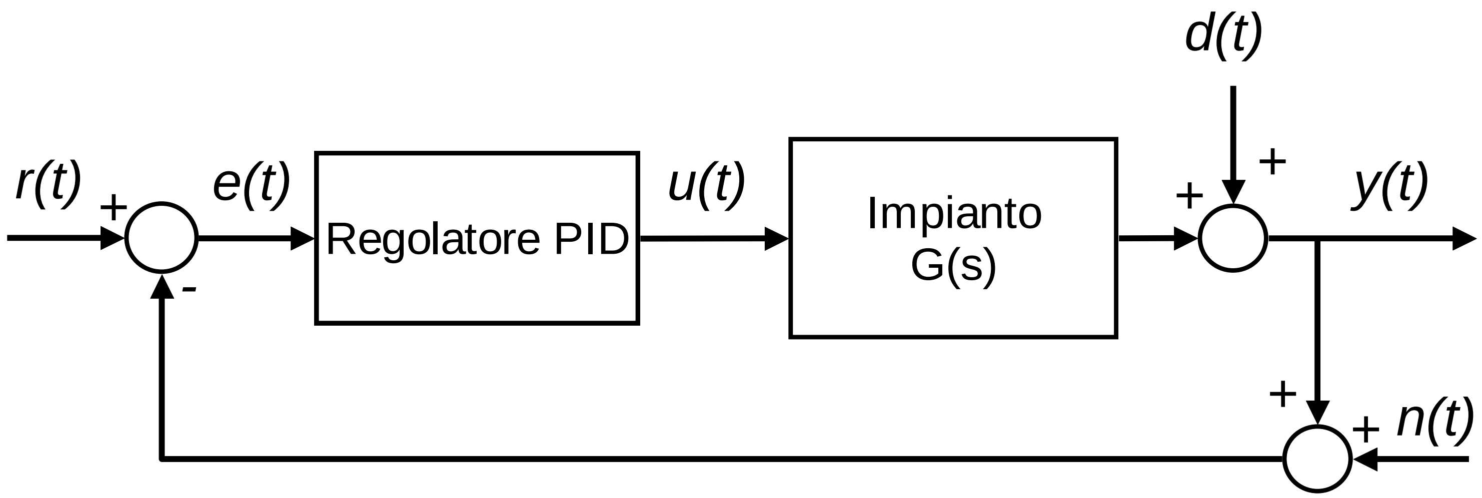
Lezione #13

Implementazione digitale dei regolatori PID

Sommario

- Regolatori digitali
  - Campionamento e quantizzazione
  - Aliasing, teorema di Shannon
  - Ricostruzione, ZOH
- Metodi di discretizzazione
  - Algoritmi di integrazione numerica e stabilità
- Realizzazione digitale di un regolatore PID

Schema di riferimento



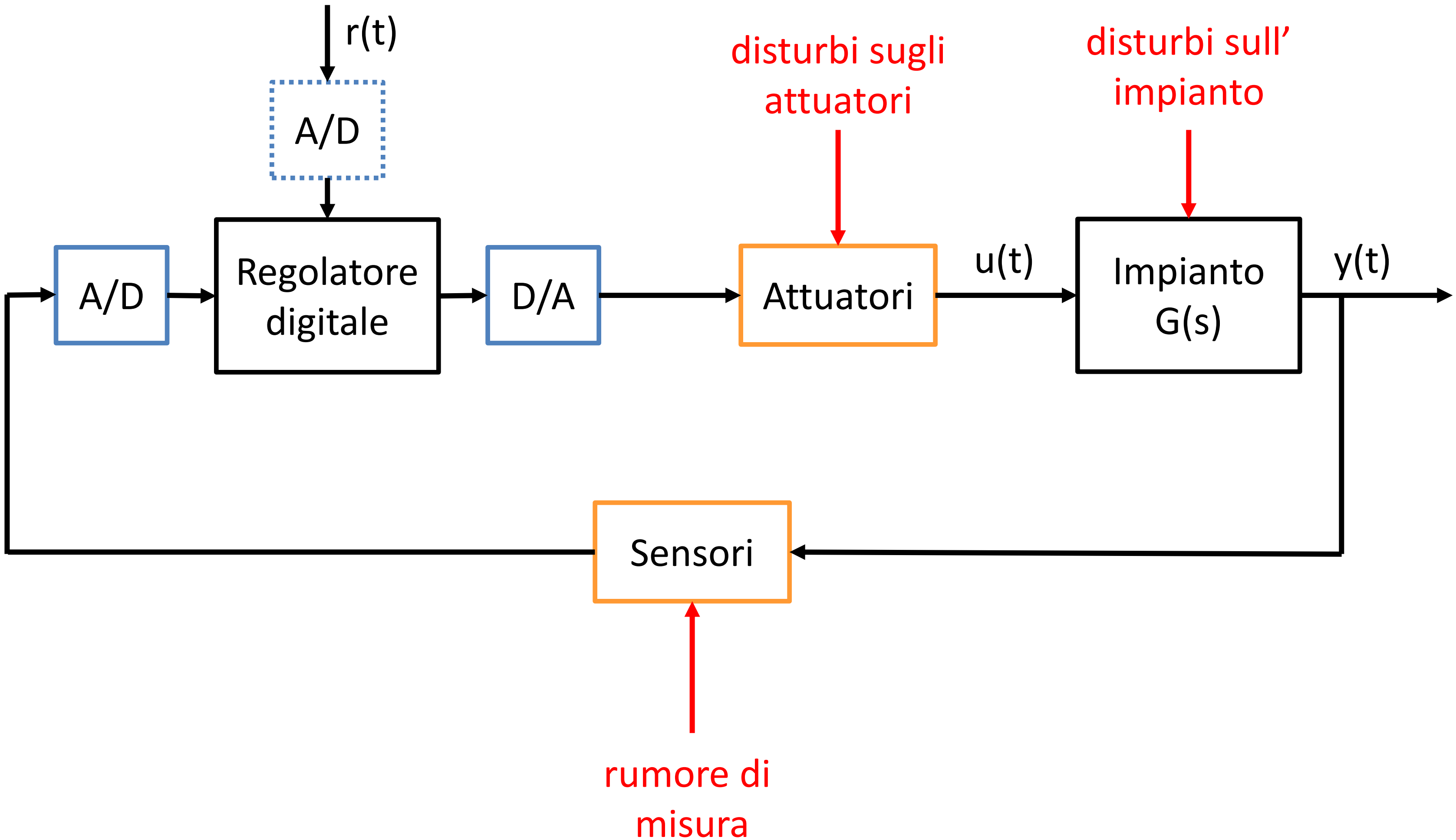
- *r(t)* - riferimento
- *e(t)* - errore di controllo
- *u(t)* - azione di controllo
- *y(t)* - grandezza da controllare
- *d(t)* - disturbo additivo sull'uscita
- *n(t)* - rumore di misura

Motivazione

- I regolatori (PID e non) erano originalmente implementati utilizzando **tecnologia analogica di varia natura** (meccanica, pneumatica, elettronica...)

- Oggi vengono implementati quasi unicamente su **dispositivi di controllo digitali**, in genere su microprocessori

Schema con regolatore digitale



Schema con regolatore digitale

- **Attuatori**
  - Convertono un segnale informativo a bassa potenza in uno ad alta potenza
  - Possono essere interessati da disturbi esogeni, allo stesso modo dell'impianto stesso
  - Attuatori e impianto in genere hanno comportamento **passa-basso:** i disturbi agiscono a frequenze simili a quelle di lavoro

Schema con regolatore digitale

- **Sensori**
  – Convertono una grandezza fisica in un segnale informativo a bassa potenza
  – Possono essere interessati da disturbi esogeni, che però sono tipicamente ad **alta frequenza** (e.g. interferenze elettromagnetiche)
  – Si parla in questo caso di **rumore di misura**

Schema con regolatore digitale

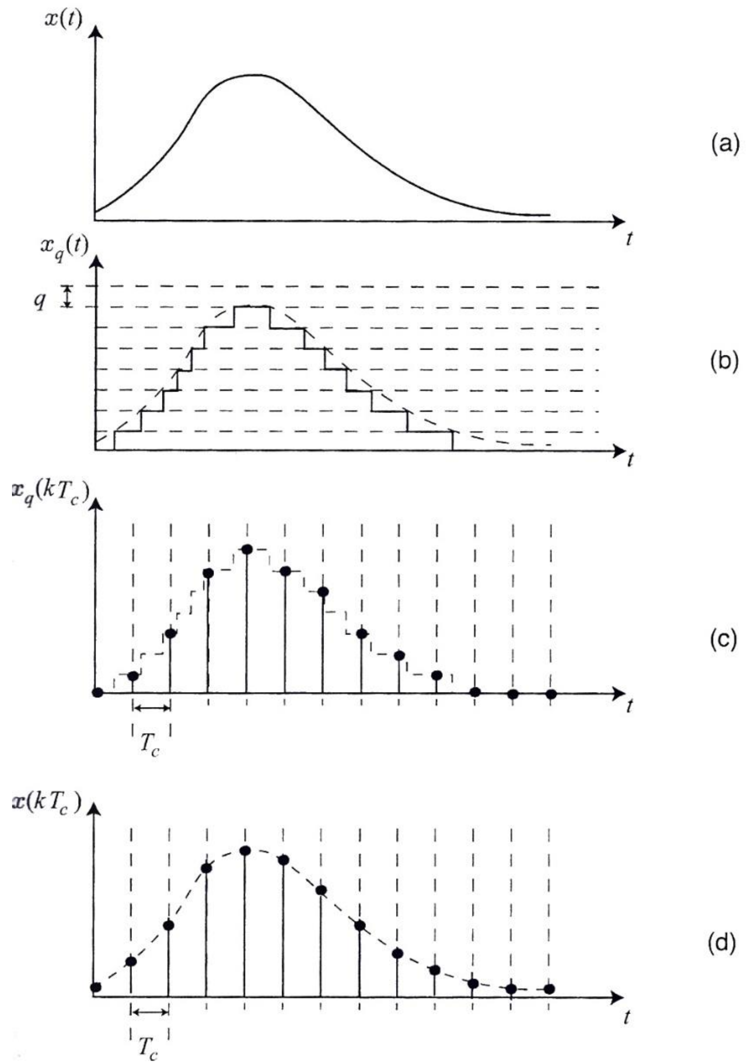
- **Convertitori**
  - Il controllore è corredato da dispositivi in grado di convertire segnali analogici in digitali e viceversa
  - Tali convertitori sono sincronizzati con il controllore tramite un **segnale di clock**
  - Il periodo di questo clock è detto **periodo di campionamento**

Digitalizzazione

- Rappresentazione digitale
  → **quantizzazione** e **campionamento**
- Un segnale sarà rappresentato da *n* bit
  → 2^n livelli rappresentabili
- La minima variazione rappresentabile è detta **livello di quantizzazione**
  → $q = \log_2 \Delta / \mathrm{n}$, con Δ range di variazione
- La quantizzazione può avvenire per **troncamento** o per **arrotondamento**

Digitalizzazione

- Una volta quantizzato, il segnale va **campionato** con passo T_c



Campionamento

- Possiamo schematizzare il **campionamento** come

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t)\delta(t - kT_c)$$

- Si parla in questo caso di **campionamento a impulsi**

Campionamento

- Applicando la **trasformata di Fourier**

$$F[x^*(t)] = X^*(i\omega) = \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(i\omega - in\omega_c)$$

Segnale campionato ⟷ Spettro periodico

Campionamento

- Applicando la **trasformata di Fourier**

$$F[x^*(t)] = X^*(i\omega) = \frac{1}{T_c}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(i\omega - in\omega_c)$$

Il campionamento introduce un fattore $1/T_c$

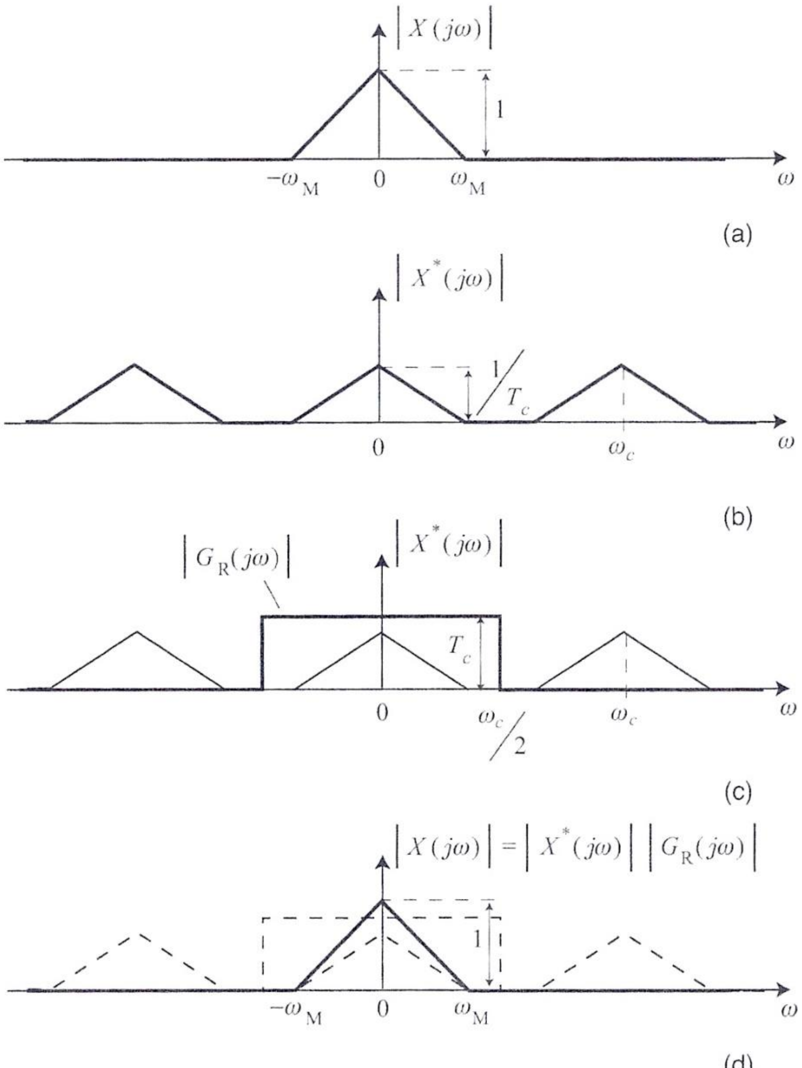
Campionamento

- $\omega_c = 2\pi/T_c$ è detta **pulsazione di campionamento**
- Lo spettro del segnale si ripete a distanza ω_c
- La componente $\frac{|X^*(i\omega)|}{T_c}$ è detta **componente primaria** ($n = 0$), le altre **componenti complementari** ($n \neq 0$)

- Componente primaria e componenti complementari sono separate se la banda del segnale $\omega_M$soddisfa (**teorema di Shannon**)

$$\omega_M < \frac{\omega_c}{2}$$

Campionamento
Teorema di Shannon



Problemi numerici

Queste procedure possono portare a **problemi numerici** dovuti a

- **quantizzazione** dei parametri e delle variabili di I/O
- **arrotondamenti**
- **underflow** e **overflow** del processore

Problemi numerici

In particolare:

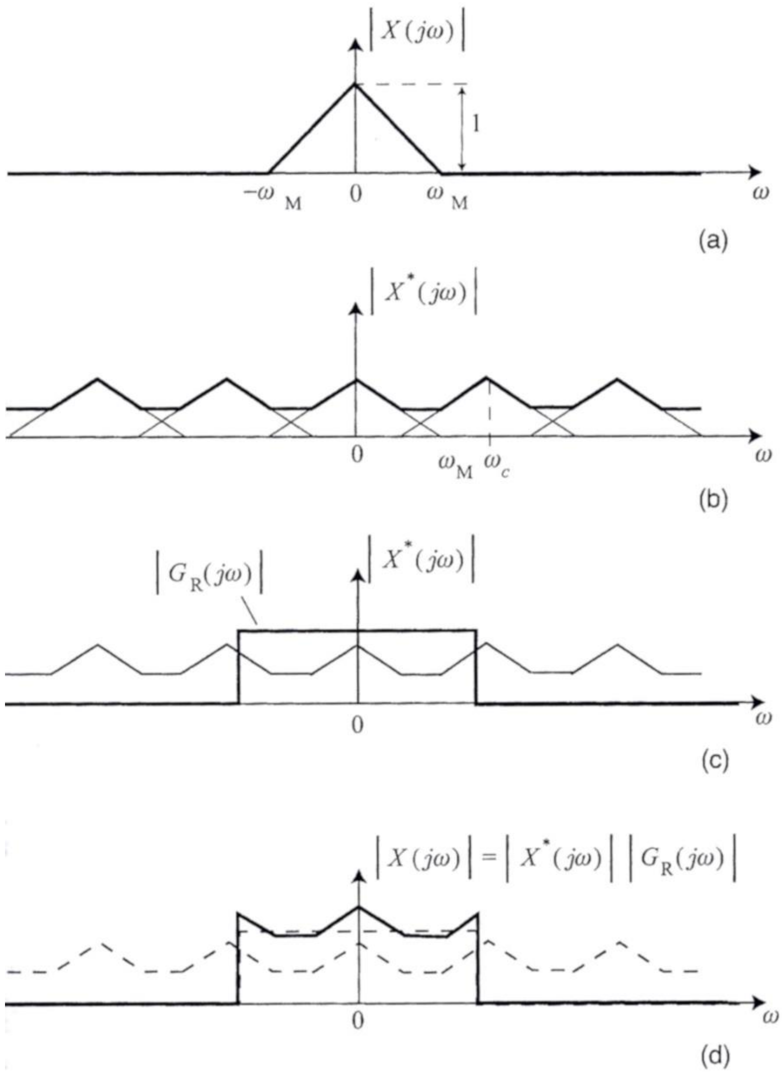
- a causa della **rappresentazione quantizzata** e del verificarsi di **underflow**, l'errore a regime in presenza di riferimento costante è diverso da zero **anche in presenza dell'azione integrale**

- in presenza di **azione integrale** l'**errore a regime** sarà tanto più grande quanto più piccolo sarà T_c (quindi al crescere della frequenza di campionamento)

- Se non vale la condizione di Shannon, si verifica un fenomeno detto **aliasing**

→ **Le componenti dello spettro si sovrappongono**

Campionamento
Aliasing



Campionamento
Aliasing

- Nella pratica, la condizione di Shannon non sarà mai soddisfatta
- Avrò in generale, segnali a spettro infinito, spesso con la parte ad alta frequenza della banda occupata da **rumore**
- Prima del campionamento è possibile introdurre un **filtro anti-aliasing** con banda opportuna per eliminare le componenti secondarie

Ricostruzione
Ricostruttore ideale

- Le operazioni inverse rispetto alla **digitalizzazione** vengono svolte da un convertitore D/A

- Se la condizione di Shannon fosse soddisfatta, sarebbe possibile in teoria ricostruire **esattamente** il segnale a partire dalla sua **versione campionata**

- Nella pratica, tuttavia, sarebbe necessario un **filtro anticausale***

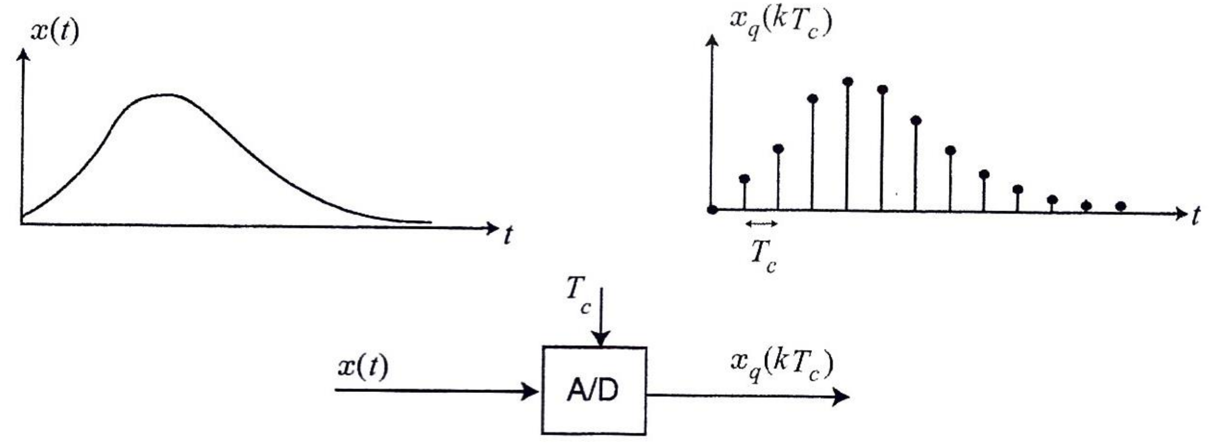
$$G_R(i\omega) = \begin{cases} T_c & -\dfrac{\omega_c}{2} \leq \omega \leq \dfrac{\omega_c}{2} \\ 0 & altrove \end{cases}$$

* è possibile dimostrarlo, ad esempio, calcolando l'antitrasformata

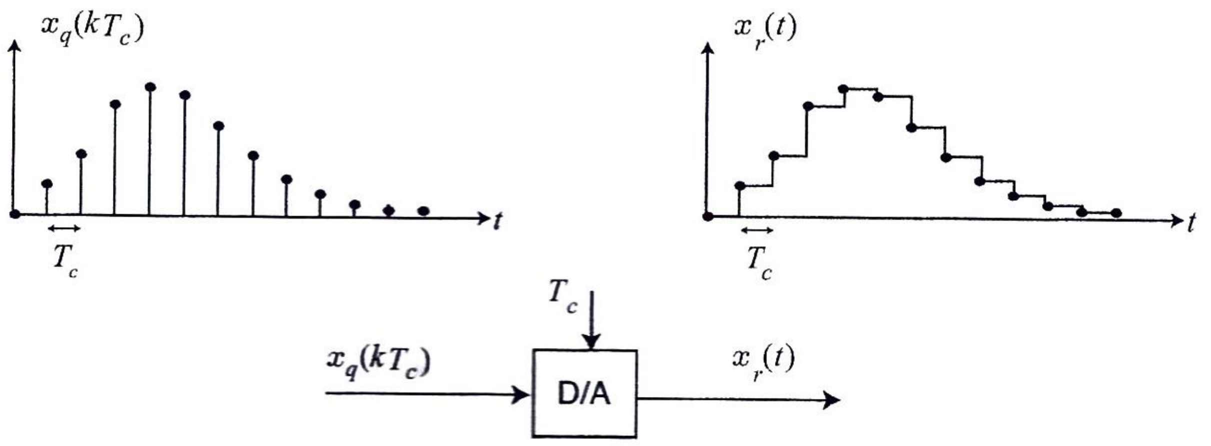
- Il ricostruttore più usato nella pratica è lo **ZOH** (Zero Order Hold)

  →uscita costante tra kT_c e $(k+1)T_c$

Ricostruzione
Zero Order Hold



(a)

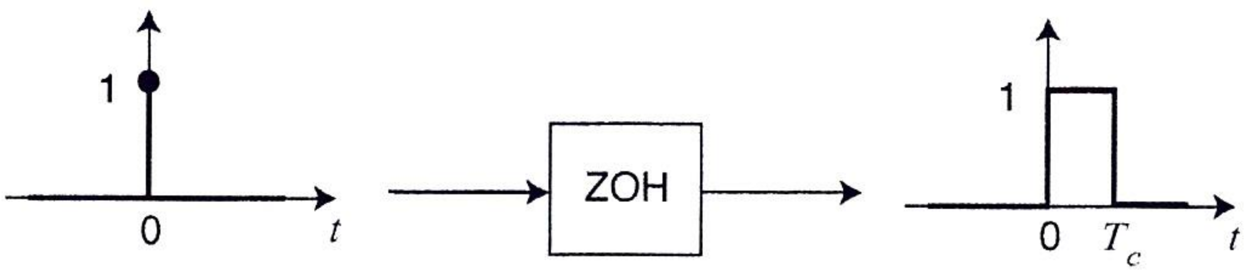


(b)

Ricostruzione
Zero Order Hold

- Lo ZOH ha risposta impulsiva:

$$h(t) = \mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t - T_c)$$



- In frequenza:

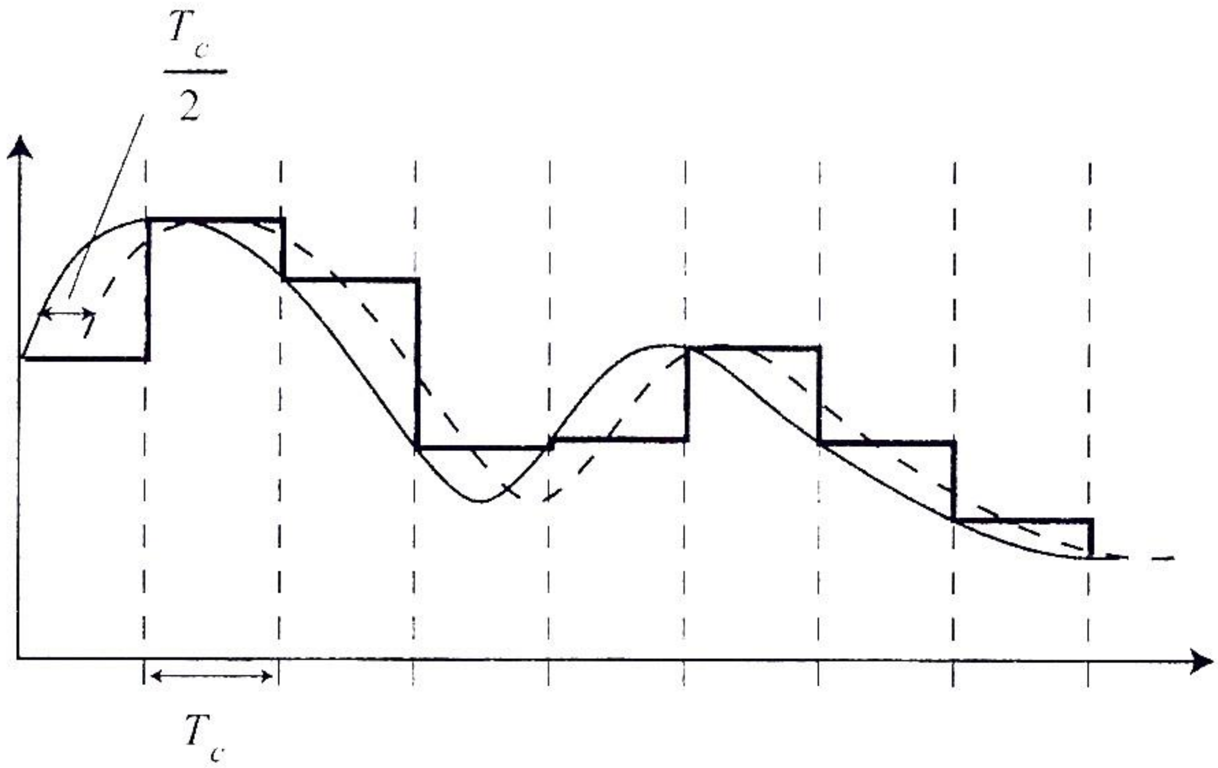
$$H(i\omega) = \frac{1 - e^{-i\omega T_c}}{i\omega} = T_c \frac{\sin(\omega T_c/2)}{\omega T_c/2} e^{-i\omega T_c/2}$$

- Per $\omega T_c/2$ piccolo

$$|H(i\omega)| = T_c \left|\frac{\sin(\omega T_c/2)}{\omega T_c/2}\right| \cong T_c$$

→ Lo ZOH approssima il filtro ideale per **frequenze di campionamento elevate**

- Il ricostruttore ZOH introduce inoltre un **ritardo**



Come scegliere la frequenza di campionamento?

- Abbiamo visto che, per soddisfare le condizioni del teorema di Shannon, è necessario

$$\omega_c > 2\omega_M$$

Campionamento

Scelta della frequenza di campionamento

- Una frequenza di campionamento **elevata** consente di **ridurre la perdita** di informazioni, ma aumenta il **costo computazionale**

- Una frequenza **troppo bassa**, viceversa, può portare il sistema vicino all'instabilità

Campionamento
Scelta della frequenza di campionamento

- Una formula usata in pratica è

$$\alpha\omega_M < \omega_c < 10\alpha\omega_M$$

- con

$$\alpha \in [5, 10]$$

(*) In altre formulazioni si trova un limite inferiore più alto
(**) Il limite superiore è legato anche all'errore a regime dovuto alla realizzazione digitale dell'azione integrale

Implementazione digitale dei PID

- Per implementare un regolatore tramite un sistema digitale, è necessario ricavare una sua **formulazione tempo-discreta**

- Possibili approcci alla progettazione nel tempo discreto:

1. **sintesi diretta** nel TD
2. **sintesi nel TC** e successiva **discretizzazione**

Discretizzazione

- Un regolatore TC è un **sistema dinamico LTI SISO**

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}e(t) \qquad (1)$$
$$u(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}e(t) \qquad (2)$$

- Da qui in poi indicheremo con h il **periodo di campionamento**
- Per ottenere un implementazione discreta bisogna **integrare (1-2)** nell'intervallo $[kh, (k+1)h]$

Discretizzazione
Esempio: Eulero in avanti

- Uno schema di integrazione numerica “paradigmatico” è il metodo di **Eulero in avanti** (o **esplicito**)

Discretizzazione
Esempio: Eulero in avanti

- Consideriamo il semplice sistema

$$\dot{y} = f(y)$$

- **Approssimando la derivata** con il rapporto incrementale

$$\dot{y} \cong \frac{y(k+1) - y(k)}{h}$$

Discretizzazione
Esempio: Eulero in avanti

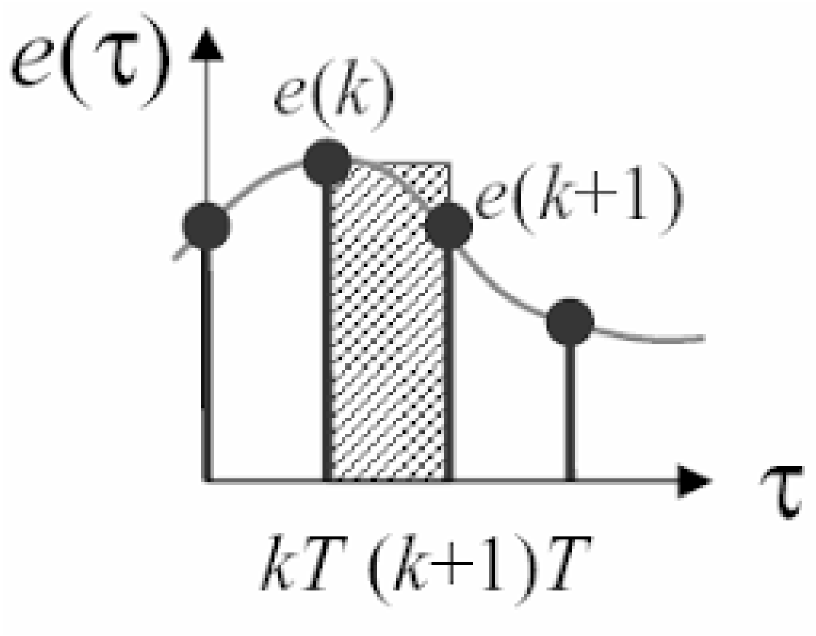
- Otteniamo il metodo di **Eulero esplicito** (**FE**) ponendo

$$\frac{y(k+1) - y(k)}{h} = f\big(y(k)\big)$$

- Il metodo è detto **esplicito** perché fornisce direttamente un'espressione per $y(k+1)$ in termini di $y(k)$

Discretizzazione
Esempio: Eulero in avanti

- Graficamente:



Discretizzazione
Esempio: Eulero in avanti

- Consideriamo il semplice sistema lineare

$$\dot{y} = \lambda y$$

- Applicando FE il sistema diventa

$$y(k+1) = (1 + h\lambda)y(k)$$

Discretizzazione

Esempio: Eulero in avanti

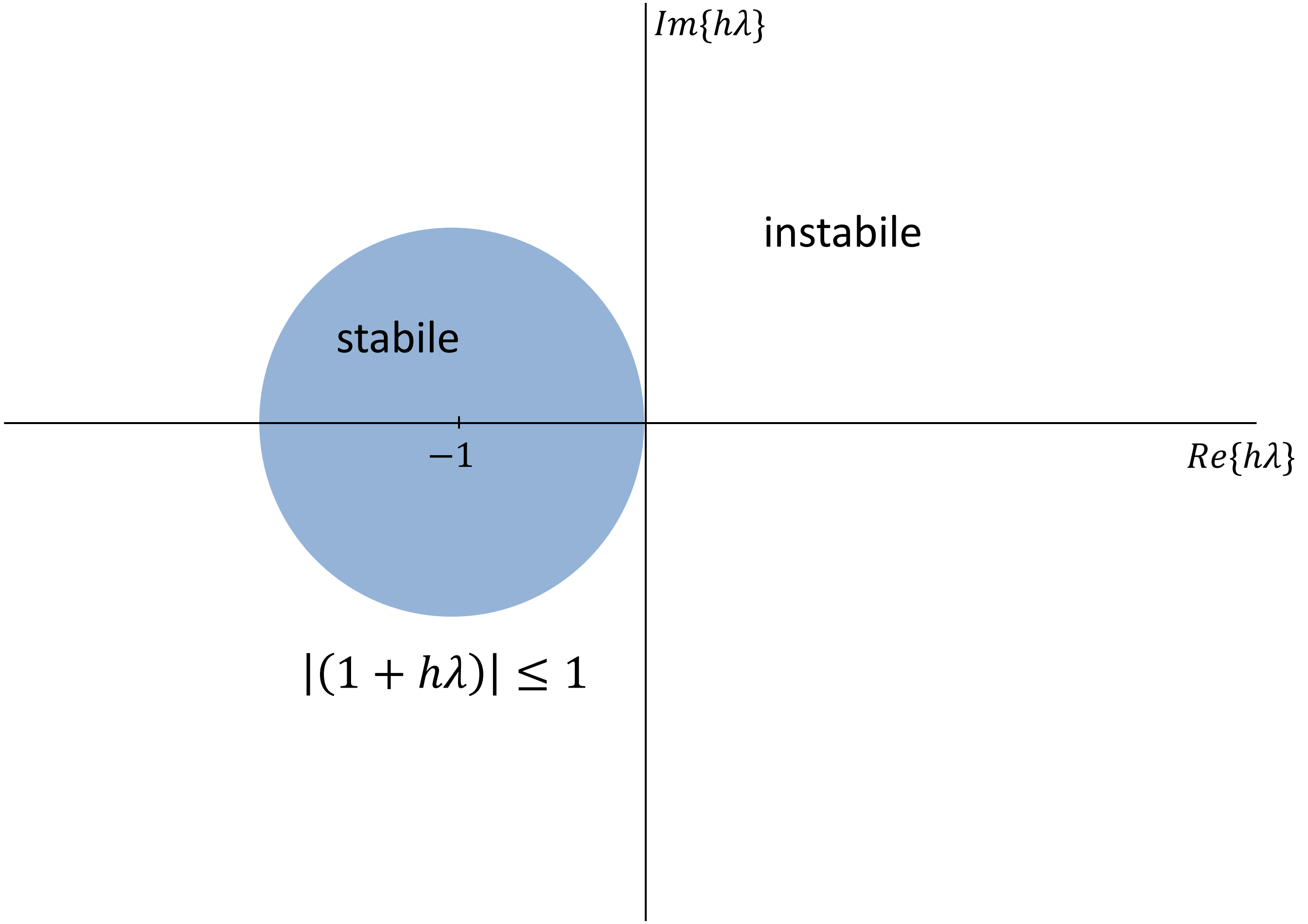
- Un sistema tempo-discreto è stabile se ha **autovalori nel cerchio unitario**

$$|1 + \lambda h| \leq 1$$

→ Il metodo FE può trasformare sistemi TC stabili in sistemi TD instabili

Discretizzazione

Esempio: Eulero in avanti



$$|(1 + h\lambda)| \leq 1$$

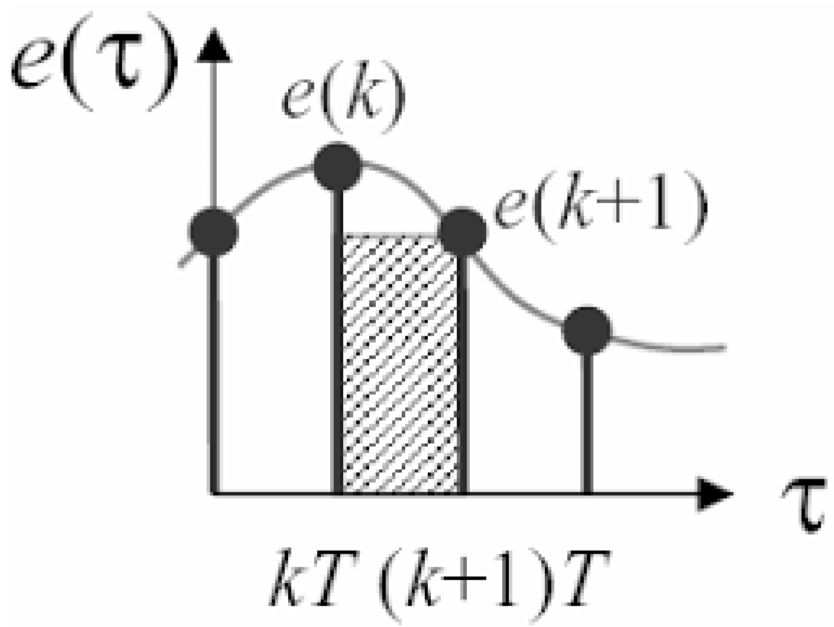
- Un metodo più robusto è quello di **Eulero Implicito** (**BE**)

$$\frac{y(k+1)-y(k)}{h} = f(y(k+1))$$

- Il metodo è detto **implicito** perché fornisce implicitamente un'espressione per $y(k+1)$ in termini di $y(k)$ (f potrebbe avere un'espressione complicata)

Discretizzazione
Esempio: Eulero in avanti

- Graficamente:



Discretizzazione
Esempio: Eulero in avanti

- Consideriamo ancora

$$\dot{y} = \lambda y$$

- Applicando BE il sistema diventa

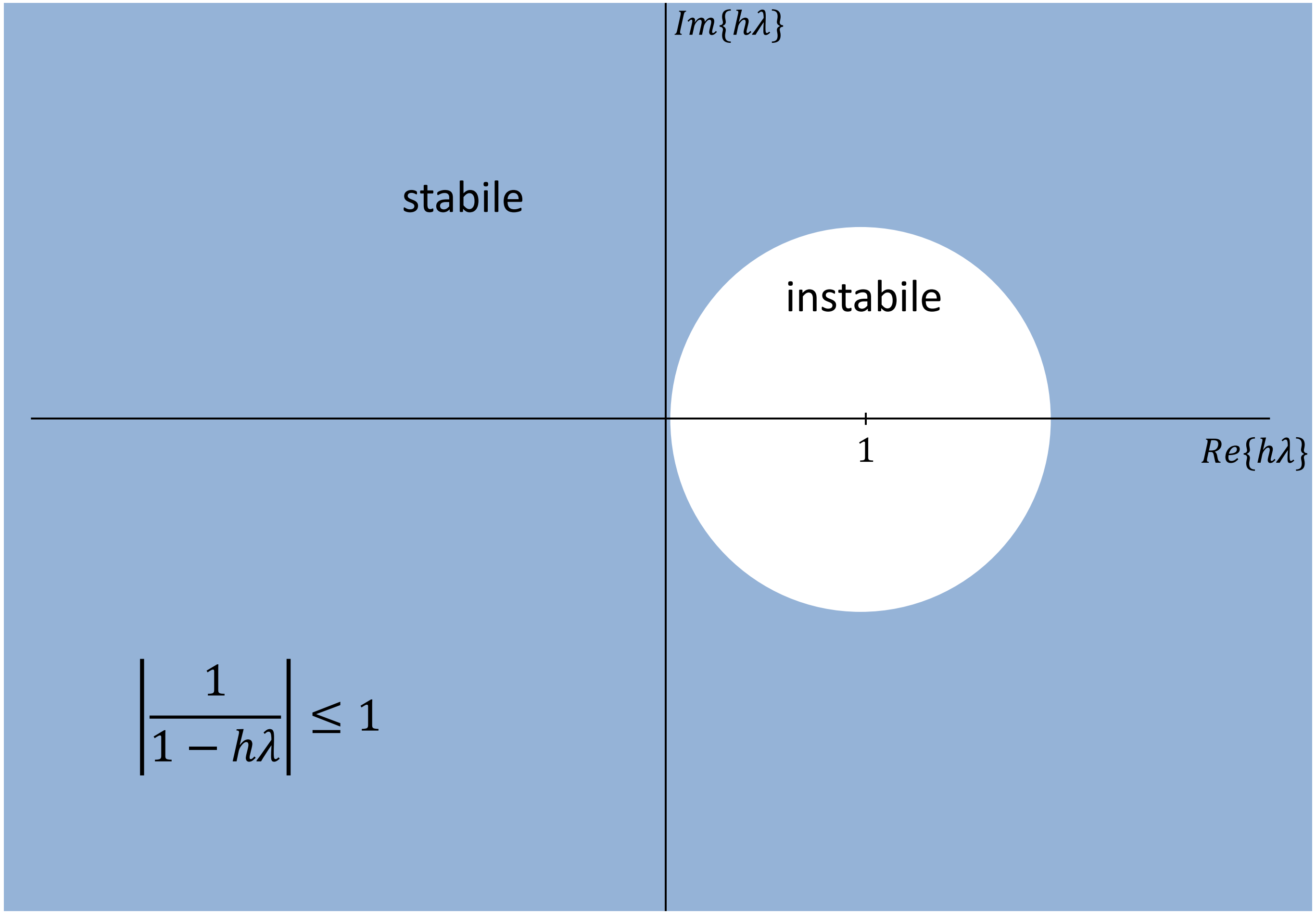
$$y(k+1) = (1 - h\lambda)^{-1} y(k)$$

- Un sistema tempo-discreto è stabile se ha **autovalori nel cerchio unitario**

$$\left|\frac{1}{1-h\lambda}\right| \leq 1$$

→ Il metodo BE può trasformare sistemi TC instabili in sistemi TD stabili

Discretizzazione
Esempio: Eulero all'indietro



Discretizzazione

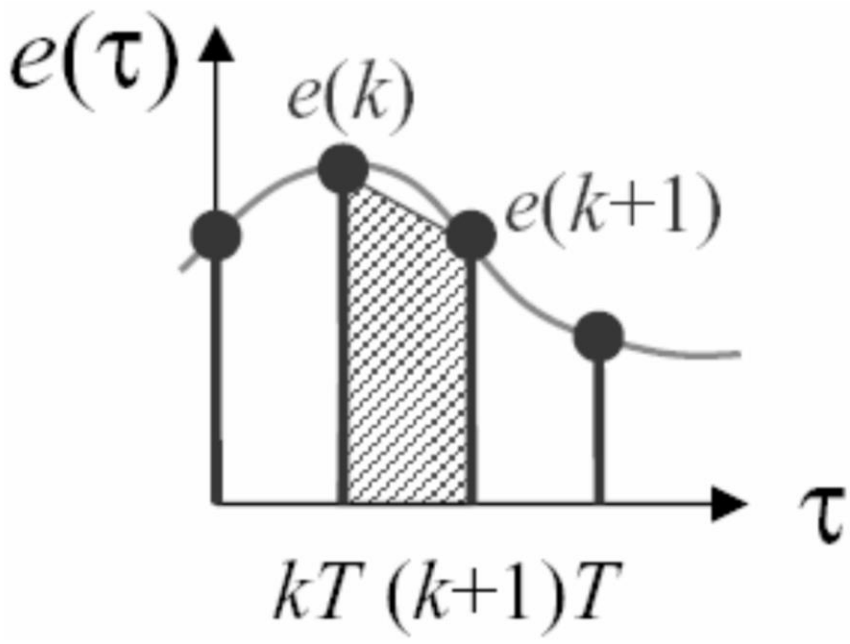
Esempio: Tustin

- Un terzo metodo piuttosto usato è quello **dei trapezi** (o di **Crank-Nicholson**, o di **Tustin**)

$$\frac{y(k+1)-y(k)}{h}=\frac{f\big(y(k)\big)+f\big(y(k+1)\big)}{2}$$

Discretizzazione
Esempio: Tustin

- Graficamente:



Discretizzazione
Esempio: Tustin

- In questo caso

$$\dot{y} = \lambda y$$

- diventa

$$y(k+1) = \frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}} y(k)$$

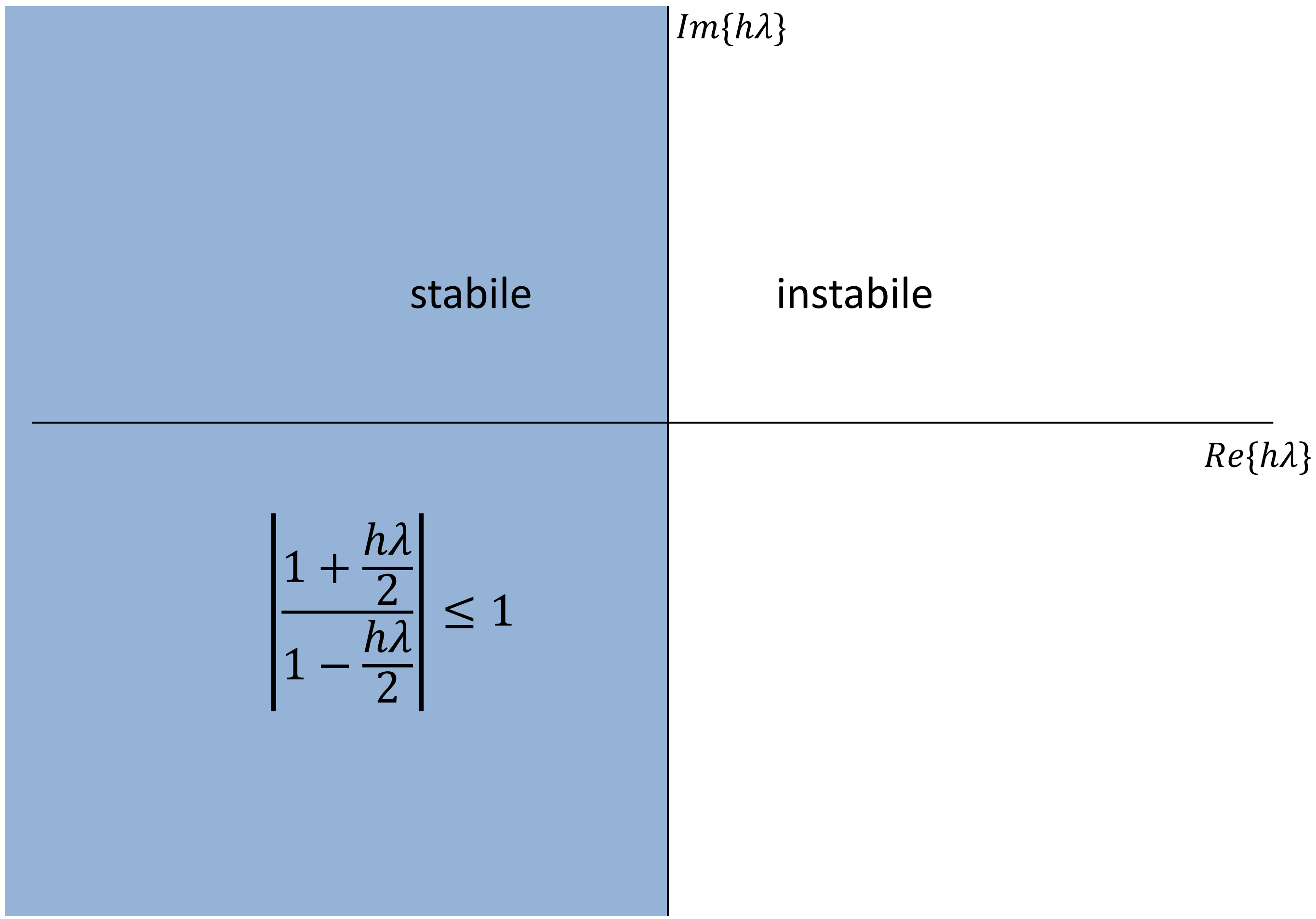
Discretizzazione

Esempio: Tustin

- Un sistema tempo-discreto è stabile se ha **autovalori nel cerchio unitario**

$$\left|\frac{1+\frac{h\lambda}{2}}{1-\frac{h\lambda}{2}}\right| \leq 1$$

→ Il metodo di Tustin conserva la stabilità!



$Im\{h\lambda\}$
stabile
instabile
$Re\{h\lambda\}$
$\left|\frac{1+\frac{h\lambda}{2}}{1-\frac{h\lambda}{2}}\right| \leq 1$

Discretizzazione
Caso generale

- In generale, ponendo $\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{x}(kh)$ e integrando (1) in $[kh, (k+1)h]$

$$\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\int_{kh}^{(k+1)h} \mathbf{x}(t)dt + \mathbf{B}\int_{kh}^{(k+1)h} e(t)dt \qquad (3)$$

- Gli integrali in (3) possono essere **approssimati** con la combinazione convessa

$$\int_{kh}^{(k+1)h} \mathbf{f}(t)dt \approx \left[(1-\alpha)\mathbf{f}(k) + \alpha\mathbf{f}(k+1)\right]h, \quad 0 \le \alpha \le 1 \qquad (4)$$

Discretizzazione

Caso generale

- Tramite la (4) possiamo ottenere una **realizzazione TD approssimata** del controllore

- In base al valore di $0 \leq \alpha \leq 1$ si ottengono diverse approssimazioni. Casi particolari:
  - $\alpha = 0 \Rightarrow$ **Eulero in avanti**
  - $\alpha = 1 \Rightarrow$ **Eulero all'indietro**
  - $\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$ **Tustin**

Discretizzazione

Caso generale

- Sostituendo (4) in (3)

$$\boldsymbol{x}(k+1) - \boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{A}[(1-\alpha)\boldsymbol{x}(k) + \alpha\boldsymbol{x}(k+1)]h + \boldsymbol{B}[(1-\alpha)e(k) + \alpha e(k+1)]h \qquad (5)$$

- Mentre valutando (2) in $t = kh$ si ha

$$u(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}e(k) \qquad (6)$$

- Applicando la *trasformata Z* a (5):

$$\mathbf{X}(z)=\left[\frac{1}{h}\frac{z-1}{\alpha z+1-\alpha}\mathbf{I}-\mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{B}\,E(z) \qquad (7)$$

- Trasformando (6) e utilizzando (7):

$$U(z)=\left\{\mathbf{C}\left[\frac{1}{h}\frac{z-1}{\alpha z+1-\alpha}\mathbf{I}-\mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}\right\}E(z) \qquad (8)$$

Discretizzazione
Caso generale

Ricordando che la fdt di un sistema dinamico è data da

$$R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \mathbf{C}\left[s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

(8) può essere vista come la fdt del regolatore valutata per

$$s = \frac{z-1}{h(\alpha z + 1 - \alpha)}$$

→ La fdt della realizzazione TD si può ottenere come

$$R(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{h(\alpha z+1-\alpha)}} \qquad (9)$$

Discretizzazione
Caso generale

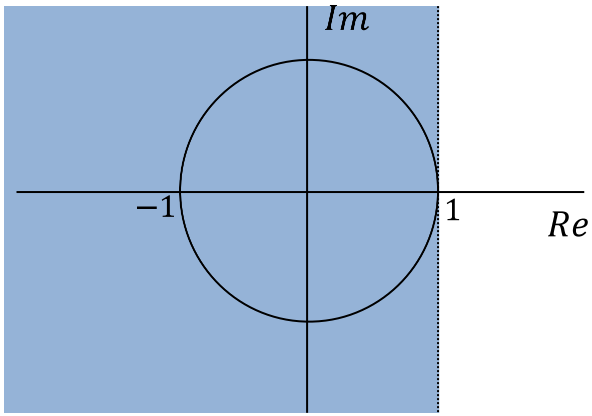
- In base al valore di $0 \le \alpha \le 1$ si ottengono diverse approssimazioni
  - **Eulero in avanti** $\alpha = 0 \Rightarrow s = \frac{z-1}{h}$
  - **Eulero all'indietro** $\alpha = 1 \Rightarrow s = \frac{z-1}{zh}$
  - **Tustin** $\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow s = \frac{2(z-1)}{h(z+1)}$

Discretizzazione
Caso generale

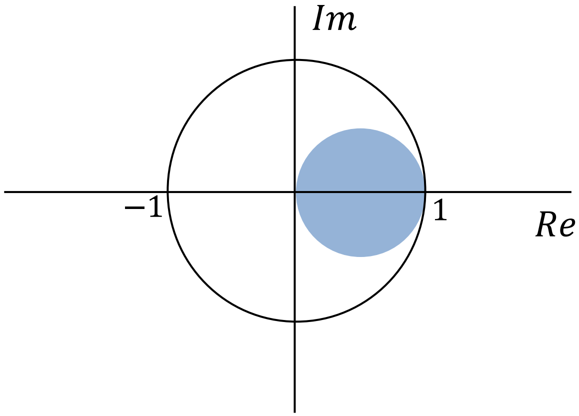
- È interessante vedere dove vengono mappati poli e zeri per varie scelte di α

$$z = \frac{1 + (1 - \alpha)hs}{1 - \alpha hs} = \psi(s)$$

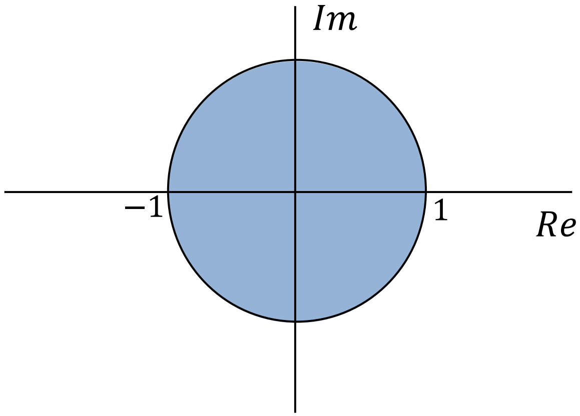
- Consideriamo la regione in cui viene mappato il **semipiano sinistro**



$\alpha = 0$



$\alpha = 1$



$\alpha = 1/2$

Implementazione digitale dei PID

- Applichiamo la procedura vista a un PID TC **reale**

$$R(s) = K_P + \frac{K_P}{T_I s} + \frac{K_P T_D s}{1 + s\frac{T_D}{N}}$$

Azione proporzionale

Azione integrale

Azione derivativa

Implementazione digitale dei PID

- La legge di controllo del PID **nel dominio del tempo discreto** sarà ancora la somma di tre contributi

$$u(k) = p(k) + i(k) + d(k)$$

- Ad esempio, con BE otteniamo (in **forma di posizione**)

$$u(k) = K_p e(k) + \frac{K_P h}{T_I} \sum_{n=0}^{k} e_n + \frac{K_P T_D}{h} (e_k - e_{k-1})$$

- L'azione proporzionale è **puramente algebrica**

→ **la sua discretizzazione non comporta nessuna approssimazione**

- All'istante $t = kh$ si ha

$$p(k) = K_P e(k) = K_P \big(r(k) - y(k)\big)$$

- Nel caso di un **PID ISA** si deve aggiungere il parametro *b*:

$$p_{ISA}(k) = K_P \big(br(k) - y(k)\big)$$

Implementazione digitale dei PID
Azione integrale

- In genere l'azione integrale viene discretizzata con il metodo di **Eulero all'indietro**

$$i(k) = i(k-1) + \frac{K_P h}{T_I} e(k)$$

- Se si utilizzasse **Eulero in avanti**, l'algoritmo di controllo dovrebbe memorizzare anche il campione dell'errore all'istante $t = (k-1)h$

$$i(k) = i(k-1) + \frac{K_P h}{T_I} e(k-1)$$

- Lo stesso vale per il metodo di **Tustin**

Implementazione digitale dei PID

Azione integrale

- La formula trovata è anche detta **forma di velocità** del termine integrale

$$i(k) = i(k-1) + \frac{K_P h}{T_I} e(k)$$

- A ogni passo l'aggiornamento dell'azione integrale viene calcolato in **maniera incrementale**. In questo modo non vanno memorizzati tutti i campioni precedenti, come avveniva nella forma di posizione

Implementazione digitale dei PID

Azione derivativa

- Anche per l'azione derivativa usa in genere **Eulero all'indietro**

$$d(k)=\frac{T_D}{Nh+T_D}d(k-1)+\frac{K_P T_D N}{Nh+T_D}\big(e(k)-e(k-1)\big)$$

- Nel caso di un **PID ISA**, bisogna aggiungere il parametro *c*

$$d_{ISA}(k)=\frac{T_D}{Nh+T_D}d(k-1)+\frac{K_P T_D N}{Nh+T_D}\big[c\big(r(k)-r(k-1)\big)+y(k-1)-y(k)\big]$$

- Tipicamente $c \neq 1$ per limitare l'azione derivativa →**non serve memorizzare *e(k-1)* se anche l'azione integrale viene discretizzata con Eulero all'indietro**

Esercizi

1. Partendo dalla relazione (5) ricavare la relazione (7)
2. Applicando i metodi di Eulero all'indietro ed Eulero in avanti si ricavino le espressioni dell'azione integrale nel tempo discreto date nella slide 62
3. Si discretizzi l'azione integrale utilizzando il metodo di Tustin
4. Applicando il metodo di Eulero all'indietro si ricavino le espressioni dell'azione derivativa nel tempo discreto date nella slide 64
5. Generalizzare le espressioni di FE, BE, CN per sistemi con più variabili di stato

Risorse e Riferimenti

- [1] Cap. 4.3.1
- [2] Cap. 17

- Wiki su FE, BE, integrazione numerica

Fine Lezione #13

Implementazione digitale dei regolatori PID