Fondamenti di robotica

Posizione e orientamento del corpo rigido

Prof. Paolo Rocco (paolo.rocco@polimi.it)

Politecnico di Milano, Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria

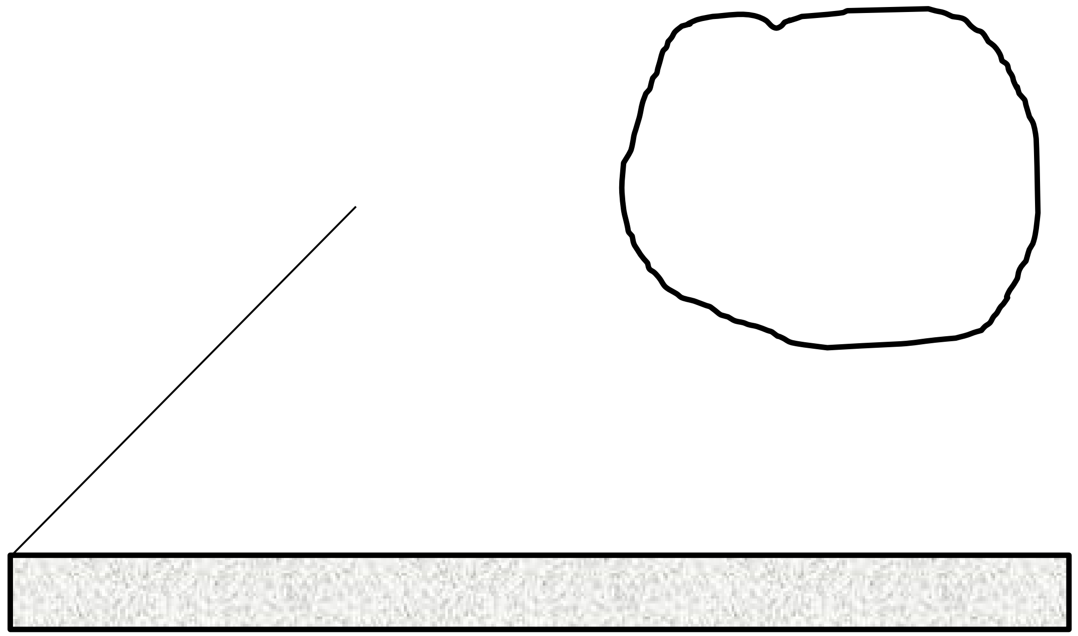
Introduzione

- L'utilizzo consapevole del manipolatore robotico comporta di essere in grado di descriverne il movimento, ovvero di comprendere la **cinematica del robot**
- Per affrontare questo problema dobbiamo partire da un problema fondamentale, che consiste nella **rappresentazione di posizione e orientamento di un corpo rigido nello spazio**
- Le modalità di rappresentazione del corpo rigido saranno poi applicate ai corpi (link) che costituiscono la catena cinematica del robot, in modo da poterne studiare in modo sistematico la cinematica

Alcune immagini in queste diapositive sono prese dal libro di testo:
B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo:
Robotica: modellistica, pianificazione e controllo, 3a Ed.
McGraw-Hill Italia, 2008

Posizione e orientamento di un corpo nello spazio

Consideriamo un corpo rigido nello spazio:

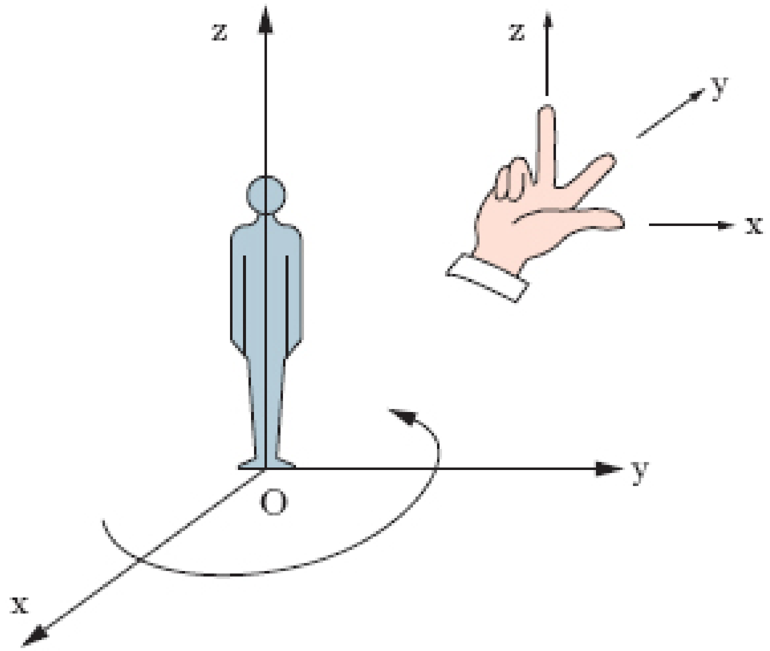


Come possiamo caratterizzare la posizione e l’orientamento del corpo nello spazio?

Posizione e orientamento di un corpo nello spazio

Lo studio della cinematica dei corpi meccanici è facilitato dall'introduzione di **sistemi di riferimento Cartesiani**.

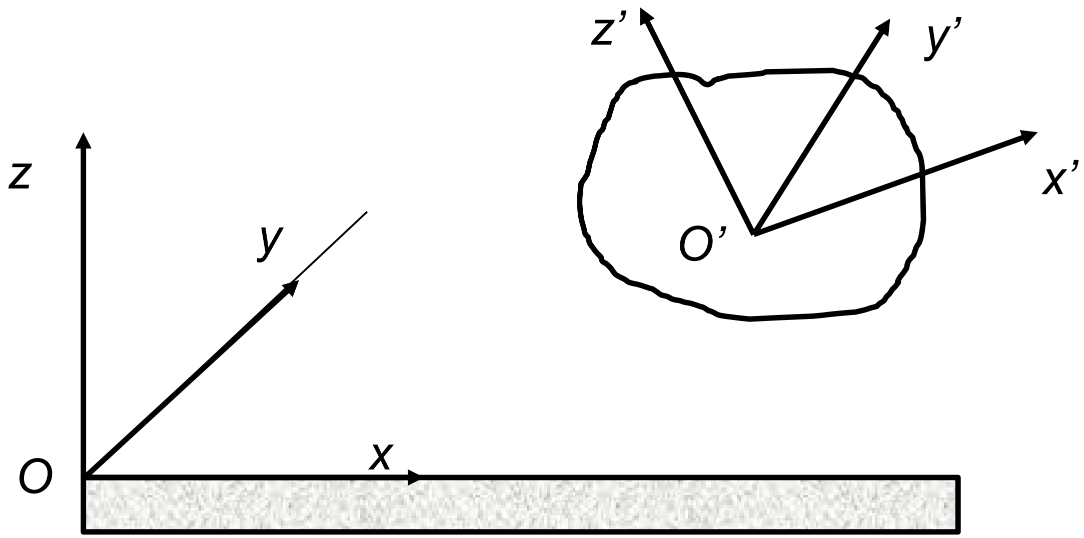
Ogni punto nello spazio ha 3 coordinate (*x*, *y*, *z*) nel sistema Cartesiano.



Utilizzeremo sempre la **regola della mano destra**

Posizione e orientamento di un corpo nello spazio

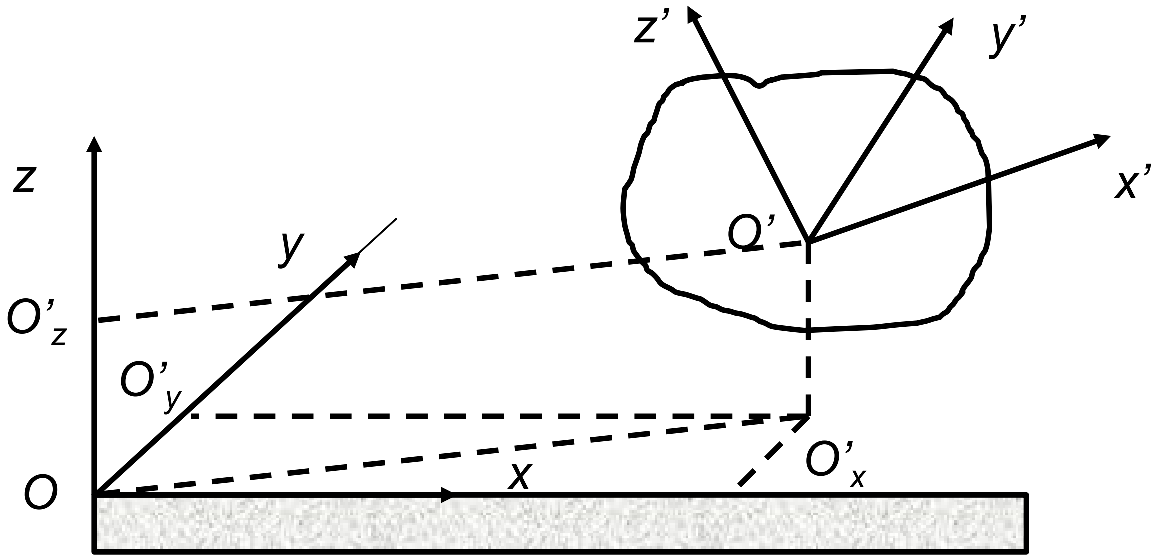
Il modo migliore di procedere è considerare un sistema di riferimento «base» e attaccare un secondo sistema al corpo.



Il problema è ora come caratterizzare la posizione e l'orientamento di una terna rispetto a un'altra.

Posizione e orientamento di un corpo nello spazio

La rappresentazione della posizione è ottenuta semplicemente con le componenti dell’origine della terna solidale al corpo rispetto alla terna di riferimento:

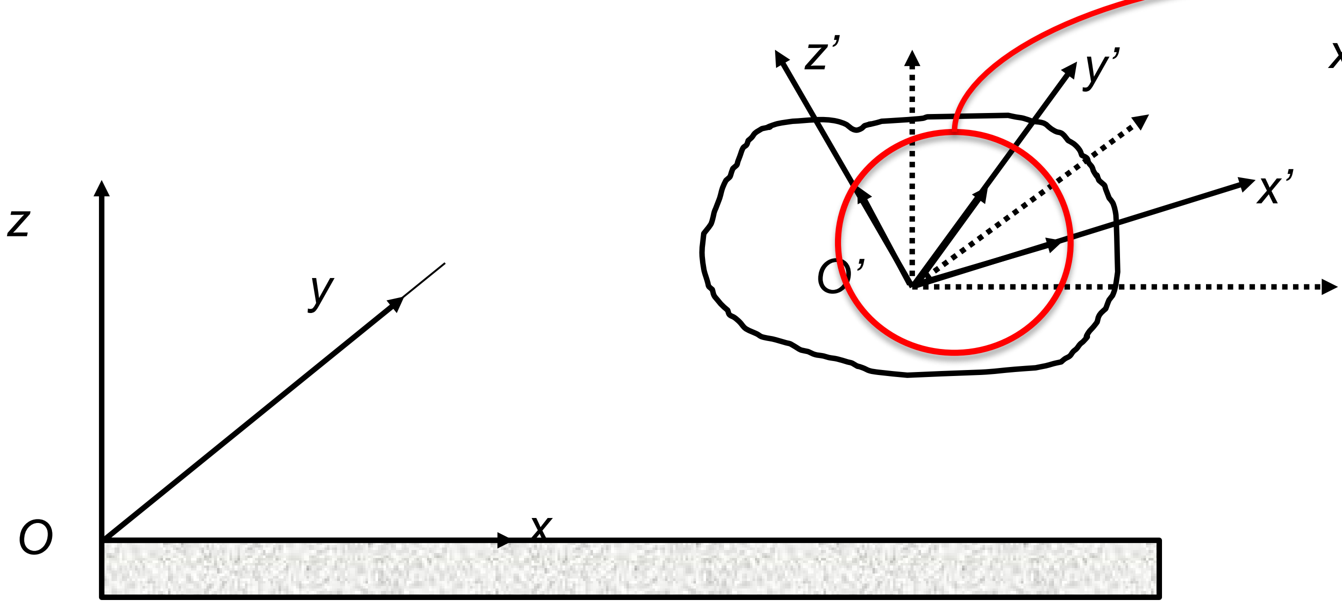


Le tre componenti possono essere comodamente raccolte in un **vettore**:

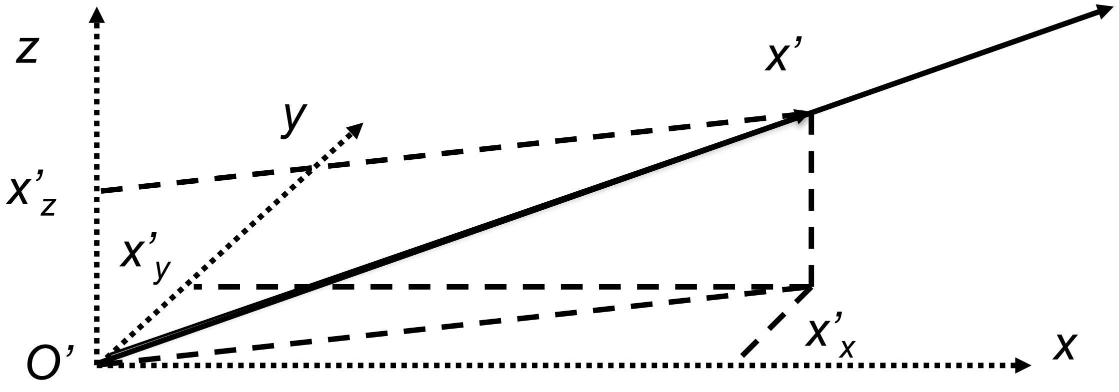
$$\mathbf{O}' = \begin{bmatrix} o'_x \\ o'_y \\ o'_z \end{bmatrix}$$

Posizione e orientamento di un corpo nello spazio

La rappresentazione dell'orientamento può essere effettuata considerando i vettori di lunghezza unitaria (versori) lungo gli assi del sistema di riferimento ruotato e valutandone le componenti nel sistema di riferimento fisso:



Per esempio, per il versore x':



Otteniamo tre vettori:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x'_x \\ x'_y \\ x'_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y'_x \\ y'_y \\ y'_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} z'_x \\ z'_y \\ z'_z \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione

Possiamo raccogliere gli elementi di $\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}'$ in una matrice:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{x}' \quad \mathbf{y}' \quad \mathbf{z}'] = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'^T\mathbf{x} & \mathbf{y}'^T\mathbf{x} & \mathbf{z}'^T\mathbf{x} \\ \mathbf{x}'^T\mathbf{y} & \mathbf{y}'^T\mathbf{y} & \mathbf{z}'^T\mathbf{y} \\ \mathbf{x}'^T\mathbf{z} & \mathbf{y}'^T\mathbf{z} & \mathbf{z}'^T\mathbf{z} \end{bmatrix}$$

coseni direttori

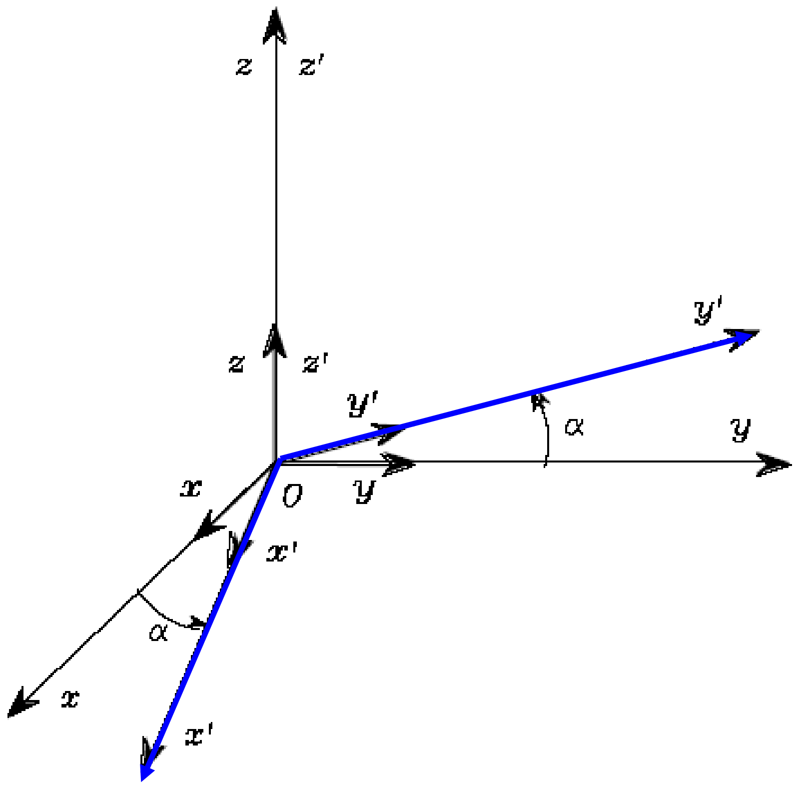
Questa matrice è chiamata **matrice di rotazione** del sistema $(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}')$ rispetto al sistema $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$.
Poiché valgono le seguenti relazioni:

$$\mathbf{x}'^T\mathbf{x}' = 1, \quad \mathbf{y}'^T\mathbf{y}' = 1, \quad \mathbf{z}'^T\mathbf{z}' = 1$$
$$\mathbf{x}'^T\mathbf{y}' = 0, \quad \mathbf{y}'^T\mathbf{z}' = 0, \quad \mathbf{z}'^T\mathbf{x}' = 0$$

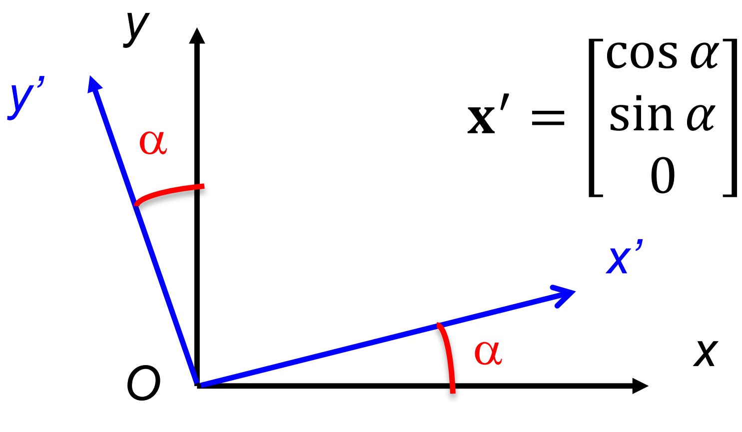
si ha: $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1})$ **matrice ortogonale**

Rotazioni elementari

Consideriamo una rotazione di un angolo α attorno all'asse $\mathbf{z}$:



Proiezione nel piano $\mathbf{x}, \mathbf{y}$:



$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice di rotazione è quindi:

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotazioni elementari

Le rotazioni elementari intorno agli altri assi possono essere ottenute con argomenti simili:

- Rotazione di un angolo β attorno all'asse **y**

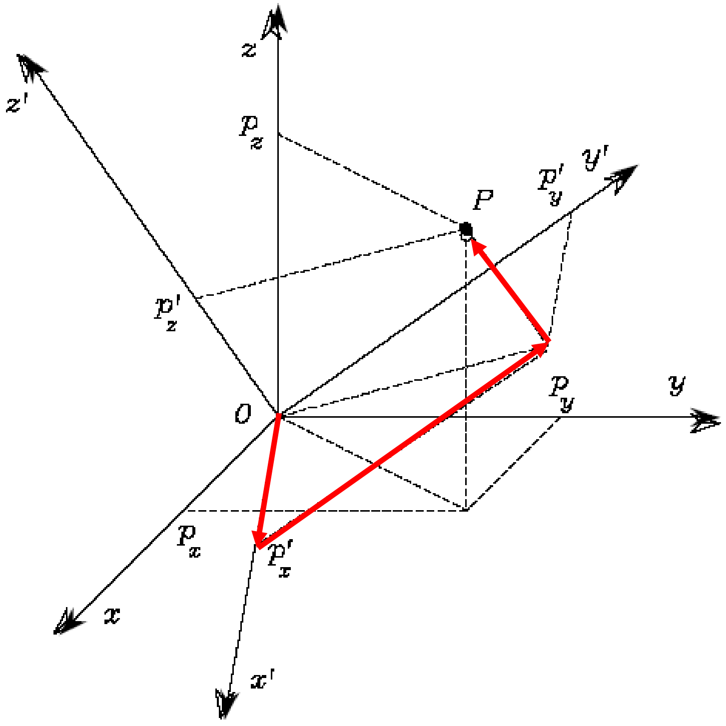
$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

- Rotazione di un angolo γ attorno all'asse **x**

$$\mathbf{R}_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

Rappresentazione di un vettore

Si consideri ora un punto $\mathbf{p}$ le cui coordinate sono espresse in due sistemi di riferimento.
Le coordinate dello **stesso punto** nei due sistemi sono:



$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}' = \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix}$$

Il vettore $\mathbf{p}$ si può ottenere come somma di tre vettori diretti come $\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}'$:

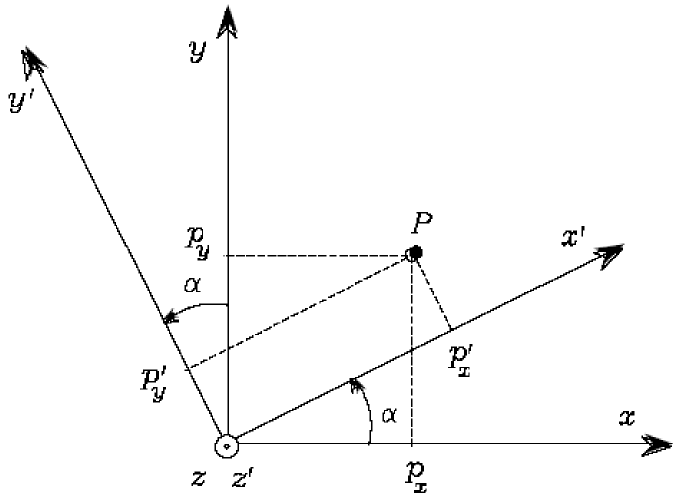
$$\mathbf{p} = p'_x\mathbf{x}' + p'_y\mathbf{y}' + p'_z\mathbf{z}' = [\mathbf{x}' \quad \mathbf{y}' \quad \mathbf{z}']\mathbf{p}' = \mathbf{R}\mathbf{p}'$$

La matrice di rotazione codifica quindi la **trasformazione** che mappa le coordinate espresse nel sistema $(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}')$ nelle coordinate espresse nel sistema $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$.

Trasformazione inversa: $\mathbf{p}' = \mathbf{R}^T\mathbf{p}$

Rappresentazione di un vettore: esempio

Consideriamo due terne, ruotate l'una rispetto all'altra di un angolo α attorno all'asse $\mathbf{z}$:



Le coordinate del punto $\mathbf{p}$ sono:

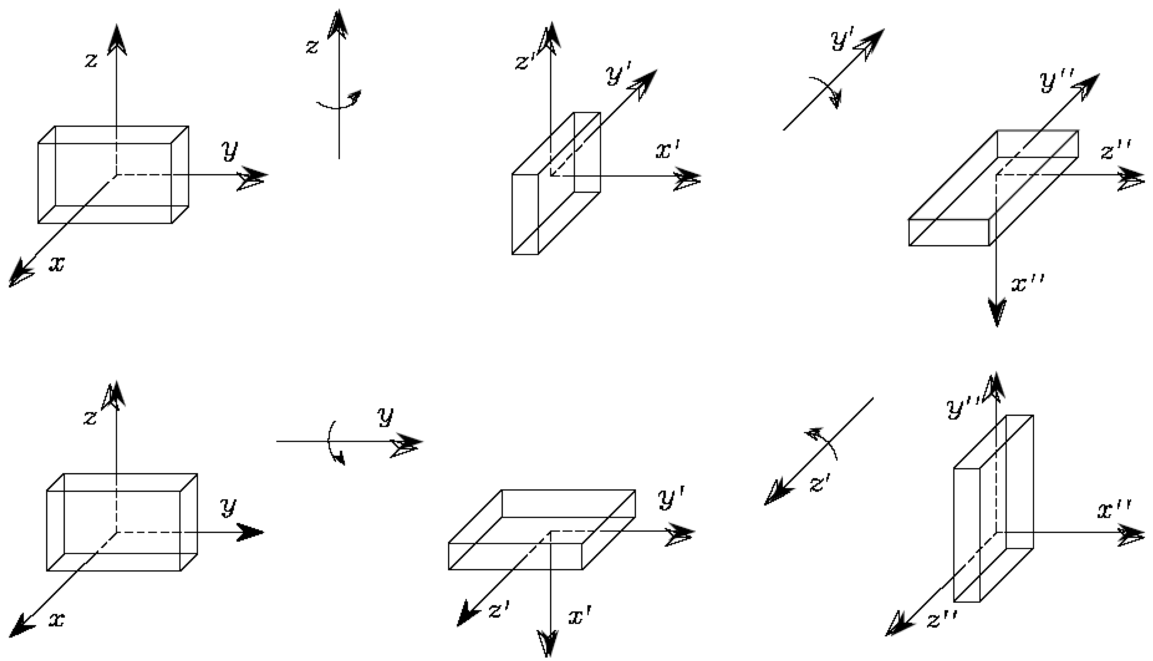
$$p_x = p'_x \cos\alpha - p'_y \sin\alpha$$
$$p_y = p'_x \sin\alpha + p'_y \cos\alpha$$
$$p_z = p'_z$$

Risulta quindi:

$$\mathbf{p} = p'_x \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} + p'_y \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} + p'_z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = p'_x\mathbf{x}' + p'_y\mathbf{y}' + p'_z\mathbf{z}' = [\mathbf{x}' \quad \mathbf{y}' \quad \mathbf{z}']\mathbf{p}' = \mathbf{R}\mathbf{p}'$$

Composizione delle matrici di rotazione

La rotazione di una terna rispetto a un’altra può essere ottenuta combinando rotazioni parziali:



Si noti che le rotazioni non sono commutative.

Composizione delle matrici di rotazione

Consideriamo tre sistemi di riferimento (indicati come sistemi 0, 1 e 2) con origine comune.
Denotiamo con:

$\mathbf{R}_i^j$ la matrice di rotazione del sistema i rispetto al sistema j

Quindi:

$$\mathbf{R}_i^j = \left(\mathbf{R}_j^i\right)^{-1} = \left(\mathbf{R}_j^i\right)^T$$

Le coordinate dello stesso punto nei tre sistemi di riferimento possono essere espresse in modi diversi:

$$\mathbf{p}^1 = \mathbf{R}_2^1\mathbf{p}^2 \qquad \mathbf{p}^0 = \mathbf{R}_1^0\mathbf{p}^1 \qquad \mathbf{p}^0 = \mathbf{R}_2^0\mathbf{p}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{R}_2^0 = \mathbf{R}_1^0\mathbf{R}_2^1$$

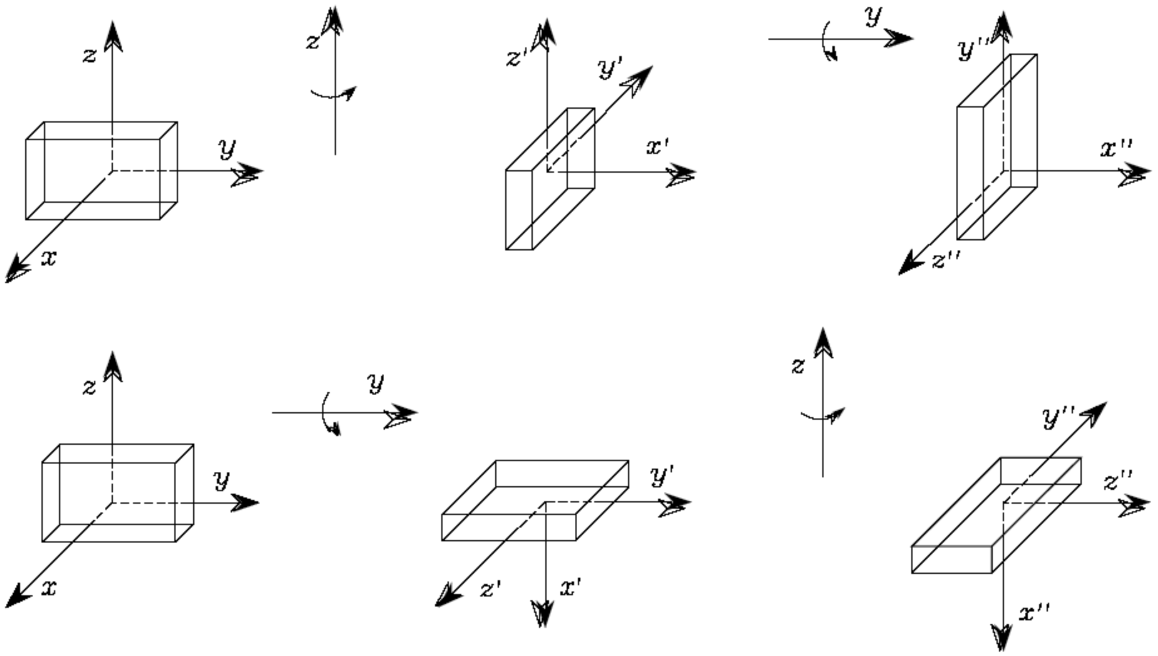
Le rotazioni possono quindi essere ottenute componendo rotazioni parziali.

Le matrici di rotazione parziale vengono **moltiplicate da sinistra a destra**.

Composizione delle matrici di rotazione: terna fissa

Le rotazioni possono anche essere effettuate in terna fissa:

Si effettua una rotazione rispetto all'asse **y** ***della terna originaria***



Anche in questo caso le rotazioni non sono commutative.

Composizione delle matrici di rotazione: terna fissa

Per comprendere come determinare la matrice di rotazione complessiva derivante da due rotazioni parziali in terna fissa, seguiamo questo ragionamento:

Consideriamo la sequenza di rotazioni:

1. Si ruota la terna 0 fino a sovrapporla con la 1: $\mathbf{R}_1^0$
2. Si riallinea la terna mobile con la 0: $\mathbf{R}_0^1$
3. Si effettua la rotazione $\bar{\mathbf{R}}_2^1$ rispetto alla terna corrente (ora terna 0)
4. Si compensa la rotazione del riallineamento, mediante la $\mathbf{R}_1^0$

Complessivamente:

$$\bar{\mathbf{R}}_2^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_0^1 \bar{\mathbf{R}}_2^1 \mathbf{R}_1^0 = \bar{\mathbf{R}}_2^1 \mathbf{R}_1^0$$

Le matrici di rotazione parziale vengono **moltiplicate da destra a sinistra**.

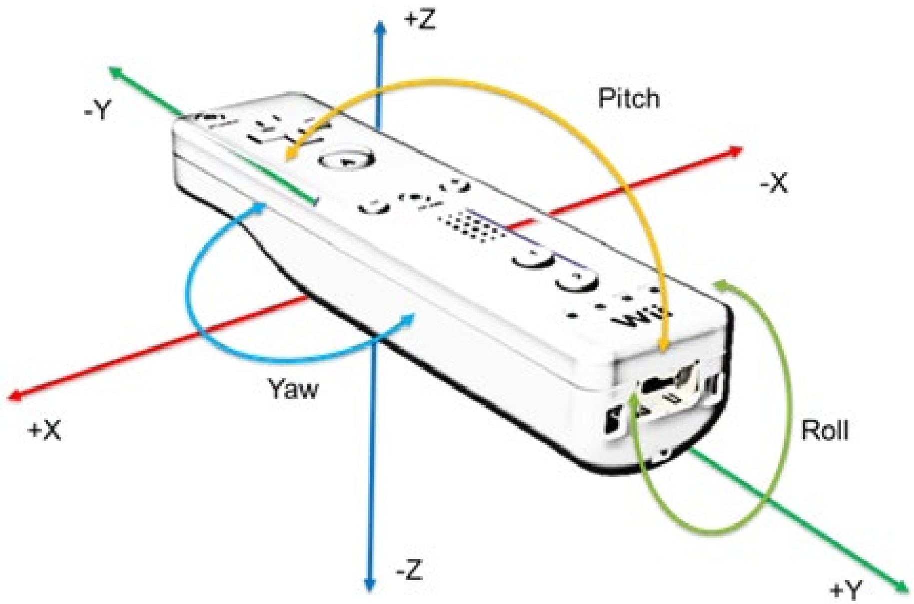
Rappresentazione minima dell'orientamento

Una matrice di rotazione rappresenta l'orientamento di un sistema rispetto a un altro mediante 9 parametri, tra i quali esistono 6 vincoli.

In una **rappresentazione minima** l'orientamento è descritto per mezzo di 3 parametri indipendenti.

Le possibili rappresentazioni sono:

- angoli di Eulero (3 parametri)
- angoli roll-pitch-yaw (3 parametri)
- asse/angolo (4 parametri)
- quaternioni (4 parametri)



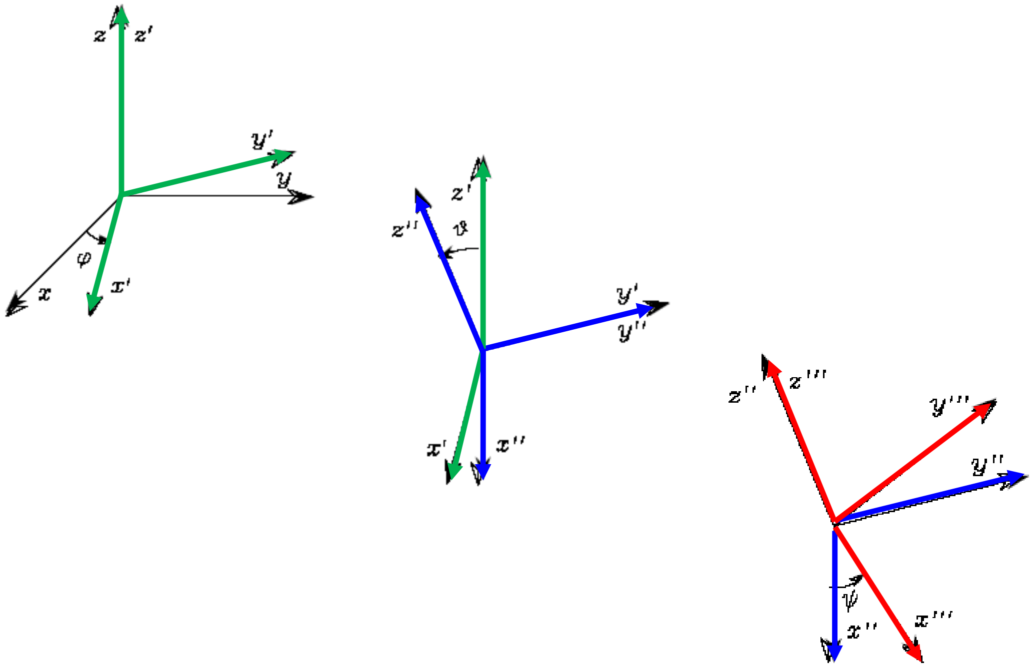
Angoli di Eulero ZYZ

Con gli **angoli di Eulero ZYZ** la sequenza è composta come segue (rotazioni in terna mobile):

I) Rotazione intorno a Z (angolo φ)

II) Rotazione intorno a Y' (angolo ϑ)

III) Rotazione intorno a Z'' (angolo ψ)



$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{R}_{y'}(\vartheta)\mathbf{R}_{z''}(\psi) = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\vartheta c_\psi - s_\varphi s_\psi & -c_\varphi c_\vartheta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\vartheta \\ s_\varphi c_\vartheta c_\psi + c_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\vartheta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\vartheta \\ -s_\vartheta c_\psi & s_\vartheta s_\psi & c_\vartheta \end{bmatrix}$$

$$c_\vartheta = \cos(\vartheta)$$
$$s_\vartheta = \sin(\vartheta)$$

Angoli di Eulero ZYZ: problema inverso

Assegnata la matrice di rotazione $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$

Gli angoli di Eulero ZYZ sono:

$\vartheta \in (0, \pi)$:

$$\begin{aligned} \varphi &= \mathrm{Atan2}(r_{23}, r_{13}) \\ \vartheta &= \mathrm{Atan2}\left(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right) \\ \psi &= \mathrm{Atan2}(r_{32}, -r_{31}) \end{aligned}$$

$\vartheta \in (-\pi, 0)$:

$$\begin{aligned} \varphi &= \mathrm{Atan2}(-r_{23}, -r_{13}) \\ \vartheta &= \mathrm{Atan2}\left(-\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right) \\ \psi &= \mathrm{Atan2}(-r_{32}, r_{31}) \end{aligned}$$

Per risolvere il problema ci si concentra sulla terza colonna e sulla terza riga di $\mathbf{R}$

$\mathrm{Atan2}(y, x)$: è l'arcotangente definita sui 4 quadranti: il risultato dell'operazione è un angolo la cui tangente è y/x e il cui seno e coseno hanno rispettivamente il segno di y e x

La soluzione degenera se $\sin(\vartheta) = 0$: in tal caso la rotazione φ e la rotazione ψ si sovrappongono

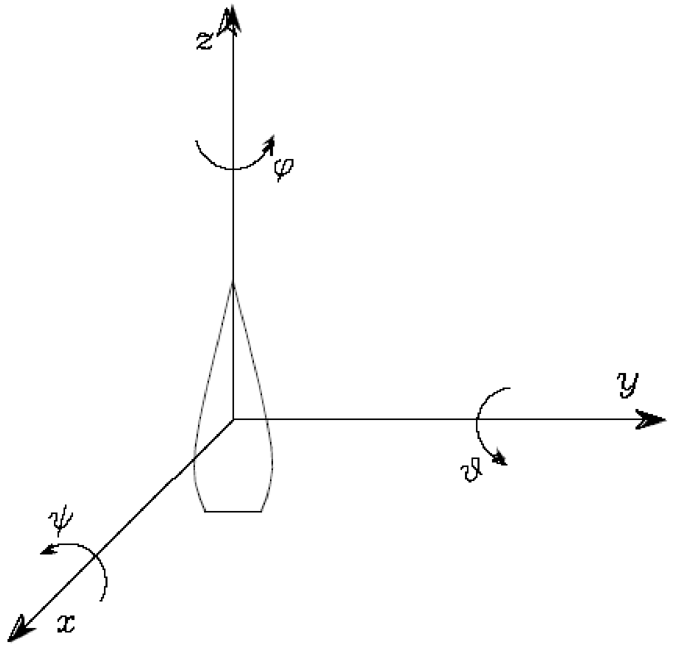
Angoli RPY (Roll, Pitch, Yaw)

La sequenza è costituita da tre rotazioni rispetto agli assi della **terna fissa**

I) Rotazione intorno a *X* (yaw) di un angolo ψ

II) Rotazione intorno a *Y* (pitch) di un angolo ϑ

III) Rotazione intorno a *Z* (roll) di un angolo φ



$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{R}_y(\vartheta)\mathbf{R}_x(\psi) = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\vartheta & c_\varphi s_\vartheta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\vartheta c_\psi + s_\varphi s_\psi \\ s_\varphi c_\vartheta & s_\varphi s_\vartheta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\vartheta c_\psi - c_\varphi s_\psi \\ -s_\vartheta & c_\vartheta s_\psi & c_\vartheta c_\psi \end{bmatrix}$$

Le matrici si moltiplicano da destra a sinistra

Angoli RPY (Roll, Pitch, Yaw): problema inverso

Assegnata la matrice di rotazione: $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$

Gli angoli RPY sono:

$\vartheta \in (-\pi/2\,, \pi/2)$

$$\varphi = \mathrm{Atan2}(r_{21}, r_{11})$$
$$\vartheta = \mathrm{Atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right)$$
$$\psi = \mathrm{Atan2}(r_{32}, r_{33})$$

$\vartheta \in (\pi/2\,, 3\,\pi/2)$

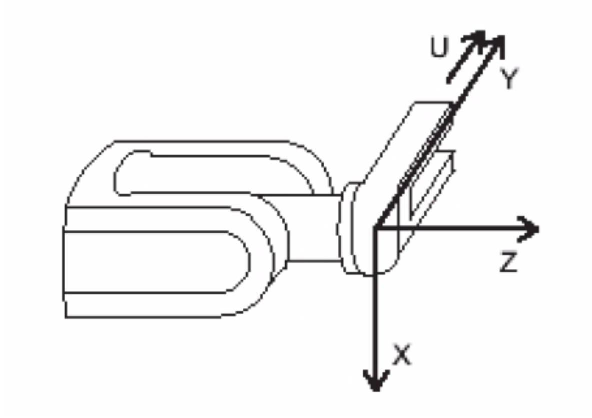
$$\varphi = \mathrm{Atan2}(-r_{21}, -r_{11})$$
$$\vartheta = \mathrm{Atan2}\left(-r_{31}, -\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right)$$
$$\psi = \mathrm{Atan2}(-r_{32}, -r_{33})$$

Per risolvere il problema ci si concentra sulla prima colonna e sulla terza riga di $\mathbf{R}$

La soluzione degenera se $\cos(\vartheta) = 0$.

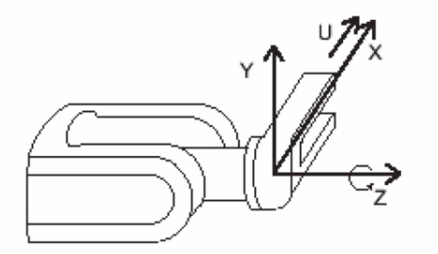
Dal manuale COMAU: uso degli angoli di Eulero ZYZ

Nei robot COMAU l'orientamento è specificato tramite angoli di Eulero ZYZ.
Vediamo alcuni esempi tratti da un manuale.

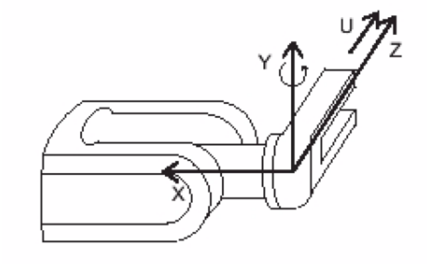


Si vuole allineare l'asse $\mathbf{z}$ della flangia con l'asse $\mathbf{z}$ dell'utensile (indicato con $\mathbf{u}$)

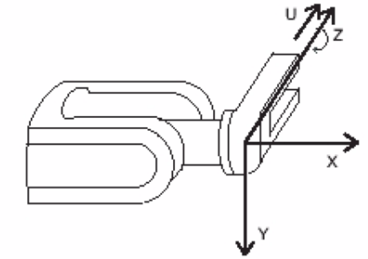
Rotazione di 90° intorno a z



Rotazione di 90° intorno a y



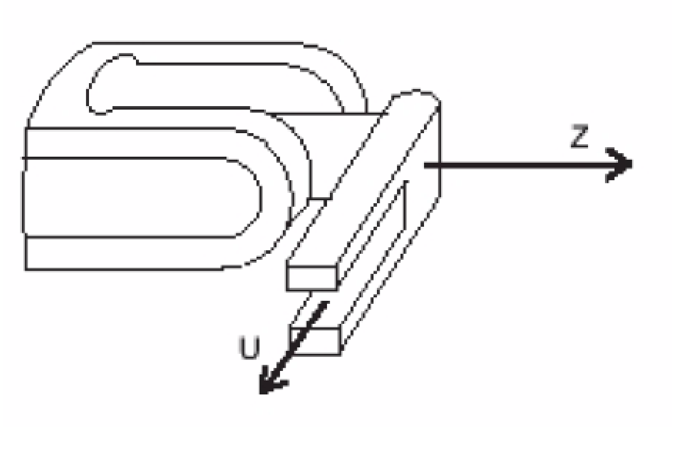
Rotazione di 180° intorno a z



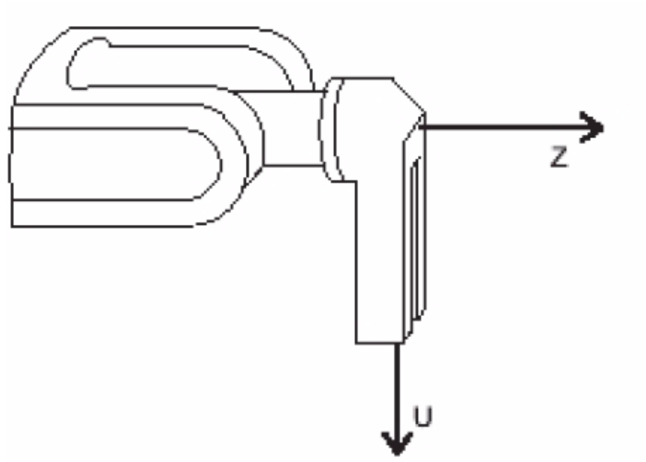
Angoli: (90, 90, 180)

Dal manuale COMAU: uso degli angoli di Eulero ZYZ

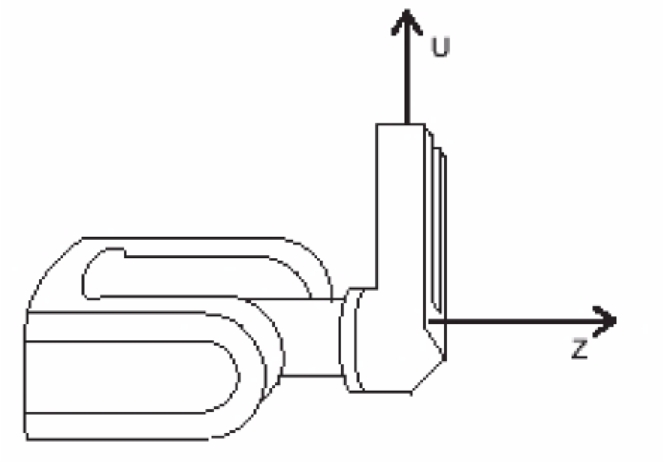
Vediamo ora altri esempi



(-90, 90, 180)



(0, 90, 180)



(180, 90, 180)


Comau Robotics
Manuale di istruzioni

C4G

PROGRAMMAZIONE DEL MOVIMENTO

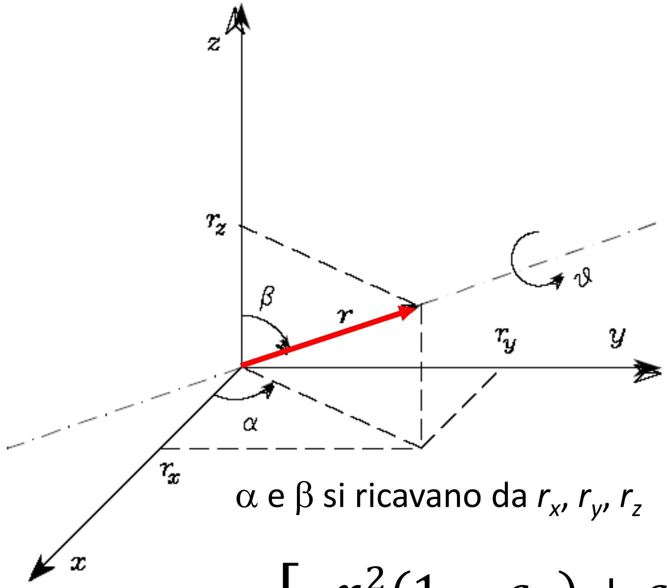
Software di Sistema Rel. 3.3x

Movimentazione del robot in programmazione, controllo del movimento, prestazioni opzionali (funzione di pallettizzazione, movimento sincrono, cooperativo, sensor tracking, conveyor tracking, weaving, path governor, smartmove4, compensazione cinematica, collision detection), movimento attraverso singolarità, posizionatori e portali, programma TO_SET.

CR00757603_it-00/1109

Rappresentazione asse/angolo

L'orientamento può anche essere rappresentato ricorrendo alla **rappresentazione asse/angolo**: se assegniamo due terne con la stessa origine ma orientamento diverso, è sempre possibile determinare un vettore unitario $\mathbf{r}$ in modo che la seconda terna sia ottenuta dalla prima attraverso una rotazione di un angolo ϑ attorno all'asse $\mathbf{r}$



α e β si ricavano da r_x, r_y, r_z

$$\mathbf{R}(\vartheta,\mathbf{r}) = \underbrace{\mathbf{R}_z(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)}_{\text{ripristino orientamento } \mathbf{r}}\overbrace{\mathbf{R}_z(\vartheta)}^{\text{rotazione di } \vartheta \text{ intorno a } \mathbf{z}}\underbrace{\mathbf{R}_y(-\beta)\mathbf{R}_z(-\alpha)}_{\text{sovrapposizione } \mathbf{r} \text{ su } \mathbf{z}}$$

$$\mathbf{R}(\vartheta,\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} r_x^2(1-c_\vartheta)+c_\vartheta & r_x r_y(1-c_\vartheta)-r_z s_\vartheta & r_x r_z(1-c_\vartheta)+r_y s_\vartheta \\ r_x r_y(1-c_\vartheta)+r_z s_\vartheta & r_y^2(1-c_\vartheta)+c_\vartheta & r_y r_z(1-c_\vartheta)-r_x s_\vartheta \\ r_x r_z(1-c_\vartheta)-r_y s_\vartheta & r_y r_z(1-c_\vartheta)+r_x s_\vartheta & r_z^2(1-c_\vartheta)+c_\vartheta \end{bmatrix} \qquad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}$$

Rappresentazione asse/angolo: problema inverso

Assegnata la matrice di rotazione $$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

L'angolo e l'asse di rotazione si ricavano in questo modo (dopo un po' di conti...):

$$\cos\vartheta = \frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} = \frac{\text{trace}\,(\mathbf{R}) \; - 1}{2}$$
$$\sin\vartheta = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(r_{12} - r_{21})^2 + (r_{13} - r_{31})^2 + (r_{23} - r_{32})^2}$$

$\Rightarrow$ $\vartheta = \text{Atan2}(\sin\vartheta\,, \cos\vartheta)$

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2\sin\vartheta}\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

Le formule non sono definite per $\sin(\vartheta) = 0$

con $\quad r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1$

Quaternioni unitari

In alternativa possiamo usare **quaternioni unitari** per specificare l'orientamento.
Con riferimento alla rappresentazione asse-angolo, i quaternioni sono definiti come $Q = \{q_0, \mathbf{q}_v\}$, dove:

$$q_0 = \cos\frac{\vartheta}{2} \longleftarrow \text{scalare}$$

$$\mathbf{q}_v = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \sin\frac{\vartheta}{2}\mathbf{r} \longleftarrow \text{vettore}$$

I quattro parametri q_0, q_1, q_2, q_3 non sono indipendenti, dal momento che:

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

Quaternioni unitari

Dato un quaternione unitario, la corrispondente matrice di rotazione è data da:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 2(q_0^2 + q_2^2) - 1 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \end{bmatrix}$$

Per converso, data una matrice di rotazione il corrispondente quaternione unitario, è dato da:

$$q_0 = \frac{1}{2}\sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1}$$

$$q_1 = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(r_{32} - r_{23})\sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1}$$

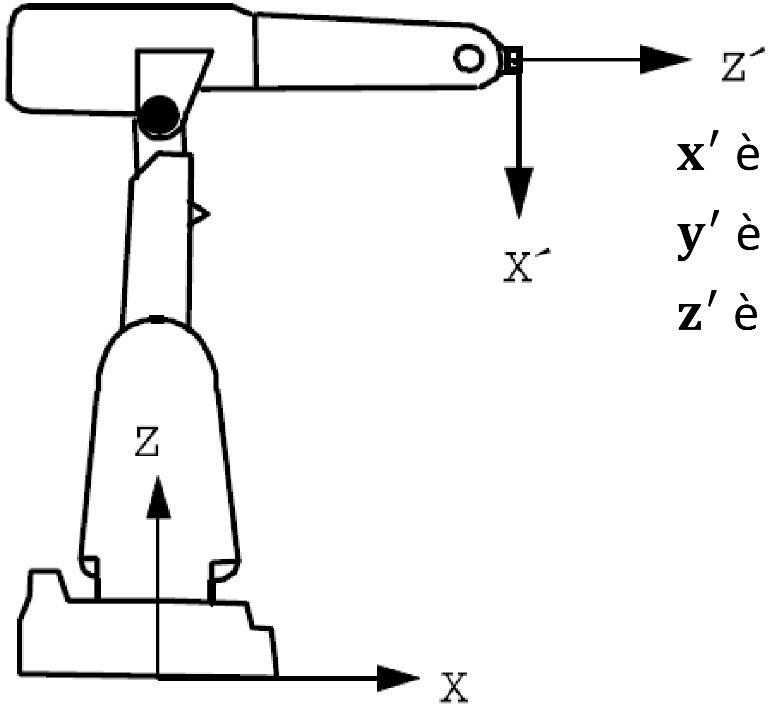
$$q_2 = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(r_{13} - r_{31})\sqrt{r_{22} - r_{33} - r_{11} + 1}$$

$$q_3 = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(r_{21} - r_{12})\sqrt{r_{33} - r_{11} - r_{22} + 1}$$

I quaternioni mancano di un significato geometrico immediato, tuttavia sono convenienti, poiché la loro relazione con gli elementi della matrice di rotazione è espressa attraverso **equazioni algebriche** invece che trigonometriche.

Dal manuale ABB: uso dei quaternioni unitari

Nei robot ABB l'orientamento è specificato tramite quaternioni unitari.
Vediamo due esempi tratti da un manuale



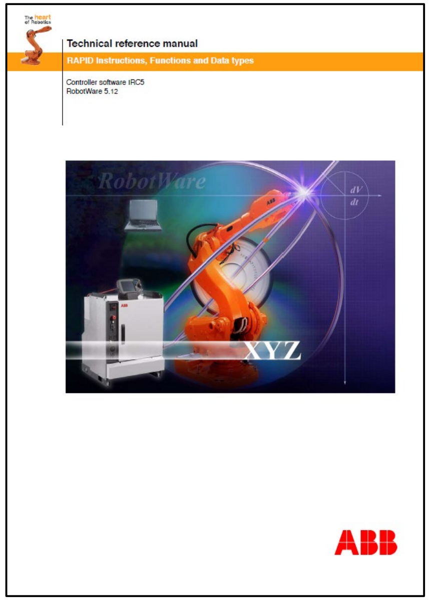
Fonte: ABB

$\mathbf{x}'$ è diretto come $\mathbf{z}$ e orientato nel modo opposto

$\mathbf{y}'$ è diretto e orientato come $\boldsymbol{y}$

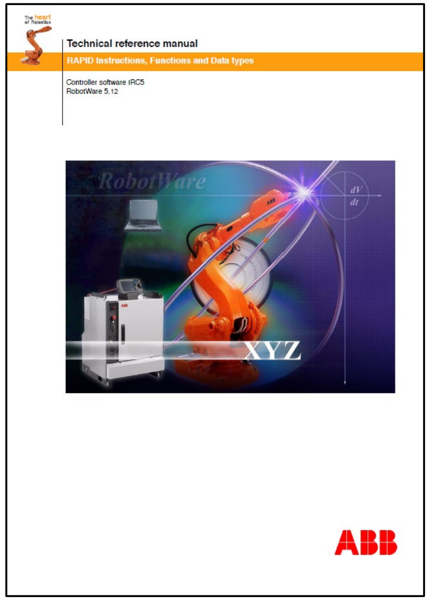
$\mathbf{z}'$ è diretto e orientato come $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Dal manuale ABB: uso dei quaternioni unitari

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$q_0 = \frac{1}{2}\sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{0 + 1 + 0 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$$

$$q_1 = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(r_{32} - r_{23})\sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1} = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(0 - 0)\sqrt{0 - 1 - 0 + 1} = 0$$

$$q_2 = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(r_{13} - r_{31})\sqrt{r_{22} - r_{33} - r_{11} + 1} = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(1 + 1)\sqrt{1 - 0 - 0 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$$

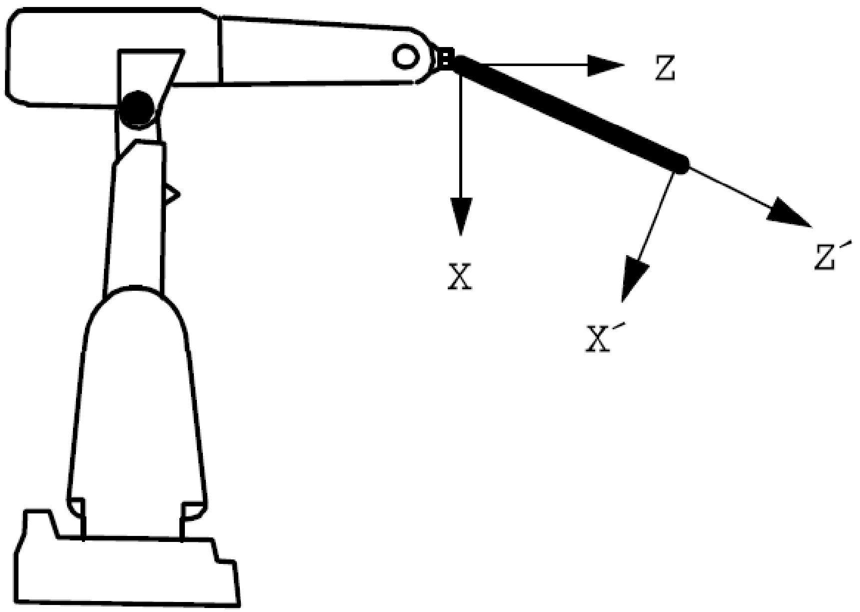
$$q_3 = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(r_{21} - r_{12})\sqrt{r_{33} - r_{11} - r_{22} + 1} = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(0 - 0)\sqrt{0 - 0 - 1 + 1} = 0$$

Verifica:

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

Dal manuale ABB: uso dei quaternioni unitari

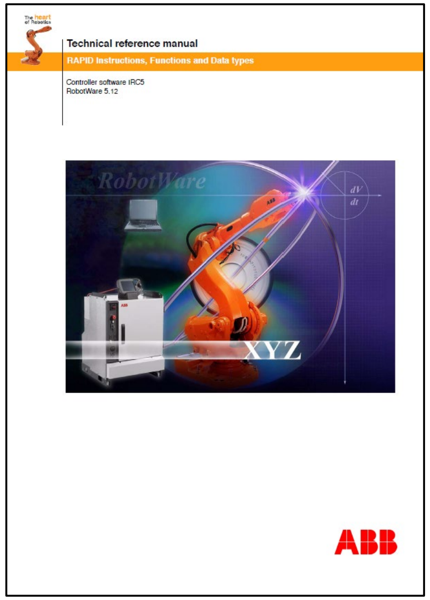
Vediamo un secondo esempio:



$\mathbf{x}'$ è ruotato di 30° rispetto a $\mathbf{x}$

$\mathbf{y}'$ è diretto e orientato come $\boldsymbol{y}$

$\mathbf{z}'$ è ruotato di 30° rispetto a $\mathbf{z}$



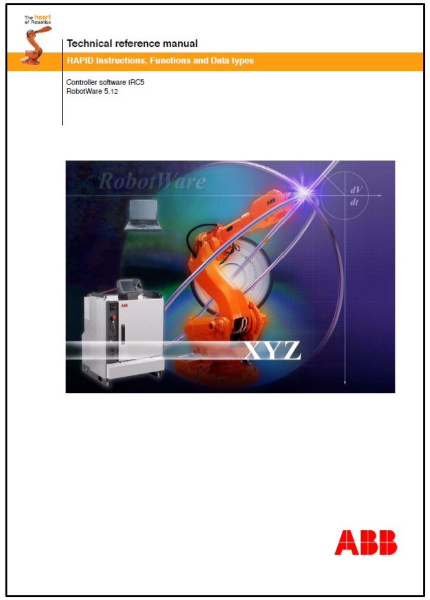
$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \cos 30° \\ 0 \\ -\sin 30° \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} \sin 30° \\ 0 \\ \cos 30° \end{bmatrix}$$

Fonte: ABB

Dal manuale ABB: uso dei quaternioni unitari

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \cos 30° \\ 0 \\ -\sin 30° \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} \sin 30° \\ 0 \\ \cos 30° \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$



$$q_0 = \frac{1}{2}\sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1} = \frac{\sqrt{\sqrt{3} + 2}}{2} = 0.9659$$

$$q_1 = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(r_{32} - r_{23})\sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1} = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(0 - 0)\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1} = 0$$

$$q_2 = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(r_{13} - r_{31})\sqrt{r_{22} - r_{33} - r_{11} + 1} = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1} = \frac{\sqrt{-\sqrt{3} + 2}}{2} = 0.2588$$

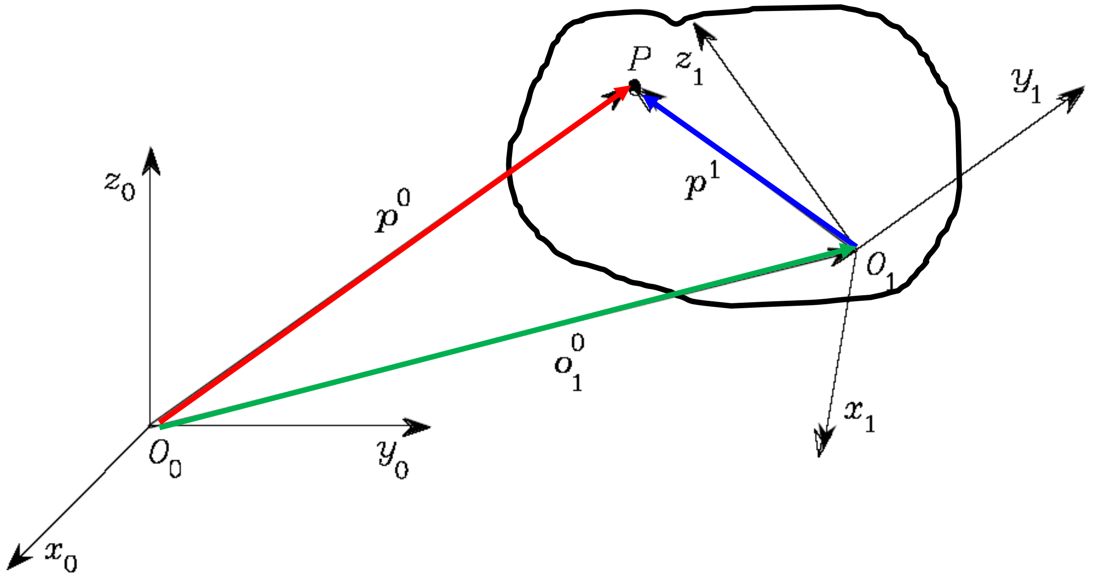
$$q_3 = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(r_{21} - r_{12})\sqrt{r_{33} - r_{11} - r_{22} + 1} = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(0 - 0)\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + 1} = 0$$

Verifica:

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

Posizione e orientamento di corpi nello spazio

Esaurita la trattazione dell'orientamento, torniamo alla caratterizzazione di posizione e orientamento di corpi nello spazio.



Come possiamo esprimere le coordinate del punto $\mathbf{p}$ nel sistema 0, in base alle sue coordinate nel sistema 1?

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1$$

Matrice di rotazione del sistema 1 rispetto al sistema 0

Trasformazione inversa:

$$\mathbf{p}^1 = -\mathbf{R}_0^1 \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_0^1 \mathbf{p}^0$$

Questo tipo di rappresentazione risulta di non agevole utilizzo quando si vogliano concatenare più trasformazioni (rototraslazioni) tra terne. In robotica, si usa un formalismo più comodo…

Matrice di trasformazione omogenea

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_1^0\mathbf{p}^1$$

Per rappresentare in **forma compatta** queste trasformazioni, è consigliabile introdurre un vettore di dimensione 4:

$$\widetilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} w\mathbf{p} \\ w \end{bmatrix}$$ rappresentazione omogenea

w è un fattore di scala che è sempre posto uguale a 1 in robotica (viene utilizzato nella computer graphics)

La relazione:

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_1^0\mathbf{p}^1$$

può essere espressa, in termini di coordinate omogenee, come :

$$\widetilde{\mathbf{p}}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^0 & \mathbf{o}_1^0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}^1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1^0\widetilde{\mathbf{p}}^1$$

Dove abbiamo introdotto la **matrice di trasformazione omogenea** (dimensione 4×4):

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^0 & \mathbf{o}_1^0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di trasformazione omogenea

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^0 & \mathbf{o}_1^0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}_1^0$ mette in relazione la descrizione (posizione/orientamento) di un punto del sistema 1 con la descrizione nel sistema 0.

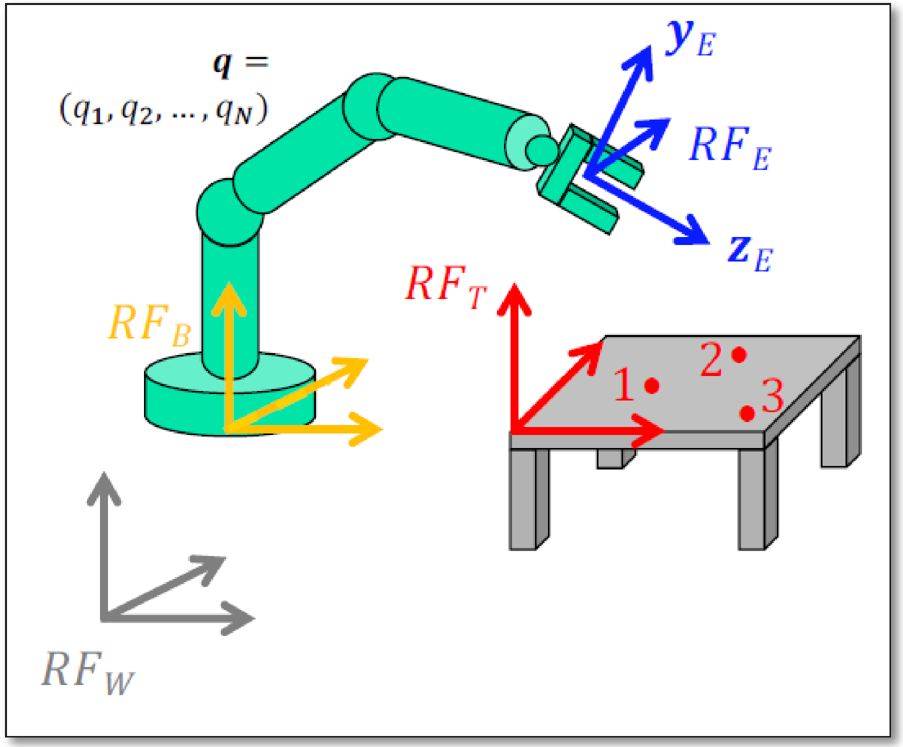
La trasformazione inversa è:

$$\widetilde{\mathbf{p}}^1 = \mathbf{A}_0^1 \widetilde{\mathbf{p}}^0 = (\mathbf{A}_1^0)^{-1} \widetilde{\mathbf{p}}^0 \qquad \mathbf{A}_0^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^1 & -\mathbf{R}_0^1 \mathbf{o}_1^0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$ non è ortogonale

Componendo diverse trasformazioni: $\widetilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \dots \mathbf{A}_n^{n-1} \widetilde{\mathbf{p}}^n$

Esempio: un task robotico



Source: Prof. Alessandro De Luca

$$\mathbf{A}_T^W = \mathbf{A}_B^W \mathbf{A}_E^B \mathbf{A}_T^E$$

Definizione del task rispetto a un sistema «mondo»

Fissa, una volta collocato il robot

Dipende dalle posizioni dei giunti

Definizione del task rispetto all'end-effector

Un punto noto in coordinate tavolo avrà le seguenti coordinate mondo:

$$\tilde{\mathbf{p}}^W = \mathbf{A}_T^W \tilde{\mathbf{p}}^T$$