Δημήτριος Κυριακίδης
el17077

Τεχνητή Νοημοσύνη
2η Σειρά Ασκήσεων

<u>Άσκηση 1:</u>

1. $(p \Leftrightarrow \neg q) \Rightarrow \big((r \land s) \lor t\big)$

Ισχύουν $p \Rightarrow q \equiv \neg p \lor q$ και $p \Leftrightarrow q \equiv (\neg p \lor q) \land (p \lor \neg q)$, άρα αντικαθιστώ ισοδυναμίες και συνεπαγωγές ως εξής:

$\neg\big((\neg p \lor \neg q) \land (p \lor q)\big) \lor \big((r \land s) \lor t\big)$

$\big(\neg(\neg p \lor \neg q) \lor \neg(p \lor q)\big) \lor \big((r \land s) \lor t\big)$

$(p \land q) \lor (\neg p \land \neg q) \lor (r \land s) \lor t$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα $p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$:

$\Big(\big((p \land q) \lor \neg p\big) \land \big((p \land q) \lor \neg q\big)\Big) \lor \big((r \lor t) \land (s \lor t)\big)$

$\big((p \lor \neg p) \land (q \lor \neg p) \land (p \lor \neg q) \land (q \lor \neg q)\big) \lor \big((r \lor t) \land (s \lor t)\big)$

$\big((\neg p \lor q) \land (p \lor \neg q)\big) \lor \big((r \lor t) \land (s \lor t)\big)$

$\Big(\big((\neg p \lor q) \land (p \lor \neg q)\big) \lor (r \lor t)\Big) \land \Big(\big((\neg p \lor q) \land (p \lor \neg q)\big) \lor (s \lor t)\Big)$

$\big((\neg p \lor q) \lor (r \lor t)\big) \land \big((p \lor \neg q) \lor (r \lor t)\big) \land \big((\neg p \lor q) \lor (s \lor t)\big) \land \big((p \lor \neg q) \lor (s \lor t)\big)$

$\boxed{(\neg p \lor q \lor r \lor t) \land (p \lor \neg q \lor r \lor t) \land (\neg p \lor q \lor s \lor t) \land (p \lor \neg q \lor s \lor t)}$

2. $\big(\forall x. \forall y. \exists z. q(x, y, z) \lor \exists x. \forall y. p(x, y)\big) \land \neg\big(\exists x. \exists y. p(x, y)\big)$

$\forall y. \big(\forall x. \exists z. q(x, y, z) \lor \exists x. p(x, y)\big) \land \forall x. \forall y. \neg p(x, y)$

$\forall y. \Big(\big(\forall x. \exists z. q(x, y, z) \lor \exists x. p(x, y)\big) \land \forall x. \neg p(x, y)\Big)$

Η παραπάνω ισοδυναμεί με την

$\forall y. \left(\left(\forall x. \exists z. q(x,y,z) \lor \exists w. p(w,y) \right) \land \forall x. \neg p(x,y) \right)$

Και στην συνέχεια με εφαρμογή Skolemization, θέτοντας $z = f(x,y)$ και $w = g(y)$

$\boxed{\left(q\left(x,y,f(x,y)\right) \lor p\left(g(y),y\right) \right) \land \neg p(x,y)}$

Άσκηση 2:

(1) $\forall x. R(x,x)$ ανακλαστικότητα
(2) $\forall x. \forall y. \left(R(x,y) \Rightarrow R(y,x) \right)$ συμμετρία
(3) $\forall x. \forall y. \forall z. \left(R(x,y) \land R(y,z) \Rightarrow R(x,z) \right)$ μεταβατικότητα

Για τα τρία δυνατά ζεύγη, θέτοντας $\Delta^{\mathcal{I}} = \{a,b,c\}$ έχουμε:

- για το (1)-(2) θεωρώ $\mathcal{I} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b)\}$
  η ερμηνεία $\mathcal{J} = \langle \Delta^{\mathcal{I}}, \mathcal{I} \rangle$ ικανοποιεί τις πρώτες δύο προτάσεις, όμως όχι την τρίτη:
  $(a,b) \in \mathcal{I}$ και $(b,c) \in \mathcal{I}$ αλλά $(a,c) \notin \mathcal{I}$.
- για το (2)-(3) θεωρώ $\mathcal{I} = \{(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(a,c),(c,a)\}$
  η ερμηνεία $\mathcal{J} = \langle \Delta^{\mathcal{I}}, \mathcal{I} \rangle$ ικανοποιεί τις τελευταίες δύο προτάσεις, όμως όχι την πρώτη:
  $\exists x: \neg R(x,x)$
- για το (1)-(3) θεωρώ $\mathcal{I} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,c),(a,c)\}$
  η ερμηνεία $\mathcal{J} = \langle \Delta^{\mathcal{I}}, \mathcal{I} \rangle$ ικανοποιεί την πρώτη και την τρίτη πρόταση, όμως όχι την δεύτερη:
  $(a,b) \in \mathcal{I}$ αλλά $(b,a) \notin \mathcal{I}$.

Αφού κανένα ζεύγος από τις τρεις δεν συνεπάγεται αναγκαία την τρίτη, καμία από τις προτάσεις δεν αποτελεί λογική συνέπεια των άλλων.

Άσκηση 3:

Θέτοντας $y = f(x)$ και έχουμε $A(x) \Rightarrow R\left(x, f(x)\right) \land C\left(f(x)\right)$ (1)

Ομοίως με $y = g(x)$ και έχουμε $B(x) \Rightarrow S(g(x), x) \land D\left(g(x)\right)$ (2)

$D(x) \Rightarrow A(x)$ (3)

$S(x,y) \Rightarrow T(y,x)$ (4)

$T(x,y) \land R(y,z) \land C(z) \Rightarrow Q(x)$ (5)

Ξεκινάμε με:

$$B(x) \overset{(2)}{\Rightarrow} S(g(x),x) \wedge D\big(g(x)\big) \xRightarrow{(3),(4)} T\big(x,g(x)\big) \wedge A\big(g(x)\big) \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$T(x,g(x)) \wedge R(g(x),f\big(g(x)\big)) \wedge C(f(g(x)) \xRightarrow{g(x)=y,f(g(x))=z} T(x,y) \wedge R(y,z) \wedge C(z) \overset{(5)}{\Rightarrow} Q(x)$$

Και καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Άσκηση 4:

Στο κατηγόρημα $ΑνήκειΣε$ έγινε η υπόθεση ότι x είναι η χώρα και y η ήπειρος.

Επίσης $ΜεγαλύτερηΑπό(x,y) \Leftrightarrow πληθυσμός(x) > πληθυσμός(y)$

1. $Χώρα(x) \Rightarrow \exists y\big(Ήπειρος(y) \wedge ΑνήκειΣε(x,y)\big)$
2. $\exists x_1,\dots,x_n(Χώρα(x_1) \wedge \dots \wedge Χώρα(x_n) \wedge πληθυσμός(x_1) > 300M \wedge \dots \wedge πληθυσμός(x_n) > 300M \wedge n \geq 2)$
3. $Χώρα(x) \Rightarrow \nexists y_1,y_2,y_3\big(Ήπειρος(y_1) \wedge Ήπειρος(y_2) \wedge Ήπειρος(y_3) \wedge ΑνήκειΣε(x,y_1) \wedge ΑνήκειΣε(x,y_2) \wedge ΑνήκειΣε(x,y_3)\big)$
4. $\exists x \forall y \Big(Χώρα(x) \wedge ΑνήκειΣε(x,Αμερική) \wedge \Big(Χώρα(y) \wedge ΑνήκειΣε(y,Ευρώπη) \Rightarrow ΜεγαλύτερηΑπό(x,y)\Big)\Big)$
5. $\exists x \exists y \forall z\big(Χώρα(x) \wedge Χώρα(y) \wedge πληθυσμός(x) > 1B \wedge πληθυσμός(y) > 1B \wedge (Χώρα(z) \wedge πληθυσμός(z) > 1B \Rightarrow z = x \vee z = y)\big)$
6. $\forall x\big(Χώρα(x) \wedge x \neq Κίνα \wedge x \neq Ινδια \Rightarrow ΜεγαλύτερηΑπό(Κίνα,x) \wedge ΜεγαλύτερηΑπό(Ινδία,x)\big)$

Άσκηση 7:

$\text{parent}(x,y) \leftarrow \text{father}(x,y).$
$\text{parent}(x,y) \leftarrow \text{mother}(x,y).$
$\text{sibling}(y,z) \leftarrow \text{parent}(y,x), \text{parent}(z,x).$
$\text{sibling}(x,y) \leftarrow \text{sibling}(y,x).$
$\text{grandparent}(x,z) \leftarrow \text{parent}(x,y), \text{parent}(y,z).$
$\text{cousin}(y,z) \leftarrow \text{grandparent}(y,x), \text{grandparent}(z,x).$
$\text{mother}(A,B) \leftarrow .$
$\text{father}(A,C) \leftarrow .$
$\text{mother}(B,D) \leftarrow .$
$\text{mother}(E,D) \leftarrow .$
$\text{father}(F,E) \leftarrow .$
$\text{father}(G,E) \leftarrow .$

1.) Forward chaining

$m(A,B) \Rightarrow p(A,B)$

$f(A,C) \Rightarrow p(A,C)$

$m(B,D) \Rightarrow p(B,D)$

$m(E,D) \Rightarrow p(E,D)$

$f(F,E) \Rightarrow p(F,E)$

$f(G,E) \Rightarrow p(G,E)$

$p(B,D) \wedge p(E,D) \Rightarrow s(B,E)$

$p(F,E) \wedge p(G,E) \Rightarrow s(F,G)$

$p(A,B) \wedge p(B,D) \Rightarrow gp(A,D)$

$p(F,E) \wedge p(E,D) \Rightarrow gp(F,D)$

$p(G,E) \wedge p(E,D) \Rightarrow gp(G,D)$

$gp(A,D) \wedge gp(F,D) \Rightarrow \boldsymbol{c(A,F)}$

$gp(A,D) \wedge gp(G,D) \Rightarrow c(A,G)$

Έχουμε γράψει όλες τις προτάσεις που προκύπτουν από εξαντλητικές διαδοχικές επαγωγές στην βάση γνώσης (στην πραγματικότητα μπορεί να αποδειχθεί και ότι $c(F,G)$ αλλά το αγνοούμε καθώς ισχύει $s(F,G)$). Παρατηρούμε ότι από την βάση γνώσης, με χρήση αλγορίθμου αλυσίδας προς τα εμπρός, συνάγεται ότι $cousin(A,F)$, αλλά όχι ότι $sibling(A,G)$.

2.) Backward chaining

$c(A,F) \Rightarrow gp(A,x) \wedge gp(F,x)$

$gp(A,x) \Rightarrow p(A,y) \wedge p(y,x)$

$p(A,y) \Rightarrow m(A,y) \vee f(A,y)$

$\big(m(A,y) \vee f(A,y)\big) \wedge m(A,B) \wedge f(A,C) \Rightarrow y = B \vee y = C$

Άρα $p(A,y) \wedge p(y,x) \wedge (y = B \vee y = C)$. Όμως στην βάση γνώσης $\nexists x{:}\, p(C,x)$, επομένως η $gp(A,x)$ ικανοποιείται μόνο για $y = B$ και $x = D$

$gp(F,D) \Rightarrow p(F,z) \wedge p(z,D) \Rightarrow z = E$

Θεωρώντας την τελική πρόταση ως υπόθεση και με διαδοχικές συνεπαγωγές δεν καταλήγουμε σε άτοπο, αλλά αντιθέτως βρίσκουμε άτομα που να την ικανοποιούν.

$s(A,G) \Rightarrow p(A,x) \wedge p(G,x)$

Ομοίως με πριν έχουμε $p(A,x) \Rightarrow x = B \vee x = C$

Όμως $\neg p(G,B) \wedge \neg p(G,C)$ άρα υποθέτοντας ότι αληθεύει η πρόταση $sibling(A,G)$ καταλήγουμε σε άτοπο. Συνεπώς, και με τον αλγόριθμο προς τα πίσω αλυσίδας φθάσαμε στα ίδια συμπεράσματα.