离散数学

4

教　材

离散数学

冯伟森 栾新成 石兵等编，

机械工业出版社，2011

5

5

参考资料

- 离散数学（修订版），耿素云,屈婉玲，高等教育出版社
- 离散数学学习指导与习题解析，耿素云,屈婉玲，高等教育出版社
- 离散数学及其应用（Discrete Mathematical and Its Applications）（第5版），Kenneth Rosen著， 袁崇义， 屈婉玲等译， 机械工业出版社
- 应用离散数学,方景龙,王毅刚编著,人民邮电出版社
- 离散数学—常见题型解析及模拟题，傅彦,西北工业大学出版社

6

6

课程主要内容

- 数理逻辑
  命题逻辑　谓词逻辑
- 集合论
  集合　关系　函数
- 图论
  图的基本概念　图的连通性　几种特殊图
- 代数系统
  代数系统的基本概念、 同态与同构、 几种特殊代数系统

7

7

学习方法

- 上课认真听讲；
- 课后对重点和难点认真复习；
- 深刻理解基本概念；
- 做好作业&课测；
- 勤思考，多质疑

8

8

考核与成绩

- 平时考勤 + 作业 20 %
  - 考勤：课前签到 100分，缺勤 0 分
  - 作业每周交 1 次，下次课前拍照上传至课程QQ群，需按时交，否则 0 分
- 期中考试 + 课堂小测验 30%
  - 期中考试：约在 9-12周，会提前 1 周 通知，缺考 0 分
  - 课堂测验：不定期，也许每次课都有，不参加 0 分
- 期末考试（闭卷） 50%
  - 考试周，学校统一安排
  - 最低线（生死线）：40 分

9

9

离散数学的特点

相对于研究连续量的微积分，离散数学是研究离散量的结构及离散量之间关系的一门学科，是计算机学科的核心课程

- 离散性—习惯枚举法
- 在计算机上的可执行性（结合数据结构）
- 高度抽象性 --- 高 大 上

10

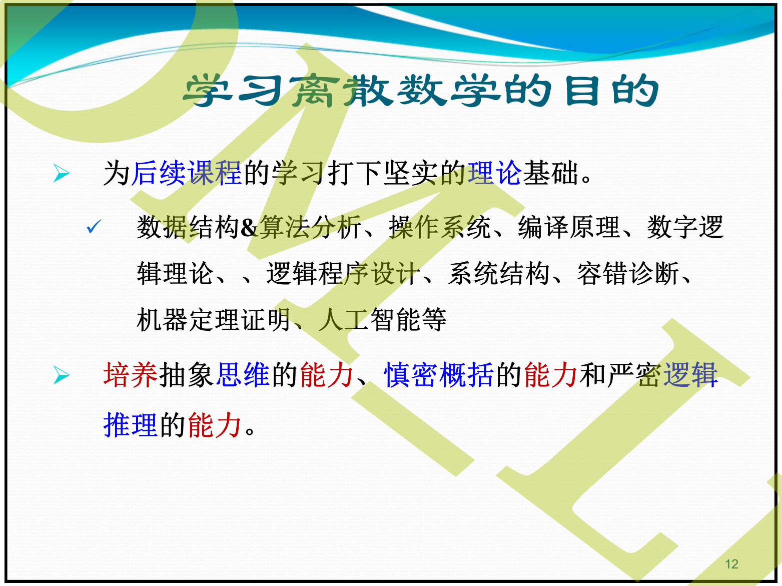
10

离散数学的应用领域

- 人工智能
  - ✓ 数理逻辑
- 数据库系统
  - ✓ 集合论
- 数据结构
  - ✓ 图论
- 通信系统
  - ✓ 代数系统
- 生物信息学
- ......

11

11



学习离散数学的目的
为后续课程的学习打下坚实的理论基础。
数据结构&算法分析、操作系统、编译原理、数字逻辑理论、、逻辑程序设计、系统结构、容错诊断、机器定理证明、人工智能等
培养抽象思维的能力、慎密概括的能力和严密逻辑推理的能力。
12

12

Continuing ……
13

13

DMS Chapter 1 命题逻辑

第一部分 数理逻辑

数理逻辑（Mathematical Logic）:研究演绎推理的一门学科

- **主要研究内容：命题间推理**

符号逻辑（Symbolic Logic）

前提 —推理→ 结论

1. 如果明天天晴，我们外出旅游。
2. 明天的确天晴。

我们外出旅游。

- **主要研究方法：数学的方法；即引进一套符号体系进行推理**

AI 第一次热潮奉行的就是符号主义

第一章 命题逻辑

第二章 谓词逻辑

1

DMS Chapter 1 命题逻辑

判断下列结论是否为前提的有效结论

前提：

1. 如果明天天晴，我们外出旅游。
2. 明天的确天晴。

结论：我们外出旅游。

解： 设 P： 明天天晴

Q： 我们外出旅游

则问题符号化为： 求证 $\{(P\to Q),P\} \Rightarrow Q$

证：步骤	公式	依据规则（注释）
1）	$P\to Q$	P
2）	P	P
3）	Q	T 1) 2) I

故 $\{(P\to Q),P\} \Rightarrow Q$

2

2

DMS Chapter 1 命题逻辑

例 公安人员审查一件谋杀案，已确认下列 情况是真的；

(1) 会计张某或邻居王某至少有一个谋害了厂长。

(2) 如果会计张某谋害了厂长，则谋害不能发生在半夜。

(3) 如果邻居王某的证词是正确的，则谋害发生在半夜。

(4) 如果邻居王某的证词不正确，则半夜时屋里灯光未灭。

(5) 半夜时屋里灯光灭了，且会计张某曾贪污过。

请利用数理逻辑知识，有效推断谁是谋害者?

解：1) 描述符号化

设 P：会计张某谋害了厂长

Q：邻居王某谋害了厂长

N：谋害发生在半夜。

O：邻居王某的证词是正确的。

R：半夜时屋里灯光灭了。

A：会计张某曾贪污过。

前提：

① $P\vee Q$

② $P\to\sim N$

③ $O\to N$

④ $\sim O\to\sim R$

⑤ $R\wedge A$

3

3

DMS Chapter 1 命题逻辑

$\{P\vee Q,\ P\to\sim N,\ O\to N,\ \sim O\to\sim R,\ R\wedge A\}\Rightarrow ?$

	步骤	Hn	规则
证：	①	$R\wedge A$	P
	②	R	T①I
	③	$\sim O\to\sim R$	P
	④	O	T②③I
	⑤	$O\to N$	P
	⑥	N	T④⑤I
	⑦	$P\to\sim N$	P
	⑧	$\sim P$	T⑥⑦I
	⑨	$P\vee Q$	P
	⑩	Q	T⑧，⑨I

$\therefore\ \{P\vee Q,\ P\to\sim N,\ O\to N,\ \sim O\to\sim R,\ R\wedge A\}\Rightarrow Q$

结论是：邻居王某谋害了厂长。

4

4

DMS Chapter 1 命题逻辑

第一章 命题逻辑

命题逻辑也称命题演算，或语句逻辑。它研究以命题为基本单位构成的前提和结论之间的可推导关系。

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

5

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.1 命题与逻辑联结词 --命题与真值（1）

➢ 命题的定义:

具有确切结论（真值）的陈述句

➢ 真值的取值: “真（T / 1)” 和 “假 (F / 0) ”

例: 判断下列句子是否为命题

1) 张三是四川大学的学生.(Y)　　2) 1+2 =3(Y)

3) 天哪! (N)　　4) 你好吗? (N)

5) 他大概会赢（N)　　6) 他可能吃过了（N)　涉及将来

5) 五百年后，地球将毁灭。(Y)　　6) 明天是晴天.(Y)

7) 白天比夜晚时间长。(Y)

8) $x > y$ (Y)　依赖某些因素

9) 本句话是谎言 (N)　悖论

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

6

6

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.1 命题与逻辑联结词 --命题与真值（2）

悖论: 内涵和外延矛盾，不是命题

1) 本句不是命题

2) 我正在说谎

3) 一个囚犯临行前，国王让他说一句话，根据这句话的真假来确定是砍头还是绞刑。如果是真话，则砍头，如果为假话，则绞刑。 囚犯说了一句话，国王只好把他放了，那这个囚犯说什么话呢?

“国王要判我绞刑”

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

7

7

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.1 命题与逻辑联结词 --命题判断总结

陈述句
- 内涵和外延一致 ➡
  - 命题 (具有明确的真值)
  - 不是命题 (意思含糊，模棱两可，不具有明确的真值)
- 内涵和外延矛盾 ➡ 悖论 (真值不确定)

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

8

8

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.1 命题与逻辑联结词
--原子命题, 复合命题, 命题标识符

- 原子命题：不能再分解的命题。
  - (1) 期中考试张三及格了。
  - (2) 期中考试张三未及格。
  - (3) 3 + 2 = 5。
- 复合命题
  - (1) 他一边跑步一边听音乐
  - (2) 中国人民又勤劳又勇敢
- 命题标示符：表示命题的符号。
  - 一般用除T，F以外的大写字母（串）表示;
  - 如 P， Q， R等

9

9

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.1 命题与逻辑联结词
--逻辑联结词～

- 否定 联结词 ~

设P为一个命题，称～P（¬P）为P的否命题（读作'非P'）

～也可写为¬或—。
否定是个一元逻辑运算。

P：期中考试张三及格了
~P：期中考试张三未及格

否定的真值表

P	～P
0	1
1	0

10

10

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.1 命题与逻辑联结词
--逻辑联结词∧

- 合取联结词 ∧

设P和Q是两个命题，称P∧Q为P和Q 的合取命题。

（读作'P与Q'）。

合取∧是个可交换的二元逻辑运算，可看成逻辑乘。
有时可写为PQ，P·Q，
P&Q，P And Q等

P：他跑步 Q：他听音乐

P∧Q：他一边跑步一边听音乐

合取的真值表

P	Q	P∧Q	Q∧P
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

11

11

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.1 命题与逻辑联结词
--逻辑联结词∨

- 析取联结词 ∨

设P和Q是两个命题，称P ∨ Q为P和Q 的析取命题。

（读作'P或Q'）。

析取∨是个可交换的二元逻辑运算，称为"逻辑加"，
也可写为 P+Q

P：小王干的 Q：小李干的

P ∨ Q：这事是小王或小李干的

析取∨的真值表

P	Q	P∨Q	Q∨P
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

12

12

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.1 命题与逻辑联结词
--逻辑联结词∇

➢ 不可兼或联结词 ∇

设P和Q是两个命题，称P ∇ Q为P和Q 的异或命题。

(读作 ‘P异或Q’)。

∇是个可交换的二元逻辑运算，也称“异或”

∇的真值表

P	Q	P∇Q	Q∇P
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

P：他在跑步　Q：他在游泳

P ∇ Q：他要么在跑步，要么在游泳

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.1 命题与逻辑联结词
--逻辑联结词→

➢ 条件联结词 →：

设P和Q是两个命题，称P → Q为P和Q 的条件命题，P是命题的前件(前提)，Q是命题的后件(结论)，读作 ‘若P则Q’

→是个不可交换的二元逻辑运算，P是Q的充分条件，Q是P的必要条件

P：-3 > 0，　(F)

Q：-3 ≠ 0；　(T)

R：3 < 0；　(F)

P→Q：如果 -3>0，则 -3≠0　(?)

P→R：如果 -3>0，则 3<0　(?)

→的真值表

P	Q	P→Q	Q→P
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

对一个不易直接根据陈述句判定其真假的复合命题，逻辑运算提供了一个根据其包含原子命题的真假来判定其真值的方法

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.1 命题与逻辑联结词
--逻辑联结词→

对条件命题“P → Q”的进一步理解：

- 只有在前提成立（前件P为T）的情况下，才考虑 (P → Q) 是真还是假
- 在前提不成立（前件P为F）的情况，不用费力考虑(P → Q）的真假，直接认为是真。(难以区分前件和后件之间有无因果关系)

P	Q	P→Q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

给定命题P→Q，我们把Q→P，¬ P→¬ Q，¬ Q→¬ P分别叫作P→Q的逆命题，反命题，逆反命题。

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.1 命题与逻辑联结词
--逻辑联结词→

根据→的定义，试着写出Q→P，¬ P→¬ Q，¬ Q→¬ P的 真值表

P	Q	P→Q	Q→P	～P→～Q	～Q→～P
0	0	1			
0	1	1			
1	0	0			
1	1	1			

1.1 命题与逻辑联结词
--逻辑联结词 ↔

➢逻辑联结词双条件 ↔： 思考↔与∇的关系

设P和Q是两个命题，称 P ↔ Q 为P和Q 的双条件命题，

读作 'P等价Q' 或 'P当且仅当Q'

↔是个可交换的二元逻辑运算，

P和Q互为充分必要条件

↔的真值表

P	Q	P↔Q	Q↔P
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

P: 三角形有两条边相等

Q: 三角形为等腰三角形；

P↔ Q: 当且仅当有两条边相等，三角形为等腰三角形

1.1 命题与逻辑联结词
--各联结词优先级

➢ 逻辑联结词的优先级： P∧Q∧R→ Q∧(~S∨R)

否定→ 合取/析取/异或 → 条件/双条件

由 高 到 低

➢ 同级的联结词，按其出现的先后次序(从左到右)进行运算

➢ 若运算要求与优先次序不一致时，可使用括号；同级符号相邻时，也可使用括号。

➢ 括号中的运算为最优先级。

1.1 命题与逻辑联结词
--逻辑联结词总结

P	Q	~p (取反)	P∧Q Q∧P (均为真)	P∨Q Q∨P (至少一个为真)	P∇Q Q∇P (不同为真)	P→Q	P↔Q Q↔P (相同为真)
0	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1

1.1 命题与逻辑联结词
--逻辑联结词总结

1. 联结词是命题与命题之间的联结，而非单纯的名词、形容词、数词等的联结；
2. 联结词是命题真值之间的联结，而非命题的具体含义的联结，两个命题之间可以无任何的内在联系；
3. 联结词与自然语言之间的并非一一对应，我们需要根据他的逻辑定义（真值表）去进行判定，而不是根据自然语言的理解。

P：他在跑步 Q：他在游泳

P ∇ Q

他或者跑步或者游泳。

P∨Q

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.1　命题与逻辑联结词
--命题的符号化

- 命题的翻译/符号化：
  - ✓ 用命题标识符和逻辑联结词来表示一个具体命题，称为命题的翻译/符号化
  - ✓ 符号化就是为命题指定逻辑(符号)形式，是对具体命题的抽象化。
  - ✓ 符号化步骤：
    1. 找出所有原子命题，并用标识符表示
    2. 用合适的联结词联结原子命题（若有必要，可用括孤）

例：将下列各命题翻译成它的逻辑形式

1) 张三是四川大学的学生
2) 他一边跑步一边游泳
3) 这件事是小王或小李干的

1）　P
2）　P ∧ Q
3)　P $\bar{\vee}$ Q / P ∨ Q

四川大學 SICHUAN UNIVERSITY 21

21

DMS Chapter 1 命题逻辑

--例题

例1： 判断下列句子是否为命题

A：数学是一门科学
B：四川是一个省
C：2+3=6
D：地球是不动的
F：今天是十月一日

} 命题

G：11+101=1000
H：$x^3 > 0$
I：　$z = 3+y$

} 命题(有依赖因素)

L：我可能不及格　　不是命题
G：本句不是命题　　悖论

四川大學 SICHUAN UNIVERSITY 22

22

DMS Chapter 1 命题逻辑

--例题

例2：将下列各命题翻译成它的逻辑形式

1)　银行利率一降低，股票随之上扬
2)　尽管银行利率降低，股票却没有上扬

解：设　P：银行利率降低；
　　　　Q：股票上扬；

1）　P → Q
2）　P ∧ ~Q

四川大學 SICHUAN UNIVERSITY 23

23

DMS Chapter 1 命题逻辑

--例题

例3：将下列各命题翻译成它的逻辑形式

1)　如果明天上午不是雨夹雪，我将去学校

解：设　P：明天上午下雨；
　　　　Q：明天上午下雪；
　　　　R：明天上午我将去学校

~ (P ∧ Q) → R

2)　小张身体单薄，但是极少生病，并且头脑好使

解：设　P：小张身体单薄；
　　　　Q：小张极少生病；
　　　　R：小张头脑灵活；

P ∧ Q∧ R

四川大學 SICHUAN UNIVERSITY 24

24

DMS Chapter 1 命题逻辑

--例题

例4 1） 将下列命题翻译成它的逻辑形式

如果你陪我去并且代我叫辆车子，我将出去。

设 P：你陪伴我去；
Q：你代我叫车子；
R：我将出去

2） 根据以下给定的原子命题真值确定 1）所得复合命题的真值
a） P=1， Q=0， R=1
b） P=1， Q=1， R=0

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.1 基本要求

1. 能准确判断一个句子是否为命题
2. 能深刻理解六种常用逻辑联结词的涵义及真值表
3. 能分清原子命题与复合命题
4. 能准确地运用命题标识符和逻辑联结词将命题符号化，并由所含原子命题的真值求出复合命题的真值。

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.2 命题公式与真值表

---命题常量，命题变量和命题公式

➢ **命题常量**

一个特定的命题是一个命题常量（也称常值命题），它具有确定的真值“T”或“F”。(有具体内容的命题)

如： P: 本学期有离散数学课(T)； Q: 川大有2个校区(F)

➢ **命题变量(元)**

一个没有赋予具体内容的原子命题称为命题变量(或命题变元)，在赋值前，命题变量无真值，它的值域是集合{T，F}(或{0，1})。 如： P， Q ， R

➢ **命题公式**

当原子命题是命题变元时，其复合命题称为命题变元的“函数”，且该“函数”的值域仍为 {T，F}， 这样的函数可形象地称为“真值函数”，或 命题公式。

如： $\sim P$、$P\wedge Q$、$(P\vee Q)\to R$

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.2 命题公式与真值表

---命题公式

➢ **命题公式的具体定义**

① 原子命题变元本身是一个命题公式；如 P，Q 是命题公式

② 如果P， Q 是命题公式，则$(\sim P)$、$(P\wedge Q)$、$(P\vee Q)$、 $(P\to Q)$、$(P\leftrightarrow Q)$都是命题公式；

③ 经过有限次使用规则1-2后产生的命题表达式是命题公式。

如： $(((P\wedge(Q\vee R))\to(Q\wedge(\sim S\vee R))))$;
$(\sim P\wedge Q)$; $(P\to(\sim(P\wedge Q)))$;
$(((P\to Q)\wedge(R\to Q))\leftrightarrow(P\to R))$。都是命题公式

➢ **定义：如公式A是公式B的一部分，则称A是B的子公式**

如： $(P\wedge(Q\vee R))$ 是 $(((P\wedge(Q\vee R))\to(Q\wedge(\sim S\vee R))))$ 的子公式

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.2 命题公式与真值表
---命题公式

由命题变元，命题常量，逻辑联结词，括号组成的符合逻辑运算规则的公式

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY 30

30

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.2 命题公式与真值表
---命题公式

$((P\wedge(Q\wedge R))\rightarrow(Q\wedge((\sim S)\vee R)))$ $\boxed{P\wedge Q\wedge R\rightarrow Q\wedge(\sim S\vee R)}$

$((\sim P)\ \wedge Q\vee T)$； $(P\rightarrow(\sim(F\wedge Q)))$

$(((P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow Q))\leftrightarrow(P\rightarrow R))$

- 为书写和输入计算机及计算方便起见，约定：
  ① 最外层括号可省去
  ② 当P是原子变元时（～P）的括号可省去
  ③ 相继的几个子公式用同一种联结词（∧）或（ ∨）连接起来的话，可以省掉外层括号，省掉后按从左到右运算。
  ④ 联结词的优先顺序：( )， ～ ， ∧/ ∨，→/ ↔ 。

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY 31

31

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.2 命题公式与真值表
---公式的解释，赋值及真值表

- 命题公式的解释
  ① 设P1、P2、…、Pn是出现在命题公式G中的所有命题变元，给定P1、P2、…、Pn的一组真值（如P1=1，P2=0，…，Pn=1），则这组真值称为公式G的一个解释(赋值)。
  ② 若公式G含有 n 个命题变元，则应有2^n个不同的解释。(why ?)
- 命题公式的成真 赋值、成假赋值、真值表
  ① 如果公式G在某一解释下为真，则称这一解释为G的成真赋值；
  ② 如果公式G在某一解释下为假，则称这一解释为G的成假赋值。
  ③ 将公式G在其所有可能解释下的真值情况列成的表，称为G的真值表。

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY 32

32

DMS Chapter 1 命题逻辑

例 1） 将下列语句符号化

如果你陪我去并且代我叫辆车子，我将出去。

设 P：你陪伴我去；
Q：你代我叫车子；
R：我将出去

2） 给定以下解释(赋值)，确定 1）所得命题公式的真值，并说明各解释是成真赋值还是成假赋值

a） P=1， Q=0， R=1

b） P=1， Q=1， R=0

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY 33

33

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.2 命题公式与真值表
---公式真值表的构造

➢公式真值表构造方法
- ① 把表分成3大部分
  - a. 最左边为原子变元
  - b. 中间为子式
  - c. 最后为公式
- ② 写出公式的所有解释
- ③ 计算对应解释下子式的真值
- ④ 计算对应解释下公式的真值

例：构造公式～P∨Q的真值表：

～P∨Q的真值表

P	Q	～P	～P∨Q
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

那些是成真赋值
那些是成假赋值？

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

34

34

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.2 命题公式与真值表
---公式真值表的构造

例：构造公式G_2: (P→Q)∨P的真值表

P	Q	P→Q	(P→Q)∨P
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

那些是成真赋值
那些是成假赋值？

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

35

35

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.2 命题公式与真值表
---公式真值表的构造

例：构造公式G_2: (P→Q)∨P的真值表

P	Q	P→Q	(P→Q)∨P
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

永真式/重言式

该公式对所有可能的解释取值均为1

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

36

36

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.2 命题公式与真值表
---公式真值表的构造

例：构造公式G_3：(P→Q)∧(P∧～Q)的真值表

P	Q	～Q	P→Q	P∧～Q	(P→Q)∧(P∧～Q)
0	0				
0	1				
1	0				
1	1				

那些是成真赋值？
那些是成假赋值？

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

37

37

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.2 命题公式与真值表
---公式真值表的构造

例：构造公式G_3：(P→Q) ∧(P ∧ ~ Q) 的真值表

P	Q	~ Q	P→Q	P ∧ ~ Q	(P→Q) ∧(P ∧ ~ Q)
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0

矛盾式/永假式

•该公式对所有可能的解释取值均为0

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY 38

38

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.2 命题公式与真值表
---永真式、矛盾式、可满足公式

- 永真式

如果在所有解释之下公式G都为“真”，称G为永真式 (重言式)

- 矛盾式

如果在所有解释之下公式G都为“假”，称G为矛盾式(永假式，不可满足公式)。

- 可满足式
  - ✓ 如果公式G不是永假式（即存在解释使公式G取值为真），称G为可满足公式。
  - ✓ 永真式是一种特殊的可满足式

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY 39

39

DMS Chapter 1 命题逻辑

1.2 命题公式与真值表
---永真式、矛盾式、可满足式

- 永真式G的否定 ~ G是矛盾式；
- 矛盾式G的否定 ~ G是永真式。
- 永真式一定是可满足式, 可满足式不一定是永真式。
- 两个永真式的合取、析取、条件、双条件均为永真式。这样由简单的永真式，可以推出无数个复杂的永真式。
- 两个矛盾式的合取、析取仍为矛盾式。

在逻辑研究和计算机推理以及决策判断时，人们对于所研究的命题，最关心的莫过于“真”、“假”，所以永真式在数理逻辑的研究中占有特殊且重要的地位

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY 40

40

DMS Chapter 1 命题逻辑(2)

1.3 命题公式的等价
---等价的定义及性质

- 等价的定义：
  - ✓ 设G、H是两个公式，如果在任意解释下，G与H的真值均相同，则称公式G、H是等价的，记作G⇔H。
  - ✓ 所有等价的公式称为同一种（类）公式（具有相同真值表）
- 等价的充要条件

  公式G、H等价的充分必要条件是公式 G↔H 是 永真式。

- 等价的性质:

  1）自反性：A ⇔ A

  2）对称性：若 A ⇔ B，则 B ⇔ A

  3）可传递性:若 A ⇔ B，B ⇔ C，则A ⇔ C

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY 41

41

DMS Chapter 1 命题逻辑(2)

1.3 命题公式的等价
---等价的定义及性质

- "⇔"与"↔"的区别
  - ✓ 双条件词"↔"是一种逻辑联结词，G↔H是命题公式。
  - ✓ 等价"⇔"则是描述了两个公式G与H之间的一种逻辑等价关系，G⇔H表示"命题公式G等价于命题公式H"，G⇔H 不是命题公式。
  - ✓ 给定一个解释时，可计算G↔H的对应真值，但是没法判定G是否等价H；只有获得G↔H的真值表，才可判定G是否等价H
- "⇔"与"↔"的联系
  - ✓ G↔H是永真式 是 G⇔H 的充分必要条件

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

DMS Chapter 1 命题逻辑(2)

1.3 命题公式的等价
---基本等价式

等价式：Equivalence

设G，H，S是命题公式，则：

E 1: G↔ H ⇔ (G→H)∧(H→G) (等价) √

E 2: G→H ⇔ ~G∨H (蕴涵) √√√

E 3: G∨G ⇔ G (幂等律) √

E 4: G∧G ⇔ G

E 5: G∨H ⇔ H∨G (交换律) √

E 6: G∧H ⇔ H∧G

E 8: G∨(G∧H) ⇔ G (吸收律) √√√

E 9: G∧(G∨H) ⇔ G

利用真值表进行证明

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

DMS Chapter 1 命题逻辑(2)

1.3 命题公式的等价
---基本等价式

E 9: G∨(H∨S) ⇔(G∨H)∨S (结合律) √

E 10: G∧(H∧S) ⇔(G∧H)∧S

E 11: G∨(H∧S) ⇔(G∨H)∧(G∨S) (分配律) √√√

E 12: G∧(H∨S) ⇔(G∧H)∨(G∧S)

E 13: ~(G∨H) ⇔ ~G∧~H (De Morgan定律) √√√

E 14: ~(G∧H) ⇔ ~G∨~H。 (德.摩根定律)

E 15: G∨F ⇔ G (同一律) √

E 16: G∧T⇔ G

E 17: G∨T⇔ T (零律) √

E 18: G∧F⇔ F

利用真值表进行证明

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

DMS Chapter 1 命题逻辑(2)

1.3 命题公式的等价
---基本等价式

E 19: ~(~G) ⇔ G (双重否定律) √

E 20: (G∇H) ⇔ (~G∧H)∨(G∧~H) (排中律)

E 21: (G∧H)→S ⇔ G→ (H→S) (输出律)

E 22: G→H ⇔ ~H→~G (逆反律) √√√

E 23: G∨~G ⇔ T (矛盾律) √

E 24: G∧~G ⇔ F

利用真值表或已知等价式证明

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

DMS Chapter 1 命题逻辑(2)

1.3 命题公式的等价
---基本等价式

➢ **替换定理**

设G1是G的子公式，以G1的等价式H1（即G1 ⇔ H1）替换G中的G1后得到新的命题公式H与G等价。

根据24个基本等价式和替换定理可实现一般等价式的判定

DMS Chapter 1 命题逻辑(2)

1.3 命题公式的等价
---等价式的判定

1. **真值表法**
   ① **根据定义**
   ② **利用充分必要条件**
2. **公式推演**
   利用基本等价式和替换定理进行等价变换

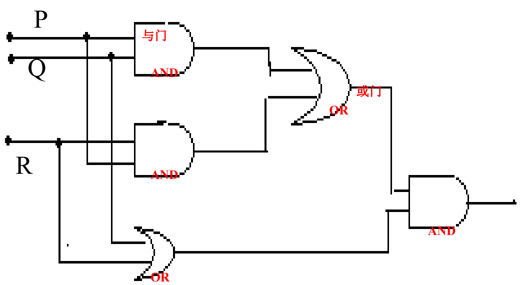
例3.1：试证 P→Q ⇔ ~Q→~P

证： P→Q ⇔ ~P∨Q　　**蕴涵**
⇔ ~P∨~~Q　　**双重否定**
⇔ ~~Q∨~P　　**交换律**
⇔ ~Q→~P　　**蕴 涵**

DMS Chapter 1 命题逻辑(2)

1.3 命题公式的等价
---等价式的判定

例3.2 试将下图所示之逻辑电路简化。



解: 可将上述电路写成如下命题公式:

((P∧Q)∨(P∧R))∧(Q∨R)

DMS Chapter 1 命题逻辑(2)

1.3 命题公式的等价
---等价式的判定

((P∧Q)∨(P∧R))∧(Q∨R)

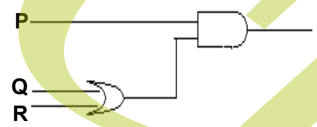
利用基本等价公式进行转化：

((P∧Q)∨(P∧R))∧(Q∨R)

⇔(P∧(Q∨R))∧(Q∨R)　**(分配律)**

⇔P∧(Q∨R)　**(结合律，幂等律)**

所以原电路图可简化为：



DMS Chapter 1 命题逻辑(2)

1.3 命题公式的等价
---等价式的判定

例3.3 证明:$P\vee\sim((P\vee\sim Q)\wedge Q)$ 是永真公式。

证：$P\vee\sim((P\vee\sim Q)\wedge Q)$

$\Leftrightarrow P\vee\sim(P\vee\sim Q)\vee\sim Q$ (De Morgan定律)

$\Leftrightarrow(P\vee\sim Q)\vee\sim(P\vee\sim Q)$ (交换律) (结合律)

$\Leftrightarrow T$ (矛盾律)

DMS Chapter 1 命题逻辑(2)

1.3 命题公式的等价
---等价式的判定

例3.4 试证明$(P\wedge(Q\vee R))\vee(P\wedge\sim Q\wedge\sim R)\Leftrightarrow P$

证明：$(P\wedge(Q\vee R))\vee(P\wedge\sim Q\wedge\sim R)$

$\Leftrightarrow P\wedge((Q\vee R)\vee(\sim Q\wedge\sim R))$ (结合律+分配律)

$\Leftrightarrow P\wedge((Q\vee R)\vee\sim(Q\vee R))$ (De Morgan定律)

$\Leftrightarrow P\wedge T$ (矛盾律)

$\Leftrightarrow P$ ■ (同一律)

DMS Chapter 1 命题逻辑(2)

1.3 命题公式的等价
---对偶式

定义：在给定的仅使用联结词 ~ 、∨、∧的命题公式A中，若把∧换成∨， 把∨换成∧，把T换成F，把F换成T，得到公式A*， 称A*为A的对偶（公）式。

例如：$(P\vee Q)\wedge R\wedge P$ 的对偶式为 $(P\wedge Q)\vee R\vee P$

$\sim P\vee(Q\wedge R)$ 的对偶式为 $\sim P\wedge(Q\vee R)$

例：判断对错

$(P\to Q)\wedge R$ 的对偶式为 $(P\to Q)\vee R$ （ ）

DMS Chapter 1 命题逻辑(2)

1.3 命题公式的等价
---对偶定理

对偶定理一：设P1,P2,…Pn是公式A和A*中的所有命题变元，则

$\sim A(P_1,P_2,\ldots P_n)\Leftrightarrow A^*(\sim P_1,\sim P_2,\ldots,\sim P_n)$

$A(\sim P_1,\sim P_2,\ldots,\sim P_n)\Leftrightarrow\sim A^*(P_1,P_2,\ldots P_n)$

如： 设：$A(P,Q)=P\vee Q$， 则 $A^*(P,Q)=P\wedge Q$

$\sim A(P,Q)=\sim(P\vee Q)$， $A^*(\sim P,\sim Q)=\sim P\wedge\sim Q$

由对偶定理可知：$\sim(P\vee Q)=\sim P\wedge\sim Q$

De Morgan定律

对公式的否定等价于直接将否定作用到各原子本身，并同时把公式中的∧与∨互换，F与T互换

DMS Chapter 1 命题逻辑(2)

1.3 命题公式的等价 ---对偶定理

对偶定理二：设A和B是两个命题公式，若$A \Leftrightarrow B$，则 $A^* \Leftrightarrow B^*$

- 基本等价式中的E3～E18，E23～E24都是成对出现的，

每两个等价式的左右两端分别互为对偶式

- 利用对偶式可以扩大等价式的个数，也可减少证明的次数。

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

54

54

DMS Chapter 1 命题逻辑(2)

1.3 命题公式的等价 ---对偶定理

例3.7 证明 (a) $\sim(P\wedge Q)\rightarrow(\sim P\vee(\sim P\vee Q))\Leftrightarrow \sim P\vee Q$

(b) $(P\vee Q)\wedge(\sim P\wedge(\sim P\wedge Q))\Leftrightarrow \sim P\wedge Q$

证明：(a) 左边 $= \sim(P\wedge Q)\rightarrow(\sim P\vee(\sim P\vee Q))$

$\Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(\sim P\vee(\sim P\vee Q))$ （蕴涵）

$\Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(\sim P\vee Q)$ （幂等律）

$\Leftrightarrow ((P\vee \sim P)\wedge(Q\vee \sim P))\vee Q$ (结合律)（分配律）

$\Leftrightarrow \sim P\vee Q\vee Q \Leftrightarrow \sim P\vee Q=$右边（矛盾律）（同一律)(幂等律)

(b) 式左右两端正好是 (a) 左右端的对偶式，

故 由 (a) 及对偶定理得证

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

55

55

DMS Chapter 1 命题逻辑(2)

1.2&1.3 基本要求

1. 掌握命题公式的定义，解释（赋值）、永真式、矛盾式、可满足式等概念
2. 能熟练写出命题公式的真值表
3. 掌握等价式的定义、性质(自反性、对称性、传递性)
4. 牢记主要基本等价式的内容及名称
   - ✓ 蕴含， 吸收， 分配， 德摩根， 逆反
5. 能熟练应用基本等价式及置换规则进行等价演算
6. 理解对偶原理及在等价演算中的应用

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

56

56