DMS Chapter 6 容斥&鸽巢原理

第8章 容斥原理&鸽巢原理

1

DMS Chapter 6 容斥&鸽巢原理

主要内容

- 容斥原理
- 鸽巢原理

2023年11月7日 2

2

DMS Chapter 6 容斥&鸽巢原理

容斥原理--引子

在根据若干条件对某类对象计数时，有时直接计算会很困难，但利用间接方法却能收到良好的效果。容斥原理就是采用多退少补，逐步求精的思想间接实现计数的

例：1到1000的整数中，有多少个能被3、5中至少一个整除？有多少个能被3、5、7中至少一个整除？

解：设从1到1000的正整数构成的集合为S，
其中能被3整除的数构成集合A，
其中能被5整除的数构成集合B，
其中能被7整除的数构成集合C。
则能被3、5中至少一个整除的数构成的集合即为：$A\cup B$
则能被3、5，7中至少一个整除的数构成的集合即为：$A\cup B\cup C$

有多少个能被3、5、7, 11中至少一个整除? 3

3

DMS Chapter 6 容斥&鸽巢原理

容斥原理--引子

$|A|=\lfloor 1000/3\rfloor=333,\ |B|=\lfloor 1000/5\rfloor=200,\ |C|=\lfloor 1000/7\rfloor=142,$

$|A\cap B|=\lfloor 1000/15\rfloor=66,\qquad |A\cap C|=\lfloor 1000/21\rfloor=47,$

$|B\cap C|=\lfloor 1000/35\rfloor=28\qquad |A\cap B\cap C|=\lfloor 1000/105\rfloor=9,$

$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=333+200-66=467$

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|.$

$=333+200+142-66-47-28+9=543$

$|A\cup B\cup C\cup D|=?$ 4

4

DMS Chapter 6 容斥&鸽巢原理

容斥原理

- 若对有限集A的元素上定义了m个性质。如果把具有性质P_i的元素构成的子集合记为$A_i(i=1,2,\ldots,m)$;
- $A_i \cap A_j$ 表示由同时具有性质P_i和P_j的元素构成的子集合，
- $A_i \cap A_j \cap A_k$ 表示由同时具有性质P_i，P_j和P_k的元素构成的子集合，
- 其余依此类推。
- $\overline{A_i}$ 表示由A中不具有性质P_i的元素构成的子集合

2023年11月7日 5 四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

5

DMS Chapter 6 容斥&鸽巢原理

容斥原理

① 有限集A中具有性质$P_1, P_2, \ldots, P_m$中至少一个的元素个数为:

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m\right| = \sum_{i=1}^{m}\left|A_i\right| - \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m}\left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i\neq j\neq k}}^{m}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right|$$

$$- \sum_{\substack{i,j,k,l=1\\ i\neq j\neq k\neq l}}^{m}\left|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l\right| + \ldots + (-1)^{m+1}\left|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_m\right|$$

将并运算变为若干个交运算

② 有限集A中不具有性质$P_1, P_2, \ldots, P_m$ 中任一个的元素个数为:

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_m}\right| = |A| - \left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m\right|$$

6 四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

2023年11月7日

6

DMS Chapter 6 容斥&鸽巢原理

容斥原理

例：计算从1到1000的整数中有多少个能被3、5、7, 11中至少一个整除。

解：设从1到1000的正整数构成的集合为A，

P_1 其中能被3整除的数构成集合A1，

P_2 其中能被5整除的数构成集合A2，

P_3 其中能被7整除的数构成集合A3。

P_4 其中能被11整除的数构成集合A4。

则能被3、5、7中至少一个整除的数构成的集合即为:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

根据容斥原理有

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3 + |A_1 \cap A_4| + (|A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4 + |A_3 \cap A_4|) + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| =$

7 四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

2023年11月7日

7

DMS Chapter 6 容斥&鸽巢原理

容斥原理

例1：计算从1到1000的整数中有多少个能被3、5、7中至少两个整除。

解：设从1到1000的正整数中，

P_1 能被3和5同时整除的数构成集合为 A_1，

P_2 能被3和7同时整除的数构成集合为 A_2，

P_3 能被5和7同时整除的数构成集合为 A_3。

则能被3、5、7中至少两个整除的数构成的集合为

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

根据容斥原理有

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = (|A_1| + |A_2| + |A_3|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3 + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

$= (66+47+28) - (9+9+9) + 9 = 123$

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY 8

2023年11月7日

8

使用容斥原理解决问题1的关键

根据题意确定

1) 有限集A 及A上的m个性质P_i (i=1,2,…,m)

2) 性质P_i对应子集合 A_i (i=1,2,…,m)

容斥原理

例3：计算从1到1000的整数中有多少个能被 2、3、5、7中至少三个整除。

解： 设从1到1000的正整数中，

P_1 能被2，3，5同时整除的数构成集合为 A_1

P_2 能被2，3，7同时整除的数构成集合为 A_2

P_3 能被2，5，7同时整除的数构成集合为 A_3

P_4 能被3，5，7同时整除的数构成集合为 A_4

则能被2、 3、5、 7中至少三个整除的数构成的集合为：

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$

根据容斥原理有

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| =$

容斥原理

① 有限集A中具有性质$P_1, P_2, \ldots, P_m$中至少一个的元素个数为：

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = \sum_{i=1}^{m}|A_i| - \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m}|A_i \cap A_j| + \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i\neq j\neq k}}^{m}|A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$- \sum_{\substack{i,j,k,l=1\\ i\neq j\neq k\neq l}}^{m}|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| + \ldots + (-1)^{m+1}|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_m|$$

将并运算转化为若干个交运算

② 有限集A中不具有性质$P_1, P_2, \ldots, P_m$ 中任一个的元素个数为：

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_m| = |A| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m|$$

根据集合运算的性质将问题2转化为问题1

容斥原理

例4： 求由数字1,2,3,4,5构成的5位数中，数1不排在第一位，数2不排在第二位，数3不排在第三位，数4不排在第4位，数5不排在第五位的五位数个数。

解： 设A是由1,2,3,4,5构成的全部五位数的集合，

P_1, P_2, P_3, P_4, P_5

A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 分别表示 1,2,3,4,5 各自出现在第一、第二、第三、第四、第五位的五位数构成的集合，

则根据容斥原理 上述问题的解为：

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5| =$$

$$|A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5|$$

DMS Chapter 6 容斥&鸽巢原理

容斥原理

$|A| = 5^5 = 3125$,

$|A_i| = 5^4 = 625$,$(i \in \{1,2,3,4,5\})$,

$|A_i \cap A_j| = 5^3 = 125$,$(i, j \in \{1,2,3,4,5\}, i \neq j)$,

$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 5^2 = 25$,$(i, j, k \in \{1,2,3,4,5\}, i \neq j \neq k)$,

$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = 5$,$(i, j, k, l \in \{1,2,3,4,5\}, i \neq j \neq k \neq l)$,

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 1$.

$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4 \cap \overline{A}_5| =$

$3125 - 5 * 625 + 10 * 125 - 10 * 25 + 5 * 5 - 1 = 1024$

DMS Chapter 6 容斥&鸽巢原理

容斥原理

例5：计算从1到1000的整数中有多少个不能被3、5、7中任意两个同时整除。

解： 设从1到1000的正整数中，

P_1 能被3和5同时整除的数构成集合为 A_1，

P_2 能被3和7同时整除的数构成集合为 A_2，

P_3 能被5和7同时整除的数构成集合为 A_3。

则不能被3、5、7中至少两个整除的数构成的集合为

$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$

根据容斥原理有，

$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| = |A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 1000 - 123 = 877$

DMS Chapter 6 容斥&鸽巢原理

使用容斥原理的关键

根据题意确定

求具有至少一个性质的元素个数

求不具有所有性质的元素个数

0) 属于 问题1（用公式1） 还是 问题2（用公式2）

1) 有限集A 及A上的m个性质P_i (i=1,2,…,m)

2) 性质P_i对应子集合 A_i (i=1,2,…,m)

DMS Chapter 6 容斥&鸽巢原理

鸽巢原理

最不利原则

- **鸽巢原理 (抽屉原理)**

  如果k+1只鸽子飞入k个鸽巢中，则至少有2只鸽子飞进了同一个鸽巢

- **例：**
  1. 在任意13个人的集合中，至少有2个人的生日 同月。
  2. 任意367个人中，至少有2个人的生日 同月同日。

  ……

- **鸽巢定理**

  如果n只鸽子飞进m个巢时，必定至少有一个巢中飞入了

  $\boxed{r = \lfloor (n-1)/m \rfloor + 1}$ 只鸽子

DMS Chapter 6 容斥&鸽巢原理

鸽巢原理

可应用鸽巢原理/定理求解的问题的一般形式：

1. 给定n， 隐晦给出m，求r $\quad r=\lfloor (n-1)/m \rfloor+1$
2. 给定r， 隐晦给出m，求n
3. 给定n，r，隐晦给出m，要求证明n,r 之间满足此式
4. 从一段描述中自行确定n, m, r来证明某个结论

使用鸽巢原理（抽屉原理）的关键

✓ 根据题意确定每个巢中放的鸽子（物品）的特点
✓ 根据题意确定巢数 m
✓ 根据题意确定 n 和 m，r

DMS Chapter 6 容斥&鸽巢原理

鸽巢原理

例1： 某校的学生中，年龄最小的17岁，最大的24岁，从这个学校中至少选几个学生才能保证其中一定有三个学生的年龄相同?

解：1） 确定巢数m及各巢中放的鸽子特点

因为 学生年龄只能是17,18,19,20,21,22,23,24这8个之一，巢数m=8，第i巢中放年龄为17+ i 的学生， i=0,1,2,…,7

2） 根据鸽巢原理，要使至少有一个巢中放三个学生，那么至少需要学生数为 (3-1) *8 +1 ＝17

DMS Chapter 6 容斥&鸽巢原理

鸽巢原理

例2：证明：在任意11个整数（互不相等）中，至少有2个整数之差是10的倍数。

证：1） 确定巢数m及各巢中放的鸽子特点

因为 任何整数的个位数只能是0,1,…,9中的一个。巢数m=10，第i巢中放个位为 i 的数， i=0,1,2,…,9

2） 根据鸽巢原理，至少有2个数会放到同一个巢中，即具有相同的个位数

那么这2个整数之差一定是10的整数倍

证毕!

DMS Chapter 6 容斥&鸽巢原理

鸽巢原理

例3： 一个人骑车10小时内走完了281公里路程，已知他第一小时走了30公里，最后一小时走了17公里。
证明：他一定在某相继的两小时中至少走完了58公里路程。

证： 1） 确定巢数m及各巢中放的鸽子

因为 10个小时中有9个相继的两小时，巢数m=9，第i巢中放第 i 个相继的两小时走的路程， i=1,2,…,9

2） 根据给定的条件，9个相继的两小时所走的路程之和 为 281×2-30-17=515 （公里）

3） 该问题可看成是让515只鸽子飞进9个鸽巢，根据鸽巢原理，必有一个鸽巢 中飞进了至少$\lfloor 514/9 \rfloor+1=58$ 只鸽子（公里）

证毕!

Your turn

1. 对于任意给定的52个整数（互不相等），证明其中必存在两个整数，要么两者的和能被100整除，要么两者的差能被100整除。

2. 某班有30名学生，其中16人会唱歌，13人会跳舞，9人会唱歌和跳舞，5人会唱歌和画画，2人三种技艺都会。7个会画画的人都会另外至少一种技艺，求三种技艺都不会的人数.

3. 小明计划在2周做完20道习题，并且决定每天至少做一道。证明：必存在连续的若干天，小明恰好做了7道习题。