2.4 谓词公式的蕴涵
--定义

定义：设A和B是以D为论域的两个谓词公式, 如果在任一解释下, 当公式A取值为真时,公式B也取值为真, 则称A蕴涵B, 记作 $A \Rightarrow B$

定理2-4.1： $A \Rightarrow B$ 当且仅当 $A \rightarrow B$ 是永真式。

命题公式对应的基本蕴含关系式均适合谓词公式

2.4 谓词公式的蕴涵
---谓词蕴涵基本式（涉及量词）

I14: $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$ √

I15: $(\exists x)[P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$ √

I16: $(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)P(x)$ √

I17: $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$

I18: $(\forall x)[P(x) \leftrightarrow Q(x)] \Rightarrow (\forall x)P(x) \leftrightarrow (\forall x)Q(x)$

I19: $(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$

I19 证明:

$(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$

$\Leftrightarrow \sim(\exists x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

$\Leftrightarrow (\forall x)[\sim P(x)] \vee (\forall x)Q(x)$

$\Rightarrow (\forall x)[\sim P(x) \vee Q(x)]$

$\Leftrightarrow (\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$

Con…

2.4 谓词公式的蕴涵
---谓词蕴涵基本式（涉及量词）

例4.1 1）设G(x)：x是高才生；

H(x)：x是运动健将。 其中：个体域是某班的学生

则 $(\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x)$ 表示：“该班的每个学生是高才生或该班的每个学生是运动健将”；

$(\forall x)(G(x) \vee H(x))$ 表示：“该班的每个学生是高才生或运动健将”。

显然，前者可推出后者,即前者蕴涵后者，但反之则不然。

即有

I14: $(\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x) \Rightarrow (\forall x)(G(x) \vee H(x))$。

$(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \Leftrightarrow (\forall x)[P(x) \wedge Q(x)]$

2.4 谓词公式的蕴涵
---谓词蕴涵基本式（涉及量词）

2) 设G(x)：x是高才生；

H(x)：x是运动健将。其中：个体域是某班的学生。

则 $(\exists x)(G(x) \wedge H(x))$ 表示：“该班的一些学生既是高才生又是运动健将”；

$(\exists x)G(x) \wedge (\exists x)H(x)$ 表示：“该班的一些学生是高才生，一些学生是运动健将”。

显然，前者可推出后者，即前者蕴涵后者，但反之则不然。

即有

I15: $(\exists x)(G(x) \wedge H(x)) \Rightarrow (\exists x)G(x) \wedge (\exists x)H(x)$

$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow (\exists x)[P(x) \vee Q(x)]$

2.4 谓词公式的蕴涵

---两个量词的蕴涵式

变首量词（全称）	① $(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x,y)$
量词交换顺序	② $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$ √
变首量词（全称）	③ $(\forall y)(\exists x)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$
变首量词（全称）	④ $(\forall y)(\forall x)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)P(x,y)$
量词交换顺序	⑤ $(\exists y)(\forall x)P(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x,y)$ √
变首量词（全称）	⑥ $(\forall x)(\exists y)P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)P(x,y)$

✓ $(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x,y)$

✓ $(\exists x)(\exists y)P(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$

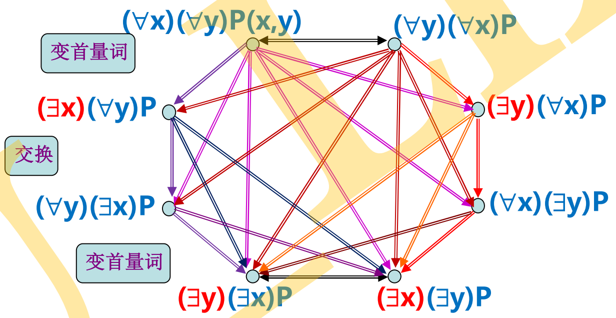
11:17 四川大学

5

2.4 谓词公式的蕴涵

---两个量词的蕴涵式

两个量词两个客体变元组合(共8种)的蕴涵关系可用如下图表示:



11:17 四川大学

6

2.5 谓词逻辑的推理方法

命题逻辑中的推理规则同样完全适合谓词逻辑推理:

P规则：在推导的过程中，可随时引入前提集合中的任意一个；

T 规则：在推导的过程中，利用基本等价式和蕴涵式，由证明过程中某些中间公式推导出新的公式，若依据的是等价式，规则标明为TE，若依据的是蕴涵式，规则标明为TI 。

C P规则：如果能从给定的前提集合G与公式P推导出S，则能从前提集合G推导出P→S。

即 $\{G_1,G_2,\dots,G_n\} \Rightarrow P \to S$ 当且仅当 $\{G_1,G_2,\dots,G_n, P\} \Rightarrow S$

11:17 四川大学

7

深刻理解 要记住，会应用

量词推理规则

量词的四条重要的推理规则:

US规则(全称指定规则): $(\forall x)G(x) \Rightarrow G(s)$, $(\forall x)G(x) \Rightarrow G(c)$

(Universal Specify)

ES规则(存在指定规则): $(\exists x)G(x) \Rightarrow G(c)$

(Existential Specify)

UG规则(全称推广规则): $G(s) \Rightarrow (\forall x)G(x)$

(Universal Generalize)

EG规则(存在推广规则): $G(c) \Rightarrow (\exists x)G(x)$

(Existential Generalize)

s为论域D上的任意元素(常元)

c为论域D上的某些特定元素(常元)

$(\forall x)G(x) \Rightarrow (\exists x)G(x)$

11:17 四川大学

8

DMS Chapter 2 谓词逻辑

2.5 谓词逻辑的推理方法

1、直接证明方法

从前提集出发，利用P、T、US、ES，UG, EG规则进行推理，直至推出结论

2、利用CP规则

Step1 将结论的前件作为附加前提将入前提集（CP）

Step2 从前提集出发，利用P、T、US、ES，UG, EG规则进行演绎推理，直至推出结论的后件

3、反证法

Step1 将结论的否定作为附加前提将入前提集

Step2 从前提集出发，利用P、T、US、ES，UG, EG规则进行演绎推理，直至出现矛盾式

9

DMS Chapter 2 谓词逻辑

直接证明法

例5-1 符号化并证明以下描述

任何自然数都是整数, 存在着自然数, 所以存在着整数。

个体域为实数集合R。

解：设 F(x): x为自然数 G(x): x为整数

则符号化为：$\{(\forall x)(F(x)\rightarrow G(x)),\ (\exists x)F(x)\} \Rightarrow (\exists x)G(x)$ $x\in R$

证：

step	公式	依据
(1)	$(\exists x)F(x)$	P
(2)	$F(c)$	ES (1)
(3)	$(\forall x)(F(x)\rightarrow G(x))$	P
(4)	$F(c)\rightarrow G(c)$	US (3)
(5)	$G(c)$	T(2)(4) I
(6)	$(\exists x)G(x)$	EG (5)

11:17

10

DMS Chapter 2 谓词逻辑

Your turn

直接证明法

证明：“所有的人都是要死的；苏格拉底是人。所以苏格拉底是要死的。”

解：设H(x)：x是人； M(x)：x是要死的； g：苏格拉底。

则符号化为：$\{(\forall x)[H(x)\rightarrow M(x)],\ H(g)\} \Rightarrow M(g)$

证：

step	公式	依据
(1)	$(\forall x)[H(x)\rightarrow M(x)]$	P
(2)	$H(g)\rightarrow M(g)$	US (1)
(3)	$H(g)$	P
(4)	$M(g)$	T (2)(3) I

11

DMS Chapter 2 谓词逻辑

直接证明方法

例5.2 证明：$(\exists x)(P(x)\wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$

证：

step	公式	依据
1)	$(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$	P
2)	$P(c)\wedge Q(c)$	ES,1)
3)	$P(c)$	T,2),I
4)	$(\exists x)P(x)$	EG,3)
5)	$Q(c)$	T,2),I
6)	$(\exists x)Q(x)$	EG,5)
7)	$(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$	T,4),6),I

证毕!

12

DMS Chapter 2 谓词逻辑

直接证明法

判断下列推理过程及结果是否正确

$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \overset{?}{\Rightarrow} (\exists x)[P(x) \wedge Q(x)]$

证： step 公式 依据

step	公式	依据
1)	$(\exists x)P(x)$	P
2)	$\boxed{P(c)}$	ES(1)
3)	$(\exists x)Q(x)$	P
4)	$\boxed{Q(c)}$	ES (3)
5)	$P(c) \wedge Q(c)$	T (2)(4) I
6)	$(\exists x)[P(x) \wedge Q(x)]$	EG(5)

故：$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \Rightarrow (\exists x)[P(x) \wedge Q(x)]$

13

DMS Chapter 2 谓词逻辑

直接证明法

判断下列推理过程及结果是否正确

$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \overset{?}{\Rightarrow} (\exists x)[P(x) \wedge Q(x)]$

证： step 公式 依据

step	公式	依据
1)	$(\exists x)P(x)$	P
2)	$\boxed{P(c)}$	ES(1)
3)	$(\exists x)Q(x)$	P
4)	$\boxed{Q(c)}$	ES (3)

故：推理过程不正确，结论也不正确！

14

DMS Chapter 2 谓词逻辑

US，ES， UG，EG规则使用时的原则

1. 先使用 *S规则，再使用*G规则
2. 先使用ES规则，再使用US规则
3. 若已经使用了ES规则，后续不能使用UG规则
4. 若已经使用了ES规则, 再使用ES时需要用不同的常元标识符

可用相同的常元	需用不同的常元
ES→US	ES →ES
US →US	

15

DMS Chapter 2 谓词逻辑

采用CP规则

例5.3 证明：$(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$

依据CP规则，只需证 $\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\forall x)P(x)\} \Rightarrow (\forall x)Q(x)$

证： step 公式 依据

step	公式	依据
1)	$(\forall x)P(x)$	P（附加前提）
2)	$P(s)$	US 1)
3)	$(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$	P
4)	$P(s) \rightarrow Q(s)$	US 3)
5)	$Q(s)$	TI (2)(4)
6)	$(\forall x)Q(x)$	UG （5）

证毕！

16

Your turn

采用CP规则

证明：$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \Rightarrow \neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$

依据CP规则，只需证 $\{(\forall x)[P(x) \vee Q(x)], \neg(\forall x)P(x)\} \Rightarrow (\exists x)Q(x)$

证：

step	公式	依据
1)	$\neg(\forall x)P(x)$	P（附加前提）
2)	$(\exists x)(\neg P(x))$	T 1) E
3)	$\neg P(c)$	ES 2)
4)	$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$	P
5)	$P(c) \vee Q(c)$	US 4)
6)	$Q(c)$	T,(3),(5), I
7)	$(\exists x)Q(x)$	EG,(6)

证毕！

反证法

例5-4 证明：$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$

根据反证法只需证明 $\{(\forall x)(P(x) \vee Q(x)), \neg((\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x))\} \Rightarrow F$

step	公式	依据
1)	$\neg((\forall x)(P(x) \vee (\exists x)Q(x)))$	P（附加前提）
2)	$(\exists x)(\neg P(x)) \wedge (\forall x)(\neg Q(x))$	T 1)E
3)	$(\exists x)(\neg P(x))$	T 2) I
4)	$(\forall x)(\neg Q(x))$	T 2) I
5)	$\neg P(c)$	ES 3)
6)	$\neg Q(c)$	US 4)
7)	$(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$	P
8)	$P(c) \vee Q(c)$	US 7)
9)	$Q(c)$	T,5),8),I
10)	F	T,6),9) E

故 得证！

Your turn

符号化并证明以下描述

每个旅客要么坐硬座要么坐软座;每个旅客当且仅当富裕时坐软座;并非每个旅客都富裕。因此，有些旅客坐硬座。

11:17

2.4&2.5 基本要求

- **牢记涉及量词的几个重要基本蕴含式**

  单量词(I14,I15, I16)，双量词（8种组合的蕴涵关系图）

- **牢记并会熟练运用US，ES， UG，EG规则**
- **能熟练运用P规则， T规则，CP规则， US，ES， UG，EG规则实现谓词逻辑推理的各种演绎法**

11:17

Chapter2 End