ТЕОРИЯ

Основные понятия и определения теории графов

В рамках теории принятия решений исходным объектом анализа выступает множество альтернатив $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, подлежащих выбору или упорядочиванию по критерию предпочтения. Для формализации алгоритмов решения таких задач принято использовать граф $G = < A,\ \rho >$, где множество вершин графа соответствует множеству альтернатив $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, а множество дуг ρ представляет бинарное отношение, заданное на этом множестве.

Такое представление позволяет перейти от абстрактного множества альтернатив к строгой математической модели, где отношение предпочтения между элементами A выражается через структуру ориентированного графа. Вершины графа отображают сравниваемые альтернативы, а направленные дуги - существующие между ними отношения доминирования или предпочтения.

Замечу тот факт, что дуга $< a_i , a_j > \in \rho$ означает, что альтернатива a_i более предпочтительна, чем та же альтернатива a_j, если мы строим строгое ранжирование.

1. *Ориентированный граф* (*орграф*) $G = < A,\ \rho > -$ это упорядоченная пара, состоящая из конечного непустого множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ вершин графа и множества ρ дуг графа, где каждая дуга есть упорядоченная пара $< a_i , a_j >$ вершин из A.

В контексте теории графов приняты следующие стандартные определения. Для дуги $< a_i, a_j >$ вершина a_i называется началом дуги, a_j - концом дуги. При этом говорят, что дуга исходит из a_i и заходит в a_j. Дуга считается инцидентной обеим вершинам a_i и a_j, а сами эти вершины называются смежными. Вершина, не имеющая инцидентных дуг, называется изолированной. Специальный случай представляет дуга вида $< a_i, a_i >$, называемая петлей.

Образ Γa_i и прообраз $\Gamma^{-1} a_i$ вершины $a_i \in A$ определяются как:

$$\Gamma a_i = \{a_j \mid < a_i, a_j > \in \rho, a_j \in A\}$$

$$\Gamma^{-1} a_i = \{a_j \mid < a_j, a_i > \in \rho, a_j \in A\}$$

Аналогичные определения распространяются на образы и прообразы произвольных подмножеств вершин графа.

2. *Путь* – это последовательность дуг графа, такая что начало следующей дуги совпадает с концом предыдущей.
3. *Контур* – путь, у которого начало первой дуги совпадает с концом последней (замкнутый путь). Путь (контур) - простой, если все его дуги различны. Путь (контур) - элементарный, если все его вершины различны (в контуре - кроме первой и последней).
4. *Нагруженный орграф* – называется граф, у которого каждой дуге $< a_i , a_j > \in \rho$ ставится в соответствие действительное число $l_{ij} \geq 0$, называемое *весом* или *длинной дуги*.
5. *Матрица смежности* $R = ||r_{ij}||$ орграфа $G =< A, \rho >$ – квадратная матрица порядка n (n - число вершин графа) с элементами

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } \exists \text{ дуга } < ai , aj > \in \rho, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

6. *Матрица весов* $C = ||c_{ij}||$ это нагруженного орграфа $G = < A, \rho >$ – квадратная матрица порядка n (n - число вершин) с элементами

$$c_{ij} = \begin{cases} l_{ij}, \text{если } \exists < ai , aj > \in \rho, \\ \infty \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Ориентированный граф (орграф) служит наглядным представлением бинарного отношения. Для орграфа $G = \langle A, \rho \rangle$ множество дуг ρ соответствует бинарному отношению ρ, заданному на множестве вершин A. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие: каждому орграфу можно сопоставить бинарное отношение, и наоборот — любому бинарному отношению можно поставить в соответствие орграф. В дальнейшем свойства бинарных отношений будут рассматриваться одновременно как свойства соответствующего им орграфа.

7. *Упорядоченная пара* — совокупность двух элементов a_{i} и a_{j} (где $a_{\mathrm{i}}, a_{\mathrm{j}} \in A$), записываемая в фиксированном порядке как $< a_{\mathrm{i}}, a_{\mathrm{j}} >$. Две пары $< a_1, a_2 >$ и $< a_3, a_4 >$ считаются равными ($< a_1, a_2 > = < a_3, a_4 >$) тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия: $a_1 = a_3$ и $a_2 = a_4$.
8. *Бинарное отношение* — отношение ρ на множестве A, определяемое как множество упорядоченных пар элементов из A: $\rho = \{< a_i , a_j > | a_i, a_j \in A\}$. Тот факт, что элемент a_i находится в отношении ρ с элементом a_j будем обозначать $< a_i, a_j > \in \rho$ или $a_i \rho a_j$.
9. *Рефлексивное отношение* ρ на A – это отношение, для которого выполняется следующее условие $< a_i, a_i > \in \rho \ \forall a_i \in A$.
10. *Антирефлексивное отношение* — бинарное отношение ρ на множестве A, при котором для любого элемента $a_i \in A$ пара $< a_i, a_i >$ не принадлежит ρ.
11. *Симметричное отношение* — бинарное отношение ρ на множестве A, обладающее свойством: если $(a_i, a_j) \in \rho$, то обязательно $(a_j, a_i) \in$ ρ для любых $a_i, a_j \in A$. Формально: $\forall a_i, a_j \in A$: $(a_i, a_j) \in \rho \Rightarrow (a_j, a_i) \in \rho$.
12. *Антисимметричное отношение* — бинарное отношение ρ на множестве A, для которого выполняется: если одновременно $(a_i, a_j) \in \rho$ и $(a_j, a_i) \in \rho$, то $a_i = a_j$. Формально: $\forall a_i, a_j \in A$: $[(a_i, a_j) \in \rho \land (a_j, a_i) \in \rho] \Rightarrow a_i = a_j$.
13. *Асимметричное отношение* — бинарное отношение ρ на множестве A, при котором из $(a_i, a_j) \in \rho$ следует $(a_j, a_i) \notin \rho$ для любых $a_i, a_j \in A$. Формально: $\forall a_i, a_j \in A$: $(a_i, a_j) \in \rho \Rightarrow (a_j, a_i) \notin \rho$.
14. *Транзитивное отношение* — бинарное отношение ρ на множестве A, обладающее свойством: если $< a_i, a_j > \in \rho$ и $< a_j, a_k > \in \rho$, то обязательно $< a_i, a_k > \in \rho$ для любых $a_i, a_j, a_k \in A$.
15. *Транзитивное замыкание* — наименьшее по включению транзитивное отношение $Tr\rho$ на множестве A, содержащее исходное отношение ρ.
16. *Отношение эквивалентности* — бинарное отношение на множестве A, обладающее тремя свойствами:

- $\forall a \in A: (a, a) \in \rho$ (рефлексивность)
- $\forall a, b \in A: (a, b) \in \rho \Rightarrow (b, a) \in \rho$ (симметричность)
- $\forall a, b, c \in A: [(a, b) \in \rho \land (b, c) \in \rho] \Rightarrow (a, c) \in \rho$ (транзитивность)

17. *Отношение частичного порядка* — бинарное отношение на множестве А, удовлетворяющее:
    - $\forall a \in A: (a, a) \in \rho$ (рефлексивность)
    - $\forall a, b \in A: [(a, b) \in \rho \land (b, a) \in \rho] \Rightarrow a = b$ (антисимметричность)
    - $\forall a, b, c \in A: [(a, b) \in \rho \land (b, c) \in \rho] \Rightarrow (a, c) \in \rho$ (транзитивность)
18. *Отношение линейного порядка* — отношение частичного порядка, дополнительно удовлетворяющее: $\forall a, b \in A: (a, b) \in \rho \lor (b, a) \in \rho$ (сравнимость всех элементов)
19. *Отношение строгого порядка* — бинарное отношение на множестве А, для которого:
    - $\forall a \in A: (a, a) \notin \rho$ (антирефлексивность)
    - $\forall a, b, c \in A: [(a, b) \in \rho \land (b, c) \in \rho] \Rightarrow (a, c) \in \rho$ (транзитивность)

Нетрудно доказать асимметричность данного отношения. Предположим противное: пусть существуют такие элементы $a_i, a_j \in A$, что одновременно выполняются $(a_i, a_j) \in \rho$ и $(a_j, a_i) \in \rho$. Тогда, в силу транзитивности отношения ρ, с необходимостью следует $(a_i, a_i) \in \rho$. Однако это противоречит условию антирефлексивности, согласно которому $(a_i, a_i) \notin \rho$ для любого $a_i \in A$. Полученное противоречие доказывает асимметричность отношения.

20. *Отношение строгого линейного порядка* — отношение строгого порядка на множестве А, для которого выполняется условие сравнимости всех элементов: $\forall a_i, a_j \in A\ (a_i, a_j) \in \rho \lor (a_j, a_i) \in \rho$.
21. *Отношение квазипорядка* — бинарное отношение на множестве А, удовлетворяющее:

- $\forall a \in A: (a, a) \in \rho$ (рефлексивность)
- $\forall a, b, c \in A: [(a, b) \in \rho \wedge (b, c) \in \rho] \Rightarrow (a, c) \in \rho$ (транзитивность)

Квазипорядок обобщает отношения частичного порядка и эквивалентности. Отношения частичного порядка и эквивалентности – частный случай квазипорядка.

22. *Полный квазипорядок* — отношение квазипорядка, для которого все элементы множества А попарно сравнимы: $\forall a_{\mathrm{i}}, a_{\mathrm{j}} \in A: (a_{\mathrm{i}}, a_{\mathrm{j}}) \in \rho \vee (a_{\mathrm{j}}, a_{\mathrm{i}}) \in \rho$.
23. *Ранжирование элементов множества* — задание на множестве А отношения полного порядка (линейного или строгого линейного).
24. *Обратное отношение* (ρ^{-1}) — для данного бинарного отношения ρ на множестве A определяется как множество всех пар $(a_{\mathrm{i}}, a_{\mathrm{j}})$, для которых $(a_{\mathrm{j}}, a_{\mathrm{i}}) \in \rho$. Формально: $\rho^{-1} = \{(a_{\mathrm{i}}, a_{\mathrm{j}}) \mid (a_{\mathrm{j}}, a_{\mathrm{i}}) \in \rho, \text{где } a_{\mathrm{i}}, a_{\mathrm{j}} \in A\}$
25. *Композиция отношений* ($\rho \circ q$) — бинарное отношение на A, состоящее из пар $(a_{\mathrm{i}}, a_{\mathrm{k}})$, для которых существует $a_{\mathrm{j}} \in A$ такое, что $(a_{\mathrm{i}}, a_{\mathrm{j}}) \in \rho$ и $(a_{\mathrm{j}}, a_{\mathrm{k}}) \in q$. Формально: $\rho \circ q = \{(a_{\mathrm{i}}, a_{\mathrm{k}}) \mid \exists a_{\mathrm{j}} \in A: (a_{\mathrm{i}}, a_{\mathrm{j}}) \in \rho \wedge (a_{\mathrm{j}}, a_{\mathrm{k}}) \in q\}$. Квадрат отношения ($\rho^2$) — частный случай композиции, где $\rho \circ \rho = \{(a_{\mathrm{i}}, a_{\mathrm{k}}) \mid \exists a_{\mathrm{j}} \in A: (a_{\mathrm{i}}, a_{\mathrm{j}}) \in \rho \wedge (a_{\mathrm{j}}, a_{\mathrm{k}}) \in \rho\}$.
26. *Класс эквивалентности* $[a_{\mathrm{i}}]_\rho$ — подмножество множества А, порожденное элементом $a_{\mathrm{i}} \in A$ относительно квазипорядка ρ, состоящее из всех элементов $a_{\mathrm{j}} \in A$, для которых одновременно выполняются $(a_{\mathrm{i}}, a_{\mathrm{j}}) \in \rho$ и $(a_{\mathrm{j}}, a_{\mathrm{i}}) \in \rho$. Формально: $[a_{\mathrm{i}}]_\rho = \{a_{\mathrm{j}} \mid (a_{\mathrm{i}}, a_{\mathrm{j}}) \in \rho \wedge (a_{\mathrm{j}}, a_{\mathrm{i}}) \in \rho, \text{где } a_{\mathrm{i}}, a_{\mathrm{j}} \in A\}$. Таким образом, классы эквивалентности отношения квазипорядка состоят из равноценных альтернатив.
27. *Разбиение множества* — совокупность k попарно непересекающихся непустых подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_{\mathrm{k}}$ множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{\mathrm{n}}\}$, удовлетворяющих условиям:
    - $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{\mathrm{k}}$ (объединение дает исходное множество)

- $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$ (подмножества не пересекаются)
- $\forall a \in A \, \exists! \, i: a \in A_i$ (каждый элемент принадлежит ровно одному подмножеству)

Формально:

$$A = \bigcup A_i, \text{где } i = 1\ldots k; \; A_i \cap A_j = \emptyset \text{ для всех } i \neq j \; (i, j = 1\ldots k)$$

28. *Симметричная часть отношения* ($Sym\rho$) — подмножество отношения ρ на A, содержащее все пары $(a\_i, a\_j) \in A \times A$, для которых одновременно $(a\_i, a\_j) \in \rho$ и $(a\_j, a\_i) \in \rho$. Асимметричная часть отношения ($As\rho$) определяется как $As\rho = \rho \setminus Sym\rho$. Отсюда следует разложение $\rho = Sym\rho \cup As\rho$, причем $Sym\rho = \rho \cap \rho^{-1}$.

В большинстве алгоритмов группового выбора профиль экспертных предпочтений формируется на основе ранжирования альтернатив. Однако при решении практических задач, особенно с большим количеством альтернатив или при оценке новых, недостаточно изученных вариантов, возникают сложности. Даже высококвалифицированные эксперты зачастую не способны провести попарное сравнение всех альтернатив и построить их строгое ранжирование. В таких условиях мажоритарный граф представляет собой практически единственный метод группового выбора, позволяющий агрегировать экспертные предпочтения, заданные в виде произвольных бинарных отношений.

Первоначально мажоритарный граф применялся для агрегации экспертных предпочтений, однако его использование может быть расширено на случай вербального описания попарных сравнений альтернатив по критериям качества. Данный метод обладает рядом существенных преимуществ перед другими подходами к групповому выбору, поскольку позволяет работать с произвольными бинарными отношениями.

Мажоритарный граф удовлетворяет ключевым требованиям теоремы Эрроу: универсальности, отсутствию диктатора, независимости от посторонних альтернатив, выполнению принципа Парето и монотонности. Кроме того, соответствующее ему отношение является наименее удалённым от исходных экспертных оценок. Однако его существенным недостатком является возможное отсутствие транзитивности, а также наличие противоречивых контуров, что осложняет процедуру выбора оптимальных альтернатив.

Пусть профиль экспертных предпочтений задан бинарными отношениями $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ на множестве альтернатив $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

29. *Мажоритарный граф* – это граф $G_\Sigma =< A, \rho_\Sigma >$, соответствующий агрегированному отношению ρ_Σ, построенному по правилу большинства. «Правило большинства» означает, что упорядоченная пара $< a_i, a_j >$ альтернатив из множества A принадлежит отношению ρ_Σ тогда и только тогда, когда она содержится не менее чем в половине экспертных отношений $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$. Таким образом, групповое решение, соответствующее классическому мажоритарному графу, отражает мнение большинства экспертов. Алгоритм построения мажоритарного графа основан на процедуре суммирования индивидуальных экспертных предпочтений и характеризуется вычислительной сложностью порядка $O(mn^2)$, где m –количество экспертов, а n – число альтернатив.

Пусть профиль экспертных отношений $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ задан матрицами смежности соответствующих орграфов: $R^1, R^2, \dots, R^m$. Тогда матрица смежности мажоритарного графа $G_\Sigma =< A, \rho_\Sigma >$ вычисляется следующим образом.

30. *Матрица суммарных предпочтений* – матрица, определяющаяся как

$$P^\Sigma = \sum_{k=1}^{m} R_k, \quad \text{где:}$$

- R_k — матрица предпочтений $k-$го эксперта,
- m — общее число экспертов.

31. *Матрица смежности графа* — квадратная бинарная матрица

$$R = \| a_{ij} \|$$

размера $n \times n$, где n — число вершин графа, элементы которой определяются следующим образом:

- $r_{ij} = 1$, если существует дуга из вершины v_i в вершину v_j,
- $r_{ij} = 0$ в противном случае.

Для неориентированного графа матрица симметрична ($r_{ij} = r_{ji}$), а диагональные элементы r_{ii} обычно полагаются равными 0 (если петли отсутствуют).

В случае взвешенного графа вместо бинарных значений используются веса соответствующих рёбер.

32. *Матрица смежности мажоритарного графа* – квадратная бинарная матрица размера $n \times n$, где n — число вершин графа, где элементы вычисляются следующим образом:

$$r_{ij}^{\Sigma} = \begin{cases} 1, \text{если } p_{ij}^{\Sigma} \geq \dfrac{m}{2}, \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$

33. *Расстояние Хэмминга между двумя отношениями ρ_k и ρ_t* – это величина $d(\rho_k, \rho_t)$, определяемая следующим образом:

$$d(\rho_k, \rho_t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| r_{ij}^k - r_{ij}^t \right|.$$

Расстояние $d(\rho_k, \rho_t)$ (или $d(R^k, R^t)$) показывает число несовпадений элементов r_{ij}^k и r_{ij}^t матриц смежности R^k и R^t соответствующих отношений ρ_k и ρ_t. Данное расстояние удовлетворяет аксиомам метрики.

1) $d(\rho_k, \rho_t) \geq 0$, причем $d(\rho_k, \rho_t) = 0$ тогда и только тогда, когда $\rho_k = \rho_t$;

2) $d(\rho_k, \rho_t) = d(\rho_t, \rho_k)$;

3) $d(\rho_k, \rho_s) + d(\rho_s, \rho_t) \geq d(\rho_k, \rho_t)$ для любых отношений ρ_k, ρ_s, ρ_t .

Для определения агрегированного отношения, наилучшим образом отражающего коллективные предпочтения экспертов, необходимо найти такое бинарное отношение $\hat{\rho}$, которое минимизирует суммарную метрическую удалённость от индивидуальных предпочтений $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ всех m-экспертов. Формально: $D(\hat{\rho}) = \sum_{t=1}^{m} \mathrm{d}(\hat{\rho}, \rho_t) \to \min$.

34. *Строгий нагруженный мажоритарный граф* – это ориентированный нагруженный граф $G_{\Sigma} =< A, \rho_{\Sigma} >$ с множеством вершин-альтернатив $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и дугами $\rho_{\Sigma} = \{< a_i, a_j > | a_i, a_j \in A \text{ и } l_{ij} > 0\}$, где $l_{ij} =$

$\sum_{k=1}^{m}(r_{ij}^{k} - r_{ji}^{k})$. Причем каждой дуге $< a_i, a_j > \in \rho_\Sigma$ поставим в соответствие вес l_{ij}. В этом определении r_{ij}^k и r_{ji}^k элементы матрицы смежности R^k отношения ρ_k, где $i, j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$. Вес дуги $< a_i, a_j > \in \rho_\Sigma$ равен числу экспертов, для которых альтернатива a_i не более предпочтительна, чем альтернатива a_j минус число экспертов, для которых альтернатива a_i не менее предпочтительна, чем альтернатива a_j ($i,j \in \{1, \dots, n\}$). Из определения следует, что отношение ρ_Σ асимметрично ($l_{ij} > 0$).

35. *Матрица весов мажоритарного графа* – квадратная матрица $\mathrm{C} = \| \mathrm{c}_{ij} \|$ размера $n \times n$, где n – число альтернатив, с элементами

$$c_{ij} = \begin{cases} l_{ij}, \text{если дуга} < a_i, a_j > \in \rho_\Sigma, \\ \infty, \text{иначе.} \end{cases}$$

Также легко можно построить матрицу весов мажоритарного графа с помощью матрицы суммарных предпочтений P_Σ следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} \rho_{ij}^{\Sigma} - \rho_{ji}^{\Sigma}, \text{если дуга} < a_i, a_j > \in \rho_\Sigma, \\ \infty, \text{иначе.} \end{cases}$$

36. *Нестрогий нагруженный мажоритарный граф* – это ориентированный нагруженный граф $G_\Sigma = < A, \rho_\Sigma >$ с множеством вершин-альтернатив $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и дугами $\rho_\Sigma = \{< a_i, a_j > | a_i, a_j \in A \text{ и } l_{ij} \geq 0\}$, где $l_{ij} = \sum_{k=1}^{m}(r_{ij}^{k} - r_{ji}^{k})$. При этом каждой дуге $< a_i, a_j > \in \rho_\Sigma$ ставится в соответствие вес l_{ij}. В нестрогом нагруженном мажоритарном графе допускается существование дуг с нулевым весом, которые отражают отношение равнозначности между альтернативами. Наличие таких дуг обеспечивает включение равноценных альтернатив в формируемое отношение квазипорядка, сохраняя при этом полноту представления исходных экспертных предпочтений.

Произвольное бинарное отношение $\rho \subseteq A \times A$ допускает представление в виде объединения симметричной и асимметричной компонент: $\rho = Sym\,\rho \cup As\,\rho$, где:

- Симметричная компонента $Sym\,\rho = \{(a_i, a_j) \in A^2 \mid (a_i, a_j) \in \rho \wedge (a_j, a_i) \in \rho\}$ характеризует отношение равнозначности между альтернативами;

- Асимметричная компонента $As\,\rho = \{(a_i, a_j) \in A^2 \mid (a_i, a_j) \in \rho \wedge (a_j, a_i) \notin \rho\}$ отражает строгое предпочтение a_j перед a_i.

Интерпретация:
Принадлежность пары (a_i, a_j) к $Sym\,\rho$ означает равнопредпочтительность альтернатив, тогда как включение в $As\,\rho$ свидетельствует о доминировании a_j над a_i.

37. *Противоречивое отношение* ρ – это отношение, которое содержит контуры.
38. *Гамильтонов путь* – это путь, который посещает каждую вершину графа ровно один раз. Возьмем в качестве дополнительного – условие, что Гамильтонов путь обладает максимальной длиной по сравнению со всеми Гамильтоновыми путями в данном графе, то есть, сумма весов дуг, из которых он состоит – максимальная из возможных.

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ГАМИЛЬТОНОВА ПУТИ МАКСИМАЛЬНОЙ ДЛИНЫ

Как и говорилось ранее, есть много методов ранжирования альтернатив максимально согласованного с предпочтениями экспертов. Но в основном они уступают данному алгоритму, который, в рамках этой квалификационной работы, был улучшен, реализован и визуализирован.

Достоинствами рассматриваемого метода ранжирования альтернатив с вводными предпочтениями экспертов - алгоритма нахождения Гамильтонова пути максимальной длины в ориентированном графе – является его лёгкость реализации, применение ориентированного графа, простота его математической части и вычислений, сравнение и выбор лучшего пути максимальной длины (если таких несколько), исключение контуров. При этом он не уступает по скорости работы другим алгоритмам нахождения Гамильтоновых путей орграфа. Работу этого алгоритма можно разбить на несколько этапов:

1. Задание профиля экспертных предпочтений
2. Построение нагруженного мажоритарного графа
3. Применение матричного алгоритма нахождения Гамильтоновых путей
4. Выбор пути максимальной длины

Идем по порядку: профиль экспертных предпочтений будем задавать строгими ранжированиями альтернатив – транзитивными и антирефлексивными отношениями, в которых все альтернативы попарно сравнимы. Полученную от экспертов информацию мы запишем в виде таблице.

Пример 1. Экспертов - 5, альтернативы - 4.

Таблица 2.1 - Предпочтения экспертов в первом примере

$\boldsymbol{\rho_1}$	$\boldsymbol{\rho_2}$	$\boldsymbol{\rho_3}$	$\boldsymbol{\rho_4}$	$\boldsymbol{\rho_5}$
$\boldsymbol{a_4}$	$\boldsymbol{a_4}$	$\boldsymbol{a_4}$	$\boldsymbol{a_1}$	$\boldsymbol{a_1}$
$\boldsymbol{a_3}$	$\boldsymbol{a_2}$	$\boldsymbol{a_3}$	$\boldsymbol{a_4}$	$\boldsymbol{a_4}$
$\boldsymbol{a_2}$	$\boldsymbol{a_3}$	$\boldsymbol{a_2}$	$\boldsymbol{a_3}$	$\boldsymbol{a_2}$
$\boldsymbol{a_1}$	$\boldsymbol{a_1}$	$\boldsymbol{a_1}$	$\boldsymbol{a_2}$	$\boldsymbol{a_3}$

Далее представляем их матрицами смежности соответствующих графов.

$$R^1 = R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ R^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Единица в элементе матрицы смежности r_{ij} означает, что a_i альтернатива строго предпочтительнее a_j.

Далее строится ориентированный граф $G_\Sigma =< A, \ \rho_\Sigma >$ с множеством вершин-альтернатив $A = \{a_1, \ a_2, \dots, a_n\}$.

Утверждение 1. Количество путей длины k из вершины a_i в a_j орграфа $G = < A, \rho >$ с матрицей смежности $R = ||r_{ij}||$ определяет элемент r_{ij}^k матрицы $R^k = || r_{ij}^k ||$. В этом утверждении при возведении в степень используется обычная алгебраическая операция умножения матриц.

Доказательство:

Для доказательства воспользуемся методом математической индукции по длине пути k.

1. Для $k = 1$ получаем просто матрицу смежности (в первой степени) $R = \left|\left|r_{ij}\right|\right|$.
2. Предположим, что справедливо: элемент r_{ij}^k матрицы $R^k = ||r_{ij}^k||$ определяет число путей длины k из вершины a_i в a_j (обозначим $-$ $\#P(a_i, a_j, k)$).
3. Докажем справедливость предположения для $k + 1$.

$$\#P(a_i, a_j, k + 1) = \#P(a_i, a_1, k)) \cdot \#P(a_1, a_j, 1) + \#P(a_i, a_2, k)) \cdot$$
$$\cdot \#P(a_2, a_j, 1) + \dots + \#P(a_i, a_n, k)) \cdot \#P(a_n, a_j, 1) =$$
$$= r_{i1}^k \cdot r_{1j}^1 + r_{i2}^k \cdot r_{2j}^1 + \dots + r_{in}^k \cdot r_{nj}^1 = r_{ij}^{k+1}. \blacksquare$$

Дуга $< a_i, a_j > \in \rho_\Sigma$ $(a_i, a_j \in A)$ тогда и только тогда, когда число экспертов, предпочитающих альтернативу a_i альтернативе a_j, не меньше числа экспертов, предпочитающих альтернативу a_j альтернативе a_i. Если потребовать, чтобы число экспертов было «строго больше», то в общем случае этот граф может не совпадать с мажоритарным. Граф G_Σ — нагруженный (см. рис. 2.1). Вес (длина) l_{ij} дуги $< a_i, a_j >$ равен числу экспертов, предпочитающих альтернативу a_i альтернативе a_j.

Находим матрицу суммарных предпочтений:

$$P_\Sigma = R^1 + R^2 + R^3 + R^4 + R^5.$$

$$P_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицы смежности и длин дуг. Так как число экспертов m равно 5 (значит $\frac{m}{2} = 2.5$), то тогда матрица смежности орграфа строится по такому принципу:

$$r_{ij}^{\Sigma} = \begin{cases} 1, \text{если } p_{ij}^{\Sigma} \geq 2.5, \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$

Получаем:

$$R_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицу длин дуг C строится следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} \rho_{ij}^{\Sigma} - \rho_{ji}^{\Sigma}, \text{если дуга} < a_i, a_j > \in \rho_{\Sigma}, \\ \infty, \text{иначе.} \end{cases}$$

Итого

$$C = \begin{pmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 1 & \infty & \infty \\ 1 & 5 & 5 & \infty \end{pmatrix}.$$

Получили орграф для данного примера (см. рис.1).

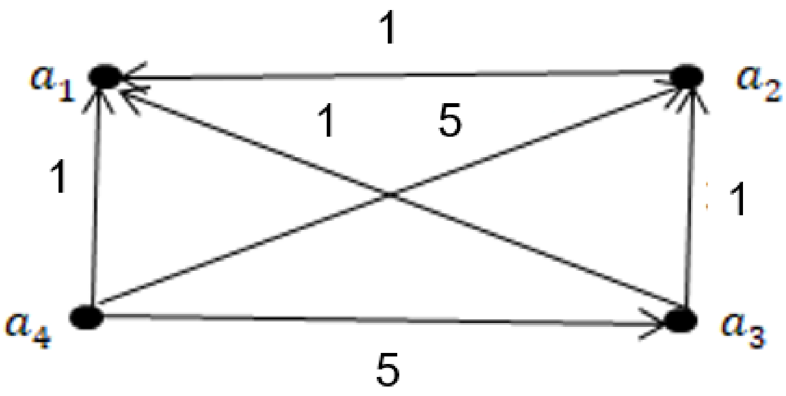

Рисунок 2.1 − Орграф в первом примере

Далее переходим к матричному алгоритму нахождения Гамильтоновых путей ориентированного графа.

Дано**:** матрица смежности R_Σ орграфа $G =< A,\ \rho >$.

1. Обозначим последовательно вершины $a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_n$ графа буквами $a,\ b,\ c,$ …. (чтобы не возникали дополнительные трудности с индексами). Выпишем вспомогательную матрицу H следующим образом: на место единиц в матрице смежности R напишем буквы, обозначающие вершины, причем в первом столбце - "a", во втором - " b", и т. д..
2. Положим $R_1 = R_\Sigma$.
3. Вычислим $R_2' = H \cdot R_1$ и $R_2 = F(R_2')$. В матрицах R_i' указаны промежуточные вершины путей длины $i = 2,\ .\ .\ ,\ n\ -\ 1$. Первая вершина добавляется в начало пути в соответствие со строкой матрицы, а последняя – в соответствии со столбцом. $F(R_i')$ − преобразование обнуления элементов матрицы R_i', если они соответствуют путям с повторяющимися вершинами, в частности, контурам. Поскольку все диагональные элементы соответствуют контурам, можно ставить нули ещё в матрицах R_i'.
4. Вычислим $R_3' = H \cdot R_2,\ \ R_3 = F(R_3'\ )$.

……………………

$(n-1)$. $R_{n-1}' = H \cdot R_{n-2},\ \ R_{n-1} = F(R_{n-1}'\ )$.

Если элементы матриц состоят из нескольких слагаемых, следовательно, существует несколько путей.

Обоснование алгоритма.

Алгоритм поиска Гамильтонова пути основан на стандартных методах нахождения Гамильтоновых циклов в ориентированных графах. По определению, Гамильтонов путь содержит ровно (n-1) дугу. Согласно утверждению описанному и доказанному выше, проверка существования такого пути требует возведения матрицы смежности R в (n-1)-ю степень, что и реализует данный алгоритм.

На начальном этапе в матрице смежности R_Σ единичные элементы заменяются буквенными обозначениями вершин: в первом столбце - "a", во втором - "b", и так далее для последующих столбцов. Затем итерационно вычисляются пути возрастающей длины (2, 3, ..., n-1) с обязательным условием отсутствия повторяющихся вершин. Поскольку алгоритм ориентирован на поиск именно Гамильтоновых путей, все элементы матрицы, соответствующие путям с повторяющимися вершинами (включая контуры), последовательно обнуляются в процессе вычислений. Такой подход гарантирует корректное определение искомого пути при соблюдении заданных ограничений. ■

Поэтапно применяем этот алгоритм на нашем примере:

$$R_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = R_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2' = H \cdot R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ b+c & c & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{F}(R_2') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ b+c & c & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_2$$

$$R_3' = H \cdot R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ b+c & c & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ cb & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{F}(R_3') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ cb & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_3$$

Единственный Гамильтонов путь: $\mathrm{d} - c - b - a$, с длиной 7. Соответствует строгому ранжированию альтернатив: $a_4 - a_3 - a_2 - a_1$. Это и есть искомый ответ!

В данном примере мы продемонстрировали работоспособность данного алгоритма. Но еще не использовали все его фишки. А именно его способность просто избавляться от контуров, которые могут изначально быть в орграфе, или появиться в ходе возведения в степень матрицы смежности. Для других алгоритмов эти контуры являются проблемой. Например, чтоб избежать этой проблемы Жан Антуан Кондорсе разработал алгоритм, построения агрегированного ранжирования, соответствующего пути максимальной длины в нагруженном орграфе. Наличие контура в графе асимметричного отношения свидетельствует о нарушении свойства транзитивности и указывает на внутреннюю противоречивость данного отношения. В соответствии с подходом Кондорсе, для устранения данной проблемы осуществляется декомпозиция контуров путем последовательного удаления "слабых звеньев" - дуг, обладающих минимальным весом. После устранения всех контурных зависимостей производится поиск линейного порядка альтернатив, соответствующего пути максимальной длины в полученном ациклическом графе. Стоит отметить, что если такой линейный порядок существует, то он является единственным решением поставленной задачи ранжирования.

Утверждение 2. Орграф без контуров содержит не более одного Гамильтонова пути.

Доказательство:

Доказательство проведем от противного. Предположим, что в ациклическом орграфе существуют два различных Гамильтонова пути:

$$P_1: a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \ldots \rightarrow a_{\mathrm{n}}$$

$$P_2: b_1 \rightarrow b_2 \rightarrow \ldots \rightarrow b_{\mathrm{n}}$$

Сравниваем вершины этих путей до первого несовпадения. Пусть k - первый индекс, где $a_{\mathrm{k}} \neq b_{\mathrm{k}}$. Тогда существует $l > 0$ такое, что $a_{\mathrm{k}} = b_{\mathrm{k+l}}$. Построим новый путь:

$$b_1 \rightarrow \ldots \rightarrow b_{\mathrm{k}} \rightarrow \ldots \rightarrow b_{k+l} (= a_{\mathrm{k}}) \rightarrow \ldots \rightarrow a_{\mathrm{n}}.$$

Длина этого пути: $(k + l) + (n - k) = n + l > n$. Следовательно, в пути есть повторяющиеся вершины, образующие контур, что противоречит ацикличности графа. Таким образом, Гамильтонов путь единственен. ■

2.1 Пример с несколькими Гамильтоновыми путями

Рассмотрим пример, в котором будет несколько Гамильтоновых путей и будут появляться контуры. Продемонстрируем, что наш алгоритм решает задачи с подобными усложнениями.

Пример 2. Экспертов - 5, альтернативы - 4. Контуры.

Пусть эксперты имеют следующие предпочтения:

Таблица 2.2 – Предпочтения экспертов во втором примере

ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5
a_4	a_2	a_3	a_1	a_2
a_1	a_3	a_1	a_4	a_4

$\boldsymbol{a_2}$	$\boldsymbol{a_4}$	$\boldsymbol{a_2}$	$\boldsymbol{a_3}$	$\boldsymbol{a_3}$
$\boldsymbol{a_3}$	$\boldsymbol{a_1}$	$\boldsymbol{a_4}$	$\boldsymbol{a_2}$	$\boldsymbol{a_1}$

Представляем их матрицами смежности соответствующих графов.

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу суммарных предпочтений:

$$P_\Sigma = R^1 + R^2 + R^3 + R^4 + R^5.$$

$$P_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицы смежности и длин дуг. Так как число экспертов m равно 5 (значит $\frac{m}{2} = 2.5$), то тогда матрица смежности орграфа будет следующая:

$$R_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица весов, или же длин дуг:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 1 \\ 1 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & 1 & \infty \end{pmatrix}.$$

Получили орграф для данного примера (см. рис.2).

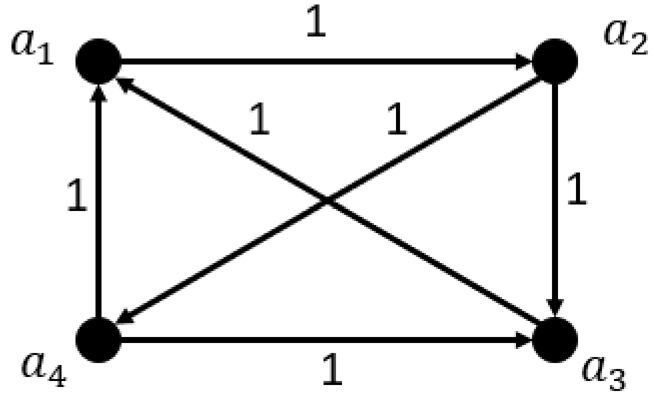

Рисунок 3.1 − Орграф для второго примера

Далее по алгоритму.

$$R_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow H = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ a & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & c & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = R_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2' = H \cdot R_1 = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ a & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & b \\ c+d & 0 & d & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ c & a & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{F}(R_2') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & b \\ c+d & 0 & d & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ c & a & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_2$$

$$R_3' = H \cdot R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & b \\ c+d & 0 & d & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ c & a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{b}c+bd & 0 & bd & 0 \\ dc & ca+da & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ab & ab \\ 0 & ca & ab & ab \end{pmatrix};$$

$$F(R_3') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & bd & 0 \\ dc & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ab \\ 0 & ca & ab & 0 \end{pmatrix} = R_3$$

Итого, алгоритм штатно избавился от петель, полученных при умножении матриц $H \cdot R_2$. В орграфе пять Гамильтоновых пути. Перечислим вершины этих путей, добавляя в начало вершину, соответствующую строке, а в конец - столбцу. Получим пути: $abdc, bdca, cabd, dcab, dabc$. Которые соответствуют путям

Первый путь $a_1a_2a_4a_3$ весом 3.

Второй путь $a_2a_4a_3a_1$ весом 3.

Третий путь $a_3a_1a_2a_4$ весом 3.

Четвертый путь $a_4a_3a_1a_2$ весом 3.

Пятый путь $a_4a_1a_2a_3$ весом 3.

Выбрать путь максимальной длины из них не получится, так как у них длина одинаковая. В таком случае нужно считать суммарное расстояние от отношения, основанного на рассматриваемом пути, до экспертных предпочтений.

Для данного примера отношениями являются последовательность вершин каждого Гамильтонова пути (ранжированые альтернативы). Приведены они в таблице 2.3.

Таблица 2.3 – отношения, основанные на Гамильтоновых путях

$\boldsymbol{\rho_{Г1}}$	$\boldsymbol{\rho_{Г2}}$	$\boldsymbol{\rho_{Г3}}$	$\boldsymbol{\rho_{Г4}}$	$\boldsymbol{\rho_{Г5}}$
$\boldsymbol{a_1}$	$\boldsymbol{a_2}$	$\boldsymbol{a_3}$	$\boldsymbol{a_4}$	$\boldsymbol{a}_4$
$\boldsymbol{a_2}$	$\boldsymbol{a_4}$	$\boldsymbol{a_1}$	$\boldsymbol{a_3}$	$\boldsymbol{a}_1$

$\boldsymbol{a_4}$	$\boldsymbol{a_3}$	$\boldsymbol{a_2}$	$\boldsymbol{a_1}$	$\boldsymbol{a_2}$
$\boldsymbol{a_3}$	$\boldsymbol{a_1}$	$\boldsymbol{a_4}$	$\boldsymbol{a_2}$	$\boldsymbol{a_3}$

Расстояние Хэмминга между отношениями (между матрицами смежности) вычисляется следующим образом:

$$d(\rho_k, \rho_t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|r_{ij}^{k} - r_{ij}^{t}\right|.$$

Суммарное же расстояние от произвольного отношения до экспертных предпочтений считается по следующей формуле:

$$D(q) = \sum_{t=1}^{m} d(q, \rho_t) = \sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|q_{ij} - r_{ij}^{t}\right|.$$

И то отношение, у которого это значение наименьшее, лучше всего отражает вводные ранжирования экспертов.

Утверждение 3. Пусть задан профиль экспертных предпочтений $\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{\mathrm{m}}\}$, где каждое ρ_{i} является отношением строгого линейного порядка на множестве альтернатив A. Тогда для любого бинарного отношения $\rho_* \neq \rho_\Sigma$, определенного на том же множестве A, при нечётном числе экспертов m выполняется строгое неравенство:

$$D(\rho_\Sigma) < D(\rho_*), \text{ где:}$$

- ρ_Σ - мажоритарное отношение, построенное по заданному профилю предпочтений;
- $D(\cdot)$ - функция суммарного расстояния до экспертных предпочтений.

Доказательство: из теоремы о минимальности суммарного расстояния можно сделать важный вывод о свойствах мажоритарного отношения. Неоднозначность в определении оптимального бинарного отношения может возникать только в специфическом случае, когда ровно половина экспертов ($t = \frac{m}{2}$) поддерживает конкретное предпочтение $r_{\mathrm{ij}} = 1$ между парой альтернатив. Однако при анализе строгих линейных порядков с нечётным числом экспертов такая ситуация становится математически невозможной. Этот результат имеет принципиальное значение, поскольку гарантирует единственность решения при указанных условиях. Формально, для профиля из строгих линейных порядков $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{\mathrm{m}}\}$ с нечётным m не существует ни одной пары альтернатив $(a_{\mathrm{i}}, a_{\mathrm{j}})$, которая одновременно удовлетворяла бы двум критериям:

- равное разделение экспертных предпочтений ($r_{\mathrm{ij}} = 1$ у половины экспертов);
- сохранение свойства транзитивности для всех индивидуальных порядков ρ_{k}. ■

Из последнего утверждения в силу строгого неравенства следует и обратное утверждение.

Утверждение 4. Пусть для профиля экспертных предпочтений $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{\mathrm{m}}\}$, состоящего из строгих линейных порядков при нечётном числе экспертов m, бинарное отношение ρ_* на множестве альтернатив A минимизирует суммарное расстояние $D(\rho)$. Тогда выполняется равенство $\rho_\Sigma = \rho_*$, где ρ_Σ представляет собой мажоритарное отношение.

Доказанные утверждения устанавливают фундаментальное свойство согласованности для случая строгих экспертных ранжирований. В частности, строгий мажоритарный граф гарантирует полную согласованность агрегированного отношения с индивидуальными предпочтениями экспертов, а также отсутствие эквивалентных элементов в результирующем отношении.

Вернемся к примеру и выразим матрицы смежности его отношений, полученных на основе Гамильтоновых путей:

$$R^{\Gamma 1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ R^{\Gamma 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ R^{\Gamma 3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R^{\Gamma 4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R^{\Gamma 5} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее вычисляем для каждой этой матрицы суммарное расстояния до всех матриц смежностей экспертов:

$$D(R^{\Gamma 1}) = d(R^{\Gamma 1}, R^1) + d(R^{\Gamma 1}, R^2) + d(R^{\Gamma 1}, R^3) + d(R^{\Gamma 1}, R^4) + d(R^{\Gamma 1}, R^5) =$$

$$= d\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) + d\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$+d\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + d\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) +$$

$$+d\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 4 + 8 + 6 + 4 + 6 = 28$$

$$D(R^{\Gamma 2}) = d(R^{\Gamma 2}, R^1) + d(R^{\Gamma 2}, R^2) + d(R^{\Gamma 2}, R^3) + d(R^{\Gamma 2}, R^4) + d(R^{\Gamma 2}, R^5) = 26$$

$$D(R^{\Gamma 3}) = d(R^{\Gamma 3}, R^1) + d(R^{\Gamma 3}, R^2) + d(R^{\Gamma 3}, R^3) + d(R^{\Gamma 3}, R^4) + d(R^{\Gamma 3}, R^5) = 30$$

$$D(R^{\Gamma 4}) = d(R^{\Gamma 4}, R^1) + d(R^{\Gamma 4}, R^2) + d(R^{\Gamma 4}, R^3) + d(R^{\Gamma 4}, R^4) + d(R^{\Gamma 4}, R^5) = 28$$

$$D(R^{\Gamma5}) = d(R^{\Gamma5}, R^1) + d(R^{\Gamma5}, R^2) + d(R^{\Gamma5}, R^3) + d(R^{\Gamma5}, R^4) + d(R^{\Gamma5}, R^5) = 28$$

Самым суммарным малым расстоянием равным 26 обладает отношение $\rho_{\Gamma2}$, которое соответствует второму Гамильтонову пути, следовательно, оно лучше всех отражает заданные экспертные предпочтения. Соответственно, ранжирование $a_2 - a_4 - a_3 - a_1$ является ответом этой задачи!

МЕТОД ИНДЕКСИРОВАНИЯ ВЕРШИН

Наш алгоритм поиска Гамильтоновых путей максимальной длины может решить много задач, но единственное, что его может "остановить" – это пример, в котором при построении ориентированного нагруженного графа по предпочтениям экспертов оказалось, что нет Гамильтонова пути!

Так как в рамках это квалификационной работы нашей целью является не только реализация в виде компьютерного кода улучшенного алгоритма ранжирования альтернатив, но и разработка удобной программы, которая будет помогать найти ответ пользователю, если ему необходимо выявить какого-то фаворита среди выбранных альтернатив, или принять правильное решение, то такие задачи (без Гамильтоновых путей) нельзя оставлять без внимания!

Для них применим алгоритм индексации вершин по матрице суммарных предпочтений P_{Σ}. Ранжирование может быть нестрогим.

1. Для каждой вершины a_j вычисляется индекс

$$I_j^{\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} \left(p_{ji}^{\Sigma} - p_{ij}^{\Sigma}\right) = \sum_{i=1}^{n} p_{ji}^{\Sigma} - \sum_{i=1}^{n} p_{ij}^{\Sigma}$$

(сумма элементов строки минус сумма элементов столбца)

2. Затем альтернативы упорядочиваются в соответствии с индексом.

Рассмотрим решение этого метода для *Примера 1. Экспертов - 5, альтернативы – 4.*

В нем мы получили такую матрицу предпочтений.

$$P_{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

По ней найдем индексы вершин:

$$I_1 = (0+2+2+2) - (0+3+3+3) = \text{-}3$$
$$I_2 = (3+0+2+0) - (2+0+3+5) = \text{-}5$$
$$I_3 = (3+3+0+0) - (2+2+0+5) = \text{-}3$$
$$I_4 = (3+5+5+0) - (2+0+0+0) = 11$$

Получим нестрогое ранжирование: $a_4 - a_1, a_3 - a_2$. Заметьте, что альтернативы a_1 и a_3 получились равнозначными, в то время как в методе нахождения Гамильтоновых путей максимальной длины у нас получилось, что $a_3 \succ a_1$ (строго предпочтительнее в силу транзитивности).