קורס SLAM ניווט מוידאו 67604

תרגיל 3

דור מסיקה, ת.ז 318391877
רון קוברובסקי, ת.ז 322875907

3. נבחר 4 key points שהותאמו בכל ארבע התמונות. נפעיל כעת את אלגוריתם ה-PnP על ענן הנקודות (אותו קיבלנו מהטריאנגולציה על pair0) והפיקסלים התואמים בתמונה left1, על מנת לחשב את המטריצה האקסטרינזית [R|t] של left1, עם R מטריצת סיבוב של 3 × 3 ו- t וקטור הזזה של 3 × 1.

תאר כיצד להגדיר מ-[R|t] טרנספורמציה T שמעבירה מהקואורדינטות של left0 לקואורדינטות של left1.

כדי להגדיר טרנספורמציה T שמעבירה מקואורדינטות של left0 לקואורדינטות של left1, נשתמש במטריצת האקסטרינזית [R|t] של left1 שהשגנו באמצעות אלגוריתם ה-PnP. אנחנו יודעים שהמטריצה האקטרינזית של המצלמה left0 מוגדרת על ידי $R = I, t = 0$

לכן, בהינתן נקודה s בתמונה left0 המיוצגת בקואורדינטות הומוגניות, הטרנספורמציה אשר תעביר אותה לקואורדינטות של תמונה left1 תהיה T=[R,t] המטריצה האקסטרינזית של left1, כלומר $Rs + t$ תחזיר את הנקודה s בקואורדינטות של התמונה left1.

- עבור שלוש מצלמות A, B, C: אם למצלמה A יש מטריצה אקסטרינזית $[I|0]$, אזי הטרנספורמציה $T_{A\to B(x)} = R_1x + t_1$ מעבירה מקואורדינטות של A לקואורדינטות של המצלמה B, והטרנספורמציה $T_{B\to C(x)} = R_2x + t_2$ מעבירה מקואורדינטות של B לקואורדינטות של המצלמה C.

נגדיר טרנספורמציה מפורשת $T_{A\to C}$ ואת המטריצה האקסטרינזית של C באמצעות R_1, R_2, t_1, t_2.

כדי לבטא את הטרנספורמציה ממצלמה A למצלמה C, נוכל לחבר את שתי הטרנספורמציות $T_{A\to B(x)}$ ו- $T_{B\to C(x)}$, כך שנקבל בסך הכל כי

$$T_{A\to C(x)} = T_{B\to C(T_{A\to B(x)})} = R_2(R_1x + t_1) + t_2 = R_2R_1x + R_2t_1 + t_2$$

לכן, הטרנספורמציה המפורשת ממצלמה A למצלמה C נתונה על ידי מטריצת הסיבוב R_1R_2, ועל ידי וקטור ההזזה ממצלמה A למצלמה C שמתקבל לפי $R_2t_1 + t_2$.

כעת, נוכל לכתוב את המטריצה האסטרינזית של C על ידי $[R_1R_2|R_2t_1 + t_2]$ אשר מייצגת את הטרנספורמציה ממערכת הקואורדינטות העולמית למערכת הקואורדינטות של המצלמה C.

עבור מצלמה עם מטריצה אקסטרינזית $[R|t]$, מהו מיקום המצלמה במערכת הקואורדינטות הגלובלת?

עבור מטריצה אקסטרינזית [R|t], מיקום המצלמה במערכת הקואורדינטות הגלובלית יהיה t.
נשים לב שעבור נקודה $k = (x, y, z)^T$, מתקיים כי

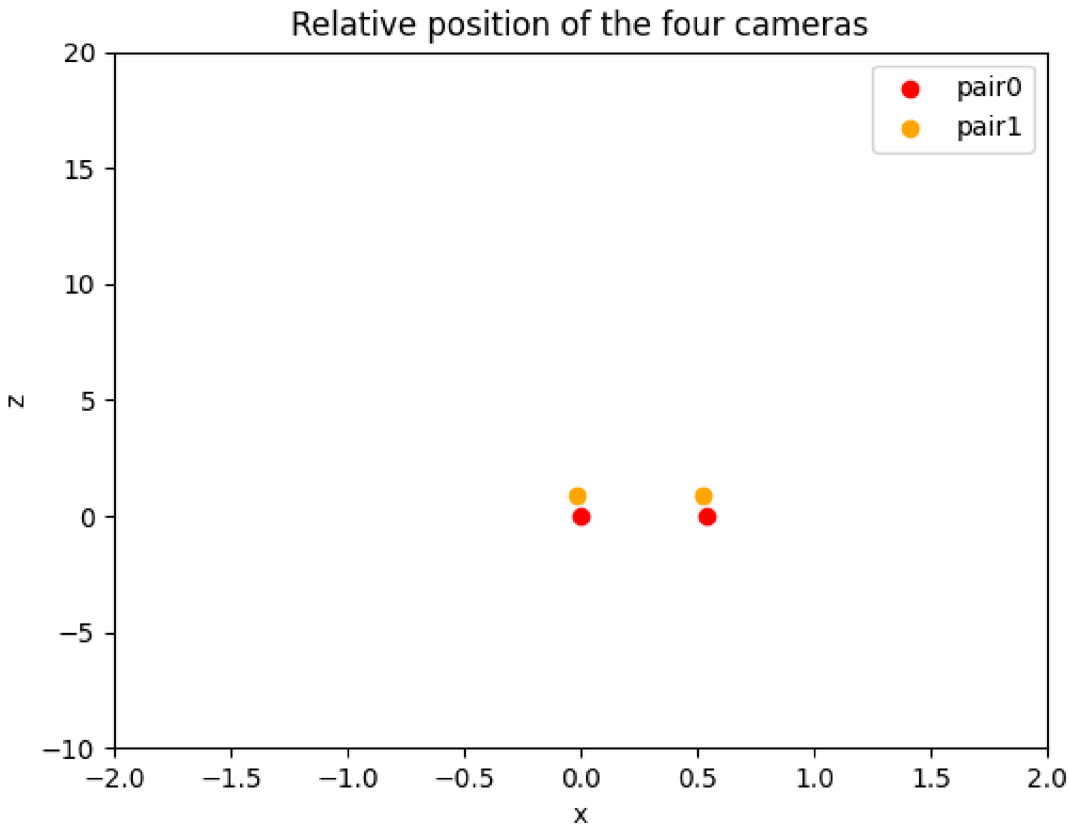
$$[R|t](x, y, z, 1)^T = \begin{matrix} R[0] * k + t[0] \\ R[1] * k + t[1] \\ R[2] * k + t[2] \end{matrix}$$

עבור (*) המציינת מכפלה פנימית. לכן, מכיוון שמיקום המצלמה במערכת הקואורדינטות שלה הוא בראשית הצירים, כלומר במיקום (0,0,0,1) במערכת הקואורדינטות ההומוגנית, נקבל באופן זה כי

$$[R|t](0,0,0,1)^T = t$$

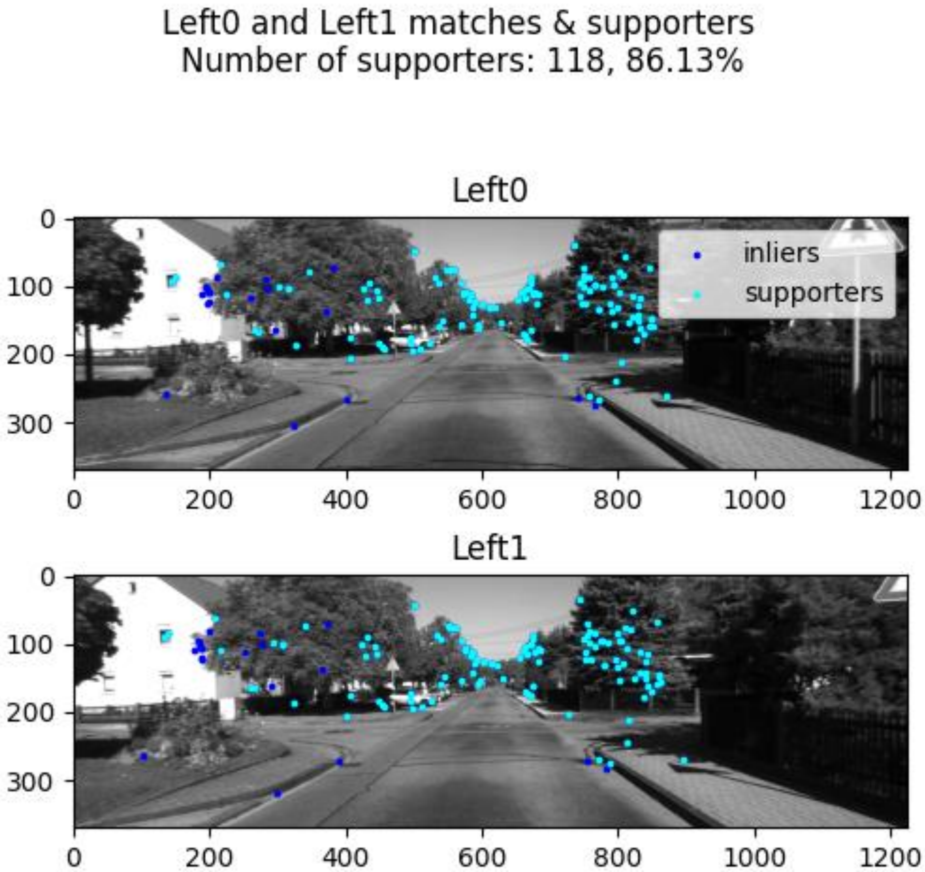
כאשר t זהו וקטור במימד 1x3, ולכן באופן זה נקבל את מיקום המצלמה במערכת הקואורדינטות הגלובלית.

נציג את המיקום היחסי של ארבעת המצלמות (השמאלית והימנית של שני זוגות התמונות הראשונות).

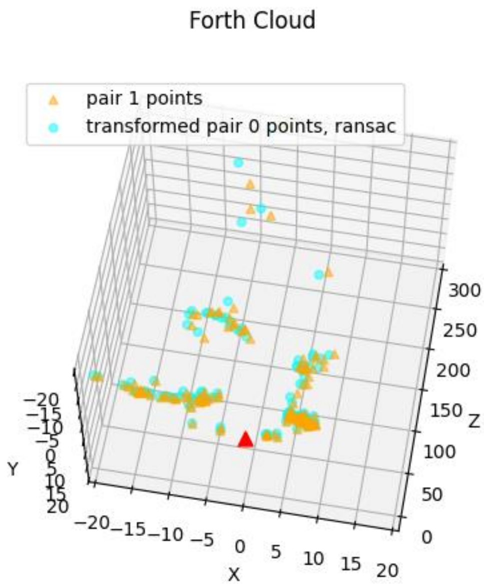


4. לכל נקודה תלת-ממדית x שהותאמה ל-left1, יש לנו ארבעה מיקומי פיקסלים משויכים (בתמונות המצלמות left1, right1, left1, right0). אם אלה נכונים וגם הטרנספורמציה T שחישבנו נכונה, אנחנו יכולים לצפות שההטלה של x תיפול קרוב למיקומי הפיקסלים האלה בכל ארבע התמונות.

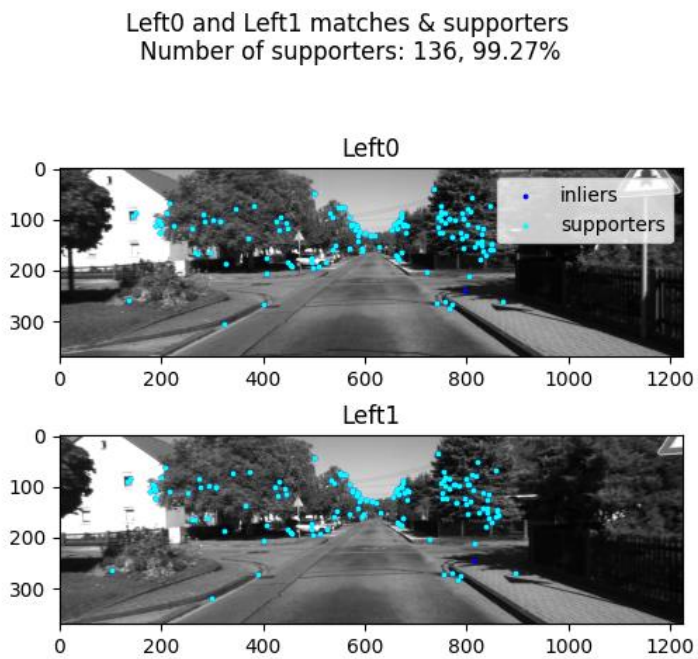
נגדיר נקודה x שמוטלת קרוב למיקומי הפיקסלים התואמים בכל ארבע התמונות בתור "תומך" (supporter) בטרנספורמציה T. נשתמש בערך בסף למרחק של 2 פיקסלים כדי לזהות את התומכים, ונציג על גבי התמונות left0, left1 את ההתאמות שהתקבלו, יחד עם התומכים בצבע שונה.



5. לאחר שחישבנו את הטרנספורמציה T בין left0 ו-left1 בעזרת RANSAC, נציג את שני ענני הנקודות בצבעים שונים:



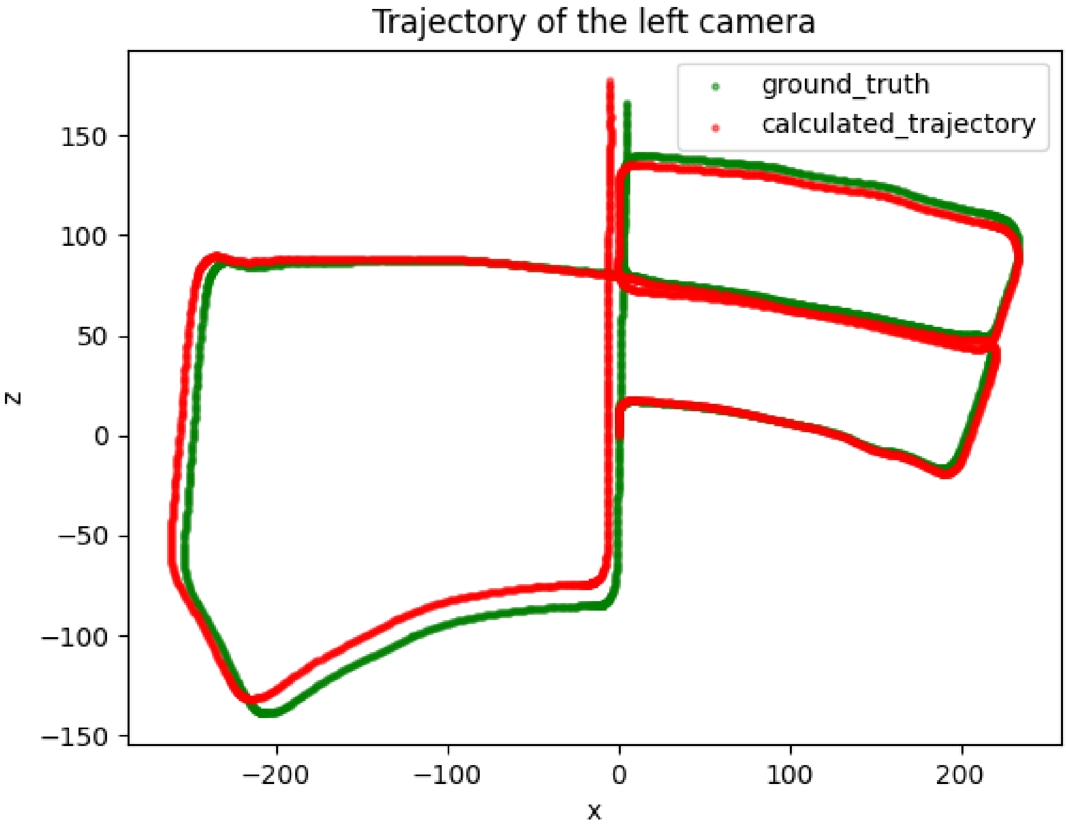
כעת, נציג על התמונות left0 ו-left1 את ה-inliers וה-outliers בצבעים שונים:



6. לאחר שחישבנו את כלל השלבים על כל זוג תמונות עוקבות בסרט, נקבל את המסלול כתוצאה:

א. זמן החישוב הכולל – 25:30 דקות על מכונה וירטואלית עם 4GB RAM וCPU.

ב. ציור המסלול (באדום) מול המסלול שחושב מתוך נתוני האמת.



7. יהי $x\sim N(\mu_x,\Sigma_x)$ ו-$y = Ax + b$ עבור מטריצה לא סינגולרית A.

א) נוכיח שהתוחלת והשונות של y הן $\mu_y = A\mu_x + b$ ו-$\Sigma_y = A\Sigma_x A^T$.

ראשית, עבור התוחלת של y, נשתמש בלינאריות התוחלת ונקבל כי

$$E[y] = E[Ax + b] = AE[x] + b = A\mu_x + b$$

שכן נתון כי $E[x] = \mu_x$. כעת, נחשב את השונות של y ונקבל מהגדרת השונות כי

$$Cov(y) = E\left[\left(y-\mu_y\right)\left(y-\mu_y\right)^T\right] = E[(Ax + b - A\mu_x - b)(Ax + b - A\mu_x - b)^T]$$

נפשט את הביטוי ונקבל

$$Cov(y) = E[(Ax - A\mu_x)(Ax - A\mu_x)^T]$$

כעת, מכיוון ש-x מתפלג נורמלית עם תוחלת μ_x ועם תוחלת Σ_x, נוכל לרשום את x מהצורה $x = \mu_x + z$ עבור $z\sim N(0,\Sigma_x)$. נשתמש בכך, ונוכל לכתוב כי

$$Ax = A(\mu_x + z) = A\mu_x + Az$$

נציב ביטוי זה בביטוי עבור השונות של y שהצגנו קודם, ונקבל בסך הכל כי

$$Cov(y) = E[(Az)(Az)^T] = AE[zz^T]A^T = A\Sigma_x A$$

כפי שרצינו להוכיח.

ב) נוכיח ש-y מתפלג נורמלי - $y\sim N(\mu_y,\Sigma_y)$.

נשתמש בנוסחאת הטרנספורמציה עבור וקטור רנדומלי, שאומרת שעבור $x\sim f_x(x)$ ו-$y = g(x)$ נקבל כי $f_y(y) = f_x\left(g^{-1}(y)\right)|J_{g^{-1}}|$, עבור $|J_{g^{-1}}|$ הדטרמיננטה של היעקוביאן של g^{-1}. כעת, עבור $x\sim N(\mu_x,\Sigma_x)$, מתקיים כי

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\Sigma_x|}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left|\left|x-\mu_x\right|\right|_{\Sigma_x}^2\right)$$

ובנוסף נתון כי $y = g(x) = Ax + b$. נרצה להראות כי $f_y(y)$ מתפלג נורמלי.

יהי $y = g(x) = Ax + b$, אזי מתקיים כי $x = \frac{y-b}{A} = A^{-1}(y-b)$, ובנוסף היעקוביאן של g^{-1} הוא $J = A^{-1}$. לכן, נוכל להשתמש בנוסחה הנ"ל למציאת ה-pdf של y, ונקבל כי

$$f_y(y) = f_x\left(A^{-1}(y-b)\right) * |A^{-1}|$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\Sigma_x|}}\right) exp\left(-\frac{1}{2}(A^{-1}(y\ -\ b)\right.$$
$$\left. -\ \mu x)\Sigma_x^{-1}(A^{-1}(y-\ b)-\ \mu x)^T\right)|A^{-1}|$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\Sigma_x\ ||A|}}\right) exp\left(-\frac{1}{2}(y-\ A\mu_x\ -\ b)^T(A\Sigma_x A^T)^{-1}(y\ -\ A\mu_x\right.$$
$$\left. -\ b)\right)$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|A\Sigma_x A^T|}}\right)|A| exp\left(-\frac{1}{2}(y-\ A\mu_x\ -\ b)^T(A\Sigma_x A^T)^{-1}(y\ -\ A\mu_x\right.$$
$$\left. -\ b)\right)$$

כאשר השתמשנו בכך ש-$\frac{1}{|A|} = |A^{-1}|$. נשים לב כי נוכל לזהות את הביטוי האחרון כ-pdf של multivariate normal distribution עם תוחלת $\mu_Z = A\mu x + b$ ומטריצת שונות משותפת $\Sigma_z = A\Sigma_x A^T$, כלומר

$$f_y(y) = \left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\Sigma_y|}}\right) exp\left(-\frac{1}{2}\left(y\ -\ \mu_y\right)\Sigma_z^{-1}\left(y\ -\ \mu_y\right)^T\right)$$

ואכן קיבלנו בסך הכל כי $y = Ax + b$ מתפלג נורמלית עם תוחלת $\mu_y = A\mu_x + b$ ומטריצת שונות $\Sigma_y = A\Sigma_x A^T$, כפי שרצינו להוכיח.