DMS Chapter 1 命题逻辑

1.4 联结词的完备集

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.4 联结词的完备集

2个命题变元，可构成2^4 =16 类命题公式

P	Q	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10	G11	G12	G13	G14	G15	G16
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
		永真式T	矛盾式 F	P∨Q		Q→P		P→Q		P↔Q	P∇Q	～Q	Q	～P	p		P∧Q

1/3/n个命题变元，可构成(   ) 类命题公式?

四川大學 SICHUAN UNIVERSITY

09:17

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.4 联结词的完备集

2个命题变元，可构成2^4 =16 类命题公式

P	Q	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10	G11	G12	G13	G14	G15	G16
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
		永真式T	矛盾式 F	P∨Q	~(P∨Q)	Q→P	~(Q→P)	P→Q	~(P→Q)	P↔Q	P∇Q	～Q	Q	～P	p	~(P∧Q)	P∧Q

1/3/n个命题变元，可构成( ) 类命题公式?

四川大學 SICHUAN UNIVERSITY

09:17

3

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.4 联结词的完备集

- **不同联结词产生的真值表是互不相同的**
- **用～ ，∧，∨，→， ↔， ∇ 六个联结词还不能广泛地做到简洁而直接地表达含两个变元的所有16种命题公式.**
- **就此还可扩充3个新联结词(运算)：**

  ① **与非命题**，～(P∧Q)， **记作** P↑Q

  ② **或非命题**， ～(P∨Q), **记作** P↓Q

  ③ **条件否定命题**， ～(P→Q), **记作** $P \xrightarrow{C} Q$

四川大學 SICHUAN UNIVERSITY

09:17

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.4 联结词的完备集 ---与非联结词

与非联结词↑：设P, Q为两个命题，称P↑Q为P和Q的“与非”命题。记作P↑Q.

与非↑是个可交换的二元逻辑运算，可由基本联结词∧和~等价表示：

$P\uparrow Q \Leftrightarrow \sim(P\wedge Q)$

与非的真值表

P	Q	P↑Q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

① $P\uparrow P \Leftrightarrow \sim(P\wedge P) \Leftrightarrow \sim P$

② $(P\uparrow Q)\uparrow(P\uparrow Q) \Leftrightarrow \sim(P\uparrow Q) \Leftrightarrow P\wedge Q$

③ $(P\uparrow P)\uparrow(Q\uparrow Q) \Leftrightarrow \sim P\uparrow\sim Q \Leftrightarrow \sim(\sim P\wedge\sim Q) \Leftrightarrow P\vee Q$

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.4 联结词的完备集 ---或非联结词

或非联结词↓：设P,Q为两个命题，称P↓Q为P和Q的“或非”命题。

或非↓是个可交换的二元逻辑运算，可由基本联结词∨和~等价表示：

$P\downarrow Q \Leftrightarrow \sim(P\vee Q)$

或非的真值表

P	Q	P↓Q
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

① $P\downarrow P \Leftrightarrow \sim(P\vee P) \Leftrightarrow \sim P$

② $(P\downarrow Q)\downarrow(P\downarrow Q) \Leftrightarrow \sim(P\downarrow Q) \Leftrightarrow P\vee Q$

③ $(P\downarrow P)\downarrow(Q\downarrow Q) \Leftrightarrow \sim P\downarrow\sim Q \Leftrightarrow \sim(\sim P\vee\sim Q) \Leftrightarrow P\wedge Q$

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.4 联结词的完备集 ---条件否定联结词

条件否定联结词 $\overset{c}{\to}$：设P, Q为两个命题，称 $P\overset{c}{\to}Q$ 为P和Q的条件否定命题。

条件否定的真值表

P	Q	$P\overset{c}{\to}Q$	$Q\overset{c}{\to}P$
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	0	1
0	0	0	0

$\overset{c}{\to}$是个不可交换的二元逻辑运算

$P\overset{c}{\to}Q \Leftrightarrow \sim(P\to Q)$

$Q\overset{c}{\to}P \Leftrightarrow \sim(Q\to P)$

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.4 联结词的完备集

这9个联结词是可定义的全部联结词

2个命题变元，可构成$2^4=16$类命题公式

P	Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0
		永真式T	矛盾式F	P∨Q	P↓Q	Q→P	$Q\overset{c}{\to}P$	P→Q	$P\overset{c}{\to}Q$	P↔Q	P∇Q	~Q	~P	p	Q	P↑Q	P∧Q

1.4 联结词的完备集 ---联结词之间的内在联系

- 9个联结词：～，∨，∧，→，↔，∇，↑，↓，$\overset{c}{\rightarrow}$
- 联结词之间有联系
  - → 可用～和∨表达： P→Q ⇔ ～P∨Q
  - ↔ 可用～，∨和∧表达： P ↔ Q ⇔ (～Q∨P) ∧ (～P∨Q)
  - ∇ 可用～、∨和∧表达： P ∇ Q ⇔ ～(P ↔ Q)
  - ↑ 可用∧和～表达： P↑Q ⇔ ～ (P∧Q)
  - ↓ 可用～和∨表达： P↓Q ⇔ ～ (P∨Q)
  - $\overset{c}{\rightarrow}$ 可用～ 和∧表达： P$\overset{c}{\rightarrow}$Q ⇔ ～Q∧P
- 全部联结词都可以用～， ∨和∧这三个联结词表达出来. 即{～， ∨， ∧}构成了逻辑联结词的一个功能完备集

1.4 联结词的完备集

- 功能完备集的定义： {～, ∨, ∧, →, ↔, ∇, ↑, ↓, $\overset{c}{\rightarrow}$}

  设S 是由部分逻辑联结词构成的集合，如果每个逻辑联结词的功能都能够由S中的联结词实现，则称S是联结词的一个功能完备集。

  {～，∨，∧}，{↑，↓}，{～，∧}，{～，∨}，{↑}，{↓}均为功能完备集
- 最小功能完备集：

  S是联结词的一个功能完备集，如果去掉S中的任何一个联结词后，至少有一个联结词的功能不能由S中剩余的联结词实现，则称S是逻辑联结词的一个最小功能完备集。

  {～，∧}，{～，∨}，{↑}，{↓}，{～，→} 均为最小功能完备集

1.4 联结词的完备集

例4.1 试证{～，∨，∧}不是最小功能完备集

证：由于 P∨Q ⇔ ～(～P∧～Q)，可见∨可由{～，∧}表达；

同理, P∧Q⇔～(～P∨～Q),因而∧可由{～，∨}表达，

所以{～，∨，∧}不是最小功能完备集。

例4.2 试证{～，∨}，{～，∧}是最小功能完备集

证：因为{～，∨}中去掉 ～ 后，仅由∨无法表达～和∧的功能，

所以{～，∨}是最小完备集

同理可证 {～，∧}是最小完备集

1.4 联结词的完备集

最小功能完备集反映了这样的事实:

在逻辑电路设计时，最少得采用多少种不同门式电路才能实现各种设计目标?

2个

- 答案：最小功能完备集中的联结词（对应门式电路）个数

  {～,∧} P∨Q ⇔ ～(～P∧～Q)

  {～,∨} P∧Q⇔～(～P∨～Q)
- 然而在实际应用中，普遍采用的功能完备集是{～,∨,∧}，它们也是逻辑系统中最常用的3个联结词。

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.5 命题公式的范式表示

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.5 命题公式的范式表示

- 若H ⇔ S，则H和S具有完全一致的真值表。即
  - ✓ 可通过等价变换从H演变出S
  - ✓ H和S虽然形式不同，但本质相同。
- 除了通过真值表和等价演算，是否还有其他方式来描述等价式H和S的共同本质？Yes，范式。
- 范式——规范型式normal form,又叫标准型式,正规型式。把公式进行标准化，正规化，称为对公式求范式。

09:17

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.5 命题公式的范式表示 ---主要内容

- 析取范式与合取范式
- 范式的求取
- 极小项, 主析取范式
- 极大项, 主合取范式
- 极大项与极小项的性质
- 主析取范式和主合取范式的求取方法
  - 真值表法
  - 等价变换法

09:17 15

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.5 命题公式的范式表示 ---合取范式与析取范式的定义

- **句节：命题变元或命题变元的否定。**
- **子句：有限个句节的析取式.**
- **合取范式：有限个子句的合取式**
- **短语：有限个句节的合取式**
- **析取范式：有限个短语的析取式**

例5.1 判断下列公式是否属于上述那种（些）定义

1) P 2) ~ P	句节，字句，短语，合取范式，析取范式
3) P∨Q∨~R	字句，合取范式，析取范式
4) ~P∧Q∧R,	短语，合取范式，析取范式
5) (P∧Q) ∨ (~P∧Q)	析取范式
6) (P∨Q) ∧ (~P∨Q)	合取范式
7) P∨Q∧~(P∨Q)	?

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.5 命题公式的范式表示
---合取范式与析取范式

从上述定义和例子可以得出：

- **单个句节既是子句，又是短语，同时既是析取范式，也是合取范式。** 如 P， Q
- **单个子句既是合取范式，也是析取范式。**
  如 $P\vee Q$， $P\vee Q\vee R$
- **单个短语既是析取范式，也是合取范式。**
  如 $P\wedge Q$， $P\wedge Q\wedge R$
- **析取范式、合取范式仅含联结词～、∧、∨，且～仅出现在命题变元前。**

09:17 17

17

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.5 命题公式的范式表示
---合取范式与析取范式

例5.2 判断下列公式是否为析取范式或合取范式，若不是，将其等价转为析取范式或合取范式

1） $P\vee(Q\vee\sim R)$

2） $\sim(Q\vee R)$

解： 1） 2） 均既不是析取范式也不是合取范式。

对1）和 2）式做等价转换：

1) $P\vee(Q\vee\sim R)\Leftrightarrow P\vee Q\vee\sim R$

2) $\sim(Q\vee R)\Leftrightarrow\sim Q\wedge\sim R$

转换后的等价式既是析取范式又是合取范式。

定理：任何命题公式都存在与之等价的合取范式或析取范式

09:17

18

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.5 命题公式的范式表示
---范式的求取(化归)

范式的求取方法及步骤

1. 利用等价式和蕴涵式将公式中的→、↔用联结词～、∧、∨来取代；

   $(G\leftrightarrow H)\Leftrightarrow(G\to H)\wedge(H\to G)$ (等价)

   $(G\to H)\Leftrightarrow(\sim G\vee H)$ (蕴涵)

2. 利用德•摩根定律将否定号～移到各个命题变元的前端

   $\sim(G\vee H)\Leftrightarrow\sim G\wedge\sim H$ (De Morgan定律)

   $\sim(G\wedge H)\Leftrightarrow\sim G\vee\sim H$。

3. 利用结合律、分配律、吸收律、幂等律、交换律等将公式化成其等价的析取范式或合取范式

09:17 19

19

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.5 命题公式的范式表示
---范式的求取(化归)

例5-3：求 $(P\wedge(Q\to R))\to S$ 的合(析)取范式

解： $(P\wedge(Q\to R))\to S$

$\Leftrightarrow(P\wedge(\sim Q\vee R))\to S$

$\Leftrightarrow\sim(P\wedge(\sim Q\vee R))\vee S$

$\Leftrightarrow\sim P\vee(\sim(\sim Q\vee R))\vee S$

$\Leftrightarrow\sim P\vee(Q\wedge\sim R)\vee S$

$\Leftrightarrow\sim P\vee S\vee(Q\wedge\sim R)$

析取范式 ∨ ∨ (∧)

$\Leftrightarrow(\sim P\vee S\vee Q)\wedge(\sim P\vee S\vee\sim R)$ 合取范式(∨ ∨)∧(∨ ∨)

09:17

20

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.5 命题公式的范式表示
---主范式

一个公式的析取（合取）范式不是唯一的。如

$P\vee(Q\wedge R)$ （析取）

$\Leftrightarrow (P\vee Q)\wedge(P\vee R)$ （合取）

$\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge P)\vee((P\vee Q)\wedge R)$

$\Leftrightarrow (P\wedge P)\vee(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)\vee(Q\wedge R)$ （析取）

能否限制条件，使每个公式只有一种对应的等价析(合)取范式呢？ Yes，主析取（合取）范式

09:17 21

21

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.5 命题公式的范式表示
---极小项与主析取范式

➢ **极小项:** 句节的合取

在n个变元的短语中，若每一个变元与其否定并不同时存在，且二者之一必出现且仅出现一次，则称这种短语为极小项。

如： 2变元短语 $P\wedge Q$, $\sim P\wedge Q$, $P\wedge\sim Q$, $\sim P\wedge\sim Q$ 均为极小项

$P\wedge\sim P\wedge Q$, $Q\wedge\sim P\wedge Q$, P, $\sim Q$ 不是极小项

➢ **主析取范式**

由有限个极小项组成的析取式称为 主析取范式。

若n给定，上限能确定吗？

思考： 析取范式与主析取范式之间的区别（？？）

09:17

22

DMS Chapter 1 命题逻辑

极小项及其编码

2个原子变元构成的极小项及其真值表

P	Q	$P\wedge Q$	$P\wedge\sim Q$	$\sim P\wedge Q$	$\sim P\wedge\sim Q$
		m_3/m_{11}	m_2/m_{10}	m_1/m_{01}	m_0/m_{00}
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1

极小项的编码

① 2个命题变元可组合$2^2=4$种不同极小项

② 任何两个极小项都不是相互等价的

③ 每个极小项只有一个解释（赋值）能使得其值为T，通常将此解释(成真赋值)做为该极小项的编码。

09:17 23

23

DMS Chapter 1 命题逻辑

极小项及其编码

n个命题变元共可组成 2^n个不同极小项，编码为为m_0，m_1，…，m_{2^n-1}

如： 3个命题变元构成的极小项 $\sim P\wedge\sim Q\wedge\sim R$，其编码为$m_0/m_{000}$，表示只有在P、Q、R分别取0、0、0时该极小项才为真

同理， $\sim P\wedge Q\wedge\sim R$也可用 m_2/m_{010}来编码

09:17

24

DMS Chapter 1 命题逻辑

极小项及其编码

写出下列 3 原子变元 极小项的编码（成真赋值）

① $P \wedge \sim Q \wedge \sim R$
② $P \wedge Q \wedge \sim R$
③ $P \wedge \sim Q \wedge R$
④ $\sim P \wedge Q \wedge \sim R$

写出下列 3 原子变元极小项编码(成真赋值)对应的极小项

① m_{000}
② m_{001}
③ m_{011}
④ m_{111}

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.5 命题公式的范式表示
---极小项与主析取范式

① $(\sim P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$
② $(\sim P \wedge \sim Q) \vee (P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge Q)$
③ $(P \wedge Q \wedge \sim R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$
④ $(P \wedge \sim Q \wedge \sim R) \vee (P \wedge \sim Q \wedge R) \vee (\sim P \wedge \sim Q \wedge R)$

试写出上述各主析取范式的成真赋值与成假赋值(真值表)

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.5 命题公式的范式表示
---极大项与主合取范式

句节的析取

➢ **极大项:**

在n个变元的子句中，若每一个变元与其否定并不同时存在，且二者之一必出现且仅出现一次，则这种子句称为极大项。

如：2变元子句 $P \vee Q$, $\sim P \vee Q$, $P \vee \sim Q$, $\sim P \vee \sim Q$ 均为极大项

$P \vee \sim P \vee Q$, $Q \vee \sim P \vee Q$, P, $\sim Q$ 不是极大项

➢ **主合取范式**

由有限个极大项组成的合取式称为主合取范式。

思考：合取范式与主合取范式之间的区别（？？）

DMS Chapter 1 命题逻辑

极大项及其编码

两个原子构成的极大项及其真值表

P	Q	$P \vee Q$	$P \vee \sim Q$	$\sim P \vee Q$	$\sim P \vee \sim Q$
		M_0/M_{00}	M_1/M_{01}	M_2/M_{10}	M_3/M_{11}
1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1

极大项的编码

① 2个命题变元可组合$2^2 = 4$种不同极大项
② 任何两个极大项都不是相互等价的
③ 每个极大项只有一个解释（赋值）能使得其值为F。通常将此解释(成假赋值)做为该极大项的编码，。

DMS Chapter 1 命题逻辑

极大项及其编码

n个命题变元共可组合 2^n个不同极大项，可编码为为M_0，M_1，…，M_{2^n-1}

如： 3个命题变元构成的极大项 ~P∨~Q∨~R，其编码为M_7/M_{111}，表示只有在P、Q、R分别取1、1、1时该极大项才为假

同理， ~P∨Q∨~R也可用 M_5/M_{101}来编码

09:17

30

30

DMS Chapter 1 命题逻辑

极大项及其编码

写出下列3原子变元极大项的编码（成假赋值）

① ~P∨Q∨~R
② ~P∨~Q∨R
③ P∨~Q∨R
④ ~P∨Q∨R

写出下列3原子变元极大项编码（成假赋值）对应的极大项

① M_{000}
② M_{001}
③ M_{011}
④ M_{111}

09:17

31

DMS Chapter 1 命题逻辑

主合取范式

① (~P∨Q)∧(P∨Q)

② (~P∨~Q)∧(P∨Q)∧(~P∨Q)

③ (P∨Q∨~R)∧(P∨Q∨R)

④ (~P∨Q∨~R)∧(P∨~Q∨R)∧(~P∨~Q∨R)

试写出上述各主合取范式的成假赋值与成真赋值(真值表)

09:17

32

32

DMS Chapter 1 命题逻辑

极大项/极小项特点

设命题公式包含n个原子变元

① 极大项是n个句节的析取式
② 极大项的个数是确定的：2^n
③ 特定极大项的编码(唯一)对应它的成假赋值(唯一)
④ 没有两个不同的极大项是等价的

⑤ 极小项是由n个句节的合取式
⑥ 极小项的个数是确定的：2^n
⑦ 特定极小项的编码(唯一)对应它的成真赋值(唯一)
⑧ 没有两个不同的极小项是等价的

09:17

33

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.5 命题公式的范式表示
---范式存在定理

- 凡不是永真式的命题公式都存在着与之等价的唯一主合取范式。永真式没有等价的主合取范式。
- 凡不是矛盾式的命题公式都存在着与之等价的唯一主析取范式。矛盾式没有等价的主析取范式。

	主合取范式	主析取范式
永真式	无	有且唯一
矛盾式	有且唯一	无
非永真式的可满足式	有且唯一	有且唯一

求主析（合）取范式的方法：

1、 真值表法

2、 公式转换法

09:17 34

34

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.5 命题公式的范式表示
---真值表法求主范式

- **定理一：**

在命题公式的真值表中，使公式取值为0的解释所对应的全部极大项的合取式，是该公式的主合取范式。

- **定理二：**

在命题公式的真值表中，使公式取值为1的解释所对应的全部极小项的析取式，是该公式的主析取范式。

例5.4 用真值表法求下列公式的主析取范式和主合取范式

1） $(P\to Q)\leftrightarrow R$ 2） $(P\to Q)\wedge R$

09:17

35

DMS Chapter 1 命题逻辑

1） $(P\to Q)\leftrightarrow R$

1.5 命题公式的范式表示
---真值表法求主范式

解：1. 列出其真值表： 2. 找出对应真值1或0的解释

3. 写出对应的极小项(1)或极大项(0)

4. 写出主析(或合)取范式

	P	Q	R	P→Q	(P→Q)↔R
$P\vee Q\vee R$, M_{000}	0	0	0	1	0
$\sim P\wedge\sim Q\wedge R$, m_{001}	0	0	1	1	1
$P\vee\sim Q\vee R$, M_{010}	0	1	0	1	0
$\sim P\wedge Q\wedge R$, m_{011}	0	1	1	1	1
$P\wedge\sim Q\wedge\sim R$, m_{100}	1	0	0	0	1
$\sim P\vee Q\vee\sim R$, M_{101}	1	0	1	0	0
$\sim P\vee\sim Q\vee R$, M_{110}	1	1	0	1	0
$P\wedge Q\wedge R$, m_{111}	1	1	1	1	1

主合取范式：$(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\sim Q\vee R)\wedge(\sim P\vee Q\vee\sim R)\wedge(\sim P\vee\sim Q\vee R)$

主析取范式：$(\sim P\wedge\sim Q\wedge R)\vee(\sim P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\sim Q\wedge\sim R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

09:17 36

36

DMS Chapter 1 命题逻辑

2） $(P\to Q)\wedge R$

1.5 命题公式的范式表示
---真值表法求主范式

解：1. 列出其真值表： 2. 找出对应真值1和0的解释

3. 写出对应的极大项(0)和极小项(1)

4. 写出主范式

	P	Q	R	P→Q	(P→Q)∧R
$P\vee Q\vee R$, M_{000}	0	0	0	1	0
$\sim P\wedge\sim Q\wedge R$, m_{001}	0	0	1	1	1
$P\vee\sim Q\vee R$, M_{010}	0	1	0	1	0
$\sim P\wedge Q\wedge R$, m_{011}	0	1	1	1	1
$\sim P\vee Q\vee R$, M_{100}	1	0	0	0	0
$\sim P\vee Q\vee\sim R$, M_{101}	1	0	1	0	0
$\sim P\vee\sim Q\vee R$, M_{110}	1	1	0	1	0
$P\wedge Q\wedge R$, m_{111}	1	1	1	1	1

主合取范式：$(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\sim Q\vee R)\wedge\sim P\vee Q\vee R\wedge(\sim P\vee Q\vee\sim R)\wedge(\sim P\vee\sim Q\vee R)$

主析取范式：$(\sim P\wedge\sim Q\wedge R)\vee(\sim P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

09:17

37

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.5 命题公式的范式表示
---真值表法求主范式总结

- 主范式的复杂程度（所包含极大项或极小项的项数）与公式真值表中0和1的分布有关，0越少，主合取范式中的极大项项数就越少，反之1越少，主析取范式中的极小项项数就越少。
- 若真值表中0的个数小于1的个数时，将公式转化为主合取范式（极大项的合取）简便些，反之，真值表中1的个数小于0的个数时，可选择将公式转化为主析取范式（极小项的析取）

思考：特定命题公式的主合取范式中的极大项项数与其主析取范式中的极小项项数有什么关系？

09:17 38

38

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.5 命题公式的范式表示
---范式存在定理

	主合取范式（极大项的合取）	主析取范式（极小项的析取）
永真式	无	有且唯一（2^n项）
矛盾式	有且唯一（2^n项）	无
非永真式的可满足式	有且唯一（k项）	有且唯一（2^n-k项）

09:17

39

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.5 命题公式的主范式表示

例5.6 写出下列主范式的成真赋值及成假赋值(真值表)。判断该公式的类型（永真/矛盾/可满足式），并判断他们之间的等价性。

1. $(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\sim Q\vee R)\wedge(\sim P\vee Q\vee R)\wedge(\sim P\vee Q\vee\sim R)$
2. $(\sim P\wedge\sim Q\wedge R)\vee(\sim P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\sim R)$
3. $(P\vee Q\vee\sim R)\wedge(P\vee\sim Q\vee R)\wedge(\sim P\vee Q\vee R)$
4. $(P\vee Q)\wedge(P\vee\sim Q)\wedge(\sim P\vee Q)\wedge(\sim P\vee\sim Q)$
5. $(\sim P\wedge\sim Q)\vee(\sim P\wedge Q)\vee(P\wedge\sim Q)\vee(P\wedge Q)$

09:17 40

40

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.5 命题公式的范式表示
---等价变换法求主范式的步骤

① 利用基本等价公式中的等价式和蕴涵式将公式中的→、↔用联结词~、∧、∨来取代；

② 利用德•摩根定律将否定号~移到各个命题变元的前端；

③ 利用结合律、分配律、吸收律、幂等律、交换律等将公式化成其等价的析取范式和合取范式。

④ 在析取范式的短语和合取范式的子句中，如同一命题变元出现多次，则将其化成只出现一次。

⑤ 去掉析取范式中所有永假式的短语和合取范式中所有永真式的子句，即去掉短语中含有形如P∧~P的子公式和子句中含有形如P∨~P的子公式。

09:17

41

1.5 命题公式的范式表示
---等价变换法求主范式的步骤

⑥ 若析取范式的某一个短语中**缺少**该命题公式中所规定的命题变元，则可用公式： $Q \Leftrightarrow (\sim P \vee P) \wedge Q$ 将命题变元P补进去，并利用**分配律**展开，然后合并相同的短语，此时得到的短语将是标准的极小项；

⑦ 若合取范式的某一个子句中**缺少**该命题公式中所规定的命题变元，则可用公式：$Q \Leftrightarrow (\sim P \wedge P) \vee Q$ 将命题变元P补进去，并利用分配律展开，然后合并相同的子句，此时得到的子句将是标准的极大项。

⑧ 利用幂等律将相同的极小项或极大项合并，同时利用交换律进行顺序调整，由此可转换成标准的主析取范式和主合取范式。

1.5 命题公式的范式表示
---等价变换法求主范式

例5.7 利用等价变换法求公式：$(P\to Q)\wedge R$ 的主合取范式和主析取范式。

解： $(P\to Q)\wedge R \Leftrightarrow (\sim P\vee Q)\wedge R$ （蕴涵）

$\Leftrightarrow (\sim P\vee Q\vee (R\wedge \sim R))\wedge((\sim P\wedge P)\vee(\sim Q\wedge Q)\vee R)$

（添加R、P、Q）

$\Leftrightarrow (\sim P\vee Q\vee R)\wedge(\sim P\vee Q\vee \sim R)\wedge(\sim P\vee \sim Q\vee R)\wedge(\sim P\vee Q\vee R)$
$\wedge(P\vee \sim Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee R)$ （分配律）

$\Leftrightarrow (\sim P\vee Q\vee R)\wedge(\sim P\vee Q\vee \sim R)\wedge(\sim P\vee \sim Q\vee R)\wedge(P\vee \sim Q\vee R)$
$\wedge(P\vee Q\vee R)$ 主合取范式

主析取范式 $(\sim P\wedge \sim Q\wedge R)\vee(\sim P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

1.5 命题公式的范式表示
--基本要求

- 理解句节、字句、短语、析取范式、合取范式的概念
- 深刻理解并掌握极小项、极大项的定义，主析取范式、主合取范式的定义
- 熟练掌握 求公式的主析取（合取）范式的真值表方法
- 了解求公式的主析取（合取）范式的等价变换法
- 会用主范式求公式的成真赋值/成假赋值、判断公式的类型(永真，矛盾或可满足式）、判断两个公式是否等价