§1.3 等可能概型

等可能概型：每个可能结果(样本点)在实验中出现的可能性相等的随机试验类型。等可能概型分**古典概型**和**几何概型**两种。

古典概型

在概率论的发展史中，其源头是对“抛硬币，掷骰子”等简单试验的研究。这些试验的共同点是：

♣ **样本空间的元素只有有限个**；

♣ **每个基本事件发生的可能性相同**。

我们称具备以上两个特点的试验模型为**古典概型**。

定理 在古典概型中，设样本空间Ω中有n个样本点，A是Ω中的事件且A中有k个样本点。则事件A发生的概率为 $P(A)=\frac{k}{n}$。

证明略。

古典概率的计算一般可归结为两种摸球模型，使用的基本工具是排列组合。

复习：两条原理

加法原理：设完成一件事可以分为两种途径，第一种途径有n_1种方法，第二种途径有n_2种方法，则完成这件事共有n_1+n_2种方法。

乘法原理：设完成一件事需分两步，第一步有n_1种方法, 第二步有n_2种方法，则完成这件事共有$n_1 n_2$种方法

样本空间样本点数以**排列**计算的摸球模型

一袋中装有n个编好号码(1,…,n)的小球，从中抽取r 次，每次一球。抽取的方法有两种：

1）有放回抽取，即每次随机的取一只，记下号码后放回袋中， 搅匀后再进行下一次的抽取。这时，样本点总数为 n^r；

2）不放回抽取，即每次随机的取一只，记下号码后不放回袋中。这时，样本点总数为 P_n^r。

在前一种抽取法中，r 可以大于n，
而在后一种抽取法中，$r \le n$ 。

样本空间样本点数以组合计算的摸球模型

一袋中装有N个小球，其中有m个红球，余下的全为白球。现从袋中任意抽取n $(n \le N)$个球，问所取的球中恰有k 个红球的概率为多少?

分析：这个模型可以不要求取球的顺序，所以可用组合计算。所有可能的取法数为 C_N^n 种。设变量 X 表示“所取的n个球中红球的个数”

则所求概率的事件可表为“X=k”，其概率为

$$p(X=k)=\frac{C_m^k C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n},$$

X的可能取值为 $0,1,\cdots,m$ **，其取值的概率分布情况称为超几何分布。**

例1.10

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

30只元件中有27只一等品，3只二等品。随机将30只元件均分装入三盒，求：

（1）A=“每盒有一只二等品”的概率；

（2）B=“有一盒有3只二等品”的概率；

解：**30只元件平均分到三盒的分法有** $C_{30}^{10}C_{20}^{10}C_{10}^{10}$**种.**

（1）3只二等品均分到三个盒子有3x2x1种可能性，余下的27只应该平均分到3个盒子中，有$C_{27}^{9}C_{18}^{9}C_{9}^{9}$**种。**

$$(1)P(A)=\frac{3\times2\times1\times C_{27}^{9}C_{18}^{9}C_{9}^{9}}{C_{30}^{10}C_{20}^{10}C_{10}^{10}}$$

例1.10　　　1　2　3

(2)首先选取一个盒子放3只二等品（C_3^1种方法），然后确定该盒子剩下7只一等品的选取(C_{27}^7种选法），最后确定另外两盒子各10球的选取（$C_{20}^{10}C_{10}^{10}$种选法）。

因此B含样本点数为$C_3^1C_{27}^7C_{20}^{10}C_{10}^{10}$.

$$P(B)=\frac{C_3^1\times C_{27}^7C_{20}^{10}C_{10}^{10}}{C_{30}^{10}C_{20}^{10}C_{10}^{10}}$$

几何概型

古典概型只讨论了样本空间点数有限的情形，那么，对于样本空间点数无限的情形该怎么计算随机事件的概率呢？下面，我们就研究这种情形，这就是几何概型。首先看下面的例子。

例**1.11** 随机在单位圆内掷一点**M,**求**M**点到原点距离小于**1/4**的概率**.**

分析：**M**点落在单位圆中任一点的可能性一样大，那么**M**落在单位圆中任意一小区域**A**的概率与位置无关并且与该区域的面积**m(A)**成正比**,**即**P(A)=k m(A)**。而**M**落在单位圆中的概率

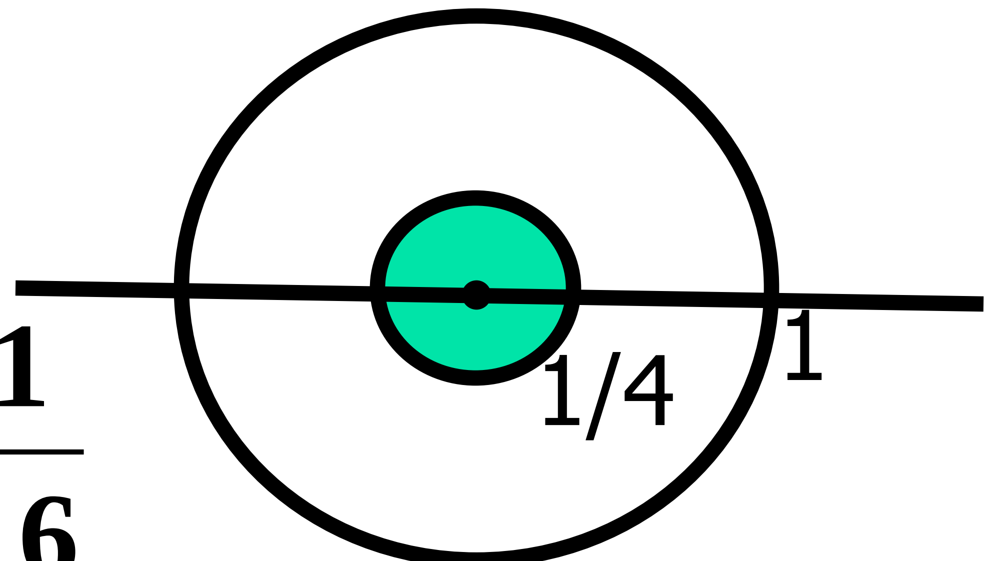
$$P(\Omega)=1=km(\Omega).$$

例1.11 随机在单位圆内掷一点M,求M点到原点距离小于1/4的概率.

解:

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

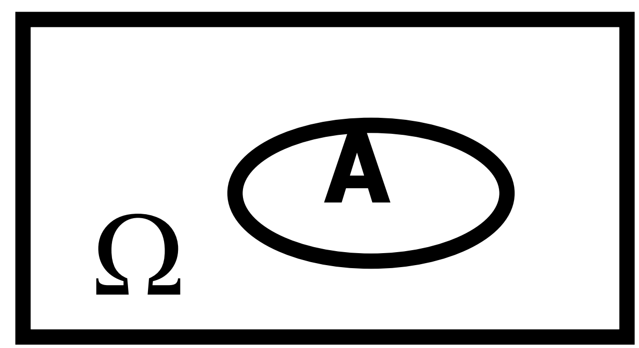
$$=\frac{\pi\times(1/4)^2}{\pi\times 1^2}=\frac{1}{16}$$



几何概型:随机试验的样本空间可以表示为欧氏空间中的一个区域,而且每次试验的每一个结果都是等可能发生的。其等可能性是通过下列方式赋予其意义的:落在某区域 G 的概率与区域 G 的度量(长度、面积、体积)称正比。于是,我们有如下定义:

定义：设Ω为欧氏空间中的一个区域，以 $m(\Omega)$ 表示 Ω 的度量（一维为长度、二维为面积、三维为体积），$A\subset\Omega$ 是 Ω 中一个可以度量的子集。定义

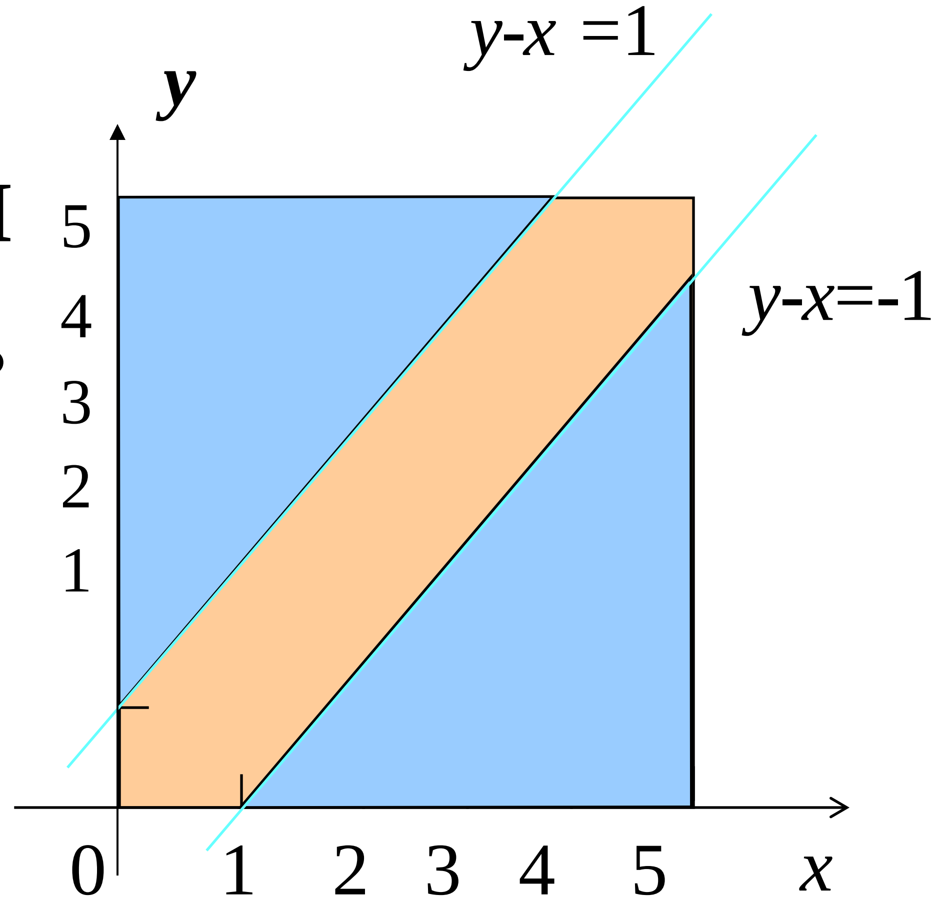
$$\boxed{P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}}$$



为**事件A发生的概率**。

例（会面问题） 甲、乙二人约定在中午12点到下午5点之间在某地会面，先到者等一个小时后即离去.设二人在这段时间内的各时刻到达是等可能的，且二人互不影响。求二人能会面的概率。

解： 以 x , y 分别表示甲乙二人到达的时刻，于是即 点 M 落在图中的阴影部分。所有的点构成一个正方形，即有无穷多个结果。由于每人在任一时刻到达都是等可能的，

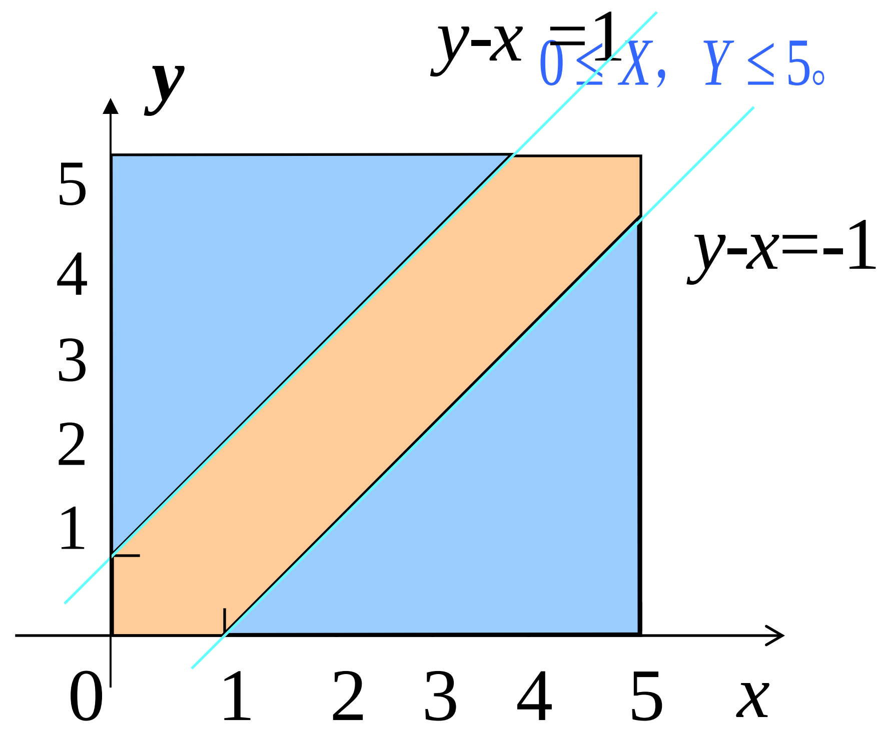


所以落在正方形内各点是等可能的。

二人会面的条件是：

$$|x-y|\le 1,$$

即 x 和 y 必须落在图中的黄色阴影区域中，故所求概率为



$$p=\frac{\text{阴影部分的面积}}{\text{总面积}}=\frac{25-2\times\frac{1}{2}\times 4^2}{25}=\frac{9}{25}。$$

例1.13蒲丰问题

- **1777**年，法国数学家蒲丰取一根针，量出它的长度，然后在纸上画上一组间距相等的平行线，这根针的长度是这些平行线的距离的一半。把这根针随机地往画满了平行线的纸面上投去。小针有的与直线相交，有的落在两条平行直线之间，不与直线相交。这次实验共投针**2212**次，与直线相交的有**704**次，**2212÷704≈3.142**。得数竟然是**π**的近似值。这就是著名的蒲丰投针问题。

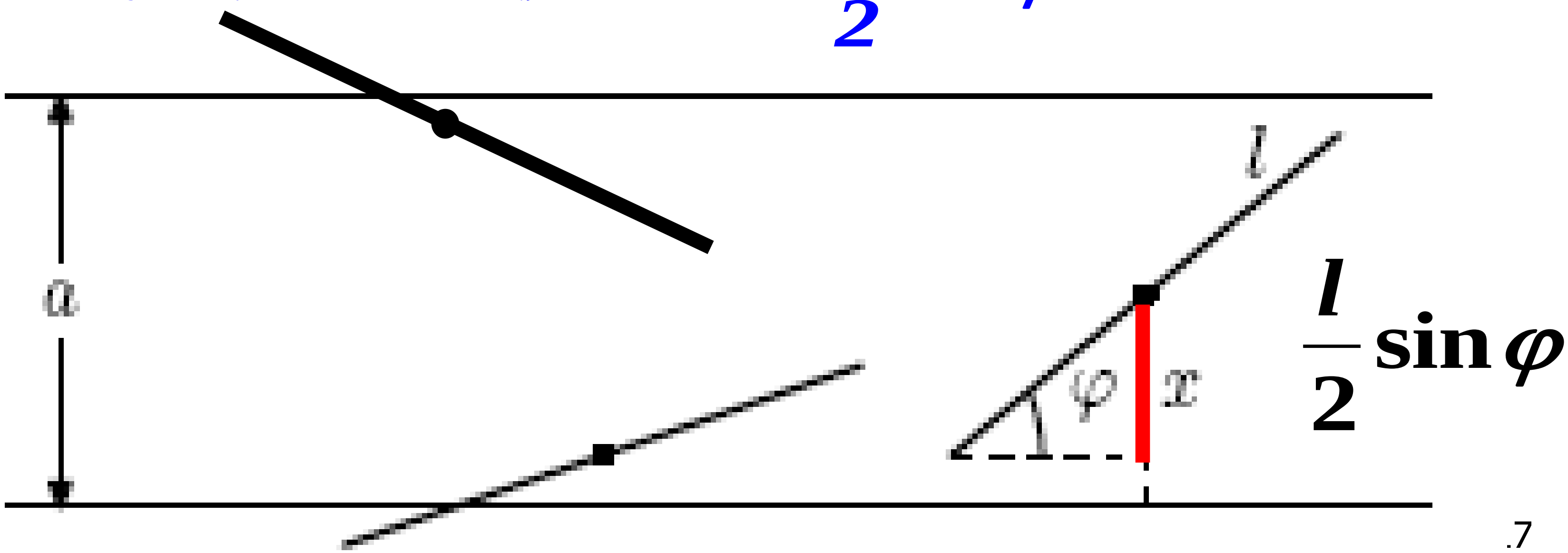
平行线的距离a，针的长度l，求针与平行线相交的概率。

x表示针的中点与最近的一条平行线的距离

设针中点到线的最短距离为$x(0 \le x \le \frac{a}{2})$，

针与线的夹角为$\varphi(0 \le \varphi \le \pi)$。则针落在纸上的情况可由点$(x, \varphi)$决定，且具有等可能性。

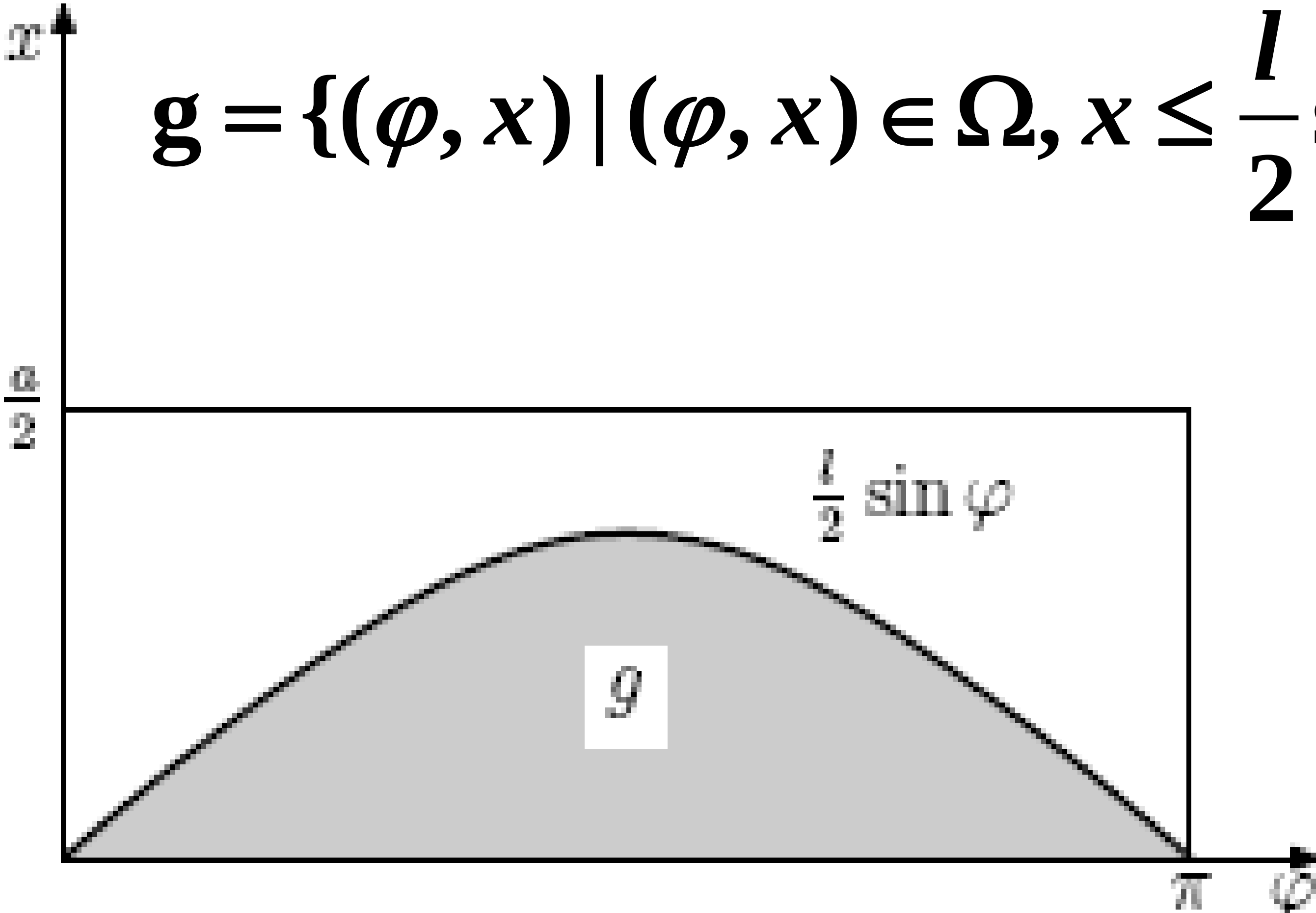
针与线相交当且仅当$x \le \frac{l}{2} sin\varphi.$



例1.13蒲丰问题

$$\Omega=\{(\varphi,x)\mid 0\le\varphi\le\pi,0\le x\le\frac{a}{2}\}$$

$$g=\{(\varphi,x)\mid(\varphi,x)\in\Omega,x\le\frac{l}{2}\sin\varphi\}$$



例1.13蒲丰问题

$$p(A)=\frac{m(g)}{m(\Omega)}=\frac{\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\sin\varphi d\varphi}{\pi\cdot\frac{a}{2}}=\frac{2l}{\pi a}$$

由于当n很大时，频率$\mathrm{f}_{\mathrm{n}}(A)=\frac{k}{n}$与概率$p(A)$,

非常接近，故可以用来估计概率$p(A)$。

从而可以用来估计π B $\frac{2\mathrm{ln}}{ka}$.

不可能事件的概率为零，概率为零的事件不一定是不可能事件。

在[0,1]区间上任意取一个随机数,则这个随机数恰好等于0.5的概率是多少?

P=点(0.5)的长度/[0,1]区间的长度=0