第一部分　数理逻辑

第1章　命 题 逻 辑

计算机（软件）学院

林　兰

linlan@scu.edu.cn

数 理 逻 辑

- 数理逻辑（Mathematical Logic）是用数学的方法研究推理过程的一门学科；

主要研究内容是推理，特别着重于推理过程是否正确；它不是研究某个特定的语句是否正确，而是着重于语句之间的关系。

数学方法就是引进一套符号体系的方法，所以数理逻辑又叫符号逻辑（**Symbolic Logic**）。

第一章　命题逻辑

命题逻辑也称**命题演算，或语句逻辑。**它研究以**命题**为基本单位构成的**前提和结论**之间的可推导关系，研究什么是命题？如何表示命题？如何由一组前提推导一些结论？

主要内容

- 1.1 命题与逻辑联结词
- 1.2 命题公式与其赋值
- 1.3 命题公式的等价
- 1.4 联结词的完备集
- 1.5 命题公式的范式表示
- 1.6 命题公式的蕴涵
- 1.7 命题逻辑的推理方法

1.1 命题与逻辑联结词

1. 命题

定义: 能够确切判断其结论是真或假的陈述句称为命题。

（命题是一个或真或假的陈述句，但不能既真又假。）

例如：	6是质数。	假命题
	现在是白天。	真命题
	x>y。	不是命题
	请不要吸烟！	不是命题

☞ **命题的要素：陈述句+确定的真假值**

1.1 命题与逻辑联结词

- 如上，如果命题所表达的内容与客观实际相符，则称为真命题；否则称之为假命题。

- **命题的这种真假属性称为命题的真值。**

(真值)	真	T	1
	假	F	0

1.1 命题与逻辑联结词

例1 下述都是命题，判断它们的真值。

（1）孔夫子是我国古代伟大的思想家和教育家。 T

（2）3+3=6。 T

（3）2是偶数而3是奇数。 T

（4）白天比夜晚时间长。 T/F

（5）1+101=110。 T/F

命题所取的真值可能根据具体的条件而变化。

（6）两个三角形全等，当且仅当它们的对应角相等。F

1.1 命题与逻辑联结词

例2 下述都不是命题，为什么？

（1）$x+y>4$。

（2）$x=3$。

x, y 是变元，无法确定真值。

（3）真好啊！

（4）现在是几点钟？

（5）让我们一起走吧！

（6）我们要不畏艰难，勇于攀登。

感叹句、疑问句、祈使句。

1.1 命题与逻辑联结词

例3 （1）我正在说假话。

（2）本命题是假的。

悖论： 由真推出假，又由假推出真的陈述句。

悖论不是命题。

An ancient Sicilian legend says that the barber in a remote town who can be reached only by traveling a dangerous mountain road shaves those people, and only those people, who do not shave themselves. Can there be such a barber?

https://plato.stanford.edu/archives/win1997/entries/russell-paradox/

1.1 命题与逻辑联结词

- 原子命题(简单命题)：若一个命题已不能分解成更简单的命题。
- 复合命题：原子命题通过一些联结词构成新命题。

上面例1中哪些是原子命题?

（1）孔夫子是我国古代伟大的思想家和教育家。

√ （2）3+3=6。

（3）2是偶数而3是奇数。

√ （4）白天比夜晚时间长。

√ （5）1+101=110。

（6）两个三角形全等，当且仅当它们的对应角相等。

1.1 命题与逻辑联结词

2. 命题的形式化（翻译）

- 字母表示命题：P,Q,R,S……p,q,r,s….

（除T, F特殊意义外的字母）

例如：P表示原子命题“4是质数”，记为 **P: 4是质数。**

例 4 令P：明天下雪　　Q：明天下雨

明天不下雪。	非P
明天下雪并且明天下雨。	P并且Q
明天下雪或者明天下雨。	P或Q

这里，联结词“不”，“并且”，“或”。

1.1 命题与逻辑联结词

- 常见命题联结词:

(1) 否定联结词¬

设P表示命题，“P的否定”是另一命题，记作 ¬P或~P，读作“非P”。

真值表：

P	¬P
0	1
1	0

✓ 否定是一个一元逻辑运算。

1.1 命题与逻辑联结词

- 例如

  P: 明天下雪。

  ¬P: 明天不下雪。

  Q: 这些都是男同学。

  ¬Q: 这些不都是男同学。(√)

  这些都不是男同学。(×)

1.1 命题与逻辑联结词

(2) 合取联结词 ∧

设P和Q是命题， 则“P并且Q”也是一命题，称为P和Q的合取，记作“P∧Q”，读作“P与Q”， “P并且Q”。

真值表：

P	Q	P∧Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

合取是一个可交换的二元运算，命题的合取可看成命题相乘，叫逻辑乘。

1.1 命题与逻辑联结词

合取联结词的多种自然语言表达：

- 和
- 与
- 并且
- 既…又…
- 不仅…而且…（而…）
- 虽然…但是…（尽管…但…）

1.1 命题与逻辑联结词

- 例如

（1）设P: 王华的成绩很好，Q: 王华的品德很好。

$P \wedge Q$: 王华的成绩很好并且品德很好。

（2）设R: 阳光灿烂，S: 天在下雨。

“阳光灿烂，但是在下雨。” 符号化为：

$$R \wedge S$$

> ➢ **注意语句所表述的准确含义。**
>
> 例如： 设P: 林芬做作业， Q: 林芳做作业。
>
> “林芬和林芳同在做作业” 记为 $P \wedge Q$
>
> “林芬和林芳是姐妹” ✓ **原子命题**

1.1 命题与逻辑联结词

(3) 析取联结词 $\vee$

设P和Q是命题， 则“P或Q”也是一命题，称为P和Q的析取，记作“$P\vee Q$”，读作“P或Q”， “要么P，要么Q”， “不是P,就是Q”。

真值表:

P	Q	$P\vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

可兼或

析取为可交换的二元运算，也可称为逻辑加。

1.1 命题与逻辑联结词

例5 (a) 令P：张晓静爱唱歌。Q：张晓静爱听音乐。

张晓静爱唱歌或爱听音乐。

$P \vee Q$ 可兼或

(b) 令P：张晓静挑选202房间。Q：张晓静挑选203房间。

张晓静只能挑选202或203房间。

$\boxed{(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)}$ 排斥或（不可兼或）

$P \bigtriangledown Q$

1.1 命题与逻辑联结词

- “排斥或”：记为P▽Q，公式中可读作“**异或**”。

真值表：

P	Q	P▽Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

≠

∨和∇的真值表是不同的

P	Q	P∨Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

1.1 命题与逻辑联结词

(4) 条件联接词 →

设P和Q是命题， 则“如果P，那么Q”也是一命题，记作“P→Q”，称为条件命题，读作 “如果P，那么Q”。

- 其中，运算对象P叫做前件或前提、假设，Q叫做后件或结论。

1.1 命题与逻辑联结词

- 真值表

P　　Q	P→Q
0　　0	1
0　　1	1
1　　0	**0**
1　　1	1

✓ **理解：**只有在前提成立的情况下，考虑条件命题的真假，至于前提不成立的情况，我们不予考虑，此时，不管后件是真是假均可认为是真。

☞ 条件是二元运算，不可交换。

1.1 命题与逻辑联结词

- 对于“P→Q”的形式，在自然语言中，条件联结词的多种表达方式：
  - 如果P，那么Q
  - 只要P，就Q
  - P是Q的充分条件
  - Q每当P（当P则Q）
  - Q，除非¬P
  - 除非¬P，否则Q
  - 只有Q，才P
  - 除非Q，否则¬P
  - Q是P的必要条件
  - P仅当Q

练习： 令P: 张华学习离散数学。Q: 张华将找到好工作。

P → Q表示什么意思？（符号的具体化）

1.1 命题与逻辑联结词

例6 (a) P: 天不下雨， Q: 草木枯黄。

P→Q: 如果天不下雨，那么草木枯黄。

- **前件和后件之间有逻辑联系-形式条件命题**

(b) W:今天是星期天，V: 2+3=5。

W→V: 如果今天是星期天，那么2+3=5 。

- **前件和后件之间无必然内在联系-实质条件命题（善意推定）**

一般后者包含前者，数理逻辑中的条件语句一般为后者。

1.1 命题与逻辑联结词

(5) 双条件联结词 ↔

设P和Q是命题，则“P当且仅当Q”也是命题， 记为P ↔ Q，称为双条件命题（等值式），可读作“P逻辑等值于Q”。

真值表

P	Q	P↔Q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

双条件是可交换的二元运算。

1.1 命题与逻辑联结词

双条件命题可表述为：

- **P当且仅当Q**
- **P逻辑等值于Q**
- **P是Q的充要条件**

例7 两个三角形相似，当且仅当它们的对应角相等或者对应边成比例。

符号化为：？

1.1 命题与逻辑联结词

例8 Q：玛丽莲·梦露是男人。 S：大象会飞。

$Q \leftrightarrow S$：玛丽莲·梦露是男人当且仅当大象会飞。

判断这个命题的真假?

上例中，复合命题的含义在日常生活中是难以理解的（两个命题间无内在联系），但在数理逻辑中是允许的，也是正确的（符合定义即可，考虑的是命题间的形式关系）。

1.1 命题与逻辑联结词

3. 逻辑运算符的优先级

运算符	优先级
¬	1
∧	2
∨	3
→	4
↔	5

- 同级的联结词，按其出现的先后次序(从左到右)计算；
- 若运算要求与优先次序不一致时，可使用括号改变优先级；括号中的运算为最优先级。

✍ 翻译练习：

（1）令P：气温在零度以下。Q：正在下雪。

用P、Q和逻辑联结词写出下列各命题的逻辑符号形式。

① 气温在零度以下且正在下雪。

② 气温在零度以下，但没下雪。

③ 气温不在零度以下，也不下雪。

④ 也许在下雪，也许在零度以下。

⑤ 若气温在零度以下，那也就在下雪。

⑥ 也许气温在零度以下，也许在下雪，但如果在零度以下，就不在下雪。

⑦ 气温在零度以下是下雪的充分必要条件。

（2） 令P：天下雨。 Q：他乘班车上班。

a) 只要天下雨，他就乘班车上班。

b) 只有天下雨，他才乘班车上班。

c) 除非天下雨，否则他不乘班车上班。

小结：

(1) **～、∨、∧联结词是最基本的，其它联结词的功能都可以用它们表示出来。**

(2) 联结词是句子与句子之间的联结，而非单纯的名词、形容词、数词等的联结；

(3) 联结词是两个句子真值之间的联结，而非句子的具体含义的联结，两个句子之间可以无任何的内在联系；

(4) 将自然语言翻译为命题逻辑表达式时，要消除自然语言的二义性和不确定性，再符号化。

例如：“银行利率一降低，股价随之上扬。”

=“只要…就…”

这是自然语言具有不精确性造成，但在数学和逻辑上应注重精确性。该命题应该是**条件命题**。

作业

- ✓ 习题一

1、2

主要内容

- 1.1 命题与逻辑联结词
- 1.2 命题公式与其赋值
- 1.3 命题公式的等价
- 1.4 联结词的完备集
- 1.5 命题公式的范式表示
- 1.6 命题公式的蕴涵
- 1.7 命题逻辑的推理方法

1.2 命题公式及其赋值

1. 命题常元和命题变元

- 命题常元：**T，F**
- 命题变元：以“真”、“假”值为变域的变元。

例如：字母符号 **P, Q, R, S…** （原子变元）

1.2 命题公式及其赋值

2. 命题公式/合适公式

定义（命题公式）：将命题常元，变元用联结词、括号按一定逻辑关系联结起来的符号串。

① 单个命题变元和命题常元是命题公式（称为原子公式）。

② 若A，B为命题公式，则 $(\neg A)$，$(\neg B)$，$(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\rightarrow B)$，$(A \leftrightarrow B)$是命题公式。

③ 有限应用①和②生成的命题表达式是命题公式。

- **通常简称为“公式”。**

定义（子公式）：如果合适公式A的一个子串P也是合适公式，则称P是A的子合适公式（简称子公式）。

1.2 命题公式及其赋值

例如　符号串：

$$((P\wedge(Q\vee R))\rightarrow(Q\wedge((\sim S)\vee R)));$$

$$((\sim P)\wedge Q);\qquad (P\rightarrow(\sim(P\wedge Q)))$$

等都是命题公式。

符号串：

$$(P\rightarrow Q)\wedge\sim Q);\qquad (\sim P\vee Q\vee(R;\qquad P\vee Q\vee$$

等都不是合法的命题公式。

✓ 简化书写：

① 约定公式的最外层括号可以省去；

② 根据“逻辑运算符优先级”，可以去掉不改变公式运算顺序的子公式括号。

1.2 命题公式及其赋值

3.真值表

设A是以$P_1,P_2,\ldots P_n$为变元的命题公式，给$P_1,P_2,\ldots P_n$各指定一个真值，称为对A的一个**真值指派（赋值、解释）**。对应于这个解释，公式本身得到一个值。我们把对公式的全部解释构成的表称作**真值表**。

- **一般来说，若有 n 个命题变元，则应有2^n个不同的赋值。**

1.2 命题公式及其赋值

例9 构造命题公式 ¬((P∨Q) ∧P) 的真值表。

原子变元的赋值　　中间过程（子公式）值　　命题公式的值

P	Q	P∨Q	(P∨Q) ∧P	¬((P∨Q) ∧P)
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	1	0

1.2 命题公式及其赋值

例10 (a)：构造公式G1：～P∨Q的真值表。

P	Q	～P	～P∨Q
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

✓ 比较： ～P∨Q 与 P→Q 的真值表。 完全一致！

1.2 命题公式及其赋值

例10 (b)：构造公式G2: (P→Q) ∧(P∧～Q)的真值表。

P	Q	P→Q	P∧～Q	(P→Q)∧(P∧～Q)
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

✓ 此公式对所有可能的解释取值均为“假”。

1.2 命题公式及其赋值

例10(c)：构造公式G3：$(P \to Q) \vee P$ 的真值表。

P	Q	$P \to Q$	$(P \to Q) \vee P$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

✓ 此公式对所有可能的解释取值均为“真”。

1.2 命题公式及其赋值

4. 命题公式类型

(1) 定义：

- 如果对命题公式的任何解释，公式均取值1，则称这个公式为**永真式（重言式）**，可记为T。
- 如果对命题公式的任何解释，公式均取值0，则称这个公式为**矛盾式（永假式）**，可记为F。
- 一个公式中，若至少存在一个解释使公式取值1，则称这个公式为**可满足的**。

1.2 命题公式及其赋值

(2) 判定方法

① 真值表

② 替换规则

③ 范式

1.2 命题公式及其赋值

(3) 永真式的特点

定理1 两个永真式的合取式或析取式仍是一个永真式；

两个矛盾式的合取式或析取式仍是一个矛盾式。

永真式特点：

① 永真式的否定是矛盾式，矛盾式的否定是永真式。

② 两个永真式的合取、析取、条件、双条件都是永真式。

③ 永真式中有许多有用的恒等式和永真条件式。

作业

- 习题一

  3 (2) (3)

  4 (1) (4)

主要内容

- 1.1 命题与逻辑联结词
- 1.2 命题公式与其赋值
- 1.3 命题公式的等价
- 1.4 联结词的完备集
- 1.5 命题公式的范式表示
- 1.6 命题公式的蕴涵
- 1.7 命题逻辑的推理方法

1.3 命题公式的等价

引入： 对比公式 $\neg(P\wedge Q)$ 与公式 $\neg P\vee\neg Q$ 的真值表。

P	Q	$\neg(P\wedge Q)$	$\neg P\vee\neg Q$
0	0	**1**	**1**
0	1	**1**	**1**
1	0	**1**	**1**
1	1	**0**	**0**

真值完全一致！

$$\neg(P\wedge Q) \Leftrightarrow \neg P\vee\neg Q$$

1.3 命题公式的等价

例如： (右)“今天我要么不能吃饭，要么不能睡觉。”

等价于(左) “今天我不能既要吃饭也要睡觉。”

1. 定义

设A和B是命题公式，如果对A和B的任何解释都导致A和B有相同的真值，则称A和B是等价的，记为 $A \Leftrightarrow B$，叫做逻辑恒等式，读作“A恒等于B”或“A等价于B”。

如上例： $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

De Morgan 定律
（德 · 摩根定律）

☞注意：区别符号 $\leftrightarrow$ 与符号 $\Leftrightarrow$

- $\leftrightarrow$ 是公式中的逻辑联结词。
- $\Leftrightarrow$ 是表示两个公式等价关系的符号。

1.3 命题公式的等价

2. 等价式性质

① 自反性：$A \Leftrightarrow A$。

② 对称性：若$A \Leftrightarrow B$，则$B \Leftrightarrow A$。

③ 可传递性：若$A \Leftrightarrow B$，$B \Leftrightarrow C$，则$A \Leftrightarrow C$。

1.3 命题公式的等价

3. 基本等价式

E_1: $\neg\neg P \Leftrightarrow P$	双否定律	E_{13}: $\neg(P\vee Q) \Leftrightarrow \neg P\wedge\neg Q$ E_{14}: $\neg(P\wedge Q) \Leftrightarrow \neg P\vee\neg Q$	德.摩根律
E_2: $P\rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P\vee Q$	蕴涵律		
E_3: $P\vee P \Leftrightarrow P$ E_4: $P\wedge P \Leftrightarrow P$	幂等律	E_{15}: $P\vee F \Leftrightarrow P$ E_{16}: $P\wedge T \Leftrightarrow P$	同一律
E_5: $P\vee Q \Leftrightarrow Q\vee P$ E_6: $P\wedge Q \Leftrightarrow Q\wedge P$	交换律	E_{17}: $P\vee T \Leftrightarrow T$ E_{18}: $P\wedge F \Leftrightarrow F$	零律
E_7: $(P\vee Q)\vee R \Leftrightarrow P\vee(Q\vee R)$ E_8: $(P\wedge Q)\wedge R \Leftrightarrow P\wedge(Q\wedge R)$	结合律	E_{19}: $P\vee\neg P \Leftrightarrow T$ E_{20}: $P\wedge\neg P \Leftrightarrow F$	矛盾律
E_9: $P\wedge(Q\vee R) \Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$ E_{10}: $P\vee(Q\wedge R) \Leftrightarrow (P\vee Q)\wedge(P\vee R)$	分配律	E_{21}: $P\triangledown Q \Leftrightarrow (P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$	排中律
		E_{22}: $P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$	等价律
E_{11}: $P\vee(P\wedge Q) \Leftrightarrow P$ E_{12}: $P\wedge(P\vee Q) \Leftrightarrow P$	吸收律	E_{23}: $P\rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q\rightarrow\neg P$	逆反律

1.3 命题公式的等价

4. 判定公式等价

① 真值表（由定义）

② 等价变换（替换规则）

③ 范式（**1.5**节）

定理2 (**替换规则**) 设A是公式X的一个子公式，并且A⇔B，用公式B替换X中的子公式A后得到新公式Y，则必有X⇔Y。

1.3 命题公式的等价

例11 证明 $(P \to Q) \Leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$。

$(P \to Q) \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ 蕴涵律

$\Leftrightarrow Q \vee (\neg P)$ 交换律

$\Leftrightarrow \neg(\neg Q) \vee (\neg P)$ 双否定

$\Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$ 蕴涵律

✍**课堂练习:**

① $(P \wedge \neg Q) \vee Q \Leftrightarrow P \vee Q$

② $P \to (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \to Q) \vee (P \to R)$

1.3 命题公式的等价

例12　证明　$P\vee\neg((P\vee\neg Q)\wedge Q)$ 是永真公式。

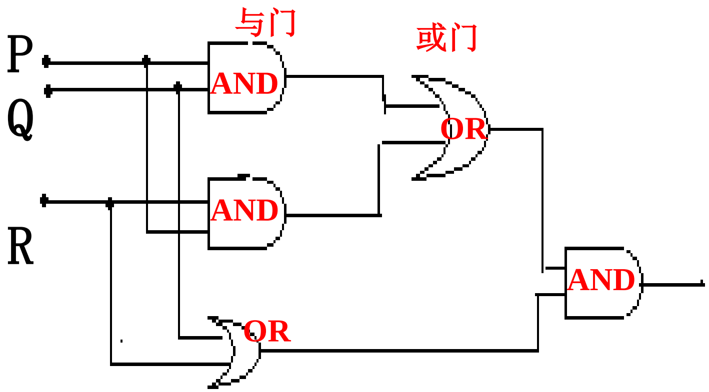
证：$P\vee\neg((P\vee\neg Q)\wedge Q)$

$\Leftrightarrow P\vee\neg(P\vee\neg Q)\vee\neg Q$　　(De Morgan定律)

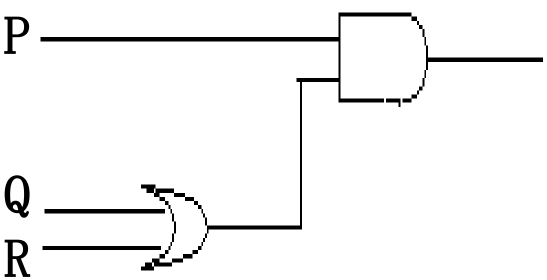
$\Leftrightarrow (P\vee\neg Q)\vee\neg(P\vee\neg Q)$　　(交换律)(结合律)

$\Leftrightarrow T$　　（矛盾律）

应用例子：试将下图所示之逻辑电路简化。



电路图可简化为：



解：可将上述电路写成如下命题公式：

$$((P\wedge Q)\vee(P\wedge R))\wedge(Q\vee R)$$

利用基本等价公式转化为：

$$((P\wedge Q)\vee(P\wedge R))\wedge(Q\vee R)$$

$\Leftrightarrow(P\wedge(Q\vee R))\wedge(Q\vee R)$ （分配律）

$\Leftrightarrow P\wedge(Q\vee R)$ （幂等律）

1.3 命题公式的等价

定理3 设A和B是命题公式，则$A \Leftrightarrow B$当且仅当$A \leftrightarrow B$是永真式。

证明： 如果$A \Leftrightarrow B$，根据等价的定义，对任何赋值公式A和B取相同的真值，因此$A \leftrightarrow B$恒取真值1，即$A \leftrightarrow B$是永真式。

反过来，如果$A \leftrightarrow B$是永真式，根据联结词“$\leftrightarrow$”的定义，对任何赋值A和B都取相同的真值，即$A \Leftrightarrow B$成立。

✓ **定理3建立了 $\Leftrightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 之间转换的关系。**

1.3 命题公式的等价

5. 对偶原理

定义 设有公式A，其中仅有联结词∧、∨、¬。在A中将∧、∨、T、F分别换以∨ 、 ∧ 、 F、 T得公式A*，则**A*称为A的对偶公式。**

同理：A也是A*的对偶公式。**对偶是相互的。**

- 例如：求下列公式的对偶公式

① P∧(P∨Q)　　对偶式为 P∨(P∧Q)

② P∨F　　对偶式为 P∧T

③ (¬P∧S)∨(Q∧R) ∨F　　对偶式为 (¬P∨S)∧(Q∨R) ∧T

1.3 命题公式的等价

☞ **注意：**

a） 对偶式括号的优先顺序不变。

b） 如果求含有其他联结词的公式的对偶时，先用等价式转换为仅有联结词∧、∨、¬的公式，再求对偶式。

- 问题：A $\Leftrightarrow$ B

  A* $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ B*

1.3 命题公式的等价

定理4 设A和A*是对偶式，$P_1, P_2, \ldots, P_n$是出现于A和A*中的所有命题变元，于是

$$\neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

证： ∵由 De Morgan定律可知

$$\sim(P \vee Q) \Leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q,$$

$$\sim(P \wedge Q) \Leftrightarrow \sim P \vee \sim Q$$

$$\sim T \Leftrightarrow F, \quad \sim F \Leftrightarrow T$$

∴对公式的否定可以直接作用到原子本身，并且把公式中的∧变成∨，把∨变成∧，即得

$$\neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

1.3 命题公式的等价

定理5（对偶原理） 设A和B是两个命题公式，如果 $A \Leftrightarrow B$，必有 $A^* \Leftrightarrow B^*$。

✓ 作用：利用对偶律可以减少证明公式间关系的工作量。

1.3 命题公式的等价

例13 证明 （1） $\sim(P\wedge Q)\rightarrow(\sim P\vee(\sim P\vee Q)) \Leftrightarrow \sim P\vee Q$

（2） $(P\vee Q)\wedge(\sim P\wedge(\sim P\wedge Q)) \Leftrightarrow \sim P\wedge Q$

证明:(1) $\sim(P\wedge Q)\rightarrow(\sim P\vee(\sim P\vee Q))$

$\Leftrightarrow \boxed{(P\wedge Q)\vee(\sim P\vee(\sim P\vee Q))}$ （蕴涵律） 是(2)式左端的对偶式

$\Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee\sim P\vee Q$ (幂等律)

$\Leftrightarrow ((P\vee\sim P)\wedge(Q\vee\sim P))\vee Q$ （结合律和分配律）

$\Leftrightarrow \sim P\vee Q\vee Q$ （矛盾律和同一律）

$\Leftrightarrow \sim P\vee Q$ (幂等律) 是(2)式右端的对偶式

(2) 由(1)证明过程得公式$(P\wedge Q)\vee(\sim P\vee(\sim P\vee Q))$正是(2)左端的对偶式，根据对偶原理得证(2)式成立。

作业

- ✓ 习题一

  5、6

主要内容

- 1.1 命题与逻辑联结词
- 1.2 命题公式与其赋值
- 1.3 命题公式的等价
- 1.4 联结词的完备集
- 1.5 命题公式的范式表示
- 1.6 命题公式的蕴涵
- 1.7 命题逻辑的推理方法

1.4 联结词的完备集

- 引入：已经定义6种逻辑联结词：

一元：$\neg$

二元：$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，$\bigtriangledown$

问题：是否已经定义完所有联结词？

不同联结词产生的真值表是互不相同的，对其中每一种真值表都应该存在相应的联结词。

1.4 联结词的完备集

1. 联结词的扩充

- 对含两个命题变元的公式的解释共有2*2=4种不同的解释，因而公式的真值表相应有2*2*2*2=16种可能结果。

P Q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0 0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
0 1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1 0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
1 1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
	永假	或非	条件否定	条件否定	合取	P非	Q非	等值	异或	恒等Q	恒等P	与非	条件	条件	析取	永真

1.4 联结词的完备集

定义 设P和Q是命题公式，分别称P↑Q和P↓Q为“与非”和“或非”命题公式。

另外，还有一个二元联结词“$\nrightarrow$”称为条件否定。

P Q	P↑Q	P↓Q	P $\nrightarrow$ Q
0 0	1	1	0
0 1	1	0	0
1 0	1	0	1
1 1	0	0	0
	与非	或非	条件否定
	$\neg(P\wedge Q)$	$\neg(P\vee Q)$	$\neg(P\rightarrow Q)$

1.4 联结词的完备集

根据联结词↑和↓的定义，不难证明下面的等价式。

① $P\uparrow P \Leftrightarrow \sim(P\wedge P) \Leftrightarrow \boxed{\sim P}$

② $(P\uparrow Q)\uparrow(P\uparrow Q) \Leftrightarrow \sim(P\uparrow Q) \Leftrightarrow \boxed{P\wedge Q}$

③ $(P\uparrow P)\uparrow(Q\uparrow Q) \Leftrightarrow \sim P\uparrow\sim Q$

$\Leftrightarrow \sim(\sim P\wedge\sim Q) \Leftrightarrow \boxed{P\vee Q}$

④ $P\downarrow P \Leftrightarrow \sim(P\vee P) \Leftrightarrow \sim P$

⑤ $(P\downarrow Q)\downarrow(P\downarrow Q) \Leftrightarrow \sim(P\downarrow Q) \Leftrightarrow P\vee Q$

⑥ $(P\downarrow P)\downarrow(Q\downarrow Q) \Leftrightarrow \sim P\downarrow\sim Q$

$\Leftrightarrow \sim(\sim P\vee\sim Q) \Leftrightarrow P\wedge Q$

1.4 联结词的完备集

以上等价式告诉我们， ～，∨，∧可以由↑和↓单独表示出来， 即↑和↓都可以单独表示出所有已知联结词，它们的这一性质使得在逻辑电路设计中只用一种门式电路元件就能实现任何电路功能，当然，元件的数量通常也显得更多。

1.4 联结词的完备集

P	Q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
		永假	**或非**	**条件否定**	**条件否定**	合取	P非	Q非	等值	异或	恒等Q	恒等P	**与非**	条件	条件	析取	永真
9种运算符:			$\downarrow$	$\xrightarrow{c}$		$\wedge$	$\sim$		$\leftrightarrow$	$\triangledown$			$\uparrow$	$\rightarrow$		$\vee$	

1.4 联结词的完备集

2. 联结词的归约

定义 设S是联结词集合，用S中的联结词可表示任何联结词的功能，称S为联结词的**功能完备集（全功能的）**；

如果从S中删除任一个联结词后得到的新联结词集合S_1，至少存在一个联结词不能用S_1中联结词表示，则称S是**最小功能完备集**。

1.4 联结词的完备集

例14 证明 {～，∧，∨}是联结词的功能完备集。

证明：

$$P \to Q \Leftrightarrow \sim P \vee Q$$

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P) \Leftrightarrow (\sim P \vee Q) \wedge (\sim Q \vee P)$$

$$P \nabla Q \Leftrightarrow (P \wedge \sim Q) \vee (Q \wedge \sim P)$$

$$P \uparrow Q \Leftrightarrow \sim (P \wedge Q)$$

$$P \downarrow Q \Leftrightarrow \sim (P \vee Q)$$

$$P \nrightarrow Q \Leftrightarrow \sim (P \to Q) \Leftrightarrow P \wedge \sim Q$$

故 {～，∧，∨}是功能完备集。[定理]

1.4 联结词的完备集

例15 证明{～，∨}是最小功能完备集。

证明：

$$P \wedge Q \Leftrightarrow \sim\sim(P \wedge Q) \Leftrightarrow \sim(\sim P \vee \sim Q)$$

而{～，∧，∨}是功能完备集，

∴ {～，∨}是功能完备集。

又∵ 一元运算不能表示二元运算。再由真值表知，～P为2个1，P∨Q为3个1，反复进行析取运算，∨也不能得到～的结果。因此，～，∨相互不能表示。

故，{～，∨}是最小功能完备集。

1.4 联结词的完备集

思考： {↑}，{↓}是不是功能完备集？

1.4 联结词的完备集

- 普遍采用的功能完备集：$\{\sim,\vee,\wedge\}$，这也是逻辑系统中最主要的3个常用联结词。

- 最小功能完备集：$\{\uparrow\}$，$\{\downarrow\}$，$\{\sim,\ \vee\}$，$\{\sim,\ \wedge\}$，$\{\sim,\ \rightarrow\}$，$\{\sim,\ \overset{c}{\rightarrow}\}$

作业

✓习题一

7

8(1)

9