Δημήτριος Κυριακίδης
el17077

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
2η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων

Άσκηση 1:

Για κάθε σημείο p υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα της ℓ, κάθε σημείο του οποίου μπορεί να είναι κέντρο κύκλου που ικανοποιεί την συνθήκη. Επομένως, το πρόβλημα μπορεί να λυθεί εξετάζοντας τα διαστήματα (τμήματα) αυτά για όλα τα σημεία, ως εξής:

- Ταξινομούμε όλα τα διαστήματα S_p ($c \in S_p \Rightarrow d(c,p) \leq r$) ως προς το «δεξιότερο» άκρο τους (θεωρώντας την ℓ ως οριζόντιο άξονα με συντεταγμένες)
- Διατρέχουμε τα διαστήματα αυτά από τα αριστερά προς τα δεξιά, και αν το αριστερό άκρο του τρέχοντος διαστήματος βρίσκεται δεξιότερα του τελευταίου τοποθετημένου σημείου - κέντρου (δηλαδή δεν υπάρχει ακόμη κυκλικός δίσκος με κέντρο στο τρέχον διάστημα), τότε προσθέτουμε το δεξιό άκρο του υπό εξέταση τμήματος στο σύνολο των κέντρων κύκλων.

Στο τέλος της διαδικασίας κάθε σημείο θα βρίσκεται εντός τουλάχιστον ενός εκ των κυκλικών δίσκων με κέντρα τα σημεία του κατασκευασμένου συνόλου.
Η πολυπλοκότητα της ταξινόμησης είναι $O(N\log N)$ όπου N το πλήθος των διαστημάτων και η πολυπλοκότητα της διάσχισης που περιγράφεται στο δεύτερο βήμα είναι γραμμική ως προς το N, επομένως τελικά η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι $O(N\log N)$.
Για την απόδειξη της βελτιστότητας ως προς το πλήθος των δίσκων θεωρούμε $o_1, o_2, \ldots, o_m$ τα σημεία που προκύπταν από την βέλτιστη λύση, και έστω $g_1, g_2, \ldots, g_k$ τα σημεία που επιστρέφει ο παραπάνω αλγόριθμος (ως κέντρα κύκλων). Αρκεί να αποδειχθεί ότι $k=m$.
Προς τον σκοπό αυτό θα αποδειχθεί πρώτα ότι $g_i \geq o_i \ \forall i \leq m$. Έστω $s_1, s_2, \ldots, s_k$ τα αριστερά και $d_1, d_2, \ldots, d_k$ τα δεξιά άκρα των διαστημάτων που εξετάζονται από τον παραπάνω άπληστο αλγόριθμο. Για $i=1$: $g_1 = d_1 \geq o_1$, διότι $\nexists c \in \ell : c > d_1 \wedge d(c, p_1) \leq r$.
Επαγωγικά, υποθέτοντας ότι $g_{i-1} \geq o_{i-1}$: για το αμέσως επόμενο διάστημα (s_i, d_i) ισχύει $s_i > g_{i-1}$, οπότε $g_i = d_i$. Αφού $o_{i-1} \leq g_{i-1} < s_i$, το o_{i-1} δεν καλύπτει το διάστημα

(s_i, d_i), άρα θα πρέπει $s_i \leq o_i \leq d_i$, οπότε $o_i \leq g_i$

Συνεπώς, τώρα για να αποδειχθεί ότι $k=m$, ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν αληθεύει, και ότι ο αλγόριθμος δεν είναι βέλτιστος οπότε $k > m$. Αυτό θα σήμαινε ότι υπάρχει διάστημα (s_n, d_n) που δεν καλύπτεται από τον κυκλικό δίσκο με κέντρο g_m, οπότε $s_n > g_m$, όμως τότε σύμφωνα με το παραπάνω $s_n > o_m$ δηλαδή το (s_n, d_n) δεν καλύπτεται από την βέλτιστη λύση. Άτοπο.

Άσκηση 4:

α.) Το ελάχιστο κόστος $cost(i)$ για την κάλυψη των σημείων x_0 έως και x_i υπολογίζεται ως $cost(i) = \min_{0 \leq j \leq i} \{cost(j-1) + (x_i - x_j)^2 + c\}$, όπου $cost(-1) = 0$. Επομένως, με τεχνική δυναμικού προγραμματισμού το πρόβλημα επιλύεται υπολογίζοντας αναδρομικά το $cost(f)$.

Η αναδρομική σχέση $T(n) = T(n-1) + n$ έχει τάξη μεγέθους $\Theta(n^2)$.

Άσκηση 6:

α.) Η εξαντλητική αναζήτηση ελέγχει όλες τις δυνατές υπακολουθίες, πλήθους $\frac{n(n+1)}{2}$ (μία μήκους n, συν δύο μήκους $n-1$ και τα λοιπά). Αυτή η λύση έχει πολυπλοκότητα $O(n^2)$. Για την επίλυση του προβλήματος σε γραμμικό χρόνο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος Kadane: Ορίζουμε ως $MCS(i)$ (Maximum Contiguous subsequence Sum) το μέγιστο άθροισμα υπακολουθίας που λήγει με το στοιχείο i. Ισχύει ότι $MCS(1) = A[1]$ και αποδεικνύεται ότι $MCS(i) = \max(A[i], MCS(i) + A[i])$. Η λύση είναι η μέγιστη τιμή MCS και υπολογίζεται με μία μόνο διάσχιση της ακολουθίας.

Άσκηση 7:

Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο αριθμών μπορεί να υπολογιστεί από τον αλγόριθμο του Ευκλείδη, που ως γνωστόν έχει πολυπλοκότητα γραμμική ως προς το πλήθος ψηφίων του μεγαλύτερου αριθμού. Επιπλέον, ισχύει ότι $(a, \beta, \gamma) = ((a, \beta), \gamma)$. Επομένως, το κόστος ενός περιπάτου σε k κορυφές υπολογίζεται με $k-1$ διαδοχικές εφαρμογές του αλγορίθμου του Ευκλείδη.

Άσκηση 5:

α.) Έστω ότι η ακμή e' συνδέει τις κορυφές u και v. Το γράφημα $T_1 \cup \{e'\}$ περιέχει ακριβώς έναν κύκλο, διότι στο T_1 υπάρχει διαδρομή από την u στην v που δεν περιλαμβάνει την e'. Αφαιρώντας οποιαδήποτε ακμή $e \in T_1 \setminus T_2$ που συμμετέχει στον κύκλο (η ύπαρξή της είναι εγγυημένη γιατί το T_2 δεν έχει αυτόν τον κύκλο), προκύπτει νέο δένδρο, το οποίο είναι συνδετικό αφού περιέχει όλες τις ακμές.