习题课6（Ch14-17）

主 讲　林 兰

2022 秋季

第十四、十五、十六章

一、基本概念

代数系统、特异元（单位元或幺元，零元，幂等元，逆元）、半群、含幺半群、群、子半群、子群、群的阶、交换群、循环群、生成元、元素的周期、环、子环、含零因子环、交换环、含幺环、整环、域。

二、基本要求

1、会求二元运算的特异元素；

2、判断或者证明给定集合和运算是否构成半群、含幺半群和群；

3、会运用群的基本性质证明相关的命题；

4、掌握循环群的基本性质和证明方法（按定义证明和反证法）

5、会求循环群的生成元及其子群；

6、熟悉n元置换群（n次对称群）；

7、熟练掌握环、域的基本性质和证明方法（按定义证明和反证法）

第十七章

1. 格的概念和基本性质
2. 子格的定义
3. 特殊的格及性质
4. 布尔代数的概念和基本性质
5. 布尔表达式

例1

- 设<G，∗>是一个群，H_1，H_2是G的两个子群，证明：

(1) < $H_1 \cap H_2$ ，∗>也是G的子群；

(2) < $H_1 \cup H_2$ ，∗>是G的子群当且仅当$H_1 \subseteq H_2$或$H_2 \subseteq H_1$。

证明(1) 1)非空性和幺元存在：由于H_1，H_2是G的两个子群，所以有：$e \in H_1$，$e \in H_2$，即有$e \in H_1 \cap H_2$；

2)封闭性：对$\forall a$，$b \in H_1 \cap H_2$，

即a，$b \in H_1$，a，$b \in H_2$，

由于H_1，H_2都是G的子群，所以有：

$a*b \in H_1$，$a*b \in H_2$，即有：$a*b \in H_1 \cap H_2$

3)逆元存在：对$\forall a \in H_1 \cap H_2$，即$a \in H_1$，$a \in H_2$，由于$H_1$，$H_2$都是G的子群，所以有：

$a^{-1} \in H_1$，$a^{-1} \in H_2$，即有：$a^{-1} \in H_1 \cap H_2$。

由1)、2)、3)知：<$H_1 \cap H_2$，∗>是<G，∗>的一个子群。

- 推广：

设<G，*>是一个群，H_1，H_2，…，H_n是G的n个子群，则有$H = H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n$是G的子群。

例1（续）

- 设<G，*>是一个群，H_1，H_2是G的两个子群，证明：

（1）$\langle H_1 \cap H_2$，$*\rangle$也是G的子群；

（2）$\langle H_1 \cup H_2$，$*\rangle$是G的子群当且仅当$H_1 \subseteq H_2$或$H_2 \subseteq H_1$。

证明(2)　充分性显然成立。只需证明必要性，采用反证法。

假设H_1和H_2相互不是子集，则存在h_1，h_2使得

$h_1 \in H_1$但$h_1 \notin H_2$，$h_2 \in H_2$但$h_2 \notin H_1$

得出$h_1 * h_2 \notin H_1$，（否则由$h_1^{-1} \in H_1$，那么$h_1^{-1} * (h_1 * h_2) \in H_1$，即有$h_2 \in H_1$，矛盾。）

同理可证$h_1 * h_2 \notin H_2$。

故$h_1 * h_2 \notin H_1 \cup H_2$，与$\langle H_1 \cup H_2$，$*\rangle$是G的子群矛盾。

所以，$\langle H_1 \cup H_2$，$*\rangle$是G的子群，那么$H_1 \subseteq H_2$或$H_2 \subseteq H_1$。

例2

- 设<G，*>是一个群， 运算表如下，问G是否为循环群？如果是循环群，求出它所有的生成元和子群。

	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	c	d	e	f	a
c	c	d	e	f	a	b
d	d	e	f	a	b	c
e	e	f	a	b	c	d
f	f	a	b	c	d	e

解：(1)对循环群，由于生成元的阶(周期)与群的阶相等。只要是6阶元就是生成元。

由运算表，a为单位元。

$|a|=1$， $|b|=6$， $|c|=3$

$|d|=2$， $|e|=3$， $|f|=6$

b, f是生成元， 因而G是循环群。

(2) a,c,d,e不是生成元， 子群有：

(a)={a}，

(c)=(e)={c,e,a}，

(d)={d,a}， G。

例3

- 给定代数系统$\langle I,*,\circ\rangle$，且$*$和$\circ$定义为：

$$a * b = a + b - 1,\quad a \circ b = a + b - a \times b$$

其中，I是整数集合，$+, -, \times$分别是通常数的加法、减法和乘法，证明：$\langle I,*,\circ\rangle$是具有幺元的可交换环。

证明：1）证$\langle I,*\rangle$是交换群。

对$\forall a,b,c \in I$，$a * b = a + b - 1$，$a * b \in I$

即“$*$”是封闭的；

$\because$ $(a*b)*c=a+b-1+c-1=a+b+c-2$

$a*(b*c)=a+b+c-1-1=a+b+c-2$

$\therefore$ “$*$”是可结合的；

∵a*1=a+1−1=a ， 1*a=1+a−1=a ∴1是 $\langle I,*\rangle$ 的幺元；

对$\forall a \in I$，令$a^{-1} = 2 - a$，则

$$a * a^{-1} = a + 2 - a - 1 = 1$$

$$a^{-1} * a = 2 - a + a - 1 = 1$$

∴a的逆元存在；

再因为 a*b=a+b−1=b*a，运算*可交换。

故，可得$\langle I,*\rangle$ 是交换群。

2） 证 $\langle I, \circ \rangle$是含幺交换半群。

对$\forall a, b, c \in I$， $a \circ b = a + b - a \times b$， $a \circ b \in I$

$\therefore$ “$\circ$” 是封闭的；

$$(a \circ b) \circ c$$
$$= (a + b - a \times b) + c - (a + b - a \times b) \times c$$
$$= a + b + c - ab - ac - bc + abc$$
$$a \circ (b \circ c)$$
$$= a + (b + c - b \times c) - a \times (b + c - b \times c)$$
$$= a + b + c - ab - ac - bc + abc$$

$\therefore$ “$\circ$” 是可结合的；

令e=0，$a \circ 0 = a + 0 - a \times 0 = a$，

$$0 \circ a = 0 + a - 0 \times a = a$$

∴0是 $\langle I, \circ \rangle$的幺元；

再因为 $a \circ b = a + b - a \times b = b \circ a$，可交换性。

故，可得$\langle I, \circ \rangle$的是含幺交换半群 。

3）证明“∘”对“∗”可分配

$a \circ (b * c) = a \circ (b + c - 1)$

$= a + b + c - 1 - a \times (b + c - 1)$

$= a + b + c - 1 - a \times b - a \times c + a$

$= (a + b - a \times b) + (a + c - a \times c) - 1$

$= (a \circ b) * (a \circ c)$

同理可得：$(b * c) \circ a = (b \circ a) * (c \circ a)$

综上，$\langle I, *, \circ \rangle$是具有幺元的可交换环。

习题十四

5. 下表中所列运算定义在实数集R上，请在下表的各栏填上该运算是否具有指定性质。

	+	-	×	max	min	|x-y|
封闭性	Y	Y	Y	Y	Y	Y
可结合性	Y	N	Y	Y	Y	N
可换性	Y	N	Y	Y	Y	Y
存在幺元	Y	N	Y	N	N	N
存在零元	N	N	Y	N	N	N
每元有逆元	Y	N	N	N	N	N

$|x-0| = |x|$

习题十五

4.设半群⟨A,•⟩中任何两个不同元素关于运算“•”不可交换。证明：对任何a∈A，a•a=a。

证：由题意，若a•b=b•a，则必有a=b。

因为⟨A,•⟩是半群，满足结合律，对∀a∈A，有

$$(a\cdot a)\cdot a=a\cdot(a\cdot a)$$

故(a•a)=a。

习题十五

10. 写出<S_3，∘>中的全部子群。

解： S_3={(1), (1 2), (1 3), (2 3), (1 2 3), (1 3 2)}

生成子群：

{(1), (1 2)}，

{(1), (1 3)}，

{(1), (2 3)}，

{(1), (1 2 3), (1 3 2)}

和二个平凡子群 {(1)}，{(1), (1 2), (1 3), (2 3), (1 2 3), (1 3 2)}。

习题十五

17. 证明：循环群的子群必是循环群。

证：（找出任意子群的生成元是什么）

设 G=(a)={e,a,a^2,a^3,…}，H是G的子群,

则H中的每个元素具有a^m的形式，设k是所有方幂m中最小的正整数，则H=（a^k）。

（反证）否则，如果H≠（a^k），那么对∀ a^m∈H，有$m = nk + l$，$0 < l < k$，

使得$a^l = a^m \cdot (a^k)^{-n}$

由a^m, a^k∈H, H是G的子群，则a^l∈H，若$0 < l < k$,则与k是最小正整数矛盾；

$\therefore\ l = 0$，即$a^m = (a^k)^n$。

习题十五

18.证明：群中的每个元素与它的逆元有相同的周期。

证明： 因为若$a^k = e$(k为任意正整数)，

则$\left(a^{-1}\right)^k = \left(a^k\right)^{-1} = e$，

可知，a^{-1}的周期是存在的，a的周期是无限的当且仅当a^{-1}的周期是无限的；

若**a**的周期为正整数**n**，a^{-1}的周期为**m**

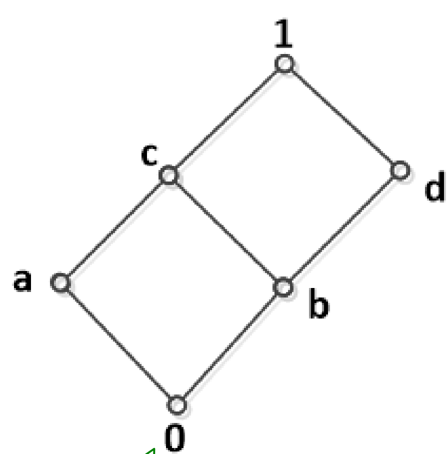
则有$\left(a^{-1}\right)^n = (a^n)^{-1} = e$, 由定理得**m|n**

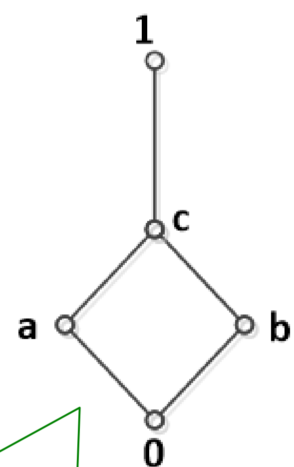
$a^m = \left((a^{-1})^{-1}\right)^m = \left((a^{-1})^m\right)^{-1} = e^{-1} = e$, 由定理得**n|m**

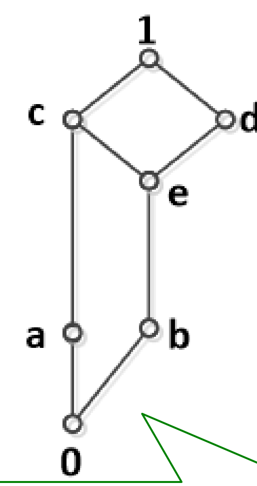
所以，**n=m**。

习题十七

10. 确定图17-6各Hasse图对应的格中哪些是分配格，哪些是有补格。







与因子格$\langle D_{18}, |\rangle$同构，是分配格；b,c无补元，不是有补格。

不同构于钻石格，五角格的5元格，是分配格；a,b,c都无补元，不是有补格。

{c,a,0,b,e}是5元子格，且与五角格同构，不是分配格；b,c,e无补元，不是有补格。

有补格：无。

课堂练习

设⟨G,•⟩是群，$a, b \in G, a \neq e$，且$a^4 \cdot b = b \cdot a^5$。试证明$a \cdot b \neq b \cdot a$。

（反证法）

假设$a \cdot b = b \cdot a$，则$a^4 \cdot b = a^3 \cdot a \cdot b = \cdots = b \cdot a^4$。

而已知，$b \cdot a^4 = b \cdot a^5$

由消去律，$a = e$，与题意矛盾。