第二章　随机变量及其分布

§2.1 随机变量及分布函数

随机变量

前面说过，概率统计是研究随机现象规律的。 对于不同的随机现象，试验的结果形形色色，但是许多不同的随机试验，虽然结果表现不一样，但本质是一样，比如抛硬币与生孩子，不同的随机试验，但本质是一样的，都只有两种结果，每种结果发生大小都是0. 5的概率。在数学上，我们最熟悉的是“数”了，因此，我们很自然地想到：用数来描述结果，即：每个结果对应一个数。比如：正面“1”反面“0”，男孩“1”女孩“0”。

这样，一个结果就对应一个数。从数学上看，就是对每个样本点ω，给定了一个数，记为 $X(\omega)$。于是，在样本空间Ω上定义了一个取值在 $(-\infty,+\infty)$ 上的“函数” X ，这样的函数就是随机变量。

定义2.1. 设Ω为一随机试验的样本空间。如果对每个样本点 $\omega\in\Omega$，就有一实数 $X(\omega)$ 与之对应，这样就定义了一个定义域为Ω的实值函数 $X=X(\omega)$，称之为**随机变量(r. v.)**。

r. v. 通常用大写字母 X,Y,Z 等或者希腊字母 ξ,η,ζ 等表示。

随机变量 是 $\Omega \to R$ 上的映射,

此映射具有如下特点

- <u>定义域</u>　**事件域** ?
- <u>随机性</u>　**r.v. X 的可能取值不止一个，试验前只能预知它的可能的取值，但不能预知取哪个值**
- <u>概率特性</u>　**X 以一定的概率取某个值**

有了随机变量的定义之后,我们今后都用随机变量落入某个数集来表示随机事件,即$\{\omega \mid X(\omega) \in G\}$表示随机变量取值在G中的样本点构成的事件，简记为

$$(X \in G)$$

例　袋中1只黑球，1只白球，从中任意取出1只球，观察取出的球颜色。则Ω＝｛黑，白｝定义

$$X=\begin{cases}0, & \omega=\text{黑色}, \\ 1, & \omega=\text{白色}。\end{cases}$$

于是事件“摸出的球是白色”可表示为｛X =1｝。

例　一对朋友相约19点到20点见面，先来的等后来的。设 X 表示先来朋友的等待时间。则事件“等待的时间不超过一刻钟”可表示为 $\{0 \le X \le 15\}$，相应的概率可表示为

$$P(0 \le X \le 15)$$

随机变量的分布函数

定义2.2 设**X**是随机变量，对任意实数**x**，定义

$$F(x)=P\{X\le x\}$$

称**F(x)** 为随机变量**X**的分布函数。

注（1）分布函数在**x**的取值本质是一个概率，即事件**{X≤x}**的概率**P{X≤x}**;

（2）对任意实数**a, b (a<b),**

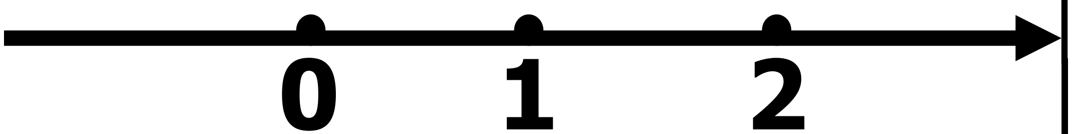
$$P\{a<X\le b\}=F(b)-F(a).$$

分布函数的求法

例2.5 已知随机变量**X**的取值情况如右表，求**X**的分布函数

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

因为分布函数是定义在整个数轴上，所以



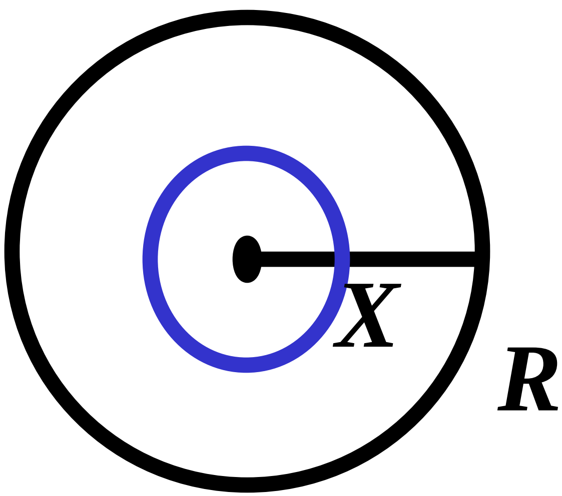
$$F(x)=P\{X\le x\}=\begin{cases}0, x<0\\ 0.1, 0\le x<1\\ 0.7, 1\le x<2\\ 1, x\ge 2\end{cases}$$

可见,此题中,**F(x)**是一个阶梯型函数

例2.6

某射手向半径为R的圆形靶射击一次，假定不会脱靶。弹着点落在以靶心为圆心，r为半径的圆形区域的概率与该区域的面积成正比,设随机变量X表示弹着点与靶心的距离,求X的分布函数,并求概率

$$P\left(\frac{R}{4} < X \le \frac{3R}{4}\right)$$



解: 对任意的 $x \in [0, R]$,

$$P(0 \le X \le x) = k\pi x^2$$

例2.6

由题意，$1 = P(0 \le X \le R) = k\pi R^2$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{\pi R^2}$$

(1)当$x < 0, F(x) = P(X \le x) = P(\phi) = 0$

(2)当$0 \le x \le R, F(x) = P(X \le x) =$

$$P(X < 0) + P(0 \le X \le x) = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \frac{x^2}{R^2}$$

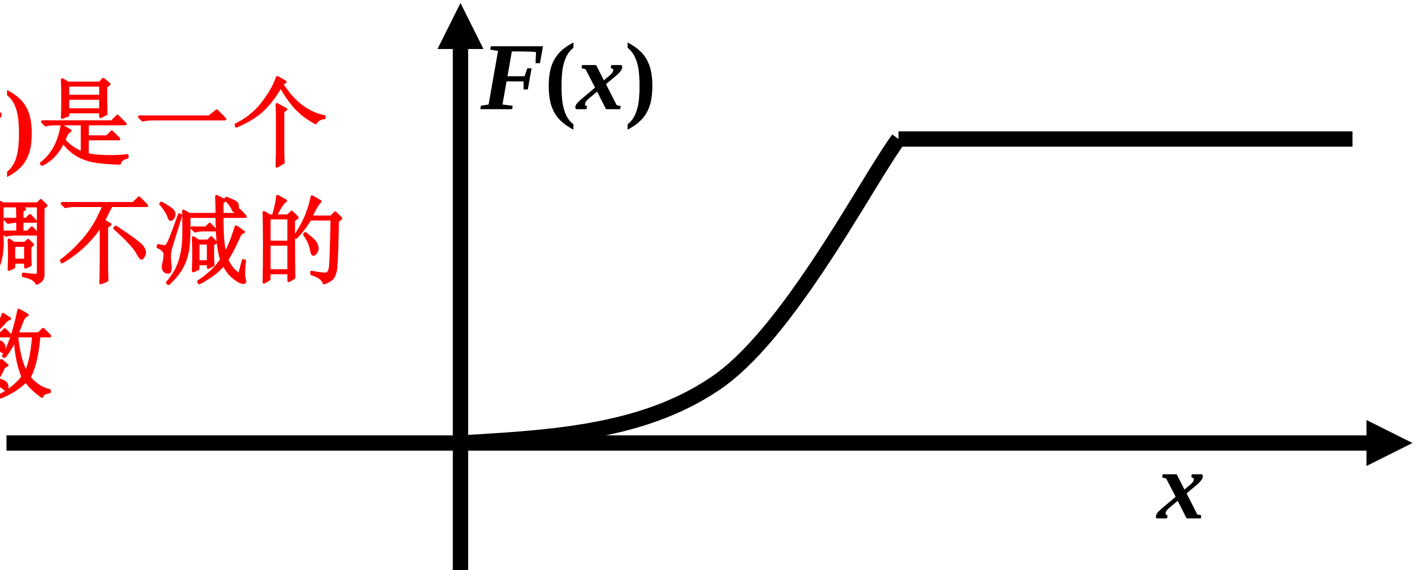
(3)当$x > R, F(x) = P(X \le x) = 1$

例2.6

$$P\left(\frac{R}{4} < X \le \frac{3R}{4}\right) = P\left(X \le \frac{3R}{4}\right) - P\left(X \le \frac{R}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{R^2}\left[\left(\frac{3R}{4}\right)^2 - \left(\frac{R}{4}\right)^2\right] = \frac{1}{2}$$

$F(x)$是一个单调不减的函数



定理2.1 分布函数的性质

1)若$x_1<x_2$，则$F(x_1)\le F(x_2)$;

2) 对任意实数x，$0\le F(x)\le 1$且

$$F(-\infty)=P(X\le-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,$$

$$F(+\infty)=P(X\le+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1;$$

3)F(x)是右连续的：对任意实数，

$$F(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0).$$

4)对任意的 x_0，有$P(X=x_0)=F(x_0)-F(x_0-0)$

性质(1)-(3)是分布函数的特征：

分布函数满足性质(1)-(3)；函数若满足性质(1)-(3)，则它有一定是某一随机变量的分布函数。

$$P(X=a)=F(a)-F(a-0), \quad P(X<a)=F(a-0),$$

$$P(X>a)=1-F(a), \qquad P(X\geq a)=1-F(a-0),$$

$$P(a<X\leq b)=P(X\leq b)-P(X\leq a)=F(b)-F(a),$$

$$P(a\leq X\leq b)=P(X\leq b)-P(X<a)=F(b)-F(a-0),$$

$$P(a\leq X<b)=P(X<b)-P(X<a)=F(b-0)-F(a-0),$$

$$P(a<X<b)=P(X<b)-P(X\leq a)=F(b-0)-F(a).$$