§3.5 多维随机变量

***n*维随机变量**：设$X_1,L\ ,X_n$为定义在样本空间Ω上的随机变量，那么（$X_1,L\ ,X_n$）作为一个整体看就是一个**n维随机变量**, 每个X_i单独看就是一维随机变量。

*n*维随机变量的本质上与二维随机变量相同，与二维的情形类似，可以定义n维随机变量的联合分布，边缘分布，离散型与连续型以及独立性等概念。

定义3.9：设（$X_1,\cdots,X_n$）是**n维随机变量**, n元实函数

$$F(x_1,\cdots,x_n)\triangleq P(X_1\le x_1,\cdots,X_n\le x_n),\forall x_i\in R,i=1,\cdots,n$$

称为（$X_1,\cdots,X_n$）的联合分布函数。而X_i的分布函数

$$F_i(x_i)\triangleq P(X_i\le x_i),\forall x_i\in R$$

称为关于X_i的边缘分布函数。

定义3.10：设（$X_1,\cdots,X_n$）是**n维随机变量**, 若（$X_1,\cdots,X_n$）的联合分布函数等于边缘分布函数之积，即：

$$F(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F_i(x_i),\forall x_i$$

那么称$X_1,\cdots,X_n$相互独立。

n维离散型随机变量：设（$X_1,\cdots,X_n$）是**n维随机变量**，若（$X_1,\cdots,X_n$）取值只有有限多或可列多个，则称（$X_1,\cdots,X_n$）是**离散型**。

$$p_{i_1\cdots i_n} = P(X_1 = x_1,\cdots,X_n = x_n), i_1,\cdots,i_n = 1,2,\cdots$$

称为其**联合分布律**。而关于X_i的分布律则称为**边缘分布律**。

离散型随机变量独立当且仅当联合分布律等于边缘分布律之积

n维连续型随机变量：设（$X_1,\cdots,X_n$）是**n维随机变量**，设（$X_1,\cdots,X_n$）的分布函数为$F(x_1,\cdots,x_n)$，若存在非负函数$f(x_1,\cdots,x_n)$使得

$$F(x_1,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_n}\cdots\int_{-\infty}^{x_1} f(u_1,\cdots,u_n)du_1\cdots du_n,\ \forall(x_1,\cdots,x_n)$$

则称（$X_1,\cdots,X_n$）是**连续型**，$f(x_1,\cdots,x_n)$为**联合密度函数**。

连续型随机变量独立当且仅当联合密度等于边缘密度之积。

分布的可加性

定理3.11（二项分布的可加性）：设 X,Y 相互独立且 $X \sim B(m,p)$, $Y \sim B(n,p)$，则 $Z = X+Y \sim B(m+n,p)$.

证 由二项分布的概率公式及离散型卷积公式，

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}C_m^i p^i q^{m-i} C_n^{k-i} p^{k-i} q^{n-k+i} = p^k q^{m+n-k}\sum_{i=0}^{k}C_m^i C_n^{k-i}$$

$$= p^k q^{m+n-k} C_{m+n}^k,\quad k=0,1,2,\cdots$$

其中 $q=1-p$，**这里应用了公式** $\sum_{i=0}^{k}C_m^i C_n^{k-i} = C_{m+n}^k$

应用：若$X \sim B(n,p)$,那么可以把X看作n个相互独立同0-1分布X_i的和，即$X_i \sim B(0,1)$ 且相互独立$X = X_1 + \cdots + X_n$

分布的可加性: 若$X_1,\cdots,X_n$是**相互独立**且服从**同一分布类型**的随机变量时，$X_1+\cdots+X_n$也服从**该类型分布**，则称该类分布具有**可加性**。

定理3.12（Poisson分布的可加性）：设X,Y相互独立且

$$X\sim p(\lambda),\ Y\sim P(\mu)$$

则

$$Z=X+Y\sim P(\lambda+\mu).$$

定理3.14: 设$X_i\sim\Gamma(\alpha_i,\beta),i=1,\cdots,n$,且$X_1,\cdots,X_n$相互独立，那么$X_1+\cdots+X_n\sim\Gamma(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,\beta)$

$Z = Max\{X,Y\}$，$Z = Min\{X,Y\}$的分布

设X 与Y 是两个相互独立的随机变量，其分布函数分别为 $F_X(x), F_Y(y)$，又设

$$M = Max\{X,Y\}, \quad N = Min\{X,Y\},$$

则M 和N 也是随机变量，那么它们的分布又是怎样的呢？下面定理给出了回答。

定理 在以上条件下，随机变量M和N的分布函数分别为

$$F_M(z)=F_X(z)F_Y(z),\quad F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]。$$

证明 在以上条件下，

$$F_M(z)=P(M\le z)=P(Max\{X,Y\}\le z)=P(X\le z,Y\le z)$$

$$=P(X\le z)P(Y\le z)=F_X(z)F_Y(z);$$

$$F_N(z)=P(N\le z)=1-P(N>z)=1-P(X>z,Y>z)$$

$$=1-P(X>z)P(Y>z)=1-[1-P(X\le z)][1-P(Y\le z)]$$

$$=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]。$$

在将上述定理推广到 n 维，有

定理 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且他们的分布函数分别为 $F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \cdots, F_{X_n}(x_n)$

记 $M = Max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，$N = Min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，

则M 和N 的分布函数分别为

$$F_M(z) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(z), \qquad F_N(z) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_{X_i}(z))。$$

特别地，若 $F_{X_i}(x) = F(x)(i = 1, 2, \cdots, n)$， 即各随机变量的分布函数相同，则

$$F_M(z) = (F(z))^n，F_N(z) = 1 - (1 - F(z))^n。$$

例： 设某系统由 4 个相互独立的电子元件组成，其连接方式是（1）并联，（2）串联。若每个元件的寿命 $T_i \sim e(0.5)(i=1,2,3,4)$(单位：万小时）。试就以上两种连接方式求系统使用寿命的密度函数及寿命大于 4×10^4 小时的概率。

解：显然。对每个 $T_i(i=1,2,3,4)$，有分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-0.5t}, & t>0,\\ 0, & else。\end{cases}$$

（1） 连接方式为并联时，系统的寿命为

$$T=Max\{T_1,T_2,T_3,T_4\}。$$

由以上定理，有

$$F_T(t)=(F(t))^4=\begin{cases}(1-e^{-0.5t})^4, & t>0,\\ 0, & else。\end{cases}$$

从而有

$$f_T(t)=\begin{cases}2(1-e^{-\frac{1}{2}t})^3, & t>0,\\ 0, & t\le 0。\end{cases}$$

所求概率为

$$P(T>1.2)=1-P(T\le 1.2)=1-F_T(1.2)$$

$$=1-(1-e^{-\frac{1}{2}\times 1.2})^4\approx 0.9586。$$

（2） 连接方式为串联时，系统的寿命为

$$T = Min\{T_1, T_2, T_3, T_4\}。$$

由以上定理，有

$$F_Z(t) = 1 - (1 - F(t))^4 = \begin{cases} 1 - e^{-2t}, & t > 0, \\ 0, & else。 \end{cases}$$

从而有

$$f_Z(t) = \begin{cases} 2e^{-2t}, & t > 0 \\ 0, & t \le 0.。 \end{cases}$$

所求概率为

$$P(T > 1.2) = 1 - P(T \le 1.2) = 1 - F_T(1.2) = e^{-2\times 1.2} \approx 0.0907。$$