四川大学期末考试试题（闭卷）

（2017——2018 学年第 2 学期）　A 卷

课程号：201018030　课序号：　课程名称：概率统计（理工）　任课教师：　成绩：
适用专业年级：　学生人数：　印题份数：　学号：　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

注：考试时间 120 分钟。请将答案写在答题纸规定的方框内，否则记 0 分。这里的“样本”都是指“简单随机样本”。除不尽的结果请保留最简分数或指数形式。

附：标准正态分布的分布函数值：$\Phi(0.05)=0.5199,\Phi(0.2)=0.5793,\Phi(0.25)=0.5987,$
$\Phi(0.31)=0.6217,\Phi(0.5)=0.6915,\Phi(1.645)=0.9500,\Phi(1.96)=0.9750.$

t 分位数：$t_{0.95}(25)=1.7081,t_{0.975}(25)=2.0595,t_{0.95}(24)=1.7109,t_{0.975}(24)=2.0639.$

一、填空题(每小题 3 分，共 18 分)

1. A,B 为两随机事件，$P(A)=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(B\mid A)=0.5$，则 $P(B\mid\bar{A})=$__________.

2. 连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，令 $Y=1-3X$，则 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 为__________.

3. 设 $(X,Y)\sim N(1,2;16,25;-0.2)$（正态分布），$Z=X+2Y$，则 $P(Z\le 0)$=__________.

4. 设 $X\sim P(5)$（泊松分布），$Y\sim e(0.5)$（指数分布），X,Y 相互独立, 则 $P(3<X+Y<11)\ge$ __________.（利用切比雪夫不等式）

5. 已知 $\{X_k,k\ge 1\}$ 为独立同分布的随机变量序列，且 $X_k\sim U(-1,5)$（均匀分布），$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k^2$，则当 $n\to\infty$ 时，Y_n 依概率收敛于__________.

6. 设 $X\sim N(1,\sigma^2)$ 和 $Y\sim N(-5,\sigma^2)$ 为两个相互独立的总体，X_1,X_2,X_3,X_4 和 Y_1,Y_2,Y_3,Y_4 分别为来自 X 和 Y 的两组样本，$\bar{X},\bar{Y}$ 和 S_1^2,S_2^2 分别为样本均值和样本方差，若 $\dfrac{a(\bar{X}-\bar{Y}-6)}{\sqrt{S_1^2+S_2^2}}$ 服从 t 分布，则 $a=$__________.

二、解答题 （共 **82** 分）

1. （**10** 分）据统计互联网上垃圾邮件和正常邮件的比例为 **1:3**，在 **40%**的垃圾邮件中会出现符号“**$**”，而只有 **4%**的正常邮件中会出现“**$**”．现随机选择一封邮件，试求：

（**1**）此邮件中会出现符号“**$**”的概率；

（**2**）若邮件中出现了符号“**$**”，求它是垃圾邮件的概率．

2．（**8** 分）某超市按袋出售 5 千克装和 10 千克装的土豆，但其质量并不能保证刚好等于 5 千克和 10 千克．据统计，5 千克装的土豆质量服从正态分布 $N(5.26, 0.18)$，10 千克装的土豆质量服从正态分布 $N(10.32, 0.28)$．现从超市随机选两袋 5 千克装的土豆和一袋 10 千克装的土豆，求此两袋 5 千克装的土豆质量之和比 10 千克装的这袋更重的概率．

3．（**10** 分）从装有 3 个红球、2 个黑球和 3 个白球的盒子中随机取两球，记 X，Y 分别为两球中红球和黑球的数量．

（**1**）求 (X,Y) 的联合概率分布；

（**2**）求 $Y=0$ 的条件下 X 的分布函数．

4．（15 分）设 (X,Y) 的联合密度函数为：$f(x,y)=\begin{cases} 2(x+y), & 0\le y\le x\le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

（1）求 X 和 Y 的边际密度函数 $f_X(x)$ 与 $f_Y(y)$，并判断 X 和 Y 的独立性；

（2）求条件密度函数 $f_{X|Y}(x\,|\,y)$，并计算条件概率 $P\left(X\le\frac{3}{4}\middle|Y=\frac{1}{2}\right)$；

（3）若 $Z=3X^3-1$，求 Z 的密度函数 $f_Z(z)$．

5．（12 分）保险公司推出一项针对 60 岁以上老年人的保险业务，保费为每人每年 200 元，若顾客死亡则保险公司需赔偿其家属 10000 元．假设有 10000 人购买了此保险，每个顾客在一年里去世的概率为 0.01．

（1）请根据中心极限定理计算保险公司此项业务一年的利润不低于 100 万的概率；

（2）据市场调研，保费每降低 1 元，会增加 125 名新顾客，请为保险公司制定此项业务最优（利润的期望值最大）的保费．

6．（15 分）设总体 X 的密度函数为：$f(x,\theta)=\begin{cases} \dfrac{2\theta^2}{x^3}, & x\ge\theta \\ 0, & x<\theta \end{cases}$，其中 $\theta>0$ 为未知参数；$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本：

（1） 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$；

（2） 求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_2$；

（3）请判断估计量 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 的无偏性．

7. （**12** 分）假设汽车每年行驶的里程数 X（单位:千米）服从正态分布，即 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$．随机调查了 25 辆汽车一年的里程数，得到样本均值为 22500，样本标准差为 5000，请回答下列问题：

（1）求平均里程数 μ 的置信度为 95%的置信区间；

（2）能否认为平均里程数大于 20000 千米（显著性水平 $\alpha=0.05$）？