



Regolatori industriali Leggi di controllo PID

Il libro di Tecnologie dei sistemi di controllo è disponibile in formato pdf a questo indirizzo:

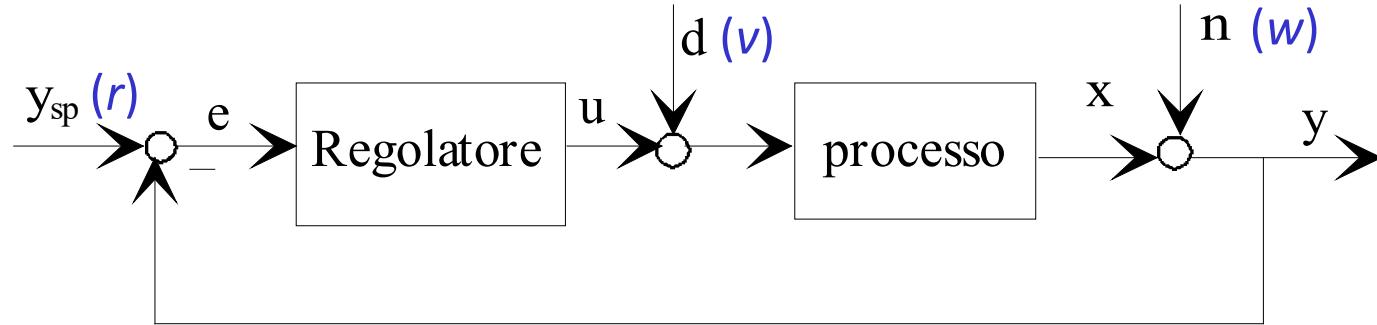
<https://www.bookrepublic.it/ebook/9788838698965-tecnologie-dei-sistemi-di-controllo-2ed-mcgraw-hill-education-italy>

Il libro *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers* second edition v3.1.5 del 24.07.20 è disponibile in formato pdf al seguente indirizzo:

https://fbswiki.org/wiki/index.php/Main_Page

Regolatori industriali

Schema di riferimento (controllo in retroazione)



Regolatore → relay

→ PID → legge di controllo

→ unità fisica

d (o v) disturbo di carico → allontana il processo dallo stato voluto

n (o w) rumore di misura → corrompe le misure fornite dai sensori

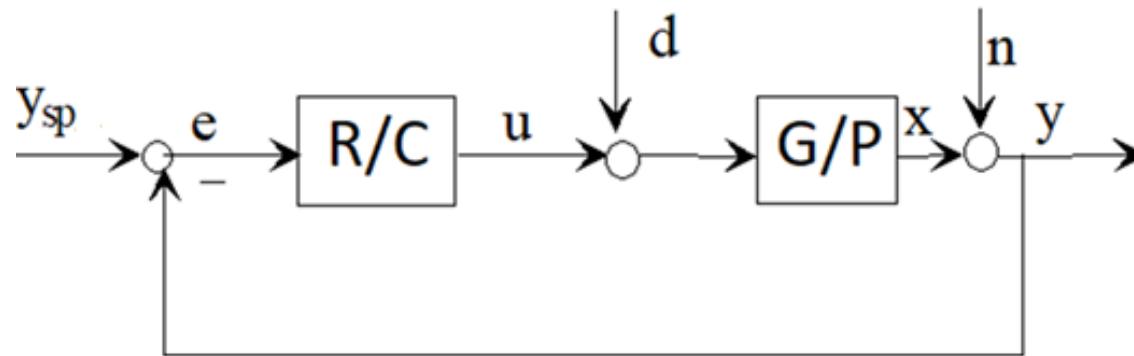
Specifiche → risposta a y_{sp} (o r) (scalino)

→ risposta a d (scalino)

Regolatori industriali



Processi e regolatori (sistemi) lineari



Analisi con le funzioni di trasferimento (nel seguito per indicare la fdt del processo si useranno i simboli **G** o **P** e per quella del regolatore **R** o **C**)

Esempio

$$E(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)} (Y_{sp}(s) - N(s)) - \frac{G(s)}{1 + R(s)G(s)} D(s)$$



Industrial controllers

Closed loop transfer functions

The behavior of a closed loop control system is expressed in the frequency domain by its closed loop transfer functions.

We can specify the desired behavior (i.e., the c.l.t.f.s) in terms of the open loop transfer function $L = PC$

AM v3.1.5 - Cap. 12 con notazione T al posto di F

$$S = \frac{1}{1 + PC}$$

Sensitivity
function

$$PS = \frac{P}{1 + PC}$$

Load or input
sensitivity
function

$$F = T = \frac{PC}{1 + PC}$$

complementary
sensitivity
function

$$CS = \frac{C}{1 + PC}$$

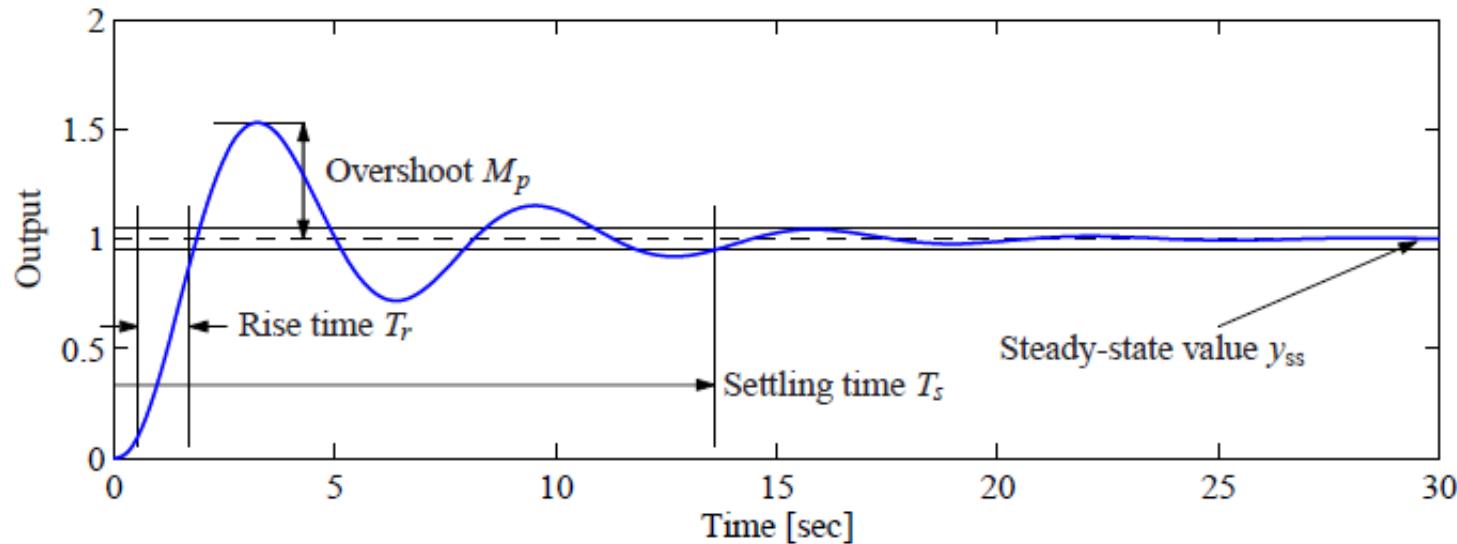
Noise or output
Sensitivity
function

Controller design



Performance specification

Time response (to reference step input)



Features

Overshoot, rise time, and settling time

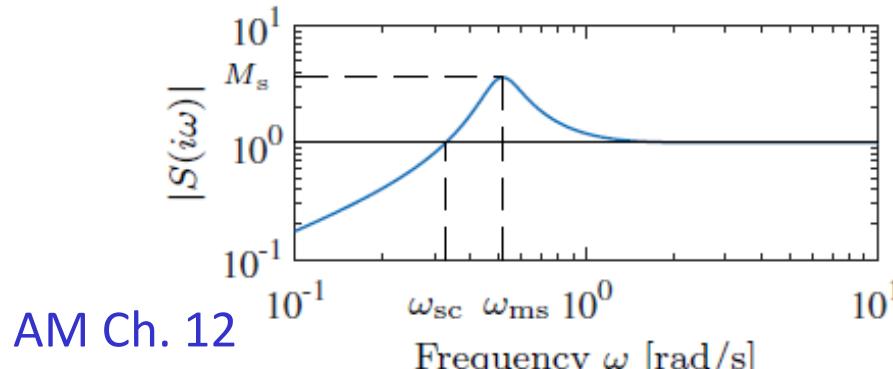
Damped oscillation frequency, and steady-state error

Controller design

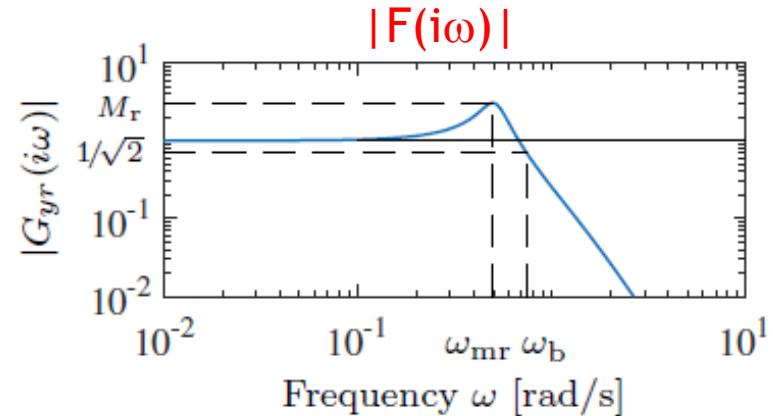


Performance specification

Frequency response



(a) Frequency response of $S(i\omega)$



(b) Frequency response of $G_{yr}(i\omega)$

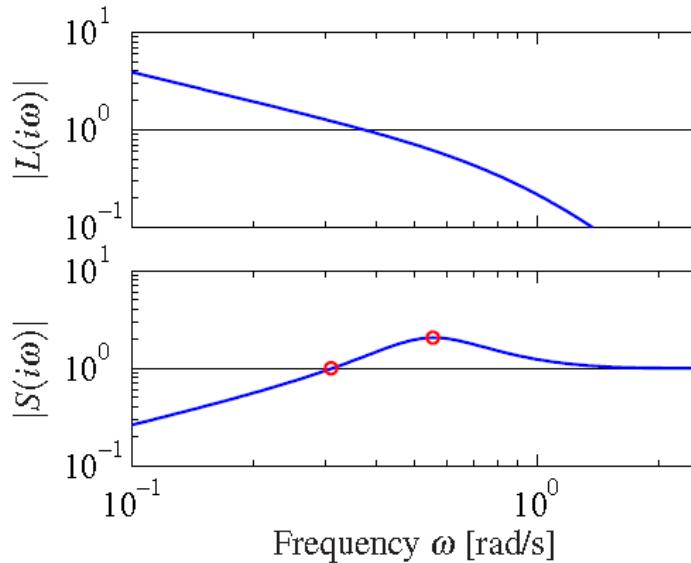
Figure 12.3: Illustration of specifications in frequency domain. (a) Gain curve of sensitivity function; the maximum sensitivity M_s is a robustness measure. (b) Gain curve of the transfer function G_{yr} with peak value M_r , peak frequency ω_{mr} , and bandwidth ω_b .

The behavior of the first part of the step response is related to the behavior of the frequency response at high frequency, and viceversa

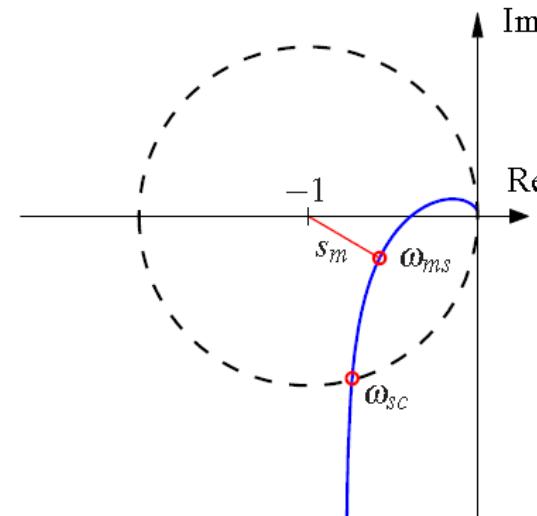
Sensitivity function



All points inside the dashed circle have sensitivity greater than 1 (the load disturbance is amplified)



(a) Gain curves



(b) Nyquist plot

Figure 12.6: Graphical interpretation of the sensitivity function. Gain curves of the loop transfer function and the sensitivity function (a) can be used to calculate the properties of the sensitivity function through the relation $S = 1/(1+L)$. The sensitivity crossover frequency ω_{sc} and the frequency ω_{ms} where the sensitivity has its largest value are indicated in the sensitivity plot. The Nyquist plot (b) shows the same information in a different form. All points inside the dashed circle have sensitivities greater than 1.

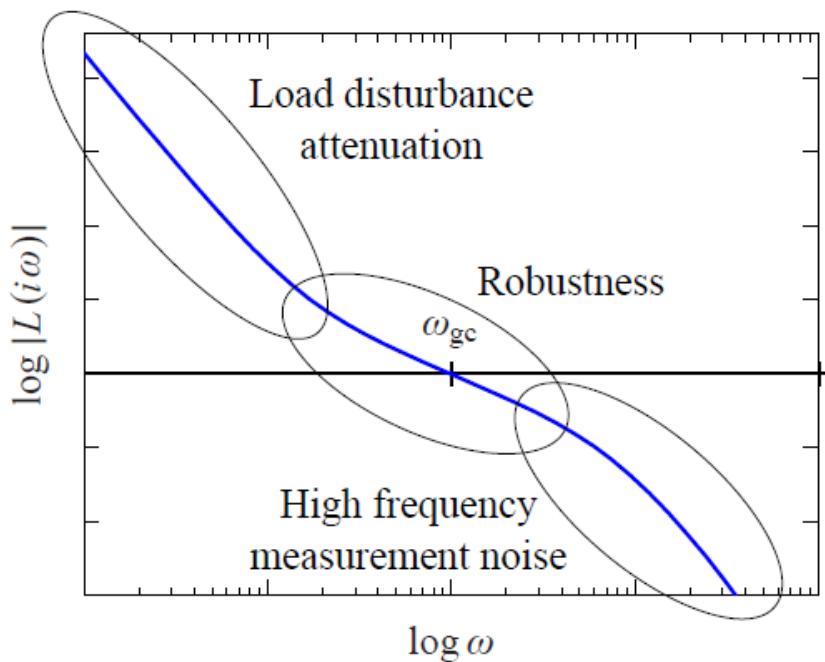
Controller design



Loop shaping design

Choosing a compensator which gives a loop transfer function with a desired shape. Two possible approaches:

- select L and then compute $R=L/G$
- start with G and add poles and zero and change gain until the desired shape is obtained



Typical loop gain shape

The crossover frequency ω_{gc} determines the attenuation of load disturbances, bandwidth and response time of the closed loop system.

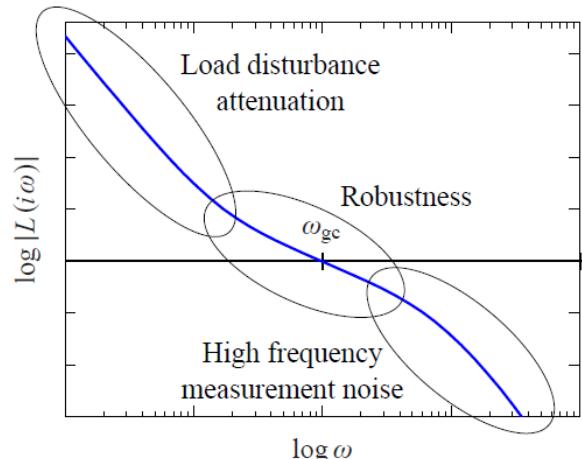
The slope n_{gc} determines the robustness of the closed loop systems.

Warning: Attention should be paid to constraints on the control variable

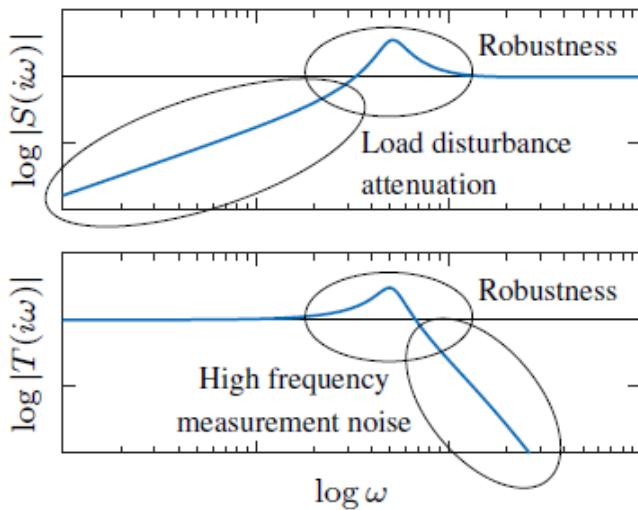
Controller design



Typical loop shape



Typical sensitivity and complementary sensitivity function frequency response shapes



(b) Gain plot of sensitivity functions

At low frequencies, a large magnitude of L provides good disturbance rejection (see load sensitivity t.f. PS) and reference tracking (see T or F)

At high frequency $S \rightarrow 1$ and $T \rightarrow 0$ as $s \rightarrow \infty$

Sensitivity

$$S = \frac{1}{1 + CP}$$

Noise sensitivity

$$CS = \frac{C}{1 + CP}$$

Complementary
Sensitivity

$$T = \frac{CP}{1 + CP} = CPS$$

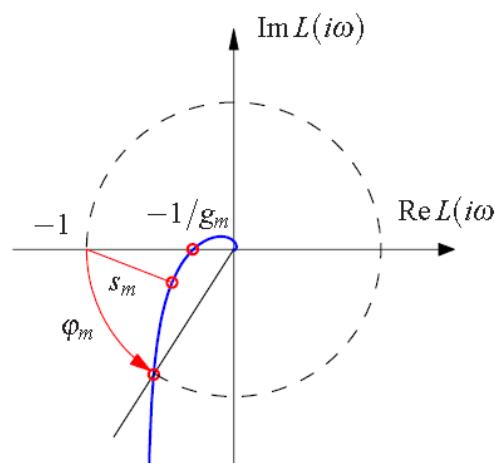
It shows that at HF small C avoids undesirable control actions

$$T + S = 1$$

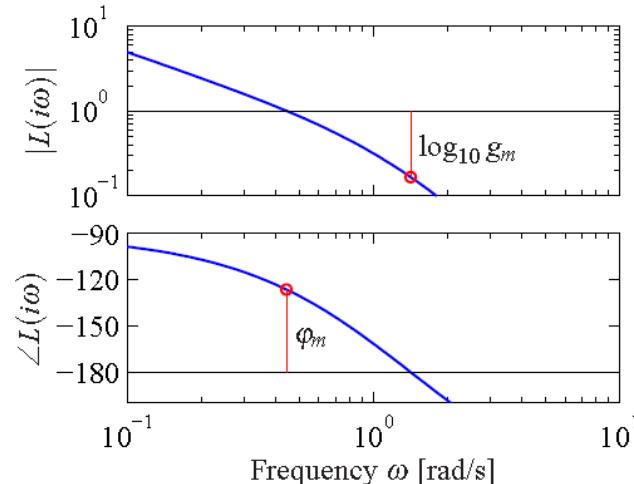
T must be a «low pass» filter

Stability margins (robustness)

Phase margin and gain margin



(a) Nyquist plot



(b) Bode plot

Figure 9.9: Stability margins. The gain margin g_m and phase margin φ_m are shown on the the Nyquist plot (a) and the Bode plot (b). The gain margin corresponds to the smallest increase in gain that creates an encirclement, and the phase margin is the smallest change in phase that creates an encirclement. The Nyquist plot also shows the stability margin s_m , which is the shortest distance to the critical point -1 .

$$\text{Gain margin } g_m = \frac{1}{L(j\omega_{pc})}; \quad \omega_{pc} : \angle L(j\omega_{pc}) = -180^\circ$$

$$\text{Phase margin } \varphi_m = 180^\circ + \angle L(j\omega_{gc}); \quad \omega_{gc} : |L(j\omega_{gc})| = 1$$

Sistemi di controllo



Una rappresentazione più generale (da AM c. 12)

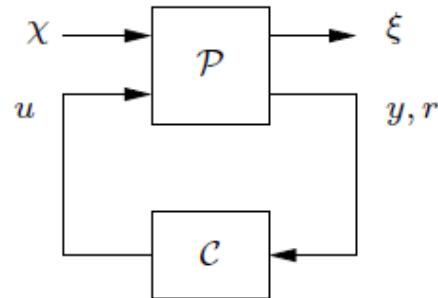


Figure 12.2: A more general representation of a feedback system. The process input u represents the control signal, which can be manipulated, and the process input χ represents the other signals that influence the process. The process output consists of the measured variable(s) y , the reference signal r , and the signal vector ξ representing the other signals of interest in the control design.

Adatta allo sviluppo di teoria e ad affrontare problemi e formulare soluzioni di carattere più generale, valide per un più ampio campo di applicazioni.

Regolatori PID



Azione proporzionale

$$P: u(t) = K_C e(t) \quad \rightarrow \quad K_C \text{ guadagno}$$

PB: banda proporzionale $PB = \frac{1}{K_C} 100$

Se $K_C = \frac{u/u_{fs}}{e/e_{fs}}$ $\rightarrow e/e_{fs} \frac{100}{PB} = u/u_{fs}$ Per $e/efs=PB$, si ha $u/ufs=100$

Errore a transitorio esaurito
 y_{sp} e d costanti (scalini) e processo di tipo zero

$$e_\infty^P = \frac{1}{1 + K_C K_p} (y_{sp} - n) - \frac{K_p}{1 + K_C K_p} d$$

Correzione manuale $u(t) = K_C e(t) + U$ U manual reset

Regolatori PID



Azione integrale

$$I: \quad u(t) = \frac{K_C}{T_I} \int_0^t e(r) dr + u(0)$$

$$I(s) = \frac{K_C}{s T_I}$$

T_I tempo integrale

Inconvenienti

- sfasamento di 90°
- non asintoticamente stabile
(wind-up)
- inizializzare correttamente

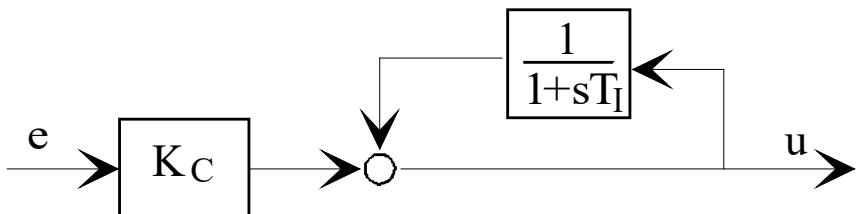
Errore a transitorio esaurito nullo per y_{sp} e d costanti (scalini)

$$E^I(s) = \frac{s T_I}{s T_I + K_C G(s)} Y_{sp}(s) - \frac{s T_I G(s)}{s T_I + K_C G(s)} D(s)$$

$$G(s) = \frac{K_P}{s^g}$$

Integratore: automatic reset

Realizzazione di un PI
con filtro in retroazione positiva



Regolatori PID



Azione derivativa

$$D: \quad u(t) = K_C T_D \frac{de(t)}{dt}$$

T_D tempo derivativo (rate time)

$$D(s) = K_C s T_D$$

Anticipo di fase di 90°

Amplifica il rumore: $n = A \sin \omega t$

$$u_n = K_C T_D \frac{dn}{dt} = A K_C T_D \omega \cos \omega t$$

Filtro $F(s) = \frac{1}{1 + sT_D/N}$

Amplificazione massima: $K_C N$
($5 < N < 10$)

Non influisce sull'errore a transitorio esaurito: non può mai essere utilizzata da sola. Per alcuni tipi di processi (cioè di $G(s)$) non può essere utilizzata

Regolatori PID



Un'osservazione (da AM c. 1)

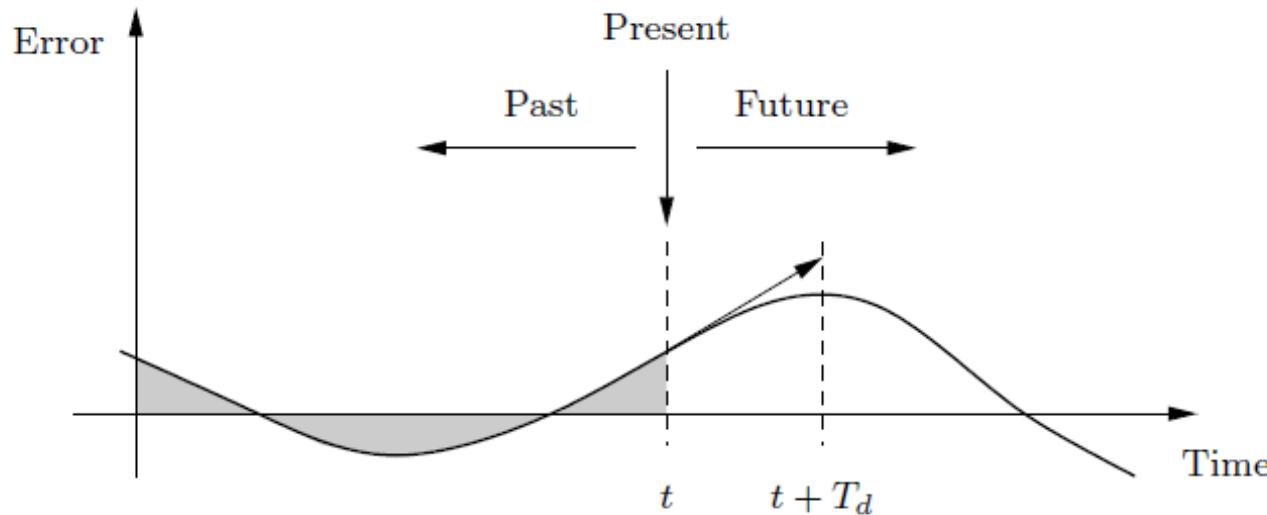


Figure 1.15: Action of a PID controller. At time t , the proportional term depends on the instantaneous value of the error. The integral portion of the feedback is based on the integral of the error up to time t (shaded portion). The derivative term provides an estimate of the growth or decay of the error over time by looking at the rate of change of the error. T_d represents the approximate amount of time in which the error is projected forward (see text).

Regolatori PID



Azione derivativa

Non può essere utilizzata da sola. Perché?



Un sistema di controllo (ad anello chiuso) deve essere passa basso (guadagno unitario o vicino all'unità a bassa frequenza)

Nota

Gli zeri della fdt Y/Y_{SP} (anello chiuso) sono quelli del regolatore più quelli del processo

$$R = \frac{N_R}{D_R} \quad G = \frac{N_G}{D_G} \quad \frac{Y}{Y_{SP}} = F = \frac{RG}{1 + RG} = \frac{N_R N_G}{D_R D_G + N_R N_G}$$

Tutte le fdt di un sistema di controllo hanno gli stessi poli, gli zeri sono specifici di ogni fdt

Se F ha uno zero nell'origine (come lo ha $D(s)$) non è passa basso

Regolatori PID



Combinazione utilizzabili delle azioni P, I e D

Si utilizzano

→ P, I, PI, PD, PID

Realizzazione digitale (microprocessori, microcontrollori, DSP)

Realizzazione analogica (operazionali + RC) in applicazioni particolari

Regolatori PID



Funzioni di trasferimento

$$u(t) = K_C(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(r) dr + T_D \frac{de(t)}{dt})$$

Forma accademica
(three mode)

$$PID(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_C \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right)$$

$$PID(s) = K_C \left(1 + \frac{1}{sT_I} + \frac{sT_D}{1 + sT_D / N} \right)$$

Scrivendo

$$PID(s) = K_C \left(\frac{1 + sT_I + s^2 T_I T_D}{sT_I} \right)$$

si evidenzia il numeratore per il calcolo degli zeri

Regolatori PID

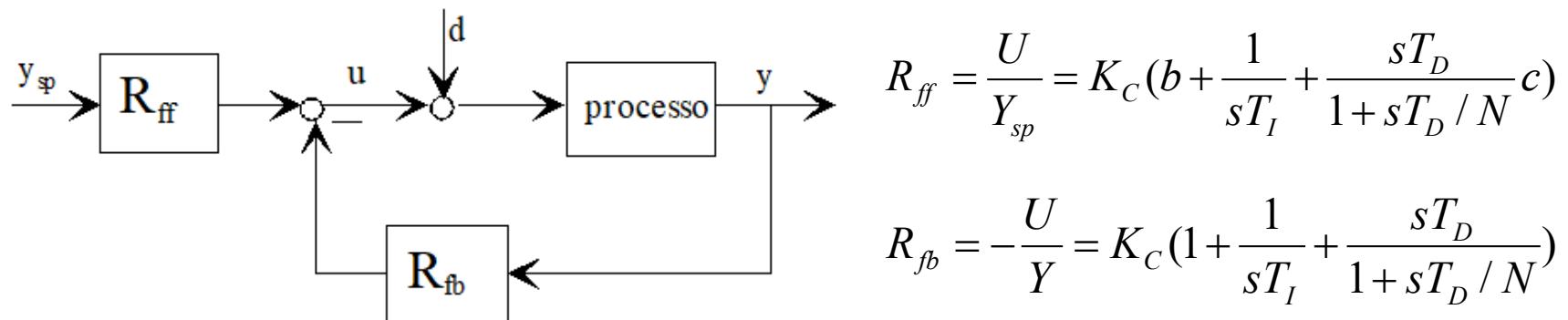


Funzioni di trasferimento

Forma standard ISA - regolatore a 2 vie (two-way)

$$U = K_C(bY_{sp} - Y + \frac{1}{sT_I}E + \frac{sT_D}{1+sT_D/N}(cY_{sp} - Y))$$

b, c: pesi sul setpoint - nelle realizzazioni commerciali $0 \leq b, c \leq 1$



$$R_{fb} \equiv \frac{K_C(1+sT_I+s^2T_IT_D)}{sT_I} = \frac{N_{fb}}{D_R} \quad R_{ff} \equiv \frac{K_C(1+sbT_I+s^2cT_IT_D)}{sT_I} = \frac{N_{ff}}{D_R} \quad \text{trascurando il polo del filtro}$$

Regolatori PID



Forma standard ISA: regolatore a 2 vie (two-way)

$$R_{ff} = \frac{N_{ff}}{D_R} \quad R_{fb} = \frac{N_{fb}}{D_R} \quad G = \frac{N_G}{D_G}$$

$$\frac{Y}{Y_{SP}} = R_{ff} \frac{G}{1 + GR_{fb}} = \frac{N_{ff} N_G}{D_G D_R + N_G N_{fb}}$$

$$N_{ff} = K_C(1 + sbT_I + s^2 c T_I T_D) \\ (\text{senza filtro})$$

Rispetto al PID accademico N_{ff} sostituisce N_{fb} a numeratore di Y/Ysp

Con K_C , T_I e T_D si posizionano i poli ad anello chiuso (\rightarrow risposta a d)

Con b e c si posizionano gli zeri della risposta al setpoint

Esempio (PID accademico senza il filtro)

$$G(s) = \frac{K_p}{s^2}$$



$$\frac{Y(s)}{Y_{sp}(s)} = \frac{1 + sbT_I + s^2 c T_I T_D}{1 + sT_I + s^2 T_I T_D + s^3 \frac{T_I}{K_p K_c}}$$

Qual è il ruolo degli zeri?



Regolatori PID

Forma standard ISA: ruolo di b ($c=0$)

$$\frac{U}{Y_{sp}} = K_C \frac{1 + sbT_I}{sT_I}$$

b aggiusta lo zero della risposta al setpoint dovuto al regolatore

$$\frac{Y}{Y_{SP}} = \frac{N_{ff}N_G}{D_G D_R + N_G N_{fb}} \quad N_{ff} = K_C(1 + sbT_I)$$

$$Y = K_C \frac{N_G}{D_G D_R + N_G N_{fb}} Y_{SP} + K_C sbT_I \frac{N_G}{D_G D_R + N_G N_{fb}} Y_{SP}$$

$y(t)$

$bT_I \dot{y}(t)$

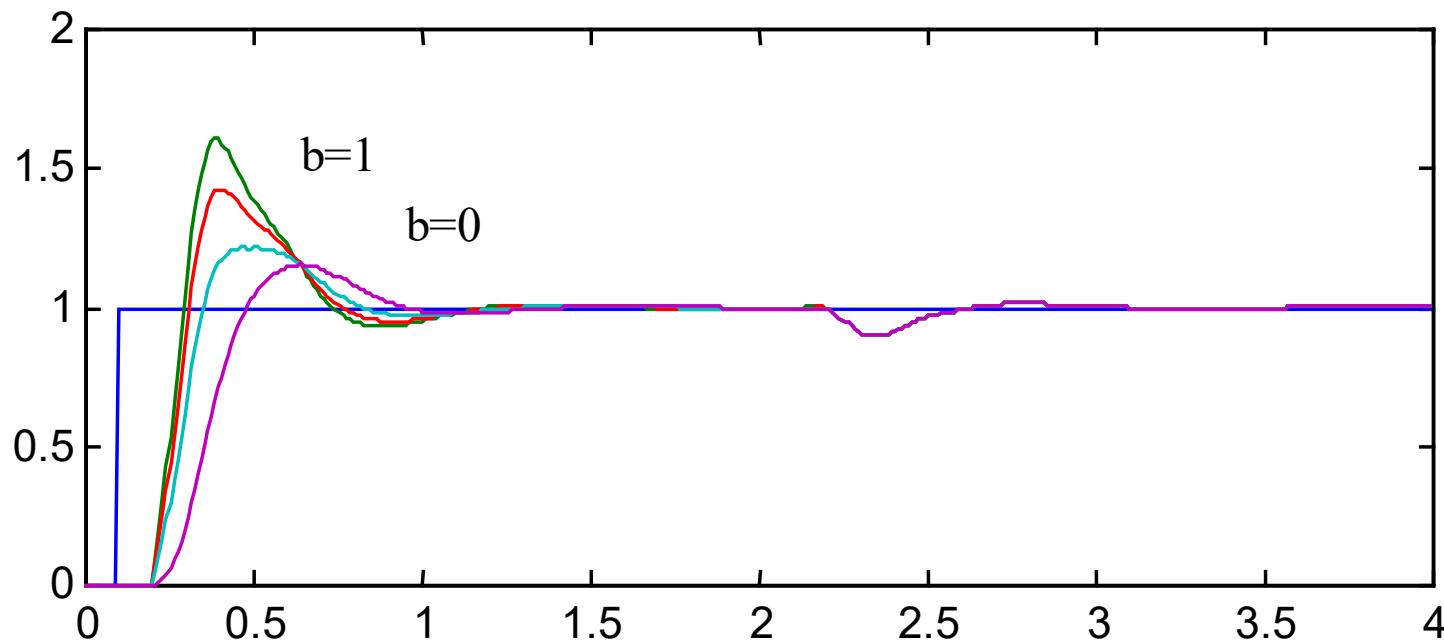
Regolatori PID



Forma standard ISA: ruolo di b ($c=0$)

Esempio: risposte a scalino al variare di b $G(s) = \frac{e^{-0.1s}}{1 + s}$

$$y_{sp} = sca(t - 0.1) \quad d = -0.5sca(t - 2) \quad b = 0, 0.5, 0.8, 1$$



Regolatori PID

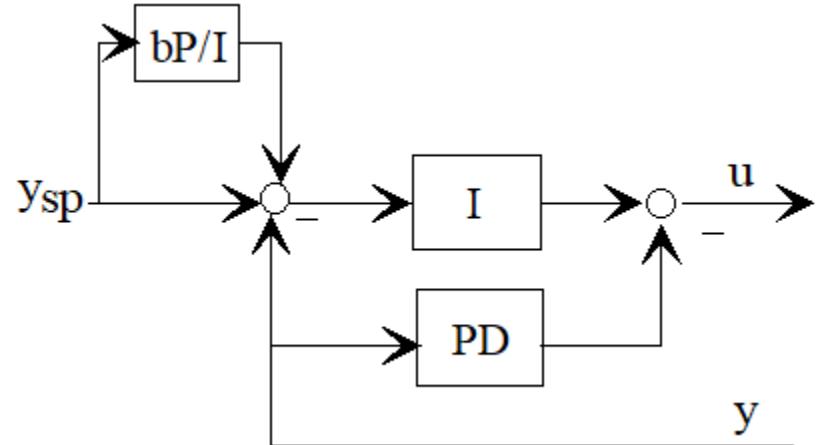
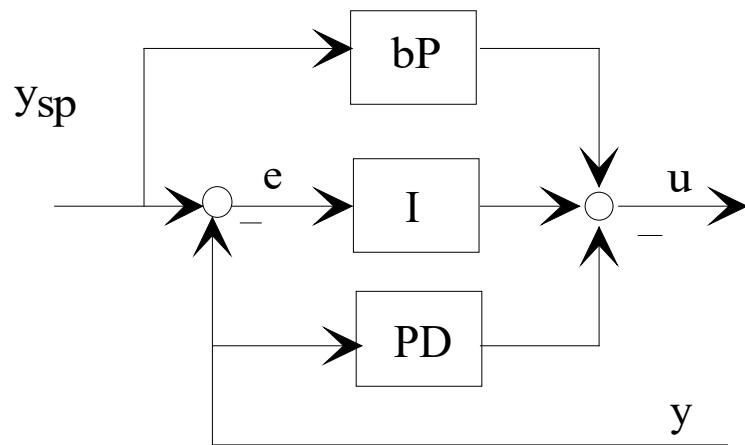


Utilizzo tipico del PID: forma standard ISA con $c=0$ (derivata applicata alla sola misura)

Regolatore più usato: PI con peso sul setpoint

$$\frac{U}{Y_{sp}} = K_C \frac{1 + sbT_I}{sT_I}$$

Schemi a blocchi



Regolatori PID



Perché sono così diffusamente utilizzate le leggi PID?

Based on a survey of over eleven thousand controllers in the refining, chemicals and pulp and paper industries, 97% of regulatory controllers utilize PID feedback. L. Desborough and R. Miller, 2002 [DM02].

- Efficace per un'ampia gamma di processi (P+I+D)
- Relativa semplicità di taratura
- Importanza e convenienza economica della standardizzazione
- Presenza talvolta di limiti di prestazione insuperabili a causa degli attuatori, dei sensori, della dinamica del processo
- I PID sono usati in strutture di controllo articolate e gerarchiche ritagliate in funzione delle caratteristiche proprie del processo e particolarmente efficaci
- Necessità di modelli matematici adeguati, che possono richiedere molto tempo ed impegno, per il progetto di leggi di controllo più complesse e risultati più dipendenti dalla qualità del modello

Regolatori PID



Quando è adeguato un regolatore PID?

- Quando le specifiche di prestazione non sono stringenti
- Il PI è adeguato per i processi a dinamica essenzialmente del prim'ordine
- Il regolatore PID è sufficiente dove la dinamica dominante è del secondo ordine
- Non è sufficiente se c'è un ritardo puro rilevante e le prestazioni sono stringenti (controllo in cascata, predittore di Smith)
- Può non essere la scelta migliore per sistemi con modi oscillatori

Regolatori PID

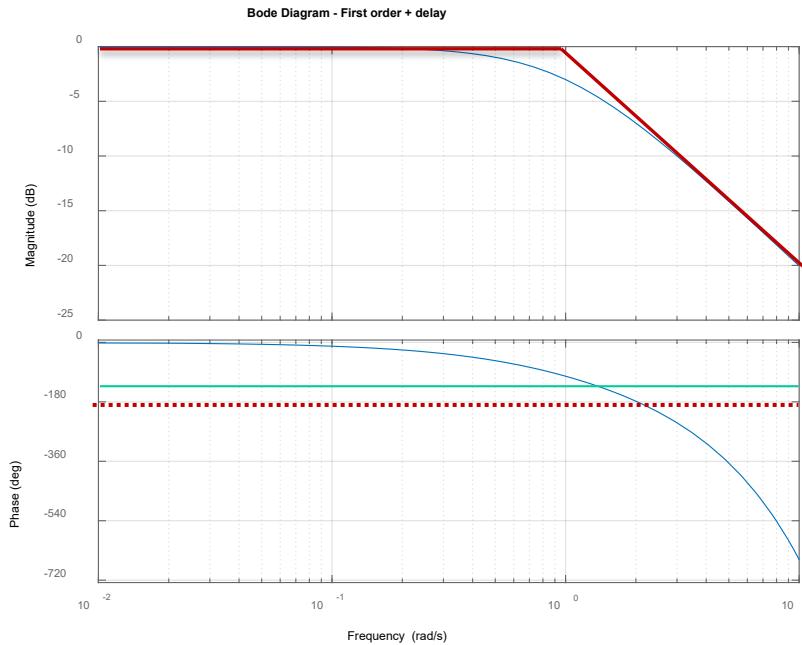


Scelta delle azioni P, I, D in funzione delle proprietà del processo

Processi del prim'ordine con ritardo

$$G(s) = \frac{K_p e^{-s\tau}}{1 + sT}$$

per $K_p = \tau = T = 1$



Criterio di Bode:

- $L(s)$ non abbia poli con parte reale maggiore di 0
- Il diagramma di Bode del modulo di $L(j\omega)$ attraversi una sola volta l'asse a 0 DB allora c.n.s. per l'asintotica stabilità è che risulti μ (guadagno) > 0 e $\varphi_m > 0$



Regolatori PID

PID e processi del prim'ordine con ritardo $G(s) = \frac{K_p e^{-s\tau}}{1 + sT}$

La scelta della legge di controllo (composizione di azioni P, I e D) dipende dal rapporto di controllabilità τ/T

Il ritardo impone un limite insuperabile alla pulsazione di taglio ω_c con regolatori PID

Caso del regolatore P $L(s) = \frac{K_c K_p}{1 + sT} e^{-s\tau}$

$$180 - \left| -\tau \omega_c \frac{180}{\pi} - \tan^{-1} \left(\frac{\omega_c}{1/T} \right) \right| = \bar{\varphi}_m \quad \tan^{-1}(\cdot) \text{ e } \bar{\varphi}_m \text{ in gradi}$$

$$\pi - \tau \omega_c - \tan^{-1} \left(\frac{\omega_c}{1/T} \right) = \bar{\varphi}_m \quad \tan^{-1}(\cdot) \text{ e } \bar{\varphi}_m \text{ in radianti}$$

Utilizziamo questa relazione per ricavare ω_c in funzione di τ/T

Per $\bar{\varphi}_m = 45^\circ$ se $\tau = \frac{\pi}{2} T$ $\omega_c = \frac{1}{T}$ valore limite di τ/T

Regolatori PID



cioè

PID e processi del prim'ordine con ritardo

$$G(s) = \frac{K_p e^{-s\tau}}{1+sT}$$

Infatti sostituendo $\tau = \frac{\pi}{2} T$ e $\omega_c = \frac{1}{T}$ si ha

$$180 - \left| -\frac{\pi}{2} T \frac{1}{T} \frac{180}{\pi} - \tan^{-1} \left(\frac{1/T}{1/T} \right) \right| = 45^\circ$$

Se $\tau > \frac{\pi}{2} T$ la pulsazione di taglio è nel tratto a modulo costante e non si ha guadagno in banda

Per avere **guadagno in banda** > 10 si deve avere $\omega_c > \frac{10}{T}$



$$\tau < \frac{\pi}{40} T \cong 0.08T$$

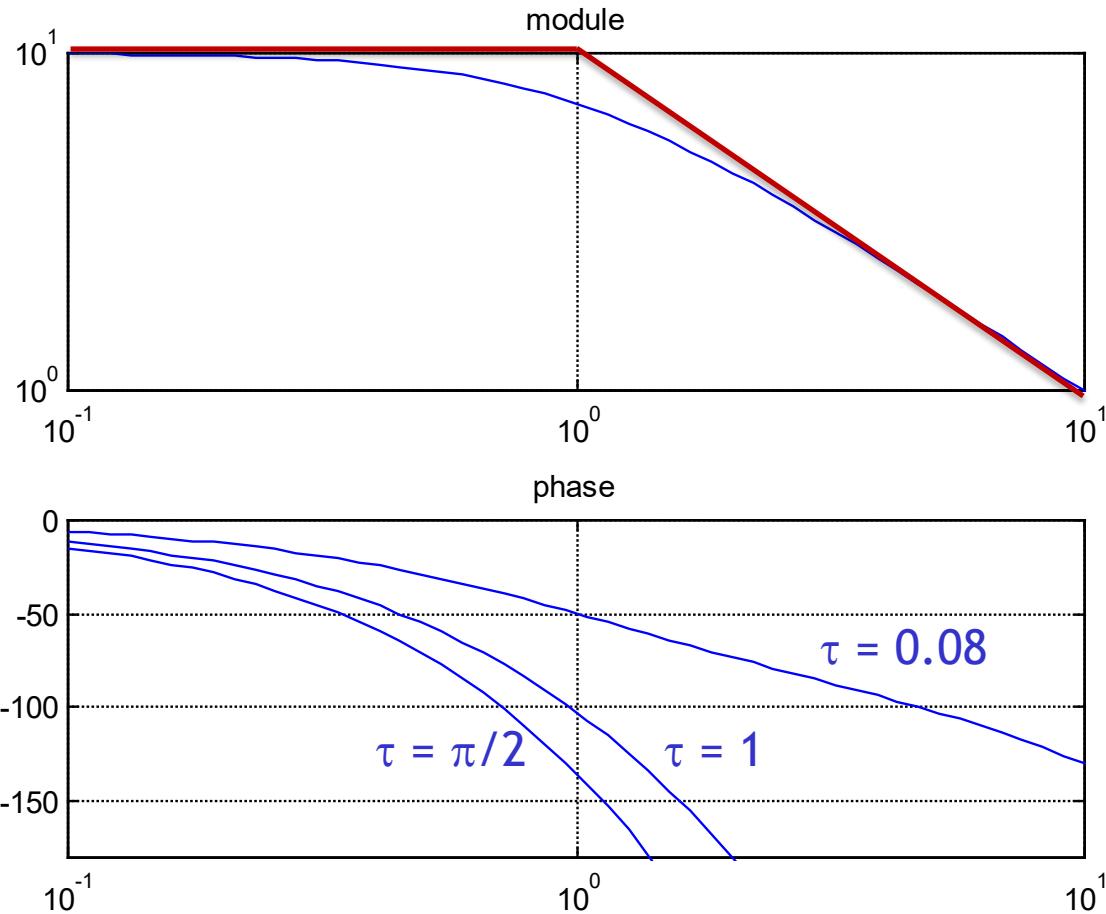
essendo $180 - \left| -\frac{\pi}{40} T \frac{10}{T} \frac{180}{\pi} - \tan^{-1} \left(\frac{10/T}{1/T} \right) \right| \cong 50^\circ$

L'azione derivativa (regolatore PD) non sarebbe di aiuto

Regolatori PID



PID e processi del prim'ordine con ritardo



Esempio

$$G(s) = \frac{10e^{-s\tau}}{1 + s}$$

Fase dovuta al ritardo: fase non minima



Regolatori PID

Indicazione: per $\frac{\tau}{T} \geq 1$: usare un integratore

$$L(s) = \frac{K_C K_p}{s T_I (1 + sT)} e^{-s\tau}$$

$$180 - \left| -90 - \tau \omega_c \frac{180}{\pi} - \tan^{-1} \left(\frac{\omega_c}{1/T} \right) \right| = \bar{\varphi}_m \quad \rightarrow \quad \omega_c$$

Banda limitata: con $\bar{\varphi}_m = 45^\circ$ $\tau = 0$ $\rightarrow \omega_c = \frac{1}{T}$

Caso limite: $L(s) = e^{-s\tau}$



Regolatori PID

Indicazione: per $0.6 < \frac{\tau}{T} < 1$ usare un PI

Regolatore PI $PI(s) = K_C \left(1 + \frac{1}{sT_I} \right)$

Cancellando il polo con lo zero $T_I = T$

$$L(s) = \frac{K_C K_p}{sT_I} e^{-s\tau} \quad \bar{\varphi}_m = 45^\circ$$

$$\angle(L(j\omega_c)) = -135^\circ = -\frac{3\pi}{4} \quad \rightarrow \quad \omega_c = \frac{\pi}{4\tau} \text{ [rad]}$$

$$|L(j\omega_c)| = 1 \quad \rightarrow \quad K_C = \frac{1}{K_p} \frac{\pi}{4} \frac{T}{\tau}$$

Regolatori PID



Regole di scelta

Tipo di regolatore

$$\frac{\tau}{T} > 1$$

I per regolazione blanda. Non è utilizzabile il termine derivativo.
Per buone prestazioni è essenziale l'uso di almeno uno tra predittore
di Smith, anticipo, controllo in cascata.

$$0.6 < \frac{\tau}{T} < 1$$

I o PI

Predittore di Smith, anticipo, o controllo in cascata

$$0.15 < \frac{\tau}{T} < 0.6$$

PI, PID (con basso rumore di misura)

$$\frac{\tau}{T} < 0.15$$

PI, PID (con basso rumore di misura)



Regolatori PID

Processi del second'ordine con ritardo

$$G(s) = \frac{K_p e^{-s\tau}}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$

$$PID(s) = K_C \frac{(1 + sT_{z1})(1 + sT_{z2})}{sT_I}$$

Progetto

$$(1 + sT_{z1})(1 + sT_{z2}) = 1 + sT_I + s^2 T_I T_D$$

$$T_{z1} = T_1, T_{z2} = T_2$$

$$\begin{aligned} T_I &= T_{z1} + T_{z2} \\ T_D &= \frac{T_{z1} T_{z2}}{T_{z1} + T_{z2}} \end{aligned}$$

$$L(s) = \frac{K_p K_c}{sT_I} e^{-s\tau}$$

$$\arg(L(j\omega_c)) = -\frac{3\pi}{4}$$

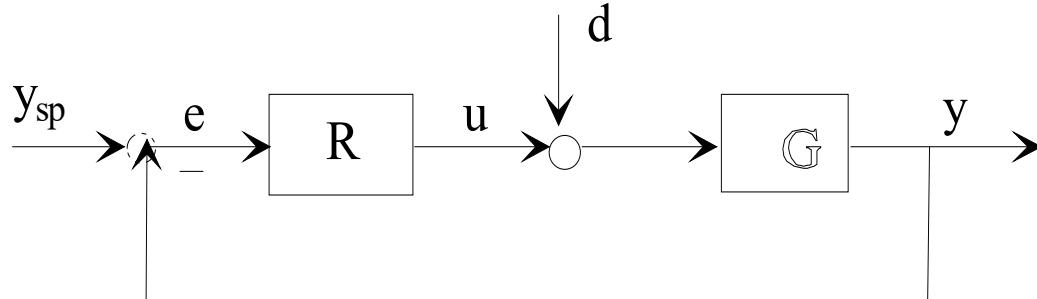
$$\omega_c = \frac{\pi}{4\tau} \quad \text{con}$$

$$K_C = \frac{1}{K_p} \frac{\pi}{4} \frac{T_I}{\tau} = \frac{1}{K_p} \frac{\pi}{4} \frac{T_1 + T_2}{\tau}$$

Regolatori PID



Cancellazione dei poli del processo



$$G = \frac{N_G}{D_G}$$

$$R = \frac{N_R}{D_R}$$

$$N_R = N'_R(1 + sT_z) \quad \text{e} \quad D_G = D'_G(1 + sT_p)$$

$$T_z = T_p$$

$$\frac{Y}{D} = \frac{G}{1 + RG} = \frac{1}{1 + sT_P} \frac{N_G D_R}{D_R D'_G + N'_R N_G}$$

Non cancellare poli instabili e poli troppo lenti (rispetto a ω_c)

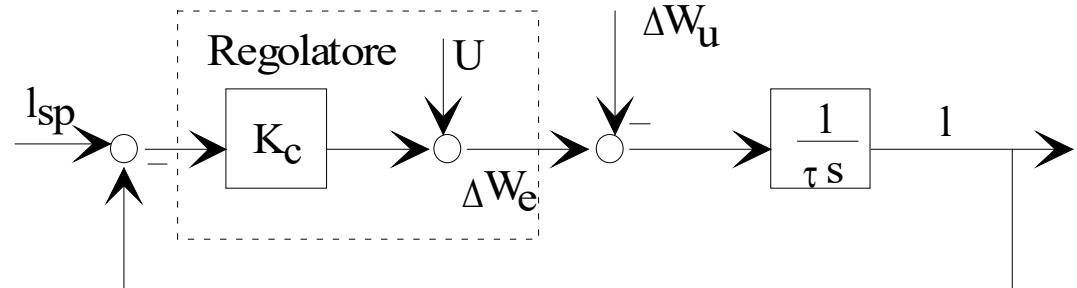
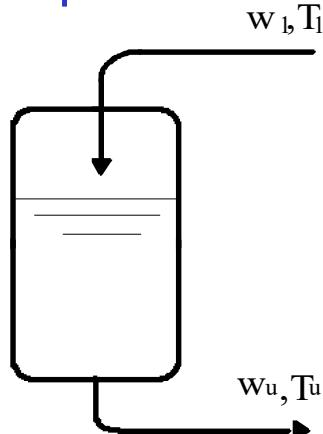
La risposta al disturbo di carico può essere eccessivamente lenta!

Regolatori PID



Processi integrali

Esempio: livello di un liquido in un serbatoio

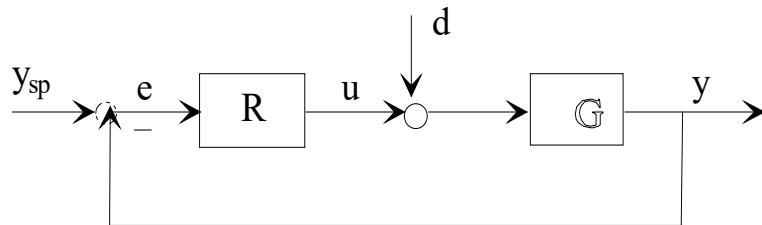


Regolatore proporzionale: errore a transitorio esaurito $e_\infty = \frac{\Delta w_u}{K_c}$
In linea di principio l'errore si può azzerare manualmente con l'ingresso addizionale U impostabile dall'operatore.

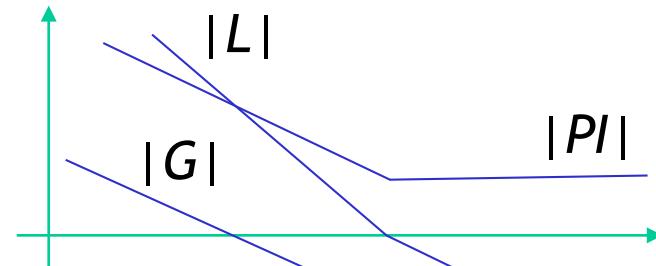
Un regolatore PI dà un migliore risultato in automatico

Il PI può essere progettato con Bode («loop shaping») oppure con assegnamento dei poli. Ad esempio, si possono assegnare due poli cc. Fissando lo smorzamento in base al tipo di risposta desiderato, la pulsazione naturale diventa il parametro di progetto, da trovare per tentativi. $\omega_n^2 + 2\xi\omega_n s + s^2 = 0$

Progetto regolatore PI per un processo integrale



$$R = PI = K_C \frac{1 + sT_I}{sT_I} \quad G = \frac{K_p}{s}$$



Progetto loop shaping

$$L = K_C K_p \frac{1 + sT_I}{s^2 T_I}$$

Si ottiene $\bar{\varphi}_m = 45^\circ$ ponendo $\frac{1}{T_I} = \omega_c$ (zero in corrispondenza della pulsazione di taglio)

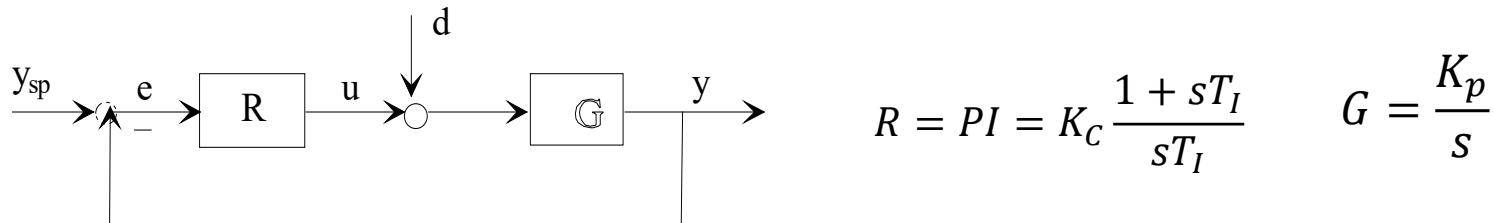
qualsiasi sia ω_c che dev'essere assegnato o trovato per tentativi

$$180 - \left| -180 + \tan^{-1}\left(\frac{1/T_I}{1/T_I}\right) \right| = \bar{\varphi}_m$$

Ponendo $|L(j\omega_c)| = \left| K_C K_p \frac{1+j\omega_c T_I}{\omega_c^2 T_I} \right| = \left| K_C K_p \frac{1+j}{\omega_c} \right| = K_C K_p T_I \sqrt{2} = 1$

$$K_C = \frac{\omega_c}{K_p \sqrt{2}} = \frac{1}{K_p T_I \sqrt{2}}$$

Progetto regolatore PI per un processo integrale



Progetto con assegnamento dei poli

$$1 + L = 1 + K_C K_p \frac{1 + sT_I}{s^2 T_I} = \frac{s^2 T_I + K_C K_p s T_I + K_C K_p}{s^2 T_I}$$

I poli del sistema ad anello chiuso sono le radici di $1 + L = 0$, cioè di $s^2 + K_C K_p s + \frac{K_C K_p}{T_I} = 0$

Ponendo $s^2 + K_C K_p s + \frac{K_C K_p}{T_I} = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$ fissato ξ e dato, o trovato per tentativi ω_n , si ottengono i parametri del PI

$$K_C = \frac{2\xi\omega_n}{K_p}; \quad T_I = \frac{2\xi}{\omega_n}$$



Regolatori PID

Doppio integratore $G(s) = \frac{1}{s^2}$

Tipico di alberi rotanti, carrelli, moto di un «punto» materiale

Regolatore PD: $L(s) = K_C(1 + sT_D)\frac{1}{s^2}$

Scegliendo $T_D = \frac{1}{\omega_c}$ si ha $\bar{\varphi}_m = 45$ per ogni ω_c

Si può concludere che il modello doppio integratore trascura dinamiche importanti che limitano, nella realtà, inevitabilmente la pulsazione di taglio

In pratica (di solito) si usa un PID per annullare e_∞ per $d \neq 0$, che può anch'esso essere progettato con Bode o assegnamento dei poli.

Come assegnare i poli? Due poli cc dominanti, uno reale di «alta frequenza».

$$(\alpha\omega_n + s)(\omega_n^2 + 2\xi\omega_n s + s^2) = 0 \text{ con } 3 \leq \alpha \leq 5$$

Regolatori PID - Taratura e autotaratura



- Identificazione di un modello del processo di pochi parametri
 - Applicazione di una formula di taratura

Metodi d'identificazione
nel dominio del tempo (d.t.)
nel dominio della frequenza (d.f.)



ad anello aperto
ad anello chiuso

Altri elementi distintivi: durata
stato iniziale stazionario / non stazionario
informazioni a priori

Classificazione:

- metodi basati sullo studio della risposta allo scalino
- metodi di determinazione di uno o più punti della risposta in frequenza
- metodi di stima parametrica



Metodi trattati

Metodi di Ziegler e Nichols

- risposta allo scalino (I metodo - d.t.)
- guadagno limite (II metodo - d.f.)

(articolo originale del 1942:

<https://web.archive.org/web/20130202172939/http://www2.eie.ucr.ac.cr/~valfaro/docs/Ziegler%26Nichols.pdf>)

Metodo del relay (d.f.)

Sweep in frequenza (cenno)

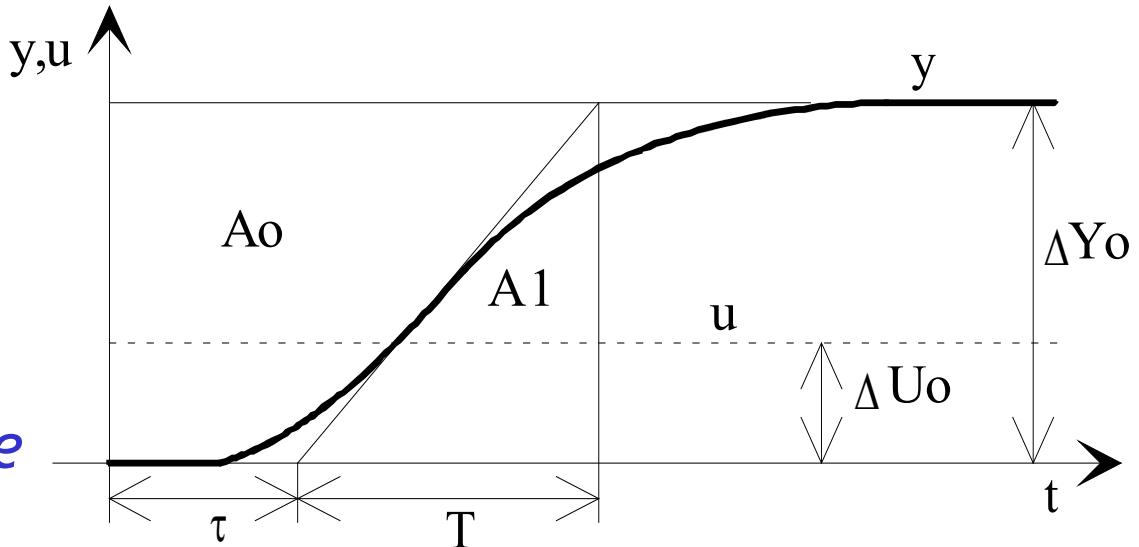
Regolatori PID - Taratura e autotaratura



Risposta allo scalino (primo metodo di Ziegler & Nichols)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_p e^{-s\tau}}{1 + sT}$$

τ ritardo apparente



Risposta monotona o a “S”

Condizioni iniziali di regime (equilibrio)

Regolatori PID - Taratura e autotaratura



Risposta allo scalino (primo metodo di Ziegler & Nichols)

$$- K_p = \frac{\Delta Y_0}{\Delta U_0}$$

- tangente nel punto di flesso τ e T

Alternativa - Metodo delle aree

Assumendo che la risposta sia quella di un sistema del prim'ordine con ritardo $\Delta Y = K_p \Delta U_0 \left(1 - e^{\frac{-(t-\tau)}{T}}\right)$

http://www.dii.unimo.it/~zanas/didattica/Controlli_Automatici/Luc_CA_12_Risposta_al_gradino.pdf

Il metodo prevede il calcolo numerico di A_0 e ΔY_0 (figura precedente), da cui si ricava $\tau + T = \frac{A_0}{\Delta Y_0}$, quindi si calcola A_1 da cui si ricava $T = \frac{A_1}{\Delta Y_0} e$

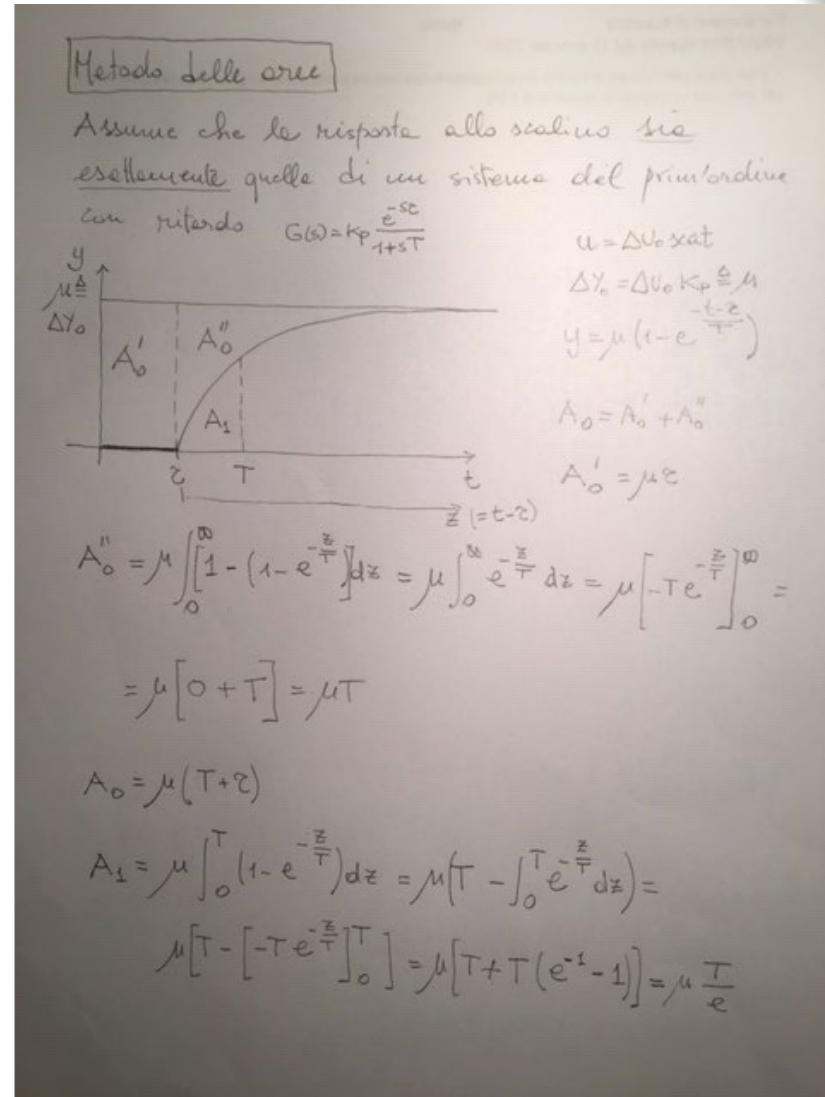
Regolatori PID - Taratura e autotaratura



Metodo delle aree Calcolo di A_0 e A_1

I calcoli (non richiesti per l'esame) sono riportati anche per ribadire che il metodo è esatto solo per risposte di sistemi del prim'ordine con ritardo.

Per risposte «reali» è approssimato come i metodi alternativi. Si presta però bene a calcoli automatici, necessari per l'auto-taratura dei regolatori.



Regolatori PID - Taratura e autotaratura



Metodo della risposta allo scalino Tabella di taratura

| | K_C | T_I | T_D | $\frac{K_C}{K_P} \frac{T}{\tau}$ | $R = \frac{K_p}{T}$ |
|-------|---------------|---------|-----------|----------------------------------|---------------------|
| P | $1/(R\tau)$ | | | | |
| PI | $0.9/(R\tau)$ | 3τ | | $\frac{0.9}{K_P} \frac{T}{\tau}$ | |
| PID | $1.2/(R\tau)$ | 2τ | 0.5τ | $\frac{1.2}{K_P} \frac{T}{\tau}$ | |

Nota: la tabella è ricavata mediante simulazione su un processo effettivamente del prim'ordine con ritardo al variare di τ/T per ottenere risposte con $\xi = 0.21$

Non vale per qualsiasi τ/T , vale per $0.15 \leq \frac{\tau}{T} \leq 0.6$

Regolatori PID - Taratura e autotaratura

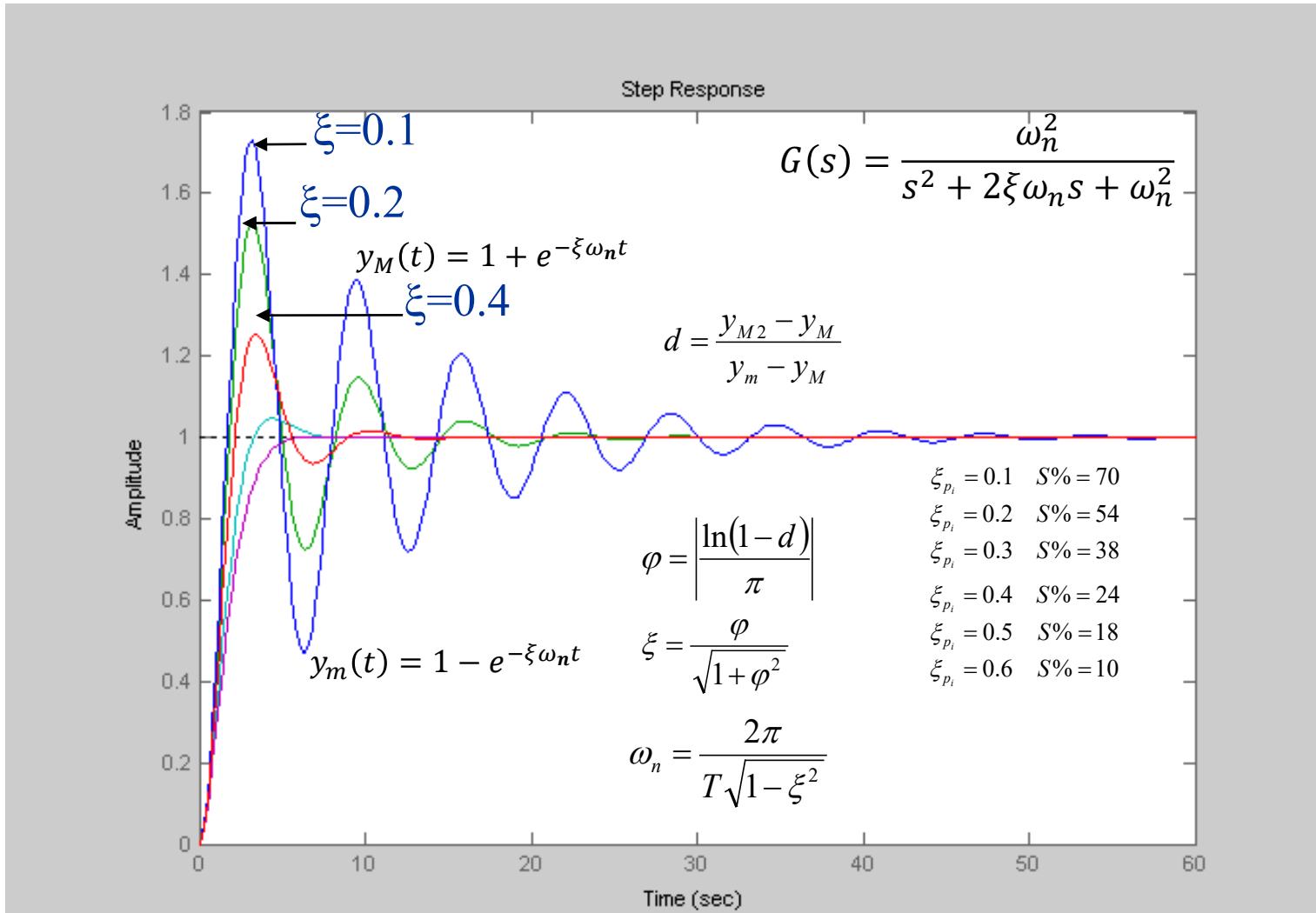


| | Note sulle regole di Ziegler e Nichols | Tipo di regolatore consigliato |
|--|---|--|
| $\frac{\tau}{T} > 1$ | Danno risultati scadenti. Si può considerare l'uso di formule alternative, reperibili in bibliografia | I per regolazione blanda. Non è utilizzabile il termine derivativo. Per buone prestazioni è essenziale l'uso di almeno uno tra predittore di Smith, anticipo, controllo in cascata. |
| $0.6 < \frac{\tau}{T} < 1$ $1.5 < K_1 < 2.25$ | Danno risultati scadenti. Risultati migliori si ottengono con le regole modificate e utilizzando il peso sul setpoint. Per regolatore PI: $T_I = \frac{2}{9}K_1 T_u, \quad b = \frac{8}{17} \left(\frac{4}{9}K_1 + 1 \right)$ | I o PI Predittore di Smith, anticipo, o controllo in cascata |
| $0.15 < \frac{\tau}{T} < 0.6$ $2 < K_1 < 20$ | Danno i risultati migliori. La sovraelongazione può essere eccessiva e può essere ridotta utilizzando il peso sul setpoint: $b = \left(\frac{15 - K_1}{15 + K_1} \right) \text{ o } b = \left(\frac{36}{27 + 5K_1} \right)$ per 10% o 20% di sovraelongazione. | PI, PID (con basso rumore di misura) |
| $\frac{\tau}{T} < 0.15$ | La sovraelongazione può essere eccessiva e può essere ridotta utilizzando il peso sul setpoint e formule modificate (come esempio regolatore PI in precedenza – sl. 20) | PI, PID (con basso rumore di misura) |

Risposte oscillatorie - Identificazione parametri di un modello del II ordine



Risposta sistema del II ordine a poli complessi coniugati



Risposte oscillatorie - Identificazione parametri di un modello del II ordine



Risposta sistema del II ordine a poli complessi coniugati

$$y(t) = \mu \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n t \sqrt{1-\xi^2} + \arccos(\xi)) \right) \quad \mu \text{ guadagno}$$

$$S = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$\xi = -\frac{\ln S}{\sqrt{\ln^2 S + \pi^2}}$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-\xi^2}}$$

Sovraelongazione = altezza del primo picco
(in p.u. del valore finale)

Dalla sovraelongazione si ricava lo smorzamento

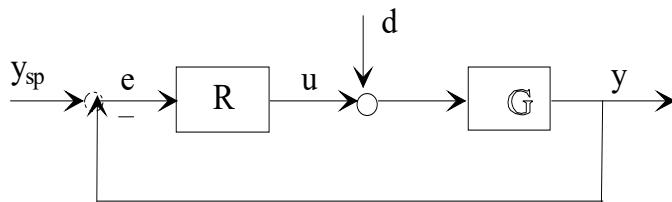
Dal periodo della sinusoide si ricava la pulsazione naturale

Se $\xi < 0.2$ o $S > 0.5$ o 50% si trova direttamente $\omega_n = \frac{2\pi}{T}$

e dal tempo di assestamento T_{a1} si trova $\xi = \frac{4.6}{T_{a1}\omega_n}$

Modello approssimato del sistema ad anello chiuso

Sistema del I o del II ordine (a poli complessi coniugati) a seconda dello smorzamento



$$F = \frac{RG}{1 + RG}$$

$F \cong \frac{1}{1 + s/\omega_c}$ risposte monotone
 $F \cong \frac{\omega_c^2}{s^2 + 2\xi\omega_c s + \omega_c^2}$ risposte oscillanti

ω_c pulsazione di taglio

Lo smorzamento ξ è esprimibile approssimativamente in funzione del margine di fase in gradi $\xi \cong \frac{\phi_m}{100}$

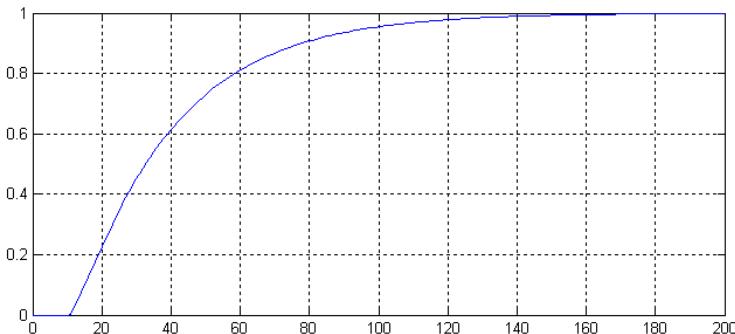
Regolatori PID

Esempio di esercizio d'esame

Posto $G(s) = 10 \frac{e^{-10s}}{1+10s}$

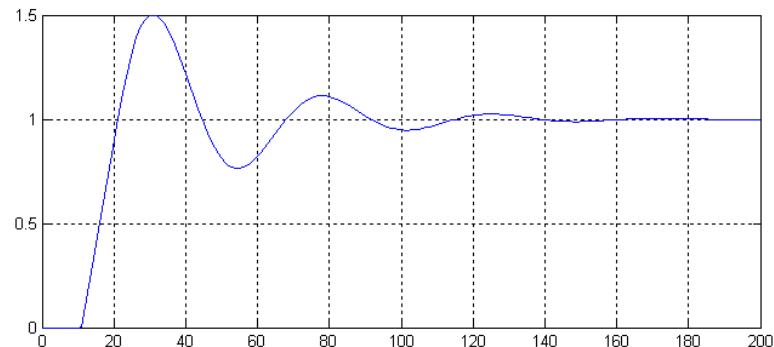
1 Dire, tra quelli della famiglia PID, quali regolatori sono indicati e quali no per il controllo di questo processo.

2 progettare un regolatore PI in modo da ottenere approssimativamente la seguente risposta allo scalino sul setpoint e calcolare il margine di fase ottenuto



3 Dire, motivando, come sarebbe necessario modificare i parametri del regolatore in modo da ottenere la risposta seguente:

Ricavare lo smorzamento con relaz FdCA 7.4.2 o fig. $\xi \cong \frac{\phi_m}{100} 4.12$ ($S\% = 50\% \rightarrow \xi = 0.2$)



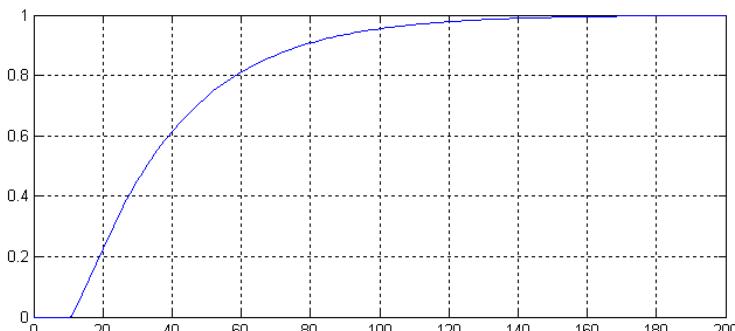


Regolatori PID

Esempio di esercizio d'esame (continua)

1 I regolatori, tra quelli della famiglia PID, per il processo $G(s) = 10 \frac{e^{-10s}}{1+10s}$ si scelgono considerando il rapporto $\frac{\tau}{T} = 1$. Sono indicati quindi i regolatori $I = \frac{K_C}{sT_I}$ e $PI = K_C \frac{1+sT_I}{sT_I}$

2 per progettare un regolatore PI in modo da ottenere approssimativamente la risposta allo scalino sul setpoint di figura, ricaviamo da essa una stima della pulsazione di taglio da ottenere. La risposta è approssimativamente quella di un sistema del prim'ordine + ritardo pari a 10s (lo stesso del processo).



$$F(s) \cong \frac{e^{-10s}}{1 + 30s}$$

La costante di tempo $T_{cl} = 30s$ si può ricavare dal tempo di assestamento (circa 140s) oppure dal tempo di salita al 63%.

Avremo quindi $\omega_c = \frac{1}{T_{cl}} = 0.033 \text{ rad/s}$

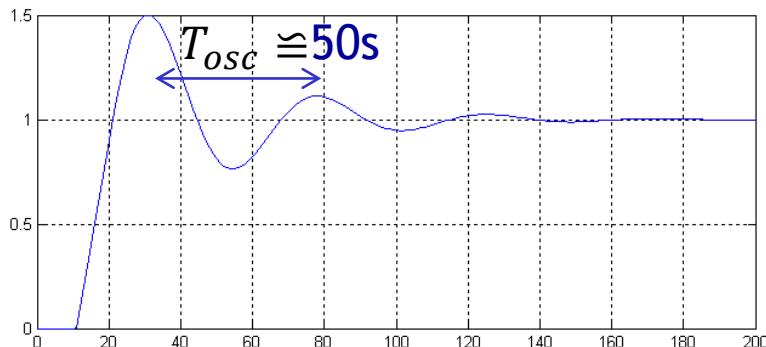
Ponendo $T_I = 10$ (cancellazione polo-zero) si ottiene $L(s) = K_c \frac{e^{-10s}}{s}$ e da $|L(j\omega_c)| = 1$ si ottiene $K_c = \frac{1}{30}$. Poiché $\angle(L(j\omega_c)) = -90 - \frac{10}{30} \frac{180}{\pi} \cong -109^\circ$, $\varphi_m \cong 71^\circ$, coerente con la risposta sopra

Regolatori PID



Esempio di esercizio d'esame (continua) $G(s) = 10 \frac{e^{-10s}}{1+10s}$

3 come modificare i parametri del regolatore in modo che la risposta diventi la seguente?



La risposta è approssimabile con quella di un sistema del II ordine con poli cc oltre al ritardo

$$F(s) \cong \frac{\omega_c^2 e^{-10s}}{s^2 + 2\xi\omega_c s + \omega_c^2}$$

Confrontando con la risposta allo scalino di tale sistema si trova $S\% = 50\% \rightarrow \xi = 0.2$.

Con tale smorzamento ($\xi <= 0.2$) si può trovare direttamente ω_n dal periodo dell'oscillazione smorzata $\omega_c \cong \frac{2\pi}{50} = 0.128$

Poiché $\angle(L(j\omega_c)) = -90 - 1.28 \frac{180}{\pi} \cong -163^\circ$, $\varphi_m \cong 17^\circ$, coerente con l'espressione approssimata $\xi \cong \frac{\varphi_m}{100}$

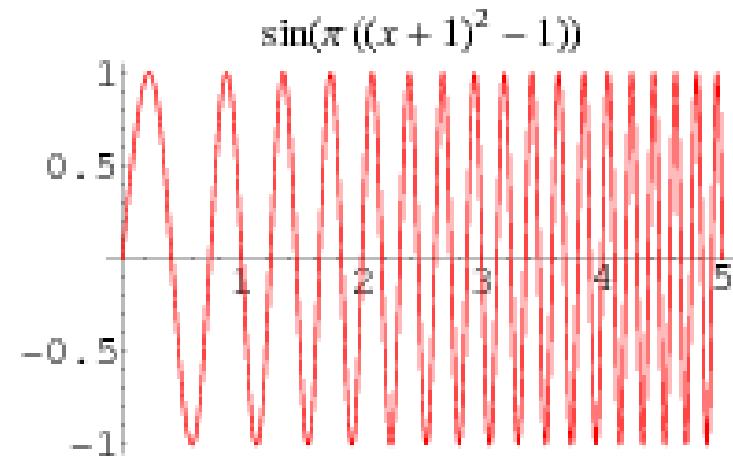
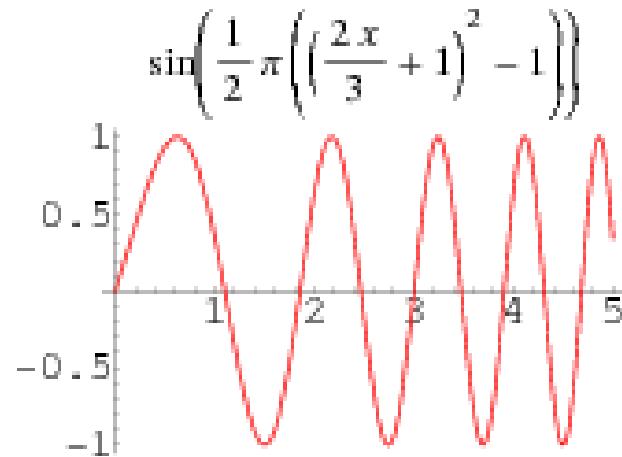
Per il calcolo del guadagno, sempre con la cancellazione poli-zero $T_I = 10$, vale ancora $K_c = \omega_c = 0.128$.

Sweep in frequenza (cenno)



E' un altro metodo, usato per identificare i parametri di sistemi elettromeccanici

Swept sine wave (letteratura) $y(a, b, c, d) = c \sin \left\{ \frac{\pi}{b-a} \left[\left((b-a) \frac{x}{d} + a \right)^2 - a^2 \right] \right\}$.



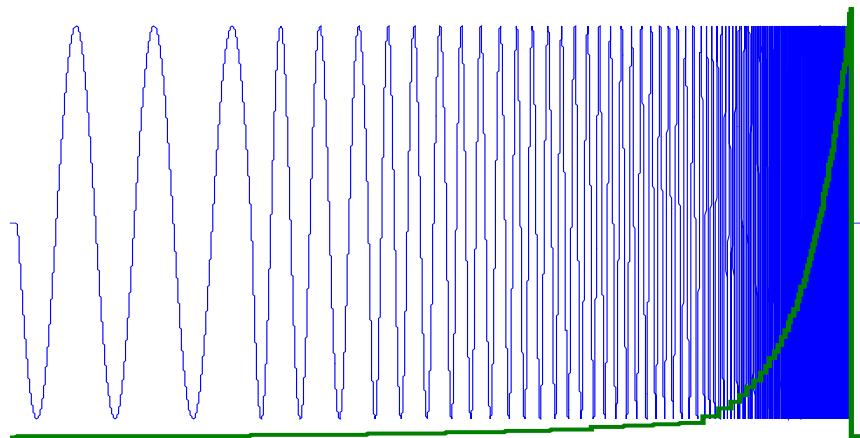
Espressione alternativa: che evidenzia la frequenza crescente linearmente con il tempo. $f_{max} - f_{min}$ è il range di frequenze d'interesse per il sistema considerato

$$u(t) = A \sin \omega t = A \sin 2 \pi \left[f_{min} + \frac{f_{max} - f_{min}}{T_{sw}} t \right] t \quad 0 \leq t \leq T_{sw}$$

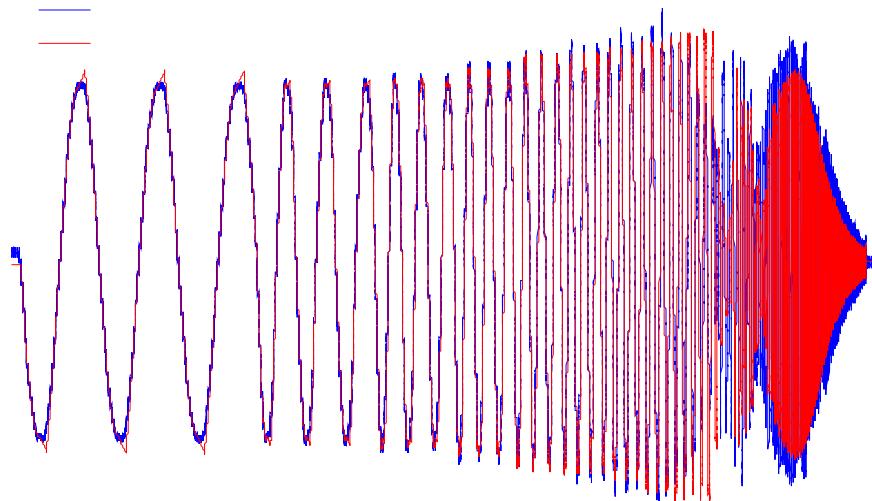
Sweep in frequenza



Un esempio (da un caso reale)



Segnale eccitante 0-300Hz
Corrente di motore elettrico

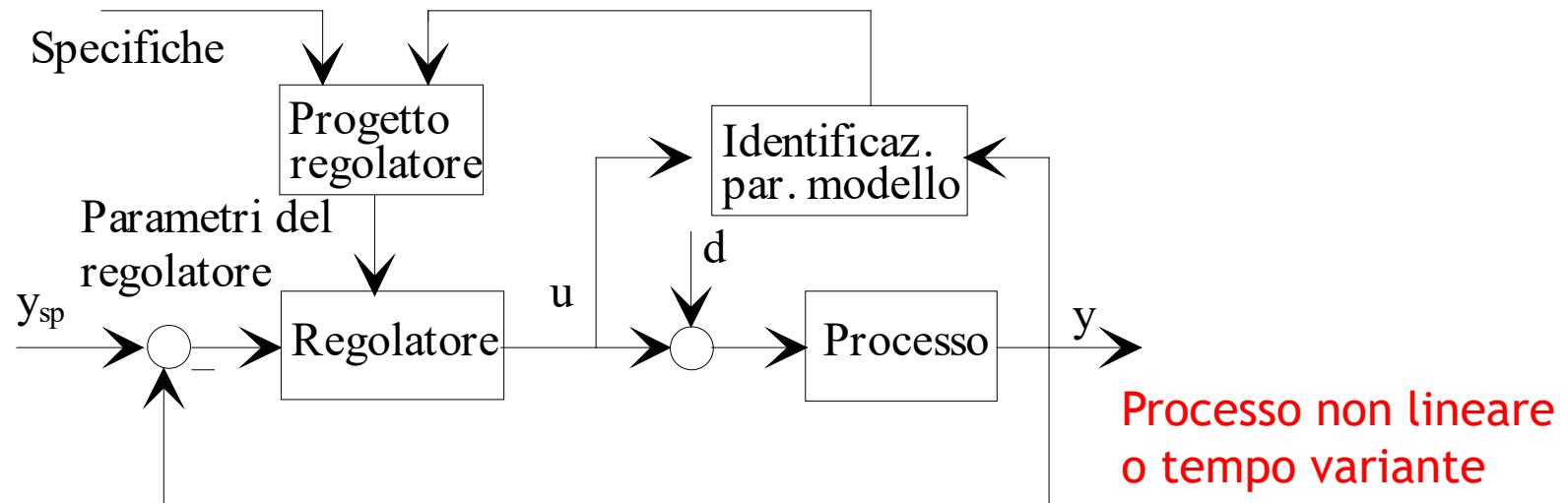


Risposta della velocità
(simulata e sperimentale)
dell'asse di una macchina
utensile.
L'inviluppo della risposta
rappresenta il modulo del
diagramma di Bode della
f.d.t. corrente / velocità
dell'asse

Regolatori PID - Controllo adattativo



Controllo adattativo: il regolatore aggiusta i propri parametri con continuità a fronte delle variazioni dei parametri del processo



Controllo adattativo - continuous adaptive o self-tuning - controllo adattativo indiretto (indirect) o controllo adattativo basato su modello

Non lineare, complesso, possibili problemi di varia natura

Regolatori PID - Controllo adattativo



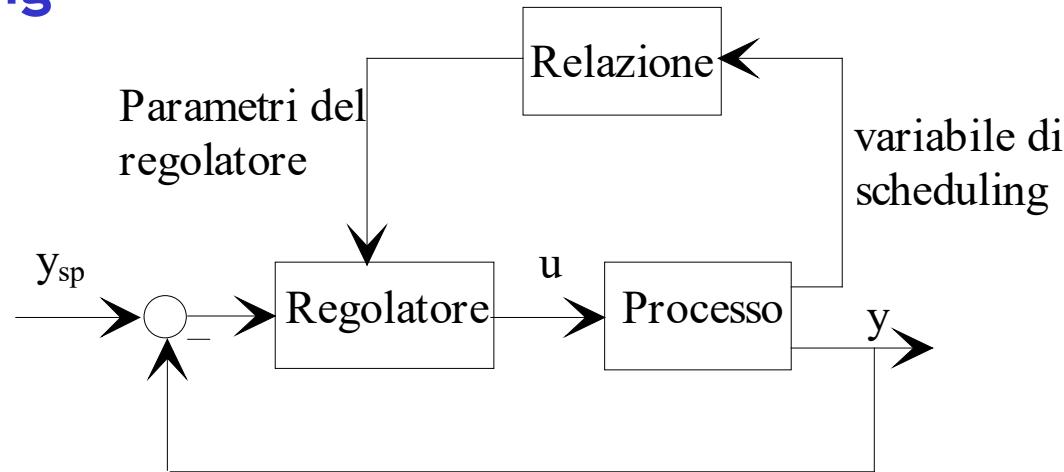
Controllo adattativo

- Aggiustamento automatico “occasionale” dei parametri “a regole”
 - **Parameter (gain) scheduling:** aggiustamento dei parametri (guadagno) del regolatore in funzione del valore misurato di una variabile del processo (che esprime le variazioni della dinamica del processo)
- “Se funziona” può dare risultati eccellenti. Non c’è ritardo dovuto al tempo richiesto dalla stima dei parametri del modello del processo

Regolatori PID - Controllo adattativo



Gain scheduling



$$G(s) = g(w)G'(s)$$

Serie di modelli linearizzati

$$g_n = g(w_n)$$

$$PI(s) = K_{Cn} \frac{1 + sT_I}{T_I s}$$

tarato in corrispondenza di g_n

$$K_C(w) = K_{Cn} \frac{g_n}{g(w)}$$

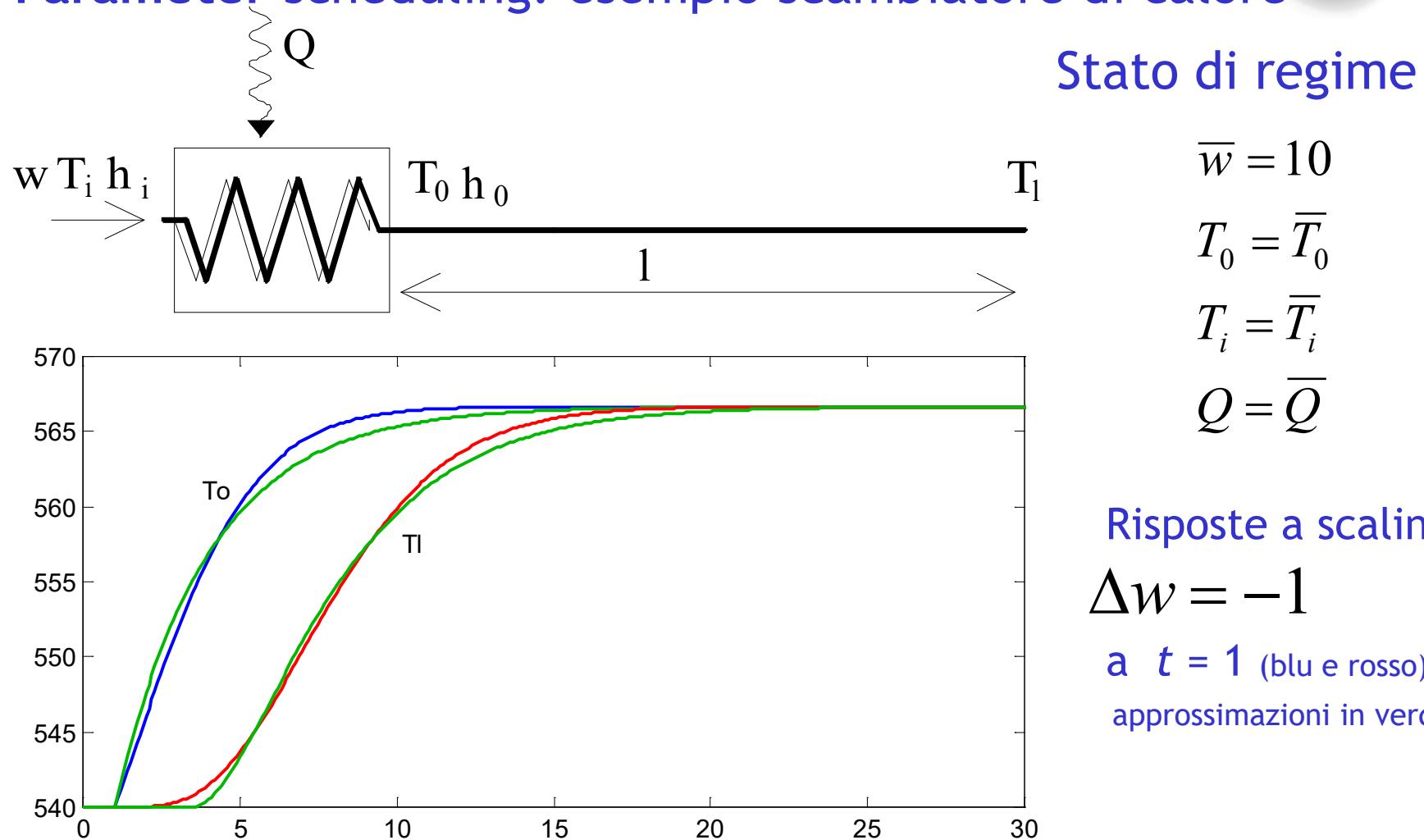
mantiene invariata la pulsazione di taglio

$$K_C(w)g(w) = K_{Cn}g_n$$

Regolatori PID - Controllo adattativo



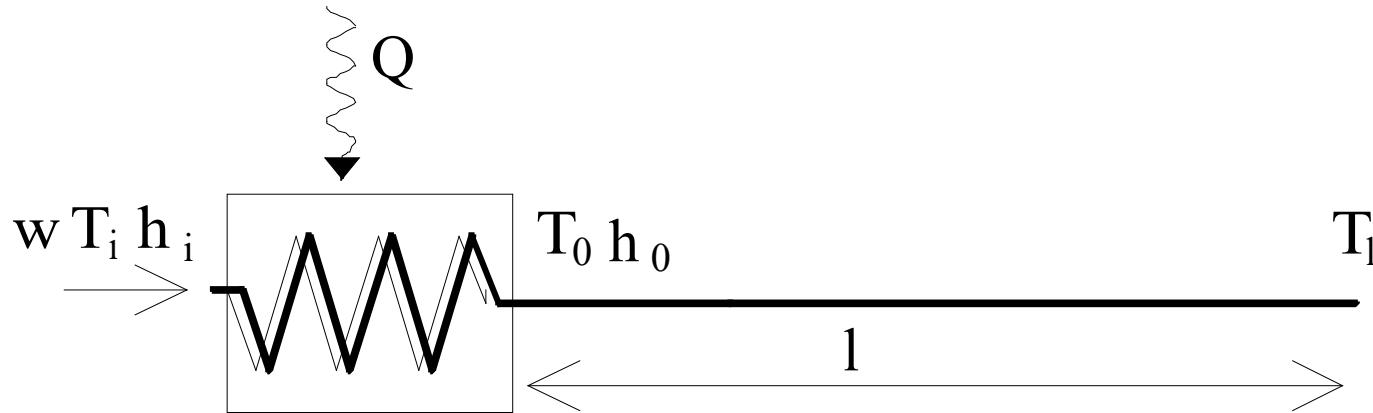
Parameter scheduling: esempio scambiatore di calore



Regolatori PID - Controllo adattativo



Parameter scheduling: esempio scambiatore



Modello

$$\frac{T_l}{w} = G(s) = \frac{K_p e^{-s\tau}}{1 + sT}$$

$$K_p = \frac{\bar{T}_l - \bar{T}_i}{\bar{w}}$$

$$T = \frac{m}{\bar{w}}$$

$$\tau = \frac{M}{\bar{w}}$$

Per un regime qualsiasi con portata \bar{w}

m massa di fluido nello scambiatore

M massa di fluido nel tubo di collegamento all'uscita

Regolatori PID - Controllo adattativo



Parameter scheduling: esempio scambiatore

Regolatore PI

$$PI(s) = K_C \frac{1 + sT_I}{sT_I}$$

$$T_I = T = \frac{m}{\bar{w}} = T_{In} \frac{w_n}{\bar{w}}$$

Legge di variazione di T_I

Per $\varphi_m = 45^\circ$ (e cancellazione polo-zero)

$$\omega_c = \frac{\pi}{4\tau}$$



$$\omega_c = \frac{\pi \bar{w}}{4M}$$

Pulsazione di taglio
proporzionale a \bar{w}

$$K_C = \frac{1}{K_p} \frac{\pi}{4} \frac{T}{\tau}$$



$$K_C = \frac{\pi \bar{w} m}{4M(\bar{T}_0 - \bar{T}_i)} = K_{Cn} \frac{\bar{w}}{w_n}$$

Legge di variazione
di K_C

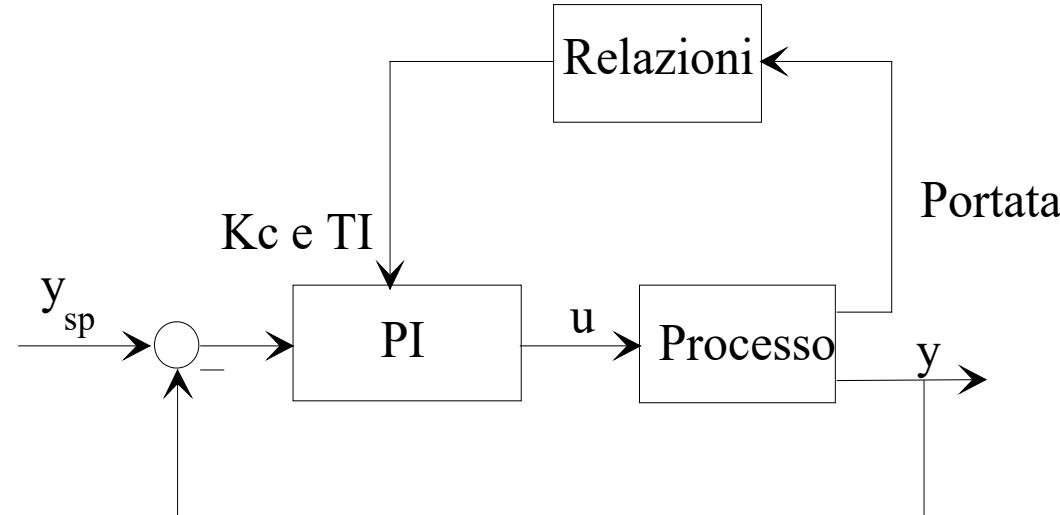
$$K_{Cn} = \frac{\pi m w_n}{4M(\bar{T}_0 - \bar{T}_i)}$$

Regolatori PID - Controllo adattativo



Parameter scheduling: esempio scambiatore

Schema a blocchi



Sistema non lineare: studiare accuratamente in simulazione e verificare con molta cautela in particolare su un velivolo



Gain e parameter scheduling

“This type of control design is called gain scheduling. The cruise controller is a typical example where the measured signal could be gear position and velocity. **Gain scheduling is the common solution for high-performance aircraft where scheduling is done based on Mach number and dynamic pressure.**” (AM sect. 13.5 Limits of robust design)

Esempi nel controllo degli elicotteri:

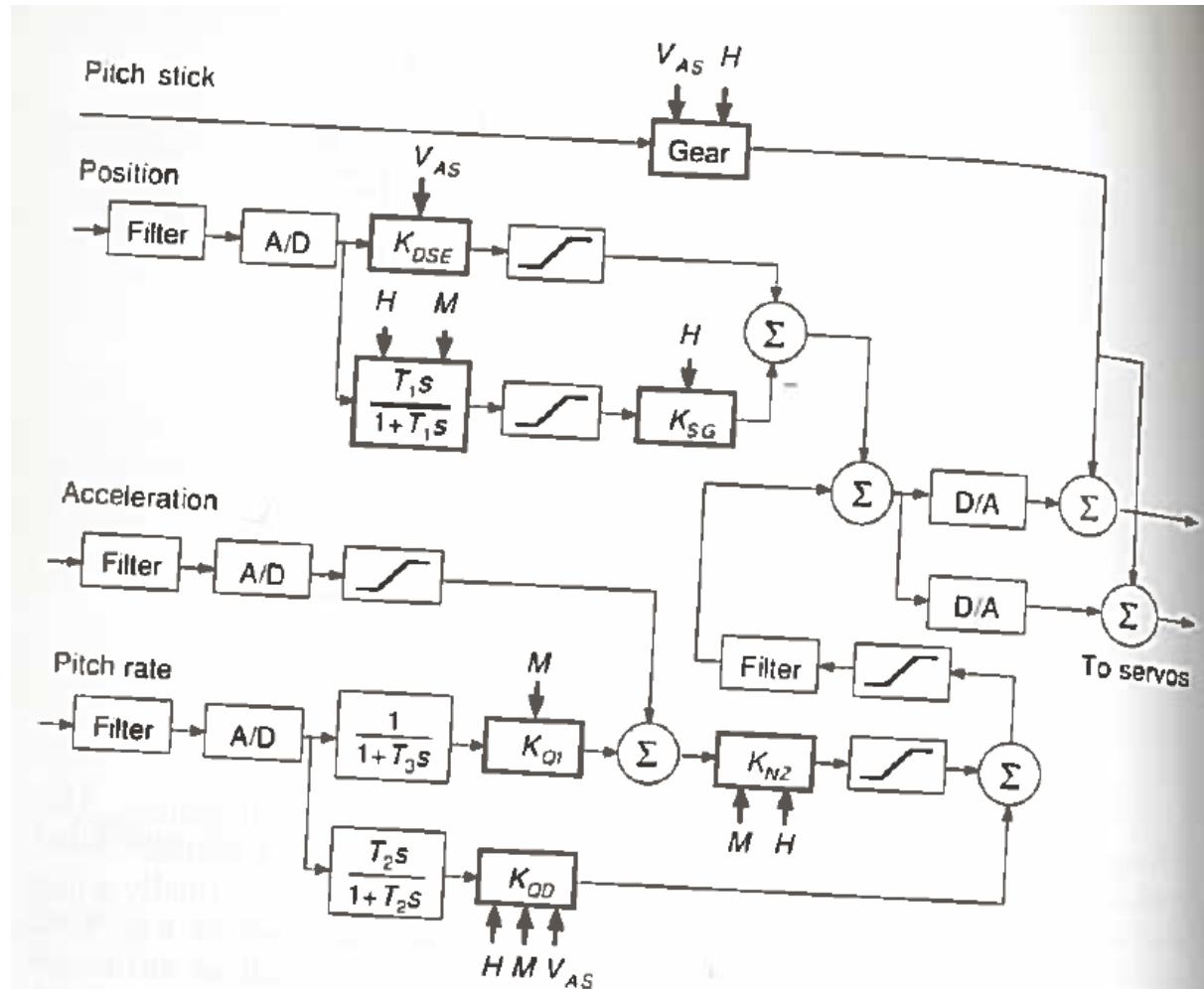
scheduling dei parametri dei regolatori (delle matrici di guadagni, essendo un sistema multivariabile) in funzione:

- della velocità longitudinale o dell'aria
- della quota

Gain scheduling - esempio: pitch control



Schema a blocchi semplificato del controllo di pitch di un aereo supersonico



Le frecce entranti nei blocchi da sopra o sotto indicano la dipendenza dei parametri da

- V_{AS} airspeed
- H height
- M mach number

Tratto da:
Astrom & Wittenmark
Adaptive Control
Pag. 368

Gain scheduling - esempio: pitch control



Schema a blocchi semplificato del controllo di pitch di un aereo supersonico

Esempio di scheduling dei parametri: guadagno K_{QD}

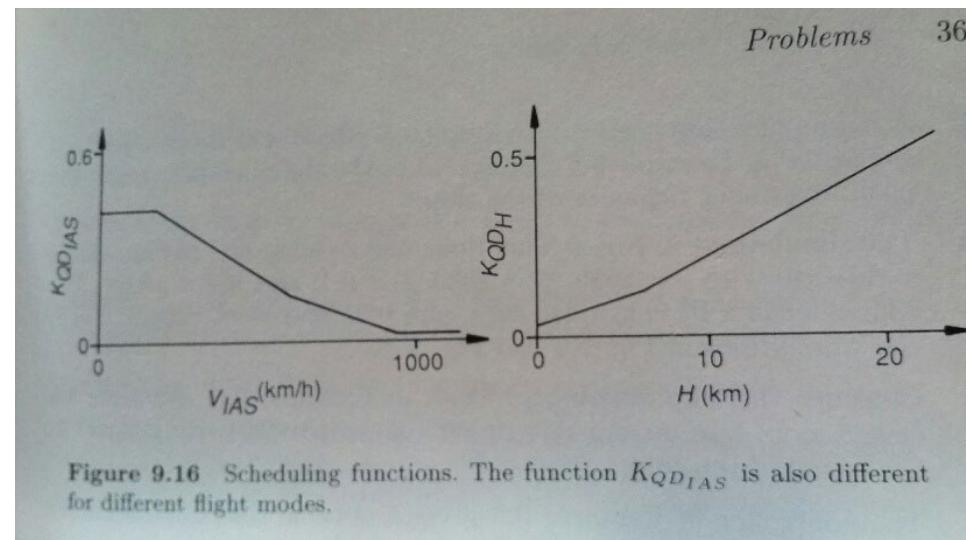
$$K_{QD} = K_{QD_{IAS}} + (K_{QD_H} - K_{QD_{IAS}})MF$$

$K_{QD_{IAS}}$ funzione della air speed

K_{QD_H} funzione della quota

$$MF = \frac{1}{s + 1} K_{MF}$$

K_{MF} funzione del numero di Mach



Regolatori PID - Controllo adattativo



Controllo adattativo: vale la pena? Per quali obiettivi?

