

# Algebra I

Stand vom 5. November 2014

Dozent: Prof. Dr. Christopher Voll  
voll@math.uni-bielefeld.de

Autor: Jonas Betzendahl  
jbetzend@techfak.uni-bielefeld.de

## Inhaltsverzeichnis

<b>-1 Organisatorisches etc.</b>	<b>2</b>
<b>0 Algebra - die Kunst, Gleichungen zu lösen (Einführung)</b>	<b>2</b>
<b>1 Fundamente der Gruppentheorie</b>	<b>3</b>
1.1 Monoide & Gruppen . . . . .	3
1.2 Untergruppen und Homomorphismen . . . . .	4
1.3 Nebenklassen . . . . .	6
1.4 Normalteiler & Isomorphiesätze . . . . .	7
1.5 Erzeugungssysteme & zyklische Gruppen . . . . .	9
<b>2 Fundamente der Ringtheorie</b>	<b>10</b>
2.1 Ideale, Homomorphismen, Faktorringer . . . . .	11
<b>3 Übungsaufgaben</b>	<b>15</b>
3.1 13/10/2014 . . . . .	15
3.2 15/10/2014 . . . . .	15

## -1 Organisatorisches etc.

Dozent ist Prof. Dr. Christopher Voll

voll@math.uni-bielefeld.de

Büro: UHG V5-238, Sprechstunde noch im Flux

Vorlesungen finden an Montagen von 08.30 Uhr bis 10.00 Uhr und Mittwochs von 14.15 Uhr bis 15.45 Uhr statt.

Es wird darauf hingewiesen, dass die Übungen bei Dr. Doang in Englisch abgehalten werden.

Voraussetzung für die Zulassung zur Prüfung sind das Erreichen von mindestens 50 % der Punkte und mindestens zwei Mal eine aktive Teilnahme an den Übungen (Vorrechnen) abgeleistet zu haben.

**Bücher:** Einführung in die Algebra (F. Lorenz, Spektrum)  
Algebra 1 (S. Bosch, Springer)  
Algebra (S. Lang, Springer)  
Algebra (Hungerford)  
Algebra (v.d. Waerden) (Ein Klassiker)  
Algebra (E. Artin)

Übungszettel gibt es immer am Mittwoch der Woche  $n$ , bearbeiten werden müssen diese bis Mittwoch der Woche  $n+1$  (Abgabe vor der Vorlesung im Postfach des Tutors), besprochen werden sie in der Woche  $n+2$  in den Tutorien.

## 0 Algebra - die Kunst, Gleichungen zu lösen (Einführung)

Lineare Algebra:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1$$

...

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n$$

Alle Fragen können in Form  $a_{ij}, b_i \in \mathcal{K}$  beantwortet werden.

Verallgemeinerung:  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$  (polynom. Gleichung von Grad  $n$  ( $a_n \neq 0$ )).

„Struktur“ der Lösungen solcher Gleichungen treibt Menschen seit Jahrtausenden um.

Spezialfall: Quadratische Gleichungen

$$x^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

durch Wurzeln lösbar. Kubische Gleichungen:

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Leftrightarrow \dots$$

ebenfalls durch Wurzeln lösbar. Im 16. Jahrhundert wurde bekannt, dass auch quartische Gleichungen ( $n = 4$ ) durch Wurzelausdrücke lösbar sind.

Was nicht ins Weltbild des 16. Jahrhundert passte: Im 19. Jahrhundert zeigte Abel: Nicht jede quintische Gleichung ( $n = 5$ ) kann durch Wurzelausdrücke gelöst werden.

Galois: Lösungen von Polynomen sind nicht einfach Mengen ohne Struktur sondern Mengen *mit* Struktur ( $\rightarrow$  Gruppentheorie). Auflösbarkeit von  $f = 0$  durch Wurzel  $\Rightarrow$  Galois-Gruppe( $f$ ) auflösbar.

Ziel der Vorlesung: Einführung in die Sprache der modernen Algebra, sowohl durch Anerkennen der Theorie als auch durch das Praktizieren.

# 1 Fundamente der Gruppentheorie

## 1.1 Monoide & Gruppen

**Definition 1** Ein Monoid ist eine Menge  $M$  zusammen mit einer Verknüpfung  $\cdot : M \times M \rightarrow M$ , die die Eigenschaften erfüllt:

- (ASS)  $\forall a, b, c \in M : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  (Assoziativität)
- (NEU)  $\exists e = e_M \in M \forall a \in M, e \cdot a = a = a \cdot e$  (Existenz eines neutralen Elementes)

**Bemerkung:** Die Notation ist oft einfach nur „ $ab$ “ statt „ $a \cdot b$ “, oft auch bei mehreren Monoiden gleichzeitig. Ausgelassen wird immer die passende Verknüpfung. Es wird auch die Schreibweise  $\prod_{i=1}^n a_i$  für den Ausdruck  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ ,  $a_i \in M$  verwendet. Weiterhin gelten per Konvention:  $\prod_{i=1}^n a_i = e$  für  $n \leq 0$  und  $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m\text{-mal, } m \in \mathbb{N}}$ .

**Behauptung:**  $e \in M$  ist eindeutig (siehe unten).

Sei  $a \in M$ . Wir nennen  $b \in M$  *invers zu  $a$*  falls  $a \cdot b = b \cdot a = e$  gilt. Falls (!) solch ein  $b$  existiert, ist es eindeutig (siehe unten). In diesem Fall ist die Notation oft  $a^{-1}$  für  $b$ :  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ .

**Definition 2** Eine Gruppe ist ein Monoid  $(G, \cdot)$  mit der folgenden Eigenschaft:

$$(INV) \forall a \in G \exists a^{-1} \in G \text{ sodass } a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e \text{ (Existenz eines inversen Elements)}$$

$G$  heißt kommutativ oder synonym dazu abelsch falls folgende Eigenschaft gilt:

$$(KOM) \forall a, b \in G : a \cdot b = b \cdot a \text{ (Kommutativität)}$$

Vektorräume zum Beispiel sind abelsche Gruppen, die interessante Struktur ist hier aber nicht die abelsche Eigenschaft sondern die Multiplikation mit Skalaren, die sich gut mit der Gruppenstruktur verträgt.

Die *Ordnung* einer Gruppe ist  $(G, \cdot)$  ist die Kardinalität  $|G|$  von  $G$ .

Konvention: „Gruppe  $G$ “, falls  $\cdot$  klar ist. Ist  $G$  abelsch, so schreibt man oft  $+$  für  $\cdot$  (die Monoidverknüpfung) und man redet von „additiver Schreibweise“ im Gegensatz zu „multiplikativer Schreibweise“. Bei additiver Schreibweise schreibt man oft  $0$  für  $e$ , bzw. bei multiplikativer Schreibweise  $1$ .

### Beispiele 1.3:

1.  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{Q}, +)$ ,  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{C}, +)$  sind abelsche Gruppen. Ebenso  $(\mathcal{K}, +)$  wenn  $(\mathcal{K}, +, \cdot)$  ein Körper ist.
2.  $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ,  $\mathbb{R}^*$ ,  $\mathbb{C}^*$ ,  $\mathcal{K}^* = \mathcal{K} \setminus \{0\}$ , mit  $1 = e$  als Einselement, sind abelsche Gruppen
3.  $GL_n(R) = \{x \in Mat_n(R) | \det(x) \neq 0\}$  mit  $R$  beliebiger Körper, invertierbare Matrizen über  $R$ ,  $SL_n(R) = \{x \in GL_n(R) | \det x = 1 \in R\}$ , ( $1_n =$  Einheitsmatrix) sind Gruppen bezüglich der Matrixmultiplikation, mit Einselement jeweils  $1_n$ , allerdings für  $n > 1$  nicht abelsch.
4.  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0$ ,  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ . Sowohl  $(\mathbb{N}_0, +)$  als auch  $(\mathbb{N}, \cdot)$  sind Monoide aber keine Gruppen ( $2x = 1$  unlösbar).
5.  $Mat_n(R)$  ( $R$  Körper) ist ein Monoid ( $\cdot =$  Multiplikation,  $e = 1_n$ ).
6.  $A \in Mat_n(\mathbb{Z})$ ,  $L_A = \{x \in \mathbb{N}_0^n | xA = 0\}$  ist ein Monoid mit Nullvektor als Einselement.  
Notation:  $R$  Ring, dann  $R^n = \{(r_1, \dots, r_n) | r_i \in R\}$  ( $n$ -Tupel).
7. Symmetrische Gruppen: Sei  $X$  beliebige Menge.  $Sym(X) := \{f : X \rightarrow X | f \text{ Bijektion}\}$  ist eine Gruppe mit Verknüpfung von Abbildungen als „Multiplikation“. ( $f, g \in Sym(X) : f \circ g : X \rightarrow X$  Bijektion!), mit  $id : X \rightarrow X$  als Einselement.

Rekapitulation der Leibnitz-Formel:  $K$ -Körper:  $a_{ij} = A \in Mat_n(K)$ .

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}.$$

Wichtiger Spezialfall:  $X = \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}$ . Setze  $S_n = \text{Sym}(X)$ , symmetrische Gruppe vom Grad  $n$ . (Dies erlaubt es, dass jede endliche Gruppe als Unterobjekt verstanden werden kann) Ordnung  $|S_n| = n!$ . Nicht abelsch falls  $n > 2$ .

$f \in S_n$  :

Matrixschreibweise  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$

oder Zykelschreibweise:  $(1, f(1), f(f(1)) \dots), (a, f(a), f^2(a) \dots), \underbrace{(b, f(b), f^2(b) \dots)}_{\text{„Zykel“}}$  für  $a \notin \{f^n(1) \mid n = \{1, 2, 3, \dots\}\}$

$\subseteq \{1, \dots, n\}$  und  $b \notin \{f^n(1) \mid \text{dots}\} \cup \{f^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$

Konvention: Zykel der Länge 1 weg.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (1)(2)(3) \text{ (A)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (12)(3) \text{ (B)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (123) \text{ (C)}$$

...

8. Sei  $X$  eine beliebige Menge und  $G$  eine Gruppe. Dann ist  $G^X := \text{Abb}(X, G) = \{q : X \rightarrow G\}$  mit der folgenden Verknüpfung eine Gruppe:

Gegeben  $\varphi, \psi \in G^X$ , definiere für  $x \in X$   $\phi \circ \psi := \phi(x) \cdot \psi(x) \in G$  Dies nennt sich „komponentenweise Multiplikation“.

9. Sei  $X$  eine beliebige Menge,  $\{G_x\}_{x \in X}$ , Familie von Gruppen. Dann ist  $\prod_{x \in X} G_x = \{(g_x)_{x \in X} \mid \forall x : g_x \in G_x\}$  mit der Verknüpfung  $(g_x)_{x \in X} \cdot (h_x)_{x \in X} := (g_x \cdot h_x)_{x \in X}$  – Produkt der Gruppen  $G_x, x \in X$ .

## 1.2 Untergruppen und Homomorphismen

**Definition 3** Sei  $G$  ein Monoid,  $H \subseteq G$  Teilmenge.  $H$  heißt Untermonoid von  $G$ , falls

- $e \in H$
- $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$

Ist  $G$  eine Gruppe, so heißt  $H$  Untergruppe, falls zusätzlich

- $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$

Schreibe gegebenenfalls „ $H \leq G$ “ oder „ $H < G$ “. Schreibe „ $H \leqslant G$ “ für Untergruppen  $H \neq G$ .

**Beispiel (1.5):**

1.  $G$  Gruppe  $\Rightarrow H = G \leq G$ ,  $\{e\} = G$  heißen *triviale Untergruppen*.
2.  $G = (\mathbb{Z}, +), m \in \mathbb{Z}$ .  $H = m\mathbb{Z} = \{mx \mid x \in \mathbb{Z}\} \leq \mathbb{Z}$ .

(a) @1:  $0 = m0 \in H$

(b) @2:  $mx(\in H) + my(\in H) = m(x + y) \in H, x, y \in \mathbb{Z}$

(c) @3: Inverses von  $mx$  ist  $-mx(mx + (-mx) = 0 = e_{\mathbb{Z}})$ .

Tatsache (Beweis später): Jede Untergruppe von  $\mathbb{Z}$  ist von der Form  $m\mathbb{Z}$ .  $\mathbb{Z} = (-1)\mathbb{Z} = 1\mathbb{Z}, 0\mathbb{Z} = e_{\mathbb{Z}}$ .  
Schreibe  $(m) = m\mathbb{Z}$ .

Echte Untergruppen:  $\{A, B\}, \{A, D, E\}, \{A, C\}, \{A, F\}$ .

3.  $G$  Gruppe,  $g \in G$ ,  $H := \langle g \rangle := \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \leq G$  (!!).

- (a)
- (b)  $g^n \cdot g^m = g^{n+m}$
- (c)  $(g^n)^{-1} = g^{-n}$

„Die von  $g$  erzeugte (zyklische) Untergruppe“ = die kleinste Untergruppe von  $G$ , die  $g$  enthält (braucht  $g, g^2, g^3, \dots, g^{-1}, \dots$ ).

4.  $SL_n(K) \leq GL_n(K)$ ,  $K$  Körper

$$\text{LHS} = \{x \in Mat_n(K) \mid \det(x) = 1\} \quad \text{RHS} = \{x \in Mat_n(K) \mid \det(x) \neq 0\}$$

Für alle „vernünftigen“ Körper und alle  $n > 1$  ist das eine nicht-triviale Teilmenge.

**Definition 4** (1.6) Seien  $G, G'$  Monoide, mit Einselementen  $e \in G$  und  $e' \in G'$ . Ein Monoidhomomorphismus ist eine Abbildung  $\varphi : G \rightarrow G'$ , derart, dass

- $\varphi(e) = e'$
- $\forall a, b \in G : \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ .

Sind  $G, G'$  Gruppen, spricht man von einem Gruppenhomomorphismus (oder oft einfach nur Homomorphismus).

**Bemerkung:** Sei  $\varphi : G \rightarrow G'$  ein Gruppenhomomorphismus, dann gilt (Übungsaufgaben:)

1.  $\forall a \in G : (\varphi(a))^{-1} = \varphi(a^{-1})$ . Nach der zweiten Eigenschaft von oben gilt  $\varphi(a^{-1}) \cdot \varphi(a) = \varphi(a^{-1} \cdot a) = \varphi(e) = e$
2.  $\ker(\varphi) := \{g \in G \mid \varphi(g) = e'\} \leq G$ .
3.  $\text{img}(\varphi) = \{\varphi(g) \mid g \in G\} \leq G'$

**Definition 5** (1.7) Ein Gruppenhomomorphismus  $\varphi : G \rightarrow G'$  heißt

- Monomorphismus, falls er injektiv ist. ( $\Leftrightarrow \ker(\varphi) = \{e\}$ ),
- Epimorphismus, falls er surjektiv ist. ( $\Leftrightarrow \text{img}(\varphi) = G'$ ),
- Isomorphismus, falls er sowohl ein Epimorphismus als auch ein Monomorphismus ist,
- Endomorphismus von  $G$ , falls  $G' = G$ ,
- Automorphismus von  $G$ , falls  $G' = G$  und  $\varphi$  ein Isomorphismus ist.

Sprechweise: Gegeben ein Isomorphismus heißen  $G$  und  $G'$  isomorph zu einander. Man schreibt  $G \cong G'$ . Beispiel:  $G = \mathbb{Z}, H = 2\mathbb{Z} \leq G$ .

Behauptung:  $G \rightarrow G, g \mapsto 2g (= g + g)$  ist Isomorphismus. Also schreibt man  $\mathbb{Z} \cong 2\mathbb{Z}$ . Isomorphie ist transitiv ( $G \cong G', (G' \cong G'') \Rightarrow G \cong G''$ ).

**Beispiele (1.8):**

1. Sei  $G$  ein Monoid,  $g \in G$ , dann ist  $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow G, n \mapsto g^n$  ein Monoidhomomorphismus. (Übungsaufgabe!)  $\varphi$  ist sozusagen bestimmt durch  $\varphi(1)$ .
2. Ist  $G$  sogar eine Gruppe, dann bestimmt  $n \mapsto g^n$  einen Gruppenhomomorphismus:  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G, \text{img}(\varphi) = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \langle g \rangle$ .  
Übungsaufgabe: Wenn  $|\langle g \rangle| = \infty$ , dann ist  $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \text{img}(\varphi)$  ein Isomorphismus.
3. Sei  $G$  eine Gruppe,  $g \in G$ . Dann ist  $\psi_g : G \rightarrow G, h \mapsto ghg^{-1}$  ein Gruppenautomorphismus (Übungsaufgabe: Checken und was ist das Inverse zu  $\psi_g$ ?).  
 $\psi_g(h \cdot h') = gh'h'g^{-1} = gheh'g^{-1} = (ghg^{-1})(gh'g^{-1}) = \psi_g(h)\psi_g(h')$ . Dies nennt sich „Konjugation mit  $g$ “.  
Prüfen:  $\text{Aut}(G) = \{\psi : G \rightarrow G \mid \psi \text{ Automorphismus}\}$  bildet Gruppe unter Verknüpfung.  
 $\{\phi_g \mid g \in G\} < \text{Aut}(G) = \text{Ännere Automorphismen von } G$ .

### 1.3 Nebenklassen

**Definition 6** Sei  $G$  eine Gruppe,  $H \leq G$ . Eine Menge der folgenden Form:  $gH = \{g \cdot h \mid h \in H\} \subseteq G, g \in G$  heißt Linksnebenklasse (LNK) (left coset) von  $H$  in  $G$ .

Dementsprechend:  $Hg = \{h \cdot g \mid h \in H\}$  heißt Rechtsnebenklasse (RNK) von  $H$  in  $G$ .

Nebenklassen „pflastern“ die Gruppe.

**Lemma (1.10):** Seien  $gH$  und  $g'H$ , mit  $g, g' \in H$  Linksnebenklassen von  $H \leq G$ . Dann sind Äquivalent:

1.  $gH = g'H$
2.  $gH \cap g'H \neq \emptyset$
3.  $g \in g'H$
4.  $g'^{-1}g \in H$

**Beweis:**

1. klar:  $gH \ni ge = g \Rightarrow gH \neq \emptyset$
2.  $gh \in g'H$  für ein  $h \in H$ .  $\Rightarrow \exists h' \in H : gh = g'h' \Leftrightarrow g \underbrace{hh^{-1}}_e = g' \underbrace{h'h^{-1}}_{\in H} \Leftrightarrow g \in g'H$ .
3.  $g \in g'H \Leftrightarrow \exists h \in H : g = g'h \Rightarrow (g')^{-1} \cdot g = h \in H$ .
4.  $(g')^{-1}g \in H$ , etwa  $(g')^{-1}g = h \in H \Rightarrow g = g' \cdot h$ .  $gH = \{g\tilde{h} \mid \tilde{h} \in H\} = \{g' \cdot (h\tilde{h}) \mid \tilde{h} \in H\} = g'H$   $\square$

**Satz (1.11):** Je zwei Linksnebenklassen von  $H$  in  $G$  sind in Bijektion zueinander. Verschiedene LNK sind disjunkt. Insbesondere ist  $G$  disjunkte Vereinigung der Linksnebenklassen von  $H$  in  $G$ . **Beweis:** @Bijektion: Gegeben  $gH, g'H, g, g' \in G$ .

$$gH \xrightarrow[\text{(bijektiv)}]{\cong} H. (gH \cong eH = H \cong g'H)$$

Es reicht zu zeigen:  $H \rightarrow gH, h \mapsto gh$  ist Bijektiv.  $gh = gh' \Leftrightarrow g^{-1}gh = g^{-1}gh' \Leftrightarrow h = h'$ .  $\square$

**Definition 7** (1.12) Sei  $G$  eine Gruppe,  $H \leq G$ . Schreibe  $G/H = \{gH \mid g \in G\}$  für die Menge der Linksnebenklassen von  $H$  in  $G$  und  $H \backslash G = \{Hg \mid g \in H\}$  für die Menge der Rechtsnebenklassen von  $H$  in  $G$ .

**Bemerkung:**  $G/H \rightarrow H \backslash G, gH \mapsto Hg$  ist Bijektion.

ÜA:  $(gH = g'H \Leftrightarrow g \cdot (g')^{-1} \in H \Leftrightarrow Hg = Hg')$

**Definition 8** (1.13) Setze  $|G : H| (= [G : H] = (G : H)) = |G/A| = |H \backslash G|$  genannt der Index von  $H$  in  $G$ .

**Informell:**  $|G : H|$  „inverse Dichte“ von  $H$  in  $G$ .  $\frac{1}{|G:H|} = „P(g \in H)“$ .

z.B.:  $G = \mathbb{Z}, H = m\mathbb{Z} \rightarrow |G : H| = m$ .

**Beispiel (1.14) :**

1.  $H = \{e\} : G/H \cong H \backslash G \cong G \Rightarrow |G : H| = |G|$ .
2.  $H = G : G/G = G$   
 $G = \{\cdot\} \Rightarrow |G : G| = 1$ .
3. Drittes Beispiel siehe oben.

**Korollar (1.5) (Satz von Lagrange):** Sei  $G$  eine endliche Gruppe,  $H \leq$ . Dann gilt  $|G| = |H| \cdot |G : H|$ .  
 $(\frac{|G|}{|H|} = |G : H|)$ .

(1.16) Insbesondere teilt  $|H|$  stets  $|G|$ !

**Achtung:**  $\exists$  endliche Gruppen  $G$  mit der Eigenschaft, dass einige Teiler ihrer Ordnung von von Untergruppen  $H$  realisiert werden. (ÜA: Eleganter formulieren.)

z.B: Ist  $p$  eine Primzahl,  $|G| = p^e, e \in \mathbb{N}_0$ , so heißt  $G$   $p$ -Gruppe. Aus Lagrange folgt:  $\forall H \leq G, H$  ist  $p$ -Gruppe.

## 1.4 Normalteiler & Isomorphiesätze

**Definition 9** (1.17) Sei  $G$  eine Gruppe,  $H \leq G$  heißt Normalteiler (oder synonym dazu: normale Untergruppe), wenn  $\forall g \in G \ gH = Hg$ . Gegebenenfalls heißt  $gH$  die von  $g$  bestimmte Nebenklasse von  $H$  in  $G$ . Gegebenenfalls schreibe  $(H \trianglelefteq G) \Leftrightarrow H \triangleleft G$ .

**Bemerkung:**  $g, H, G$  wie in (1.17):  $gH = Hg \Leftrightarrow gHg^{-1} = H$ .

Um zu verifizieren, ob  $H \leq G$  ein Normalteiler ist, reicht es zu testen, ob  $\forall g \in G \ gHg^{-1} \subseteq H$  (\*).

In der Tat. Angenommen (\*) gilt, so gilt auch  $\forall g \in G \ gH \subseteq Hg$ . Aber es gilt  $g^{-1}Hg^{-1} = g^{-1}Hg \subseteq H$ , d.h.  $Hg \subseteq gH$

$\Rightarrow gH = Hg$

**Beispiel (1.18):**

1.  $\{e\} \triangleleft G$ . ( $\forall g : g\{e\} = \{e\}g = \{g \cdot e\} = \{g\}$ ). Ebenso:  $G \triangleleft G : gG = G = Gg$ .
2. Ist  $G$  abelsch, ist jede Untergruppe Normalteiler.
3.  $G = S_3$ . Die Untergruppen  $H$  von  $S_3$  die von  $\{e\}$  und  $S_3$  selbst verschieden sind, sind  $\{<(12)>, <(13)>, <(23)>, <(123)>\}$  (Untergruppen der Ordnung 2, 2, 2 und 3. Lagrange sagt dass es keine anderen geben kann.) Übungsaufgabe: Von diesen 4 Untergruppen ist nur  $<(123)>$  normal.
4. Ist  $\varphi : G \rightarrow G'$  Gruppenhomomorphismus, dann ist  $\ker(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_{G'}\} \triangleleft G$ .  
Z.z.  $\forall g \in G \ g(\ker \varphi)g^{-1} \subseteq \ker \varphi$ . Sei  $gkg^{-1}$  mit  $k \in \ker \varphi$ . Reicht zu zeigen:  $\varphi(gkg^{-1}) = e_{G'}$ . Aber

$$\begin{aligned} \varphi(gkg^{-1}) &= \varphi(g)\varphi(k)\underbrace{\varphi(g^{-1})}_{=\varphi(g)^{-1}} \\ &= \varphi(g)e_{G'}\varphi(g)^{-1} \\ &= \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = e_{G'} \end{aligned}$$

Sei  $N \triangleleft G$ . Wollen Gruppenstruktur auf  $G/N = \{gN \mid g \in G\}$ .

Allgemein  $X, Y \subseteq G : XY := \{xy \mid x \in X, y \in Y\} \subseteq G$

Definiere  $\cdot : G/N \times G/N \rightarrow G/N, (gN, kN) \mapsto ghN$

$gN = g'N \Leftrightarrow g(g')^{-1} \in N$

Seien also  $g' \in G, k' \in G$  mit  $gN = g'N, kN = k'N$ . Wir wissen,  $g(g')^{-1} =: n_1 \in N, k(k')^{-1} =: n_2 \in N$ .

Zu zeigen:  $gkN = g'k'N$ , d.h.  $gh(g'h')^{-1} \in N$ . Nun ist

$$\begin{aligned} gh(g'h')^{-1} &= g\underbrace{h(h')^{-1}}_{n_2}(g')^{-1} \\ &= gn_2(g')^{-1} \\ &= gn_2g^{-1}\underbrace{g(g')^{-1}}_{n_1} \\ &= \underbrace{gn_2g^{-1}}_{\in N, da N \triangleleft G} n_1 \in N \end{aligned}$$

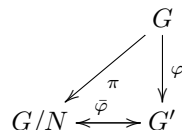
Übungsaufgabe: Verifiziere, dass  $\cdot$  eine Gruppenoperation ist.

**Bemerkung:**  $N \triangleleft G$ . Die Gruppe  $G/N$  („G modulo N“) heißt „Faktorengruppe von G nach N“.

$\pi : G \rightarrow G/N, g \mapsto gN$  heißt die „natürliche Reduktion“, „natürlicher Homomorphismus“, „natürliche Surjektion“, „Reduktion modulo N“.

$\pi$  ist Epimorphismus.  $(g, k \in G : \underbrace{\pi(gh)}_{ghN} = \underbrace{\pi(g)\pi(h)}_{gN \cdot hN})$

**Satz 1 (1.19)** „Homomorphiesatz“ Sei  $\varphi : G \rightarrow G'$  Homomorphismus von Gruppen  $G, G'$  und sei  $N \triangleleft G$  mit  $N \subseteq \ker \varphi$ . Dann existiert genau ein Homomorphismus  $\bar{\varphi} : G/N \rightarrow G'$ , derart, dass  $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$ .



Es gilt:

- $\text{im}(\bar{\varphi}) = \text{im}(\varphi)$
- $\ker(\bar{\varphi}) = \pi(\ker(\varphi)) \triangleleft G/N$
- $\ker(\varphi) = \pi^{-1}(\ker(\bar{\varphi})) \triangleleft G$

**Beweis:** Eindeutigkeit. Angenommen  $\bar{\varphi}$  mit  $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$  existiert  $\forall g \in G. \bar{\varphi}(gN) = \bar{\varphi}(\pi(g)) = \varphi(g) \square$

Existenz: Gegeben  $gN \in G/N$ . Definiere  $\bar{\varphi}(gN) := \varphi(g)$ . Wohldefiniert?

In der Tat, seien  $g, g' \in G : gN = g'N$ , das heißt  $g = g'n \exists n \in N$ . Zu zeigen:  $\varphi(g) = \varphi(g')$ .

$\varphi(g) = \varphi(g'n) = \varphi(g')\varphi(n) = \varphi(g')$ , da  $N \leq \ker \varphi$ .

Homomorphieeigenschaft: Seien  $gN, hN \in G/N$ .

$\bar{\varphi}(gN \cdot hN) = \bar{\varphi}(ghN) = \varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = \bar{\varphi}(gN) \cdot \bar{\varphi}(hN)$

1.  $\ker \varphi = \pi^{-1}(\ker(\bar{\varphi}))$ , da  $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$
2.  $\text{im}(\bar{\varphi}) = \text{im}(\varphi)$ ,  $\ker \bar{\varphi} = \pi(\ker \varphi)$ , da  $\pi$  surjektiv ist.  $\square$

**Beachte:**  $\bar{\varphi}$  Monomorphismus gdw.  $\ker \bar{\varphi} = N$  gdw.  $\ker \varphi = N$

Nenne  $\bar{\varphi}$  den von  $\varphi$  auf  $G/N$  induzierten Homomorphismus.

**Korollar 1 (1.20)** Ist  $\varphi$  ein Epimorphismus, dann gilt  $G/\ker(\varphi) \rightarrow G'$  ist Isomorphismus von Gruppen.

**Satz 2 (1.21)** 1. Isomorphiesatz Sei  $G$  Gruppe,  $H \leq G$ ,  $N \triangleleft G$ .

- $HN \leq G$  ist Untergruppe (nicht nur Teilmenge).  $N \triangleleft HN$
- $H \cap N \triangleleft H$
- $\varphi : H/H \cap N \rightarrow HN/N, h(H \cap N) \mapsto hN$  ist Isomorphismus

**Beweis:**

Übungsaufgabe:  $G$  Gruppe,  $X \subseteq G$ :  $X \leq G$  gdw. 1.  $X \neq \emptyset$ , 2.  $\forall x, y \in X : x(y)^{-1} \in X$

@1:  $HN \ni e \cdot e = e, \Rightarrow HN \neq \emptyset$

$h_1 n_1, h_2 n_2 \in HN, h_i \in H, n_i \in N$

Zu zeigen:  $h_1 n_1 (h_1 n_1)^{-1} \in HN$ . In der Tat  $h_1 n_1 n_2^{-1} h_2^{-1} = \underbrace{h_1 h_2^{-1}}_{\in H} \underbrace{(h_2 n_1 n_2^{-1} h_2^{-1})}_{\substack{\in N, da N \triangleleft G \\ \in N}} \in HN$

$N \leq HN, N \triangleleft G$  impliziert, dass  $N \triangleleft HN$ :

$N \triangleleft G \Leftrightarrow \forall g \in G : gNg^{-1} \subseteq N \Rightarrow \forall k \in HN : kNk^{-1} \subseteq N \Leftrightarrow N \trianglelefteq HN$

**Bemerkung:**  $(HN)/N$  nicht  $\cong H$ . Z.B.  $HH/H = H/H = \{e\}$

Betrachte  $\psi : H \rightarrow HN/N, h \mapsto hN$  offensichtlich Epimorphismus.

$\ker \psi = \{h \in H \mid kN = N\} = H \cap N$  (@2)

**Korollar 2 (1.22)**  $H/(H \cap N) \rightarrow HN/N$  ist Isomorphismus  $\square$

$$\begin{array}{c} G \\ \downarrow G/H \\ H \\ \downarrow H/N \\ N \end{array}$$

**Satz 3 (1.22)** 2. Isomorphiesatz Sei  $G$  eine Gruppe,  $N, H \trianglelefteq G, n \leq H$ . Dann auch  $N \trianglelefteq H, H/N \trianglelefteq G/N$  und  $G/N/H/N \simeq G/H$ .

**Beweis:** Betrachte  $\psi : H \hookrightarrow G \xrightarrow{\pi_N} G/N, h \mapsto k \mapsto kN$ , Homomorphismus.  $\ker \psi = N$ , insbesondere  $N \trianglelefteq H$ .

Aus dem Homomorphiesatz folgt, dass dies ein Monomorphismus ist.  $H/N \rightarrow G/N$ , konkret:  $H/N = \{hN \mid h \in H\} \subseteq G/N = \{gN \mid g \in G\}$ . Identifiziere  $H/N$  mit Untergruppe von  $G/N$ !

Beachte:  $H = \ker \pi_H, \pi_H : G \rightarrow G/H, g \mapsto gH$ .  $N \leq \ker \pi_H$ . Aus dem Homomorphiesatz folgt, dass dies ein Epimorphismus ist.  $G/N \rightarrow G/H, gN \mapsto gH$  mit Kern  $H/N$ .

Nach Korollar 1.20:  $G/N/H/N \simeq G/H \square$ .



## 1.5 Erzeugungssysteme & zyklische Gruppen

**Definition 10** (1.23) Sei  $G$  eine Gruppe und  $X \subseteq G$ .

$$\langle X \rangle := \bigcap_{X \subseteq H \leq G} H$$

heißt dann die von  $X$  erzeugte Untergruppe, die kleinste Untergruppe von  $G$ , die  $X$  enthält.

**Spezialfall:**  $\langle X \rangle = G$ . Nenne  $X$  ein Erzeugendensystem (generating set / system) von  $G$ .

Setze  $d(G) := \min\{|Y| \mid Y \text{ EZS von } G\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .  $G$  heißt zyklisch falls  $d(G) = 1$ .  $d(G)$  heißt (minimale) Erzeugerzahl von  $G$ .

Übungsaufgabe:  $d(S_n) = ?$

**Bemerkungen:**

1.  $X \leq G, \langle X \rangle = X$ .
2.  $\langle X \rangle = \{x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_m^{\varepsilon_m} \mid m \in \mathbb{N}_0, x_i \in X, \varepsilon_i \in \{-1, 1\}\}$   
 $(x_1^{\varepsilon_1} \dots x_m^{\varepsilon_m})^{-1} = (x_m^{\varepsilon_m} x_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}} \dots x_1^{\varepsilon_1})$
3. Für  $g \in G$   $\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \langle \{g\} \rangle$ . (Notation von letzter Woche)
4.  $G$  zyklisch  $\Leftrightarrow \exists g \in G : G = \langle g \rangle \Leftrightarrow \exists$  Epimorphismus:  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G, 1 \mapsto g$ .

**Beispiel: (1.24)**

1.  $(\mathbb{Z}, +)$  zyklisch ( $\varphi = \text{id}_{\mathbb{Z}}$ ).
2. Für  $m \in \mathbb{Z} : \mathbb{Z}/(m) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{0 + m\mathbb{Z}, 1 + m\mathbb{Z}, \dots, m-1 + m\mathbb{Z}\}$   
(Nebenklassen von  $m\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$ )  
Epimorphismus:  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, u \mapsto r(u) + m\mathbb{Z}$   
Division mit Rest:  $\exists a, r \in \mathbb{Z}. u = a \cdot m + r, 0 \leq r < m$

**Lemma (1.25):** Sei  $H \leq \mathbb{Z}$ . Dann existiert  $m \in \mathbb{N}_0$ .  $H = m\mathbb{Z}$ .

**Beweis:** Wenn  $H = \{0\}$ , dann  $H = 0 \cdot \mathbb{Z}$ . OBdA sei  $H \neq \{0\}$ .

Sei  $m \in H \setminus \{0\}$  das kleinste positive Element von  $H$ . Behauptung:  $H = m\mathbb{Z}$  „ $\supseteq$ “ klar, da  $H \leq \mathbb{Z}$ . Sei  $h \in H$ .  $\exists b, r \in \mathbb{Z} : h = b \cdot m + r, 0 \leq r < m \Rightarrow h - bm = r \in H$ . Nach Wahl von  $m$  ist  $r = 0 \Rightarrow \perp$ .  $\square$

**Satz 4 (1.26)** Sei  $G$  eine zyklische Gruppe, dann gilt:

$$G \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} (= \mathbb{Z}/(0)), & \text{falls } |G| = \infty \\ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, & \text{falls } |G| = m < \infty \end{cases}$$

**Beweis:** Sei  $G = \langle g \rangle, g \in G$ . Dann ist  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G, n \mapsto g^n$  ist ein Epimorphismus. Nach Korollar 1.20 ist  $\mathbb{Z}/(\ker \varphi) \simeq G$ . Aus Lemma 1.25 folgt  $\ker \varphi = m\mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}_0$ .

$m = 0 \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}$ .  $m > 0 : G \simeq \mathbb{Z}/(m\mathbb{Z}), |G| = m$ .  $\square$

**Satz 5 (1.27)** Sei  $G$  zyklisch. (1) Jede Untergruppe von  $G$  ist zyklisch. (2) Ist  $\varphi : G \rightarrow G'$  ( $G'$  beliebige Gruppe!) ein Homomorphismus, dann sind  $\ker \varphi$  und  $\text{Im} \varphi$  zyklisch

**Beweis:** @2: „ $\ker \varphi \leq G$  zyklisch“ folgt aus (1).  $G = \langle g \rangle, g \in G$ .  $\text{Im} \varphi = \{\varphi(h) \mid h \in G\} = \{\varphi(g^n) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\varphi(g)^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \langle \varphi(g) \rangle \leq G'$ .

@1: Sei  $H \leq G$ . Sei  $\psi : \mathbb{Z} \rightarrow G$  ein Epimorphismus. Betrachte  $\underbrace{\psi^{-1}(H)}_{=K} \leq \mathbb{Z}$ -zyklisch! Insbesondere ist  $\psi(K) = H$

- zyklisch nach (2).

**Definition 11** Sei  $G$  eine Gruppe,  $g \in G$ . Ordnung von  $g := |\langle g \rangle|$ , geschrieben  $|g|$ .

**Satz 6 (1.29)** (Kleiner Satz von Fermat) Sei  $G$  eine endl. Gruppe,  $g \in G$ . Dann teilt  $|g|$  die Ordnung  $|G|$  und es gilt  $g^{|G|} = e$ .

**Beweis:** Betrachte den Epimorphismus  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \langle g \rangle = H \leq G$ , mit  $\ker \varphi = m\mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ .

$|G| < \infty \Rightarrow |H| = |\langle g \rangle| = |g|$  teilt  $|G|$ .  $H \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \Rightarrow |H| = m = |g|$ .

$(g^m)^{|G|/m} = e^{|G|/m} = e$   $\square$

## 2 Fundamente der Ringtheorie

**Bis auf weiteres:  $R$  kommutativ.**

**Definition 12** (2.1) Ein Ring (mit Einselement 1) ist eine Menge  $R$  mit  $+: R \times R \rightarrow R, (x, y) \mapsto x + y$ ,  $\cdot: R \times R \rightarrow R, (x, y) \mapsto x \cdot y$ , derart, dass

1.  $(R, +)$  abelsche Gruppe (in additiver Notation mit Neutralelement  $0 \in R$ )
2.  $(R, \cdot)$  Monoid
3. Distributivgesetze gelten:  $\forall a, b, c \in R: (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$ .

$R$  heißt kommutativ, falls  $\forall a, b \in R: ab = ba$ .

**Definition 13** (2.2) Ein Unterring eines Ringes  $(R, +, \cdot)$  ist eine Teilmenge  $S$ , die bezüglich  $+$  und  $\cdot$  ein Ring ist.  $S$  sei eine additive Untergruppe von  $(R, +)$  und ein Untermonoid von  $(R, \cdot)$ .

Das Paar  $S \subset R$  heißt auch Ringweiterung.

**Definition 14** (2.3) Sei  $R$  ein Ring.  $R^* = \{a \in R \mid \exists b \in R: ab = ba = 1\}$  - Einheitengruppe („unit group“) von  $R$ .  $a \in R$  heißt Einheit, falls  $a \in R^*$ .

- $R$  heißt Schiefkörper („skew field“) falls  $R \neq \{0\}$  und  $R^* = R \setminus \{0\}$ , d.h. jedes von 0 verschiedene Element in  $R$  ist invertierbar.
- Ein Körper („field“) ist ein Schiefkörper, bei dem Multiplikation kommutativ ist:  $\forall a, b \in R: ab = ba$ .
- Ein Element  $a \in R$  heißt Nullteiler („zero divisor“) falls  $\exists b \in R \setminus \{0\}: ab = 0$  oder  $ba = 0$ . ( $0 \in R$  ist Nullteiler!)
- $R$  heißt nullteilerfrei, Integritätsbereich, Integritätsring („integral domain“) falls  $R \neq \{0\}$  und  $R \setminus \{0\}$  keine Nullteiler hat.

Übungsaufgabe:  $(R^*, \cdot)$  ist Gruppe!

**Bemerkung: Warnung:**  $a, b, c \in R, ac = bc \Leftrightarrow ac - bc = (a - b)c = 0$ . Wenn  $R$  Integritätsbereich ist und  $c \neq 0$ , folgt hieraus  $a = b$ .

**Beispiel:** (2.4):

1.  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ist ein Ring.  $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$ , Nullteiler:  $\{0\} \Rightarrow \mathbb{Z}$  ist Integritätsbereich!
2.  $R$  kommutativ. Dann ist  $\text{Mat}_n(R)$  ist Ring mit  $1 = E_n$  und der Nullmatrix als Nullelement.  
 $\text{Mat}_n(R)^* = \{A \in \text{Mat}_n(R) \mid \exists B \in \text{Mat}_n(R): AB = BA = E_n\} = \{A \in \text{Mat}_n(R) \mid \det A \in R^*\} = GL_n(R) (= GL(n; R)).$  (general linear)  
 Zum Beispiel:  $GL_n(\mathbb{Z}) = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z}) \mid \det A \in \{-1, 1\}\}$   
 $n > 1: \text{Mat}_n(R)$  im Allgemeinen kein Integritätsbereich:  $\exists A: A^m (= A \cdot A^{m-1}) = 0$  für geeignetes  $m$ .

### 3. Hamiltonische Quaternionen

$$\mathbb{H} = \langle e, i, j, k \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}e \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k = \{a_1e + a_2i + a_3j + a_4k \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

Multiplikationstabelle:

$\cdot$	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	-e	k	-j
j	j	-k	-e	i
k	k	j	-i	-e

$$(a_1e + a_2i + a_3j + a_4k)(b_1e + b_2i + b_3j + b_4k) = a_1b_1 \underbrace{e \cdot e}_e + a_1b_2 \underbrace{e \cdot i}_i + \dots + a_3b_4 \underbrace{j \cdot k}_i + \dots$$

Tatsache / Übungsaufgabe:  $(\mathbb{H}, +, \cdot)$  ist ein Schiefkörper aber kein Körper.

$$\mathbb{H} = \underbrace{\mathbb{R}e \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k}_{\simeq \mathbb{C}}$$

$$\begin{array}{c} \mathbb{H} \simeq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 \\ \downarrow \\ \mathbb{C} \simeq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 \\ \downarrow \\ \mathbb{R} \end{array}$$

Von  $\mathbb{R}$  zu  $\mathbb{C}$  wird etwas gewonnen (algebraische Abgeschlossenheit, von  $\mathbb{C}$  zu  $\mathbb{H}$  wird allerdings etwas sehr wichtiges verloren (Kommutativität der Multiplikation)). Diese Reihe könnte noch weiter gehen, dann wird es aber irgendwann uninteressant.

4. Sei  $X$  eine Menge,  $X \neq \emptyset$ ,  $(R_x)_{x \in X}$  eine Familie von Ringen, dann ist  $P = \prod_{x \in X} R_x$  ein Ring mit Addition  $(r_x) + (s_x) = (r_x + s_x)_x$  und der Multiplikation  $(r_x)(s_x) = (r_x \cdot s_x)_x$ .

Null:  $(0_x)_x$ , Eins:  $(1_x)_x$

**Achtung:**  $P$  hat Nullteiler, auch wenn alle  $R_x$  nullteilerfrei sind:  $|X| = 2 : P = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \prod_{x \in X} \mathbb{Z}, a = (1, 0), b = (0, 1) \Rightarrow a \cdot b = (0, 0)$

**Definition 15** (2.5) (*Polynomring in einer Variablen*) Sei  $R$  ein kommutativer Ring. Der Ring der Polynome in einer Variablen  $X$  (*Polynomring*) mit Koeffizienten in  $R$  ist

$R[X] = \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} = \{ (a_0, a_1, \dots) \mid \forall i \in \mathbb{N}_0 : a_i \in R. \text{ Für fast alle } i : a_i = 0 \}$  mit Addition  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0} + (b_i)_{i \in \mathbb{N}_0} = (a_i + b_i)_{i \in \mathbb{N}_0} (\in R[x])$ .

Multiplikation:  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \cdot (b_i)_{i \in \mathbb{N}_0} = (c_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in R[X]$  wobei für  $i \in \mathbb{N}_0 : c_i := \sum_{r+s=i} a_r b_s = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j}$

Schreibe  $f(X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i = \sum_{i=0}^N a_i X^i (n \gg 0 : a_i = 0 \text{ falls } i \geq N)$  anstelle von  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in R[X], g(X) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$

$f(X) \cdot g(X) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i X^i$

**Idee:**  $R \subset S$  Ringerweiterung,  $f(X) \in R[X] \rightsquigarrow f : S \rightarrow S, s \mapsto f(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i \in S$ , die von  $f$  induzierte „polynomielle Funktion“.

$R = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\} : f(X) = X^2 - X = (0, -1, 1, 0, \dots), g(X) = 0 = (0, 0, \dots), \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2, s \mapsto s^2 - s = 0 !$

Polynome sind verschieden von Polynomfunktionen!

**Definition 16** (2.6) Sei  $f = (a_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in R[X], R$  ein kommutativer Ring. Für  $i \in \mathbb{N}_0$  ist  $a_i$  der  $i$ -te Koeffizient von  $f$ . Der Grad („degree“) von  $f (\neq 0)$  ist  $\max \{ i \mid a_i \neq 0 \}$ , geschrieben  $\deg(f)$ .  $\deg(0) = -\infty$ .

Sei  $f \neq 0$ . Dann ist der Leitkoeffizient von  $f = a_{\deg f}$ . Ist  $a_{\deg f} = 1$ , so heißt  $f$  normiert.

**Satz 7 (2.7)** (*Polynomdivision mit Rest*) Sei  $R$  ein kommutativer Ring,  $g = (a_i) \in R[X]$ , dessen Koeffizient  $a_{\deg(g)}$  eine Einheit in  $R$  ist. Dann gibt es zu jedem  $f \in R[X]$  eindeutig bestimmte  $q, r \in R[X] : f = q \cdot g + r, \deg(r) < \deg(g)$ .

## 2.1 Ideale, Homomorphismen, Faktorringer

**Definition 17** (2.8) Sei  $R$  ein Ring. Eine Teilmenge  $I \subseteq R$  heißt Ideal (von  $R$ ) falls gilt:

1.  $0 \in I$
2.  $\forall a, b \in I : a + b \in I$
3.  $\forall a \in I, b \in R : ab \in I$

Äquivalent:  $I$  additive Untergruppe von  $R$ , abgeschlossen bezüglich Multiplikation mit Elementen von  $R$ . Gegebenfalls schreibe  $I \trianglelefteq R$

Sind  $I_1, I_2 \trianglelefteq R$ , so sind:

$I_1 + I_2 = \{ i_1 + i_2 \mid i_1 \in I_1, i_2 \in I_2 \} \trianglelefteq R$ .

$I_1 \cdot I_2 = \{ \sum_{\text{endlich}} i_1 i_2 \mid i_1 \in I_1, i_2 \in I_2 \} \trianglelefteq R$ .

$I_1 \cap I_2 = \{ i \in R \mid i \in I_1 \text{ und } i \in I_2 \} \trianglelefteq R$ .

Allgemeiner: Gegeben eine Familie  $(I_x)_{x \in X}$  von Idealen von  $R$  (d.h.  $I_x \trianglelefteq R \forall x \in X$ ), definiere

$\sum_{x \in X} I_x := \{ \sum_{x \in X} i_x \mid \forall x \in X : i_x \in I_x; i_x = 0 \text{ für fast alle } x \in X \}$ .

Für  $i \in I$  schreibe:

$(i) := \{ ib \mid b \in R \} = iR \trianglelefteq R$ , das von  $i$  erzeugte *Hauptideal* (principal ideal).

Check:

1.  $0 = i \cdot 0 \in (i)$
2.  $ib_1 + ib_2 = i(b_1 + b_2) \in (i)$  für  $b_i \in R$
3.  $(ib)b' = i(bb') \in (i)$  für  $b, b' \in R$

**Definition 18** (2.9)

1. Sei  $R$  ein Ring und  $X$  eine Menge. Sei  $(i_x)_{x \in X}$  eine Familie von Ringelementen. Dann heißt  $I = \sum_{x \in X} (i_x) \trianglelefteq R$  das von den  $i_x$  erzeugte Ideal. Das kleinste Ideal, das die Elemente  $i_x$  enthält. Die Familie  $(i_x)_{x \in X}$  heißt (ein) Erzeugendensystem.
2.  $I \trianglelefteq R$  heißt endlich erzeugt, falls es ein endliches Erzeugendensystem zulässt.
3.  $I \trianglelefteq R$  heißt Hauptideal, falls es ein Erzeugendensystem der Kardinalität 1 zulässt.  $\exists i \in R : I = (i)$ .
4. Ist  $R$  ein Integritätsbereich, und ist jedes Ideal von  $R$  ein Hauptideal, dann heißt  $R$  ein Hauptidealring (principal ideal domain).

**Proposition (2.10):**  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ist ein Hauptidealring.

**Beweis:**  $\mathbb{Z}$  ist offensichtlich Integritätsbereich. Ideale in  $\mathbb{Z}$  sind insbesondere additive Untergruppen. Die Untergruppen von  $\mathbb{Z}$  sind alle von der Form  $m\mathbb{Z} = (m) = \{m \cdot n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$   $\square$

**Beispiel (2.11):**

1. Der Ring  $\mathbb{Z}[X]$  ist kein Hauptidealring: z.B.  $I = (2, X) \trianglelefteq \mathbb{Z}[X]$  (Gegeben Elemente  $i_1, \dots, i_n \in R : (i_1, \dots, i_n) := \sum_{j=1}^n (i_j) \trianglelefteq R$ )  
 $(2) \trianglelefteq \mathbb{Z}[X] : (2) = \{2 \cdot f \mid f \in \mathbb{Z}[X]\} = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \mid \text{fast alle } a_i = 0, a_i \in (2) \leq \mathbb{Z}\}$   
 $(X) = \{X \cdot f \mid f \in \mathbb{Z}[X]\} = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \mid \text{fast alle } a_i = 0, a_0 = 0\}$   
 $(2, X) = (2) + (X) = \{f \in \mathbb{Z}[X] \mid f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \text{ fast alle } a_i = 0, a_0 = 0\}$

**Behauptung:**  $(2, X)$  ist kein Hauptideal (ÜA!)

2. Ist  $R$  ein Körper, so gibt es *nur* die Ideale  $(0) = \{0\}$  und  $(1) = \{1 \cdot r \mid r \in R\} = R$ . Sei etwa  $x \in I \setminus \{0\}$ . Dann ist  $x \cdot x^{-1} = 1 \in I$ , das heißt  $I = (1) = R$ .

**Definition 19** (2.12) Seien  $R, R'$  Ringe. Eine Abbildung  $\varphi : R \rightarrow R'$  heißt Ringhomomorphismus, falls

1.  $\forall a, b \in R : \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
2.  $\varphi(1) = 1, \forall a, b \in R : \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ .

(d.h.  $\varphi$  sei Homomorphismus abelscher Gruppen und Monoiden).

Die in Definition 1.7 eingeführten Begriffe (Epi-, Mono-, Iso-, Endo- und Automorphismus) existieren sinngemäß auch für Ringe ((Schief-)Körper).

**Bemerkung:** Sei  $\varphi : R \rightarrow R'$  ein Ringhomomorphismus.

1. Offensichtlich ist eine Komposition von Ringhomomorphismen wieder ein Ringhomomorphismen.
2.  $\ker \varphi \trianglelefteq R$  (1)  $\varphi(0) = 0$ , (2)  $a, b \in \ker \varphi : \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) = 0$ , (3)  $a \in \ker \varphi, b \in R : \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = 0 \cdot \varphi(b) = 0$   
 $\text{im } \varphi \leq R$  Unterring, i.A. kein Ideal!
3.  $R^* = \{a \in R \mid \exists b \in R : ab = ba = 1\}$  – Einheitengruppe.  
 $\varphi$  induziert einen Gruppenhomomorphismus:  $\varphi^* : R^* \rightarrow R'^*, a \mapsto \varphi(a)$ .
4. Ist  $R$  ein Körper,  $R' \neq \{0\}$ . Dann ist  $\varphi$  injektiv. (Angenommen  $\varphi$  ist nicht injektiv. Dann ist  $\ker \varphi \neq \{0\} \trianglelefteq R$ , d.h.  $\ker \varphi = R \Rightarrow \perp$ )

Sei  $I \trianglelefteq R, R$  ein Ring. Ziel: Definiere auf  $R/I = \{a + I \mid a \in R\}$  eine Ringstruktur.

**Addition:**  $\forall a, b \in R : (a + I) + (b + I) = (a + b) + I$

**Multiplikation:**  $\forall a, b \in R : (a + I) \cdot (b + I) = (a \cdot b) + I$

Dies ist wohldefiniert! In der Tat, seien  $a', b' \in R$  mit  $a + I = a' + I, b + I = b' + I$ . Das heißt, dass  $\exists i_a, i_b \in I : a = a' + i_a, b = b' + i_b$ .

Zu zeigen:  $a \cdot b + I = a' \cdot b' + I$ .

$$ab + I = (a' + i_a)(b' + i_b) + I = a'b' + \underbrace{a' \cdot i_b}_{\in I \text{ falls kommutativ}} + \underbrace{i_a b'}_{\in I} + \underbrace{i_a i_b}_{\in I} + I = a'b' + I, \text{ da } I \trianglelefteq$$

**ÜA:**  $(R/I, +, \cdot)$  ist ein Ring und  $\bar{\varphi} : R \rightarrow R/I, a \mapsto a + I$  ist ein surjektiver Ringhomomorphismus.

**Wiederholung:**

$I \triangleleft R : R/I = \{a + I | a \in R\}$ .  $R/I$  Faktorring „R modulo I“

$\pi : R \rightarrow R/I, a \mapsto a + I$  surjektiver Ringhomomorphismus

**Satz 8 (2.13)** Sei  $\varphi : R \rightarrow R'$  Ringhomomorphismus und  $I \trianglelefteq R$  derart,  $I \subseteq \ker \varphi$ . Dann existiert ein eindeutiger Ringhomomorphismus  $\bar{\varphi} : R/I \rightarrow R'$  derart, dass

$$\bar{\varphi} \circ \pi = \phi$$

und

- $\text{im } \varphi = \text{im } \bar{\varphi}$
- $\ker \bar{\varphi} = \pi(\ker \varphi)$
- $\ker \varphi = \pi^{-1}(\ker \bar{\varphi})$

Insbesondere ist  $\bar{\varphi}$  injektiv gdw.  $I = \ker \varphi$

**Korollar 3 (2.14)** Ist  $\varphi : R \rightarrow R'$  surjektiver Ringhomomorphismus (mit  $I = \ker \varphi$ ), dann ist

$$\bar{\varphi} : R/(\ker \phi) \rightarrow R'$$

Ringisomorphismus.

Isomorphiesätze 1.20 und 1.21 haben Analoga in Ringtheorie („Gruppe“  $\rightarrow$  „Ring“, „Normalteiler“  $\rightarrow$  „Ideal“).

Motivation:  $I \triangleleft R \rightsquigarrow R/I$ . **Ziel:** Gegeben ringtheoretische Eigenschaft P: „Was heisst es für I, dass  $R/I$  Eigenschaft P hat?“.

**Definition 20 (2.15)** Sei  $R$  Ring (kommutativ mit 1),  $I \triangleleft R$ ,  $I \neq R$ .  $I$  heisst

- Primideal (prim) in  $R$ , falls gilt:  $\forall a, b \in R : ab \in I \Rightarrow a \in I \text{ oder } b \in I$
- Maximalideal (maximal) in  $R$ , falls:  $J \triangleleft R, I \subseteq J \Rightarrow I = J \text{ oder } J = R$  (informell: Es gibt kein echtes Ideal zwischen  $I$  und  $R$ . Aber vorsicht: nicht eindeutig!)

In der Literatur:  $\mathfrak{p}$  Prim,  $\mathfrak{m}$  Maxi

**Lemma 1 (2.16)** Sei  $R \neq \{0\}$  Ring. Das Nullideal  $\{0\}$  ist

- prim gdw.  $R$  IB ist
- max gdw  $R$  Körper ist

**Beweis:**

@1:  $\{0\}$  ist prim:  $a \cdot b \in \{0\} \Leftrightarrow ab = 0 \Rightarrow a \in \{0\} \text{ oder } b \in \{0\} \Leftrightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0 \Leftrightarrow 0$  ist der einzige Nullteiler  $\Leftrightarrow R$  ist IB.

@2: Angenommen  $\{0\}$  max in  $R$ . Zu zeigen:  $R$  Körper, das heisst  $R^* = R \setminus \{0\}$ . Sei  $a \in R \setminus \{0\}$ . Es reicht zu zeigen:  $(a) = R = (1)$ . Klar nach Maximalität des Nullideals  $\{0\}$ .

Angenommen  $R$  ist Körper, So hat  $R$  nur die beiden(!) Ideale  $\{0\}$  und  $(1) = R$ . Damit ist  $\{0\}$  maximal.  $\square$

Beachte:  $R \cong R/\{0\}$ .

**Proposition 1 (2.17)** Sei  $R$  ein Ring,  $I \triangleleft R$ ,  $(R \neq \{0\}, I \neq R)$ . Dann ist  $I$

1. prim gdw.  $R/I$  ein IB ist.
2. maximal gdw.  $R/I$  ein Körper ist.

Insbesondere ist jedes maximale Ideal prim (Umkehrung gilt nicht!).

**Beweis:**

$\bar{\cdot} : R \rightarrow R/I; a \in R\bar{a} = a + I; x \in R : \bar{x} = \bar{0}$  gdw.  $x \in I$

@1:  $I$  prim gdw.  $\forall a, b \in R : (\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{0} \Rightarrow \bar{a} = \bar{0} \text{ oder } \bar{b} = \bar{0}) \Leftrightarrow R/I$  ist IB ( $x, y \in R/I, xy = 0 \Rightarrow x = 0$  oder  $y = 0$ )

@2: Nach Lemma 2.16 reicht zu zeigen:  $I$  maximal genau dann wenn in  $R/I$  das Nullideal maximal ist. Behauptung folgt aus der Tatsache, dass  $\{J \triangleleft R | I \leq J\} \leftrightarrow \{\bar{J} \triangleleft R/I\}$  mit  $J \mapsto \bar{J} = \{\bar{j} | j \in J\}$  bijektiv ist.  $\square$

**Korrolar 4 (2.18)** Ideale in  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  sind von der Form  $m\mathbb{Z} = (m), m \in \mathbb{N}_0$ .

$(m)$  ist prim genau dann wenn  $m = 0$  oder  $m$  Primzahl.

$(m)$  ist maximal genau dann wenn  $m$  Primzahl.

Seien  $a, b \in \mathbb{Z}$  heissen *koprim* (teilerfremd), wenn  $\text{ggT}(a, b) = 1$ :  $\exists x, y \in \mathbb{Z} : ax + by = 1$  (Lemma von Bézout).

Idealtheoretisch formuliert:  $(a) + (b) = (1) = \mathbb{Z}$  - Äquivalent zu Bézouts Lemma.

(Variante des) *Chinesischen Restsatzes*: Eine Kongruenz modulo  $a \cdot b$  ist lösbar gdw. wenn sie lösbar ist  $\text{mod}(a)$  und  $\text{mod}(b)$ .

Zum Beispiel  $a = 2, b = 3$ :  $X^2 \equiv 5 \text{mod}(6)$  lösbar gdw.  $X^2 \equiv 5 \equiv 1 \text{mod}(2)$  lösbar und  $X^2 \equiv 5 \equiv 2 \text{mod}(3)$ .

Letzteres ist aber nicht lösbar, also ist die Gleichung  $\text{mod}(6)$  nicht lösbar.

$R$  Ring  $I_1, I_2 \leq R$  koprim  $:\Leftrightarrow I_1 + I_2 = R \Leftrightarrow (I_1, I_2) = 1$

**Satz 9 (2.19)** *Chinesischer Restsatz (Chinese Remainder Theorem (CRT))* Sei  $R$  kommutativer Ring mit 1,  $I_1, \dots, I_n$  paarweise koprimale Ideale. Dann ist

$$\varphi : R \rightarrow R/I_1 \times \dots \times R/I_n, a \mapsto (a + I_1, \dots, a + I_n)$$

ein surjektiver Ringhomomorphismus mit  $\ker \varphi = \bigcap_{j=1}^n I_j =: S$ .

Korrolar 1.24:  $\bar{\varphi} : R/S \xrightarrow{\sim} R/I_1 \times \dots \times R/I_j$  ist Ringisomorphismus.

**Beweis:**

Zeige Surjektivität von  $\varphi$ ! Zeige zunächst:  $\forall j \in [n] = \{1, 2, \dots, n\} : I_j$  und  $\bigcap_{i \neq j} I_i$  sind koprim, das heisst,  $1 \in I_j + \bigcap_{i \neq j} I_i$ .

Nach Voraussetzung existieren für  $i \neq j$  Elemente  $a_i \in I_j, a'_i \in I_i$  mit  $a_i + a'_i = 1$ .

$$1 = \prod_{i \neq j} 1 = \prod_{i \neq j} (a_i + a'_i) \in I_j + \prod_{i \neq j} I_i \subseteq I_j + \bigcap_{i \neq j} I_i$$

.

### 3 Übungsaufgaben

#### 3.1 13/10/2014

**Eindeutigkeit des Neutralen:** Sei  $M$  ein Monoid. Zeige, dass  $e \in M$  eindeutig ist.

Angenommen, es gäbe ein zweites neutrales Element  $e'$  mit  $e \neq e'$ . Dann würde gelten  $e = e \cdot e' = e' \rightarrow \perp$   $\square$

**Eindeutigkeit der Inversen:** Sei  $M$  ein Monoid. Zeige, dass  $a^{-1} \in M$ , falls es existiert, eindeutig ist.

Angenommen, zu einem  $a \in M$  gäbe es zwei inverse Elemente  $a', a''$  mit  $a' \neq a''$ . Dann gilt  $a' \cdot a \cdot a'' = a' \cdot e = a'$  als auch  $(a' \cdot a) \cdot a'' = e \cdot a'' = a''$ . Es folgt  $a' = a'' \rightarrow \perp$   $\square$

#### 3.2 15/10/2014

**Aufgabe:** Sei  $G$  eine Gruppe mit  $g \in G$ . Zeige:  $\psi_g := G \rightarrow G, h \mapsto ghg^{-1}$  ist ein Gruppenautomorphismus.