四川大学期末考试标准答案（闭卷）

（2019~2020 学年第 1 学期） A 卷

课程号：311153050 课程名称：离散数学任课教师：林兰，代术成，何坤， 李晓华

适用专业年级：软件工程 2018 级学号：________________姓名：________________

考生承诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、 已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、 不带手机进入考场；

3、 考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

题　　号	一(10%)	二(20%)	三(30%)	四(30%)	五(10%)			
得　　分								
卷面总分		教师签名		阅卷时间				

注意事项： 1. 请务必将本人所在学院、姓名、学号、任课教师姓名等信息准确填写在试题纸和添卷纸上；

2. **请将答案全部填写在本试题纸上；**

3. 考试结束，请将试题纸、添卷纸和草稿纸一并交给监考老师。

评阅教师	得分

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

提示：在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在下表中。错选、多选或未选均无分。

1. 在 9 个人之间（不考虑自我认识），1）不可能每个人都只与其他 3 个人相互认识，2）可能存在只有 4 个人与偶数个其他人相互认识。下列语句中正确的是（ A ）。

A、只有 1）正确； B、1）和 2）均正确； C、1）和 2）均不正确； D、只有 2）正确。

2. 在集合论和逻辑学中，下面公式不正确的有(D)。

A、P∧～P⇒R∧Q； B、R→Q⇒P∨～P； C、$2^A \cap 2^B = 2^{A\cap B}$； D、A,B,C 恰有两个正确。

3. 在（ D ）中，补元是唯一的。

A、 有界格； B、有补格； C、分配格； D、有补分配格。

4. 下面关于集合基数正确的说法是（ A ）。

A、 素数集合与有理数集合等势 B、实数集合的基数最大

C、没有最小的基数 D、一个集合不可能和它的真子集等势

5. 下面哪个命题公式是重言式（ B ）。

A、$(P \to Q)\wedge(Q \to R)$； B、$(P \wedge Q) \to P$；

C、$(\neg P \vee Q)\wedge\neg(P\wedge\neg Q)$； D、$\neg(P \vee Q)\wedge P$。

注：1、印制试卷时同时提交《四川大学期末试卷审批表》。

2、本试卷审批表同试卷一并归档保存。

评阅教师	得分

二、填空题（本大题共 10 空，每空 2 分，共 20 分）。

1．有向图G 中有 12 个顶点，该图关联矩阵的秩为 7，则连通分支数为（ 5 ）。

2．连通分支为 2 的是平面图 G，有 5 个顶点，6 个面，从 G 中最多删去(5)边而不改变其连通性。

3．设集合 A={a，b，c}，从 A 到 A 的二元关系中，有（ 506 ）个二元关系不能表示为置换；从 A 到 A 的函数中，有（ 21 ）个函数不能表示为置换。

4．实数集 R 上有二元运算：$a*b=a+b-ab$，则 代数系统<R,∗ > 的幺元是（ 0 ），零元是（ 1 ），幂等元有（ 0, 1 ）。

5．若群中存在零元，则该群的阶数为（ 1 ）。

6．设 R 是 A = {2, 3, 12, 18, 24，72 }上的整除关系，偏序集<A,R>的极小元（2 或 3），最大元是（ 72 ）。

评阅教师	得分

三、计算题（本大题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分 ）

1.设简单平面图 G 中顶点数 n=7，边数 m=15。计算图 G 的连通分支数。

解：设 G 具有k 个连通分支$G_1,G_2,\cdots G_i,\cdots,G_k$，$G_i$ 的顶点数为n_i，边数为m_i。

1）由于 G 是简单图，从而要使 G 的边数是 15， 则 G 只有两个连通分支，其中一个是孤立节点导出的，另一个是K_6，但K_6 不是平面图，故每个连通分支的顶点都大于 1。

2）同理可得每个连通分支的顶点都大于 2。

3）由此可得，G 的每个连通分支至少有 3 个顶点， 从而$m_i \le 3n_i-6$,

即 $$m=\sum_{i=1}^{k}m_i \le \sum_{i=1}^{k}(3n_i-6)=3n-6k$$

$15\le 21\text{-}6k$，即$k\le 1$，从而有k=1, 故 G 是连通的

2. 设函数 $f:R\times R\to R\times R$，f 定义为：$f(\langle x,y\rangle)=\langle x+y,x-y\rangle$。1)求逆函数 f^{-1}。(2)求复合函数 $f^{-1}\circ f$ 和 $f\circ f$。

1）对任意的$\langle u，w\rangle\in R\times R$，令 $x=\dfrac{u+w}{2}$，$y=\dfrac{u-w}{2}$，则 $f(\langle x，y\rangle)=\langle\dfrac{u+w}{2}+\dfrac{u-w}{2}$，$\dfrac{u+w}{2}-\dfrac{u-w}{2}\rangle=\langle u，w\rangle$，$f^{-1}(\langle u，w\rangle)=\langle\dfrac{u+w}{2}$，$\dfrac{u-w}{2}\rangle$。

(2) $f^{-1}\circ f(\langle x，y\rangle)=f^{-1}(f(\langle x，y\rangle))=f^{-1}(\langle x+y，x-y\rangle)=\langle\dfrac{x+y+x-y}{2}$，$\dfrac{x+y-(x-y)}{2}\rangle$ $=\langle x，y\rangle$

$f\circ f(\langle x，y\rangle)=f(f(\langle x，y\rangle))=f(\langle x+y，x-y\rangle)=\langle x+y+x-y，x+y-(x-y)\rangle=\langle 2x，2y\rangle$。

3. 某班有学生 60 人，其中有 38 人会说中文， 16 人会说英文， 21 人会说德文；有 3 个人这三种语言都会说，有 2 个人这三种语言都不会说，问只会说两门语言的学生数是多少？(10 分)

解　设 A 、B 、C 分别表示说中文、英文、德文的学生集合，则|A|＝38，|B|＝16，|C|＝21，|A∩B∩C|＝3，$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|$＝2。

|A∪B∪C|＝60－$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|$＝58

由容斥原理，得

|A∪B∪C|＝|A|＋|B|＋|C|－|A∩B|－|A∩C|－|B∩C|＋|A∩B∩C|

所以

|A∩B|＋|A∩C|＋|B∩C|＝|A|＋|B|＋|C|＋|A∩B∩C|－|A∪B∪C|＝38＋16＋21＋3－58＝20

又因为

$|A\cap B\cap\overline{C}|$＝|A∩B|－|A∩B∩C|

所以

$|A\cap B\cap\overline{C}|$＋$|A\cap\overline{B}\cap C|$＋$|\overline{A}\cap B\cap C|$＝|A∩B|＋|A∩C|＋|B∩C|－3|A∩B∩C|＝20－9＝11

会说两门语言的学生数是 11 人。

评阅教师	得分

四、证明题（本大题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分）

1. 设简单无向图$G(V,E)$，证明$|E|\le\frac{|V|(|V|-1)}{2}$。

证明：在简单无向图中，任一节点的度$\deg(v_i)\le|V|-1$，

根据握手定则可知：

$$2|E|=\sum_{i=1}^{|V|}\deg(v_i)\le\sum_{i=1}^{|V|}|V|-1=|V|(|V|-1),$$

可得$|E|\le\frac{|V|(|V|-1)}{2}$

2. 证明无向连通简单图 G 中，顶点个数为$n\ge3$，边为$m=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$，则 G 是哈密尔顿图。

证明：根据握手定则：图 G 中所有顶点的度之和$2m=(n-1)(n-2)+4$。

在图 G 中任意删除两个顶点u,v 得到子图$G'=G-\{u,v\}$，其顶点个数$n'=n-2$。

由于图G 为简单图，子图G' 也为简单图，

在子图G'中，每个顶点的度小于等于$n'-1$。子图中所有顶点的度之和

$2m'\le n'(n'-1)=(n-2)(n-3)$.

顶点u,v度之和$\deg(u)+\deg(v)=2m-2m'\geq(n-1)(n-2)+4-(n-2)(n-3)=2n$

得到$\deg(u)+\deg(v)=2n\geq n$。 根据哈密尔顿图的判断依据，可知无向连通简单图G为哈密尔顿图。

3. 设$<G,*>$是一群，$x\in G$。定义：$a\circ b=a*x*b$，$\forall a,b\in G$。证明$<G,\circ>$也是一群。

证明：1） 显然$\circ$是G上的二元运算（即满足封闭性），

2）$\forall a,b,c\in G$，有

$(a\circ b)\circ c=(a*x*b)*x*c=a*x*(b*x*c)=a\circ(b\circ c)$运算是可结合的。

3）x^{-1}是$<G,\circ>$的单位元。事实上，$\forall a\in G$，有

$a\circ x^{-1}=a*x*x^{-1}=a$；$x^{-1}\circ a=x^{-1}*x*a=a$

4） 最后证明，$\forall a\in G$，$x^{-1}*a^{-1}*x^{-1}$是a在$<G,\circ>$中的逆元。事实上，

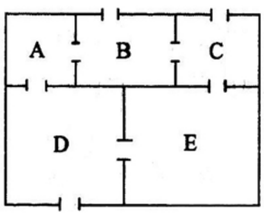
$a\circ(x^{-1}*a^{-1}*x^{-1})=a*x*x^{-1}*a^{-1}*x^{-1}=x^{-1}$

$(x^{-1}*a^{-1}*x^{-1})\circ a=x^{-1}*a^{-1}*x^{-1}*x*a=x^{-1}$

5） 由以上证明，$<G,\circ>$是群。

评阅教师	得分

五、分析题（本大题共1小题，共10分）



下图表示一开发商所设计房屋的平面图，缺口处表示门的位置。如果希望从户外进入该房屋，穿过每个门一次并且恰好一次，再回到户外，目前的设计能实现这个愿望吗？如果不能，应该如何修改设计，通过增加最少的门来实现这个愿望？

解：设每个房间对应一个顶点（户外也是一个顶点），每个门对应两个顶点（即该所连接的两个房屋）之间的一条边，于是得到一个连通图，所以希望的走法就是这个图的一条欧拉回路。这个愿望能够实现当且仅当每个顶点的度数都是偶数。　　　　（4分）

由于房屋B,C,D和户外这4个顶点都是奇数度的，所以目前的设计还不能实现上述愿望。（2分）

至少需要在B,C,D和户外这4个顶点之间增加两条边（即增加两个门）。由于C和D之间没有公共的墙，不能在C和D之间加边，所以只能在C和B之间，D和户外之间加边。　　　　（2分）

因此至多增多2个门就能实现所希望的走法，即在房间C和B之间加开第二个门，　　　　（1分）

并且在房间D和户外之间加开第二个门　　　　（1分）