Quaternionen mit Java

Christian Basler

Inhaltsverzeichnis

1 Zusammenfassung

2 Grundlagen

Quaternionen $\mathbb{H}$ erweitern die Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ um die Komponenten j und k.

$$q = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k}$$

Dabei gilt $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1$ und daher auch z.B. $\mathrm{ij} = \mathrm{k}$ und $\mathrm{jk} = \mathrm{i}$.

Euklidische Vektoren können dabei wie folgt in eine Quaternion abgebildet werden:

$$q_{\vec{v}} = 0 + v_x\mathrm{i} + v_y\mathrm{j} + v_z\mathrm{k}$$

Daher wird der Imaginärteil einer Quaternion auch Vektorteil genannt. Eine solche Quaternion, welche nur aus Vektorteil besteht, wird auch als *reine Quaternion* bezeichnet.

2.1 Polardarstellung

Quaternionen $\notin \mathbb{R}$ lassen sich eindeutig in der Form

$$q = |q|(\cos\phi + \epsilon \sin\phi)$$

darstellen mit dem Betrag

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

dem Polarwinkel

$$\phi := \arccos q = \arccos \mathrm{Re}q$$

und der reinen Einheitsquaternion

$$\epsilon = \frac{\mathrm{Im}q}{|\mathrm{Im}q|}$$

2.2 Rotation

Quaternionen erlauben eine elegante Darstellung von Drehungen im dreidimensionalen Raum:

$$y = qxq^{-1} = qx\bar{q}$$
$$q = \cos\frac{\alpha}{2} + \epsilon \sin\frac{\alpha}{2}$$

q ist dabei eine Einheitsquaternion[1] und stellt eine Drehung um Achse ϵ mit Winkel α dar.

[1] $|q| = 1$

3 Java-Bibliothek

Die Java-Bibliothek stellt ein Objekt "Quaternion"mit folgenden Methoden zur Verfügung:

- q.add(r) = $q + r$
- q.subtract(r) = $q - r$
- q.multiply(r) = qr
- q.conjugate() = $\bar{q}$
- q.norm() = $|q|$
- q.normalize() = $\frac{q}{|q|}$
- q.reciprocal() = q^{-1}
- q.divide(r) = qr^{-1}
- q.rotate(θ, x, y, z) = $Rotation\ um\ Achse\ (x, y, z) mit Winkel \theta$
- q.exp() = e^q
- q.ln() = $\ln q$
- q.getRe() = $\mathbf{Re}\ q$
- q.getIm() = $\mathbf{Im}\ q$
- q.getPhi()
- q.getEpsilon()
- q.equals(r, δ) = $|q - r|^2 < \delta$
- q.equals(r) = q.equals(r, Quaternion.DELTA)

Zum Erstellen neuer Quaternionen besteht ausserdem die statische Methode `H` in folgenden Ausführungen:

- H(q_0, q_1, q_2, q_3) = $q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k}$

- H(x, y, z) $= x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}$
- H(w) $= w$
- H(α, $\vec{v}$) $= \cos\frac{\alpha}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}v_x + \mathrm{j}\sin\frac{\alpha}{2}v_y + \mathrm{k}\sin\frac{\alpha}{2}v_z$
- H([x, y, z]), H([w, x, y, z])

Für Fälle wo euklidische Vektoren benötigt werden, z.B. beim Konstruktor `H(`α`, `$\vec{v}$`)`, gibt es ausserdem die Klasse `Vector`, welche jedoch nur sehr eingeschränkte Funktionen bietet.

4 Beispielanwendungen

4.1 Wo ist unten?

4.2 Künstlicher Horizont

5 Diskussion

6 Literatur

7 Anhang