

无人机的纯方位无源定位和调整

摘要

无人机的纯方位无源定位要求编队飞行的无人机在接收到不同的角度信息后，完成对自身位置的有效定位，并调整到原有队形的理想位置上。本文针对不同问题的条件和队形要求，建立相对应的定位或调整模型，并对相应模型进行了具体分析和试验。

对于问题 1.1，由于发射无人机编号已知且位置无偏差，我们首先在已知两架信号发射无人机和接收信号无人机对它们的夹角的情况下，建立了无人机的**圆弧轨迹模型**。接下来通过联立圆方程求解检验，我们建立了**已知定位无人机和夹角的无源定位模型**，预测出接收发射信号的无人机坐标，并带入多组数据，计算其与实际位置的坐标偏差的距离，结果误差小于 10^{-13}m 。

对于问题 1.2，我们首先通过**反证法和同余分析**，证明了在无人机离理想位置偏差较小时，可以通过收到的三个角度信息，**唯一地确定第三架发射无人机的编号**。在通过枚举确定第三架发射无人机的编号后，我们可以借助问题 1.1 的模型对目标无人机进行有效定位。最后通过计算机模拟了被动接收信号无人机和发射信号无人机的可能位置并进行模拟预测，结果显示全部正确。因此除 FY00 与 FY01 外，**所需最少发射信号无人机数量为 1**。

对于问题 1.3，由于在理想位置时无人机可能接收到的角度是离散且均匀的，我们首先建立了无人机的**角度匹配模型**，以通过角度信息衡量无人机与标准位置的距离。在固定发射信号无人机的情况下，对每一架接收信号无人机进行反复地**尝试-反馈-调整**，使其与标准位置的角度更优地匹配。再不断改变发射信号无人机，优化无人机整体的角度匹配，以趋于理想位置。我们多次改变无人机的初始位置，结果显示，无人机总能在有限次调整内收敛到理想位置。

对于问题 2，在锥形无人机编队中，我们以 FK08 与 FK09 为基准对整个编队进行调整。过程中我们借助问题 1.3 的方法，首先对以 FK08 为圆心的圆周上的无人机进行调整，接着改变圆心至 FK09 和 FK05……最终经过多批次调整，所有无人机都回到了理想位置。

最后，我们考虑了测量夹角不准所带来的误差对模型定位的影响，发现模型定位的误差和角度测量的误差大致呈线性关系。

关键字： 无源定位 角度匹配 调整-反馈模型 偏差函数

目录

一、引言	3
二、问题重述与分析	3
2.1 问题重述	3
2.2 问题 1 分析	4
2.3 问题 2 分析	4
三、模型假设	5
四、符号说明	6
五、模型的建立与求解	6
5.1 问题 1	6
5.2 问题 2	17
六、灵敏度分析	20
七、模型评价	21
7.1 模型的优点	21
7.2 模型的缺点与改进方案	21
附录 A 问题 1.2 模型完整数据	22
附录 B 问题 1.3 模型完整数据	22
附录 C 文件清单	23
附录 D 参考文献	23

一、引言

近年来，无人机作为新型飞行技术开始广泛应用于军事、农业等行业。其中，无人机的集群遂行编队方式受到广泛关注和研究。

无人机集群遂行编队飞行时，无人机可能受到各种外界干扰因素影响而偏离原先队形中的所处位置。为避免外界干扰，保证队形的齐整性和飞行效率，无人机常常采用纯方位无源定位的方法来调整位置，即由编队中某几架无人机发射信号，其余无人机被动接受信号并从中提取出方向信息进行定位和修正。

通过适度且合理的调整与修正，集群遂行编队飞行的无人机群得以保证飞行队形的稳定性，从而更高效地完成指定任务、达到预期目的。

二、问题重述与分析

2.1 问题重述

为帮助无人机有效利用获取的方向信息完成定位和调整，我们约定无人机接收到的方向信息为该无人机与任意两架发射信号无人机连线之间的夹角，并希望结合数学思想建立数学模型，解决以下几个问题：

问题 1：无人机编队一共由 10 架无人机构成，编队队形为圆形，其中 9 架无人机均匀分布在一圆周上，另一架无人机位于圆心。10 架无人机始终保持在同一高度上飞行。

(1) 圆心处无人机 (FY00) 和编队中另 2 架无人机发射信号，其余位置略有偏差的无人机接收信号。给定发射信号的无人机编号，我们需要结合无人机接收到的方向信息为其建立定位模型。

(2) 某位置略有偏差的无人机接收到编号为 FY00 和 FY01 的无人机以及编队中若干编号未知的无人机发射的信号，且发射信号的无人机位置无偏差。我们要求出至少还需要多少架发射信号无人机，以完成接收信号无人机的定位。

(3) 给定无人机队形的圆形半径 (100m) 与 10 架无人机的初始位置。我们需制定合理的定位调整方案 (每次调整的时间不计)，使得每次选择 FY00 和圆周上至多 3 架无人机发射信号，其余无人机接收信号，并最终可以使所有无人机调整到正确的队形位置上。

问题 2：如果无人机编队改变队形 (如锥形) 并仍采用纯方位无源定位，我们需要设计无人机的位置调整方案。

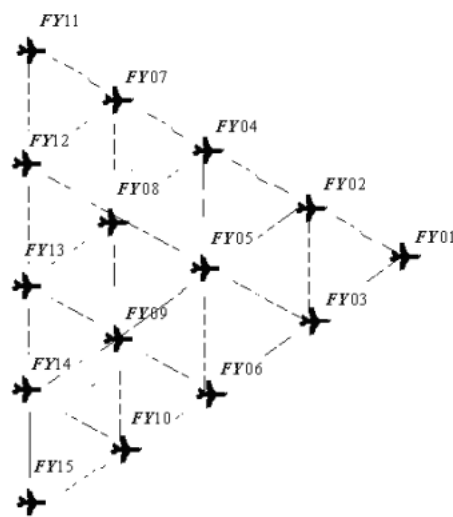


图 1 锥形无人机编队示意图

2.2 问题 1 分析

在**问题 1.1** 中，由于发射无人机编号已知且位置无偏差，我们首先在已知两架信号发射无人机和接收信号无人机对它们的夹角的情况下，计算出无人机所在的轨迹圆弧。接下来通过联立圆方程求解检验，预测出接收发射信号的无人机坐标。

对于**问题 1.2**，我们可以枚举第三架发射信号无人机的编号，并按照问题 1.1 的方案对目标无人机进行定位。事实上，我们应该还能从数学上证明，三架无人机发出的信号得到的三个角度值已经可以唯一确定无人机的位置。

在**问题 1.3** 中，只有无人机 FY00 和 FY01 在理想的位置上。我们每次使这两架无人机和另外一架发出信号，其他无人机则根据在理想位置应该接收到的角度值，通过尝试向这个方向自动调整。自动调整不能使无人机调到准确的理想位置，但是调整后无人机的位置通常是更优的。我们不断改变第三架发射信号无人机编号，并调整其他无人机。在多轮这样的调整后，无人机应当离理想位置非常接近。

2.3 问题 2 分析

鉴于此问题与问题 1 的相似性，我们可以先应用类似于问题 1 的方案，对在同一个圆周上的无人机（以 FY08 为圆心的 FY04、FY05、FY07、FY09、FY12、FY13）进行调整，再用相似的方法调整其余两个圆周（分别以 FY09、FY05 为圆心），最后再以 FY04、FY06、FY13 作为发射信号无人机，调整位于锥形编队三个角的无人机（FY01、FY11、FY15），从而达到调整的目标。

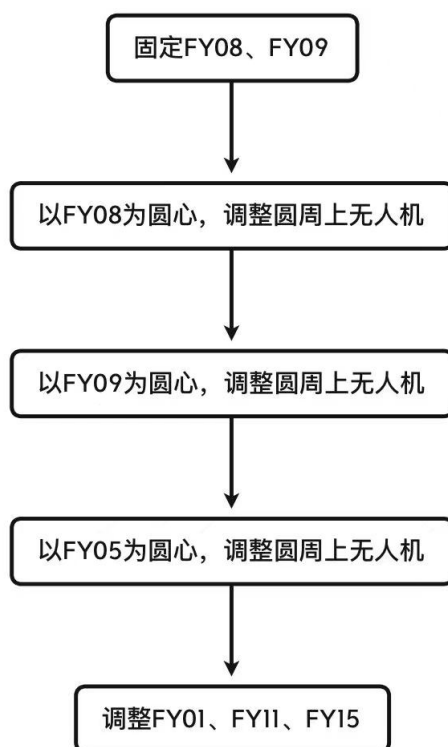


图 2 问题 2 调整流程

三、模型假设

- 无人机仅能检测到两个信号方向夹角的值，而不能检测到发出信号的方向。
- 除题中明确编号的无人机发射的信号外，其余无人机信号不能被接收信号的无人机识别对应编号。
- 无人机不能计算自身相对于其他无人机的位置。
- 所有问题中，无人机能进行高度检测以保持在同一高度上。
- 无人机能够记录每次飞行的绝对方向与路程，并能够随时回到前一时刻的位置。
- 在无人机的运动过程中，每架无人机均可以视为质点，即无人机的大小可以忽略不计。

四、符号说明

符号	解释	单位
$P(x, y)$	点 P 在平面直角坐标系的坐标	(m, m)
$C_{ij}^{(k)}$	经过无人机 FY0i、FY0j 的圆（编号为 k ）	/
x_i	编号为 FY0i 的无人机的横坐标	m
y_i	编号为 FY0i 的无人机的纵坐标	m
(x_{ip}, y_{ip})	编号为 FY0i 的无人机的预测坐标	(m, m)
(x_{ir}, y_{ir})	编号为 FY0i 的无人机的实际坐标	(m, m)
x_{i0}	编号为 FY0i 的无人机的理想位置横坐标	m
y_{i0}	编号为 FY0i 的无人机的理想位置纵坐标	m
Er_i	问题 1.1 中无人机 FY0i 的位置偏差	m
er_t	问题 1.3 和问题 2 中第 t 次调整后无人机位置整体的偏差	m
α_i	无人机接受到的第 i 个角度信息	rad
r	无人机扰动半径	m

五、模型的建立与求解

5.1 问题 1

在问题 1 中，由于 FY00 和 FY01 均位于理想位置，故我们以 FY00 为原点，FY00 与 FY01 连线方向为 x 轴正方向建立平面直角坐标系，问题 1 中所有的坐标都是基于此坐标系下的平面直角坐标。不妨设 FY00 与 FY01 的距离为 100m。

问题 1.1

首先为了确定已知发射位置和夹角时无人机所在轨迹，我们建立了无人机的圆弧轨迹模型。如果一架无人机收到两个信号的夹角为 α ，那么它应该位于两段对称的圆弧上，当 α 取值不同时，无人机圆弧轨迹如下图所示：

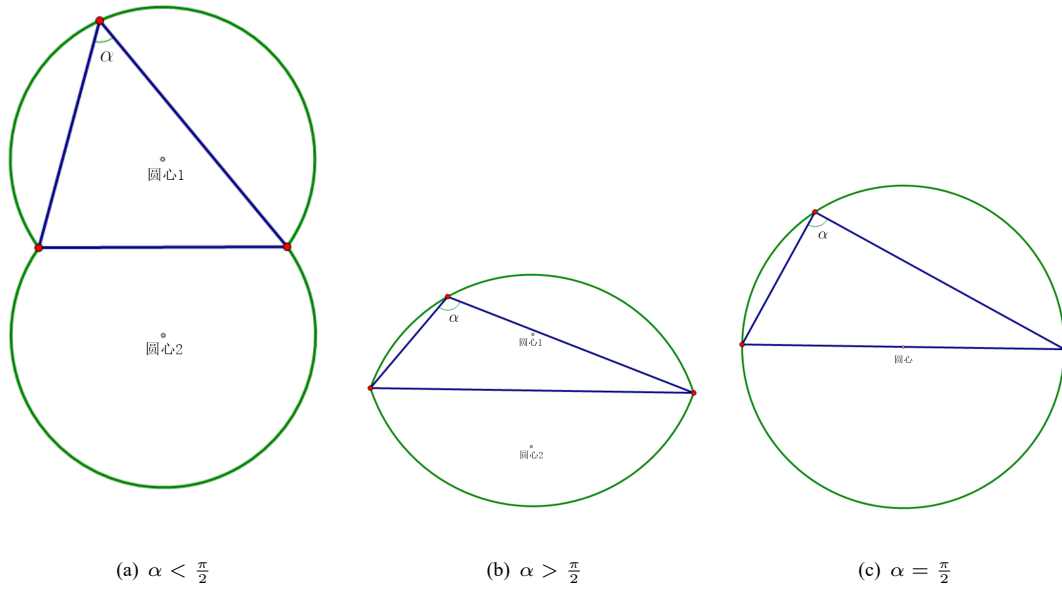


图3 无人机圆弧轨迹示意图

通过计算知，一个通过 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 两点，并且这两点张成的圆周角为 α 的圆心坐标为

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \pm \frac{d \sin \theta}{2 \tan \alpha}, \frac{y_1 + y_2}{2} \mp \frac{d \cos \theta}{2 \tan \alpha} \right) \quad (1)$$

其中 $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, $\theta = \arctan\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$ 。

接下来我们建立平面直角坐标系中已知三点坐标，求解夹角的模型。

已知 $\angle ABC$ 的三个顶点坐标 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 以及 $C(x_3, y_3)$ 的情况下，我们可以用余弦定理得到 $\angle ABC$ 的大小：

$$\angle ABC = \arccos \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad (2)$$

其中 $a = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$, $b = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}$, $c = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 。

最后，我们将建立**已知定位无人机和夹角的无源定位模型**。不妨假设发射信号的另一架无人机是 FY02。位于 (x, y) 的无人机收到来自 FY01、FY02、FY03 所得到两两之间的夹角分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ，对应地我们能够得到六段可能的圆弧 $C_{01}^{(1)}, C_{01}^{(2)}, C_{02}^{(1)}, C_{02}^{(2)}, C_{12}^{(1)}, C_{12}^{(2)}$ 作为无人机可能出现的轨迹。我们取弧 $C_{01}^{(1)}, C_{01}^{(2)}, C_{02}^{(1)}, C_{02}^{(2)}$ 两两的交点，如下图所示：

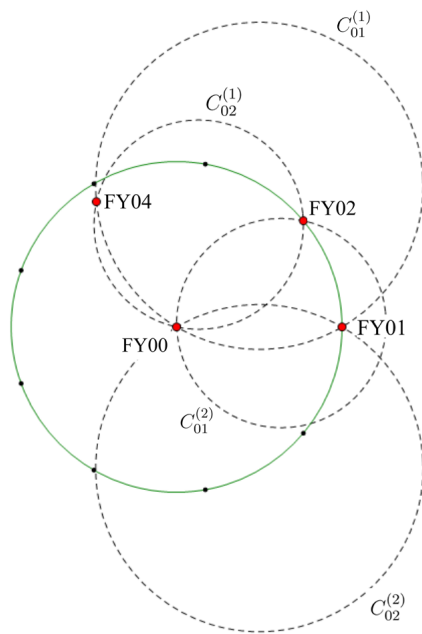


图 4 以 FY00、FY01、FY02 为发射信号无人机，检测 FY04 的位置

无人机可能位置必然在其中两个圆弧的交点上。接下来我们运用 MATLAB 两两联立上述圆方程得到可能的交点集，再检验计算所得点与 FY01、FY02、FY03 所得到两两之间的夹角是否恰为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ，删去不符合条件的解，最后得到了无人机所在位置所有可能的点集。

另一方面，由于无人机的偏差是微小的，因此在点集中，我们选择离无人机应该在的标准位置最近的点，作为模型预测的无人机的位置。

接下来运用 MATLAB 对我们的模型进行检验。我们假设发射信号的无人机是 FY00、FY01 和 FY02，其他无人机在各自的标准位置下进行随机扰动（扰动半径 $r < 10\text{m}$ ），无人机事实上的坐标如下图所示：

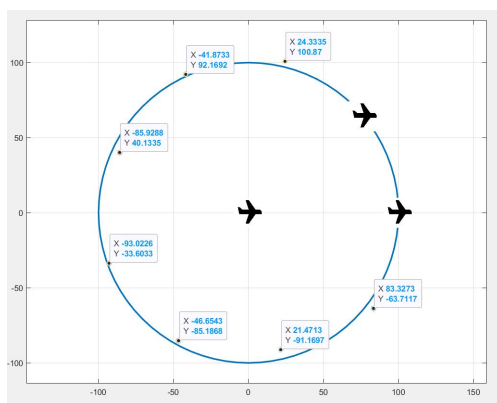


图 5 问题 1 的验证

对于每一架接收信息的无人机，我们计算出其应该接收到的角度信息，并将其代入模型求出理论中无人机的坐标，并计算理论坐标与实际坐标的曼哈顿距离，作为统计模型的误差 Er_i ：

$$Er_i = |x_{ip} - x_{ir}| + |y_{ip} - y_{ir}| \quad (3)$$

其中， (x_{ip}, y_{ip}) 是无人机 FY0i 预测的平面直角坐标， (x_{ir}, y_{ir}) 是无人机 FY0i 实际的平面直角坐标，运行程序，模型的结果如下表所示：

表 1 问题 1.1 中坐标计算的误差

编号	FY01	FY02	FY03	FY04	FY05	FY06	FY07	FY08	FY09
Er_i (m)	0	0	2.13×10^{-14}	1.07×10^{-13}	7.60×10^{-13}	1.59×10^{-12}	3.77×10^{-13}	2.10×10^{-13}	5.68×10^{-14}

可以看到，由于模型的计算方法为纯数学公式的求解，故所产生的误差非常小（ $< 10^{-13}$ ），说明模型求解的精确性非常高。

而对于 FY03、FY04……FY09 作为发射信号无人机的情况，讨论是相似的。这样，我们就确定了接受信号无人机的定位模型。

问题 1.2

在问题 1.2 中，我们需要求解为了定位其余无人机需要的发射信号无人机的数量。在定位过程中，我们仍然采取第一小问所用的方法。与第一问不同的是，无人机此时并不知道除 FY00、FY01 外发射信号无人机的编号。我们发现，除 FY00 和 FY01 外，圆周上仅需要一架发射信号无人机即可实现无人机的有效定位。

当某架无人机接受到三个角度信息时，我们可以枚举除 FY00、FY01 外第三架发射信号无人机的编号，并通过问题 1.1 的定位模型得到 7 个当前无人机位置的可能坐标。我们将枚举得到的可能位置距离其自身标准位置小于扰动半径 r 的位置视为无人机可能出现的位置。在本模型中假定 $r = 10\text{m}$ 。

此时，一个自然的问题是，无人机可能出现的位置是否有多种情况？例如，通过比较枚举得出的位置坐标后，无人机最终确定了两个点，这两个点与理想位置的距离都较小。在图 6（问题 1.2 可能出现的反例）中，标星号点为该无人机的实际位置，其余空心点为无人机枚举得到的坐标，此时无人机实际位置周围存在两个与之距离相近的枚举点，因而无法确定无人机的准确位置。

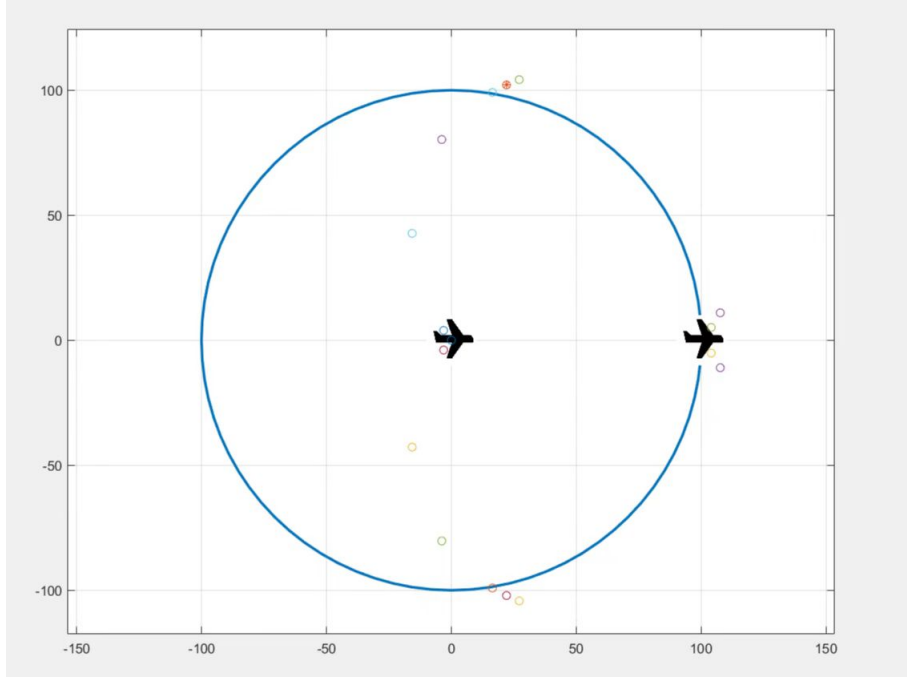


图 6 问题 1.2 可能出现的反例

接下来我们利用反证法，证明仅仅通过收到的三个角度信息，我们可以唯一确定出第三架发射无人机的编号，从而在理论上否定上述情形发生的可能。假设某接收信号无人机（FY0x）判定第三架发射信号无人机的编号有两种可能，不妨设作 FY0a 与 FY0b，其中 $2 \leq x, a, b \leq 9$ ， x, a, b 互不相等。我们用 $\angle xyz$ 表示无人机 FY0x 与 FY0y 连线和 FY0z 与 FY0y 连线所构成的夹角大小。

通过以上假设可知，该无人机接收到的三个角度信息 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 对应于 $\angle ax1, \angle ax0, \angle 0x1$ ，也同样对应于 $\angle bx1, \angle bx0, \angle 0x1$ 。注意到这两组角中 $\angle 0x1$ 相同，因此只需分两种情况讨论即可，即：

$$\begin{cases} \angle ax1 = \angle bx1 \\ \angle ax0 = \angle bx0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \angle ax1 = \angle bx0 \\ \angle ax0 = \angle bx1 \end{cases} \quad (5)$$

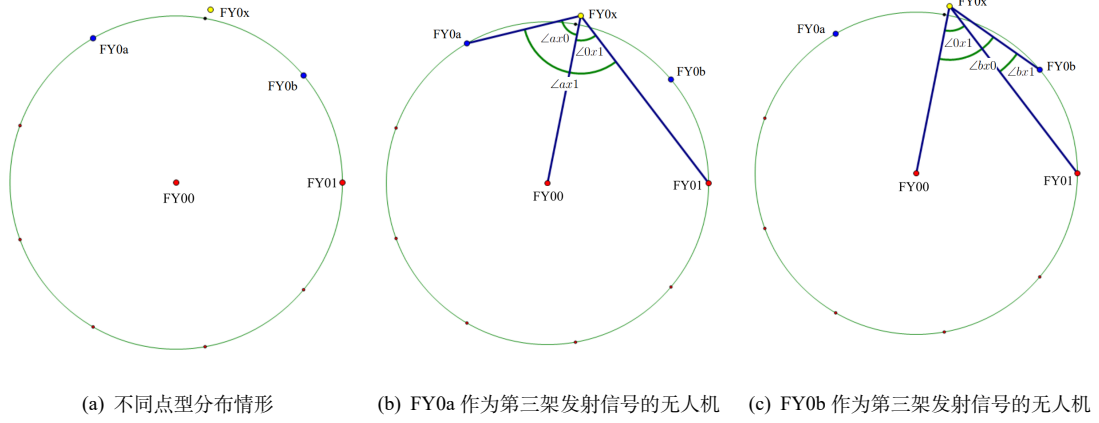


图 7 各点及角度分部图示

第一种情况 $\angle ax1 = \angle bx1$, $\angle ax0 = \angle bx0$ 。由于 FY0x 与理想位置偏差较小，不妨设 FY0x 无人机此时正处于理想位置上。由于 FY00 为圆周的圆心，因此根据 $\angle ax0 = \angle bx0$ 可以得知 FY0a 与 FY0b 在圆周上关于 FY0x 对称，即：

$$a + b \equiv 2x \pmod{9} \quad (6)$$

由于 $\angle ax1$ 与 $\angle bx1$ 分别为圆周上圆弧 $\widehat{a1}$ 与 $\widehat{b1}$ 的圆周角，因此 FY0a 与 FY0b 在圆周上关于 FY01 对称，即：

$$a + b \equiv 11 \pmod{9} \quad (7)$$

联立 (6) 式和 (7) 式知：

$$2x \equiv 11 \pmod{9} \quad (8)$$

x 在限定条件下无解。

类似地，对于第二种情况 $\angle ax1 = \angle bx0$, $\angle ax0 = \angle bx1$ 。也可以通过类似的方法进行推断，发现这种情况也不存在。于是我们便从理论上证明了，通过上述枚举第三架发射信号无人机的方法，接收信号的无人机 FY0x 可以唯一确定第三架发射信号无人机的编号。

因此，我们可以通过枚举找到第三架无人机的编号。根据已知的三架定位无人机的编号，我们可以通过问题 1.1 的**已知定位无人机和夹角的无源定位模型**直接解出需定位无人机的坐标。

最后，我们通过编程代码的具体实现来验证模型的可行性。我们先对若干无人机随机进行坐标上的微小扰动。然后随机选择一架除 FY00 及 FY01 以外的无人机发射信号，使接收信号的无人机收到三个角度信息（弧度制），并据此枚举所有发射信号无人机的

编号可能，并按照上述方法选择出唯一一个可能编号的无人机。部分数据如下（全部数据参见附录 A）：

表 2 问题 1.2 的模型验证

x	y	角度信息 1	角度信息 2	角度信息 3	枚举得到的无人机编号	实际发射信号的无人机编号	接收信号的无人机编号
-47.64	92.59	0.53	0.87	0.34	2	2	4
-45.67	-85.50	0.55	1.25	1.80	6	6	7
79.09	65.01	1.19	0.85	2.05	4	4	2
22.56	103.44	0.86	0.15	1.01	7	7	3

其中， x 和 y 为接收信号的无人机的实际坐标。由上述表格数据得知，上文中建立的模型确实可以帮助接收信号的无人机得出第三架发射信号的无人机的编号，且该编号是唯一的。

问题 1.3

在问题 1.3 中，由题设表格给出的数据可知 FY00 和 FY01 已经在圆周的理想位置上，因此我们始终固定这两架无人机的位置，我们通过不断变换第三架发射信号无人机的编号对整个编队的无人机进行调整。

由于无人机的位置偏差较小，收到的角度值总是约等于所有无人机在理想位置时该无人机应接收到的角度值，而无人机在理想位置应受到的角度是离散且均匀的，即 $\frac{k\pi}{9}$ ， $k \in \{1, 2, \dots, 8\}$ （发射信号无人机不包含 FY00）或 $\frac{(2k+1)\pi}{18}$ ， $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ （发射信号无人机包含 FY00）。我们记集合

$$A = \left\{ \frac{k\pi}{9} \mid 1 \leq k \leq 8, k \in \mathbb{Z} \right\}, B = \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{18} \mid 0 \leq k \leq 3, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (9)$$

接下来，我们建立了**基于角度匹配的无人机调整-反馈模型**。

首先，我们暂时固定无人机 FY02 的位置，并将其作为第三架发射信号无人机。其余每架无人机都可以接收到三个角度值，设为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。对于每个 α_i ，都可以在 $A \cup B$ 中找到一个角度 β_i 与之匹配，使得这两个角的差值最小，即 $|\alpha_i - \beta_i|$ 最小。因此 β_i 即为满足下列目标函数的角度值：

$$|\alpha_i - \beta_i| = \text{dist}(\alpha_i, A \cup B) \quad (10)$$

其中 $\text{dist}(\alpha_i, A \cup B) = \inf_{x \in A \cup B} |\alpha_i - x|$ 。

我们调整的目标是使每个 α_i 都尽可能接近 β_i 。为此，对于无人机每个可能出现的位置 (x, y) ，我们设立一个指标函数 $F(x, y)$ 来反应无人机位置偏移的大小。通过类比曼哈顿距离，我们设

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^3 \text{dist}(\alpha_i, A \cup B) \quad (11)$$

$F(x, y)$ 的大小可以用来衡量无人机方向信息偏移的多少。我们希望通过某种调整方案使某接收信息无人机的 F 值不断减小。当 $\alpha_i = \beta_i, \forall i \in \{1, 2, 3\}$ 时, $F = 0$, 角度完全匹配, 无人机回到一个相对更优的位置。

对于一架满足 $F > 0$ 的无人机, 我们进行如下的尝试-反馈-调整操作: 首先让无人机尝试往四个方向 (x 轴、y 轴的正方向和负方向) 移动相同的步长, 测量移动后的 F , 并马上回到原位。由于调整的次数越多, 无人机离理想位置更近, 试探需要更加精细, 也就是调整的步长越小, 因此我们使尝试的步长与 F 值的大小成正比, 设为 kF 。记调整前 F 的值为 F_0 。我们考虑

$$\min\{F((x, y) + kF_0\vec{d}), \vec{d} \in \{(-1, 0), (0, 1), (1, 0), (0, -1)\}\} \quad (12)$$

如果它的值小于 F_0 , 我们就进行一次移动。即找到使得 $(F((x, y) + kF(x, y)\vec{d}))$ 最小的 \vec{d} , 并将 $kF(x, y)\vec{d}$ 作为该次移动的向量。经过调试, 我们将 k 的值设为 10。我们将上述尝试-反馈-调整的步骤重复 2000 次, 以计算无人机更优的位置 (如果在 2000 次以内, 出现四个方向的尝试都使得 $F(x, y)$ 增大的情况, 调整就提前中止)。对于其他无人机, 操作是相同的。由此, 当除 FY00、FY01、FY02 三架无人机外的其他无人机完成了一次上述方式的调整后, 我们称完成了一次固定 FY02 的调整, 第一次调整后结果如下:

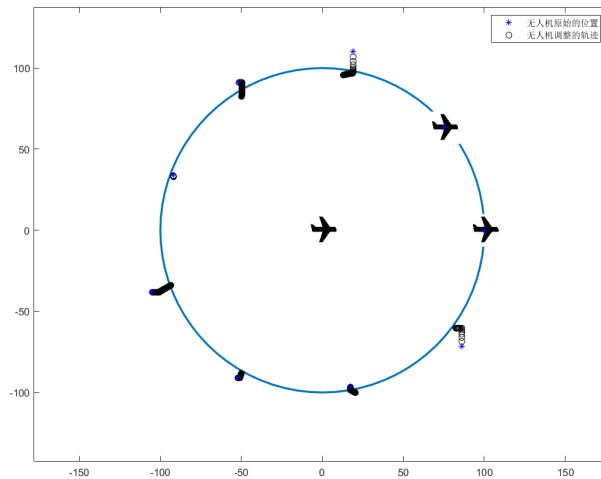


图 8 第一次固定 FY02 的调整

由于 FY02 未处于理想位置而发射了信号, 因此其余无人机经第一轮调整后的位置并不是真正的理想位置。为了衡量模型每一次模型调整的有效性, 我们定义第 t 次调整后无人机位置整体偏差 (er_t) 的计算公式如下:

$$er_t = \sum_{i=1}^9 (|x_{it} - x_{i0}| + |y_{it} - y_{i0}|) \quad (13)$$

其中 (x_{i0}, y_{i0}) 表示编号为 FY0i 的无人机的理想位置坐标; (x_{it}, y_{it}) 表示编号为 FY0i 的无人机的经过 t 轮调整后的位置坐标。通过测算第一次调整后无人机位置坐标的整体偏差 (er_1)，我们发现第一次无人机的位置确实离理想位置更近了。

具体数据如下：

表 3 第一次调整后圆周上无人机的位置坐标

调整量	FY01	FY02	FY03	FY04	FY05	FY06	FY07	FY08	FY09	偏差 (er_t)
一次调整后	(100.00, 0.00)	(74.96, 63.12)	(12.95, 95.69)	(-49.92, 82.53)	(-91.83, 32.98)	(-93.51, -33.94)	(-49.99, -88.15)	(20.43, -100.14)	(82.44, -60.37)	34.28
未调整	(100.00, 0.00)	(74.96, 63.12)	(19.04, 110.37)	(-52.10, 91.16)	(-92.01, 33.74)	(-105.27, -38.23)	(-52.39, -91.00)	(17.30, -96.46)	(86.15, -71.57)	66.48

因此，我们通过这种方式，逆时针依次交换固定的第三架发射信号的无人机，并同时让其他无人机做适当的调整，即依次完成固定 FY03 的调整、固定 FY04 的调整……直到圆周上除 FY00 与 FY01 外其他无人机都经过固定。我们称完成了这样的上述八次调整为一轮调整。经过三轮调整的调整后，无人机的位置已经非常接近它们的理想位置：

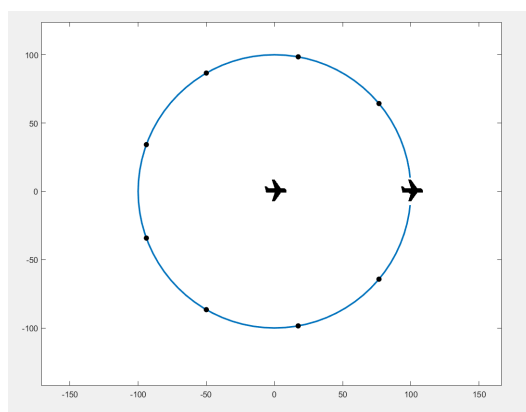


图 9 三轮调整后结果

三轮 ($3 \times 8 = 24$ 次) 调整后部分无人机位置坐标与其理想位置坐标的偏差数据如下 (全部数据参见附录 B)：

表 4 三轮调整后圆周上无人机的位置坐标

调整量	FY01	FY02	FY03	FY04	FY05	FY06	FY07	FY08	FY09	偏差 (er_t)
未调整	(100.00, 0.00)	(74.96, 63.12)	(19.04, 110.37)	(-52.10, 91.16)	(-92.01, 33.74)	(-105.27, -38.23)	(-52.39, -91.00)	(17.30, -96.46)	(86.15, -71.57)	66.48
一轮后	(100.00, 0.00)	(79.53, 62.46)	(22.77, 101.27)	(-49.83, 92.36)	(-98.00, 36.57)	(-96.55, -35.71)	(-50.02, -87.54)	(16.47, -97.95)	(74.65, -64.98)	34.38
二轮后	(100.00, 0.00)	(76.79, 64.17)	(17.68, 98.66)	(-50.00, 86.94)	(-94.21, 34.34)	(-94.12, -34.29)	(-50.00, -86.66)	(17.30, -98.45)	(76.49, -64.32)	2.06
三轮后	(100.00, 0.00)	(76.61, 64.28)	(17.37, 98.48)	(-50.00, 86.60)	(-93.97, 34.20)	(-93.97, -34.20)	(-50.00, -86.60)	(17.36, -98.48)	(76.60, -64.28)	0.01
理想位置	(0.00, 100.00)	(64.28, 76.60)	(98.48, 17.36)	(86.60, -50.00)	(34.20, -93.97)	(-34.20, -93.97)	(-86.60, -50.00)	(-98.48, 17.36)	(-64.28, 76.60)	0

24 次调整的过程中，每次调整后的偏差数据 er_t 的变化曲线如下：

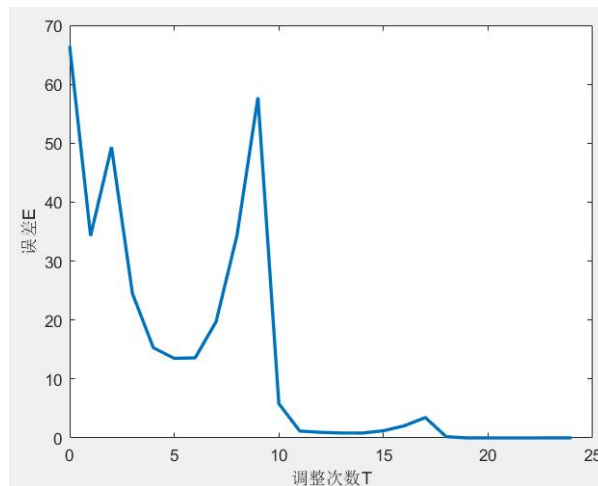


图 10 偏差折线图

我们发现这张折线图中，偏差数据并不是单调递减的，折线图中存在有多个峰值。这是因为在某些时刻，除 FY00 与 FY01 外固定的发射信号无人机离自身的理想位置距离较远。具体而言，以第 9 次调整为例，此时编队正好完成第一轮的调整。FY02 本来的位置离理想位置较近，但通过一轮调整后其位置距离其理想位置的距离有所增大。因此，在第 9 次调整后无人机总体远离了理想位置，从而引起了偏差的增大。类似地，在第二轮调整后的第 17 次也出现了峰值。

然而，如果经过若干轮调整后有一架非常靠近理想位置的无人机作为固定的发射信号无人机，其他无人机调整后就会离理想位置非常接近，从而使误差 er_t 大幅减小。而且，此次调整保证后序作为固定发射信号无人机的位置非常接近理想位置，因而误差 er_t 减小之后几乎不会再出现变大的情形，因此该调整的 er_t 的减小是**不可逆转的**。所以这样调整下去，最终容易飞机的位置十分容易收敛到理想位置。通过多轮调整，编队中所有飞机最终都能够收敛到理想位置。

接下来，我们将模型推广至无人机初始位置随机的情形，以测试模型的可拓展性。我们通过随机改变无人机的初始位置坐标（不改变 FY00 与 FY01 坐标），其余无人机在以各自理想位置为圆心，半径为 $r = 10\text{m}$ 的圆内的随机位置。我们一共进行了 10 组测试，其中 3 次测试无人机初始位置图、偏差折线图如下：

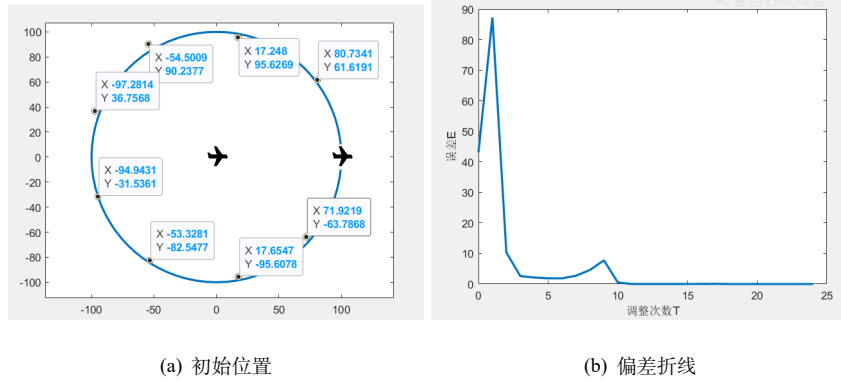


图 11 问题 1.3 测试 1

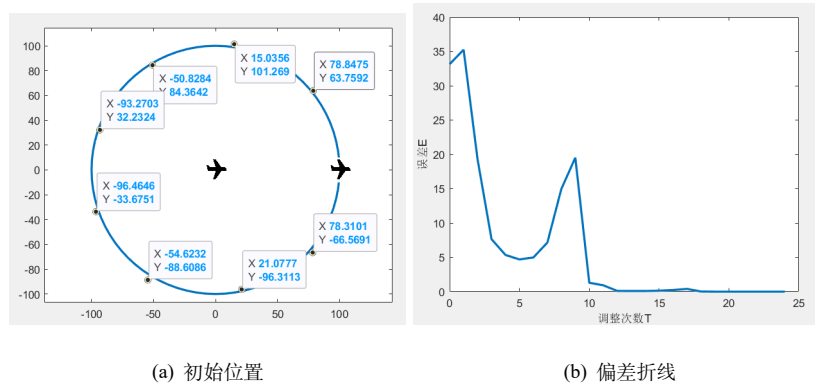


图 12 问题 1.3 测试 2

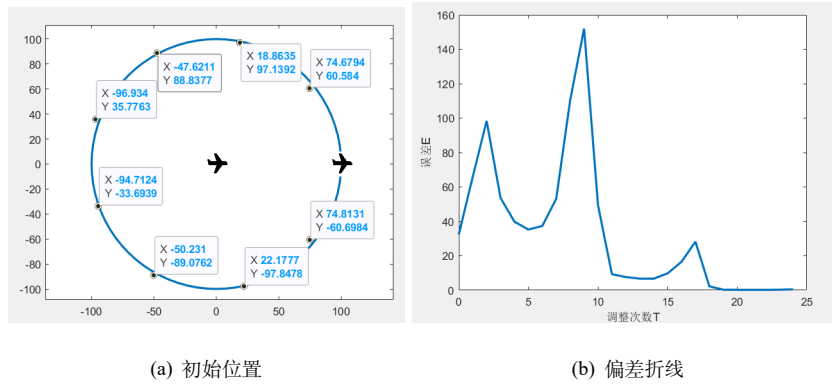


图 13 问题 1.3 测试 3

程序运行结果显示，无人机位置的偏差 (er_t) 在经过 3 轮 (24 次) 调整后收敛到 10^{-4}m 以下。此时可以认为每架无人机都回到了理想位置。这说明我们调整模型的收敛性非常优秀，能够在较短的时间内完成对无人机的调整。

5.2 问题 2

在问题 1 中，我们使用的是固定一个圆心（FY00）和一条半径（FY00 与 FY01 的连线）的方法构建的模型。在锥形编队中，我们也希望运用此模型来实现编队中无人机的定位与调整。

注意到，在问题 2 中，编队经过扰动后其相邻两架无人机的距离（下文称作**边长**）均与预先的边长不同，无法将其全部调整为预先确定的边长。因此，我们调整的目标应该为，将受扰动后的锥形无人机编队调整为边长尽可能相等、但可能与预先的边长不同的锥形编队。为进一步简化模型，我们假设 FY08 与 FY09 的连线边长为 50m，以 FY08 作为原点，FY08 与 FY09 作为 y 轴负方向建立直角坐标系。同时我们以 FY08、FY09 的位置为基准，计算出其余点的理想位置：

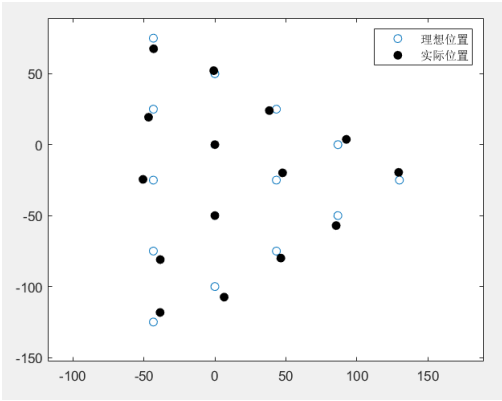


图 14 所有点的理想位置与实际位置示意

在问题 2 中，我们在问题 1.3 的基础上，建立了**多圆周调整模型**，通过多次选取不同的圆心、半径和发射信号的无人机，分批次调整处于不同位置的无人机。第一步我们选定 **FY08 作为圆心**，FY08 与 FY09 的连线作为圆周的半径（即**固定 FY08、FY09**），调整位于该圆周上的 FY04、FY05、FY07、FY12、FY13 五个点的位置。

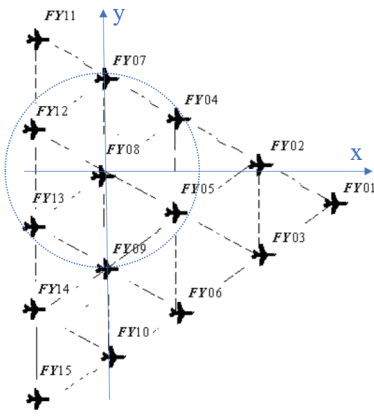


图 15 第一步调整圆周示意

同时，我们需要更改问题 1.3 模型中集合 A 与 B 的值：

$$A = \left\{ \frac{k\pi}{6} \mid 0 \leq k \leq 6, k \in \mathbb{Z} \right\}, B = \left\{ \frac{k\pi}{6} \mid 0 \leq k \leq 6, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (14)$$

可见，此时 A 与 B 为同一个集合。

另外，问题 2 中的偏差 er_t 计算公式如下（ t 表示调整的次数）：

$$er_t = \sum_{i=1}^{15} (|x_i - x_{i0}| + |y_i - y_{i0}|) \quad (15)$$

经过调整，调整后该圆周上每个点的位置信息与偏差（ er_t ）数据趋势如下（黑点表示调整前各点的初始位置，蓝点表示调整后的位置）：

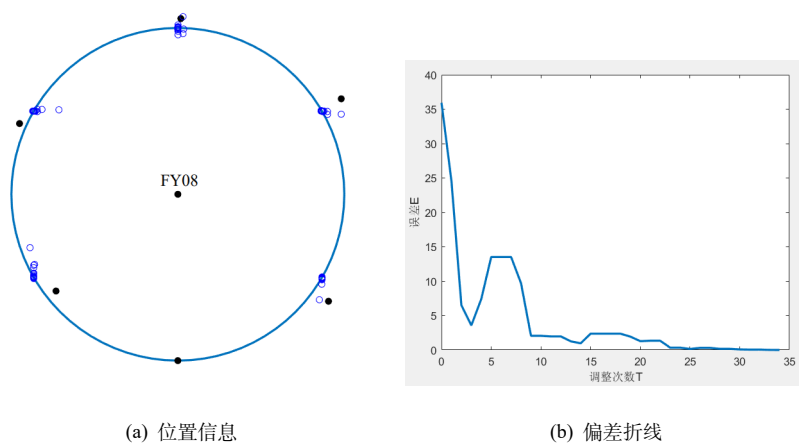


图 16 以 FY08 为圆心的圆周调整

类似地，第二步我们选定 FY09 作为圆心，FY09 与 FY08 的连线作为圆周半径，调整圆周上的其余五个点。同样，第三步中我们以 FY05 为圆心（此时 FY05 经过第一步和第二步的调整位置相对精确），FY08 与 FY05 的连线为半径，调整该圆周上的点。前三次调整中，调整圆的圆心、固定无人机和经过调整的点如下表：

表 5 三步调整后经过调整的点

调整步数	圆周圆心	第二架固定编号	调整编号 1	调整编号 2	调整编号 3	调整编号 4	调整编号 5
第一步	FY08	FY09	FY04	FY05	FY07	FY12	FY13
第二步	FY09	FY08	FY05	FY06	FY10	FY13	FY14
第三步	FY05	FY08	FY02	FY03	FY04	FY06	FY09

经过三步调整后，除 FY01、FY11、FY15 三架无人机外，其余无人机均已调整至较为理想的位置。因此在第四步中，只需充分利用其余无人机发射信号，调整锥形编队三

个角上的无人机即可。最终，我们选定位于锥形三边中点的无人机发射信号，即 FY04、FY06、FY13。以下是部分随机数据经过全部调整环节的效果图（经过多组随机数据测试）：

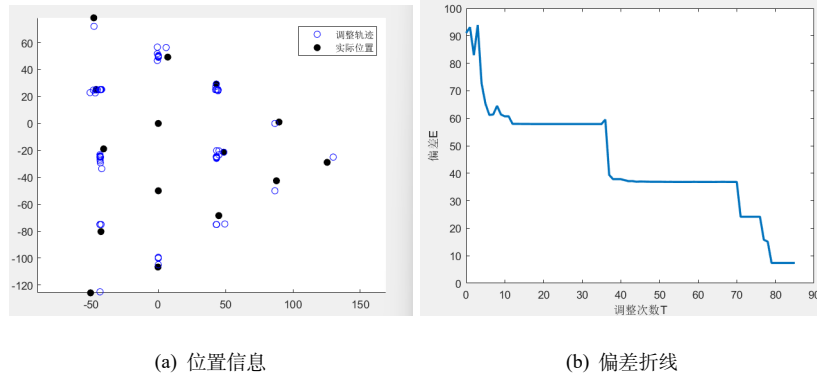


图 17 问题 2 测试 1

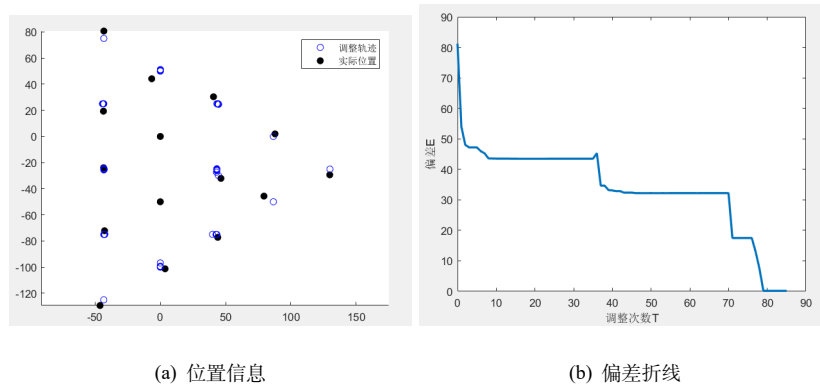


图 18 问题 2 测试 2

以测试 2 的偏差折线图为例进行分析。图中折线出现 4 次骤减，代表了上述 4 步无人机调整的过程，且每次调整都达到了我们逐渐减小 er_t 的目的；折线中还存在平缓区域，这意味着在某一步调整中，当前调整圆周上的每一架无人机都能收敛地调整到各自的理想位置。在经过模型 4 步的调整后，可以看出误差 er_t 确实往趋于 0 的较小水平收敛，表明无人机能够趋向它们各自的理想位置，这也验证了我们构建的定位调整模型的合理性。

由此，在仍考虑纯方位无源定位的情形下，我们设计出了一种可行的调整锥形编队无人机的方案。

六、灵敏度分析

在现实中，无人机接收到的方向角度信息可能出于种种原因而无法做到百分之百的精确。为了验证我们所建立模型的可靠性，我们选取问题 1.1 中的定位模型进行灵敏度分析，即将无人机接收到的角度信息予以一定程度（0.5%，1%，2%，3%，5%）的偏差，得到定位信息后，与其实位置进行比较，其中角度误差为 2% 的模型结果如下：

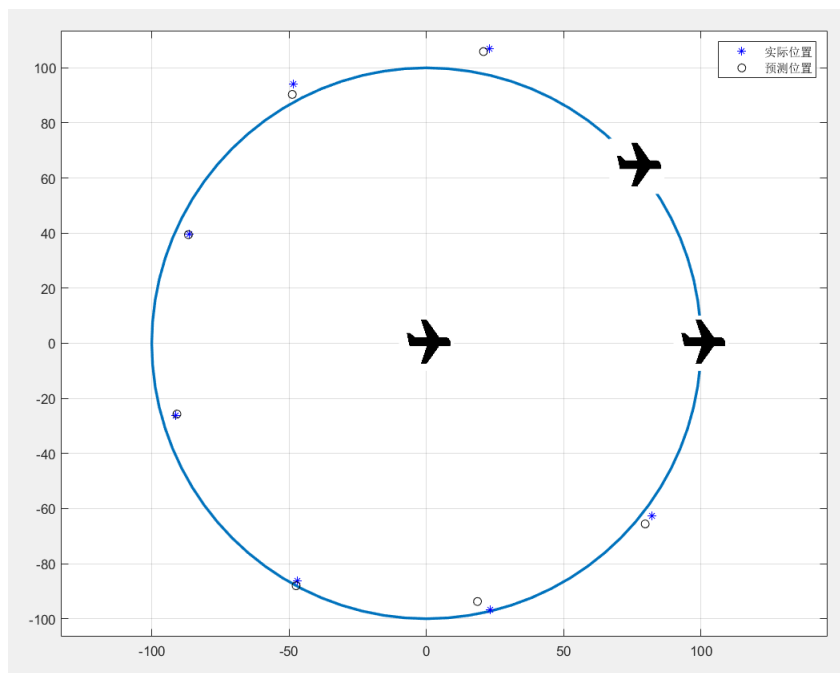


图 19 问题 1.1 定位误差示意图

我们进行了多次试验，每次的角度信息的偏差程度和平均定位偏差 Er 的平均值如下：

表 6 平均定位偏差和角度信息偏差的关系

角度信息偏差	平均定位偏差 (Er)
0.5%	0.96
1%	1.93
2%	3.84
3%	5.72
5%	9.41

我们发现平均定位偏差和角度信息的偏差程度基本呈成线性关系，所以本定位模型

的精准性线性依赖于测量角度的精准性，且当角度测量误差较小 ($< 0.5\%$) 时，模型定位误差能够控制地较为准确 ($Er < 1\text{m}$), 该分析对模型在实际当中的应用有一定参考价值。

七、模型评价

7.1 模型的优点

1. 问题 1.1 的无人机定位采用数学公式直接联立圆方程求解的方法，准确度高，时间复杂度低。
2. 问题 1.2 采用数学方法严格证明了仅用一架无人机的可行性。
3. 问题 1.3 中调整的方案在大多数情形下具有较好的收敛性和可拓展性，无论无人机初始位置如何，我们的调整最终都将无人机位置偏差控制在无人机间距的 10^{-4} 数量级。
4. 问题 2 中对问题 1.3 的模型进行了良好的优化。

7.2 模型的缺点与改进方案

1. 在调整无人机的位置时，采用贪心的思想，使得调整的过程可能陷入局部最优，使得所得解并非回到标准位置，尽管多次调整会减小陷入局部最优的可能，但是可以采用模拟退火、遗传等随机算法更大程度地避免出现陷入局部最优的情况。
2. 本文未将无人机调整时间考虑在限制因素内，所调整的方案并非实际中最快的调整方案。未来模型可以加入调整次数 t 作为评价模型的另一个指标。

附录 A 问题 1.2 模型完整数据

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	待测无人机横坐标x(m)	待测无人机纵坐标y(m)	收到角度α1(rad)	收到角度α2(rad)	收到角度α3(rad)	待测无人机的编号	预测发射信息的无人机编号	实际发射信息无人机编号
2	18.23198572	102.9724966	0.846359146	1.160662918	0.314303772	3	2	2
3	-47.63931755	92.59242169	0.535465761	0.871550146	0.336084385	4	2	2
4	-92.03409036	38.63316843	0.198903966	0.548350647	0.349446681	5	2	2
5	-89.56228058	-26.06397421	0.146554685	0.214790178	0.361344863	6	2	2
6	-43.95967444	-76.85079598	0.560861292	0.187386653	0.373474639	7	2	2
7	24.93288029	-92.05393258	0.948606933	0.583723847	0.364883086	8	2	2
8	82.55001555	-57.06293008	1.262736732	0.917005688	0.345731044	9	2	2
9	83.07416721	70.91147575	1.098525991	1.103833527	2.202359518	2	3	3
10	-44.46718299	86.65802104	0.556390706	1.285624058	0.729233352	4	3	3
11	-91.50573178	38.75574187	0.200950834	0.902386032	0.701435198	5	3	3
12	-89.47061503	-25.44115064	0.143563206	0.582268805	0.725832011	6	3	3
13	-46.16386724	-82.71931992	0.546776661	0.171815383	0.718592044	7	3	3
14	22.65104558	-92.84986534	0.933853171	0.211658022	0.722195149	8	3	3
15	85.30808858	-62.12950827	1.173538137	0.541128876	0.632409261	9	3	3
16	79.09452218	65.01747838	1.19386642	0.853696804	2.047563224	2	4	4
17	22.98826715	101.7944793	0.869778939	1.143479628	2.013258567	3	4	4
18	-92.55965226	35.51428176	0.183984988	1.242586701	1.058601713	5	4	4
19	-88.69053802	-24.68670563	0.141382002	0.964735108	1.10611711	6	4	4
20	-46.20667446	-82.18014966	0.54651669	0.534678544	1.081195234	7	4	4
21	24.48555611	-90.2314927	0.961820084	0.133679835	1.095499919	8	4	4
22	82.29715744	-56.84921431	1.268167629	0.221317056	1.046890573	9	4	4
23	84.99518262	67.4174825	1.119216741	0.487065745	1.606282487	2	5	5
24	19.85758686	104.4509764	0.842336399	0.82998537	1.672321769	3	5	5
25	-48.82988965	92.64717866	0.528939672	1.14269864	1.671638312	4	5	5
26	-86.40696328	-24.64613539	0.146400475	1.420746353	1.567146827	6	5	5
27	-44.34254868	-81.81823174	0.55846811	0.900843443	1.459311553	7	5	5
28	27.24015685	-93.65680202	0.943523907	0.47566536	1.419189267	8	5	5
29	83.12342103	-59.83711694	1.221767571	0.135778177	1.357545748	9	5	5
30	77.31557654	66.27803491	1.191878153	0.178155254	1.370033407	2	6	6
31	19.16191151	102.2353513	0.854327773	0.507002529	1.361330302	3	6	6
32	-46.84078778	93.48224481	0.53938226	0.818089697	1.357471956	4	6	6
33	-86.77690408	36.16285483	0.203599285	1.277809564	1.481408849	5	6	6
34	-45.67316607	-85.5046629	0.549417838	1.245821338	1.795239176	7	6	6
35	19.39158727	-94.56576914	0.908144587	0.879238709	1.787383296	8	6	6
36	86.11292453	-55.25178383	1.246575653	0.454099932	1.700675585	9	6	6
37	83.00923635	69.61851201	1.112284453	0.167592579	0.944691874	2	7	7
38	22.56056699	103.4380421	0.857383947	0.149989021	1.007372968	3	7	7
39	-43.21631964	89.91843249	0.562128618	0.48643223	1.048560848	4	7	7
40	-93.77058059	43.441811	0.21329534	0.81228431	1.025579649	5	7	7
41	-90.70671102	-30.50633993	0.16581391	1.26749108	1.101677169	6	7	7
42	23.33928902	-95.54246752	0.915775973	1.209906912	2.125682884	8	7	7
43	80.74324483	-63.45838138	1.199318313	0.841306289	2.040624601	9	7	7
44	84.72426151	74.04649123	1.055994964	0.480322443	0.575672521	2	8	8
45	23.60728462	105.6211443	0.846068894	0.189319394	0.6567495	3	8	8
46	-41.81877303	88.48422149	0.571471935	0.134929358	0.706401293	4	8	8
47	-88.55486661	43.94667693	0.231671953	0.470700643	0.702372595	5	8	8
48	-85.42493631	-29.71876441	0.175874566	0.924383927	0.748509361	6	8	8
49	-40.01858371	-78.93900658	0.588241971	1.429828721	0.84158675	7	8	8
50	86.23661427	-56.39819805	1.230979664	1.127666274	2.358645938	9	8	8
51	85.22544189	67.38505769	1.117611642	0.836387372	0.281224271	2	9	9
52	24.89379918	108.0714385	0.833737617	0.51788329	0.315854327	3	9	9
53	-49.72364366	91.32361802	0.524500999	0.183340492	0.341160508	4	9	9
54	-86.81735186	36.3569859	0.204376793	0.15537219	0.359748983	5	9	9
55	-85.36205633	-32.89483095	0.192185781	0.559215952	0.367030172	6	9	9
56	-41.8496622	-83.87515946	0.573992595	0.94403803	0.370045436	7	9	9
57	26.45590233	-94.62254481	0.93333808	1.299283547	0.365945466	8	9	9

图 20 问题 1.2 的模型验证

附录 B 问题 1.3 模型完整数据

调整次数	FY01纵坐标	FY02纵坐标	FY03纵坐标	FY04纵坐标	FY05纵坐标	FY06纵坐标	FY07纵坐标	FY08纵坐标	FY09纵坐标	FY01横坐标	FY02横坐标	FY03横坐标	FY04横坐标	FY05横坐标	FY06横坐标	FY07横坐标	FY08横坐标	FY09横坐标	偏差
第1次	0.00	63.12	95.69	82.53	32.98	-33.94	-88.15	-100.14	-60.37	100.00	74.96	12.95	-49.92	-91.83	-93.51	-49.99	20.43	82.44	34.28
第2次	0.00	67.35	95.69	83.63	34.04	-35.46	-91.73	-101.69	-59.74	100.00	70.39	12.95	-49.96	-93.69	-96.13	-49.87	23.69	83.25	49.33
第3次	0.00	67.35	96.72	83.63	33.09	-33.59	-86.55	-99.05	-63.13	100.00	72.21	14.49	-49.96	-92.03	-92.91	-50.00	18.37	78.50	24.50
第4次	0.00	65.00	97.47	84.37	33.09	-33.22	-85.13	-98.08	-64.28	100.00	75.32	15.67	-49.98	-92.03	-92.26	-49.99	16.68	76.60	15.30
第5次	0.00	64.28	98.13	85.30	33.34	-33.22	-84.63	-97.59	-64.92	100.00	76.60	16.76	-49.99	-92.46	-92.26	-49.98	15.87	75.47	13.50
第6次	0.00	63.53	98.86	86.58	33.80	-33.47	-84.63	-97.33	-64.98	100.00	77.87	18.03	-50.00	-93.27	-92.69	-49.98	15.44	75.00	13.58
第7次	0.00	62.46	99.93	88.83	34.78	-34.17	-85.37	-97.33	-64.98	100.00	79.53	20.02	-49.98	-94.96	-93.92	-49.99	15.44	74.65	19.72
第8次	0.00	62.46	101.27	92.36	36.57	-35.71	-87.54	-97.95	-64.98	100.00	79.53	22.77	-49.83	-98.00	-96.55	-50.02	16.47	74.65	34.38
第9次	0.00	62.46	98.30	82.67	30.87	-29.92	-76.73	-92.84	-65.38	100.00	79.53	17.06	-49.92	-88.04	-86.28	-49.51	9.13	74.65	57.77
第10次	0.00	62.46	98.30	86.41	34.20	-34.30	-86.96	-98.72	-64.01	100.00	77.93	17.06	-50.00	-93.97	-94.13	-50.00	17.78	77.07	5.81
第11次	0.00	64.23	98.37	86.41	34.13	-34.16	-86.60	-98.52	-64.21	100.00	76.56	17.18	-50.00	-93.85	-93.90	-50.00	17.43	76.73	1.17
第12次	0.00	64.32	98.42	86.46	34.13	-34.14	-86.51	-98.46	-64.28	100.00	76.53	17.26	-50.00	-93.85	-93.86	-50.00	17.32	76.60	0.95
第13次	0.00	64.28	98.46	86.52	34.15	-34.14	-86.48	-98.43	-64.32	100.00	76.60	17.33	-50.00	-93.88	-93.86	-50.00	17.27	76.53	0.84
第14次	0.00	64.23	98.51	86.60	34.18	-34.16	-86.48	-98.41	-64.32	100.00	76.68	17.41	-50.00	-93.93	-93.89	-50.00	17.24	76.51	0.83
第15次	0.00	64.17	98.57	86.74	34.24	-34.20	-86.53	-98.41	-64.32	100.00	76.79	17.53	-50.00	-94.03	-93.97	-50.00	17.24	76.49	1.22
第16次	0.00	64.17	98.66	86.94	34.34	-34.29	-86.66	-98.45	-64.32	100.00	76.79	17.68	-50.00	-94.21	-94.12	-50.00	17.30	76.49	2.06
第17次	0.00	64.17	98.48	86.39	34.00	-33.93	-85.98	-98.17	-64.34	100.00	76.79	17.36	-50.00	-93.62	-93.50	-50.00	16.83	76.49	3.46
第18次	0.00	64.17	98.48	86.60	34.20	-34.20	-86.60	-98.48	-64.28	100.00	76.70	17.36	-50.00	-93.97	-93.97	-50.00	17.37	76.61	0.21
第19次	0.00	64.28	98.48	86.60	34.20	-34.20	-86.60	-98.48	-64.28	100.00	76.60	17.36	-50.00	-93.97	-93.97	-50.00	17.37	76.60	0.00
第20次	0.00	64.28	98.48	86.60	34.20	-34.20	-86.60	-98.48	-64.28	100.00	76.60	17.36	-50.00	-93.97	-93.97	-50.00	17.36	76.60	0.00
第21次	0.00	64.28	98.48	86.60	34.20	-34.20	-86.60	-98.48	-64.28	100.00	76.60	17.36	-50.00	-93.97	-93.97	-50.00	17.36	76.60	0.00
第22次	0.00	64.28	98.48	86.60	34.20	-34.20	-86.60	-98.48	-64.28	100.00	76.60	17.36	-50.00	-93.97	-93.97	-50.00	17.36	76.60	0.00
第23次	0.00	64.28	98.48	86.60	34.20	-34.20	-86.60	-98.48	-64.28	100.00	76.61	17.37	-50.00	-93.97	-93.97	-50.00	17.36	76.60	0.00
第24次	0.00	64.28	98.48	86.60	34.20	-34.20	-86.60	-98.48	-64.28	100.00	76.61	17.37	-50.00	-93.97	-93.97	-50.00	17.36	76.60	0.01
理想位置	0.00	64.28	98.48	86.60	34.20	-34.20	-86.60	-98.48	-64.28	100.00	76.60	17.36	-50.00	-93.97	-93.97	-50.00	17.36	76.60	

图 21 三轮调整过程中圆周上无人机的位置坐标

附录 C 文件清单

文件名	文件内容说明	文件类型
Question1_1.m	问题 1.1 的求解代码	MATLAB 可执行文件
Question1_2.m	问题 1.2 的求解代码	MATLAB 可执行文件
Question1_3.m	问题 1.3 的求解代码	MATLAB 可执行文件
Question2.m	问题 2 的求解代码	MATLAB 可执行文件
CalcAngle.m	用三个点计算夹角的函数	MATLAB 函数
CalcCenter.m	用两点和一夹角确定圆心的函数	MATLAB 函数
Locate.m	已知三点和两夹角的定位函数	MATLAB 函数
Q1.2data.xlsx	问题 1.2 的运行结果数据	Excel 工作表
Q1.3data.xlsx	问题 1.3 的运行结果数据	Excel 工作表

附录 D 参考文献

本文无参考文献，所有资料与数据来源于题目和 MATLAB 计算。