DMS Chapter 4 二元关系

4.2 关系的性质

---传递性

3. 传递性

设R是集合A上的二元关系，对任意的x,y,z∈A，如果<x,y>∈R且<y,z>∈R，那么<x,z>∈R，则称关系R是可传递的，或称R具有传递性，即

R在A上是传递的 ⇔

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[((x\in A)\wedge(y\in A)\wedge(z\in A))$

$\rightarrow((<x,y>\in R)\wedge(<y,z>\in R)\rightarrow(<x,z>\in R))]=T$

11:16 26

26

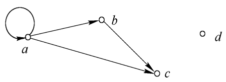
DMS Chapter 4 二元关系

4.2 关系的性质

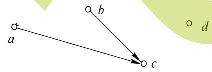
---传递性

例4.13 设A={a,b,c,d}

R_1={<a,a>,<a,b>,<b,c>,<a,c>} R_2={ <b,c>,<a,c>}



R_1的关系图



R_2的关系图

R_1, R_2 均具有传递性

R在A上是传递的 ⇔

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[((x\in A)\wedge(y\in A)\wedge(z\in A))$

$\rightarrow((<x,y>\in R)\wedge(<y,z>\in R)\rightarrow(<x,z>\in R))]=T$

11:16 27

27

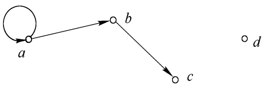
DMS Chapter 4 二元关系

4.2 关系的性质

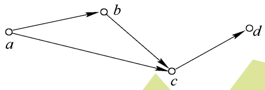
---传递性

例4.14 设A={a,b,c,d}

R_3={<a,a>,<a,b>,<b,c>} R_4={<a,b>,<b,c>,<a,c>,<c,d>}



R_3的关系图



R_4的关系图

R_3, R_4 均不具有传递性

11:16 28

28

DMS Chapter 4 二元关系

4.2 关系的性质

---传递性

传递性总结

表现在关系图上：

关系R是传递的当且仅当其关系图中，任何三个结点x,y,z之间，若从x到y有一条边存在，从y到z有一条边存在，则从x到z一定有一条边存在。

●在 集合A上的2^{n*n}个二元关系中，有，① 若干个具有传递性的关系，② 其余均为不具有传递性的关系

11:16 29

29

DMS Chapter 4 二元关系

4.2 关系的性质

例4.15 设*A*={a，b，c}，试给出*A*上的一个二元关系*R*，使其同时不满足 以下所有性质：自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性。

2023年10月 30

30

DMS Chapter 4 二元关系

4.3 关系的运算

--二元关系的基本运算

1、二元关系的交、并、差、补 及 对称差运算

因关系是一种特殊集合，故二元关系的上述运算与集合的相应运算完全相同

设R，S 是集合A到B的两个关系，则：

R∪S = {<x,y>|(xRy)∨(xSy)}

R∩S = {<x,y>|(xRy)∧(xSy)}

R-S={<x,y>|(xRy)∧(x$\not S$y)}

$\bar{R}$ = A×B - R

R⊕S= R∪S - R∩S

运算结果依然是集合A到B的关系

注： A×B是全集

2023年10月20日 31

31

1

例1：　设A = {a,b,c}, B = {1,2},

R = {<a,1>,<b,2>,<c,1>},

S = {<a,1>,<b,1>,<c,1>},

则：　R∪S = {<a,1>,<b,2>,<c,1>, <b,1>};

R∩S = {<a,1>,<c,1>};

R-S = {<b,2>};

$\overline{R}$ = A×B-R = {<a,2>,<b,1>,<c,2>}

2. 关系的复合运算

设 R是一个从集合A到集合B的二元关系，R：A→B，

S是一个从集合B到集合C的二元关系，S：B→C，

定义 R与S的**复合关系**（合成关系）RoS 为从A到C的**二元关系**：

RoS = {<x,z>|(x∈A)∧(z∈C)∧((∃y)[(y∈B)∧(xRy)∧(ySz)])}

运算“o”称为**复合运算**。

复合是一种常见的产生新关系的运算
如　2个父子关系的复合就得到一个祖孙关系；
兄妹关系与母子关系复合得到舅甥关系

A={老张，老李}
B={大陈，大张，大李}
C={小张，小陈，小赵}

复合运算的矩阵表示

设 从集合A到集合B的二元关系R的矩阵表示为$M_R = (r_{ik})$,

从集合B到集合C的二元关系S的矩阵表示为$M_S = (s_{kj})$,

则　R与S的复合关系（合成关系）RoS的矩阵表示为

$M_{RoS}=(m_{ij}) = M_R*M_S$,　i=1,2,…,|A|; j= 1,2,…,|C|

这里的“*”运算类似矩阵乘法运算，但须将元素间的乘运算改成**逻辑与**，将加运算改成**逻辑或**，即

$m_{ij}=(r_{i1}\wedge s_{1j})\vee(r_{i2}\wedge s_{2j})\vee\ldots\vee(r_{in}\wedge s_{nj})$

其中 n=|B|,　i=1,2,…,|A|; j= 1,2,…,|C|

例2　设A={1,2,3}；B={1,2,3,4}；　C={2,3,4}.

已知 R：　A→B = {<1,2>,<3,4>,<2,2>},

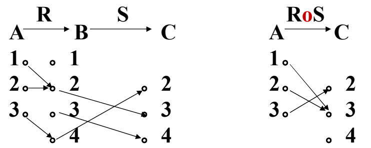
S：　B→C = {<4,2>,<2,3>,<3,4>},

求 RoS：A→C

解：　1). 集合方法求RoS：

RoS = {<1,3>,<3,2>,<2,3>}

2). 用关系图求RoS



例2　设A={1,2,3}；B={1,2,3,4}；　C={2,3,4}.
R={<1,2>,<3,4>,<2,2>}，S={<4,2>,<2,3>,<3,4>}，分别是从A→B和从B→C的关系，　求 RoS

解(续)：　3). 用矩阵表示求RoS：　$M_{RoS} = M_R * M_S$

$$M_{RoS}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$O(n^3)$

例3 设Z是整数集合，R，S是Z上的两个二元关系：

R = {<x,3x>|x∈Z}；

S = {<x, x+2>|x∈Z}。

求　RoS，　SoR，　RoR，SoS，(RoR)oR，(RoS)oR

解：　RoS = { <x, 3x+2> | x∈Z}

SoR = { <x, 3x+6>　| x∈Z}

RoR = {<x, 9x>|x∈Z}

SoS = {<x, x+4>|x∈Z}

(RoR)oR = {<x, 27x>|x∈Z}

(RoS)oR = {<x, 9x+6>|x∈Z}

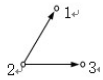
DMS Chapter 4 二元关系

4.3 关系的运算
--二元关系的幂运算

3. 关系的幂

设R是集合A上的二元关系，定义 R的n次幂 R^n (n≥0)如下：

1. $R^0 = I_A = \{\langle a,a\rangle \mid a\in A\}$；
2. $R^1 = R$；
3. $R^{n+1} = R^n\circ R = R\circ R^n$。



容易证明， $R^m\circ R^n = R^{m+n}$， $(R^m)^n = R^{mn}$。

由定义可知 R^n也是A上的二元关系

定理：设R是集合A上的二元关系
$R^2\subseteq R$ 当且仅当 R具有传递性

推论：$R^2 = R$ $\Rightarrow$ R具有传递性

判断R是否具有传递性的依据

2023年10月 38

38

DMS Chapter 4 二元关系

4.3 关系的运算
--二元关系的幂运算

例3.5 设A＝{1,2,3}， R是A上的模2同余关系，
即 R = {<1,1 >, <2,2>, <3,3>, <1,3>,<3,1>}

则： R^0＝{<1,1 >,<2,2>,<3,3>}

R^2＝RoR = {<1,1 >,<1,3>,<2,2>,<3,1>,<3,3>} = R ⇨ R具有传递性

R^3＝R^2oR = {<1,1 >,<1,3>,<2,2>,<3,1>,<3,3>}

例3.6 设A＝{a,b,c}, R是A上的一个二元关系，
R = {<a,a >, <a,b>, <b,c>, <c,b>}

则： R^0＝{<a,a >,<b,b>,<c,c>}

R^2＝RoR = {<a,a >,<a,b>,<a,c>,<b,b>,<c,c>} $\nsubseteq$ R ⇨ R不具有传递性

R^3＝R^2oR = {<a,a >,<a,b>,<a,c>,<b,c>,<c,b>}

2023年10月20日 39

39

DMS Chapter 4 二元关系

例： 已知二元关系R，且满足R^3=R，则下列关系

（ ）具有传递性

A、R； B、R^2； C、R^3； D、R^4

11:16 40

40

DMS Chapter 4 二元关系

4.3 关系的运算
--二元关系的逆运算

4. 关系的逆运算

设R是一个从集合A到集合B的二元关系，则从B到A的关系 R^{-1} = {<b,a>|<a,b> ∈ R} 称为R的逆关系，“-1”称为逆运算。

注意：虽然R^{-1}和$\overline{R}$ 都是二元关系，但R^{-1}和$\overline{R}$ 是完全不同的两种关系，千万不可混淆。
$|R^{-1}| = |R|$， $|\overline{R}| = |A\times B| - |R|$

2023年10月 41

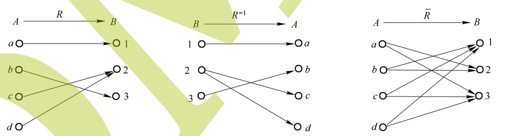
41

DMS Chapter 4 二元关系

4.3 关系的运算
--二元关系的逆运算

例3.4 设A＝{a,b,c,d}，B＝{1,2,3}，
R＝{ <a,1>,<b,3>,<c,2>,<d,2>}是从A到B的一个关系，求和 R^{-1}和 $\overline{R}$

解： R^{-1}＝{<1,a >,<3,b>,<2,c>,<2,d>}
$\overline{R}$＝{<a,2>,<a,3>,<b,1> <b,2>,<c,1>, <c,3>,<d,1>,<d,3> }



$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad M_{R^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad M_{\overline{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{R^{-1}} = M_R^T$$

2023年10月20日 42

42

DMS Chapter 4 二元关系

4.3 关系的运算
--几个定理

定理一： 设R,S,T分别是从集合A到集合B，集合B到集合C，集合C到集合D的二元关系，则：

1) (RoS)oT = Ro(SoT) **关系的复合运算满足结合律**

2) $(R\circ S)^{-1} = S^{-1}\circ R^{-1}$

请思考：关系的复合运算能交换顺序吗？

2023年10月 43

43

DMS Chapter 4 二元关系

4.3 关系的运算

--几个定理

定理二：设R是从集合A到集合B的关系，S_1,S_2是从集合B到集合C的关系，T是从集合C到集合D的关系，则：

1. $R\circ(S_1 \cup S_2) = (R\circ S_1) \cup (R\circ S_2)$
2. $(S_1 \cup S_2)\circ T = (S_1\circ T) \cup (S_2\circ T)$

关系的复合运算对并运算满足分配律

3. $R\circ(S_1 \cap S_2) \subseteq (R\circ S_1) \cap (R\circ S_2)$
4. $(S_1 \cap S_2)\circ T \subseteq (S_1\circ T) \cap (S_2\circ T)$

关系的复合运算对交运算不满足分配律

2023年10月

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

44

44

DMS Chapter 4 二元关系

4.3 关系的运算

--几个定理

定理三：设R和S都是集合A到B的二元关系,则

① $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

② $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

③ $(\overline{R})^{-1} = \overline{R^{-1}}$

④ $(R-S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$

⑤ $(R^{-1})^{-1} = R$

2023年10月

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

45

45

DMS Chapter 4 二元关系

4.4 二元关系的闭包

--闭包的概念

1. 设R是A上的二元关系，我们希望R具有某些有用的性质，比如自反性、对称性、传递性等。
2. 如果R不具有这些性质，可以通过在R中添加一些序偶来改造R，得到新关系R′，使R′具有指定性质(自反/对称/传递)
3. 但又不希望R′与R相差太多，即添加的序偶要尽可能的少。
4. 满足2) 3)要求的R′ 就称为R的自反/对称/传递 闭包。

A={a,b,c}上的关系R={<a,a>,<a,b>,<b,c>,<c,b>}

2023年10月

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

46

46

DMS Chapter 4 二元关系

4.4 二元关系的闭包

--闭包的概念

➢ 闭包的定义

设R是定义在A上的二元关系，若存在A上的关系R′满足：

1) R′是自反的(或对称的、或可传递的)，

2) $R \subseteq R'$，

3) A上任何满足1）和2）的其它关系R″ 满足 $R' \subseteq R''$ 。

(表明R′的最小性)

则称R′为R的自反闭包(或对称闭包、或传递闭包)，记为r(R) (s(R) 或 t(R))。

A={a,b,c}上的关系R={<a,a>,<a,b>,<b,c>,<c,b>}

2023年10月

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

47

47

DMS Chapter 4 二元关系

4.4 二元关系的闭包

--闭包的概念

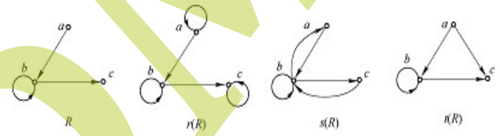
例4　设集合A = {a,b,c}，R = {<a,b>,<b,b>,<b,c>}是定义在A上的二元关系

则有：

r(R) = {<a,b>,<b,b>,<b,c>, <a,a>,<c,c> }；

s(R) = {<a,b>,<b,b>,<b,c>, <b,a>,<c,b> }；

t(R) = {<a,b>,<b,b>,<b,c>, <a,c> }。



$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{r(R)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_{s(R)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{t(R)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2023年10月

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

48

48

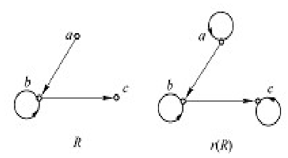
DMS Chapter 4 二元关系

4.4 二元关系的闭包

--利用关系图和关系矩阵求自反闭包

求关系R的自反闭包　　A＝{a,b,c}，R＝{<a,b>,<b,b>,<b,c>}

➢ 将关系图中的所有无环的节点添加环；



➢ 将关系矩阵中对角线上的值r_{ii}全变为“1”。

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{r(R)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{r(R) = R \cup I_A}$

$\boxed{I_A\text{---对角阵，对角线上元素为1的方阵}}$

P62 定理4.5 （1）

2023年10月

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

49

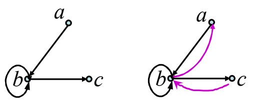
49

DMS Chapter 4 二元关系

4.4 二元关系的闭包
--利用关系图和关系矩阵求对称闭包

求一个关系的对称闭包: A={a,b,c}, R={<a,b>,<b,b>,<b,c>}

- **给关系图中有且仅有一条边的节点对添加方向相反的另一条边;**



s(R)

- **关系矩阵中则为：若有r_{ij} = 1(i≠j)，则令r_{ji} = 1。**

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{s(R)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$s(R) = R \cup R^{-1}$　P62 定理4.5 （2）

2023年10月20日　50

50

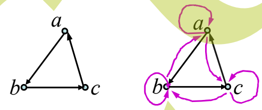
DMS Chapter 4 二元关系

4.4 二元关系的闭包
--利用关系图求传递闭包

求一个关系的传递闭包:

集合A={a,b,c}上关系
R={<a,b>,<b,c>,<c,a>}

- **在关系图中，对任意节点a,b,c, 若a到b有一条边，同时b到c也有一条边，则添加一条从a到c的边;**



t(R)

传递闭包求取是一个不断迭代的过程

$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} R^i$　P62 定理4.5 （3）

2023年10月　51

51

DMS Chapter 4 二元关系

4.4 二元关系的闭包

定理：设A是n个元素的集合，R是集合A上的二元关系，则存在正整数k，k≤n，使 $t(R) = \sum_{i=1}^{k} R^i$

$$t(R) = \sum_{i=1}^{n} R^i$$

计算量庞大,O(n^4)

Warshall算法

- 1962年提出
- 可在计算机上编程实现　O(n^3)
- 为计算机解决此类问题奠定了基础

2023年10月20日　52

52

DMS Chapter 4 二元关系

4.4 二元关系的闭包
--Warshall算法求传递闭包

设R是集合A（基数为n）上的二元关系，M_R是R的关系矩阵

(1) 置新矩阵 M =M_R

(2) 置(列) j =1

(3) 对所有的行 i (1≤i≤n)

　if M(i,j) = 1,

　　对 k=1,2,…,n

　　M(i,k) =M(i,k) ∨ M(j,k)

　(即将M的第i行与M的第j行进行逻辑加后送回M的第i行)

(4) j =j+1

(5)如 j≤n 转(3), 否则停止。

最终的M即为R的传递闭包的关系矩阵$M_{t(R)}$

```
for ( j=1; j<=n; j++)
  for (i=1; i≤n; i++)
    if (M(i,j) == 1)
      for( k=1; k<=n; k++)
        M(i,k) =M(i,k) ∨ M(j,k)
```

O(n^3)

2023年10月20日　53

53

DMS Chapter 4 二元关系

4.4 二元关系的闭包
--Warshall算法求传递闭包

例5　设R={<1,1>,<1,2>,<2,3>,<3,2>,<3,4>}　求 t(R)

$$M = M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
for ( j=1; j<=n; j++)
  for (i=1; i≤n; i++)
    if (M(i,j) == 1)
      for( k=1; k<=n;k++)
        M(i,k)=M(i,k) ∨ M(j,k)
```

j=1: $M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

第1行与第1行逻辑加后送第1行，A无变化

j=2: $M^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

第1行与第2行逻辑加后送第1行
第3行与第2行逻辑加后送第3行

j=3: $M^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

第1,2,3行分别与第3行逻辑加后送第1,2,3行

j=4: $M^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

第1,2,3行分别与第4行逻辑加后送第1,2,3行

故：t(R)={<1,1>,<1,2>, <1,3>,<1,4>,<2,2> <2,3>,<2,4>,<3,2>, <3,3>, <3,4>}

2023年10月20日　54

54

DMS Chapter 4 二元关系

4.4 二元关系的闭包
--闭包的性质

- **定理一：** 设R_1，R_2是集合A上的二元关系，且$R_1 \subseteq R_2$，
  则：
  1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$
  2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$
  3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

- **定理二：** 设R是集合A上的关系，
  则：
  若R是自反的，则s(R)，t(R)也是自反的
  若R是对称的，则r(R)，t(R)也是对称的
  若R是传递的，则r(R)也是传递的

2023年10月　55

55

DMS Chapter 4 二元关系

4.4 二元关系的闭包 --多重闭包

➢ **多重闭包的定义:**

1) 集合A上的二元关系R的自反对称闭包定义为

rs(R) = r(s(R))

2) 集合A上的二元关系R的自反传递闭包定义为

rt(R) = r(t(R))

3) 集合A上的二元关系的对称传递闭包定义为

st(R) = s(t(R))

同上，我们还可定义sr(R), tr(R), ts(R), trs(R), …

2023年10月 56

56

DMS Chapter 4 二元关系

4.4 二元关系的闭包 --多重闭包

➢定理三： 设R是集合A上的关系，则：

1) rs(R) ＝ sr(R)

2) rt(R) ＝ tr(R)

3) st(R) ⊆ ts(R)

例6： 设A＝{1,2}, A上的关系 R＝{<1,2>},

求 rs(R)，sr(R)，rt(R)， tr(R)， st(R)， ts(R)

2023年10月 57

57

DMS Chapter 4 二元关系

4.4 二元关系的闭包 --多重闭包

例6： 设A = {1,2}，R = {<1,2>},

求 rs(R)，sr(R)，rt(R)， tr(R)， st(R)， ts(R)

解： rs(R)= r({<1,2>,<2,1>}) ={<1,2>,<2,1>,<1,1>,<2,2>}

sr(R)= s({<1,2>,<1,1>,<2,2>}) ={<1,2>,<2,1>,<1,1>,<2,2>}

rt(R)= r({<1,2>}) ={<1,2>,<1,1>,<2,2>}

tr(R)= t({<1,2>,<1,1>,<2,2>})= {<1,2>,<1,1>,<2,2>}

st(R) = s(t(R)) = s({<1,2>}) = {<1,2>,<2,1>}

ts(R) = t(s(R)) = t({<1,2>,<2,1>}) = {<1,2>,<2,1>,<1,1>,<2,2>}

可见： rs(R) ＝ sr(R)； rt(R) ＝ tr(R)； st(R) ⊆ ts(R)

2023年10月 58

58

DMS Chapter 4 二元关系

本章要求

- ✓ 掌握关系的概念及表示
- ✓ 掌握关系的自反，反自反，对称，反对称，传递等性质
- ✓ 掌握关系的复合运算，幂运算及逆运算
- ✓ 掌握闭包（自反，对称，传递）的定义
- ✓ 能熟练求解给定关系的闭包（自反，对称，传递）
- ✓ 了解warshall算法求传递闭包
- ✓ 了解闭包的性质
- ✓ 了解多重闭包的概念，会求解给定关系的多重闭包

11:16 59

59