§ 1.2事件发生的概率

频率的定义和性质

随机试验的定义告诉我们：一个随机实验有多个可能的结果，每个结果出现的机会不一定相同.一个事件在一次试验中可能发生也可能不发生,但在大量的试验中,事件的发生呈现出统计规律性,为反映这一统计规律,我们引入频率的概念。

定义 在n次重复试验中，若事件A发生了k次，称k为事件A发生的频数，$f_n(A)=k/n$ 为事件A发生的频率。

由频率的定义显然可知，频率有如下性质：

$1^\circ \quad 0 \le f_n(A) \le 1$ ；

$2^\circ \quad f_n(\Omega) = 1;$

3^0 □$A_1, A_2, \cdots, A_k$ 两两互不相容，则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$$

概率的统计定义

显然，频率越大，则事件发生的可能性也越 大。但事件A发生的可能性到底有多大呢？由于事件的发生具有偶然性，因此**频率不稳定，即具有波动性**：在同一条件下，再做多个n次试验，频率不尽相同；n不一样频率也不一样。尽管如此，随着n的增加，我们会发现频率会稳定在一个常数p附近,并且n越大，$|f_n(A)-p|$越小。而这个固定的常数就称为事件发生的**概率**，记为p(A)。

对于以上的统计规律性，历史上许多试验都证明了这一点。如：蒲丰实验

抛硬币试验

实验者	次数 n	正面向上次数 n_A	频率 $f_n(A)$	实验者	次数 n	正面向上次数 n_A	频率 $f_n(A)$
德•摩根	2048	1061	0.5181	K •皮尔逊	12000	6019	0.5016
蒲丰	4040	2048	0.5096	K •皮尔逊	24000	12012	0.5005

概率的公理化定义和基本性质

上面，我们用频率稳定性来描述概率。但在实际生活中，我们不可能做大量的重复的试验。即使可以，但频率值的大小各不相同，也无法说明哪一个常数才是真正的概率。因此，有必要给出另外的定义。下面，相应于频率的三条性质，我们给出概率的公理化定义。

概率的公理化定义：

□Ω玻鼻□□□□觫□□〈 滋Ω濒□川连掺矗A,

□□炙鼻瘪窒窦P（A）闭泊滋挹〈 □□孬崦柬鼻

□溜己窦P（•）．□P（•）□□币荚毙鲎矗：

《1丂□□怩乁$P(A)\geq 0$幺

《2丂□□怩乁P（Ω丂=1幺

《3丂林荚林尽怩乁□ A_1, A_2, A_3〈··罂彪彪阐耨□

林荚瘪掺矗〈 贾 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

贾□P（•）玻炙膊柿□觫□□Ω毖□鼻瘪□□〈 P（A）

玻掺矗A粮□□□□.

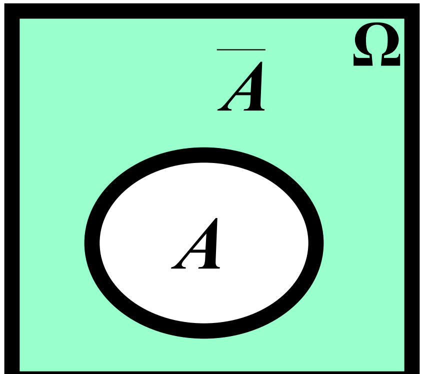
概率的性质

$1^{\circ}\quad P(\phi)=0$

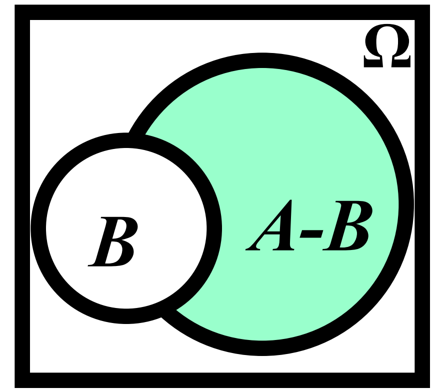
2° 踺□林尽怩乁□$A_1, A_2, \cdots, A_n$彪彪阐耨〈 贾

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

$3^{0}\quad P(\overline{A})=1-P(A)$≴



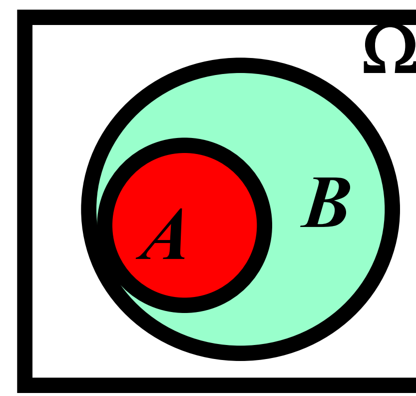
4° 魂□乁 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$



艰乁 $B\subset A$, 贾

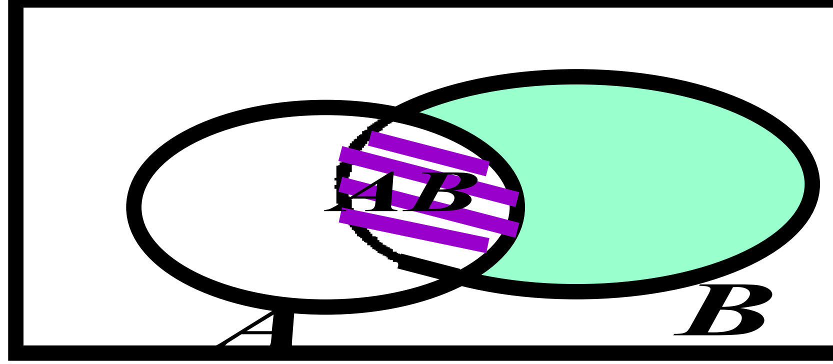
$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

盔□怋乁□ $A\subset B$, 贾 $P(A)\le P(B)$



5° $P(A)\le 1$

6^0 尽□哄喵乁



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

鼻□噬乁 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i A_j)$

$$+ \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n).$$

毙瘪掺矗□尽□哄喵乁 $P(A \cup B \cup C)$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB)$$

$$-P(BC) - P(AC) + P(ABC).$$

例1.6

- A，B为两事件，已知 $P(B)=0.3,$ $P(A\cup B)=0.7, P(\overline{A}\cup B)=?$

解: $P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(B)-\underline{P(\overline{A}B)}$

$=P(\overline{A})+P(B)-\underline{P(B-A)}$

$=\underline{P(\overline{A})}+P(B)-[\underline{P(B)-P(AB)}]$

$=\underline{1-P(A)}+P(AB)$

例1.6（续）

- A，B为两事件，已知 $P(B)=0.3,$

$$P(A\cup B)=0.7, P(\overline{A}\cup B)=?$$

$$\therefore P(\overline{A}\cup B)=1-\underline{P(A)+P(AB)}$$

$$\because P(A)-P(AB)=P(A\cup B)-P(B)$$

$$=0.7-0.3=0.4$$

$$\therefore P(\overline{A}\cup B)=1-0.4=0.6$$

第 苻□ $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=0,$

$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$, 贾A, B, C横□痹粮□□□□キ

□乁 “A, B, C横□痹粮□” 林□□玻$\bar{A}\ \bar{B}\ \bar{C}$, 贾

$$P(\bar{A}\ \bar{B}\ \bar{C})=P(\overline{A+B+C})=1-P(A+B+C),$$

怜 $P(A+B+C)$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

□谗 $ABC \subset AB \Rightarrow 0 \le P(ABC) \le P(AB)=0$

谗罂 $P(\overline{ABC})=\frac{3}{8}$