清华大学 23-24 春季学期，新生数理基础大赛，非数学组试题 · 线性代数

为了保证您的解题体验，请仔细阅读以下内容：
1. 本次考试旨在引导同学们用已学的微积分和线性代数知识解决一些有挑战性的数学问题或者实际问题。
2. 本次考试某些小题会有提示，对你解题有所启发，但并不要求解法在考纲范围内，请不要被束缚住手脚。
3. 另外，考试题大多为具有多个小题的题目，允许后续题目直接使用前面题目的结论，即使前面有题目未完成。

希望这套试卷可以带给大家前所未有的数学竞赛体验，也预祝大家在这场比赛之中取得好成绩！

本次试题卷共有 A 组共四道小题，以及 B 组共五道小题。本次微积分、线性代数和物理组试题考试时间合计为三小时，线性代数部分总计 50 分

A. 热身小题 (17')

A1) (3') 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$r(A)$ 表示 A 的秩，求证：$r(AA^T)=r(A)$.

A2) (4') 若 A,B 是实对称阵且 $A^2+B^2=O$,O 是零矩阵，求证：$A=B=O$.

A3) (4') 若 A,B 均为 n 阶方阵，且满足 $r(A)+r(B)<n$, 求证：线性方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 有公共解.

A4) (6') 设 A 为一 n 阶实矩阵, $\mathbf{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_n)^T$ 为 $\mathbb{R}^n$ 到为 $\mathbb{R}^n$ 的映射, 满足 $\mathbf{f}'=A\mathbf{f}$. 设 n 阶矩阵

$$W=\begin{pmatrix} f_1 & f_1' & \cdots & f_1^{(n-1)} \\ f_2 & f_2' & \cdots & f_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n & f_n' & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

求证: $(\det W)'=-\operatorname{tr}A\cdot\det W$.

B. 矩阵的 Rayon 谱 (33')

对于矩阵 $A\in\mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ 我们记

$$N(A)=\max\left\{\|Ax\|_2,x\in\mathbb{C}^d,\|x\|_2\leqslant 1\right\}.$$

定义 A 的谱

$$\rho(A)=\max\{|\lambda|,\lambda\in\mathrm{Sp(A)}\}$$

其中 $\mathrm{Sp}(A)$ 指由 A 的全部特征值构成的集合.

B1) (2') 对于 $A,B\in\mathrm{M}_d(\mathbb{C})$, 求证：$N(AB)\leqslant N(A)N(B)$.

B2) (2') 对于 $A\in\mathrm{M}_d(\mathbb{C})$, 求证：$\rho(A)\leqslant N(A)$.

B3) (10') 在这个部分我们证明关于矩阵幂次极限的一个等价刻画的命题:

$$\rho(A)<1\iff A^n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

a. 求证: $A^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \rho(A) < 1$.

b. 求证：如果 $N(A) < 1$，那么 $A^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

c. 求证：若 T 是一个上三角矩阵且 $\rho(T) < 1$, 则存在可逆矩阵 U 使得 $N\left(U^{-1}TU\right) < 1$.

d. 证明原命题:$\rho(A) < 1 \Rightarrow A^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

B4) (5') 求证：对于任意矩阵 $A \in M_d(\mathbb{C})$ 有

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} N\left(A^n\right)^{1/n}.$$

提示：对于 $\varepsilon > 0$ 考虑 $\tilde{A} = A/(\rho(A) + \varepsilon)$.

B5) (14') 我们称实矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 非负，当且仅当 A 的每一项元素非负，即 $a_{ij} \geq 0, \forall 1 \leq i, j \leq n$.

a. 求证：对于非负实对称矩阵 A,

$$\rho(A) = \sup_{x\neq 0} \frac{x^{\mathrm{T}}Ax}{x^{\mathrm{T}}x}.$$

b. 对于非负实对称矩阵 A, 记 $d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$, 求证：

$$\rho(A) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d_i.$$

c. 我们考虑 A 是某个简单图的邻接矩阵的情况。具体地，如果非负矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足对于任意的 $i \neq j$, 都有 $a_{ij} \in \{0, 1\}, a_{ij} = a_{ji}$ 且 $a_{ii} = 0$, 则称矩阵 A 是“邻接矩阵”。求证：若 A 是“邻接矩阵”，则

$$\rho(A) \geq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d_i^2}.$$

d. 我们考虑 A 是某个马尔可夫链的转移矩阵的情况。具体地, 如果非负矩阵 A 满足 $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 1$, 则称 A 是一个“转移矩阵”。求证：若 A 是“转移矩阵”，则有 $\rho(A) = 1$.