第四部分　图　论

第10章　图的基本概念

计算机（软件）学院

林　兰

linlan@scu.edu.cn

主要内容

- 10.1 图的基本概念
- 10.2 通路与回路
- 10.3 图的连通性
- 10.4 图的矩阵表示

10.1 图的基本概念

1. 图的定义

（1）无向简单图

一个图G是一个二元组$\langle V(G), E(G)\rangle$，简记为$\langle V, E\rangle$。其中:

①V={v_1，v_2，…v_n}，是有限非空集合，v_i（i=1，2,…n）称为结点，V称为结点集（n≥1）；

② E={e_1，e_2,…e_m}，是一个有限集，e_i（i=1，2，…,m）称为边，E称为边集，E中的一个元素与不同结点的无序对对应，且不重复出现（m ≥ 0）。

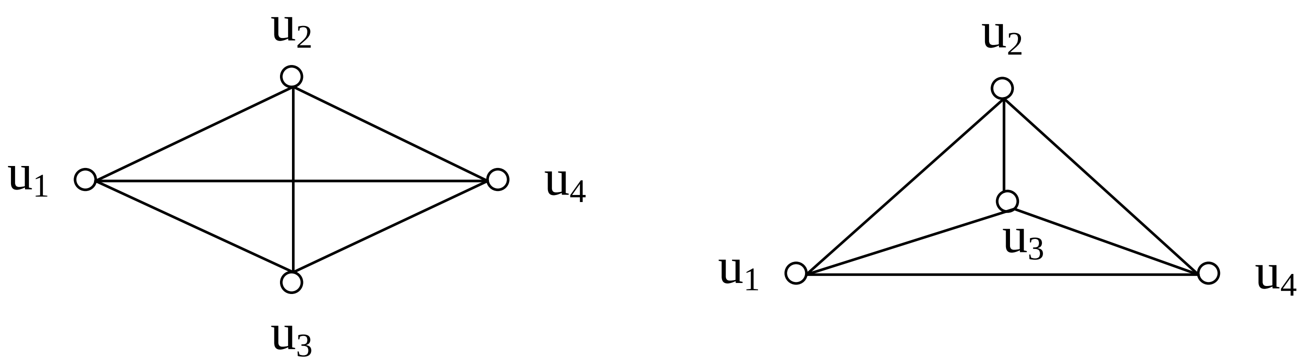
无序对uv, vu表示同一条边，“棱”

- 图G的结点数称为G的阶，用n表示，G的边数用m表示，也可表示成ε(G)=m 。

10.1 图的基本概念

例1 $G=\langle V,E\rangle$

$$=\langle\{u_1, u_2, u_3, u_4\},\{u_1u_2, u_1u_3, u_1u_4, u_2u_3, u_2u_4, u_3u_4\}\rangle$$

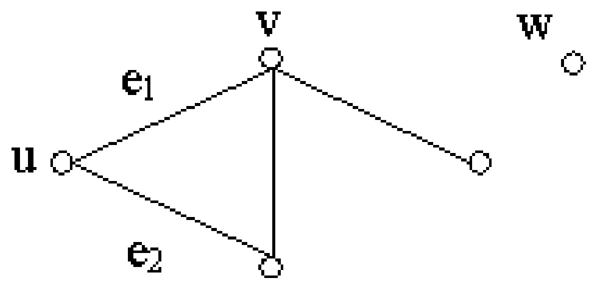


(4, 6) 图

- 含有n个结点、m条边的图称为(n，m)图；

10.1 图的基本概念

- **几个概念**



① 边e_1与无序结点对(u，v)相对应，则称边e为无向边, 记为e＝uv（或vu），这时称u，v是边e的两个端点；

② 边e_1=uv，结点u和v相互邻接的，边e_1分别与u和v相互关联。

③ 边e_1与e_2都与同一结点u关联时，称边e_1与e_2是相互邻接的。

④ 图中不与任何结点相邻接的结点称为孤立结点；

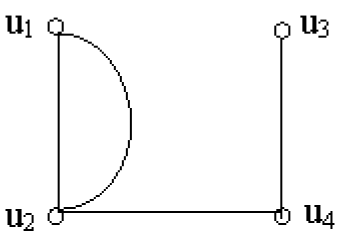
⑤ 含有n个结点、m条边的图称为(n，m)图；

10.1 图的基本概念

- 图的扩充形式

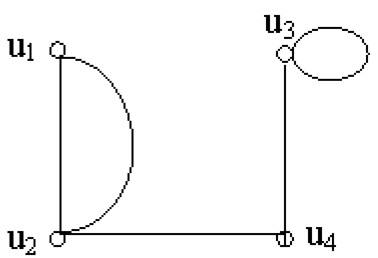
在无向图中，两个结点间(包括结点自身间)若有几条边，则这几条边称为平行边。

关联同一个结点的边称为环(或自回路)。



多重图

- 多重图：含有平等边的图称为多重图。



广义图

- 广义图(伪图)：含有平等边或环(自回路)的图。（非简单图）

将多重图和广义图中的平行边代之以一条边，去掉环，可以得到一个简单图，称为原来图的基图。

10.1 图的基本概念

（2）有向图

一个有向图G是一个二元组$\langle V(G), E(G)\rangle$，简记为$\langle V, E\rangle$。

其中:

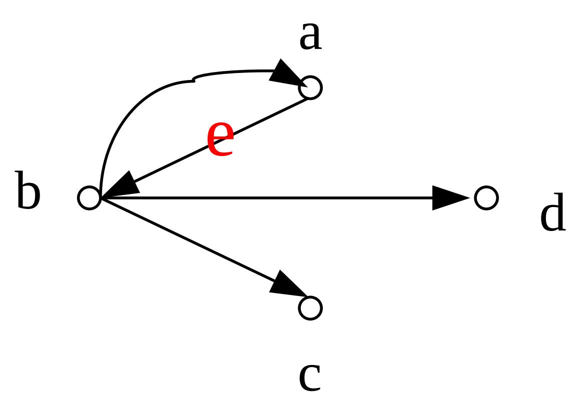
① $V=\{v_1, v_2, \cdots v_n\}$，是有限非空集合，$v_i$（i=1, 2,…n）称为结点，V称为结点集（$n\geqslant 1$）；

② $E=\{e_1, e_2, \cdots e_m\}$，是一个有限集，$e_i$（i=1，2，…, m）称为边，E称为边集，E中的一个元素与不同结点的有序对对应，且不重复出现（$m \geqslant 0$）。

有序对(u, v) 与 (v, u)不同的两条边，“弧”

10.1 图的基本概念

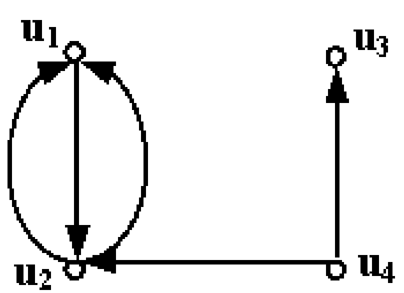
例2 有向图$G = \langle V, E\rangle = \langle\{a, b, c, d\}, \{(a,b), (b,a), (b,c), (b,d)\}\rangle$



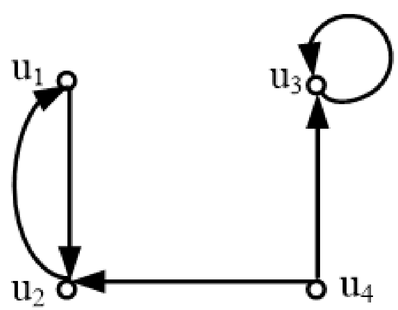
若边e与有序结点对⟨a，b⟩相对应，则称边e为有向边，记为e＝⟨a，b⟩，这时称a是边e的始点。b是边e的终点，统称为e的端点；e是a的出边，是b的入边。

10.1 图的基本概念

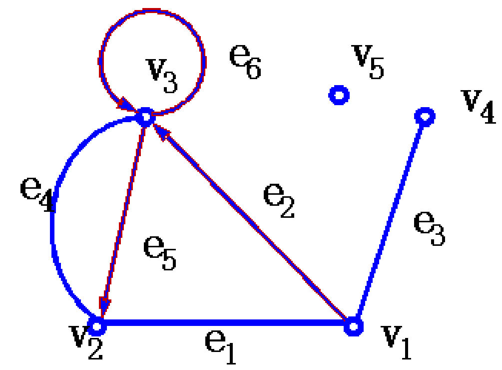
- 有向图的扩充：多重有向图和有向伪图



多重有向图



有向伪图



混合图

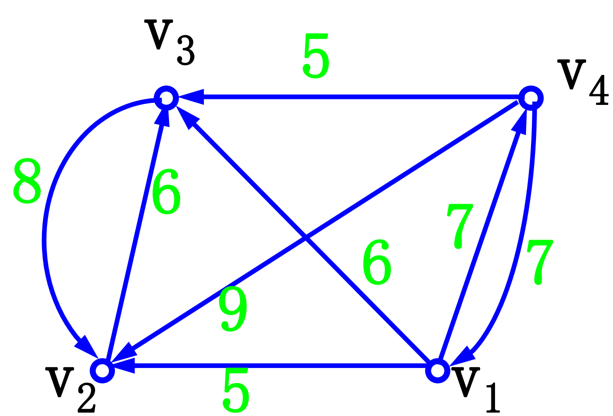
- 混合图：如果在一个图中，有些边是无向边，而另一些边是有向边，则称这个图为混合图。
- 基图：有向图去掉边的方向后得到的图。

10.1 图的基本概念

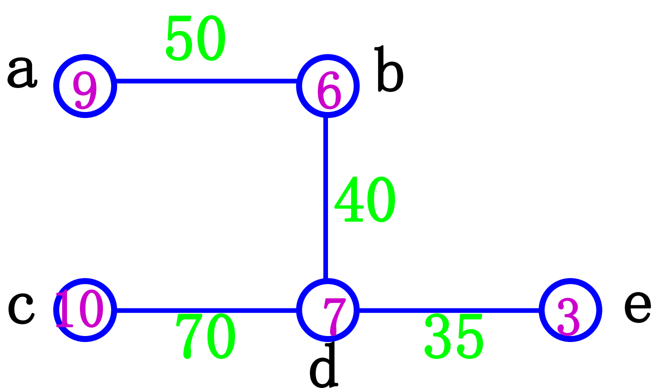
(3) 赋权图（带权图）

赋权图G是一个三重组<V, E, g>或四重组<V, E, f, g>，其中V是结点集合，E是边的集合，f是从V到非负实数集合的函数，g是从E到非负实数集合的函数。

非赋权图称为无权图。



边权图



点边权图

10.1 图的基本概念

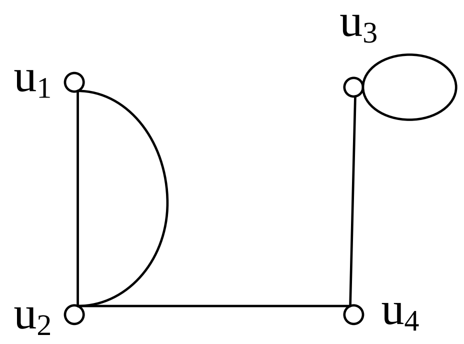
2. 结点的度数（次数）

（1）在**无向图**$G=\langle V,E\rangle$中，与结点u(u∈V)关联的边的条数，称为该结点的度数，简称**点度**，记为**deg(u)**。

- 最大点度记为Δ，最小点度记为δ。

10.1 图的基本概念

例3 (伪图)



$d(u_1)=2$

$d(u_2)=3$

$d(u_3)=3$ （“环”计算为2条边）

$d(u_4)=2$

$\Delta=3$, $\delta=2$

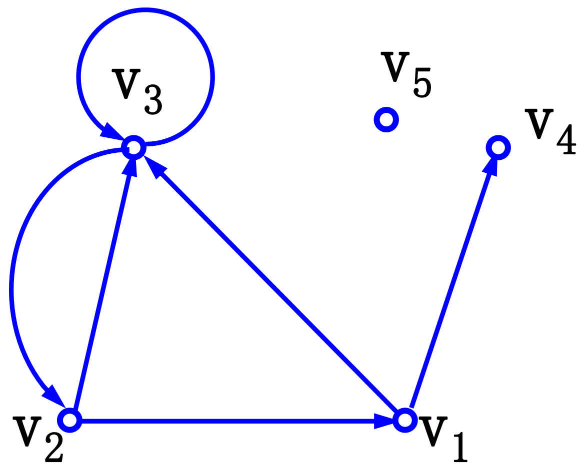
10.1 图的基本概念

（2）在**有向图**$G=(V, E)$中，以结点$u(u \in V)$为始点引出的边的条数，称为该结点的引出度数，简称**出度**，记为$deg^{+}(u)$；以结点$u(u \in V)$为终点引入的边的条数，称为该结点的引入度数，简称**入度**，记为$deg^{-}(u)$。

- 结点u的度数： $deg(u) = deg^{+}(u) + deg^{-}(u)$
- 最大出度、入度记为Δ^{+}，Δ^{-}，最小出度、入度记为δ^{+}，δ^{-}。

10.1 图的基本概念

例4



$\deg(v_1)=3$，$\deg^+(v_1)=2$，$\deg^-(v_1)=1$；

$\deg(v_2)=3$，$\deg^+(v_2)=2$，$\deg^-(v_2)=1$；

$\deg(v_3)=5$，$\deg^+(v_3)=2$，$\deg^-(v_3)=3$；

$\deg(v_4)=1$，$\deg^+(v_4)=0$，$\deg^-(v_4)=1$；

$\deg(v_5)=\deg^+(v_5)=\deg^-(v_5)=0$；

10.1 图的基本概念

- 握手定理(Euler, 1736年)

(1) 在无向图G＝<V, E>中，则所有结点的度数的总和等于边数的两倍，即：

$$\sum_{v\in V}\deg(v)=2m;$$

(2) 在有向图G＝<V, E>中，则所有结点的引出度数之和等于所有结点的引入度数之和，所有结点的度数的总和等于边数的两倍，即：

$$\sum_{v\in V}\deg^{+}(v)=\sum_{v\in V}\deg^{-}(v)=m,$$

$$\sum_{v\in V}\deg(v)=\sum_{v\in V}\deg^{+}(v)+\sum_{v\in V}\deg^{-}(v)=2m。$$

10.1 图的基本概念

推论： 在图G＝<V，E>中，其V＝{$v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n$}，E＝{$e_1$，$e_2$，……，$e_m$}，度数为奇数的结点个数为偶数。

证明 设V_1，V_2分别为奇度结点和偶度结点的集合。

显然， $V=V_1 \cup V_2$， $V_1 \cap V_2 = \emptyset$,

则 $$\sum_{u \in V} d(u) = \sum_{u \in V1} d(u) + \sum_{u \in V2} d(u) = 2m$$

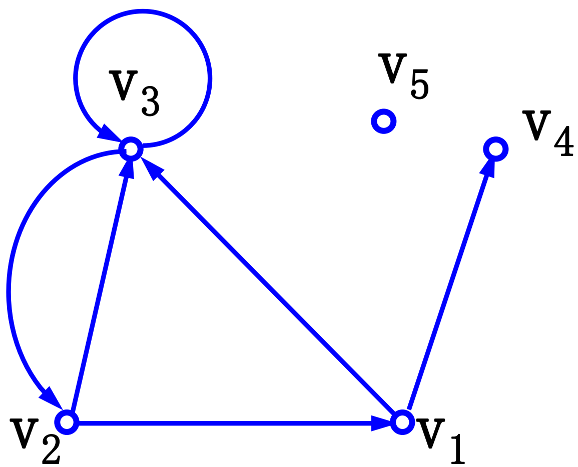
其中，$\sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_2} \deg(\mathbf{v})$ 和 2m都为偶数,

则 $\sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_1} \deg(\mathbf{v})$ 为偶数。

得： $|V_1|$ 为偶数。

10.1 图的基本概念

设V＝{v_1， v_2, …, v_n}为图G的结点集，称($\deg(v_1)$, $\deg(v_2)$, …, $\deg(v_n)$)为G的度数序列。



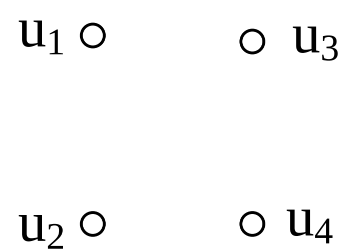
上图的度数序列为（3, 3, 5, 1, 0）。

10.1 图的基本概念

3. 一些特殊的简单图

（1）**零图**：仅由孤立点组成的图。

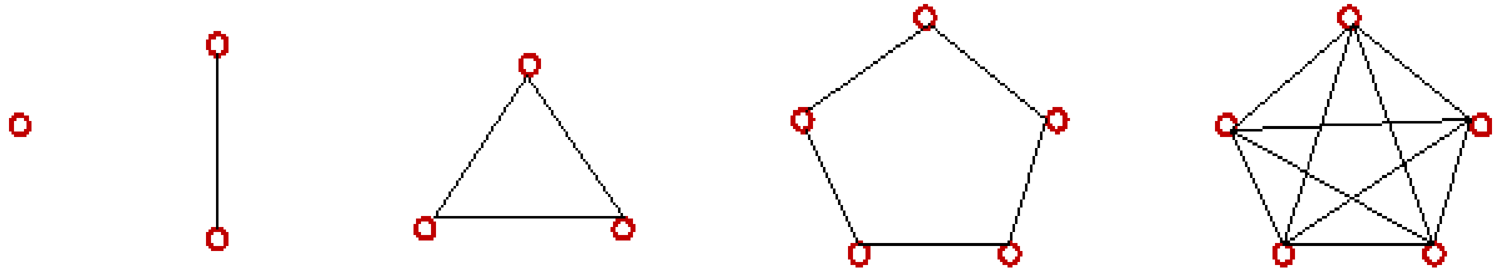
E=Ø，即G=(V, Ø)



（2）**平凡图**：仅含一个孤立点的零图。

10.1 图的基本概念

（3）k度正则图：简单图G中，所有结点的度数都为k，记为k-正则图。



平凡图　1-正则图　2-正则图　2-正则图　4-正则图

- n阶，k-正则图的边数$m = \frac{n \cdot k}{2}$。$\Rightarrow (n, \frac{n \cdot k}{2})$ 图

问题：考虑简单无向图，当点度k=5时，至少有多少个结点构成k-正则图？

因为 k度→一个结点与k个结点邻接，∴ n≥k+1。

当n=k+1时，为完全图。

10.1 图的基本概念

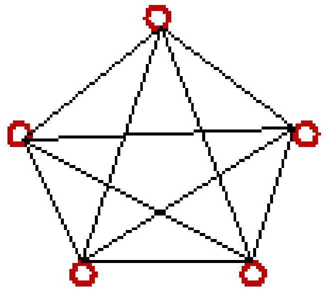
（4）完全图

① 无向完全图：在n个结点的无向简单图G=(V, E)中，如果任意两结点均相互邻接，则称G为n阶无向完全图，记为K_n。

显然，K_n为n-1度正则图。

定理 n阶无向完全图，有m= n(n-1)/2条边。

即 (n, n(n-1)/2)图

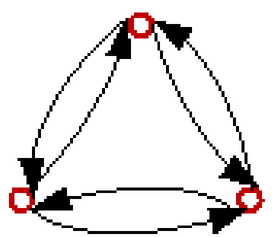


K_5

② 有向完全图：在n个结点的有向简单图G=(V, E)中，如果任意两结点u和v之间皆有<u,v>和<v,u>连接，则称G为n阶有向完全图。

推论 n阶有向完全图，有m= n(n-1)条边。

即 (n, n(n-1))图

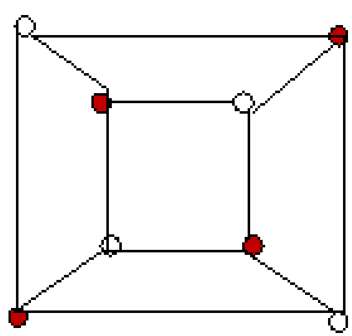


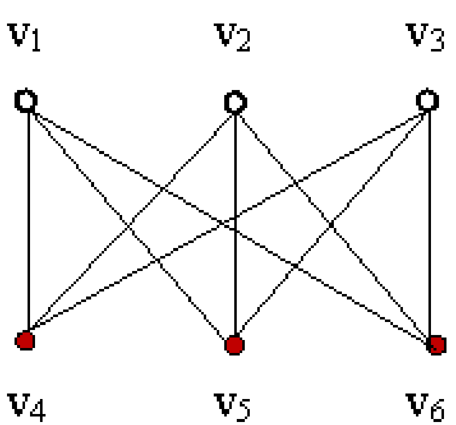
10.1 图的基本概念

（5）二部图

图G=(V, E)中，如果点集V可划分为两个子集合X, Y，使得图中每条边的一个关联结点在X中，另一个关联结点在Y中，则称这样的图为二部图。

设|X|=n_1，|Y|=n_2。如果X中的每一个结点与Y中的全部结点都邻接，则称G为完全二部图，并记为$K_{n1,n2}$。





10.1 图的基本概念

4. 子图和补图

(1) 子图

定义 设图$G=(V, E)$， $G_1=(V_1, E_1)$，若G和G_1满足：

① 若$V_1 \subseteq V$，且$E_1 \subseteq E$，则称G_1是G的子图，记为$G_1 \subseteq G$。

② 若$V_1 \subset V$，或$E_1 \subset E$，则称G_1是G的真子图，记为$G_1 \subset G$。

③ 若$V_1=V$，且$E_1 \subseteq E$，则称G_1是G的生成子图，记为$G_1 \subseteq G$。

④ 若$V_1=V$，且$E_1=E$或$E_1=\varnothing$，则称G_1是G的平凡子图。

10.1 图的基本概念

- **子图生成的几种方法：**

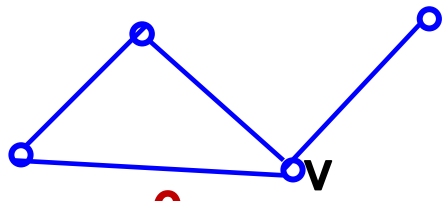
① 若$S=\{v_1, v_2, \cdots v_k\}$是图G的结点集V的子集，则称$G-\{v_1, v_2, \cdots v_k\}$是从G中删去结点$v_1, v_2, \cdots v_k$以及它们关联的全部边后得到的G的**删点子图**，简记为G-S。

② 若$T=\{e_1, e_2, \cdots e_t\}$是图G的边集E的子集，则称$G-\{e_1, e_2, \cdots e_t\}$是从G中删去T中的全部边后得到的G的**删边子图**，简记为G-T。

③ 图$G=\langle V, E\rangle$，$S\subseteq V$，则$G(S)=(S, E')$是一个以S为结点，以$E'=\{uv \mid u, v\in S, uv\in E\}$为边集的图，称为G的**点诱导子图**。

④ 图$G=\langle V, E\rangle$，$T\subseteq E$且$T\neq\varnothing$，则$G(T)$是一个以T为边集，以T中各边关联的全部结点为结点集的图，称为G的**边诱导子图**。

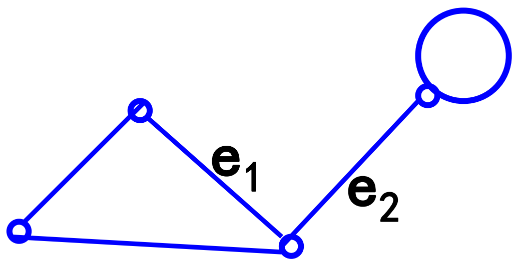
例5



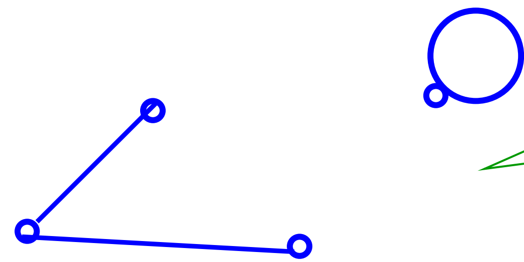
G_1

$G_1-\{v\}$

删点子图

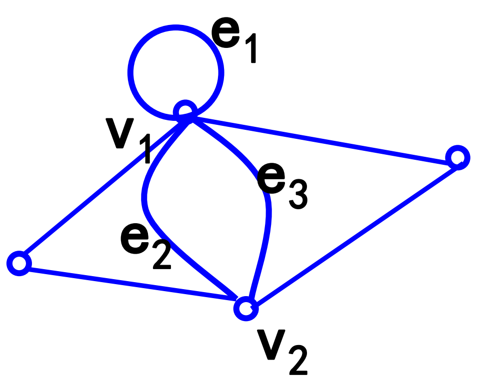


G_2

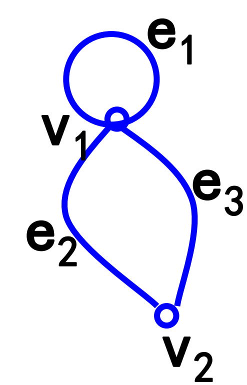


$G_2-\{e_1, e_2\}$

删边子图



G_3



点诱导子图 $G_3(\{v_1,v_2\})$

边诱导子图 $G_3(\{e_1,e_2,e_3\})$

10.1 图的基本概念

(2) 补图

定义 设简单图G=(V, E)有n个结点，简单图H=(V, E′)也有同样的结点，而E′是由n个结点的完全图的边删去E所得，则称图H是G的补图，记为 $\mathrm{H}=\bar{G}$。

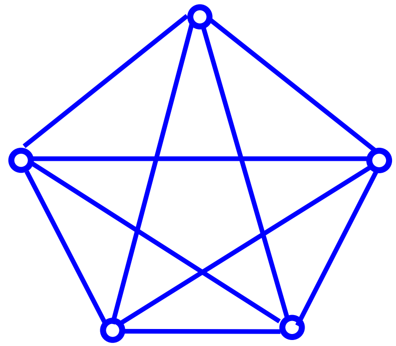
显然，$\bar{\bar{G}}=G$。

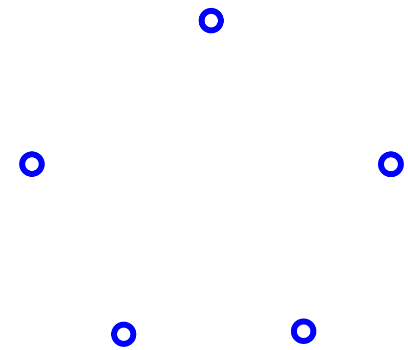
以上定义的子图和补图对有向图同样适用。

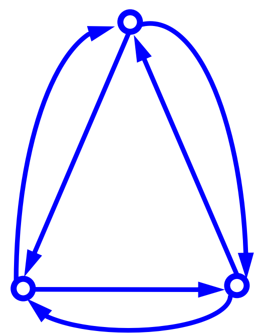
10.1 图的基本概念

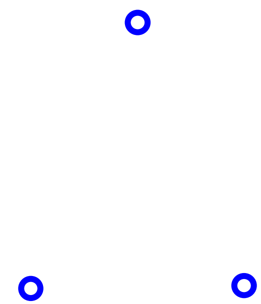
例6

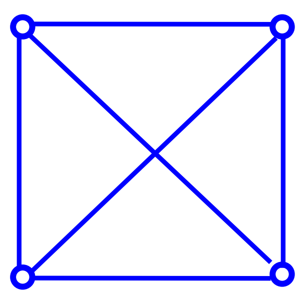
图的互补:

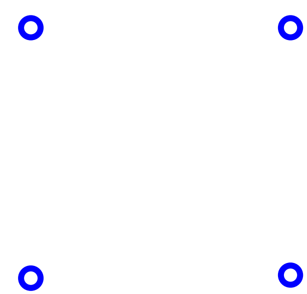






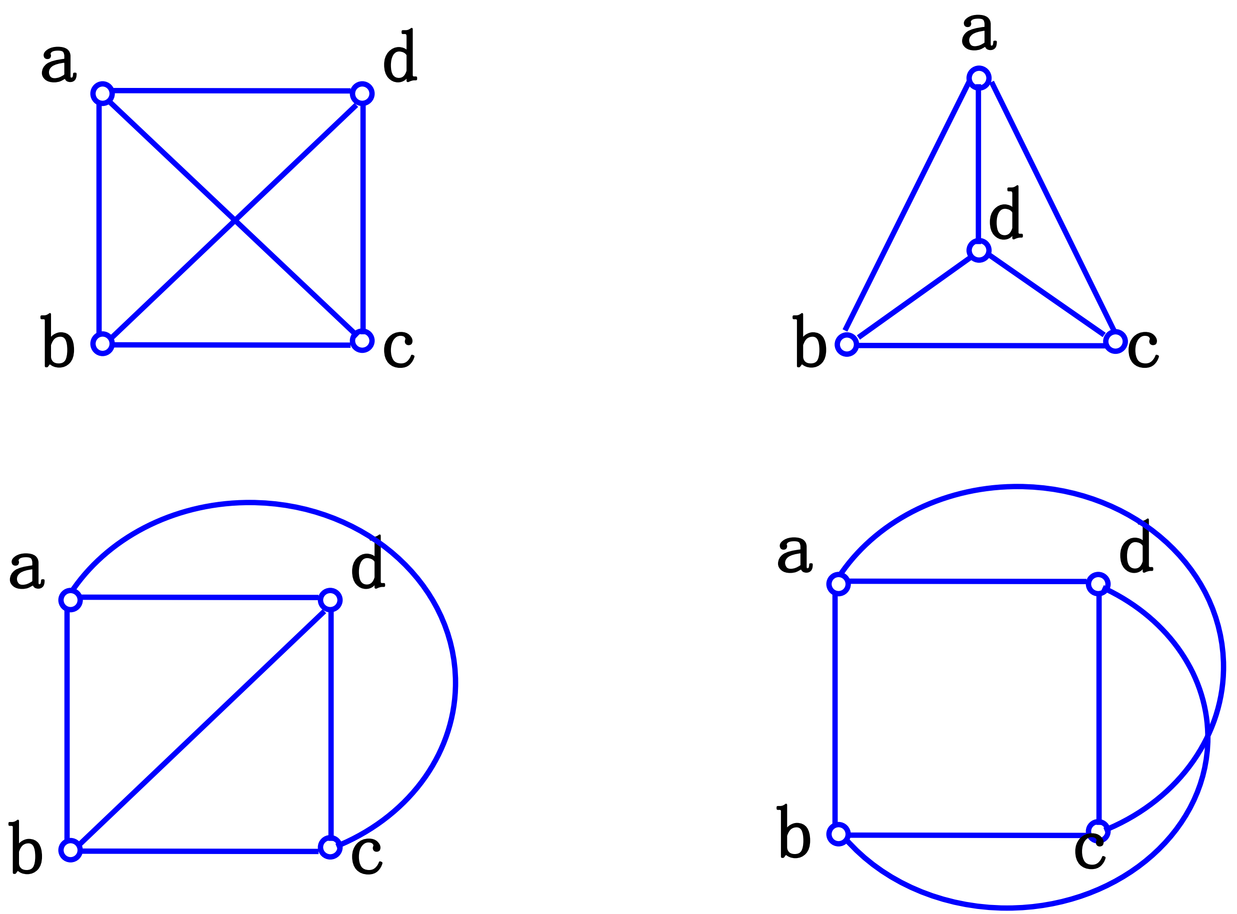






10.1 图的基本概念

5. 图的同构



10.1 图的基本概念

(1) 图的同构

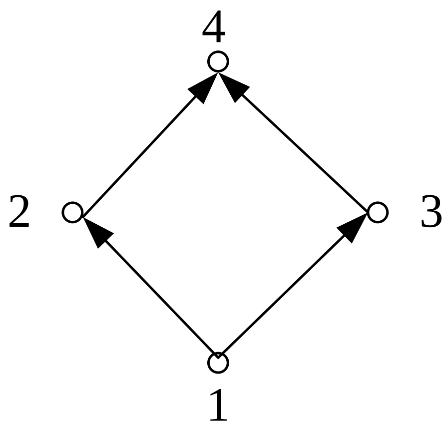
定义(无向图) 设$G=\langle V,E\rangle$和$G'=\langle V',E'\rangle$是两个图，如果存在双射$\phi: V\longrightarrow V'$，使$\forall uv\in E\Leftrightarrow\phi(u)\phi(v)\in E'$，则称$G$和$G'$同构，记为$G\cong G'$。

定义(有向图) 设$G=\langle V,E\rangle$和$G'=\langle V',E'\rangle$是两个有向图，如果存在双射$\phi: V\longrightarrow V'$， 使$\forall\langle u,v\rangle\in E\Leftrightarrow\langle\phi(u),\phi(v)\rangle\in E'$，则称$G$和$G'$同构，记为$G\cong G'$。

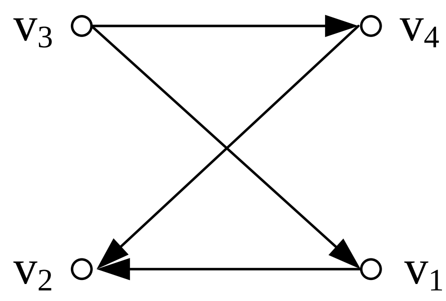
- 图的同构关系是图集上的等价关系。

10.1 图的基本概念

例7



G=(V, E)



G’ =(V’ , E’)

φ ： V→V’

$\varphi(1)=v_3$， φ $(2)=v_1$， φ $f(3)=v_4$， φ $(4)=v_2$，

有向边对映：

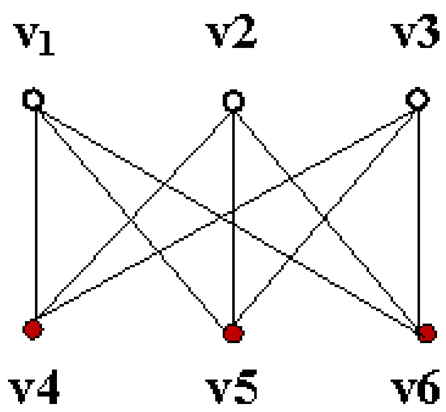
$\langle 1, 3\rangle \rightarrow \langle v_3, v_4\rangle$， $\langle 1, 2\rangle \rightarrow \langle v_3, v_1\rangle$，

$\langle 2, 4\rangle \rightarrow \langle v_1, v_2\rangle$， $\langle 3, 4\rangle \rightarrow \langle v_4, v_2\rangle$。

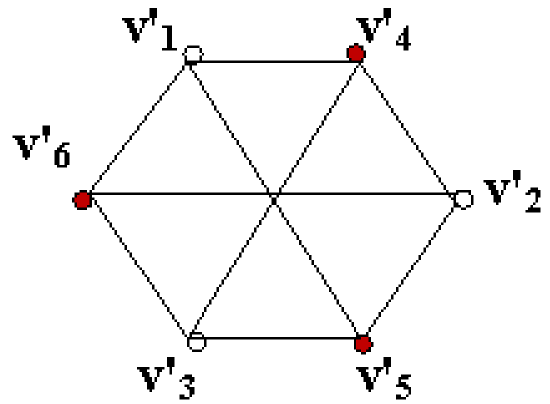
$\therefore$ $G \cong G'$。

10.1 图的基本概念

例8



G=(V, E)



G′=(V′, E′)

f： V→V’

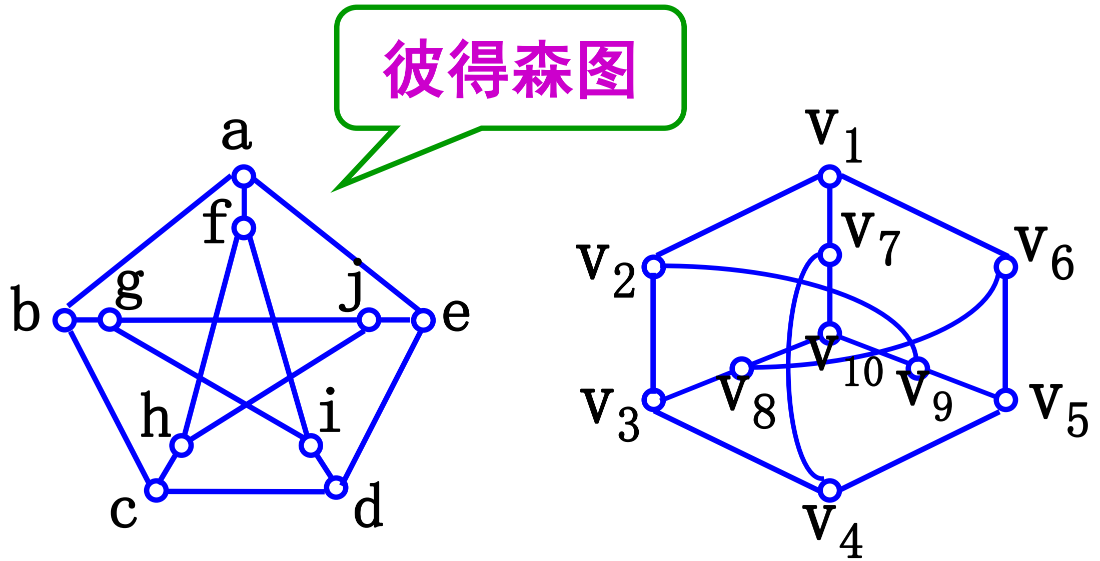
$f(v_i)=v_i'$　　(i=1, 2, 3…, 6)

无向边$(v_i, v_j)\to(f(v_i), f(v_j))$

∴ G≅G′。

10.1 图的基本概念

例9



G_1　　G_2

$G_1 \cong G_2$:

$a \to v_1$, $b \to v_2$, $c \to v_3$, $d \to v_4$,

$e \to v_7$, $f \to v_6$, $g \to v_9$, $h \to v_8$,

$i \to v_5$, $j \to v_{10}$

10.1 图的基本概念

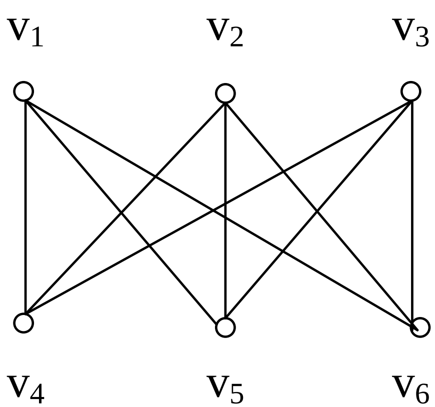
(2) 两个图同构的判断

必要条件 (可排除不同构)

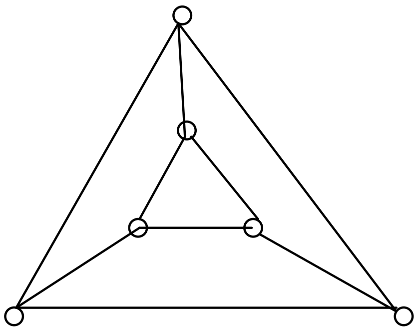
① 具有相同的结点数；

② 具有相同的边数；

③ 具有相同的度数序列。



G=(V, E)



G′=(V′, E′)

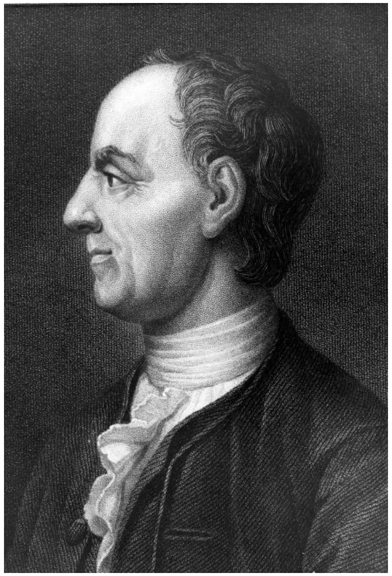
G与G′不同构

为什么？

G是一个完全二部图，而G′不是一个二部图

作业

- ✓ 习题十　**2、4、6、10、12**
- ✓ 下次课分享欧拉的故事



LEONHARD EULER
(莱昂哈德·欧拉, 1707-1783)
瑞士数学家，**18**世纪最杰出的数学家之一。

主要内容

- 10.1 图的基本概念
- 10.2 通路与回路
- 10.3 图的连通性
- 10.4 图的矩阵表示

10.2 通路与回路

1. 定义

(1) 设G=(V, E)是一个图（有向图），图的一个点边交替的非空序列$P=v_0e_1v_1e_2…e_kv_k$，称为图G的一条由结点v_0到v_k的**道路**（**或通路**，**路径**）。

- v_0、v_k分别为道路的**起点**和**终点**，其余结点称为内部结点。
- 道路P中边的条数k称为该道路的**长度**。
- 以u为起点，v为终点的道路也可记为<u, v>。

(2) 单个结点构成的序列$P=v_0$，长度为0，称为**零道路**。

(3) 若$v_0 \neq v_k$，起点与终点不同，称P为**开道路**，否则$v_0=v_k$，称为**闭道路（回路）**。

10.2 通路与回路

(4) 若道路P中的边互不相同，称P为**简单道路**。闭的简单道路称为**简单回路**。

- **同一条边不重复出现。**

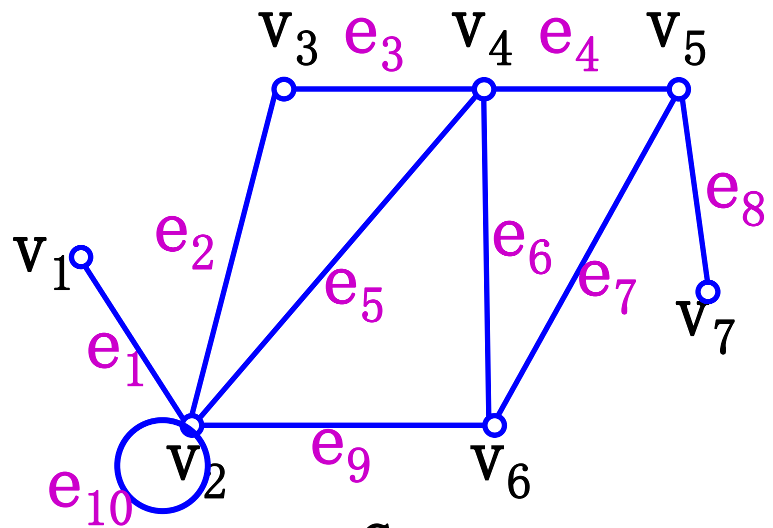
(5) 若道路P中的结点互不相同，称P为**基本道路**。闭的基本道路称为**基本回路（圈）**。

- **同一结点不重复出现。**

(6) 基本道路(或基本回路)一定是简单道路(或简单回路)，但反之则不一定。为什么？

10.2 通路与回路

例10（1）



G_1

在图G_1中：

$v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_4e_4v_5e_7v_6$：基本道路

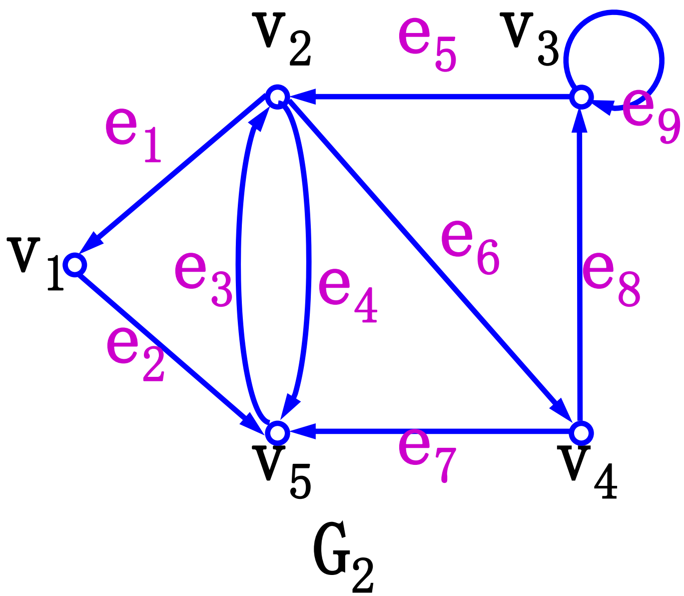
$v_1e_1v_2e_5v_4e_3v_3e_2v_2e_9v_6$。简单道路

$v_2e_{10}v_2e_2v_3e_3v_4e_5v_2$ 简单回路

$v_2e_2v_3e_3v_4e_5v_2$ 圈（基本回路）

10.2 通路与回路

例10（2）



在图G_2中：$v_1e_2v_5e_3v_2e_6v_4e_8v_3e_9v_3e_5v_2e_1v_1$：简单回路

$v_5e_3v_2e_4v_5$：圈

10.2 通路与回路

说明：

1) 在不会引起误解的情况下，一条道路$v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_nv_n$也可以用边的序列$e_1e_2\cdots e_n$来表示，这种表示方法对于有向图来说较为方便。

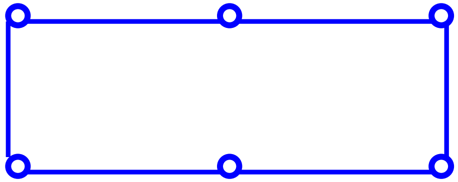
2) 在简单图中，一条道路$v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_nv_n$也可以用结点的序列$v_0v_1v_2\cdots v_n$来表示，称P穿程于（$v_0v_1v_2\cdots v_n$）。

10.2 通路与回路

- **道路图和圈图**
  - 若一个图能以一条基本道路表示出来，则称此图为道路图。n阶的道路图记为P_n。
  - 若一个图能以一个圈表示出来，则称此图为圈图。n阶的圈图记为C_n。

例如：

P_5



C_6

10.2 通路与回路

2. 道路长度

- 道路P中边的条数k称为该道路的长度。

定理 在n阶简单图G=(V, E)中，如果存在从u到v的道路，则必存在从u到v的长度不超过n-1的基本道路。

证明：设P是从u到v存在一条长为k的道路，经过

$u=v_0, v_1, v_2, \cdots v_k=v$。

① 若P为基本道路，显然k≤n−1，结论成立。

② 否则，P中存在重复结点$v_i=v_j$，去掉v_i到v_j间的这些边，得$P'= u, v_1, v_2, \cdots v_{i-1}, v_j, v_{j+1}, \cdots v$，任然是从u到v的道路。

重复以上过程，直到道路$(u, \cdots v_i, \cdots v)$中无重复结点，所得就是基本道路。

显然，基本道路长度=所经过结点数−1≤n−1。

10.2 通路与回路

定理 在n阶简单图G=(V, E)中，如果存在经u的回路，则必存在经u的长度不超过n的基本回路。

证明：同理（留作练习）

10.2 通路与回路

3. 距离

定义 在图G=(V, E)中，任何两个结点v_i，v_j，如存在道路，则最短道路的长度称为v_i到v_j的距离，记为$d(v_i, v_j)$。

若v_i和v_j不存在通路，则$d(v_i, v_j)=\infty$。

- $d(v_i, v_j)$满足欧几里得距离的三条公理：

① $d(v_i, v_j) \geq 0$ (非负性)

② $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$ (对称性)

③ $d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k) \geq d(v_i, v_k)$ (三角不等式)

注意 定义也适用于有向图，但$d(v_i, v_j)$不一定等于$d(v_j, v_i)$。

作业

- ✓ 习题十　13

  注：均只需完成“长度为3”的情况。