第四章 随机变量的数字特征

在第二、三章中，我们学习了随机变量的分布，随机变量的分布给出了相应随机变量的全部信息，是对随机变量最为完整的刻画。但是:

(1)很多情况下获取一个随机变量的分布是困难的**;**

(2)实际应用中，我们往往没有必要掌握随机变量的分布（即全部信息），而只需某些综合指标来对该随机变量作简明的刻画，如：政府制定国家发展规划时，需考虑居民收入情况。它只需要知道居民的平均收入以及贫富差距等情况，而没有必要知道每个家庭的具体收入。这些综合指标就是随机变量的数字特征。

（**3**）获取一个随机变量的数字特征比获取其分布要容易得多。

基于以上原因，我们有必要研究随机变量的数字特征。随机变量的数字特征主要有：数学期望、方差、协方差、相关系数、矩等。本章我们就来逐一介绍它们。最先介绍数学期望。

§ 4.1 数学期望

数学期望的定义

引例

一堆西瓜中有3个2.5Kg，4个3Kg和5个3.5Kg的西瓜组成，则这些西瓜的平均重量为：

$$\frac{2.5\times3+3\times4+3.5\times5}{3+4+5}=2.5\times\frac{3}{12}+3\times\frac{4}{12}+3.5\times\frac{5}{12}(Kg)。$$

从上式可以看到，西瓜的平均重量为：各种西瓜的重量乘以其所占百分比后求和。

将平均值的概念抽象出来，就是我们要介绍的概念：**数学期望**。

离散型随机变量数学期望的定义

定义4.1（数学期望）： 设离散型随机变量X的分布律为 $P(X=x_k)=p_k, k=1,2,\cdots$ ，若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ **绝对**收敛，则称此级数为随机变量 X 的**数学期望**，记为 $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$.

如在上面的例子中，若 X 表西瓜的重量，则 X 的概率分布为

X	2.5	3	3.5
p_k	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$

由数学期望的定义知

$$E(X)=\sum_{k=1}^{3}x_k p_k=2.5\times\frac{3}{12}+3\times\frac{4}{12}+3.5\times\frac{5}{12}(Kg),$$

实际上，这就是西瓜的平均重量。

0-1分布的数学期望

例4.2 设$X \sim B(1,p)$,则$E(X)=p$.

证明：由于$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$,

于是$E(X)=0 \times (1-p)+1 \times p=p$.

泊松分布的期望

例4.3　　设X ~ P(λ)，则 **EX = λ**。

$$\because\ p_k = P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k = 0,1,2,\cdots$$

$$\therefore EX = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\underline{\underline{m=k-1}}\ \lambda e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda.$$

注意：$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$

连续型随机变量的数学期望

定义 4.2若连续型随机变量**X**的密度为**f(x)**, 如果广义积分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛，则称此积分为随机变量**X**的数学期望,记为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Γ分布的数学期望

例4.4 设X~Γ(α,β)，则$\mathbf{EX}=\dfrac{\alpha}{\beta}$.

解：X的密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\ f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx$$

$$=\frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{+\infty}(\beta x)^{\alpha}e^{-\beta x}d(\beta x)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

指数分布的期望 设X~e(λ)，则$\mathbf{EX}=\dfrac{1}{\lambda}$.

关于数学期望的说明

（1）随机变量的数学期望刻画的是该随机变量取值（或变化）的**平均值**。

（2）表示数学期望的级数或积分绝对收敛。

（3）并非所有的随机变量都存在数学期望。

随机变量函数的数学期望

一个 随机变量 的数学期望由其分布完全决定，那么随机变量$Y=g(X)$ 的数学期望也可由Y 的 分布完全决定。而 Y 的分布可能很难求得。下面的定理表明我们可以不必求Y 的分布而直接求Y 的数学期望：

随机变量函数的数学期望

定理4.1 设X为随机变量，$Y=g(X)$。

1）当X离散并有分布律 $P(X=x_k)=p_k, k=1,2,\cdots$，若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$ 绝对收敛，则

$$E(Y)=E(g(X))=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k;$$

2）当 X 连续并有密度函数 $f(x)$，若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 绝对收敛，则

$$E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx。$$

证明：略。

以上的定理可以推广到多维情形，其中二维情形为：

定理 4.2 设（X, Y）为二维随机变量， $Z = g(X, Y)$ 。

(1) 设(X,Y)是离散型随机变量且有分布律

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), i, j = 1, 2, \cdots$$

当级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}$ 绝对收敛时，

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}.$$

2）若（X,Y）连续并有联合密度函数 $f(x, y)$，**且广义积分** $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) g(x, y) dxdy$ **绝对收敛，则**

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) g(x, y) dxdy。$$

例 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律见右，求

$E(X), E(X^2), E[(X+Y)^2]$。

$Y \backslash X$	-1	1	2
-1	0.2	0.1	0.3
0	0.2	0.1	0.1

解： 由（X,Y）的联合分布律有：

X	-1	1	2
$p_{i\cdot}$	0.4	0.2	0.4

于是有

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i p_{i\cdot}=(-1)\times 0.4+1\times 0.2+2\times 0.4=0.6;$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_{i\cdot}=(-1)^2\times 0.4+1^2\times 0.2+2^2\times 0.4=2.2;$$

(X,Y)	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$(1,-1)$	$(1,0)$	$(2,-1)$	$(2,0)$
p_{ij}	0.2	0.2	0.1	0.1	0.3	0.1

$$\begin{aligned} E[(X+Y)^2] &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}(x_i+y_j)^2 p_{ij} \\ &= (-1-1)^2\times 0.2+(-1+0)^2\times 0.2+(1-1)^2\times 0.1 \\ &\quad +(1+0)^2\times 0.1+(2-1)^2\times 0.3+(2+0)^2\times 0.1 = 1.8。\end{aligned}$$

例4.6某车站开往甲地的班车每小时**10**分,**40**分发车,一乘客因不知车站发车的时间,在每小时的任意时刻都随机到达车站,求乘客的平均等待时间.

解：设乘客到达车站的时间为**X**,等车时间为**Y**,则**X~U[0,60]**,且

$$Y=g(X)=\begin{cases}10-X, & 0\le X\le 10\\ 40-X, & 10<X\le 40\\ 60-X+10, & 40<X\le 60\end{cases}$$

于是,乘客的平均等待时间**E(Y)**为:

$$EY=E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\ f(x)dx$$

$$=\int_0^{10}(10-x)\frac{1}{60}dx+\int_{10}^{40}(40-x)\frac{1}{60}dx+$$

$$\int_{40}^{60}(70-x)\frac{1}{60}dx=15$$

例4.7两元件并联构成系统,其元件寿命X与Y独立同分布于e(0.5),求系统的平均寿命.

解:X与Y独立，于是(X,Y)的联合密度函数等于X与Y的密度之积

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x+y)}, & x,y>0\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

令Z表示系统寿命,则 $Z=g(X,Y)=\max(X,Y)$

$$EZ=E\max(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\max(x,y)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{x}x\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x+y)}dydx+\int_0^{\infty}\int_x^{\infty}y\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x+y)}dydx$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}dx+\int_0^{\infty}e^{-x}dx=2\Gamma(2)+\Gamma(1)=3$$

数学期望的性质

性质1：若 C 为常量，则 $E(C)=C$ 。

以下设所涉及的随机变量的数学期望均存在。

性质2：对任意常数a, b，有 $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$。

证明：仅证明(X,Y)为连续型的情形。设其联合密度函数为 $f(x,y)$，则

$$E(aX+bY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(ax+by)f(x,y)dxdy$$

$$=a\int_{-\infty}^{+\infty}x[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy]dx+b\int_{-\infty}^{+\infty}y[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx]dy$$

$$=a\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx+b\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=aE(X)+bE(Y).$$

性质3：设 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是n个随机变量，$c_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是n个常数，则 $E(\sum_{i=1}^{n}c_iX_i)=\sum_{i=1}^{n}c_iE(X_i)$。

性质4：若 X 与 Y 相互独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$

证明：就 X 与 Y 为离散型情形加以证明。 若（X,Y）的联合分布律 $P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots$，

因X与Y相互独立，所以 $p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$，则

$$E(XY)=\sum_{i,j}x_iy_jp_{ij}=\sum_i\sum_j x_iy_jp_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

$$=(\sum_i x_ip_{i\cdot})(\sum_j y_jp_{\cdot j})=E(X)E(Y)。$$

一般地：设$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是n个相互独立的随机变量，则 $E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\prod_{i=1}^{n}E(X_i)$ 。

例4.9 设 X~ B(n, p),则 EX = np

解：设 X表示n次独立重复试验中事件A发生的次数，

$$X_i = \begin{cases} 1, & 第i次试验中A发生; \\ 0, & 第i次试验中A不发生. \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$那么X_i \sim B(1, p),\ 且X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$$

$$由于EX_i = p, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$故EX = \sum_{i=1}^{n} EX_i = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

例：设 $X : e(2), Y : e(4)$。（1）求 $Z = 2X + 3Y^2$ 的数学期望；（2）若X与Y相互独立，求 $W = 3XY$ 的数学期望。

解：显然 $E(X) = \frac{1}{2}, E(Y) = \frac{1}{4},\quad E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y) dy$

$$= \int_0^{+\infty} y^2 4e^{-4y} dy = \frac{1}{16}\int_0^{+\infty} (4y)^2 e^{-4y} d(4y) = \frac{1}{16}\Gamma(3) = \frac{1}{8}。$$

从而

（1）$E(Z) = E(2X - 3Y^2) = 2E(X) - 3E(Y^2) = 2\times\frac{1}{2} - 3\times\frac{1}{8} = \frac{5}{8}$;

（2）因X与Y相互独立，故

$$E(W) = E(3XY) = 3E(X)E(Y) = 3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{3}{8}。$$

例：设随机变量 $X : H(n,m,N)$，求 $E(X)$ 。

解：设一袋中有N个小球随机变量 其中有m个红的。不放回地从中抽取n次，每次一球，X表“取得红球的个数”，另设 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $X_i=\begin{cases}1, & 第i次取得红球\\ 0, & 第i次未取得红球\end{cases}$

则 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i : H(n,m,N)$，由古典概型知

$$P(X_i=1)=\frac{P_{N-1}^{i-1}C_m^1}{P_N^i}=\frac{m}{N},\quad i.e.\ X_i : \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-\dfrac{m}{N} & \dfrac{m}{N}\end{bmatrix}。$$

因此 $E(X_i)=0\times(1-\frac{m}{N})+1\times\frac{m}{N}=\frac{m}{N}$。

所以 $E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{mn}{N}.$