DMS Chapter 2 谓词逻辑

命题逻辑的局限性

- 命题逻辑是数理逻辑的基础，主要研究命题和命题演算。原子命题是命题演算的基本单位，它是不可再分解的。这就带来了命题逻辑的局限性。
- 命题逻辑研究的范围限制在命题及其外部关系上，无法研究命题内部的成份、结构，命题之间所具有的逻辑特征（共同性和差异性）

例0.1 设原子命题，P：李明是大学生

Q：王芳是大学生

R：松树是植物

P与Q在内部关系上，应该比与R密切得多。然而，命题逻辑无法反映这种区别，也无法反映P、Q间的共同性。

09:50

1

DMS Chapter 2 谓词逻辑

命题逻辑的局限性

例0.2 设自然语言中的三个命题：所有的人都是要死的；苏格拉底是人；所以，苏格拉底是要死的。(著名的苏格拉底三段论)

解：设 P：所有的人都是要死的；

Q：苏格拉底是人。

R：苏格拉底是要死的。

显然，无论用什么方法也无法从前提{P, Q}演绎出R

即 无法证明 {P，Q}⇒R

命题逻辑在此无能为力。这是由命题逻辑的局限性造成的

09:50

2

DMS Chapter 2 谓词逻辑

第2章 谓词逻辑

3

DMS Chapter 2 谓词逻辑

第二章主要内容

2.1 量化词逻辑

2.2 谓词公式及其赋值

2.3 谓词公式的等价与范式表示

2.4 谓词公式的蕴涵

2.5 谓词公式的推理方法

09:50

4

陈述句可分为主语和谓语

- 客体——命题中的主语所描述的对象，独立存在的具体事务。客体用小写字符表示（客体标示符/客体变元）。
- 谓词：命题中的谓语，其作用是刻画客体的性质或描述客体间的关系。一般用大写字符（串）表示（谓词标示符）。
- n元谓词：设D是由客体组成的非空集合，称其为论域(个体域)，以D中元素为值的变元称为个体变元。那么，由形如

$$P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

构成的，值为T或F的表达式，称为n元谓词(或n元命题函数)

P：谓词标示符，　$x_1,x_2,\ldots,x_n$：客体变元

例1　把下列陈述句分别用谓词表示出来

1)　x是一个大学生；
2)　x大于y
3)　x与y的和等于z；

解：　1）用P表示“是一个大学生”，则

1）可用1元谓词　P(x)来表示

2）用GT表示“大于”，则

2）可用2元谓词　GT(x，y)来表示

3）用ADD表示“和等于”，则

3）可用3元谓词　ADD(x，y，z)来表示

1元谓词
2元谓词
3元谓词

- n元谓词和命题的关系：

P(x,y,z): x+y=z　　　3元谓词

x=3，P(3,y,z): 3+y=z　　　2元谓词

x=3,y=4，P(3,4,z):3+4=z　　　1元谓词

x=3,y=4,z=5，P(3,4,5): 3+4=5　　0元谓词(命题)

命题是一种特殊的谓词。

- 谓词的真值 与客体变元的论域及具体取值有关
  - ✓ GT(x，y)，当x>0,y<0时为真；当x>0,y>0时无法判断真假。
  - ✓ GT(x，y)，当x=5，y=3时为真，当x=5，y=9时为假

- 1元谓词用以描述某一类客体的某种特性或性质，而n元谓词（2个以上）则用以描述n个客体变元之间的某种关系。
- 不含客体变元的谓词称为0元谓词，它就是一个命题。所以我们可以说命题是谓词的一种特殊情况。谓词(命题函数)是命题的扩充。
- 若将具体的客体代入客体变元，就可判断其真假，此时谓词退化为一个具有确切真值的命题。
- n元谓词中的客体变元是有一定次序的。不能随意变更，如 GT(x，y)
- 谓词是和一定论域相联系的。如谓词 “x为整数：INT(x)” 在整数论域为真，在实数论域就可能为真也可能为假，取决于x的具体值。

2.1 量化词逻辑

----量词

- 陈述句中的一些描述：如“每一个”，“任意的”，“有一些”等都是与客体的数量有关的语句。为了把它们符号化，引进如下两个符号：

$(\forall x)$：所有的x； $(\exists x)$：有些x；
任意的x； 至少有一个x；
一切的x； 存在x；
每一个x；

- 定义： $(\forall x)$ 称为全称量词。$(\exists x)$为存在量词，其中x称为作用变量。一般将量词加在谓词之前，记为 $(\forall x)F(x)$，$(\exists x)F(x)$。
- $(\forall x)F(x)$也称为全称量化命题，$(\forall x)F(x)$为真 当且仅当 对论域中的每个客体*a*，F(*a*)都为真
- $(\exists x)F(x)$也称为存在量化命题，$(\exists x)F(x)$为真 当且仅当 论域中的至少存在一个客体*a*，使F(*a*)为真

为什么不是谓词？

2.1 量化词逻辑

----量词

例2 符号化下述陈述句：

1) 所有的老虎都要吃人； R(x)：x要吃人； $(\forall x)R(x)$ x∈{老虎}；

2) 每一个人都会犯错误； P(x)：x会犯错误； $(\forall x)$ P(x)，x∈{人}

3) 有一些人会摔跤； N(x)：x会摔跤 $(\exists x)$ N(x) x∈{人}；

4) 有一些人是大学生； Q(x)：x是大学生 $(\exists x)$ Q(x) x∈{人}；

5) 每一个带伞的人都不怕雨； C(x)：x不怕雨；D(x): x带伞 $(\forall x)$ (D(x)→C(x)) x∈{人}；

6) 有一些自然数是素数。 S(x)：x是素数； $(\exists x)$ S(x) x∈{自然数}。

思考：
1. 是否能确定黑色的谓词的真值？
2. 是否能确定蓝色的谓词的真值？

当客体论域给定后，（全称/存在）量化命题的真值一般是可以确定的

2.1 量化词逻辑

----量词

不便之处：

1、从书写上十分不便，需要特别注明客体变元的个体域。
2、在同一个比较复杂的公式中，不同谓词中的个体可能属于不同的轮域，此时无法清晰表达。
3、若未注明客体变元的轮域，易造成无法确定其真值。对于同一个量词命题，不同的轮域有可能带来不同的真值。如 $(\exists x)(x+6=5)$，
  1）x在实数范围内时，确有 $x=-1$使得$x+6=5$，因此，若$x\in$ {实数} $(\exists x)(x+6=5)$为“真”。
  2）在正整数范围内时，则找不到任何x，使得$x+6=5$为“真”，所以，若$x\in$ {正整数}，$(\exists x)(x+6=5)$为“假”。

2.1 量化词逻辑

----全论域，特性谓词

- 基于上述情况，有时为了书写简单，不指明客体变元的具体论域，或认为是包含一切客体的论域（全论域）。这时可使用一个谓词来描述客体变元的具体论域（性质），如REAL(x)，MAN(y)等， 这样的谓词称为特性谓词。
- 将特性谓词加入到谓词中时须遵循如下原则：
  ① 对于全称量词，刻划其对应个体域的特性谓词作为条件的前件加入。 如：人总是要死的：$(\forall y)$ (MAN(y) →MORTAL(y))
  ② 对于存在量词，刻划其对应个体域的特性谓词作为合取式之合取项加入。如：有的人是学生：$(\exists x)$(MAN(x)∧S(x))

DMS Chapter 2 谓词逻辑

2.1 量化词逻辑

----全论域翻译

例1.3 符号化下述描述:

① 每一个人都会犯错误;

$P(x)$: x会犯错误; $(\forall x)P(x)$, $x \in \{人\}$ 标明论域翻译

$H(x)$: x是人; $(\forall x)[H(x) \rightarrow P(x)]$ 全论域翻译

② 有一些人是大学生;

$Q(x)$: x是大学生; $(\exists x)\, Q(x)$, $x \in \{人\}$ 标明论域翻译

$H(x)$: x是人; $(\exists x)[H(x) \wedge Q(x)]$ 全论域翻译

③ 总能找到一个实数，它的平方小于它本身

$LT\ (x,y): x<y$; $f(x)$: x的平方; $(\exists x)\ [LT\ (f(x),x)]$ $x \in \{实数\}$ 标明论域翻译

$REAL(x)$: x是实数; $(\exists x)\ [REAL(x) \wedge LT\ (f(x),x)]$ 全论域翻译

④ 对每个整数x，都存在一个整数y，使y等于x的平方。

$S(x,y): y == x^2$; $(\forall x)(\exists y)[S(x,y)]$, $x \in \{整数\}$, $y \in \{整数\}$ 标明论域翻译

$I(x)$: x是整数; $(\forall x)[I(x) \rightarrow (\exists y)[I(y) \wedge S(x,y)]]$ 全论域翻译

09:50

13

DMS Chapter 2 谓词逻辑

Your turn

符号化下列描述（分别用指定论域和全论文）

1.尽管有人聪明，但未必一切人都聪明。

设 $M(x)$: x是人, $P(x)$:x聪明

指定论语翻译为: $(\exists x)[P(x)] \wedge \sim (\forall y)[P(y)]$, $x \in \{人\}$, $y \in \{人\}$

全论语翻译为: $(\exists x)[M(x) \wedge P(x)] \wedge \sim (\forall y)[M(y) \rightarrow P(y)]$

2. 总能找到一个实数，它的平方小于它本身

设: $L\ (x,y): x<y$; $f(x)$: x的平方; $REAL(x)$: x是实数;

指定论语翻译为: : $(\exists x)\ [L\ (f(x),x)]$, $x \in R$

全论语翻译为: $(\exists x)\ [REAL(x) \wedge L\ (f(x),x)]$

14

DMS Chapter 2 谓词逻辑

2.1 量化词逻辑

----指导变元和辖域

➢ **定义：在表达式 $(\forall x)[A(x)]$ 或 $(\exists x)[A(x)]$ 中，**

✓ 变元x 称为指导变元，

✓ $A(x)$称为相应量词的辖域。

✓ $A(x)$可以是既含指导变元x也含其他变元的复杂表达式

① $(\forall y)\ [P(y) \rightarrow Q(y)]$中,

✓ y为指导变元, $(\forall y)$的辖域为 $P(y) \rightarrow Q(y)$

② $(\forall x)(\exists y)[\underline{R(x,y)}]$中,

✓ $(\forall x)$ 的辖域是 $(\exists y)\ R(x,y)$,

✓ $(\exists y)$的辖域是 $R(x,y)$,

✓ $(\forall x)\ (\exists y)$的辖域是 $R(x,y)$

③ $(\forall x)\ [P(x) \rightarrow (\exists y)[Q(y) \wedge R(x,y)]]$ 中,

✓ $(\forall x)$ 的辖域是 $P(x) \rightarrow (\exists y)[Q(y) \wedge R(x,y)]$,

✓ $(\exists y)$的辖域是 $Q(y) \wedge R(x,y)$

09:50

15

DMS Chapter 2 谓词逻辑

2.1 量化词逻辑

----约束变元与自由变元

➢ **定义：在谓词表达式$(\forall x)[A(x)]$ 或 $(\exists x)[A(x)]$ 的辖域$A(x)$中，凡与指导变元x相同的变元称为约束变元，不是约束变元的其它变元称为自由变元。**

① $(\forall y)\ [P(x,y) \rightarrow Q(y)]$

✓ $(\forall y)$的辖域为 $P(x,y) \rightarrow Q(y)$，其中y为约束变元, x为自由变元

② $(\forall x)(\exists y)\underline{R(x,y)}$中,

✓ $(\forall x)\ (\exists y)$的辖域 $R(x,y)$ 中, x与y均为约束变元

③ $(\forall x)\ [(P(x) \rightarrow (\exists y)[Q(y) \wedge R(x,y)]) \vee Q_1(x1,y1,z1)]$ 中,

✓ $(\forall x)$ 的辖域) $[(P(x) \rightarrow (\exists y)[Q(y) \wedge R(x,y)]) \vee Q_1(x1,y1,z1)]$ 中, x为约束变元, y, x1,y1,z1均为自由变元

✓ $(\exists y)$的辖域 $Q(y) \wedge R(x,y)$中, y为约束变元

09:50

16

DMS Chapter 2 谓词逻辑

2.2 谓词公式与解释
----约束变元与自由变元

$(\forall x)[P(x)\rightarrow(\exists y)[Q(y)\wedge R(x,y)]]\ \wedge Q_1(x,y,z)$

一个谓词公式中出现某个同名变元既是约束变元,又是自由变元。容易引起概念上的混乱

- **应对措施：约束变元换名或自由变元代入，使得一个变元标识符在一个公式中只以一种形式出现。**
- **约束变元换名 规则：**

使用在公式中未出现过的变元标示符替换原来同名约束变元及其对应指导变元。

例：$(\forall u)[P(u)\rightarrow(\exists v)[Q(v)\wedge R(u,v)]]\ \wedge Q_1(x,y,z)$

- **自由变元代入 规则**

用客体常元或在公式中未出现过的变元标示符替换同名自由变元

例：$(\forall x)[P(x)\rightarrow(\exists y)[Q(y)\wedge R(x,y)]]\ \wedge Q_1(m,n,z)$

09:50

17

DMS Chapter 2 谓词逻辑

2.1 量化词逻辑
---约束变元与自由变元

改名和代入规则之间的共同点都是不能改变原有的约束关系；不同点是：

1）施行的对象不同：

改名规则是对约束变元施行，代入规则是对自由变元施行；

2）施行的范围不同：

- 换名规则只对公式中的某个量词及其辖域内施行，即只对公式的一个子公式施行；
- 代入规则必须对整个公式同一个自由变元的所有自由出现同时施行，即必须对整个公式施行；

3）施行后的结果不同：

- 换名后，公式含义不变，因为约束变元只换名为另一个客体变元，约束关系不改变，约束变元不能换名为客体常量；
- 代入后，不仅可用另一个客体变元进行代入，并且也可用客体常量去代入.从而使公式由具有普遍意义变为仅对该客体常量有意义，即公式的含义改变了。

09:50

18

DMS Chapter 2 谓词逻辑

2.1基本要求

1. **掌握 客体变元，谓词，量词等概念**
2. **了解 论域，全论域，特性谓词 等概念**
3. **能将给定陈述句符号化**
   - ① 特定论域翻译
   - ② 全论域翻译
4. **了解 指导变元，辖域，约束变元，自由变元 的概念**
5. **了解约束变元换名及自由变元代入规则**

09:50

19

DMS Chapter 2 谓词逻辑

2.2 谓词公式与解释
---谓词公式

- **客体常量标示符：一般用$a,b,c,\ldots,a_1,b_1,c_1,\ldots$来表示，它可以是论域D中的某个确定元素；**
- **客体变元(标示)符：一般用$x,y,z,\ldots,\ x_1,y_1,z_1,\ldots$等来表示.它可以取值于D中的任意元素；**
- **函数标示符：一般用$f,g,h,\ldots,\ f_1,g_1,h_1,\ldots$等来表示。n元函数符号$f(x_1,x_2,\ldots x_n)$可以是$D_n\rightarrow D$的任意一个函数；**
- **谓词标示符：一般用$P,Q,R,S\ldots,\ P_1,Q_1,R_1,\ldots$等来表示。n元谓词符号$P(x_1,x_2,\ldots x_n)$可以是 $D_n\rightarrow\{0,1\}$ 的任意一个谓词。**

09:50

22

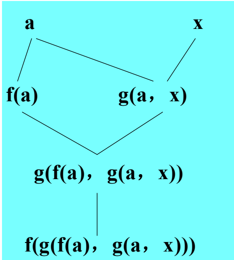
2.2 谓词公式与解释
---谓词公式

➢ **谓词逻辑中的项的递归定义：**

① 任意的常量是项；
② 任意的变量(元)是项；
③ 若$f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$是n元函数，$t_1,t_2,t_3,\ldots,t_n$是项，则$f(t_1,t_2,t_3,\ldots,t_n)$是项；
④ 有限次使用 1）～3）产生的符号串是项。

例1 根据项的定义判断 复合函数
f(g(f(a),g(a,x)))是否为一个项

解： f(g(f(a),g(a,x)))是一个项



项的取值范围为客体论域D

2.2 谓词公式与解释
---谓词公式

➢ **谓词逻辑中的项的递归定义：**

项就是函数

✓ n元函数

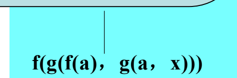
自变量为客体变元

✓ 复合函数

自变量为客体变元或n元函数

$_3,\ldots,t_n)$是项；

项的取值范围为论域D



2.2 谓词公式与解释
---谓词公式

原子谓词公式

设$P(x_1,x_2,x_3,\ldots x_n)$是n元谓词，$t_1,t_2,t_3,\ldots t_n$是项，则$P(t_1,t_2,t_3,\ldots t_n)$是原子谓词公式，简称原子。

谓词公式，简称公式

① 原子是公式；
② 若G，H都是公式，则$(\sim G)$、$(\sim H)$、$(G \vee H)$、$(G \wedge H)$、$(G \rightarrow H)$、$(H \rightarrow G)$、$(G \leftrightarrow H)$也是公式；
③ 若G是公式，x是客体变元，则$(\forall x)[G(x)]$、$(\exists x)[G(x)]$也都是公式；
④ 只有通过有限次使用规则1)-3)生成的表达式才是公式。

2.2 谓词公式与解释
---谓词公式

原子谓词公式

由谓词，逻辑联结词，量词组成的符合逻辑运算规则和量词运算规则的公式

DMS Chapter 2 谓词逻辑

2.2 谓词公式与解释

---谓词公式

P(x)→(Q(x,y)∨~R(x,a,f(z)))

P(x)∨R(y)

(∀x) P(x)

(∀x)[P(x)→(∃y)[Q(y)∧R(x,y)]] ∧Q_1(x,y,z)

都是公式。

量词的辖域(非单原子)最好以方括弧予以界定

括号不匹配

而

(∀x)[P(x)→R(x)

(∀x)∨P(x)(∃y)

不是谓词公式。

量词无辖域

09:50

27

DMS Chapter 2 谓词逻辑

2.2 谓词公式与解释

---谓词公式

例2 把描述“任意两个实数，如果乘积为0，则其中必有一个数为0” 翻译为谓词公式（逻辑形式）

解：设 函数：p(x,y): x*y

谓词：E(x,y): x==y

特性谓词：REAL(x): x为实数

标明论域翻译：

(∀x)(∀y) [E(p(x,y),0) → (E(x,0) ∨E(y,0))] x∈{实数}，y∈{实数}

全论域翻译：

(∀x) [REAL(x) →(∀y) [REAL(y) →(E(p(x,y),0) → (E(x,0) ∨E(y,0)))]]

09:50

28

DMS Chapter 2 谓词逻辑

2.2 谓词公式与解释

---谓词公式的解释

➢ 定义: 设G是定义在给定非空论域D上的谓词公式。当按照以下规则为常量标示符，函数标示符，谓词标示符 “赋值” 时，称为对公式G的一个赋值(解释):

① 给G中的每个常量标示符赋予D中的一个元素;

② 对G中的每个n元函数标示符指定一个具体的函数;

③ 对G中的每个n元谓词标示符指定一个具体的命题函数。

对每组可能的客体变元取值，给出谓词的对应值

思考：一个谓词公式解释个数是否有限?

09:50

29

DMS Chapter 2 谓词逻辑

2.2 谓词公式与解释

---谓词公式的解释

1. 公式 G= P(x) 在论域 D={1,2}上的2个解释

叙述式

① P(x): x==1, 即: P(1)=1, P(2)=0

② P(x): x<0, 即: P(1)=0, P(2)=0

枚举式

2. 公式 G= P(x, y) 在论域 D=[1,2,3,4]上的2个解释

① P（x,y）: x>y

② P（x,y）: x<y

叙述式

3. 公式G = (∀x)[P(x)] 在论域 D={人}上的2个解释

① P（x）: x会犯错误

② P（x）: x是大学生

叙述式

4. 公式G = (∃ x)[P(x)] 在论域 D={张三, 李四}上的2个解释

① P（x）: P(张三) = F, P(李四) =T

② P（x）: P(张三) = T, P(李四) =F

枚举式

在给定解释后，含量词且无自由变元的公式可确定其真值

09:50

30

2.2 谓词公式与解释
---谓词公式的解释

在给定解释下，确定形如$(\forall x)P(x)$, $(\exists x)P(x)$的含量词的谓词公式的真值的步骤

- Step1：根据量词的逻辑意义把谓词公式用不含量词的命题公式表示，设论域 $D=\{a_1,a_2,\dots, a_n\}$
  - ✓ $(\forall x)P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge\dots\wedge P(a_n)$
  - ✓ $(\exists x)P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee\dots\vee P(a_n)$
- Step2：根据给定解释计算step1得到的命题公式的真值

2.2 谓词公式与解释
---谓词公式的解释

例：设 $(\forall x) P(x)$，$(\exists x) P(x)$是定义在论域 $D=\{1,2\}$上的两个公式，

给定解释 P(x)：x==1 （即P(1)=1, P(2)=0）；

两公式的真值 分别为（　　）和（　　）

$$(\forall x) P(x) = \underbrace{\boxed{P(1) \wedge P(2)}}_{\text{step1}} = \underbrace{\boxed{1 \wedge 0 = 0}}_{\text{step2}}$$

$$(\exists x) P(x) = \boxed{P(1) \vee P(2)} = \boxed{1 \vee 0 = 1}$$

思考：
关于论域D={1,2}，这两个公式的解释个数是否有限？

2.2 谓词公式与解释
---谓词公式的解释

例：已知 $(\forall x) P(x)$ 是定义在论域 D={正整数}上的公式，

给定解释 P(x)：x > 2;

公式的真值 为(　　)

$$(\forall x) P(x) = \underbrace{\boxed{P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)\dots}}_{\text{step1}} = \underbrace{\boxed{0 \wedge 0 \wedge 1 \wedge \dots = 0}}_{\text{step2}}$$

思考：
关于论域 D={正整数}，此公式的解释个数是否有限？

2.2 谓词公式与解释
---谓词公式的解释

例：已知 $(\forall x) (\exists y)P(x,y)$是定义在论域 $D=\{1,2\}$上的公式，

给定解释 P(x,y)：P(1,1)=1, P(1,2)=0; P(2,1)=0; P(2,2)=1

公式的真值 为________

$$(\forall x) (\exists y)P(x,y) = (P(1,1) \vee P(1,2)) \wedge (P(2,1) \vee P(2,2))$$
$$= (1 \vee 0) \wedge (0 \vee 1)$$
$$=1$$

思考：
关于论域 D={1, 2}，此公式的解释个数是否有限？

2.2 谓词公式与解释
---谓词公式的解释

例4 A=(∀x) (∃y)P(x,y) 和 B=(∃y) (∀x) P(x,y)] 是论域 D={1,2}上的公式，

给定解释： P(1,1)=1, P(1,2)=0; P(2,1)=0; P(2,2)=1。求A和B的值

解： A = (P(1,1) ∨ P(1,2)) ∧ (P(2,1) ∨ P(2,2))
= (1∨ 0)∧ (0 ∨ 1) = 1

B = (P(1,1) ∧ P(2,1)) ∨ (P(1,2) ∧ P(2,2))
= (1∧ 0) ∨ (0 ∧1) = 0

量词顺序不可随便调换，调换后谓词公式的真值可能不同

比如： "每个人都有好朋友" (∀x)(∃y)G(x,y) 与 "有人是所有人的好朋友" (∃y)(∀x)G(x,y) 是完全不同的含义。

2.2 谓词公式与解释
---谓词公式的解释

例5 求公式 A=(∀x) (∃y)P(x,y)， D={正整数} 在以下给定解释的值

① P（x,y）： x>y 。

② P（x,y）： x=y

解释不同，公式的真值可能不同

解： ① 解释下

A = (P(1,1) ∨ P(1,2) ∨……) ∧ (P(2,1) ∨ P(2,2) ∨……) ∧……

= (0∨ 0∨…)∧ (1 ∨ 0∨…) ∧(1 ∨ 1∨0∨…) = 0

② 解释下

A = (P(1,1) ∨ P(1,2) ∨……) ∧ (P(2,1) ∨ P(2,2) ∨……) ∧……

= (1∨ 0∨…)∧ (0 ∨ 1∨…) ∧(0 ∨ 0∨1∨…) = 1

2.2 谓词公式与解释
---谓词公式的解释

Your turn

设 x，y 的论域 D= {2, 3},

1. **把下列公式用不含量词的公式表示**

① (∀x) (∀y) P(x，y)

② (∃x)(∃y)P(x，y)

③ (∀x) (∃y)P(x，y)

④ (∃y) (∀x)P(x，y)

2. **若给定下列解释，试求上面公式的真值**

P(x,y): x>y

2.2 谓词公式与解释
---永真式，矛盾式，可满足式

永真式(重言式)

设A是以D为论域的谓词公式，如果在关于D的任一解释之下，A的值都为真，则称公式A是D上的永真式；

永假式(矛盾式，不可满足公式)

设A是以D为论域的谓词公式，如果在关于D的任一解释之下，A的值都为假，则称公式A是D上的永假式；

可满足公式

设A是以D为论域的谓词公式，如果在关于D的某个解释之下，A取值为真，则称公式A是D上的可满足公式。

DMS Chapter 2 谓词逻辑

2.3 谓词公式的等价与范式表示

---谓词公式的等价

谓词公式的等价

设A和B是以D为论域的谓词公式,如果在任一解释下,A和B都取相同的真值,则称A和B在D上是等价的,记作A ⇔ B 。

定理: A ⇔ B 当且仅当 A ↔ B 是D上的永真公式。

思考：证明两谓词公式等价时，真值表法还是永远的武器吗？

命题演算中的基本等价关系式在谓词演算中都成立

09:50

39

DMS Chapter 2 谓词逻辑

2.3 谓词公式的等价与范式表示

---谓词演算的基本等价式(只涉及量词)

量词否定(量词转换)

$$\sim (\forall x)\ P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\ [\sim P(x)]$$

$$\sim (\exists x)\ P(x) \Leftrightarrow (\forall x)\ [\sim P(x)]$$

√√√

量词否定推广至含多个量词的谓词公式

$$\sim (\exists x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ P(x,y,z)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)\ [\sim (\forall y)\ (\forall z)\ P(x,y,z)]$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)\ [\ (\exists y)\ [\sim (\forall z)\ P(x,y,z)]]$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ [\sim P(x,y,z)]$$

09:50

40

DMS Chapter 2 谓词逻辑

2.3 谓词公式的等价与范式表示

---谓词演算的基本等价式(只涉及量词)

量词辖域的收缩与扩充，Q是不含指导变元的谓词公式

$$(\forall x)\ [P(x) \vee Q] \Leftrightarrow (\forall x)\ P(x) \vee Q$$

$$(\forall x)\ [P(x) \wedge Q] \Leftrightarrow (\forall x)\ P(x) \wedge Q$$

$$(\exists x)\ [P(x) \vee Q] \Leftrightarrow (\exists x)\ P(x) \vee Q$$

$$(\exists x)\ [P(x) \wedge Q] \Leftrightarrow (\exists x)\ P(x) \wedge Q$$

√√√

$$(\forall x)\ [Q \to P(x)] \Leftrightarrow Q \to (\forall x)\ P(x)$$ Example

$$(\exists x)\ [Q \to P(x))] \Leftrightarrow Q \to (\exists x)\ P(x)$$

$$(\exists x)\ [P(x) \to Q] \Leftrightarrow (\forall x)\ P(x) \to Q$$

$$(\forall x)\ [P(x) \to Q] \Leftrightarrow (\exists x)\ P(x) \to Q$$

09:50

41

DMS Chapter 2 谓词逻辑

2.3 谓词公式的等价与范式表示

---谓词演算的基本等价式(只涉及量词)

量词分配律

$$(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \Leftrightarrow (\forall x)\ [P(x) \wedge Q(x)]$$

$$(\exists x)\ P(x) \vee (\exists x)\ Q(x) \Leftrightarrow (\exists x)\ [P(x) \vee Q(x)]$$

√√√

$$(\forall x)\ P(x) \to (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow (\exists x)\ [P(x) \to Q(x)]$$

09:50

42

DMS Chapter 2 谓词逻辑

2.3 谓词公式的等价与范式表示
---谓词演算的基本等价式(只涉及量词)

双量词公式的等价性

$(\forall x)\ (\forall y)\ A(x, y) \Leftrightarrow (\forall y)\ (\forall x)\ A(x, y)$

$(\exists x)\ (\exists y)\ A(x, y) \Leftrightarrow (\exists y)\ (\exists x)\ A(x, y)$

√√√

$\boxed{(\forall x)(\exists y)A(x, y) \overset{?}{\Leftrightarrow} (\exists y)(\forall x)A(x, y)}$

例8 给定赋值 D={1,2}，P(1,1)=1, P(1,2)=0; P(2,1)=0; P(2,2)=1。分别求公式 A=(∀x) (∃y)P(x,y) 和 B=(∃y) (∀x) P(x,y)]的值

解： $A = [P(1,1) \vee P(1,2)] \wedge [P(2,1) \vee P(2,2)] = (1 \vee 0) \wedge (0 \vee 1) = 1$

$B = [P(1,1) \wedge P(2,1)] \vee [P(1,2) \wedge P(2,2)] = (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) = 0$

$\boxed{(\forall x)(\exists y)A(x, y) \not\Leftrightarrow (\exists y)(\forall x)A(x, y)}$

09:50

43

DMS Chapter 2 谓词逻辑

2.3 谓词公式的等价与范式表示
---前束范式

谓词公式的前束范式

如果谓词公式 $A = (Q_1x_1)\ (Q_2x_2)\ \ldots\ (Q_nx_n)\ G$，

其中 Q_ix_i 是 $\forall x_i$ 或 $\exists x_i$ $(1 \le i \le n)$，G是不含量词的公式，

则称A为前束范式，称G是A的母式。

如 $(\forall x)(\exists y)(\forall z)\ [P(x,y) \rightarrow Q(y,z)]$

$(\forall x)(\forall y)\ P(x,y,z)$

前束合取(或析取)范式

如果在前束范式 $(Q_1x_1)\ (Q_2x_2)\ \ldots(Q_nx_n)G$ 中，母式G是合取(或析取)范式，相应地称这个前束范式为前束合取(或析取)范式。

如 $(\forall x)(\exists y)(\forall z)\ [P(x,y) \wedge Q(y,z)]$

09:50

44

DMS Chapter 2 谓词逻辑

2.3 谓词公式的等价与范式表示
---前束范式

定理：每一个含量词的谓词公式都存在着与之等价的前束范式

谓词公式前束范式化规步骤:

1.利用约束变元改名和自由变元代入规则,使所有约束变元之间,自由变元与约束变元之间均不同名

2.将公式中→,↔化成～,∧,∨

3.利用量词否定和德.摩根定律,将否定直接移到原子公式前。

4.利用量词的扩张与收缩律,把量词移到公式的最前面。

09:50

45

DMS Chapter 2 谓词逻辑

2.3 谓词公式的等价与范式表示
---前束范式

例9 将公式 $(\forall x)\ (\forall y)[P(x) \rightarrow (\forall z)Q(y,z)] \rightarrow \sim R(y,a)$ 化规为前束范式。

解： $(\forall x)\ (\forall y)[P(x) \rightarrow (\forall z)Q(y,z)] \rightarrow \sim R(y,a)$ 自由变元代入

$\Leftrightarrow (\forall x)\ (\forall y)[P(x) \rightarrow (\forall z)Q(y,z)] \rightarrow \sim R(u,a)$ 去→深入

$\Leftrightarrow \sim ((\forall x)\ (\forall y)[P(x) \rightarrow (\forall z)Q(y,z)]) \vee \sim R(u,a)$ 去→

$\Leftrightarrow \sim [(\forall x)\ (\forall y)[\sim P(x) \vee (\forall z)Q(y,z)]] \vee \sim R(u,a)$ ～ 深入

$\Leftrightarrow (\exists x)\ (\exists y)\ [P(x) \wedge (\exists z)\ [\sim Q(y,z)]] \vee \sim R(u,a)$ (∃z)辖区扩张

$\Leftrightarrow (\exists x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ [P(x) \wedge \sim Q(y,z)] \vee \sim R(u,a)$ (∃x) (∃y) (∃z)辖区扩张

$\Leftrightarrow (\exists x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ [(P(x) \wedge \sim Q(y,z)) \vee \sim R(u,a)]$ (前束析取范式)

$\Leftrightarrow (\exists x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ [(P(x) \vee \sim R(u,a)) \wedge (\sim Q(y,z) \vee \sim R(u,a))]$ (前束合取范式)

09:50

46

DMS Chapter 2 谓词逻辑

2.3 谓词公式的等价与范式表示

---前束范式

$(\exists x)(\forall y)(\exists z)[(P(x) \vee \sim R(u,a)) \wedge (\sim Q(y,z) \vee \sim R(u,a))]$

- 把一个谓词公式变成等价的前束范式后,前束范式中可能存在多个全称量词和存在量词.
- 全称量词和存在量词一般不能交换顺序;
- 相邻的同一类型的量词,可以交换顺序而不影响等价性;
- 两种量词出现顺序不同可能组成多种情况;
- 在处理实际问题时很不方便。
- 解决办法：只保留全称量词,而把存在量词转化为相应的依赖函数------Skolem范式的思路。

$$(\forall x)(\exists y)A(x, y) \not\Leftrightarrow (\exists y)(\forall x)A(x, y)$$

09:50

47

DMS Chapter 2 谓词逻辑

2.3 谓词公式的等价与范式表示

---斯柯林(Skolem)范式

斯柯林(Skolem)范式

设谓词公式A的等价前束合取范式是

$(Q_1x_1)\ (Q_2x_2)\ \dots\ (Q_nx_n)\ G$

1) 从左到右扫描量词，设Q_i是遇到的第一个存在量词:

① 如i=1,则选择一个在G中未使用过的常量标识符代替G中的全部x_1, 然后删去Q_1x_1;

② 如果i>1,则$Q_1,Q_2,\dots Q_{i-1}$都是全称量词,这时选择一个在G中未使用过的函数标识符(如g)，并用$g(x_1,x_2,..,x_{i-1})$去代替G中的全部x_i，然后删去Q_ix_i;

2) 重复步骤1),直到公式中不含存在量词为止。

最终得到的公式称为Skolem范式。

09:50

48

DMS Chapter 2 谓词逻辑

2.3 谓词公式的等价与范式表示

---斯柯林(Skolem)范式

例10 求$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)\ P(x,y,z,u,v,w)$Skolem范式。

解： $(\exists x)\ (\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)\ P(x,y,z,u,v,w)$ 消去$(\exists x)$

$(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(a,y,z,u,v,w)$ 消去$(\exists u)$

$(\forall y)(\forall z)(\forall v)(\exists w)\ P(a,y,z,f(y,z),v,w)$ 消去$(\exists w)$

$\boxed{(\forall y)(\forall z)(\forall v)\ P(a,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v))}$

09:50

49

DMS Chapter 2 谓词逻辑

2.3 谓词公式的等价与范式表示

---斯柯林Skolem范式

- 定理：设谓词公式G的Skolem范式为S，则 G为矛盾式 当且仅当 S 为矛盾式
- 通常 谓词公式G的Skolem范式S和G 并不等价。

如 公式 G =（∃x）P(x) 的 Skolem范式 S = P(a)

在 D={1,2}，解释 a=2，P(1)=1，P(2)=0 下，

$G = P(1) \vee P(2) = 1 \vee 0 = 1$;

而 $S=P(2)=0$

09:50

50

2.3 谓词公式的等价与范式表示
---斯柯林(Skolem)范式

例(P43 12)：设G的前束范式为 $(\exists x)(\forall y)P(x,y)$，其中$P(x,y)$不含$x,y$以外的变元，设$f$是不出现在$P(x,y)$中的函数标识符。

证明：G是永真式 当且仅当 $(\exists x)P(x,f(x))$ 为永真式。

上述结论可转化为

证明：$\sim G$ 是矛盾式 当且仅当 $\sim(\exists x)P(x,f(x))$ 为矛盾式

1. 根据定理有"$\sim G$为矛盾式 当且仅当 $\sim G$的skolem范式为矛盾式"

$\sim G$的skolem范式 $S=(\forall x)[\sim P(x,f(x))]$

2. $(\forall x)[\sim P(x,f(x))] \Leftrightarrow \sim(\exists x)P(x,f(x))$

证毕!

09:50

2.2-2.3基本要求

1. 给定论域及解释 会熟练求 含量词谓词公式的真值
2. 牢记谓词演算的几个重要基本等价式（涉及量词）

   量词否定(2)，量词辖域的扩张与收缩(4)，

   量词分配率(2)，双量词等价公式(2)
3. 熟悉前束范式及前束合(析)取范式的定义
4. 了解谓词公式前束范式化归步骤

09:50