主要内容

- 1.1 命题与逻辑联结词
- 1.2 命题公式与其赋值
- 1.3 命题公式的等价
- 1.4 联结词的完备集
- 1.5 命题公式的范式表示
- 1.6 命题公式的蕴涵
- 1.7 命题逻辑的推理方法

1.5 命题公式的范式表示

一个命题公式有无数多个和它等价的命题公式，用真值表或等价变换证明它们是否等价，往往比较困难，甚至连计算机也无法解决。

要解决这个问题，我们引入范式(公式的标准形式)的概念。

范式——全名叫规范型式, 又叫标准型式, 正规型式。把公式进行标准化，正规化，这个过程就叫对公式求范式。

1.5 命题公式的范式表示

1. 合取、析取范式

定义:

- 命题变元及其否定称为**句节**。

  P，Q，R，¬P，¬Q ，¬R …

- 有限个句节组成的析取式称为**子句**（基本和）。

  P∨Q∨¬R， P∨Q ， ¬R …

- 有限个句节组成的合取式称为**短语**（基本积）。

  P∧Q∧¬R， Q∧¬R ，P…

1.5 命题公式的范式表示

- 有限个**子句**(基本和)的**合取式**称为**合取范式**。

  $A_1 \wedge A_2 \wedge, \ldots \wedge A_n$　　(A_i是子句)

  例如：$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (Q \vee R)$

- 有限个**短语**（基本积）的**析取式**称为**析取范式**。

  $A_1 \vee A_2 \vee, \ldots \vee A_n$　　(A_i是短语)

  例如：$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (Q \wedge R)$

例子：判断公式P∨（Q∨～R）、～（Q∨R）是不是范式？

既不是析取范式也不是合取范式。但转换后：

$P \vee (Q \vee \sim R) = P \vee Q \vee \sim R$

$\sim (Q \vee R) = \sim Q \wedge \sim R$

上述两式的右端即是析取范式和合取范式。

1.5 命题公式的范式表示

☞ 从上述定义和例子可以得出如下关系：

1. 单个句节既是子句，也是短语，同时是合取范式，也是析取范式。
2. 单个的子句是合取范式；若省略外层括号，单个的子句也是析取范式。
3. 单个的短语是析取范式；若省略外层括号，单个的短语也是合取范式。
4. **析取范式、合取范式仅含联结词～ 、∧、∨，且～仅出现在命题变元前。**

1.5 命题公式的范式表示

定理6（范式存在定理）任何命题公式都存在与之等价的合取范式与析取范式。

证明：

（1）利用等价公式中的蕴涵式和等价式将公式中的→、↔用联结词～、∧、∨来取代；

（2）利用德•摩根定律将否定词～移到各个命题变元的前端；

（3）利用分配律、结合律、吸收律、幂等律、交换律等将公式化成其等价的析取范式和合取范式。

1.5 命题公式的范式表示

例16 把公式$(P \vee R) \rightarrow \neg(Q \vee R)$化成等价的合取范式。

解： $(P \vee R) \rightarrow \neg(Q \vee R)$

$\Leftrightarrow \neg(P \vee R) \vee \neg(Q \vee R)$ (蕴涵律)

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge \neg R)$ (德·摩根律)

$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg R$ (分配律)

1.5 命题公式的范式表示

- **问题：一个公式的范式是不是唯一的呢？**

如

$P \vee (Q \wedge R)$　　析取范式

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

$\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge P) \vee ((P \vee Q) \wedge R)$

$\Leftrightarrow (P \wedge P) \vee (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$

也是析取范式

- 由于范式不唯一，所以直接应用范式判断命题间等价还是不方便。
- 因此需要对公式进一步规范化，即求公式的主范式。

1.5 命题公式的范式表示

2. 极小项与主析取范式

定义 在**n个**变元的短语中，若每一个变元或其否定，二者之一必出现且仅出现一次，且按顺序排列，则这种短语叫**极小项**。

由极小项组成的析取范式叫**主析取范式**。**(唯一性)**

例如：含P,Q两个变元的极小项有4种：

$P \wedge Q$，$\neg P \wedge Q$，$P \wedge \neg Q$，$\neg P \wedge \neg Q$

含P,Q,R三个变元的极小项有？个

✓ 极小项有2^n个。

1.5 命题公式的范式表示

例如：含P,Q两个变元的极小项有4个：$P\wedge Q$，$\neg P\wedge Q$，$P\wedge\neg Q$，$\neg P\wedge\neg Q$。以下是构成的极小项的真值表：

P	Q	$P\wedge Q$	$P\wedge\sim Q$	$\sim P\wedge Q$	$\sim P\wedge\sim Q$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1

- 由真值表可知：

  任何极小项之间都不是相互等价的；

  每个极小项只有一组真值指派，使得该公式的值为真；

  任意一组真值指派，只能使一个极小项为真。

1.5 命题公式的范式表示

P,Q 形成的极小项

极小项	成真赋值
$\neg P \wedge \neg Q$	0 0
$\neg P \wedge Q$	0 1
$P \wedge \neg Q$	1 0
$P \wedge Q$	1 1

P,Q,R 形成的极小项

极小项	成真赋值	名称
$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	0 0 0	m_0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	0 0 1	m_1
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	0 1 0	m_2
$\neg P \wedge Q \wedge R$	0 1 1	m_3
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	1 0 0	m_4
$P \wedge \neg Q \wedge R$	1 0 1	m_5
$P \wedge Q \wedge \neg R$	1 1 0	m_6
$P \wedge Q \wedge R$	1 1 1	m_7

简记式m_i，足标i是“成真赋值”对应的二进制数，转化为十进制数。

1.5 命题公式的范式表示

3. 极大项与主合取范式

定义 在**n个**变元的子句中，若每一个变元或其否定，二者之一必出现且仅出现一次，且按顺序排列，则这种子句叫**极大项**。(2^n个)

由极大项组成的合取范式叫**主合取范式**。**(唯一性)**

例如：含P, Q两个变元的极大项有4个

$P\vee Q$，$\neg P\vee Q$，$P\vee\neg Q$，$\neg P\vee\neg Q$

含P,Q,R三个变元的极大项有8个

1.5 命题公式的范式表示

例如：含P，Q两个变元的极大项有4个：P∨Q，¬ P∨Q，P∨¬Q，¬P∨¬Q。以下是由两个原子构成的极大项的真值表：

P	Q	P∨Q	P∨～Q	～P∨Q	～P∨～Q
1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1

- 由真值表可知：

  任何极大项之间都不是相互等价的；

  每个极大项只有一组真值指派，使得该公式的值为假；

  任意一组真值指派，只能使一个极大项为假。

1.5 命题公式的范式表示

P,Q 形成的极大项

极大项	成假赋值	名称
$P \vee Q$	0 0	M_0
$P \vee \neg Q$	0 1	M_1
$\neg P \vee Q$	1 0	M_2
$\neg P \vee \neg Q$	1 1	M_3

P,Q,R 形成的极大项

极大项	成假赋值	名称
$P \vee Q \vee R$	0 0 0	M_0
$P \vee Q \vee \neg R$	0 0 1	M_1
$P \vee \neg Q \vee R$	0 1 0	M_2
$P \vee \neg Q \vee \neg R$	0 1 1	M_3
$\neg P \vee Q \vee R$	1 0 0	M_4
$\neg P \vee Q \vee \neg R$	1 0 1	M_5
$\neg P \vee \neg Q \vee R$	1 1 0	M_6
$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$	1 1 1	M_7

1.5 命题公式的范式表示

4. 极小项与极大项性质

① 没有两个不同的极小项是等价的，且每个极小项只有一组真值指派，使其真值为真。

② 没有两个不同的极大项是等价的，且每个极大项只有一组真值指派，使其真值为假。

③ $\neg m_i \Leftrightarrow M_i$， $\neg M_i \Leftrightarrow m_i$ （$i=0,1,\ldots 2^n-1$）

④ $m_i \wedge m_j \Leftrightarrow F$，$M_i \vee M_j \Leftrightarrow T$ （$i\neq j$; $i, j \in \{0,1,\ldots 2^n-1\}$）

⑤ $\bigvee_{i=0}^{2^{n-1}} m_i \Leftrightarrow T$，$\bigwedge_{i=0}^{2^{n-1}} M_i \Leftrightarrow F$ （$i\neq j$; $i, j \in \{0,1,\ldots 2^n-1\}$）

1.5 命题公式的范式表示

⑥ 极大项取值0"当且仅当"：如果极大项中出现的是原子本身，则原子赋值为0；如果出现的是原子的否定，则原子赋值为1。

⑦ 当一个极大项在一种解释下取值0时，其余极大项在同一解释下取值1。

P	Q	P∨Q	P∨～Q	～P∨Q	～P∨～Q
1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1

1.5 命题公式的范式表示

⑧ 极小项取值1 “当且仅当”：如果极小项中出现的是原子本身，则原子赋值为1；如果出现的是原子的否定，则原子赋值为0。

⑨ 当一个极小项在一种解释下取值1时，其余极小项在同一解释下取值0。

P	Q	P∧Q	P∧～Q	～P∧Q	～P∧～Q
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1

1.5 命题公式的范式表示

5. 主范式构造方法

   (1)真值表技术

   (2)公式的恒等变换法

1.5 命题公式的范式表示

(1) 真值表技术

定理7 在命题公式的真值表中，使公式**取值1时**的解释所对应的全部**极小项**的析取式，是这个公式的**主析取范式**。

证明：设A是一个命题公式， m_1， $m_2,\ldots m_K$是与A取值1的解释相对应的全部极小项，令$B = m_1 \vee m_2 \vee,\ldots \vee m_K$, 现在证明$A \Leftrightarrow B$。

当公式A取值1时，在相应的解释下，由性质①，有且仅有公式B中一个极小项取值1，因此$B= m_1 \vee m_2 \vee,\ldots \vee m_K$也取值1；

当A取值0时，在相应的解释下，成真的极小项不在m_1，$m_2,\ldots m_K$中，由性质①，任意两个极小项不等价，则B中所有极小项都取值0，因此$B= m_1 \vee m_2 \vee,\ldots \vee m_K$也取值0。

根据等价定义，有$A \Leftrightarrow B$。

1.5 命题公式的范式表示

定理8 在命题公式的真值表中，使公式**取值0时**的解释所对应的全部**极大项**的合取式，是这个公式的**主合取范式**。

证明：设A是一个命题公式，M_1，M_2,…M_K是与A取值0的解释相对应的极大项，令B= $M_1 \wedge M_2 \wedge ,\ldots \wedge M_K$, 现在证明A⇔B。

当A取值0时，在相应的解释下，由性质②，有且仅有B式中一个极大项取值0，因此B= $M_1 \wedge M_2 \wedge ,\ldots \wedge M_K$也取值0；

当A取值1时，在相应的解释下，成假的极大项不在M_1，M_2,…M_K中，由性质②，任意两个极大项不等价，B中所有极大项都取值1，因此B= $M_1 \wedge M_2 \wedge ,\ldots \wedge M_K$也取值1。

根据等价定义，有A⇔B。

1.5 命题公式的范式表示

例17　构造真值表，求公式$G=(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$的主析取范式和主合取范式。

解：首先列出其真值表如下：

P	Q	R	$P\rightarrow Q$	$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

1.5 命题公式的范式表示

（1）求公式的主析取范式

P Q R	(P→Q)↔R
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	1

极小项 $\sim P \wedge \sim Q \wedge R$

极小项 $\sim P \wedge Q \wedge R$

极小项 $P \wedge \neg Q \wedge \sim R$

极小项 $P \wedge Q \wedge R$

1.5 命题公式的范式表示

将极小项全部进行析取后，可得到相应的主析取范式：

$G=(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$

$=(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

$=m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_7$

1.5 命题公式的范式表示

（2）求公式的主合取范式

P Q R	$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	1

$\xrightarrow{\text{极大项}}$ $P\vee Q\vee R$

$\xrightarrow{\text{极大项}}$ $P\vee\sim Q\vee R$

$\xrightarrow{\text{极大项}}$ $\sim P\vee Q\vee\sim R$

$\xrightarrow{\text{极大项}}$ $\sim P\vee\sim Q\vee R$

1.5 命题公式的范式表示

将极大项全部进行合取后，可得到相应的主合取范式：

$G=(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$

$=(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\sim Q\vee R)\wedge(\sim P\vee Q\vee\sim R)\wedge(\sim P\vee\sim Q\vee R)$

$=M_0\wedge M_2\wedge M_5\wedge M_6$

✓ 一个命题公式的主析取范式和主合取范式紧密相关，在简记式中，极小项的足标和极大项的足标是互补的，且极小项的个数与极大项的个数之和为2^n个。

公式的主析取和主合取范式之间可通过简记式转换。

1.5 命题公式的范式表示

小结：

- 一个公式转化为主析取范式，与公式真值表中1的分布有关。
- 一个公式转化为主合取范式，与公式真值表中0的分布有关。
- 一个命题公式的真值表是唯一的，因此一个命题公式的主析取范式和主合取范式是唯一的。

- 如果两个命题公式有相同的主析取范式（主合取范式），那么两个命题公式是逻辑等价的。
  - ✓ 用于判断两个公式的恒等。

1.5 命题公式的范式表示

(2) 恒等变换法

步骤：

① 利用等价公式中的等价式和蕴涵式将公式中的→、↔用联结词~、∧、∨来取代；

② 利用德•摩根定律将否定号~移到各个命题变元的前端；

③ 利用结合律、分配律、吸收律、幂等律、交换律等将公式化成其等价的析取范式和合取范式。

④ 在析取范式的短语和合取范式的子句中，如同一命题变元出现多次，则将其化成只出现一次。

⑤ 去掉析取范式中所有永假式的短语和合取范式中所有永真式的子句，即去掉短语中含有形如P∧~P的子公式和子句中含有形如P∨~P的子公式。

1.5 命题公式的范式表示

⑥ 若析取范式的某一个短语中缺少该命题公式中所规定的命题变元P ，则可用公式：

$$(\sim P \vee P) \wedge Q = Q$$

将命题变元P补进去，并利用分配律展开，然后合并相同的短语，此时得到的短语将是标准的极小项；

⑦ 若合取范式的某一个子句中缺少该命题公式中所规定的命题变元P ，则可用公式：

$$(\sim P \wedge P) \vee Q = Q$$

将命题变元P补进去，并利用分配律展开，然后合并相同的子句，此时得到的子句将是标准的极大项。

⑧ 利用幂等律将相同的极小项和极大项合并，同时利用交换律进行顺序调整，由此可转换成标准的主析取范式和主合取范式。

1.5 命题公式的范式表示

例18 用公式的等价求$(P \to Q) \wedge R$ 的主合取范式和主析取范式。

解：（1）求主合取范式

$$(P \to Q) \wedge R$$

$$\Leftrightarrow (\sim P \vee Q) \wedge R \qquad \text{（蕴涵律）}$$

$$\Leftrightarrow (\sim P \vee Q \vee (R \wedge \sim R)) \wedge ((\sim P \wedge P) \vee (\sim Q \wedge Q) \vee R)$$

（添加R、P、Q）

$$\Leftrightarrow \underline{(\sim P \vee Q \vee R)} \wedge (\sim P \vee Q \vee \sim R) \wedge (\sim P \vee \sim Q \vee R)$$

$$\wedge \underline{(\sim P \vee Q \vee R)} \wedge (P \vee \sim Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R) \qquad \text{（分配律）}$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \sim Q \vee R) \wedge (\sim P \vee Q \vee R)$$

$$\wedge (\sim P \vee Q \vee \sim R) \wedge (\sim P \vee \sim Q \vee R) \qquad \text{（幂等律）}$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$$

——主合取范式

1.5 命题公式的范式表示

（2）求主析取范式

$(P \to Q) \wedge R$

$\Leftrightarrow (\sim P \vee Q) \wedge R$ （蕴涵律）

$\Leftrightarrow (\sim P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$ （分配律）

$\Leftrightarrow (\sim P \wedge (\sim Q \vee Q) \wedge R) \vee ((\sim P \vee P) \wedge Q \wedge R)$

（同一律、矛盾律）

$\Leftrightarrow (\sim P \wedge \sim Q \wedge R) \vee (\sim P \wedge Q \wedge R) \vee (\sim P \wedge Q \wedge R)$

$\vee (P \wedge Q \wedge R)$ （分配律）

$\Leftrightarrow (\sim P \wedge \sim Q \wedge R) \vee (\sim P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_7$ ——主析取范式

1.5 命题公式的范式表示

练习： 求公式P∧Q∨R主析取范式。（两种方法）

解： P∧Q∨R

$\Leftrightarrow$ (P∧Q)∨R

$\Leftrightarrow$ ((P∧Q) ∧T)∨(T ∧T ∧ R) (同一律)

$\Leftrightarrow$ ((P∧Q) ∧(R∨~R))∨((P∨~ P)∧(Q∨~ Q)∧ R)

(矛盾律)

$\Leftrightarrow$ (P∧Q ∧R) ∨(P∧Q∧~R)∨(P∧Q ∧R)∨ (P∧~Q ∧R)∨(~ P∧Q∧R)∨(~ P∧~Q∧R) (分配律)

$\Leftrightarrow$ (P∧Q ∧R) ∨(P∧Q∧~R)∨ (P∧~Q ∧R)∨(~ P∧Q∧R)∨(~ P∧~Q∧R) (幂等律,去掉相同项)

$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$

1.5 命题公式的范式表示

6. 特殊类型公式的主析取(主合取)范式

设A是含n个变元的命题公式，则

- A是**永真式**当且仅当A的**主析取范式含全部2^n个极小项**。此时主合取范式为空，或**没有主合取范式**。
- A是**矛盾式**当且仅当A的**主合取范式含全部2^n个极大项**。此时主析取范式为空，或**没有主析取范式**。
- A为可满足式当且仅当A的主析取范式中至少含一个极小项。

✓ **以上定理可用于判断命题公式的类型！**

1.5 命题公式的范式表示

例20 应用题：

某单位从A,B,C三名骨干中挑选1-2人出国进修，选派时要满足如下条件：

若A去，则C同去；

若B去，则C不能去；

若C不去，则A或B可以去。

请问：有多少种派遣方案?

解：设A: 派A去，B: 派B去， C: 派C去。由已知条件可得：

$$(A\to C)\land(B\to\neg C)\land(\neg C\to A\lor B)$$

该公式的成真赋值即为可行的选派方案。公式演算得：

$$\ldots \Leftrightarrow (A\land\neg B\land C)\lor(\neg A\land B\land\neg C)\lor(\neg A\land\neg B\land C)$$

故有3种选派方案： （1）A和C去，B不去；（2）B去，A和C不去；（3）C去，A和B不去。

作业

✓习题一

12（3）（4）

14

主要内容

- 1.1 命题与逻辑联结词
- 1.2 命题公式与其赋值
- 1.3 命题公式的等价
- 1.4 联结词的完备集
- 1.5 命题公式的范式表示
- 1.6 命题公式的蕴涵
- 1.7 命题逻辑的推理方法

1.6 命题公式的蕴涵

1. 定义

设A和B是两个命题公式，当且仅当A→B是永真式时，称“**A(永真)蕴涵B**”，记为A⇒B。

即A→B，如果在任何解释下，A取值1时B也取值1。

☞ 蕴涵关系⇒ 和条件联结词→是不同的符号：

- → 是命题联结词，A→B是一个条件命题公式；
- ⇒ 是公式间关系符，A⇒B不是一个命题公式，表示A，B间的蕴涵关系。

1.6 命题公式的蕴涵

例20：用等值演算法证明蕴含式$P \wedge Q \Rightarrow (P \to Q)$成立。

证明：【分析：由定义，要证明$P \wedge Q \Rightarrow (P \to Q)$，即证明$P \wedge Q \to (P \to Q) \Leftrightarrow T$。】

$P \wedge Q \to (P \to Q)$

$\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee Q)$ 蕴涵律

$\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee \neg P \vee Q$ 德摩根定律

$\Leftrightarrow \neg P \vee T$ 幂等律、矛盾律

$\Leftrightarrow T$ 零律

由定义知 $P \wedge Q \Rightarrow (P \to Q)$ 成立。

1.6 命题公式的蕴涵

2. 基本蕴涵式（蕴涵定律）

I_1: $P\wedge Q\Rightarrow P$，$P\wedge Q\Rightarrow Q$ I_2: $\neg(P\rightarrow Q)\Rightarrow P$，$\neg(P\rightarrow Q)\Rightarrow\neg Q$	简化法则
I_3: $P\Rightarrow P\vee Q$， $Q\Rightarrow P\vee Q$ I_4: $\neg P\Rightarrow(P\rightarrow Q)$，$Q\Rightarrow(P\rightarrow Q)$	扩充法则
I_5: $P\wedge(P\rightarrow Q)\Rightarrow Q$	假言推理
I_6: $\neg Q\wedge(P\rightarrow Q)\Rightarrow\neg P$	拒取式
I_7: $\neg P\wedge(P\vee Q)\Rightarrow Q$ I_8: $P\wedge(\neg P\vee Q)\Rightarrow Q$	析取三段论
I_9: $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R)\Rightarrow(P\rightarrow R)$	假言三段论
I_{10}: $(P\vee Q)\wedge(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)\Rightarrow R$ I_{11}: $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\Rightarrow(P\wedge R)\rightarrow(Q\wedge S)$	二难推论
I_{12}: $(P\leftrightarrow Q)\wedge(Q\leftrightarrow R)\Rightarrow(P\leftrightarrow R)$	等价三段论
I_{13}: $(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)\Rightarrow Q\vee R$	归结原理

1.6 命题公式的蕴涵

✓ 对任一永真蕴含式，如果前提A为真，则可保证结论B为真，因此任一个蕴含式都可以作为一条推理规则。

例21

（1） 前提：如果x是偶数，则x^2是偶数。
x是偶数。
结论：x^2是偶数。

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ P \\ \hline \therefore Q \end{array}$$

可描述为：P→Q，P 推得 Q　　（假言推论）

（2） 前提：如果x是偶数，则x^2是偶数。
x^2不是偶数。
结论：x不是偶数。

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ \sim Q \\ \hline \therefore \sim P \end{array}$$

可描述为：P→Q，$\sim Q$ 推得 $\sim P$　　（拒取式）

1.6 命题公式的蕴涵

（3）**前提：**

1. 如果一个人是单身汉，则他不幸福。
2. 如果一个人不幸福，则他死得早。

结论： 单身汉死得早。

$$\begin{array}{c} P \rightarrow Q \\ Q \rightarrow R \\ \hline \therefore P \rightarrow R \end{array}$$

可描述为：P→Q，Q→R 推得 P→R （假言三段论）

1.6 命题公式的蕴涵

(4) 某女子在某日晚归家途中被杀害，据多方调查确证，凶手必为王某或陈某，但后又查证，作案之晚王某在工厂值夜班，没有外出，根据上述案情可得前提如下：

前提： 1. 凶手为王某或陈某。 $P \lor Q$

2. 如果王某是凶手，则他在作案当晚必外出。

$P \to R$

3. 王某案发之晚并未外出。 $\sim R$

结论： 陈某是凶手。 Q

可描述为：

$P \to R$，$\sim R$ 推得 $\sim P$ **(拒取式)**

$P \lor Q$，$\sim P$ 推得 Q **(析取三段论)**

1.6 命题公式的蕴涵

（5） **前提：**

1. 如果某同学为省二级以上运动员，则他将被大学录取。

$P \rightarrow R$

2. 如果某同学高考总分在560分以上，则将被大学录取。

$Q \rightarrow R$

3. 某同学高考总分在560分以上或者是省二级运动员。

$P \vee Q$

结论： 该同学被大学录取。R

可描述为：

$P \vee Q$，$P \rightarrow R$，$Q \rightarrow R$ 推得 R **（二难推论）**

1.6 命题公式的蕴涵

3. 蕴涵式的性质

① 自反性 $A \Rightarrow A$。

② 反对称性:

$$A \Rightarrow B，B \Rightarrow A \quad \text{iff} \quad A \Leftrightarrow B。$$

③ $A \Rightarrow B$ 且A为永真式，则B必为永真式。

1.6 命题公式的蕴涵

④ **传递性，如果A⇒B，B⇒C，则A⇒C。**

证明：由已知条件A ⇒ B，且 B ⇒ C，

根据定义

（A→B）∧（B→C） 是永真式；

再由假言三段论，应有

（A→B）∧（B→C）⇒ A→C ；

再根据性质3， A→C也必是永真式，

即A ⇒ C 。

1.6 命题公式的蕴涵

⑤ $A \Rightarrow B$，$A \Rightarrow C$， iff $A \Rightarrow B \wedge C$。

证明:“$\Rightarrow$” 由 $A \Rightarrow B$ 且 $A \Rightarrow C$

得到$A \to B$和$A \to C$都是永真式，于是

$(A \to B) \wedge (A \to C)$也是永真式;

$(A \to B) \wedge (A \to C)$

$\Leftrightarrow (\sim A \vee B) \wedge (\sim A \vee C)$

$\Leftrightarrow \sim A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow A \to (B \wedge C)$，

所以$A \to (B \wedge C)$是永真式，即$A \Rightarrow B \wedge C$。

“$\Leftarrow$”从证明过程看，性质5反过来也对，即由$A \Rightarrow B \wedge C$可以得到$A \Rightarrow B$ 且 $A \Rightarrow C$ 。

1.6 命题公式的蕴涵

⑥ $A \Rightarrow B$，$C \Rightarrow B$，iff $A \vee C \Rightarrow B$。

⑦ $A \wedge B \Rightarrow C$ iff $A \Rightarrow B \rightarrow C$。

该性质是推理演绎中CP规则的基础

⑧ $A \Rightarrow B$ iff $A \wedge \sim B$ 是矛盾式。

该性质是反证法的基础

1.6 命题公式的蕴涵

定理12 $A \Rightarrow B$当且仅当$\neg B \Rightarrow \neg A$。

证明：（课后练习）

作业

- 习题一

15(1) (3)

18

19(1) (4)

主要内容

- 1.1 命题与逻辑联结词
- 1.2 命题公式与其赋值
- 1.3 命题公式的等价
- 1.4 联结词的完备集
- 1.5 命题公式的范式表示
- 1.6 命题公式的蕴涵
- 1.7 命题逻辑的推理方法

1.7 命题逻辑的推理方法

命题演算的一个主要任务在于提供一种正确的思维规律，即**推理规则**，应用此规则从一些前提中推导出一个结论来，这种推导过程称为**演绎**或**形式证明**。

1. 定义

- 设A, B为命题公式，若A⇒B，则称B是A的**有效结论(逻辑结果)**。
- 一般地，设$A_1, A_2, \ldots A_m$, B是命题公式，如果

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \Rightarrow B,$$

则B是$A_1, A_2, \ldots A_m$的**有效结论**，或称由$A_1, A_2, \ldots A_m$**推出**结论B。（有效论证）

1.7 命题逻辑的推理方法

- 在更一般意义上，我们有下述定义

设G是由一组命题公式组成的集合，如果存在命题公式的有限序列：

$$A_1,\ A_2,\ \cdots\cdots,\ A_n(=B)$$

使得每个A_i要么是G中的某个公式，要么是前面的某些公式A_j（$j<i$）的有效结论，并且A_n就是B，则称公式B是G的逻辑结果（有效结论），或者称由G演绎出结论B来。

- **理解：公式集合G中前提和由某些前提得到的中间结论 $\Rightarrow$ 结论B**

1.7 命题逻辑的推理方法

定义说明：

(1) 若$A1 \wedge A2 \wedge \cdots \wedge Am \Rightarrow B$，则A1, A2, … , Am从推出B，这样的推理是正确的。但是，推理正确不等于结论为真（正确，真实），结论的真假还取决于前提$A1 \wedge A2 \wedge \cdots \wedge Am$的真假，前提为真时，结论B为真；前提为假时，B可能真也可能假，这就是定义中说B是$A1 \wedge A2 \wedge \cdots \wedge Am$的有效结论而不是说正确结论的原因。

(2) 由此可见，推理的有效性是一回事，前提与结论的真实与否是另一回事。所谓推理“有效”，指的是它的结论是在它的前提下合乎逻辑的结果。

1.7 命题逻辑的推理方法

2. 推理规则

⑴ 蕴涵式

⑵ 恒等式

⑶ P规则（前提引用规则）：在推导的过程中，可随时引入前提集合中的任意一个前提及附加前提；

⑷ T规则（逻辑结果引用规则）：在推导的过程中，可以随时引用公式S，该公式S是证明过程中某些中间公式变换出新的公式。

1.7 命题逻辑的推理方法

(5) **CP规则（附加前提规则）：** 如果要推导的结果是形如 $B \to C$ 的公式，则把B作为附加前提，与给定的前提一起推导出C。

即 $A_1, A_2, \cdots, A_n \Rightarrow B \to C$ 当且仅当 $A_1, A_2, \cdots A_n, B \Rightarrow C$

(6) 合取引入规则：$A, B \Rightarrow A \wedge B$

1.7 命题逻辑的推理方法

例22 前提 $P \to Q, R \to \neg Q, R$

结论 $\neg P$

证明：

①	R	P
②	$R \to \neg Q$	P
③	$\neg Q$	T①②假言推理
④	$P \to Q$	P
⑤	$\neg P$	T③④拒取式

1.7 命题逻辑的推理方法

3. 证明方法

形式证明是一个描述推理过程的命题公式序列，其中的每个公式或者是已知前提，或者是中间结论。

（1）直接法

（2）CP规则推理法

（3）反证法

1.7 命题逻辑的推理方法

（1）直接证明法

$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$形式命题，从前提出发，利用已知的基本等价式和蕴涵式构造中间命题，直至导出最后结论。

1.7 命题逻辑的推理方法

例23 求证$S\vee R$是前提$\{P\vee Q, P\to R, Q\to S\}$的有效结论。（构造性二难推论）

证：步骤	公式	依据（注释）
①	$P\vee Q$	P
②	$\sim P\to Q$	T ①，E_1，E_2
③	$Q\to S$	P
④	$\sim P\to S$	T ②，③，I_9
⑤	$\sim S\to P$	T ④，E_{23}
⑥	$P\to R$	P
⑦	$\sim S\to R$	T ⑤，⑥，I_9
⑧	$S\vee R$	T ⑦，E_2，E_1

故 $\{P\vee Q, P\to R, Q\to S\} \Rightarrow S\vee R$

1.7 命题逻辑的推理方法

（2）CP规则推理法

$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B \rightarrow C$形式命题的证明，通常将B作为**附加前提**加入已知前提中，将证明转化为

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge B \Rightarrow C\text{。}$$

（以蕴涵式的性质7为基础）

1.7 命题逻辑的推理方法

例24 证明R→S可以从前提{P→(Q→S)，～R∨P，Q}推出。

证：

①	R	P（附加前提）
②	$\sim R \vee P$	P
③	P	T ①，②，I_8
④	$P \to (Q \to S)$	P
⑤	$Q \to S$	T ③，④，I_5
⑥	Q	P
⑦	S	T ⑤，⑥，I_5
⑧	$R \to S$	CP ①，⑦

1. 7 命题逻辑的推理方法

（3）反证法(归谬法)

$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$形式命题，把$\neg B$作为附加前提，将证明转化为$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B \Rightarrow F$。**($F \Leftrightarrow R \wedge \neg R$)**

（以蕴涵式的性质8为基础）

1.7 命题逻辑的推理方法

例25 证明$\neg P \land \neg Q \Rightarrow \neg(P \land Q)$

证明：（反证法）将$\neg\neg(P \land Q)$作为附加前提

①	$P \land Q$	P(附加前提)
②	P	T① I_1
③	$\neg P \land \neg Q$	P
④	$\neg P$	T③ I_1
⑤	F	T② ④ E_{19}

1.7 命题逻辑的推理方法

例26 **应用题：**证明以下推理是正确的。

如果小张和小王去看电影，则小李也去看电影。

小赵不去看电影或小张去看电影。

小王去看电影。

所以，当小赵去看电影时，小李也去。

解：设P：小张去看电影。Q：小王去看电影。

R：小李去看电影。S：小赵去看电影。

前提：$P \wedge Q \rightarrow R$，$\neg S \vee P$，Q

结论：$S \rightarrow R$

前提：P∧Q→R，¬S∨P，Q

结论：S→R

现用CP规则法证明：

①	S	P(附加前提)
②	¬S∨P	P
③	P	T ① ② 析取三段论
④	P∧Q→R	P
⑤	Q	P
⑥	P∧Q	T ③ ⑤ 合取规则
⑦	R	T ④ ⑥ 假言推理
⑧	S→R	CP① ⑦

1.7 命题逻辑的推理方法

4. 消解原理（归结推理法）

利用规则推理有很大的随意性，不易机械执行，归结推理法是仅有一条推理规则的机械推理法, 容易以程序实现，是定理机器证明的重要方法。是反证法的特殊情况。

- 根据基本蕴涵式I_8（析取三段论）

  即 $P, \sim P \vee Q \Rightarrow Q$

  和基本蕴涵式I_{13}（归结原理）

  $(P \vee Q), (\sim P \vee R) \Rightarrow Q \vee R$

1.7 命题逻辑的推理方法

设$C_1=L\vee C_1'$，$C_2=\sim L\vee C_2'$是两个子句，有互反的一对句节L和～L，则新子句

$$C_3(C_1,C_2)=C1'\vee C2'$$

称作C_1和C_2的消解式（归结式）。

例如：设$C_1=\sim P\vee\sim Q\vee R$，　$C_2=Q$

C_1和C_2消解式：$C_3=\sim P\vee R$

- 利用消解规则构造证明： $A1, A2, \cdots, An \Rightarrow B$

  根据反证法，即需证明 $A1, A2, \cdots, An, \sim B \Rightarrow R \wedge \sim R$

利用消解规则进行推理，其过程为：

1）从 $\{A1, A2, \cdots, An, \sim B\}$ 出发。

2）将 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \sim B$ 转化成合取范式的形式，如

$$P \wedge (P \vee R) \wedge (\sim P \vee Q) \wedge (\sim P \vee R)$$

3）将合取范式中的所有子句（析取式）构成子句集合S，如

$$S=\{P, P \vee R, \sim P \vee Q, \sim P \vee R\}$$

4）对S使用消解规则

对S的子句作归结，即消除互补式（互反对），如子句 $P \vee R$ 与 $\sim P \vee Q$ 作归结，得归结式 $R \vee Q$ 并将这归结式仍放S中，重复这一过程。

5）直至归结出矛盾式（称为空子句，记为□）

1.7 命题逻辑的推理方法

因此，其消解过程就是对S的子句求消解式的过程。

消解式C_3（C_1, C_2）$=C_1' \vee C_2'$ 仅三种情况：

① $C_1=A \vee B$，$C_2= \sim A \vee D$，

则（（$A \vee B$），（$\sim A \vee D$））$\Rightarrow B \vee D$

② $C_1=A$，$C_2=\sim A \vee B$

则（$A, \sim A \vee B$）$\Rightarrow B$

③ $C_1=A$，$C_2= \sim A$

则（A，$\sim A$）$\Rightarrow F$（$\square$）

1.7 命题逻辑的推理方法

例27 如果公司的利润高，那么公司有个好经理或它是一个好企业及大体上是个好的经营年份。现在的情况是：公司的利润高,不是一个好的经营年份。要证明，公司有个好经理。

解：设A：公司的利润高

B：公司有个好经理

C：公司是个好企业

D：大体上是个好的经营年份

则原题可符号化为：

$$(A \rightarrow (B \vee (C \wedge D))) \wedge A \wedge \sim D \Rightarrow B$$

1.7 命题逻辑的推理方法

$P_1: A \rightarrow (B \vee (C \wedge D)) \Leftrightarrow$

$\sim A \vee (B \vee (C \wedge D)) \Leftrightarrow$

$\sim A \vee ((B \vee C) \wedge (B \vee D)) \Leftrightarrow$

$(\sim A \vee B \vee C) \wedge (\sim A \vee B \vee D)$

P_2: A

P_3: $\sim D$

$S=\{\sim A \vee B \vee C, \sim A \vee B \vee D, A, \sim D, \sim B\}$

归结过程（消解步骤）

1.7 命题逻辑的推理方法

步骤	公式	规则
（1）	$\sim A \vee B \vee C$	P 引用子句
（2）	$\sim A \vee B \vee D$	P
（3）	A	P
（4）	$\sim D$	P
（5）	$\sim B$	P
（6）	$B \vee D$	由（2),(3)归结
（7）	B	由（4），（6）归结
（8）	FALSE □	由（5），（7）归结 导出空子句

1.7 命题逻辑的推理方法

说明：

研究消解原理目的在于解决**机器定理证明**过程。显然，消解方法演绎推理具有**机械性**，**其复杂性就是怎样寻找包含互反句节的子句。不同的寻找方式就产生了各种方式的消解算法。**

作业

- ✓习题一：

  20(1)(4)

  21(2)

  23(1)