DMS Chapter 6 函数

第6章 函数

1

DMS Chapter 6 函数

主要内容

- 函数的基本概念
- 单射、满射、双射
- 函数的复合和逆函数
- 置换及置换的表示
- 集合的基数， 等势
- 可数集 和不可数集

2

DMS Chapter 6 函数

概述

- **函数是一种特殊的二元关系。**

  一个函数定义了从定义域(集合A) 到值域(集合B)的一种具体关系。
- **前面所讨论的 集合或关系的某些运算和性质，对于函数完全适用。**
- **任何程序 在计算机中的实现, 都包含 这样或那样的变换。**
  - **如编译程序把一个源程序变换成机器语言的指令集合—目标程序。**
  - **又如计算机中的程序 可以把一定范围内的一组数据变换成另一组数据。**
- **函数是许多数学工具的基础, 计算机科学中大量用到函数,**
  - **如数据结构, 程序语言的设计与实现, 开关理论,自动机理论,代数结构,可计算性理论,计算复杂化,程序正确性证明等。**

3

DMS Chapter 6 函数

函数的定义

定义6.1： 设 A，B是两个非空集合，f 是A到B的一个关系，如果对每个x∈A，都存在唯一的y∈B，使得<x,y>∈f，则称关系f为A到B的(全)函数，记为f：$A \to B$。

- **自变量 和 函数值:**

  当 $\langle x,y\rangle \in f$ 时，通常记为 $y=f(x)$，这时称 x 为函数的自变量（源），称 y 为 x 在 f 下的函数值（像）。
- **定义域和值域**

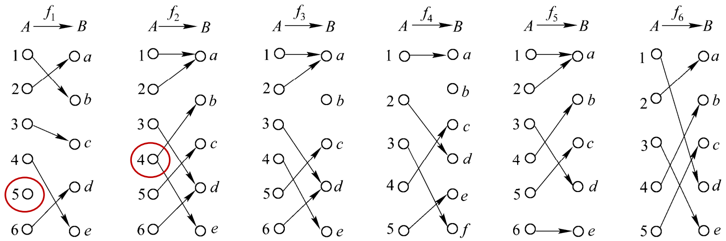
  集合A称为函数 f 的定义域;

  集合B称为函数 f 的值域;

本课程中，一定要逐渐熟悉离散形式的定义域---集合

4

例1 判断下图所示的几个关系是否是函数：



解： f_1、f_2不是函数， f_3、f_4、f_5、f_6都是函数， 。
因f_1中A的元素5 在 B中没有像，f_2中A的元素4 在 B中有2个像。

5

关于函数 f: $A \to B$ 的几个特点

- $|f| = |A|$： A中每个元素在B中都有唯一对应元素(函数值)
- 若 $x1 = x2$， 则 $f(x1) = f(x2)$ ： 唯一
- $f \neq f(x)$， 因为f(x) 表示一个变值，但f 则代表一个关系
- $f(A)$ 称为 集合A 在 f 下的 像集，像集是值域（集合B）的子集
- $A \to B$ 的$2^{|A|\times|B|}$个二元关系中 只有 $|B|^{|A|}$ 个是$A \to B$的函数

函数是一种特殊的二元关系，前面所讨论的有关关系的性质和一些运算，对于函数也适用

6

函数与关系的区别

例2 $A = \{a,b\}$， $B = \{1,2\}$， $A\times B = \{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$，

从A到B的关系有$2^{2*2} = 16$个。分别如下：

$R_0 = \Phi$； $R_1 = \{\langle a,1\rangle\}$； $R_2 = \{\langle a,2\rangle\}$； $R_3 = \{\langle b,1\rangle\}$； $R_4 = \{\langle b,2\rangle\}$；

$R_5 = \{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle\}$； $R_6 = \{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$； $R_7 = \{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle\}$；

$R_8 = \{\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle\}$； $R_9 = \{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle\}$； $R_{10} = \{\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$；

$R_{11} = \{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle\}$； $R_{12} = \{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle\}$；

$R_{13} = \{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$； $R_{14} = \{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$；

$R_{15} = \{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$。

从A到B的不同函数仅有$2^2 = 4$个。分别如下：

$f_1 = \{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle\}$； $f_2 = \{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$；

$f_3 = \{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle\}$； $f_4 = \{\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle\}$。

常将从A到B的所有函数构成的集合记为B^A： $B^A = \{f \mid f: A\to B\}$

$|B^A|$ = ？ ？

7

几个典型函数

- **Euler函数**

  定义域A：正整数集 N^+， 值域B：正整数集 N^+

  f（x） = 不超过x 的正整数中与x互质的元素个数，则称 f 为Euler函数

  如 f(1)=1, f(2)=1, f(3)=2, f(7)=6, f(12)=4 等。

- **单位函数（恒等函数）**

  对任意$x \in X$， $f(x) = x$, 则称 f 为X上的单位（恒等）函数，记为I_X

- **常值函数**

  任意$x \in X$， $f(x) = b$, b为常数， 则称 f 为X上的常值函数

- **符号函数**

$$sign(x) = \begin{cases} 1 & 当\ x > 0 \\ 0 & 当\ x = 0 \\ -1 & 当\ x < 0 \end{cases} \qquad x$$

8

DMS Chapter 6 函数

单射 、满射和双射

每源 有且仅有一像

定义： 设 f 是从X到Y的函数：

- 对任意x1,x2∈X，若x1≠x2，则f(x1)≠f(x2)，则称 f 为从X到Y的单射；(源不同则像不同) 单射必要条件|X| ≤ |Y|
- 若对所有的y∈Y，都存在x∈X，使得y=f(x)，则称 f 为从X到Y的满射 (每像必有源) 满射的必要条件|X| ≥ |Y|
- 若 f 既是单射，又是满射，则称 f 为从X到Y的双射。

双射的必要条件|X|=|Y|

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

2023年11月3日 9

9

DMS Chapter 6 函数

例3 判断下列A→B的关系哪些是函数，若是函数，是否是单射、满射、双射。

1) 设A = {1,2,3,4,5},B = {a,b,c,d,e}。

f_1 = {<1,a>,<2,c>,<3,b>,<4,e>,<5,d>}；

f_2 = {<1,a>,<2,d>,<3,e>}；

f_3 = {<1,a>, <2,c>,<2,d>, <3,e>,<4,b>, <5,c>}；

f_4 = {<1,a>,<2,a>,<3,a>,<4,b>,<5,c>}。

2) 设A = B = R

f_1 = {<x, x^2>| x∈R} / $f_1(x) = x^2$；

f_2 = {<x, x+1>| x∈R} / $f_2(x) = x+1$；

3) 设 A = B = R^+，

$f_1(x) = x^2$； $f_2(x) = 1/x$；

4) 设A = B = R × R

f_1 = {<<x,y>, <x+y, x-y>>| <x,y>∈R × R} / f_1(<x,y>) = <x+y,x-y>；

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

2023年11月3日 10

10

DMS Chapter 6 函数

函数的复合运算及复合函数

设f：X→Y， g：Y→Z是两个函数，则称f 与 g的复合运算

g o f = {<x,z> | (∃y∈Y) [y=f(x) ∧ z=g(y)]}

为函数 f 与 g 的复合函数，记为

g*o*f： X→Z。

(g*o*f) (x) = g (f (x))

注意：函数复合的顺序为从右到左

关系的复合运算顺序是从左到右

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

2023年11月3日 11

11

DMS Chapter 6 函数

复合函数

例4 X={x1,x2,x3,x4}, Y={y1,y2,y3,y4,y5},
Z={z1,z2,z3}, W={w1,w2}

f: X →Y 为: f={<x1,y2>,<x2,y1>,<x3,y3>,<x4,y5>}

g: Y →Z为:
g={<y1,z1>,<y2,z2>,<y3,z3>,<y4,z3>,<y5,z2>}

h: Z →W 为：h={<z1,w1>,<z2,w1>,<z3,w2>}

求 gof, hog, ho(gof), (hog)of

解 gof= {<x1,z2>,<x2,z1>,<x3,z3>,<x4,z2>}

hog = {<y1,w1>,<y2,w1>,<y3,w2>,<y4,w2>,<y5,w1>

ho(gof)= {<x1,w1>,<x2,w1>,<x3,w2>,<x4,w1>}

(hog)of = ={<x1,w1>,<x2,w1>,<x3,w2>,<x4,w1>}

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

2023年11月3日 12

12

函数的复合运算

函数复合的性质

1) **函数复合是可结合的**

2) **函数复合一般是不可交换的**

例5： 设f, g, h 均为R →R的函数若对x ∈R,有 f(x)=x+2, g(x)=3x, h(x)=x^2 则

1) (gof)(x)=g(f(x))= 3x+6 x ∈R

 (fog)(x)= f(g(x))= 3x+2 x ∈R

2) (Ho(gof))(x) = h（g (f(x)))=h((3x+6)) = 9x^2+36x+36

 ((Hog)of)(x)=h(g(x))(f(x))= 9 (x+2)^2=9x^2+36x+36

函数复合

➢ **函数复合的推广：**

给定n个函数:$f_1:X_1 \rightarrow X_2$, $f_2:X_2 \rightarrow X_3$,…,$f_n:X_n \rightarrow X_{n+1}$

$f_n o…f_2 o f_1$ 唯一地表达了从X_1到X_{n+1}的函数。

特别的：若$X_1=X_2=…=X_n=X_{n+1}=X$ 和 $f_1=f_2=…=f_n$

则可用f^n表示从X到X的合成函数$f_n o…o f_2 o f_1$

➢ **等幂函数**

给定函数f: X →X，如果$f^2=f$, 则称 f 为等幂函数

例6 f(x)=x mod m 是等幂函数

∵ $f^2(x)=f(f(x))=f((x \bmod m))= (x \bmod m) \bmod m$

$= x \bmod m = f(x)$

函数复合

例7 设Z是整数集合, 函数f: Z →Z 定义为 f(n)=2n+1。求$f^3(n)$,并判断f是否为等幂函数

解: $f^2(n) = f(f(2n+1))=2(2n+1)+1=4n+3$

$f^3(n)=f(f^2(n))= 2 (4n+3)+1=8n+7$

f 不是等幂函数

单射、满射和双射的复合运算

定理：设 f 和 g 分别是 X 到 Y 和从 Y到Z的函数，则：

1) 如 f, g 是单射，则 gof 也是从X到Z的单射；

2) 如 f, g 是满射，则 gof 也是从X到Z的满射；

3) 如 f, g 是双射，则 gof 也是从X到Z的双射。

DMS Chapter 6 函数

逆函数

➢ **定义:**

设 f: X→Y 是一个函数，若存在一个函数g: Y→X，使得

$$(\forall x)[(g\circ f)(x) = x \wedge (\forall y)[(f\circ g)(y)=y] = T], \ x \in X, y \in Y$$

则称 g 是 f 的**逆函数**，记为 f^{-1}。

(gof)(x) 与 (fog)(y) 均为恒等函数

➢ **定理:**

f 的逆函数存在 **当且仅当** 函数 f 为双射函数

➢ **定理**

若f: X → Y，g: Y → Z且 f 和 g 都是**可逆**的，则

$$(g\circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

DMS Chapter 6 函数

逆函数

例8: 设函数f: R→R, 定义为:

1）$f = \{\langle x,x^2\rangle | x\in R\}$;

2）$f = \{\langle x,x+1\rangle | x\in R\}$。

求f^{-1}。

解:

1）因 $f(x) = x^2$ 不是双射函数，因此 f 的逆函数不存在。

2）因 $f(x) = x+1$ 是双射函数，所以f^{-1}存在:

$f^{-1} = \{\langle x,x-1\rangle | x\in R\}$。

DMS Chapter 6 函数

逆函数

例9: 设函数f: R × R→R × R, 定义为:

$f = \{\langle\langle x,y\rangle, \langle x+y, x-y\rangle\rangle \mid \langle x,y\rangle\in R\times R\}$;

求 f^{-1}。

解: $f(\langle x,y\rangle) = \langle x+y, x-y\rangle$ 是双射函数，所以f^{-1}存在.

令: $u=x+y$, $v=x-y$, 可得 $x=(u+v)/2$, $y=(u-v)/2$

故 $f^{-1} = \{\langle\langle x,y\rangle, \langle (x+y)/2, (x-y)/2\rangle\rangle \mid \langle x,y\rangle\in R\times R\}$;

例10: 设函数f: R →R × R, 定义为:

$f = \{\langle x, \langle x+2, x+3\rangle\rangle \mid x\in R\}$;

求 f^{-1}。

解: 因 $f(x) = \langle x+2,x+3\rangle$ 不是双射函数，因此 f 的逆函数不存在。

DMS Chapter 6 函数

逆函数

函数f: X → Y与其逆函数f^{-1}: Y → X的关系

(1) 若f: X → Y是双射函数，则 f^{-1}: Y → X也是双射函数，

(2) $f\circ f^{-1} = I_Y$， $f^{-1}\circ f = I_X$

(3) $(f^{-1})^{-1} = f$

置换

➢ **置换:**

基数为n的非空有限集合A={$a_1,a_2,\ldots,a_n$}上的双射函数称为n阶置换, 记为π： A→A，n称为置换的阶(数)。常表示为:

$$\pi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \pi(a_1) & \pi(a_2) & \cdots & \pi(a_n) \end{pmatrix}$$

两行表示法----
集合表示法的一种变形

集合表示法，
关系图表示法，
关系矩阵表示法 } 均可用来表示置换

➢ **单位置换**

把每个元素映射到自身的置换称为单位置换/恒等置换。

置换

例 写出集合A={1,2,3}上的所有置换

单位置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

∵ A上的每一个置换都对应A中元素的一种排列。
∴ A上的n阶置换个数 为 n!。

置换

置换是一种函数，函数是一种关系，关系又是一种集合，所以序偶 的书写顺序没有限制，如以下6种写法代表同一种置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

一般情况下，采用第一行按升序的写法

置换的另一种表示法---“循环的积”

置换的两行表示法有时显得有点繁杂，不易看清元素之间的变化关系。置换的另一种表示： **循环的积**

循环：从置换的某个序偶出发，如果它的第二个元素与另一个序偶的第一个元素相同，则将他们串成一个链，重复此过程，直至某个序偶的第二个元素与该链中头元素相同，称该链为一个循环,若链中元素个数为n，则称其为n阶循环

例：集合A={1,2,3,4}上的置换 $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 4)$

循环的积表示

（1 2 4 ）3阶循环 （3） 1阶循环,一般略去不写

把置换中所有的循环变化链按顺序排列，即得置换的 “循环的积”表示法

DMS Chapter 6 函数

置换的另一种表示法---“循环的积”

例：

$$\pi_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&6&5&4&2\end{pmatrix},\ \pi_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&3&5&6&4\end{pmatrix}$$

$$\pi_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}\qquad \pi_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&6&4&2&5\end{pmatrix}$$

“循环的积”表示法：

$\pi 1$ = (2 3 6) (4 5)

$\pi 2$ = (1 2) (4 5 6)

无公共元素

$\pi 3$ = (1)

$\pi 4$ = (1 3 6 5 2)

单位置换的循环的积表示

“循环的积” 在 置换 的关系图 中 对应 各条有向闭合回路中的元素序列

DMS Chapter 6 函数

置换的复合运算

置换是双射函数，所以同一集合上的2个置换也可作复合运算

例：

$$\pi_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&6&5&4&2\end{pmatrix},\ \pi_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&3&5&6&4\end{pmatrix}$$

念作：π_2 与 π_1 的复合

$$\pi_1\circ\pi_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&6&4&2&5\end{pmatrix}$$

念作：π_1 与 π_2 的复合

$$\pi_2\circ\pi_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&6&5&1\end{pmatrix}$$

注意：跟函数复合一样，置换复合的顺序为从右到左

DMS Chapter 6 函数

置换的逆运算

置换是双射函数，所以置换也可作逆运算

例11：

$$\pi_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&6&5&4&2\end{pmatrix},\ \pi_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&3&5&6&4\end{pmatrix}$$

求：π_1^{-1}， π_2^{-1}， $\pi_1^{-1}\circ\pi_2^{-1}$ 并以循环的积表示

DMS Chapter 6 函数

集合的基数

- **集合的基数**就是集合中元素的个数，是集合**容量(尺度)**的度量。
  - ✓ 集合X的**基数**一般记为 card(X)
  - ✓ 如果集合A是**有限集**，通常将 card(X) 记为 | A |
- **集合的分类**
  1. 有限集
  2. 无限集
     - ✓ N， Z， 偶数集， 素数集， ….
     - ✓ 实数集， (0,1)， (1/4, 1/2)， ….

可数(无限）集

不可数集

集合的基数

Q1：如何描述无限集的基数?

Q2：无限集的容量（基数）都一样吗?

Q3：可数无限集的容量（基数）都一样吗?

Q4： 有无所不包的集合吗?

等势

- 定义： 若能够在集合X和集合Y之间建立双射，则称 X与Y **等势**，记为： $X \sim Y$

  证明**两个集合等势**，只需找到他们之间的**一个双射**即可

- 定理1： **等势是集合族上的等价关系。**

  即对任意的集合A、B、C，

  ① $A \sim A$

  ② $A \sim B \Rightarrow B \sim A$

  ③ $A \sim B$ 且 $B \sim C \Rightarrow A \sim C$

等势

例12： 设 Δ是全体英文大小写字母构成的集合，$N_m=\{x \mid x$是正整数，且 $x \le m\}$，证明$\Delta \sim N_{52}$

证： $f = \{<a,1>, <b,2>, \ldots <z,26>, <A,27>, <B,28>, \ldots\ldots <Z,52>\}$

例13： 证明 N^+与正偶数集 E^+ 是等势的

证： $y = f(x) = 2x \quad x \in N^+, \quad y \in E^+$

例14： 证明 $R \sim (0, 1)$

证： 建立映射 $y = f(x) = \tan(x\pi - \pi/2)$

当 $x \in (0,1)$时， $x\pi - \pi/2 \in (-\pi/2, \pi/2)$, $y \in R$

显然，函数 f 是一个双射，所以 $(0, 1) \sim R$

等势

存在从X到Y的双射

定理2： $X \sim Y$ 当且仅当 $card(X) = card(Y)$

定理3： 设X， Y是两个集合，若**存在**从X到Y的**单射**，但**不存在**从X到Y的**双**射，则$card(X) < card(Y)$

记 $N_m=\{x \mid x$是正整数，且 $x \le m\}$，

- 定理4： 如果 $m < n$，则**不**存在从N_n到N_m的**单**射。

DMS Chapter 6 函数

有限集与无限集

- **定义1**：如果X是非空集，如果存在自然数m，使得$X \sim N_m$，则称X为的有限集(基数为m)，否则称X为无限集。
- **定理5**：自然数集N是无限集。
- **定义2**：自然数集N的基数一般记为$\aleph_0$，读为"阿列夫0"。
- **定理5**：非空集合X是无限集 当且仅当 存在从N到X的单射。

$\aleph_0$=card(N) <= card(X)

无限集要么与N等势，要么基数大于$\aleph_0$

2023年11月3日 33

33

DMS Chapter 6 函数

可数集

- **定义3**：凡是与自然数集N 等势的集合 称为可数集。可数集的基数也记为 $\aleph_0$
  - Z，O，E，Q，O^+，E^+，Q^+ …都是可数集
- **定理6**：可数集的任一无限子集 为 可数集。
- **定理7**：可数个可数集的并集 仍为 可数集。
- **推论1**：N×N是可数集。
- **定理8**：有理数是可数集

2023年11月3日 34

34

DMS Chapter 6 函数

可数集

例16 证明下列集合是可数集合：

(1) 正奇数集O^+

证：（1）在O^+与N之间建立双射 f：N→O^+：

N	0	1	2	3	4	…	n	…
f	↓	↓	↓	↓	↓	…	↓	
O^+	1	3	5	7	9	…	2n+1	…

$f(n)=2n+1$

所以，O^+是可数集合。

(2) 整数集合 Z

证：在N与Z之间建立双射f：N→Z：

N	0	1	2	3	4	…	2n-1	2n	…
	↓	↓	↓	↓	↓	…	↓	↓	…
Z	0	1	-1	2	-2	…	n	-n	…

$$f(n)=\begin{cases}\frac{(n+1)}{2} & n\text{为奇数}\\ -\frac{n}{2} & n\text{为偶数}\end{cases}$$

所以，Z是可数集合。

2023年11月3日 35

35

DMS Chapter 6 函数

不可数集

N到R有单射，但无双射

- **定理10**：实数集R是不可数集

  R的基数常记为$\aleph$，读作" 阿列夫"。

(0,1) ~ R

- **推论2**：开区间(0,1) 是不可数集，凡是与开区间(0,1)等势的集合都是不可数集，基数均记为$\aleph$
- 有限集A，可数集和不可数集的基数(容量)之间有以下关系：

$$|A| < \aleph_0 < \aleph$$

2023年11月3日 36

36

DMS Chapter 6 函数

Cantor定理

Cantor定理：

设M是任一集合，S是M的幂集，那么，

card(M) < card(S)

此定理表明：

没有最大基数的集合，也就没有最大的集合，因此就不存在无所不包的集合。

2023年11月3日

37

37

DMS Chapter 6 函数

集合的基数—总结

Q1：如何描述无限集的基数?

A1： $\aleph_0$, $\aleph$

Q2：无限集的容量（基数）都一样吗?

A2：定性分为两大类： $\aleph_0 < \aleph$

Q3：可数无限集的容量（基数）一样吗?

A3：一样,，为 $\aleph_0$ **（定性，数学角度），也不一样（定量）**

Q4：有无所不包的集合吗?

A4：无

2023年11月3日

38

38