第三章 多维随机变量及其分布

第二章介绍了一维随机变量 X，随机试验每一个结果只对应一个数。但在很多情况下，随机试验的结果用一个数是无法准确进行描述的。例如，军事演习时测量炮弹落地点，需要一对数才能准确描述其坐标。这时，每个试验结果将对应2维欧氏空间中的一点。象这样的对应关系就是一个 2 维随机变量。这就是本章要学习的主要内容。

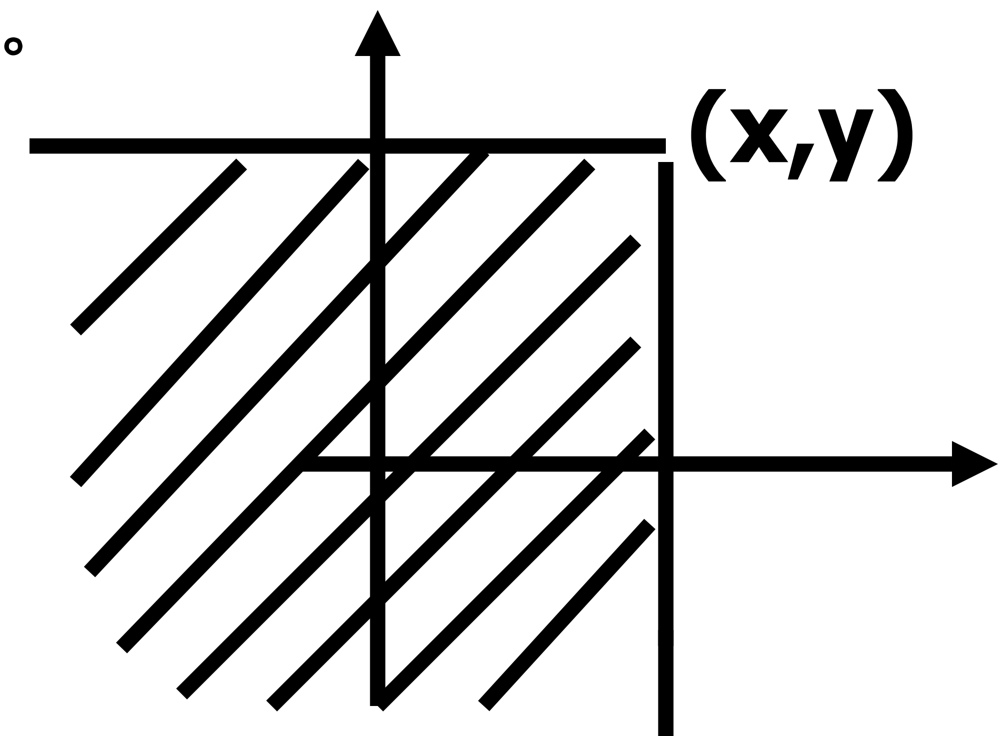
§3.1 二维随机变量及其分布函数

§ 3.1.1 二维随机变量

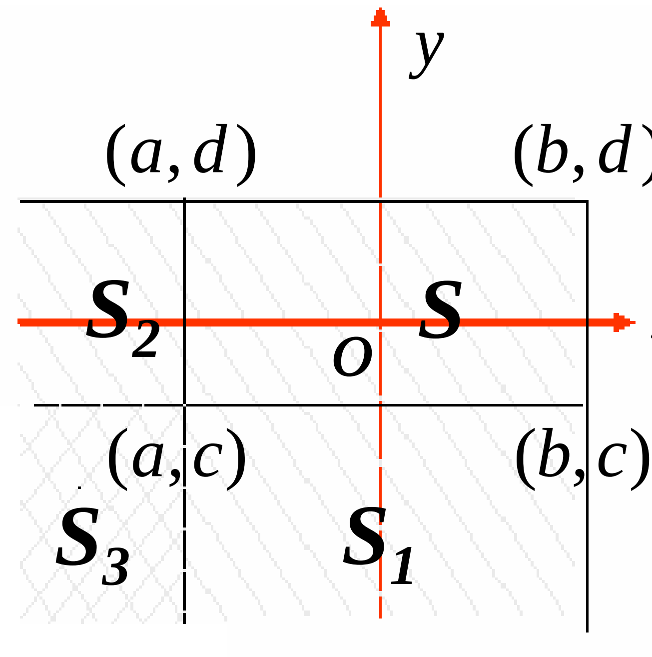
定义3. 1 **设Ω为某随机试验的样本空间。若对每个样本点$\omega\in\Omega$有一对有序实数$(X(\omega), Y(\omega))$与之对应，则称(X,Y)为<u>二维随机变量</u>或二维随机向量。**

定义3.2：设(X, Y)是二维随机变量，任意$(x, y)\in R^2$，则称 $F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$为(X, Y)的分布函数，或X与Y的联合分布函数。

几何意义：分布函数F(x,y)表示随机点(X,Y)落在区域 中的概率。如图阴影部分：



(X，Y)落在某个矩形区域的概率



对应于图形，

容易理解如下事实：

$$\underbrace{P(a < X \le b, c < Y \le d)}_{S} = P(b \le X, Y \le d) - P(X \le b, Y \le c)$$
$$- P(X \le a, Y \le d) - P(X \le a, Y \le c)$$
$$= \underbrace{F(b,d)}_{S+S_1+S_2+S_3} - \underbrace{F(b,c)}_{S_1+S_3} - \underbrace{F(a,d)}_{S_2+S_3} + \underbrace{F(a,c)}_{S_3}.$$

联合分布函数的性质

定理3.1 设$F(x, y)$是二维随机变量(X, Y)的联合分布函数，则

1) $F(x,y)$分别关于x与y单调不减：若$x_1<x_2$，则$F(x_1,y)\le F(x_2,y)$;若$y_1<y_2$，则$F(x,y_1)\le F(x,y_2)$.

2) 对任意实数x，y, $0\le F(x,y)\le 1$且

$$F(-\infty,-\infty)=F(-\infty,\ y)=F(x,-\infty)=0,$$

$$F(+\infty,+\infty)=1;$$

3) $F(x,y)$是关于x与y都右连续的：对任意实数，

$$F(x_0+0,y)=\lim_{x\to x_0^+}F(x,y)=F(x_0,y),$$

$$F(x,y_0+0)=\lim_{y\to y_0^+}F(x,y)=F(x,y_0).$$

4）对任意$x_1<x_2, y_1<y_2$,有

$$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\ge 0.$$

上述四条性质是二维分布函数的刻画。

二维离散型随机变量

若二维随机变量(X, Y)只取有限个或可数多个点对(x_i, y_j), $(i, j=1, 2, \dots)$，则称(X, Y)为二维离散型随机变量.

定义3.3 若二维离散型随机变量(X, Y) 取(x_i, y_j)的概率为p_{ij}, 则称 $p_{ij}=P\{X=x_i, Y=y_j\}$，$(i, j=1, 2, \dots)$，为 (X, Y)的二维概率分布或分布律，或联合分布律.

联合分布律的性质

(1) 非负性: $p_{ij} \geq 0$， $i, j=1, 2, \dots$;

(2)归一性: $\displaystyle\sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} p_{ij}=1$

性质1与2是离散型二维随机变量的特征.

二维概率分布可表示为

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$			$\vdots$		
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$			$\vdots$		

例题 抛2枚质地均匀的硬币，X 表正面出现的枚数，Y 表出现正面的枚数与出现背面的枚数之差的绝对值，求 (X, Y) 的联合分布律。

解 由题意知，X 的可能取值为0，1，2，Y 的可能取值为0，2。并且

$$P(X=0,Y=0)=P(\varnothing)=0;\quad P(X=0,Y=2)=1/4;$$

$$P(X=1,Y=2)=P(\varnothing)=0;\quad P(X=1,Y=0)=1/2;$$

$$P(X=2,Y=0)=P(\varnothing)=0;\quad P(X=2,Y=2)=1/4.$$

于是(X, Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	2
0	0	1/4
1	1/2	0
2	0	1/4

有了联合分布律，我们就可以容易地计算出事件的概率。一般地，若 G 是平面上点集（二维随机变量所对应的事件表现为平面点集），则

$$P((X,Y)\in G)=\sum_{(x_i,y_j)\in G}P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{(x_i,y_j)\in G}p_{ij}.$$

特别地 $$F(x,y)=\sum_{x_i\le x,y_j\le y}p_{ij}$$

如上面抛硬币例题中，计算事件 $\{(X,Y):|X-Y|\le 1\}$ 的概率。

显然，$G=\{(X,Y):|X-Y|\le 1\}=\{(0,0),(1,0),(1,2),(2,2)\}$

故所求概率为

$$P((X,Y)\in G)$$

$$=P((X,Y):|X-Y|\le 1)=P(X=0,Y=0)$$

$$+P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=2)+$$

$$P(X=2,Y=2)=0+1/2+0+1/4=3/4.$$

三项分布

N重独立试验中，若每次试验结果只有A_1，A_2，A_3三个结果，且$0<p_i=P(A_i)<1$.设X,Y分别表示n次试验中A_1与A_2发生的次数，则(X,Y)的联合分布律为：

$$P(X=k_1,Y=k_2)=\frac{n!}{k_1!k_2!(n-k_1-k_2)!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}p_3^{n-k_1-k_2}$$

$$k_1+k_2=0,1,\cdots,n,k_1\geq 0,k_2\geq 0$$

其中，$p_1+p_2+p_3=1$。若二维离散型(X,Y)的分布律如上，随机变量则称(X,Y)服从参数为n, p_1, p_2的三项分布，记为 $(X,Y)\sim T(n;p_1,p_2)$

二维连续型随机变量

定义3.4 对(X, Y) 的分布函数F(x,y),若存在非负函数f(x,y)有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$$

则称**(X, Y)** 是二维连续型随机变量，**f(x,y)**为**(X, Y)**的联合密度函数，简称密度**.**

等价定义 **设（X,Y）为二维随机变量，若存在非负函数** $f(x,y)$ **使得对任意实数** $a,b,c,d,a<b,c<d,$ **成立**

$$P(a<X\le b,c<Y\le d)=\int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,y)dydx$$

则称**(X, Y)** 是二维连续型随机变量

联合密度函数的性质

1^0 非负性：$f(x,y)\geq 0;$

2^0 归一性：$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$

这两个性质也是二维密度函数的特征

定理3.2： 设二维连续型随机变量（X，Y）有密度函数$f(x,y)$, 则(1)F(x,y)是连续函数,且在f(x,y)的连续点(x,y)，有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}=f(x,y).$$

(2)对平面上任意区域G,若f(x,y)可积,则

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)dxdy$$

（3）对平面上的任意曲线L,有$P((X,Y)\in L)=0.$

例3.4: 设二维随机变量$(X,\ Y)$的密度函数为

$$f(x,\ y)=\begin{cases} Ay, & 0<y<x<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(1)求A; (2)求 $P(X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{4})$

(3)求 $P(X+Y\le\frac{1}{2}),P(X+Y\le\frac{3}{2})$

解: (1)画出密度函数的取值不为零的区域D

$$f(x,\ y)=\begin{cases} Ay, & 0<y<x<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$1=\iint_{R^2} f(x,y)dxdy$$

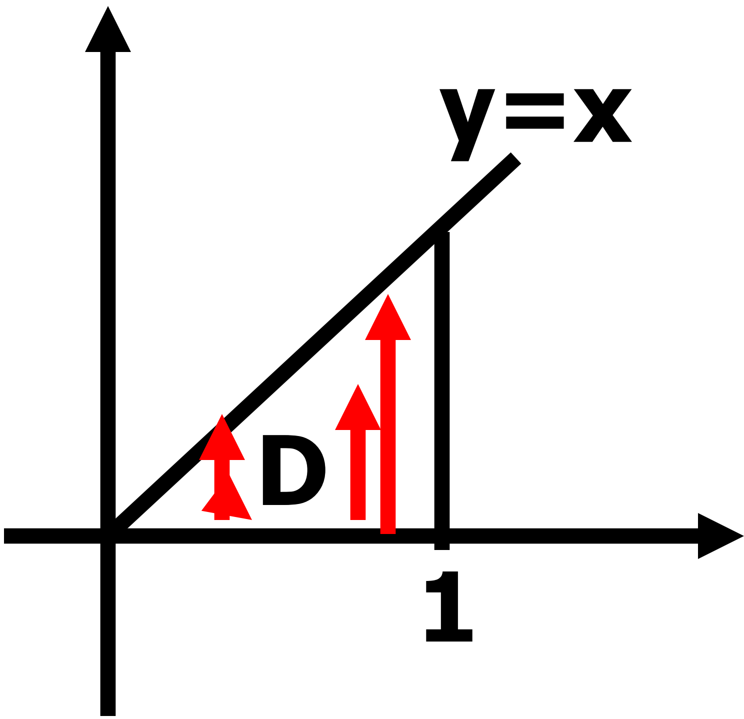
$$=\iint_{D} f(x,y)dxdy$$

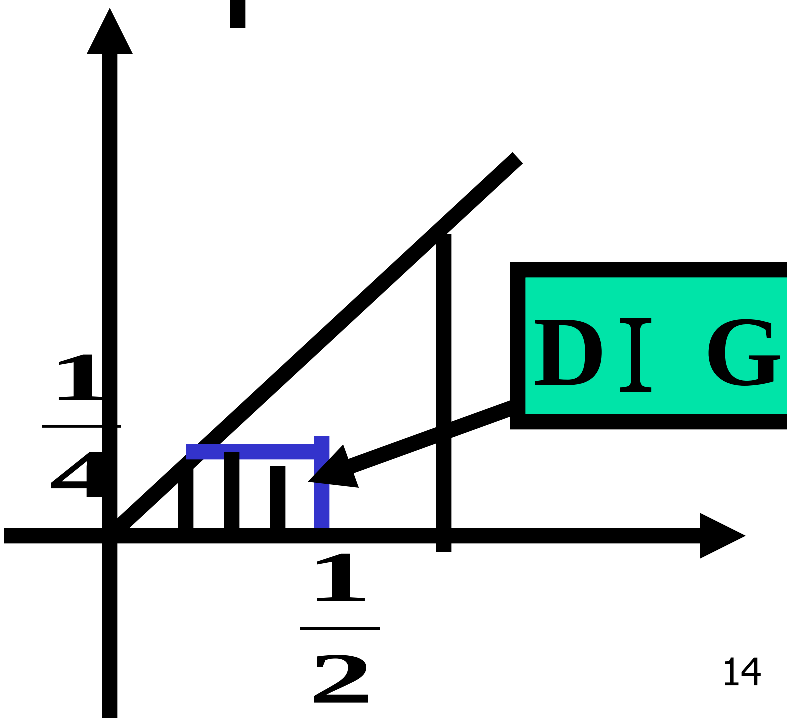
$$=\int_0^1\{\int_0^x Aydy\}\quad dx$$

$$\Rightarrow A=6$$

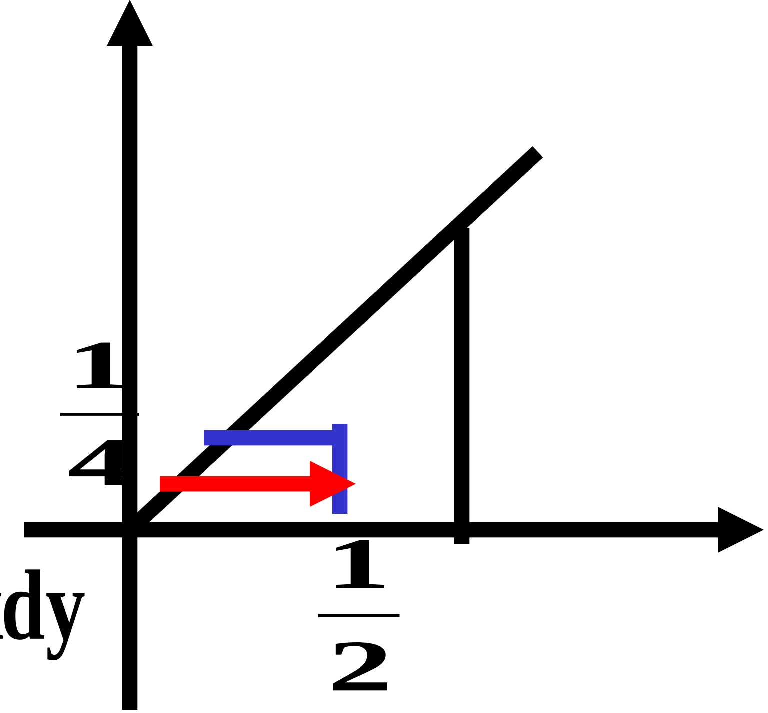
（2） $P(X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{4})$

$$=\iint_{D\cap G} f(x,y)\mathrm{dxdy}$$





积分区域为简单区域,
故重积分可化为逐次积分



$$P(X\le \frac{1}{2},Y\le \frac{1}{4})=\iint\limits_{D\cap G} f(x,y)\mathrm{dxdy}$$

$$=\int_0^{1/4}\{\int_y^{1/2}6ydx\}\quad dy$$

类似地,计算 $P(X+Y\le \frac{1}{2}),P(X+Y\le \frac{3}{2})$

如何计算涉及密度函数为分段函数的有关事件的概率

设（X，Y）的密度函数为$f(x,y)$，G为平面上的点集，求$P((X,Y)\in G)$.

（1）求出密度函数为$f(x,y)$的非零区域D，画出$D\cap G$的图形，$P((X,Y)\in G)=\iint\limits_{D\cap G} f(x,y)dxdy$.

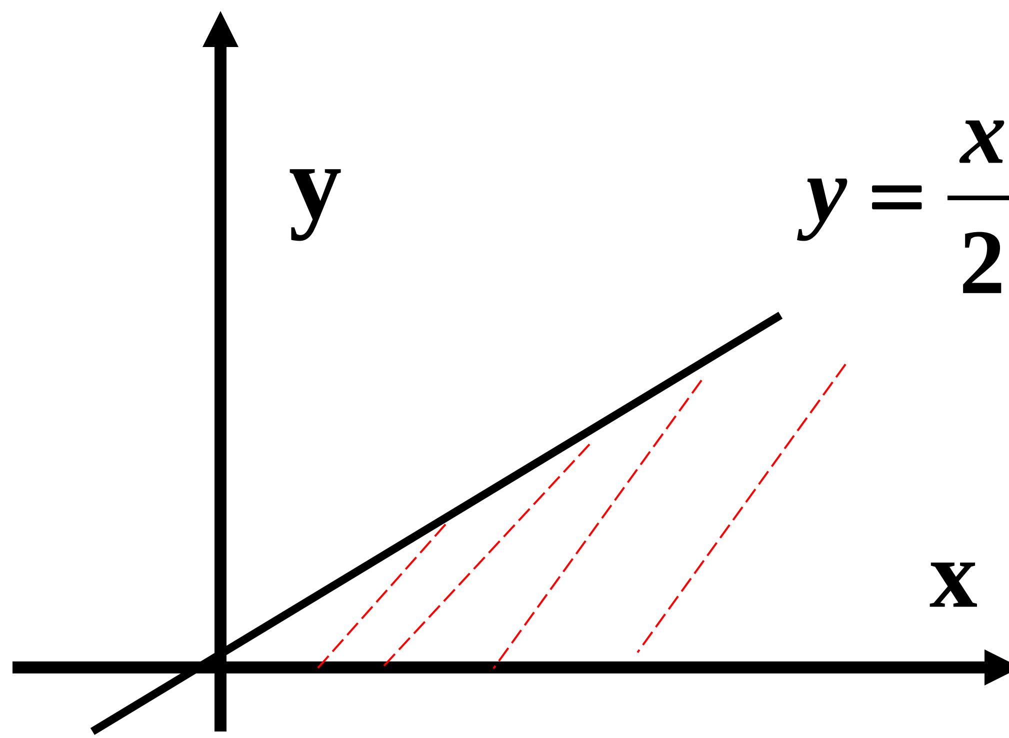
（2）结合$D\cap G$的图形，把$D\cap G$划分为子区域$G_i, i=1,\cdots,m$
使得(i)每个子区域G_i是简单区域：
$\{(x,y)\in R^2: a\le x\le b, \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}$,
或$\{(x,y)\in R^2: \varphi_1(y)\le x\le \varphi_2(y), c\le y\le d,\}$;
(ii) $f(x,y)$在每个子区域有唯一的表示形式。

（3）由于G_i是简单区域，故$\iint\limits_{G_i} f(x,y)dxdy$可化为逐次积分计算.$P((X,Y)\in G)=\sum\limits_{i}\iint\limits_{G_i} f(x,y)dxdy$.

例 设随机变量(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} xye^{-(x+y)}, x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad else. \end{cases}$$

求$P(X \geq 2Y)$.



解: $G=\{(x,y): x \geq 2y\}$, $f(x,y)$取值非零的区域与G的公共部分为（如图）

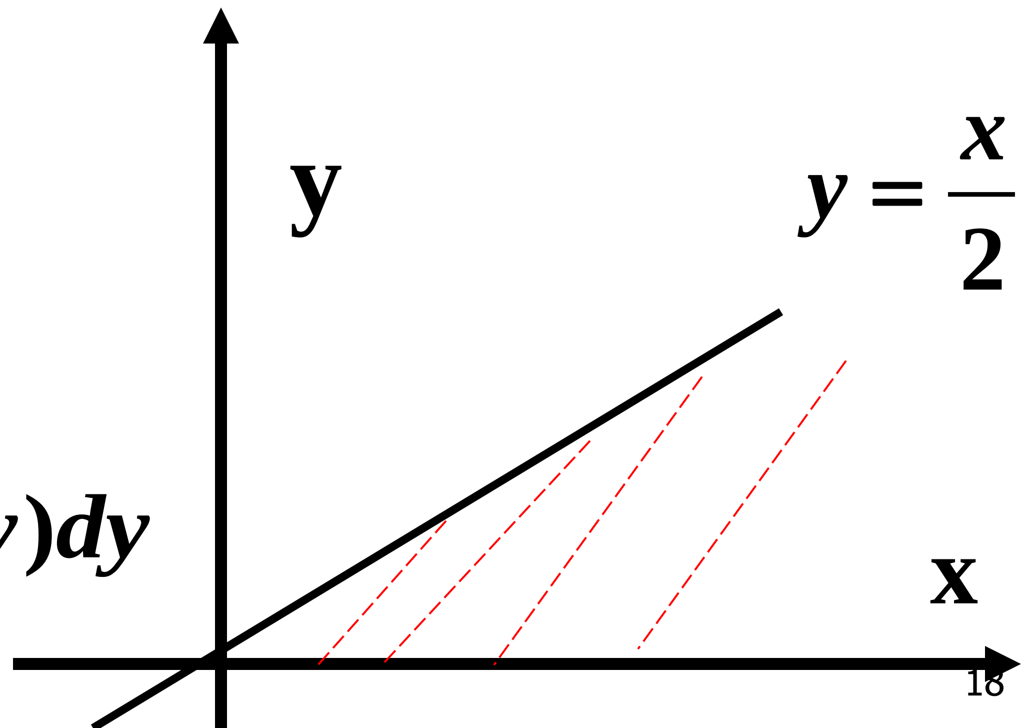
$G_0=\{(x,y): 0 \leq x, 0 \leq y \leq x/2\}$.

$$P(X \geq 2Y)$$

$$= \iint_G f(x,y)dxdy$$

$$= \iint_{G_0} f(x,y)dxdy$$

$$= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{\frac{x}{2}} f(x,y)dy$$



$$=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{\frac{x}{2}}xye^{-(x+y)}dy$$

$$=\int_0^{+\infty}xe^{-x}[1-(\frac{x}{2}+1)e^{-\frac{x}{2}}]dx$$

$$=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx-\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{2}e^{-\frac{3}{2}x}dx-\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{3}{2}x}dx$$

(利用Γ函数$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$求积分)

$$=\Gamma(2)-\frac{4}{27}\Gamma(3)-\frac{4}{9}\Gamma(2)=\frac{7}{27}.$$

定义3.5 二维均匀分布

设G是平面上的有界区域，面积为$m(G)$

如果二维随机变量$(X,\ Y)$的密度函数为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{1}{m(G)} & (x,\ y)\in G\\ 0 & (x,\ y)\notin G\end{cases}$$

则称二维随机变量$(X,\ Y)$服从区域G上的**均匀分布**.

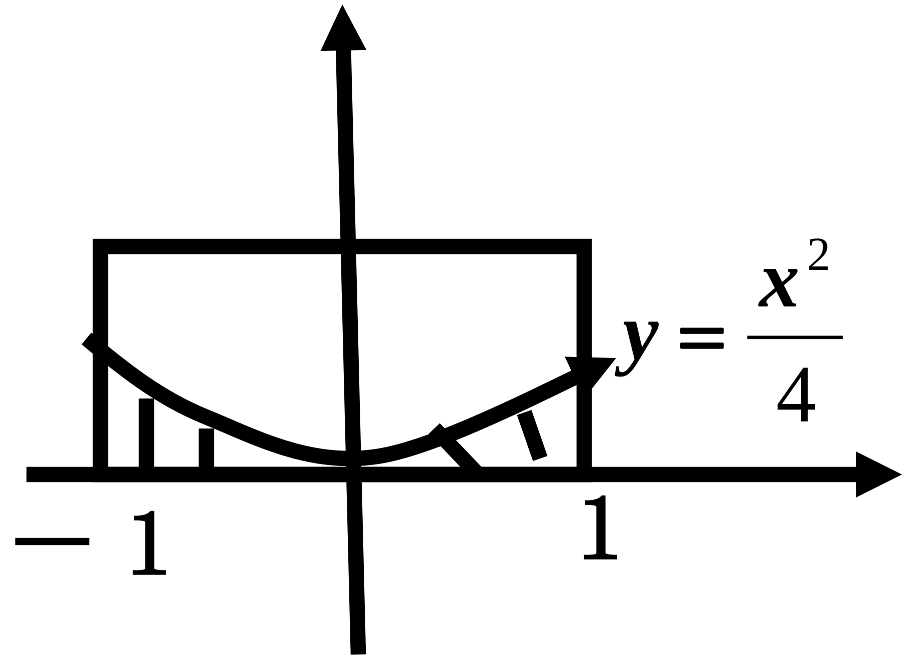
例3.5：$G=\{(x,y)\mid -1<x<1, 0<y<1\}$

随机变量**(X,Y)**服从**G**上的均匀分布**,**求关于**t**的方程$t^2+Xt+Y=0$有实根的概率.

解：写出（X， Y）的密度函数：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, |x|<1, 0<y<1\\ 0, else\end{cases}$$

$t^2 + Xt + Y = 0$有实根等价于$X^2 - 4Y \geq 0$



$$\therefore P(X^2 \geq 4Y)$$

$$= \iint_{D \cap G} f(x, y) dxdy$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{\frac{x^2}{4}} \frac{1}{2} dy$$

$=1/12.$