Advanced Algebra

songcd21

April 2024

1 重要概念与定理

特征值、特征向量、特征子空间、特征多项式（对于线性变化的良定义性），
Schur 引理，矩阵多项式与特征值多项式的关系几何重数，代数重数，几何重数与代数重数的关系
极小多项式，Cayley-Hamilton 定理，特征多项式
$\lambda-$ 矩阵，不变因子，行列式因子，有理标准型
初等因子，Jordan 标准型
循环子空间，根子空间，矩阵幂次与开根，矩阵函数，同时对角化

2 对角化

(白本 P287) 矩阵可对角化的等价条件：
(1) $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量;
(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值, 则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化;
(3) $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\mathbb{C}^n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间的直和;
(4) $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有完全的特征向量系, 即对 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, 其几何重数等于其代数重数;
(5) $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式无重根;
(6) $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 块都是一阶的 (或 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子都是一次多项式).

题 1：如果 n 阶方阵 A, B 满足 $AB = BA$，求证：A 与 B 有至少一个相同的特征向量。
题 2：如果 n 阶方阵矩阵 A, B 满足 $AB - BA = B$，求证：A 与 B 有至少一个相同的特征向量。
题 3：（重要定理，同时对角化）若 A, B 都可对角化且 $AB = BA$，则 A, B 可同时对角化.

题 4：考虑 $M_n(\mathbb{C})$ 上的线性变换 $\varphi(X)=AX+XA$ 。若 A 可对角化, 证明 φ 可对角化 (视为 n^2 维矩阵).
证明：仅需验证 $\varphi_1(X)=AX$ 与 $\varphi_2(X)=XA$ 都可对角化, 而它们又可交换, 所以可同时对角化, 从而 $\varphi(X)=AX+XA$ 可对角化。注意 A 的极小多项式与 φ_1,φ_2 都相同, 故 A 可对角化等价于极小多项式无重根等价于 φ_1,φ_2 均可对角化。
题 5：若 A 可逆, 则存在多项式 $f(x)$ 使得 $f(A)=A^{-1}$, 并找到所有这样的多项式。
证明：可逆矩阵的任意化零多项式常数项非 0 , 所以任取一个化零多项式

$$g(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

有 $g(A)=O$, 从而

$$A^{-1}=\frac{-1}{a_0}\left(A^{n-1}+\cdots+a_1I_n\right)=f(A)$$

可表示成多项式。如果找到一个这样的多项式 $f(x)$, 那么自然形如 $f(x)+$ $m_A(x)\varphi(x)$ 的多项式都满足条件, 而且也只有它们满足条件, 否则有 $f_1(x)-$ $f_2(x)$ 相差不是一个化零多项式 (极小多项式的倍式), $f_1(A)\neq f_2(A)$ 都表示 A^{-1}, 与逆的唯一性矛盾。

题 6：设 $A\in M_n(F)$ 且 $m(x)$ 是 A 的最小多项式, $f(x)\in F[x]$. 求证: $f(A)$ 可逆当且仅当 $(f(x),m(x))=1$.
证明: $\Rightarrow$: (反证) 令 $d(x)=(f(x),m(x)), f(x)=d(x)f_1(x), m(x)=d(x)m_1(x)$. 因为 $f(A)=d(A)f_1(A)$ 可逆, 所以 $d(A)$ 可逆. 因为 $m(x)$ 是 A 的最小多项式, 所以 $m(A)=d(A)m_1(A)=0$. 又因为 $d(A)$ 可逆, 所以 $m_1(A)=d(A)^{-1}m(A)=0$. 若 $\deg d(x)\geq 1$, 则 $\deg m_1(x)=\deg m(x)-$ $\deg d(x)<\deg m(x)$, 而 $m_1(x)$ 又是 A 的零化多项式, 这与 $m(x)$ 是 A 的最小多项式矛盾. 所以 $d(x)=1$.
$\Leftarrow$：若 $(f(x),m(x))=1$, 则存在 $u(x),v(x)\in F[x]$ 使得 $f(x)u(x)+m(x)v(x)=1$. 代人 $x=A$ 有 $f(A)u(A)+m(A)v(A)=I_n$. 因为 $m(A)=0$, 所以 $f(A)u(A)=I_n$, 所以 $f(A)$ 可逆.
证法 2: 若 A 的全部特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, 则 $f(A)$ 的全部特征值为 $f(\lambda_1), f(\lambda_2),\ldots,f(\lambda_n)$. 因为 $\det f(A)=f(\lambda_1)\cdots f(\lambda_n)$, 所以 $f(A)$ 可逆当且仅当 $f(\lambda_i)\neq 0,\forall i, 1\leq i\leq n$. 因为 $m(x)$ 的根 (在不计重数意义下) 就是 A 的 (两两不同的) 特征值, 所以 $f(\lambda_i)\neq 0,\forall i\Leftrightarrow f(x)$ 和 $m(x)$ 没有公共根 $\Leftrightarrow f(x)$ 与 $m(x)$ 互素.

3 矩阵的幂次

设 $A\in M_n(F)$. 证明以下条件等价
(1) 存在 $k\geq 1$ 使 $A^k=0$.
(2) A 在 $\bar{F}$ 中的特征值只有 0.

(3) $\chi_A(x) = x^n$.
(4) 存在 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使 $P^{-1}AP$ 是严格上三角阵 (i.e. 对角线全为 0 的上三角阵)。
(5) $A^n = 0$
满足上述条件的矩阵 A 称为幂零阵。

题 1：设 $N \in M_n(F)$ 满足 $N^n = 0$ 但是 $N^{n-1} \neq 0$, 这里 $n \geq 2$. 证明：不存在 $A \in M_n(F)$ 使 $A^2 = N$.
题 2：设 $A \in M_2(\mathbb{Z})$, 且存在 n 使得 $A^n = I_2$, 求证：$A^{12} = I_2$
证：由 $A^n = I$ 知道 A 的任一复特征值 λ 满足 $\lambda^n = 1$, 特别的 $|\lambda| = 1$. 又由 $A \in M_2(\mathbb{Z}) \subseteq M_2(\mathbb{R})$ 知道 A 的复特征值以共轭对出现。所以 A 的复特征值 λ_1, λ_2 有以下几种可能:
(1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. 这时 $A = I$ 或 $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix}$. 若是前者, 则 $A^1 = I$. 若是后者, 则 $A^n \sim \begin{bmatrix} 1 & n \\ & 1 \end{bmatrix}$, 与 $A^n = I$ 矛盾。
(2) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. 这时 $A = -I$ 或 $A \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{bmatrix}$. 若是前者, 则 $A^2 = I$. 若是后者, 则 $A^n \sim \begin{bmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} \\ & (-1)^n \end{bmatrix}$, 与 $A^n = I$ 矛盾。
(3) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. 这时 $A \sim \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$, 故 $A^2 \sim \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$, 从而 $A^2 = I$.
(4) $\lambda_1 = e^{i\theta}, \lambda_2 = e^{-i\theta}, \sin\theta \neq 0$. 这时 $A \sim \begin{bmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta} \end{bmatrix}$. 由 $A \in M_2(\mathbb{Z})$ 知道 $\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{Z}$. 另一方面 $\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 2\cos\theta \in (-2, 2)$, 故 $\mathrm{Tr}(A) = -1, 0, 1$.
(4a) $\mathrm{Tr}(A) = -1, \cos\theta = -\frac{1}{2}, \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, A \sim \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi}{3}} & \\ & e^{-\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix}, A^3 \sim \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$, 故 $A^3 = I$
(4b) $\mathrm{Tr}(A) = 0, \cos\theta = 0, \lambda_{1,2} = \pm i, A \sim \begin{bmatrix} i & \\ & -i \end{bmatrix}, A^4 \sim \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$, 故 $A^4 = I$.
(4c) $\mathrm{Tr}(A) = 1, \cos\theta = \frac{1}{2}, \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, A \sim \begin{bmatrix} e^{\frac{\pi}{3}} & \\ & e^{-\frac{\pi}{3}} \end{bmatrix}, A^6 \sim \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$, 故 $A^6 = I$.
无论哪种情形都有 $A^{12} = I$.

题 3：求证：矩阵 A 幂零当且仅当 $Tr(A^k) = 0$ 对任意的 $k = 1, 2, 3, \cdots$ 都成立。
题 4：设 A 是 n 阶可逆复方阵, $k \geq 1$.
(1) 求证: 若 A^k 可对角化, 则 A 可对角化.
(2) 当 A 不可逆时, (1) 中的结论是否成立? 若成立, 请简单证明; 否则请给一个反例.

(1) 证明：设 $m_{A^k}(x), m_A(x)$ 分别为 A^k, A 的最小多项式．由 A^k 可对角化知 $m_{A^k}(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上无重根．那么可设 $m_{A^k}(x)=(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_s), \lambda_i, i=1,\ldots,s$, 为两两不同的复数．因为 A 可逆, 所以 A^k 可逆, 所以 $\lambda_i\neq 0, i=1,\ldots,s$．因为 $m_{A^k}\left(A^k\right)=0$, 所以 $m_{A^k}\left(x^k\right)=\left(x^k-\lambda_1\right)\cdots\left(x^k-\lambda_s\right)$ 是 A 的零化多项式, 所以 $m_A(x)\mid m_{A^k}\left(x^k\right)\cdot m_{A^k}\left(x^k\right)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有分解

$$m_{A^k}\left(x^k\right)=\prod_{i=1}^{s}\left(x^k-\lambda_i\right)=\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=0}^{k-1}\left(x-\sqrt[k]{|\lambda_i|}e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}j+\theta_i\sqrt{-1}}{k}}\right)$$

这里 $\theta_i=\arg\left(\lambda_i\right)$．将 $\sqrt[k]{|\lambda_i|}e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}j+\theta_i\sqrt{-1}}{k}}$ 记为 w_{ij}．对固定的 i, 当 $0\leq j\neq j'\leq k-1$ 时, 有 $w_{ij}\neq w_{ij'}$．对 $i\neq i', 0\leq j,j'\leq k-1$, 有 $\left(w_{ij}\right)^k=\lambda_i, \left(w_{i'j'}\right)^k=\lambda_{i'}$, 由 $\lambda_i\neq\lambda_{i'}$ 知 $w_{ij}\neq w_{i'j'}$. 所以 $m_{A^k}\left(x^k\right)$ 在 $\mathbb{C}$ 上无重根. 从而 $m_A(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上无重根, 故 A 可对角化.

(2) 当 A 不可逆时, (1) 中结论不成立．可举反例: $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, A^2=0$ 可对角化, 但 A 不行.

题 5：设 V 是一个 n 维的线性空间，ϕ 是 $V\to V$ 上的线性变换，ϕ 不幂零，求证：$V=\ker\phi^{n-1}\bigoplus Im\phi^{n-1}$

4 Jordan 标准形

题 1：设 A 是 n 阶可逆复方阵, 其 J ordan 标准形是 $\operatorname{diag}\left(J_{e_i}\left(\lambda_i\right): 1\leq i\leq N\right)$, 求 A^{-1} 和 A^2 的 Jordan 标准形。更一般的求 $A^k(k\geq 3)$ 的 Jordan 标准形。

题 2：求证：A 和 A^T 相似。

题 3：设 $A\in M_{2021}(\mathbb{R})$ 且

$$A^2=\begin{bmatrix}4&17&&&\\&4&17&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&4&17\\&&&&4\end{bmatrix}$$

证明：坐标向量 $e_1=(1,0,\ldots,0)$ 必是 A 的特征向量。

方法一：若 A 至少有两个 Jordan 块, 那么可以推出 A^2 也至少有两个 Jordan 块, 从而矛盾, 故 A 只有一个 Jordan 块。又因 A 的特征值只有可能是 2 或 -2 , 故 A 的 Jordan 标准型是 J_{2021} (2) 或 $J_{2021}(-2)$. 无论哪种情形, A 的特征向量在不计常数意义下唯一, 不妨设是 α, 那么 α 必也是 A^2 的特征向量。A^2 的特征向量只有 e_1 (在不计常数意义下), 故 $\alpha=ce_1$, $c\neq 0$, 故 $e_1=\frac{1}{c}\alpha$ 是 A 的特征向量。

方法二: A^2 只有一个不变因子 $(x-4)^{2021}$, 故 A^2 是循环矩阵; 又因 A 与 A^2 可交换, 故由作业题知 A 是 A^2 的多项式, 即存在 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ 使 $A=f\left(A^2\right)$. 显然 e_1 是 A^2 的特征向量, 所以 e_1 也是 $f\left(A^2\right)$ 的特征向量。

方法三: A 的特征值的平方必是 A^2 的特征值, 所以 A 的特征值只可能是 2 或 -2 . 两个都是实特征值, 故有相应的实特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 。又因 A 的实特征向量必是 A^2 的实特征向量, 而 A^2 的实特征向量只有 $ce_1, c\neq 0$, 故 $\alpha=ce_1$, 所以 $e_1=\frac{\alpha}{c}$ 是 A 的特征向量。

方法四: 注意到 $N\left(A^2-I\right)=\operatorname{Span}\left(e_1\right)$ 且 $N\left(A^2-I\right)$ 是 A-不变的, 故 $Ae_1\in\operatorname{Span}\left(e_1\right)$.

错误方法一: 用级数解出 $A=\pm\sqrt{4I+17N}=\pm 2\sqrt{1+\frac{17}{4}N}=2\left(1+\frac{17}{8}N-\frac{1}{8}\frac{17^2}{4^2}N^2+\ldots\right)$ 是上三角阵, 故 e_1 是 A 的特征向量。错误原因: 需要证明满足条件的矩阵 A 只有这两个。类似错误证明还有: 因 A^2 是上三角阵, 故 A 也是上三角阵。还有: 存在可逆阵 P 使 $P^{-1}AP=J$, 因 e_1 是 J 的特征向量, 故 e_1 是 $A=PJP^{-1}$ 的特征向量。

题 4: 设 $A=\begin{bmatrix}3&-4&0&2\\4&-5&-2&4\\0&0&3&-2\\0&0&2&-1\end{bmatrix}\in M_4(\mathbb{C})$.

(1) 求 A 的特征多项式 $\chi_A(x)$, 极小多项式 $m_A(x)$, Jordan 标准型 J, 及可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=J$

(2) 是否存在 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{C}^4$ 使得 $\mathbb{C}^4=\operatorname{Span}\left(\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha}, A^2\boldsymbol{\alpha}, A^3\boldsymbol{\alpha}\right)$? 若存在, 写出所有满足条件的 $\boldsymbol{\alpha}$ 并说明理由。若不存在, 也说明你的理由。

解: (1) $\chi_A(x)=m_A(x)=(x+1)^2(x-1)^2, J=\operatorname{diag}\left(J_2(1), J_2(-1)\right)$ $A-I=\begin{bmatrix}2&-4&0&2\\4&-6&-2&4\\0&0&2&-2\\0&0&2&-2\end{bmatrix}$, $N(A-I)=\operatorname{Span}(1,1,1,1), (A-I)\boldsymbol{x}=(1,1,1,1)$ 的所有解是 $\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0\right)+(t,t,t,t)$. $A+I=\begin{bmatrix}4&-4&0&2\\4&-4&-2&4\\0&0&4&-2\\0&0&2&0\end{bmatrix}$. $N(A+I)=\operatorname{Span}(1,1,0,0), (A+I)x=(1,1,0,0)$ 的所有解是 $\left(\frac{1}{4},0,0,0\right)+(s,s,0,0)$. 综上可知 P 可取作形如

$$\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&1&\frac{1}{4}\\1&0&1&0\\1&\frac{1}{2}&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

(2) 这样的 α 存在, 因为 $\chi_A(x)=m_A(x)$, 且满足条件的 $\boldsymbol{\alpha}$ 必然形如 $\alpha_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, 其中 α_1 是根子空间 $N(A-I)^2$ 的循环向量, α_2 是根子空间 $N(A+I)^2$ 的循环向量。设 $\boldsymbol{\alpha}_1\in N(A-I)^2$, 则

α_1 是 $N(A-I)^2$ 的循环向量当且仅当 $\alpha_1 \notin N(A-I)$, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 形如 $(a,a,a,a)+(b,0,b,0)$, 其中 $b \neq 0$, 等价的写法是 (r,s,r,s), 其中 $r \neq s$. 同理 $N(A+I)^2$ 的循环向量形如 $(c,c,0,0)+(d,0,0,0)$, 其中 $d \neq 0$, 等价的写法是 $(t,u,0,0)$, 其中 $t \neq u$. 综上可知 A 的循环向量都形如 $(a+b+c+d, a+c, a+b, a)$ 其中 $b \neq 0$ 且 $d \neq 0$, 或 $(r+t, s+u, r, s)$, 其中 $r \neq s$ 且 $t \neq u$, 或 (x_1, x_2, x_3, x_4), 其中 $x_1 - x_3 \neq x_2 - x_4$ 且 $x_3 \neq x_4$.