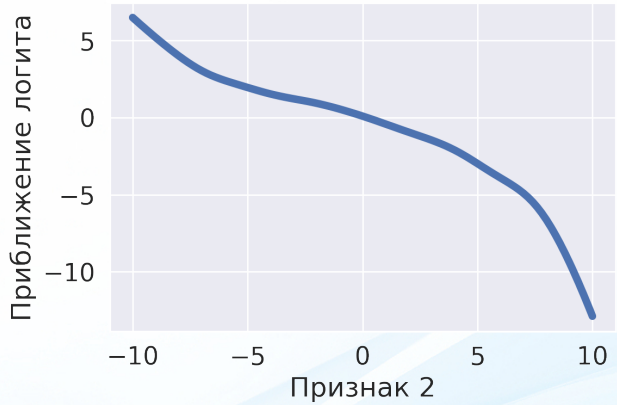

Признак 2
Признак 1

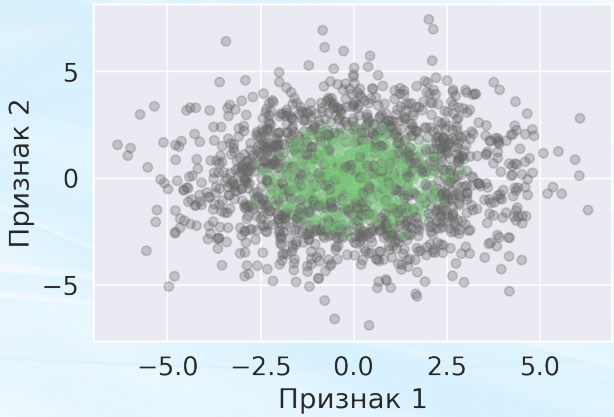

Приближение логита
Признак 1


Приближение логита
Признак 2

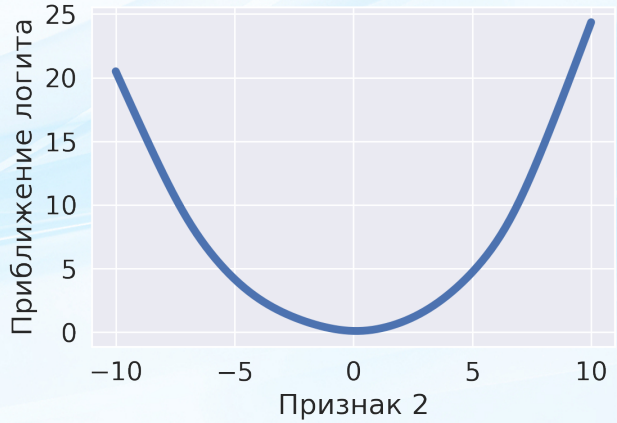

Признак 2
Признак 1

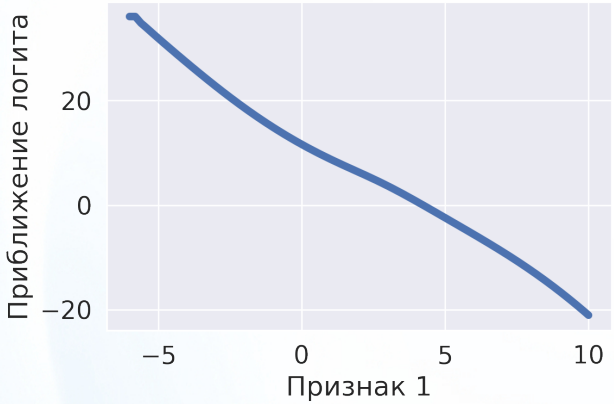

Приближение логита
Признак 1

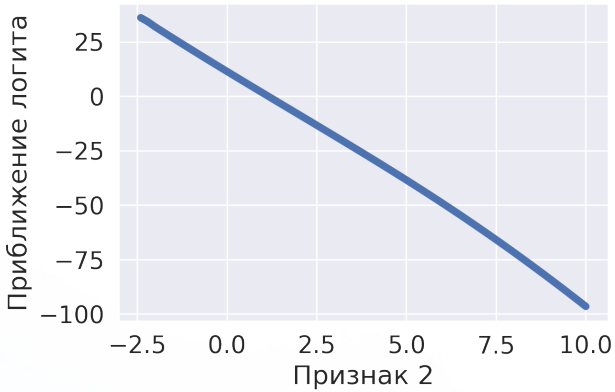

Приближение логита
Признак 2


Признак 2
Признак 1


Приближение логита
Признак 1

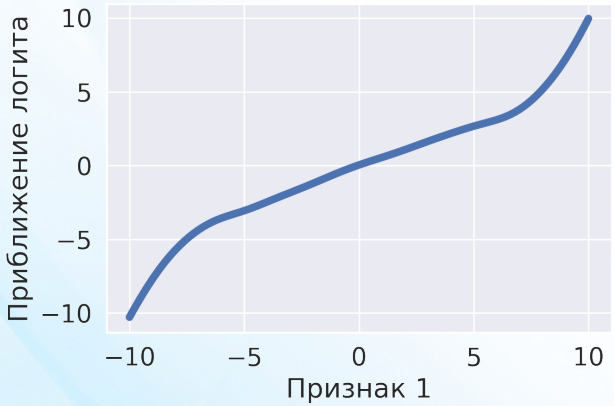

Приближение логита
Признак 2

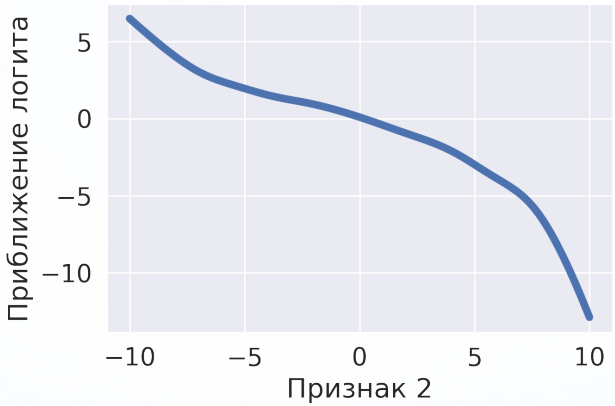




Логит линеен,

все хорошо

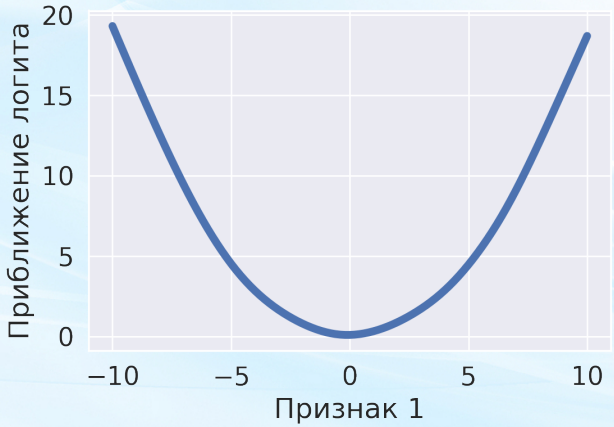


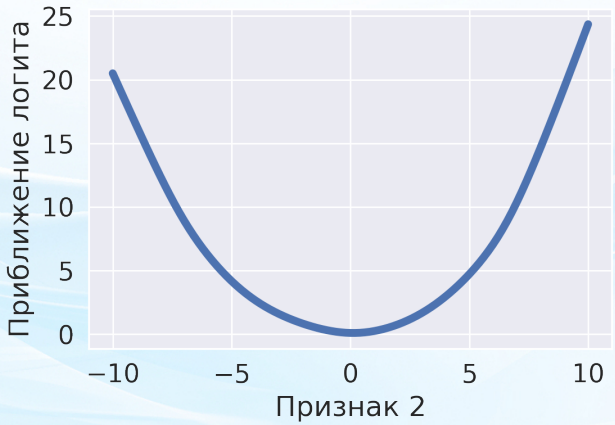


Классы линейно

разделимы, но зависи-

мость нелинейна





Классы не являются

линейно разделимыми


ВСЁ!