主要内容

- 10.1 图的基本概念
- 10.2 通路与回路
- 10.3 图的连通性
- 10.4 图的矩阵表示

10.3 图的连通性

1. 无向连通图

（1）基本概念

定义(连通性) 设u, v为无向图G＝<V, E>中的两个结点，若u, v之间存在道路，则称结点u, v是连通的，记为u～v。对任意结点u，规定u～u。

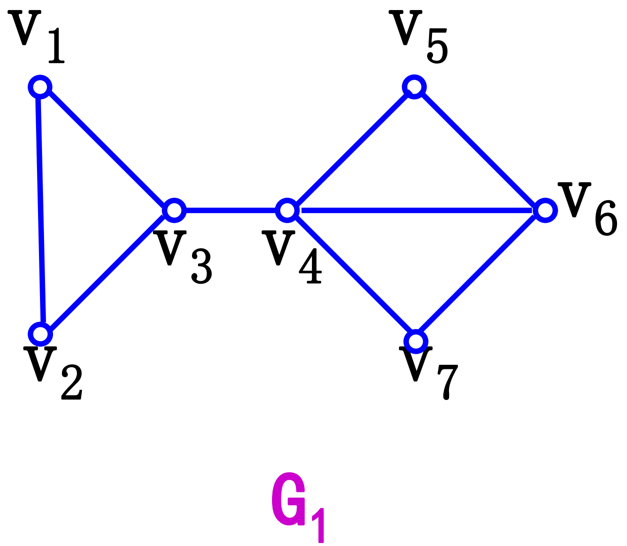
定义（连通图） 在无向图G中，如果任意两结点是连通的，则称图G是连通的。

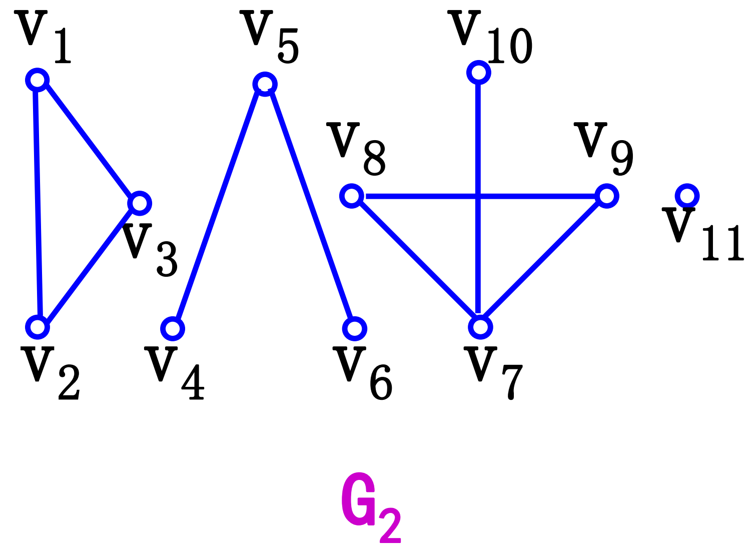
定义（连通分图） 如果G的子图G'是连通的，没有包含G'的更大的子图G''是连通的，则称G'是G的连通分图（分支）。

分支个数记为ω(G)。

10.3 图的连通性

例12





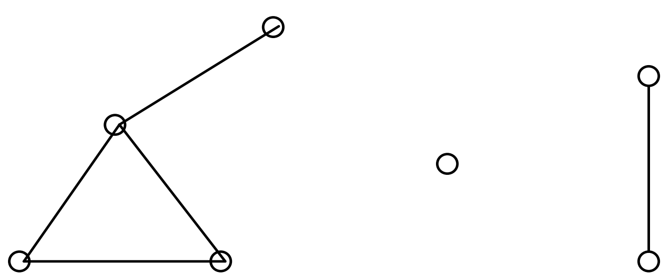
G_1是连通图，$\omega(G_1)=1$。

G_2是非连通图，$\omega(G_2)=4$。

10.3 图的连通性

- 无向图中结点之间的连通关系是等价关系。

我们可以利用连通关系对G的结点集进行一个划分$\{V_1, V_2, \cdots, V_k\}$（显然，$V_i$是一个等价类），使得G中的任意两个结点u和v连通当且仅当u和v同属于一个V_i($1 \leqslant i \leqslant k$)。则点诱导子图G（$V_i$）（$1 \leqslant i \leqslant k$）是G的极大连通子图，即为G的支（分图）。



G

图G中，结点集合被划分为3个块，每一块对应为一个极大连通子图，即连通分图，G的分支数$\omega(G)=3$。

10.3 图的连通性

（2）点割集与边割集

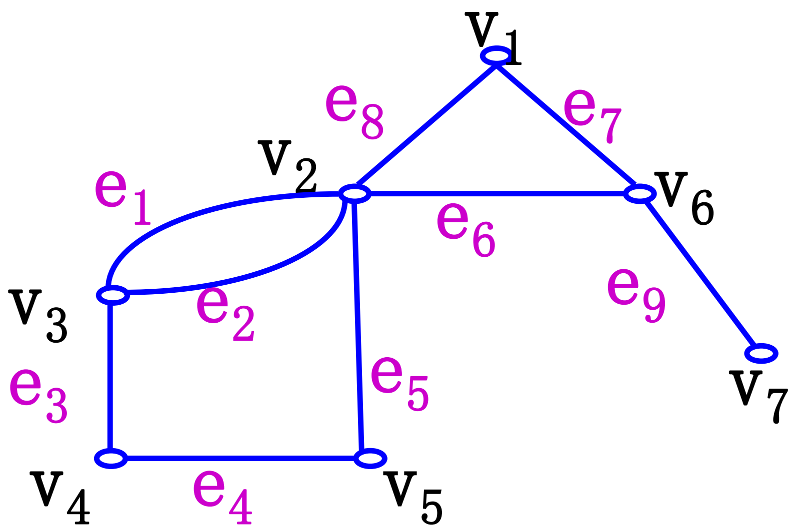
定义　设$G=\langle V,E\rangle$是连通图。若存在结点子集$S\subseteq V$，使 $\omega(G-S)>1$，则称S为G的一个点割集（割集）；

而删除S的任何真子集S′（即 $S'\subset S$）后，$\omega(G-S')=1$，则称S为G的一个基本割集 。

特别地，若点割集中只有一个结点v，则称v为割点。

10.3 图的连通性

例13



点割集：$\{v_3, v_5\}$、$\{v_2\}$、$\{v_6\}$、$\{v_2, v_4\}$、$\{v_2, v_3, v_5\}$…；

基本割集：$\{v_3, v_5\}$、$\{v_2\}$、$\{v_6\}$；

割点：　　v_2 、v_6。

10.3 图的连通性

定理：在非平凡连通图G中，结点v为G的割点充分必要条件存在结点u和w，使u到w的每一条道路都包含v结点。

证明：“⇒” 设v是非平凡连通图G的一个割点，由定义 $\omega(G-\{v\})>1$。不妨设$G_1=(V_1, E_1)$和$G_2=(V_2, E_2)$是$G-\{v\}$中任意两个分支。

$\forall u\in V_1$，$w\in V_2$，则u，w在G中连通，而在$G-\{v\}$中不连通，

∴ G中所有u到w的道路必经过结点v。

“⇐”

设G中存在结点u和w，使u到w的每一条道路都包含v结点，则u和w在$G-\{v\}$中必然不再连通。

∴ v是G的一个割点。

10.3 图的连通性

- 边割集

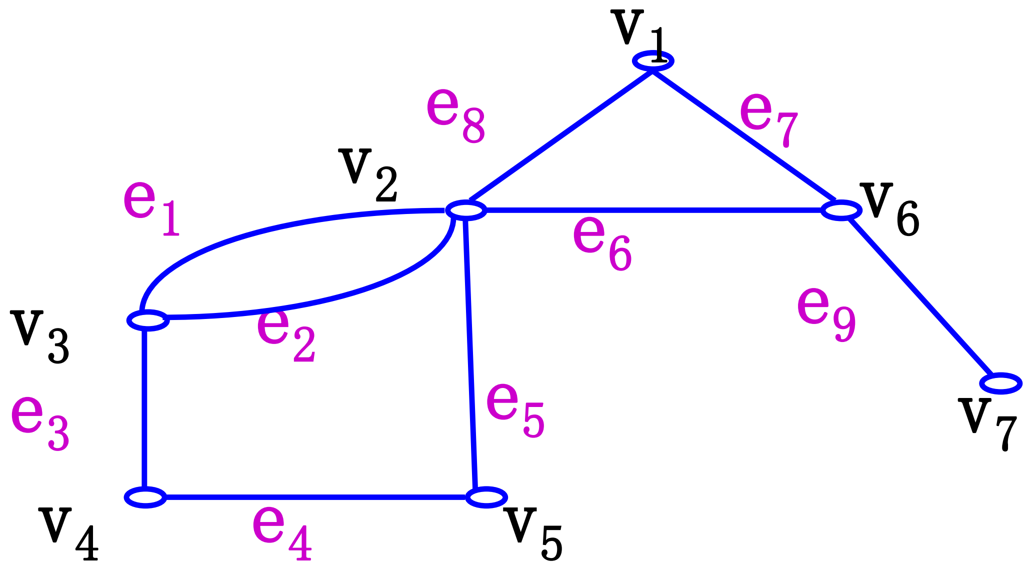
定义 设$G=\langle V,E\rangle$是连通图。若存在$E_1 \subseteq E$，使$\omega(G-E_1)>1$，则称E_1为G的一个边割集；

而对任何E'（即$E' \subset E_1$），都有$\omega(G-E')=1$，则称E_1为G的一个基本边割集 。

特别地，若边割集中只有一条边e，则称e为割边。

10.3 图的连通性

例14



- 边割集：$\{e_3, e_4\}$、$\{e_4, e_5\}$、$\{e_1, e_2, e_4\}$、$\{e_6, e_7, e_9\}$、$\{e_9\}$、$\{e_1, e_2, e_5, e_6, e_8\}$……；
- 基本边割集：$\{e_3, e_4\}$、$\{e_4, e_5\}$、$\{e_1, e_2, e_4\}$、$\{e_9\}$ ……；
- 割边：e_9。

10.3 图的连通性

定理 在非平凡连通图G中，边e为G的割边的充分必要条件是e不包含于G的任何圈中。

证明：课后练习

10.3 图的连通性

点连通度越大，连通性越好。

（3）连通度

1）设G为无向连通图且非完全图，称κ(G)＝min{|V′||V′为G的点割集}为G的点连通度，简称连通度。

规定：完全图$K_n(n \geq 1)$，点连通度$\kappa(K_n) = n - 1$；

非连通图的点连通度$\kappa(G) = 0$。

若κ(G)≥k，则称G为k-连通图（k为非负整数）。

2）设G无向图连通图，称λ(G)＝min{|E′||E′为G的边割集}为G的边连通度。

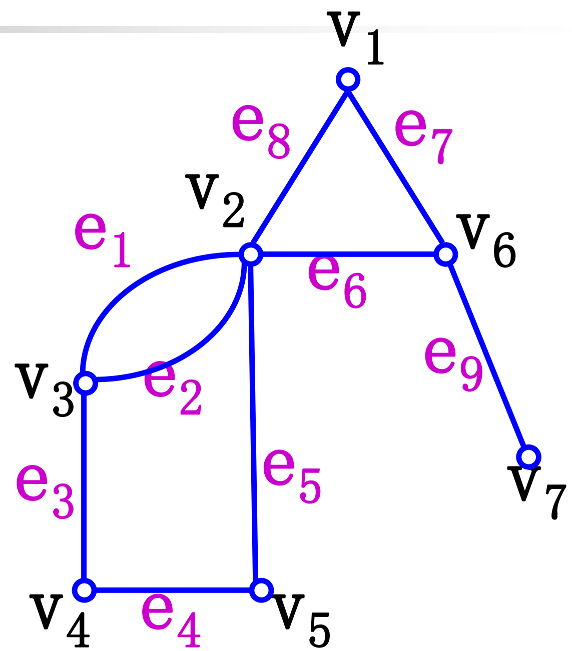
规定：非连通图的边连通度$\lambda(G) = 0$。

若λ(G)≥k，则称G为k边-连通图（k为非负整数）。

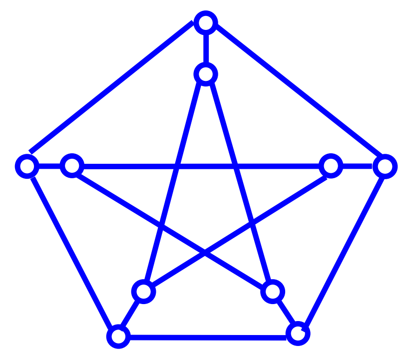
10.3 图的连通性

例15

- 右图所示图的点连通度为1，它是1-连通图，但不是2-连通图；它的边连通度为1，它是1边-连通图，但不是2边-连通图。



- 彼得森图的点连通度为3，它是1-连通图、2-连通图、3-连通图，但不是4-连通图；它的边连通度为3，它是1边-连通图、2边-连通图、3边-连通图，但不是4边-连通图。



10.3 图的连通性

- 连通度的上限

定理 对任意无向图G＝<V, E>，均有下面不等式成立：

$$\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$$

其中，$\kappa(G)$、$\lambda(G)$和$\delta(G)$分别为G的点连通度、边连通度和结点的最小度数。

推论 对任意无向图G＝<V, E>，若G是k-连通图，则G必为k边-连通图。

10.3 图的连通性

- 连通度的应用举例

问题：将n个计算机连成一个通信网络以共享资源，如果要以最小的代价保证在故障结点小于k个的条件下，所有计算机能保持互联，网络应该如何连接？

建立数学模型的思路：

建立一个n个结点的，边最少的k-连通的图。

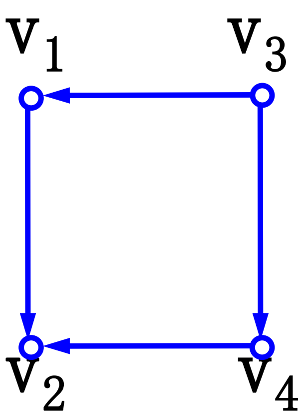
$$k \le \kappa(G) \le \delta$$

10.3 图的连通性

2. 有向连通图

定义(可达性) 设u, v为有向图G＝〈V, E〉中的两个结点，若存在从结点u到结点v的道路，则称从结点u到结点v是可达的，记为u→v。对任意结点u，规定u→u。

有向图结点之间的可达关系具有自反性和传递性，但一般说来，可达关系没有对称性。例如右图中v_3到v_2可达，但v_2到v_3不可达。因此，可达关系不是等价关系。



10.3 图的连通性

定义(相互可达) 设u, v为有向图G＝<V, E>中的两个结点，若存在从结点u到结点v的道路，同时，存在从结点v到结点u的道路，则称从结点u和v是相互可达的。对任意结点u，规定u和自身是相互可达的 。

显然，相互可达关系是一个等价关系。

10.3 图的连通性

定义（有向连通图） 在有向图G中，

(1) 如果在任意两个结点偶对中，至少从一个结点到另一个结点是可达的，则称图G是**单向连通的**；

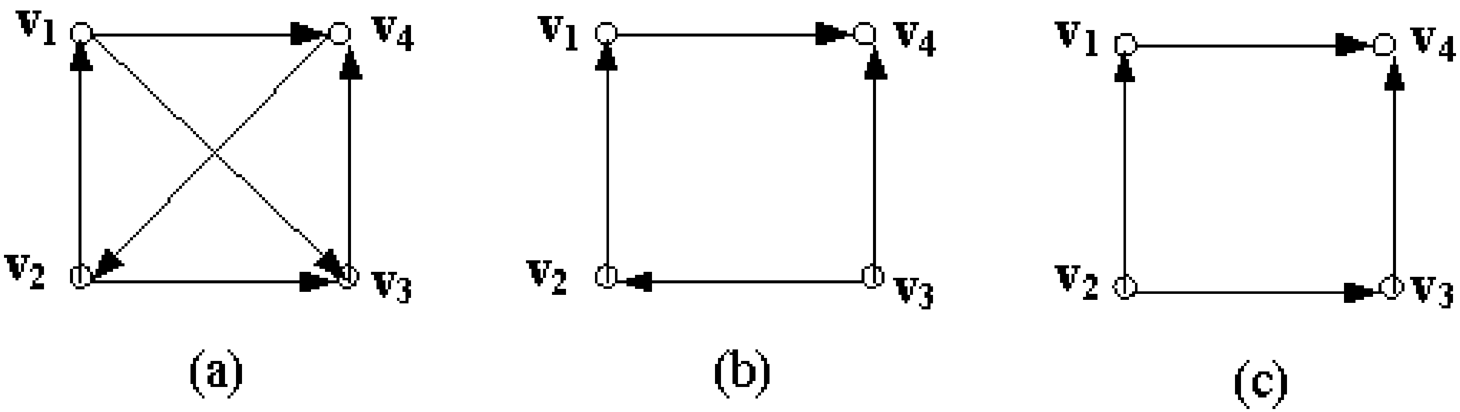
(2) 如果在任意两个结点偶对中，两结点都相互可达，则称图G是**强连通的**；

(3) 如果它的基图是连通的，则称图G是**弱连通的**。

一个有向图的基图是当去掉边的方向后得到的无向图（可含有平行边和环）。

10.3 图的连通性

例16



(a) 是强连通图（当然它也是单向连通图和弱连通图）；

(b) 是单向连通图（当然它也是弱连通图）；

(c) 是弱连通图。

10.3 图的连通性

定理 一个有向图G是强连通图当且仅当G中有一条包含每一个结点的有向闭道路。

证明：

“$\Rightarrow$”如G是强连通图，则任意两个结点之间都是相互可达的，设G=<V，E>，V={v_1, v_2, v_3, …, v_n}，则v_1到v_2可达，v_2到v_3可达，v_3到v_4可达，……，v_{n-1}到v_n可达，v_n到v_1可达，由此可得到一条闭道路(v_1，v_2，v_3，……，v_n，v_1)，它包含每个结点。

“$\Leftarrow$”如G中有一条包含每一个结点的有向闭道路，则G中任何两个结点沿着这条道路是相互可达的，故G为强连通图。

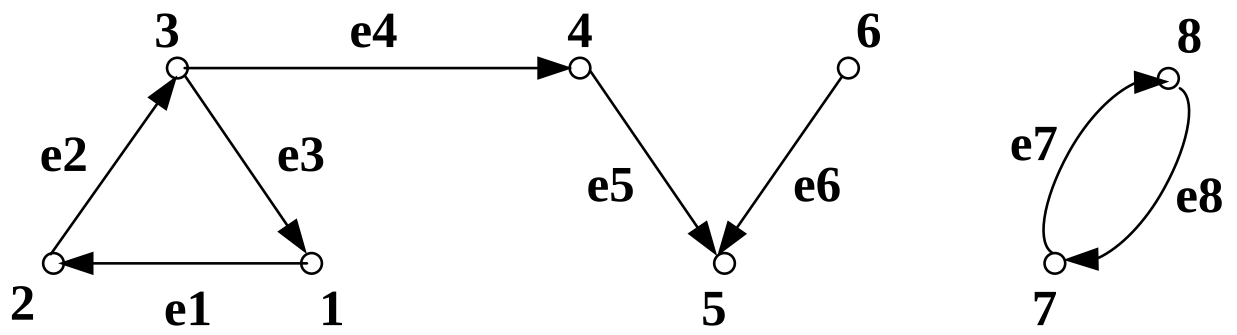
10.3 图的连通性

定义（有向连通分图）

在有向图G=(V，E)中，G′是G的子图，若G′是强连通的（或单向连通的，或弱连通的），没有包含G′的更大子图G″是强连通的（或单向连通的，或弱连通的），则称G′是G的强分图（或单向分图，或弱分图）。

10.3 图的连通性

例17



强分图：

({1, 2, 3},{e_1, e_2, e_3}), ({4}, Ø), ({5}, Ø), ({6}, Ø), ({7, 8}, {e_7, e_8})

单向分图：

({1, 2, 3, 4, 5}, {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5}), ({5, 6}, {e_6}), ({7, 8}, {e_7, e_8})

弱分图：

({1, 2, 3, 4, 5, 6}, {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6}), ({7, 8}, {e_7, e_8})

10.3 图的连通性

- 小结

  在有向图G=(V, E)中，

① 每个结点必然位于且仅位于一个强分图中；

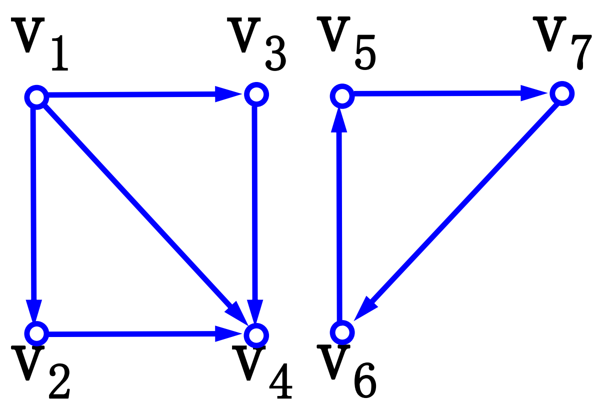
② 每个结点和每条边至少位于一个单向分图中；

③ 每个结点和每条边恰好位于一个弱分图中；

④ 等价关系对应的关系图（有向图），其任意一个等价类中含有的结点恰好同在一个强分图中，等价类的个数等于它关系图的强分图个数。

10.3 图的连通性

例18



G

在图G中，

- 由$\{v_1\}$，$\{v_2\}$，$\{v_3\}$，$\{v_4\}$和$\{v_5, v_6, v_7\}$导出的子图都是强分图；
- 由$\{v_1, v_2, v_4\}$，$\{v_1, v_3, v_4\}$和$\{v_5, v_6, v_7\}$导出的子图都是单向分图；
- 由$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$和$\{v_5, v_6, v_7\}$导出的子图都是弱分图。

作业

- 习题十　15、19、23、26

主要内容

- 10.1 图的基本概念
- 10.2 通路与回路
- 10.3 图的连通性
- 10.4 图的矩阵表示

10.4 图的矩阵表示

不含平行边的图。

1. 邻接矩阵

定义 设G=(V, E)是一个有向线图，结点集为$V=\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$，构造矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中

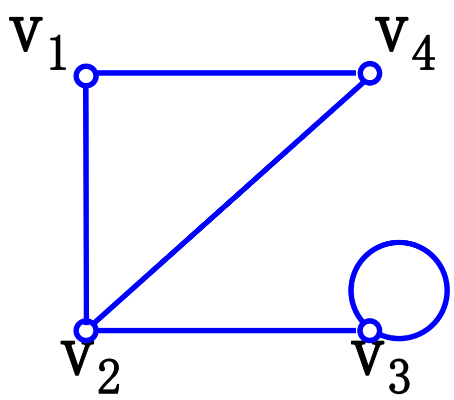
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \langle v_i, v_j \rangle \in E \\ 0 & \langle v_i, v_j \rangle \notin E \end{cases}$$

则称A为有向图G的**邻接矩阵**。

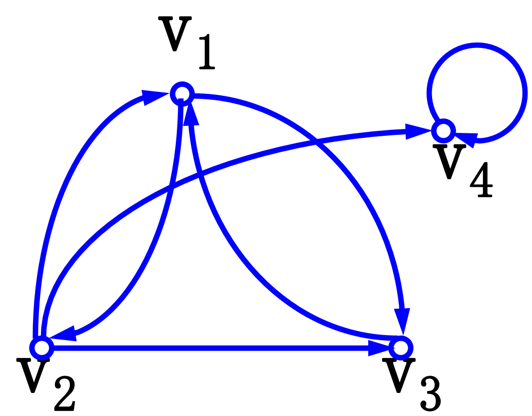
- 邻接矩阵是一个布尔矩阵。
- 定义也适用于无向线图。无向图的邻接矩阵是**对称的**。
- 而有向图的邻接矩阵不一定对称。

10.4 图的矩阵表示

例19



G_1



G_2

邻接矩阵：

$$A(G_1)=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&0\\1&1&0&0\end{pmatrix},\qquad A(G_2)=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}。$$

当改变图的结点编号的顺序时，可得到图的不同的邻接矩阵，如：v_2, v_3, v_1, v_4。

但这些邻接矩阵相互可以变换，且作出的有向图同构。

$$A'(G_2)=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&0\\1&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

10.4 图的矩阵表示

- 邻接矩阵的性质

1) 零图的邻接矩阵的元素全为零，并称它为零矩阵。
2) 图的每一结点都有自回路而再无其他边时，则该图的邻接矩阵是单位矩阵。
3) 简单图的邻接矩阵主对角元全为零。
4) 设无向图 $G=\langle V,E\rangle$， $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 的邻接矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则

$$\deg(v_i)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}+a_{ii}$$

10.4 图的矩阵表示

5) 设有向图G＝⟨V, E⟩，V＝{$v_1, v_2, \cdots, v_n$}的邻接矩阵A＝$(a_{ij})_{n\times n}$，则

$$deg^+(v_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ ,\quad deg^-(v_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}$$

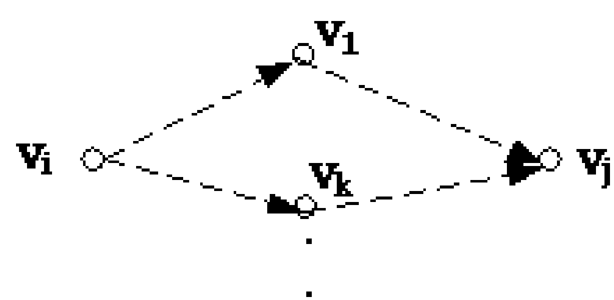
6) 设有向图G＝⟨V, E⟩，V＝{$v_1, v_2, \cdots, v_n$}的邻接矩阵A＝$(a_{ij})_{n\times n}$，则a_{ij}表示从结点v_i到结点v_j长度为1的有向道路的数目。

10.4 图的矩阵表示

2. 邻接矩阵与道路的关系

设A是有向图G=(V, E)的邻接矩阵，记$A^2=(a_{ij}^{(2)})_{n\times n}$，其中，

$$a_{ij}^{(2)}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}$$



若 $a_{ik}a_{kj}=1 \Leftrightarrow a_{ik}=a_{kj}=1$

存在一条长度为2的有向道路$P=v_iv_kv_j$。

则$a_{ij}^{(2)}=\sum a_{ik}a_{kj}$ 表示v_i到v_j长度为2的不同有向道路的总数。(i=j时，为回路)

同理， $A^3=(a_{ij}^{(3)})_{n\times n}$，

其中 $a_{ij}^{(3)}=\sum a_{ik}^{(2)}a_{kj}$ 表示v_i到v_j长度为3的有向道路的总数。(i=j时，为回路)

10.4 图的矩阵表示

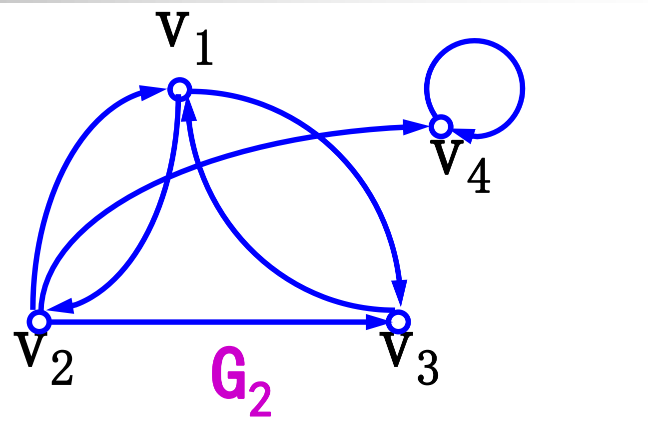
定理 设G=(V, E)是一个n阶的有向线图，A是G的邻接矩阵。令A^k=（$a_{ij}^{(k)}$）$_{n\times n}$，(k≥1)，则$a_{ij}^{(k)}$表示G中从v_i到v_j长度为k的有向道路的数目。

证明：归纳证明法

10.4 图的矩阵表示

例20

$$A(G_2)=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$



$$(A(G_2))^2=\begin{pmatrix}2&0&1&1\\1&1&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}a_{ij}^{(2)}=11 \qquad \sum_{i=1}^{4}a_{ii}^{(2)}=5$$

$$(A(G_2))^3=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&2&2\\2&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}a_{ij}^{(3)}=18 \qquad \sum_{i=1}^{4}a_{ii}^{(3)}=4$$

G_2中长度为2的通路（含回路）总数为11，其中5条为回路。

G_2中长度为3的通路（含回路）总数为18，其中4条为回路。

10.4 图的矩阵表示

推论1 设A是简单有向图G的邻接矩阵，令$A^k=(a_{ij}^{(k)})_{n\times n}$，$(k\geqslant 1)$，使$a_{ij}^{(k)}>0$的最小的k值是$v_i$到$v_j$的距离$d(v_i, v_j)$。

推论2 设A是n阶简单有向图G的邻接矩阵，$A^k=(a_{ij}^{(k)})_{n\times n}$，则对$1\leqslant k\leqslant n-1$，$a_{ij}^{(k)}=0$（$i\neq j$）恒成立，当且仅当从$v_i$到$v_j$是不可达的。

由前面定理知，如果两结点间存在道路，必存在一条长度不超过**n-1**的基本道路。

推论3 设A是n阶简单有向图G的邻接矩阵，$A^k=(a_{ij}^{(k)})_{n\times n}$，则存在t，s使$a_{ij}^{(t)}>0$ 和$a_{ji}^{(s)}>0$，当且仅当G中有一条包含v_i和v_j的有向回路。

- 以上定理及其推论对于无向图同样成立。

$A = (a_{ij})_{n\times n}$

$A^2 = (a_{ij}^{(2)})_{n\times n}$

$A^3 = (a_{ij}^{(3)})_{n\times n}$

…

$A^k = (a_{ij}^{(k)})_{n\times n}$

由前面定理知，n阶简单有向图中，基本路径长度不超过n-1，基本回路长度不超过n。

令 $B_k = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^k = \left(b_{ij}^{(k)}\right)_{n\times n}\ ,(k \geq 1)$

$b_{ij}^{(k)}$表示v_i到v_j长度不超过k的有向道路的总数目。

因此，若研究是否存在一条从v_i到v_j的任意长度的道路，须求出$A^+ = \sum_{k=1}^{\infty} A^k$。但实际上只需考查$B_{n-1}\ (i \neq j)$ 或 $B_n(i = j)$。

此时，$b_{ij} \neq 0$：$i \neq j$时表示从v_i到v_j是可达的；

$i = j$时表示经过v_i的回路存在。

$b_{ij} = 0$：$i \neq j$时表示从v_i到v_j是不可达的；

$i = j$时表示不存在经过v_i的回路。

10.4 图的矩阵表示

3. 可达性矩阵

定义 设$G = \langle V, E\rangle$是一个n阶的有向线图，$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，矩阵$P = (p_{ij})_{n\times n}$定义为：

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{从}v_i\text{到}v_j\text{存在非零的有向道路（可达）} \\ 0 & \text{从}v_i\text{到}v_j\text{不存在非零的有向道路（不可达）} \end{cases}$$

称P是图G的可达性矩阵。

无向图的可达性矩阵是对称的，而有向图的可达性矩阵则不一定对称。

10.4 图的矩阵表示

- 可达性矩阵的求法

方法1：由矩阵$\boldsymbol{B_n = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^n = \left(b_{ij}{}^{(n)}\right)_{n\times n}}$可知，

如$\boldsymbol{b_{ij}{}^{(n)} = 0}$，则表明从结点$\boldsymbol{v_i}$到$\boldsymbol{v_j}$是不可达的；

如$\boldsymbol{b_{ij}{}^{(n)} \neq 0}$，则表明从结点$\boldsymbol{v_i}$到$\boldsymbol{v_j}$至少有长度k(1≤k≤n)的通路，即此时从结点$\boldsymbol{v_i}$到$\boldsymbol{v_j}$是可达的。

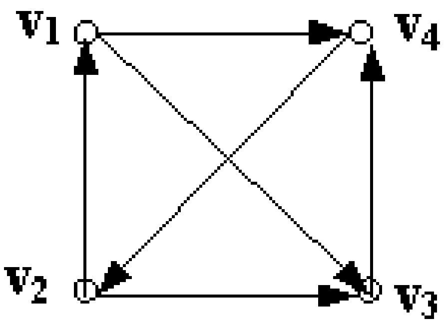
所以有：

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & b_{ij}^{(n)} > 0 \\ 0 & b_{ij}^{(n)} = 0 \end{cases}$$

方法2：如果将邻接矩阵看成关系矩阵A，则求可达性矩阵就相当于求A的传递闭包。因此可采用Warshall算法来求可达性矩阵P。

10.4 图的矩阵表示

- **可达矩阵判断有向图的连通性**



例21 利用可达性矩阵，判断右图的连通性。

解：相邻矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix},\quad A+A^2+A^3+A^4=\begin{bmatrix}2&2&4&4\\3&3&4&3\\1&1&2&4\\1&3&2&3\end{bmatrix}$$

可达性矩阵：$P=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$

✓ 有向图的可达性矩阵中元素全为1⟺G为强连通图。

10.4 图的矩阵表示

- **可达矩阵构造强分图**

设G＝<V, E>为有向图，$P=(p_{ij})_{n\times n}$是图G的可达性矩阵，P^T是P的转置矩阵，定义P与P^T的布尔交$P\odot P^T=(g_{ij})_{n\times n}$如下：

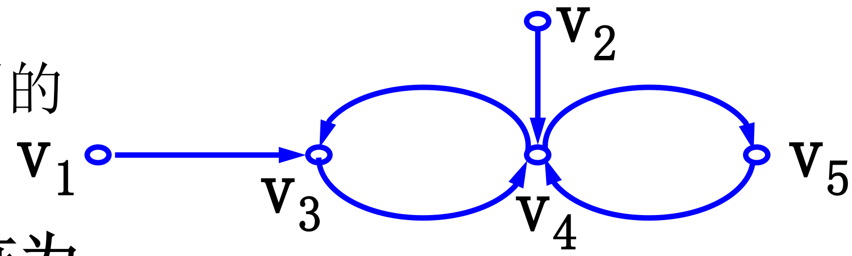
$$g_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ p_{ij}\wedge p_{ij}^{(T)} & i\neq j,\end{cases}$$

主对角线上置1

如果$P\odot P^T$的第i行的非零元素在第j_1，j_2，…，j_k列，则结点$v_i, v_{j_1}, v_{j_2}, \cdots, v_{j_k}$在同一个强分图中，即点诱导子图G（$\{v_i, v_{j_1}, v_{j_2}, \cdots, v_{j_k}\}$）就是G的一个强分图。

10.4 图的矩阵表示

例22 利用可达性矩阵求右图的所有强分图。



解 该图的邻接和可达性矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\qquad P=\begin{bmatrix}0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}\qquad P^T=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$P\odot P^T=\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&0&0&0\\0&\boxed{1}&0&0&0\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}$$

结点自身相互可达。

矩阵上看：$P\odot P^T=(g_{ij})_{n\times n}$中，元素为“1”的方块对应一个强分图。

v_1在一个强分图中，v_2在一个强分图中，v_3, v_4和v_5在一个强分图中，因此该图的所有强分图分别为结点子集$\{v_1\}$，$\{v_2\}$，$\{v_3, v_4, v_5\}$导出的子图。

10.4 图的矩阵表示

4. 关联矩阵

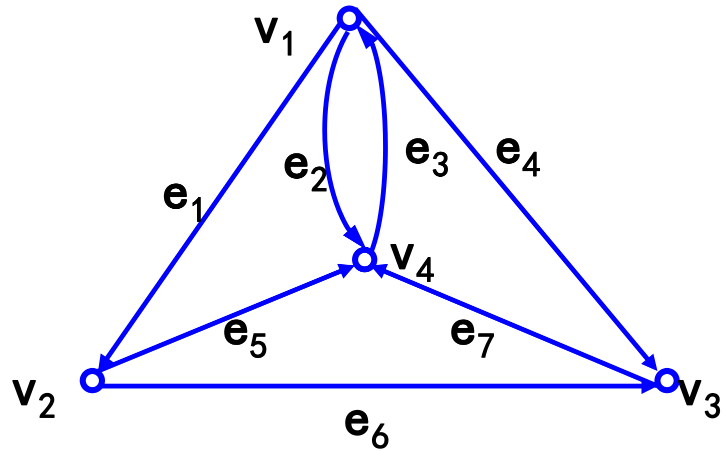
定义 设$G=(V, E)$是一个无环的，至少有一条有向边的有向图，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，构造矩阵$M=(m_{ij})_{n\times m}$，其中

$$m_{ij}=\begin{cases} 1 & v_i\text{ 是}e_j\text{的始点} \\ -1 & v_i\text{ 是}e_j\text{的终点} \\ 0 & v_i\text{ 与}e_j\text{不关联} \end{cases}$$

称M是G的关联矩阵。

10.4 图的矩阵表示

例23



上图的关联矩阵如下：

$$
M = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\
0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

10.4 图的矩阵表示

- 关联矩阵的性质

（1）第i行（$1 \leqslant i \leqslant n$）中，1的个数是$V_i$的出度，-1的个数是$V_i$的入度。

（2）每列恰有一个1和一个-1。

（3）若第i行全为0，则V_i为孤立结点。

（4）若有向图G的结点和边在一种编号（定序）下的关联矩阵是M_1，在另一种编号下的关联矩阵是M_2，则必存在置换阵P和Q使$M_1=PM_2Q$。

（补充）定理

设G是n阶连通无环的有向图，其关联矩阵是M，则M的秩是$n-1$。

可扩展得到下面结论。

证明：支数为k，阶数为n的无环图G，其关联矩阵的秩是n−k.

证明：将各支结点和边集中编号后，G的关联矩阵

$$M=\begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & M_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\gamma(M) &= \gamma(M_1)+\gamma(M_2)+\cdots+\gamma(M_k) \\ &= (n_1-1)+(n_2-1)+\cdots+(n_k-1) \\ &= n-k\end{aligned}$$

作业

- ✓ 习题十　**30**