§5.2 正态分布的数字特征与线性性质

定理5.2 设随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则X的期望与方差分别为：$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$

证：设$Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，则$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=0$

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2$$

$$=E(Y^2)=\int_{-\infty}^{\infty} y^2\cdot f(y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} y^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=2\int_0^{\infty} y^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$\xrightarrow{\text{换元，令}\frac{y^2}{2}=t} 2\int_0^{\infty} 2t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t}(2t)^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{3}{2})=1$$

定理5.3 设随机变量$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $Y=aX+b \sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$,其中$a \neq 0$.

证: X的密度函数$f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}},x \in R.$

由于$y=ax+b$是线性函数，可利用公式求Y的密度

$$f_Y(y)=\frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|}e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|}e^{-\frac{(y-(au+b))^2}{2(a\sigma)^2}}, \qquad \forall \quad y \in (-\infty,+\infty),$$

这表明Y：$N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$;

正态分布的可加性

定理5.4 设$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,且$X$与$Y$相互独立，则X+Y~N$(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

定理5.5 设随机变量 $X_1,X_2,\dots,X_n$ 相互独立，且 $X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2), i=1,2,\dots,n$

$C_1,C_2,\dots,C_n$为常数，则

$$Z=\sum_{i=1}^{n}C_iX_i \sim N(\sum_{i=1}^{n}C_i\mu_i,\sum_{i=1}^{n}C_i^2\sigma_i^2)$$

即：独立的正态分布线性组合仍然服从正态分布.

独立同分布情形的结论

即随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立

且 $X_i \sim N(\mu, \sigma^2), i = 1,2,\ldots,n$ 则

$$\boxed{Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})}$$

注意

$$E(Z) = \frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \mu$$

$$D(Z) = \frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{\sigma^2}{n}$$

例5.5 设某地区成年女子的身高 $X \sim N(1.58, 0.05^2)$

在这一地区随机选100名成年女子，

（1）求至多两名女子身高超过1.70的概率；

（2）求100名女子平均身高超过1.60的概率

解：（1）先计算任选的一名女子身高超过1.70的概率，

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu=1.58,\ \sigma=0.05,$$

$$P(X>1.7) = 1\text{-}P(X \le 1.7) = 1-\Phi(\frac{1.7-1.58}{0.05})$$

$$=1-\Phi(2.4)=1-0.9918=0.0082.$$

令**Y**表示**100**名女子身高超过**1.7**的人数，则

Y~B(100，0.0082)，

因为**n**较大，**p**较小，故**Y**近似服从参数为**np=0.82**的泊松分布,故

$$P(Y \le 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)$$

$$\approx \sum_{k=0}^{2} \frac{(0.82)^k}{k!} e^{-\lambda} \approx 0.9496$$

(2) 设**100**名女子的身高为 $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$

它们独立同分布于 $N(1.58, 0.05^2)$ 平均身高为

$$Z = \frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} X_k$$ 由正态分布可加性，有

$$Z \sim N(1.58, \frac{0.05^2}{100}) = N(1.58, 0.005^2)$$

只须计算**P（Z>1.6）=?**

$$P(Z>1.6) = 1\text{-}P(Z \le 1.6) = 1 - \Phi(\frac{1.6-1.58}{0.005})$$

$$= 1 - \Phi(4) = 1 - 1 = 0.$$