§ 5.3 二维正态分布

定义5.3 若二维连续型随机变量（X,Y）的密度函数为

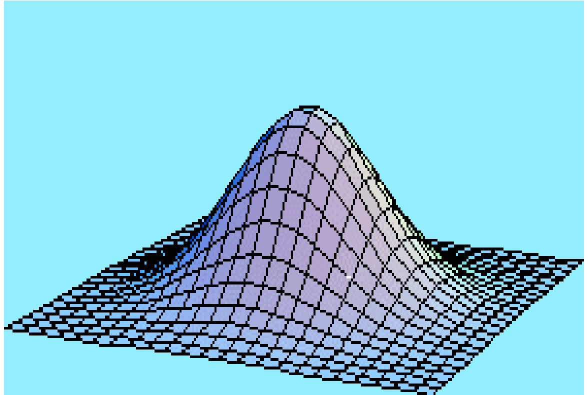
$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-u_1)^2}{\sigma_1{}^2}+\frac{(y-u_2)^2}{\sigma_2{}^2}-2r\frac{(x-u_1)(y-u_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]},$$

$-\infty < x, y < +\infty,\qquad (where\quad u_1,u_2\in R,\sigma_1,\sigma_2>0,|r|<1),$

则称（X,Y）服从参数为 $u_1,u_2,\sigma_1{}^2,\sigma_2{}^2,r$ 的**二维正态分布分布**，记为

(X,Y)： $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1{}^2,\sigma_2{}^2;r)$。

二维正态分布密度函数图像



二维正态分布的边缘分布

定理5.6 设$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;r)$,则

$$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\ Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2).$$

证明： 记$t=\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}$,并作变量代换$s=\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}$,则

$dy=\sigma_2 ds$，从而有

$$-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2r\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]$$

$$=-\frac{1}{2(1-r^2)}(t^2+s^2-2rst)=-\frac{(s-rt)^2}{2(1-r^2)}-\frac{t^2}{2}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{(s-rt)^2}{2(1-r^2)}-\frac{t^2}{2}}ds$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{(s-rt)^2}{2(1-r^2)}}ds$$

$N(rt,1-r^2)$的密度函数

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-u_1)^2}{2\sigma_1^2}},-\infty<x<+\infty,$$

所以 X : $N(\mu_1,\sigma_1^{\ 2})$. 同理可证 Y : $N(\mu_2,\sigma_2^{\ 2})$.

例：设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(u_1,u_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,r)$，求(X,Y)的协方差矩阵以及相关系数。

解：因 $(X,Y)\sim N(u_1,u_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,r)$ 故 $X\sim N(u_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(u_2,\sigma_2^2)$，从而 $E(X)=u_1$，$E(Y)=u_2$，$D(X)=\sigma_1^2$，

$D(Y)=\sigma_2^2$;

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(XY)-u_1u_2$$
$$=E[(X-u_1)(Y-u_2)]$$

令 $\mu=\frac{x-u_1}{\sigma_1}$，$\nu=\frac{y-u_2}{\sigma_2}$ 则 $d\mu=\frac{dx}{\sigma_1}$，$d\nu=\frac{dy}{\sigma_2}$.

$$Cov(X,Y)$$
$$= E[(X-u_1)(Y-u_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-u_1)(y-u_2)f(x,y)dxdy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu\nu\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{\mu^2-2r\mu\nu+\nu^2}{2(1-r^2)}}d\mu d\nu$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}\mu e^{-\frac{\mu^2}{2}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\nu}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{(\nu-r\mu)^2}{2(1-r^2)}}d\nu\right]d\mu$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}\mu e^{-\frac{\mu^2}{2}}r\mu d\mu = \frac{2r\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\mu^2 e^{-\frac{\mu^2}{2}}d\mu$$
$$= \frac{2r\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\mu^2/2\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\left(\mu^2/2\right)}d\left(\mu^2/2\right) = \frac{2r\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{3}{2}) = r\sigma_1\sigma_2。$$

从而，(X,Y)的相关系数为r,协方差阵为

$$V=\begin{bmatrix} \sigma_1{}^2 & r\sigma_1\sigma_2 \\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2{}^2 \end{bmatrix}。$$

协方差的性质告诉我们

若X与Y相互独立，则 $Cov(X,Y)=0.$

定理5.7：设随机变量(X,Y)：$N(u_1,u_2,\sigma_1{}^2,\sigma_2{}^2,r)$ ，则：X与Y相互独立$\Leftrightarrow r=0$ 。

思想： X与Y相互独立 $\Leftrightarrow$在$f(x,y)$，$f_X(x)$，$f_Y(y)$的公共连续点（x ,y）处成立 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

二维正态分布的条件分布

当**X=x**条件下,**Y**的密度函数可如下计算:

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

详见**Page142,**此时

$$Y\,|\,X=x\sim N(\mu_2+r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1);\sigma_2^2(1-r^2))$$

定理**5.8** 二维随机变量（**X,Y**）服从二维正态分布的充要条件是**X**与**Y**的任意线性组合**Z=aX+bY**服从一维正态分布，即：$\mathrm{Z}\sim N(\mathrm{E}(Z),D(Z))$.

例5.8设$(X,Y)\sim N(2,3;4,9;\frac{1}{2}),Z=\frac{1}{2}X-\frac{1}{3}Y$，求$E(|Z|)$。

解：$X\sim N(2,4),Y\sim N(3,9)$,相关系数$r=1/2$.

$Cov(X,Y)=r\cdot\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}=3$, $E(Z)=\frac{1}{2}EX-\frac{1}{3}EY=0$

$$D(Z)=\frac{1}{4}DX+\frac{1}{9}DY-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}Cov(X,Y)=1$$

由定理5.8 $\therefore Z \sim N(0,1)$

$$E(|Z|)=\int_{-\infty}^{\infty}|z|f(z)dz$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=2\int_{0}^{\infty}z\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}d(-e^{-\frac{z^2}{2}})=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

习题：X,Y独立同分布N(μ,σ²).

$$\boldsymbol{Z_1 = \alpha X + \beta Y, Z_2 = \alpha X - \beta Y,\ \ \alpha, \beta \in R}, \text{求} \boldsymbol{\rho_{Z_1 Z_2}}$$

解：$E(Z_1) = \alpha E(X) + \beta E(Y) = (\alpha + \beta)\mu$

$$E(Z_2) = \alpha E(X) - \beta E(Y) = (\alpha - \beta)\mu$$

$$D(Z_1) = \alpha^2 D(X) + \beta^2 D(Y) = (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2$$

$$D(Z_2) = \alpha^2 D(X) + \beta^2 D(Y) = (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2$$

$$E(Z_1 Z_2) = E((\alpha X + \beta Y)(\alpha X - \beta Y))$$

$$= E(\alpha^2 X^2 - \beta^2 Y^2) = \alpha^2 E(X^2) - \beta^2 E(Y^2)$$

$$\boldsymbol{= \alpha^2 (D(X) + E^2(X)) - \beta^2 (D(Y) + E^2(Y))}$$

$$= \alpha^2(\sigma^2 + \mu^2) - \beta^2(\sigma^2 + \mu^2) = (\alpha^2 - \beta^2)(\sigma^2 + \mu^2)$$

$$\rho_{Z_1Z_2} = \frac{(\alpha^2-\beta^2)(\sigma^2+\mu^2)-\mu^2(\alpha^2-\beta^2)}{\sigma^2(\alpha^2+\beta^2)}$$

$$= \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$$

习题: X,Y独立同分布$N(\mu,\sigma^2)$.$U=max(X,Y)$,$V=min(X,Y)$,求U,V的期望.

解:直接按照确定积分区域的方法计算比较烦琐.

令:$Z=X-Y$. X,Y互相独立,故Z服从正态分布.即$Z\sim N(0,2\sigma^2)$.

$$U=\frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|),V=\frac{1}{2}(X+Y-|X-Y|)$$

$$E(|X-Y|)=E(|Z|)=2\int_0^{+\infty}\frac{z}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\times 2\sigma^2}}dz$$

$$=2\frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}dz=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

$$E(U)=\frac{1}{2}(EX+EY+E(|Z|))=\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}},E(V)=\mu-\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

练习一:设 $\xi \sim N(\mu,\sigma^2),\eta = a + b\xi\ (b \neq 0)$.求 $f_\eta(y)$.

解: $$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R$$

设η的分布函数$F_\eta(y)$.

（1）当b>0时，

$$F_\eta(y) = P\{\eta \le y\} = P\{a + b\xi \le y\} = P\{\xi \le \frac{y-a}{b}\}$$

$$= F_\xi(\frac{y-a}{b})$$

$$f_\eta(y) = F_\eta'(y) = f_\xi(\frac{y-a}{b}) \cdot \frac{1}{b}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma b} e^{-\frac{(y-a-b\mu)^2}{2\sigma^2 b^2}}, \quad y \in R$$

（2）当b<0时，

$$F_\eta(y)=P\{\eta\le y\}=P\{a+b\xi\le y\}=P\{\xi\ge\frac{y-a}{b}\}$$

$$=1-P\{\xi<\frac{y-a}{b}\}=1-F_\xi(\frac{y-a}{b})$$

$$f_\eta(y)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma b}e^{-\frac{(y-a-b\mu)^2}{2\sigma^2b^2}}\qquad y\in R$$

综合起来，对于$\eta=a+b\xi(b\neq0)$,有

$$f_\eta(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|b|}e^{-\frac{(y-a-b\mu)^2}{2\sigma^2b^2}},\ y\in R$$

练习二：

1、设随机变量$X \sim N(0,1)$，$Y \sim U(0,1)$，$Z \sim B(5,0.5)$,且X，Y，Z独立，求随机变量$U=(2X+3Y)(4Z-1)$的数学期望.

答：$E(U)=E(2X+3Y)E(4Z-1)=\frac{27}{2}$

2、 设随机变量$X_1, X_2,\ldots,X_n$相互独立，且均服从$N(\mu,\sigma^2)$分布，求随机变量 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$的数学期望.

答： $E(\overline{X})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\mu$