四川大学期末考试试题（闭卷）-参考解答

评阅教师	得分

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

提示：在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在下表中。错选、多选或未选均无分。

1	2	3	4	5
C	C	A	B	A

评阅教师	得分

二、填空题（本大题共 10 空，每空 2 分，共 20 分）

1、 在布尔代数中，等式$a \vee (\bar{a} \wedge b) = a \vee b$的对偶式为（$a \wedge (\bar{a} \vee b) = a \wedge b$ ）。

2、已知无向图 G 的点度序列为（2，4，4，6，5，5，2）则 G 中有（14）条边。

3、任意两元素的最大值 “max” 定义了集合$A = \{1,2,3,4,5\}$ 上的运算，代数系统$< A, \max >$的零元是（ 5 ）， 幺元是（1），集合A中具有逆元的元素为（ 1 ），幂等元构成集合的基数为（ 5 ）

4、设无向图$G\ (n,m)$中每个结点点度数不是k就是$k+1$，则G中度数为k的结点个数为（$n(k+1)-2m$）。

5、设$A = \{1,2,4,8,12,24\}$上的整除关系R，则<A，R>偏序格的最小元为（1），最大元为（24），集合A中存在补元的元素为（1, 24 ）。

评阅教师	得分

三、分析演算题（本大题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分）

1、某次四支足球队进行冠亚军比赛，赛后一名观众说了下列 4 句话:1)若 A 队为冠军，则 B 队或 C 队获亚军;2)若 C 队获亚军，则 A 队不能获冠军;3)若 D 队获亚军，则 B 队不能获亚军;4)A 队为冠军。试根据观众的话运用命题逻辑分析 D 队是冠军还是亚军？

解：设 A：A 队为冠军;B: B 队获亚军;C: C 队获亚军;D: D 队获亚军;

则前提符号化为 A→（B∨C），C→ ¬A，D→ ¬B，A;

（1） A 前提

（2） A→（B∨C）前提

（3） B∨C （1），（2）

（4） C→ ¬A 前提

（5） ¬C （1），（4）

（6） B （3），（5）

（7） D→ ¬B 前提

（8） ¬D （6），（7）

根据推理可知 D 队为冠军。

2、设$<G,\bullet>$是群，$a,b\in G$, $a\neq e$，且$a^4\bullet b=b\bullet a^5$。试分析运算“$\bullet$”是否具有可交换性。

解： 假设“$\bullet$”具有可交换，即$a\bullet b=b\bullet a$

$$\begin{aligned}a^4\bullet b&=a^3\bullet(a\bullet b)=a^3\bullet(b\bullet a)\\&=a^2\bullet a\bullet(b\bullet a)=a^2\bullet(a\bullet b\bullet a)\\&=a^2\bullet(b\bullet a\bullet a)=a^2\bullet(b\bullet a^2)\\&=a\bullet a\bullet(b\bullet a^2)=a\bullet(a\bullet b\bullet a^2)\\&=a\bullet(b\bullet a^3)=b\bullet a^4\end{aligned}$$

由$a^4\bullet b=b\bullet a^5$，可知$b\bullet a^4=b\bullet a^5$

群中每个元素均有逆元，得到$a=e$

与$a\neq e$矛盾，假设不成立，运算“$\bullet$”不具有可交换性

3、设p,q,r是实数，$\circ$为 R 上的二元运算，$\forall a,b\in R$， $a\circ b=pa+qb+r$。当p,q,r为何值时代数系统$<R,\circ>$分别存在单位元和零元，其单位元和零元分别为多少。

解：

1）单位元，设e为单位元

$$\begin{cases}a\circ e=a\Leftrightarrow(p-1)a+qe+r=0\\e\circ a=a\Leftrightarrow(q-1)a+pe+r=0\end{cases}$$

对于任意的a均成立, $p=q=1$, r为任意实数

单位元$e=-r$

2）零元，设θ为零元

$$\begin{cases}a\circ\theta=\theta\Leftrightarrow pa+(q-1)\theta+r=0\\\theta\circ a=\theta\Leftrightarrow qa+(p-1)\theta+r=0\end{cases}$$

对于任意的a均成立, $p=q=0$, r为任意实数。

零元$\theta=r$

评阅教师	得分

四、证明题（本大题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分）。

1.若简单平面图 G 中顶点数 n=7，边数 m=15。证明图 G 为连通图。

证明（反证法）： 假设该图为非连通图，且连通分支为$k>1$，其连通分支$G_1,G_2,\cdots G_i,\cdots,G_k$。设任意连通分支$G_i$的顶点数为$n_i$，边数为$m_i$，由于 G 为简单平面图，

则G_i简单连通平面图，根据欧拉公式可知：$n_i-m_i+f_i=2$。

1）当$m_i=0,n_i=1$时，则子图$\{G-G_i\}$}的定点数$n'=n-n_i=6,m'=m-m_i=15$,该子图为6阶完全图K_6，由于K_6不是平面图，则图G为非平面图，这与G为平面图矛盾。

2）当$m_i=1,n_i=2$时，则子图$\{G-G_i\}$}的定点数$n'=n-n_i=4,m'=m-m_i=14$,该子图为非简单图，则图G为非简单图，这与G为简单图矛盾。

3）当$m_i>1,n_i>2$时，简单连通平面图G_i的每个面至少有 3 条边，即$f_i\le\frac{2}{3}m_i$。由

$n_i-m_i+f_i=2$可知，$n_i-m_i+\frac{2}{3}m_i\ge 2$，化简得到$n_i-\frac{1}{3}m_i\ge 2$。

在G中，得到$\sum_{i=1}^{k}(n_i-\frac{1}{3}m_i)\ge\sum_{i=1}^{k}2$，

化简可得$n-\frac{1}{3}m\ge 2k$，$7-\frac{1}{3}\times 15\ge 2k$，得到$k\le 1$,

与假设矛盾，故G是连通的。

2.设$A=\{1,2,3,\cdots,9\}$，在$A\times A$上的关系R：$<<a,b>,<c,d>>$满足$a+d=c+b$，证明R是$A\times A$上的等价关系。

证明：

1）设任意$<a,b>\in A\times A$，由于$a+b=b+a$，那么$<<a,b>,<a,b>>\in R$，即R具有自反性。

2）设任意$<<a,b>,<c,d>>\in R$，由于$a+d=c+b$，则$c+b=d+a$。由关系R的定义可知$<<c,d>,<a,b>>\in R$，即R具有对称性。

3）设任意$<<a,b>,<c,d>>\in R$，$<<c,d>,<e,f>>\in R$，由于$a+d=c+b$，$c+f=d+e$所以$a+d+c+f=c+b+d+e$，化简可得 $a+f=b+e$，由关系R的定义可知$<<a,b>,<e,f>>\in R$,即R具有传递性。

4）由1)，2)，3）可知，R是$A\times A$上的等价关系。

3.设9阶无向图G中，每个顶点的度数不是5就是6，证明G中至少有5个6度顶点或至少有6个5度顶点。

证明：

设G有x个5度顶点，$9-x$个6度顶点，由握手定理可知，

$5x+6(9-x)=54-x$为偶数，

x为偶数，即为0,2,4,6,8.

当$x=0,2,4$时，6度顶点的个数$9-x$分别为9,7,5。所以6度顶点的个数至少为5个；

当$x=6,8$时，5度顶点的个数至少为6个

评阅教师	得分

五、非标准答案题（本大题共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）。

已知无向图G 的邻接矩阵R，可否计算图G 的顶点个数、边数、各顶点的度数，连通分支数和任意顶点间的距离？如果能，请给出计算依据和方法。

解：设无向图G 的邻接矩阵$R=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}, a_{ij}\geq 0$

1）图G 的顶点个数为矩阵R 的阶数

2）图G 的边数$m=\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}+\sum_{i=1}^{n}a_{i,i})$

3）顶点的度数 $d_i=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}+a_{i,i}$

4）顶点间的距离$d_{i,j}=k, a_{i,j}^{(k)}\neq 0, and\ a_{i,j}^{(k-1)}=0, k=0,1,2,\cdots n-1$

5）连通分支数ω 可依据有向图的强分子图个数计算方法进行计算