

第四部分 图 论

第13章 欧拉图与哈密顿图

计算机（软件）学院

林 兰

linlan@scu.edu.cn



主要内容

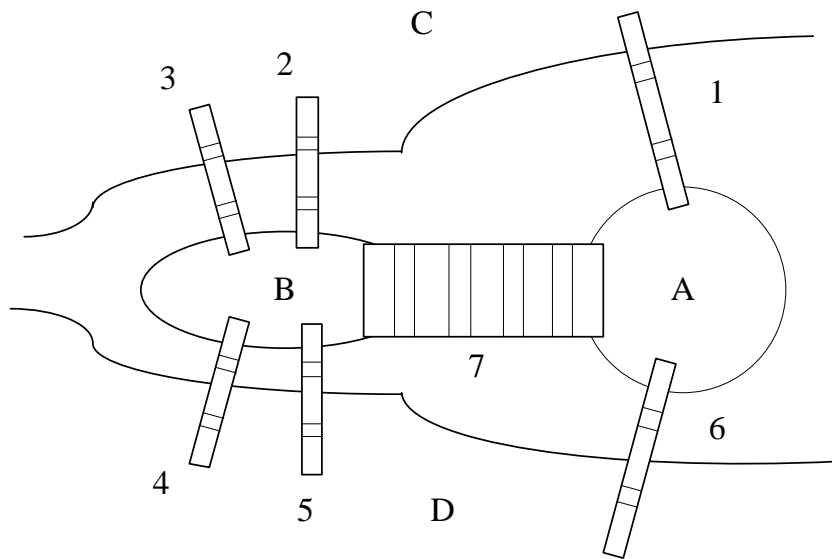
- 13.1 欧拉图及应用
- 13.2 哈密顿图及应用

13.1 欧拉图

■ 问题引入

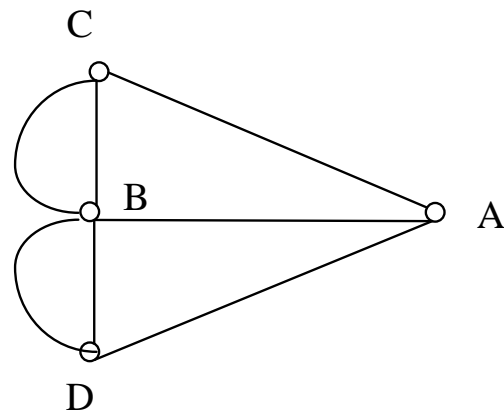
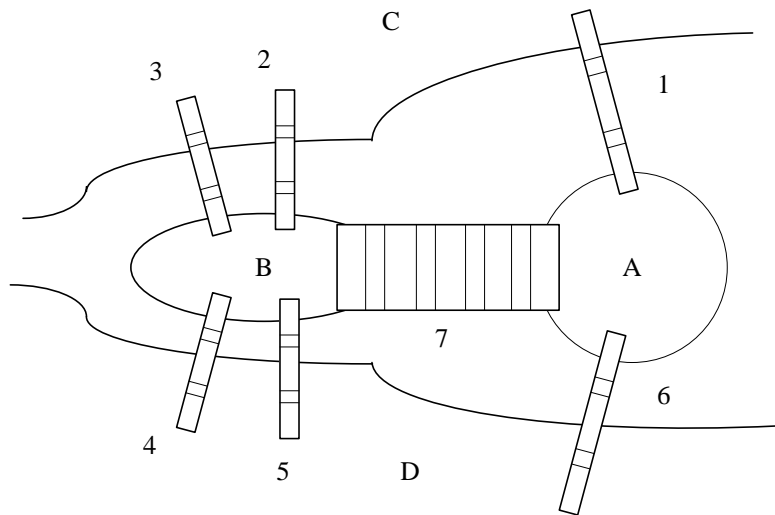
哥尼斯堡（**Konigsberg**）是18世纪东普鲁士一个城市，普雷格尔（**Pregel**）河流经该市，将哥尼斯堡分成四个部分：两岸和两个河心岛，河上共有7座桥将这些陆地相连。

古时城中居民热衷于一个**问题**：游人从任一地点出发，怎样才能做到穿过每座桥一次且仅一次后又返回到原出发地。



13.1 欧拉图

1736年欧拉（Euler）用图论方法解决了“哥尼斯堡七桥问题”。转化为图论问题：用结点表示陆地，用边表示桥。在图中寻找一条穿程于每条边一次的回路。





13.1 欧拉图

1. 定义

① 设 G 是一个无向图，包含 G 的每条边的简单道路称为**欧拉道路**；

（即：穿程于图 G 的**每条边**一次且仅一次的道路）

② 包含 G 的每条边的简单回路称**欧拉回路**；

（即：穿程于图 G 的**每条边**一次且仅一次的回路）

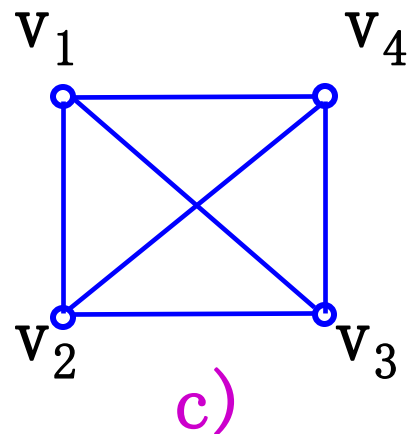
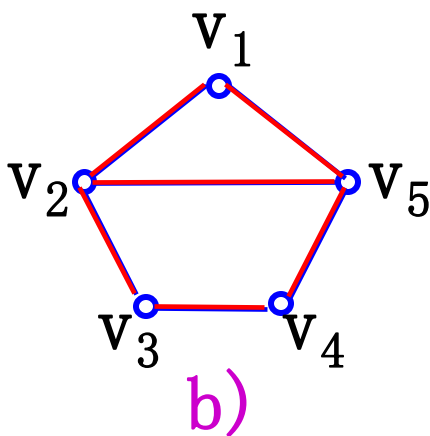
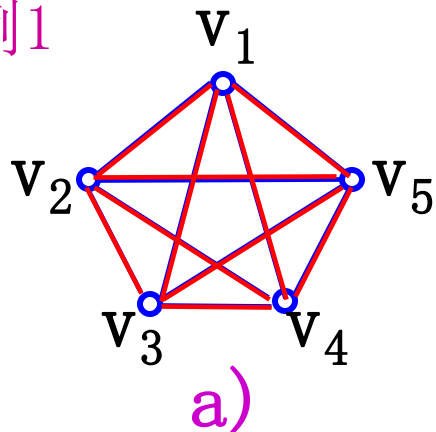
③ 具有欧拉回路的图称为**欧拉图**。

➤ 规定：**平凡图**是欧拉图。

显然，每个**欧拉图**必然是连通图。

13.1 欧拉图

例1



- 图a) 有欧拉回路，是欧拉图；
- 图b) 不是欧拉图，但存在欧拉道路；
- 图c) 不存在欧拉道路。

- ✓ 一个图能一笔画完回到起点 \Leftrightarrow 图为欧拉图
- ✓ 一个图能从一点出发一笔画完到另一个结点 \Leftrightarrow 图中存在一条欧拉道路



13.1 欧拉图

2. 欧拉回路和欧拉道路的判定

定理1 无向连通图 $G=\langle V, E \rangle$ 是欧拉图当且仅当G的所有结点的度数都为偶数。

证明：(1) 必要性

\because 设 G 是欧拉图，则存在一条包含每条边的简单回路 C ，当沿回路一个方向前进时，必定沿一条边进入一个结点，再沿另一条边从这个结点出去，即每个结点都和偶数条边关联。

$\therefore G$ 中不含奇数度结点。

欧拉回路：边不重复。



13.1 欧拉图

(2) 充分性

若 G 的结点都是偶数度，则 G 必含有回路。

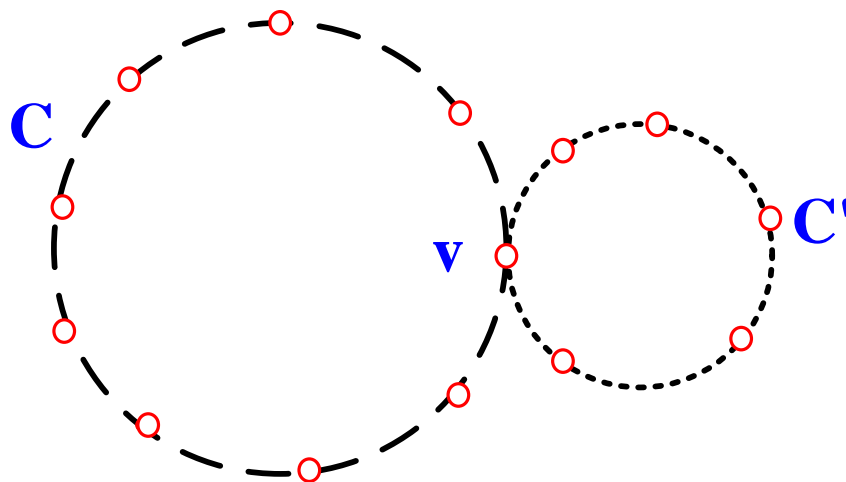
假设回路 C 是其中一条包含图 G 中边数最多的简单回路。

① 若 C 包含了 G 中所有边，则 C 为欧拉回路， G 是欧拉图。结论成立。

② (反证法) 若 C 没有包含 G 中所有边(不是欧拉回路)，则 $G-E(C)$ 是删边子图，仍然都是偶数度结点。在 $G-E(C)$ 中必还有简单回路，设为 C' 。

因为删掉的都是结点的偶数度。

13.1 欧拉图



$\because G$ 是连通的, C' 和 C 至少会在某一点 u 连接(u 为公共点), 则由 C 和 C' 构造出 G 的一条包含边数比 C 多的回路, 与假设矛盾。

$\therefore G$ 中包含边数最多的回路必定是欧拉回路。结论成立。

13.1 欧拉图

推论 非平凡连通图 $G = \langle V, E \rangle$ 具有欧拉道路(但无欧拉回路)当且仅当 G 恰有两个奇数度结点。

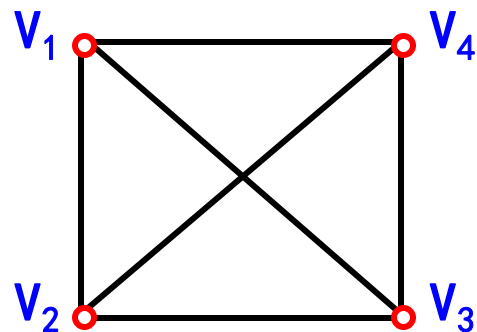
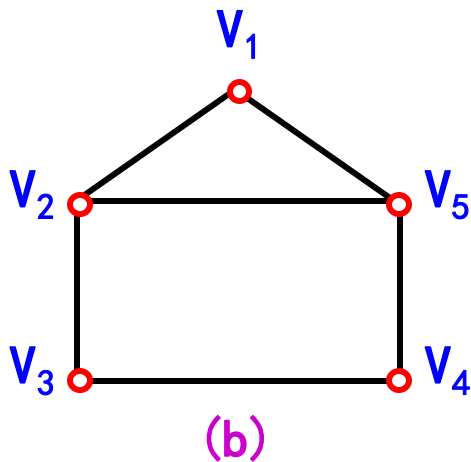
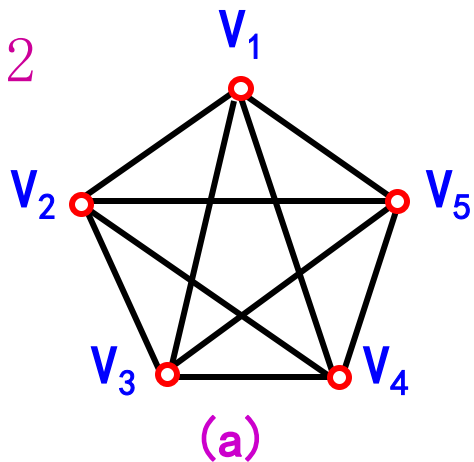
证明: “ \Rightarrow ” 设 G 具有一条Euler道路 L , 则在 L 中除起点和终点外, 其余每个结点都与偶数条边相关联, 所以, G 中有两个奇数度结点。

“ \Leftarrow ” 若 G 有两个奇数度结点 u 和 v , 则 $G+uv$ 是Euler图(每个结点度数为偶数), 从而存在Euler回路 C 。从 C 中去掉边 uv , 则得到一条简单道路 L (起点 u 和终点 v), 且包含了 G 的全部边, 即 L 是一条Euler道路。

注意: 若有两个奇数度结点, 则它们是 G 中每条欧拉通路的端点。

13.1 欧拉图

例2



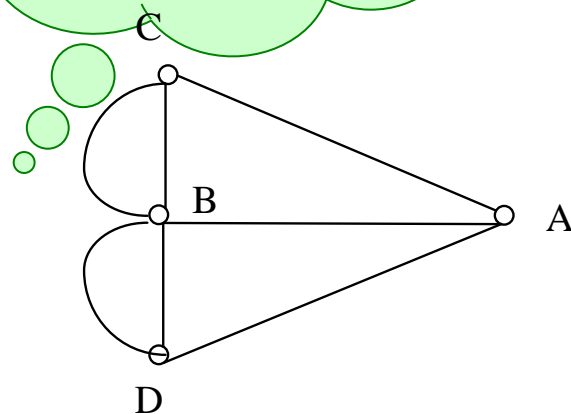
由定理1及推论容易看出：

(a) 是欧拉图；

(b) 不是欧拉图，但存在欧拉道路；

(c) 既不是欧拉图，也不存在欧拉道路。

现在，我们是
不是已经解决
了哥尼斯堡七
桥问题？





13.1 欧拉图

3. 有向图的欧拉道路、欧拉图

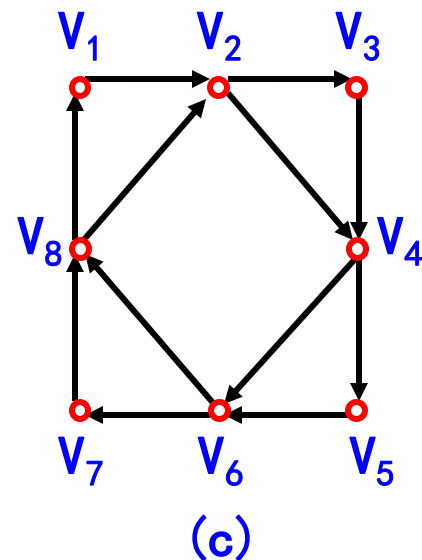
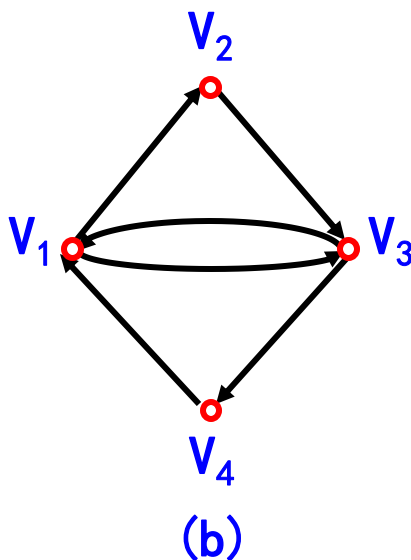
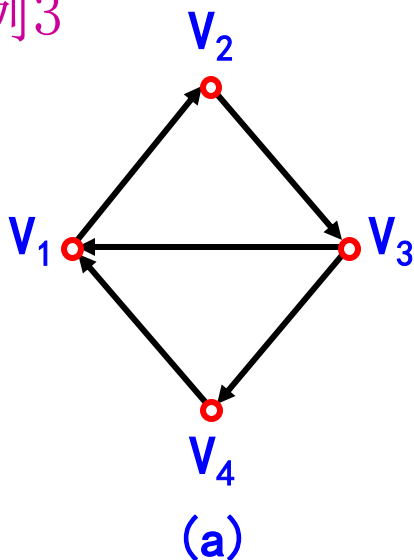
类似于无向图的讨论，对有向图我们有以下结论：

定理2

- i) 有向连通图G含有有向欧拉道路，当且仅当除了两个结点以外，其余结点的入度等于出度，而这两个例外的结点中，一个结点的入度比出度大1，另一个结点的出度比入度大1。
 - ii) 有向连通图G含有有向欧拉回路，当且仅当G中的所有结点的入度等于出度。
- ✓ 同样，有向Euler图的结点度数都为偶数；含有有向Euler道路的图仅有零个或者两个奇度数结点。

13.1 欧拉图

例3

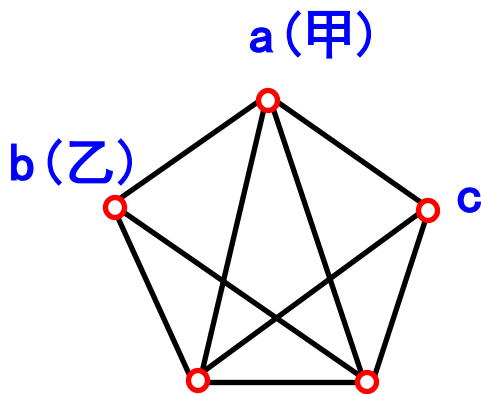


- 图(a)存在一条的欧拉道路： $v_3v_1v_2v_3v_4v_1$ ；
- 图(b)中存在欧拉回路 $v_1v_2v_3v_4v_1v_3v_1$ ，是欧拉图；
- 图(c)中有欧拉回路 $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_2v_4v_6v_8v_1$ ，是欧拉图。

13.1 欧拉图

例4

甲、乙两只蚂蚁分别位于右图中的结点a, b处, 并设图中的边长度是相等的。甲、乙进行比赛: 从它们所在的结点出发, 走过图中的所有边最后到达结点c处。如果它们的速度相同, 问谁先到达目的地?



解: 在图中, 仅有两个度数为奇数的结点b, c, 因而存在从b到c的欧拉通路, 蚂蚁乙走到c只要走一条欧拉通路, 边数为9条。

而蚂蚁甲要想走完所有的边到达c, 至少要先走一条边到达b, 再走一条欧拉通路, 因而它至少要走10条边才能到达c, 所以乙必胜。

13.1 欧拉图

4. 弗勒里 (Fleury) 算法 (构造Euler回路)

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是一个欧拉图

1. 任取 $v_0 \in V$, 令 $P_0 = v_0$;
2. 设 $P_0 = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_i v_i$, 按下面的方法从 $G_k = G - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中选取 e_{i+1} :
 - 1) e_{i+1} 与 v_i 相关联;
 - 2) 除非无别的边可选取, 否则 e_{i+1} 不应该为 $G_k = G - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中的割边;
3. 当 G_k 为零图时, 算法结束; 否则, 返回2。

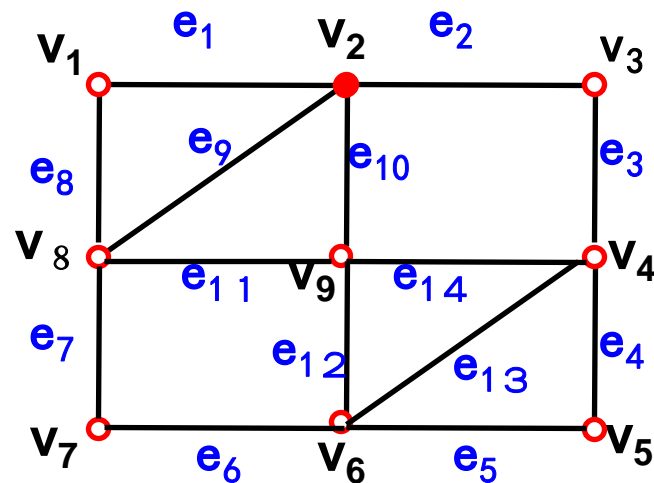
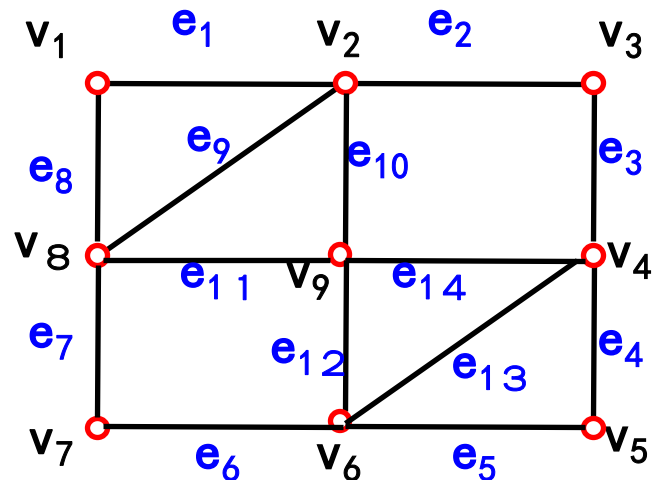
即如果 e_{i+1} 是割边, 同时还有其它边与 v_i 相关联, 则不能选 e_{i+1}

13.1 欧拉图

例5 在右图所示的欧拉图中，某人用算法求 G 中的欧拉回路时，走了简单的回路：

$v_2 e_2 v_3 e_3 v_4 e_{14} v_9 e_{10} v_2 e_1 v_1 e_8 v_8 e_9 v_2$
之后，无法行遍了，试分析在哪步他犯了错误？

此人行遍 v_8 时犯了能不走桥就不走桥的错误，因而未能行遍出欧拉回路。当他走到 v_8 时， $G - \{e_2, e_3, e_{14}, e_{10}, e_1, e_8\}$ ，见右图，此时， e_9 为该图中的桥，而 e_7 、 e_{11} 均不是桥。因此，他不该走 e_9 ，而应该走 e_7 或 e_{11} 。但在行遍 v_3 和 v_1 时，也遇到桥，为什么没有问题呢？



13.1 欧拉图

5. 中国邮递员问题

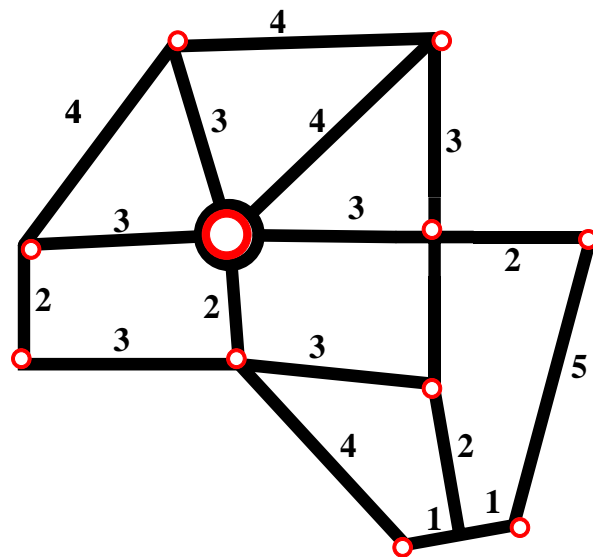
山东大学，管梅谷先生1960提出并解决。

(参考文献：数学学报, 1960, 10: P₂₆₃)

一个邮递员从邮局出发，在其分管的投递区域内走遍所有的街道把邮件送到每个收件人手中，最后又回到邮局，要走怎样的线路使全程最短。

建立图模型：

街道为图的边，街道交叉口为图的结点，问题就是要从图中找出一条至少包含每条边一次的总长最短的回路。





3.1 欧拉图

显然，当这个图是欧拉图时，任何一条欧拉回路都符合要求；当这个图不是欧拉图时，所求回路必然要重复通过某些边。

这个问题有着有效的解决办法，其中最直观的方法之一是：把图中的某些边复制成两条边，然后在所求图中找一条欧拉回路。

关键是：需要复制哪些边？

中国邮递员问题是运筹学中一个典型的优化问题。

对此，管梅谷曾证明，若图的边数为 m ，则所求回路的长度最小是 m ，最多不超过 $2m$ ，并且每条边在其中最多出现两次。中国邮递员问题，一般化为在带权连通图中找一条包括全部边的且权最小的回路。

13.1 欧拉图

奇数度结点的个数必为偶数个。

■ 算法

- (1) 若 G 不含奇数度结点，则任一欧拉回路就是问题的解决。
- (2) 若 G 含有 $2K$ ($K>0$) 个奇数度结点，则先**求出其中任何两点间的最短路径**，然后再在这些路径之中找出 **K 条**路径 P_1, P_2, \dots, P_K ，使得满足以下条件：
 - ① 任何 P_i 和 P_j ($i \neq j$) 没有相同的起点和终点。
 - ② 在所满足①的 K 条最短路径的集合中， P_1, P_2, \dots, P_K 的长度总和最短。
- (3) 根据(2)中求出的 K 条最短道路 P_1, P_2, \dots, P_K ，在原图 G 中复制所有出现的在这条道路上的边，设所得之图为 G' 。
- (4) **构造 G' 的欧拉回路，即得中国邮递员问题的解。**

找出需复制的边

例6 在下图中求中国邮递员问题的解

1. 因为 G 含有奇数度结点, 所以
2. G 中有 $2K=4$ ($K=2$) 个奇结点 V_1, V_2, V_3, V_5 。这4点间的距离

$d(V_1, V_2)=3, \quad d(V_1, V_3)=5,$

$d(V_1, V_5)=4, \quad d(V_2, V_3)=2,$

$d(V_2, V_5)=3, \quad d(V_3, V_5)=4$

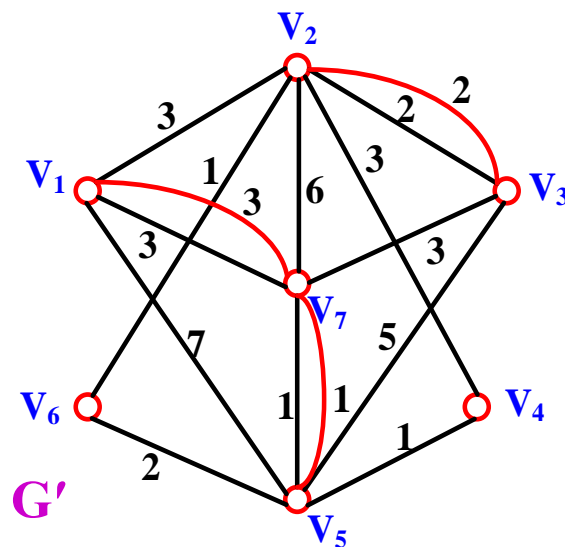
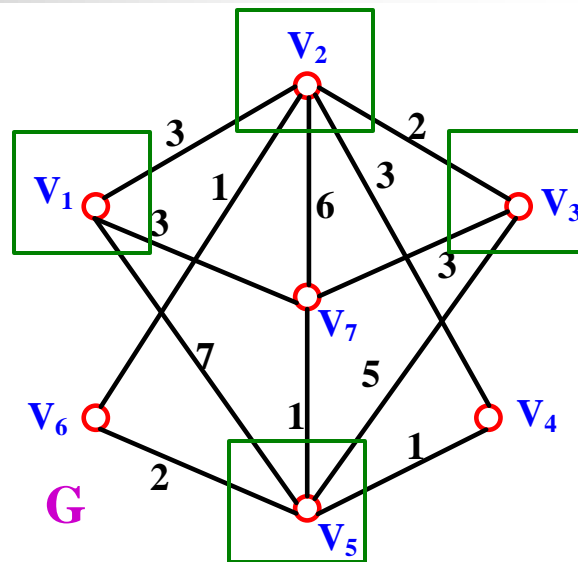
各路径长度: V_1V_5 (4), V_2V_3 (2) — 6

V_1V_2 (3), V_3V_5 (4) — 7

V_1V_3 (5), V_2V_5 (3) — 8

\therefore 两条长度最短 $P_1=V_1V_7V_5, P_2=V_2V_3$

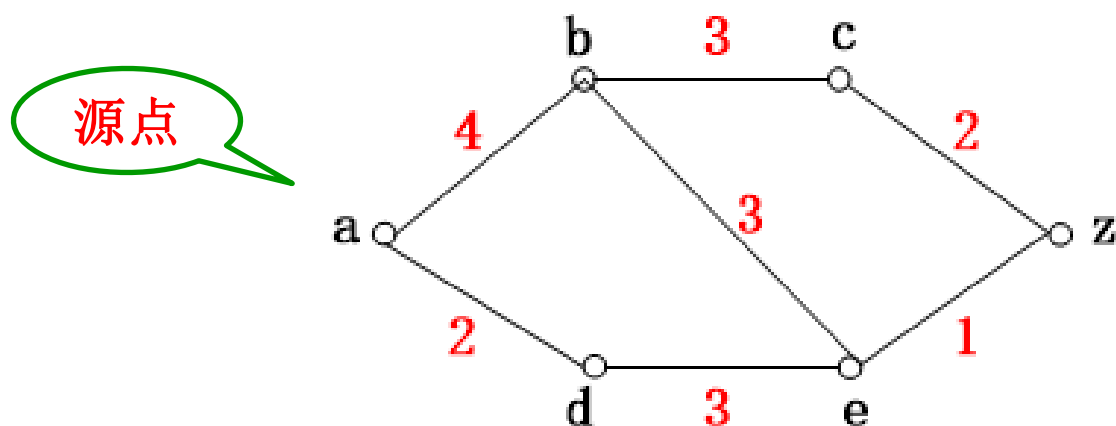
3. 调用Fleury算法构造 G' 的E回路就是中国邮递员问题的解。



13.1 欧拉图

6. 赋权图的最短路径

引入 在下图所示带权图里，顶点a和z之间的最短道路得长度(距离)是多少？



要解决的问题是：求从a到各个相继的顶点的最短路径，直到到达z为止。



13.1 欧拉图

◆ 迪克斯特拉 (Dijkstra) 算法

(1) 把结点集 V 分为 S 和 T 两个集合,

初始时, $S = \{a\}, T = V - S$ 。对 $\forall t \in T$, 计算

$$d(t) = \begin{cases} w(a, t) & a \text{到} t \text{有边} \\ \infty & a \text{到} t \text{无边} \end{cases}$$

(2) 设 $d(x) = \min\{d(t) | t \in T\}$

置 $S = S \cup \{x\}, T = T - \{x\}$

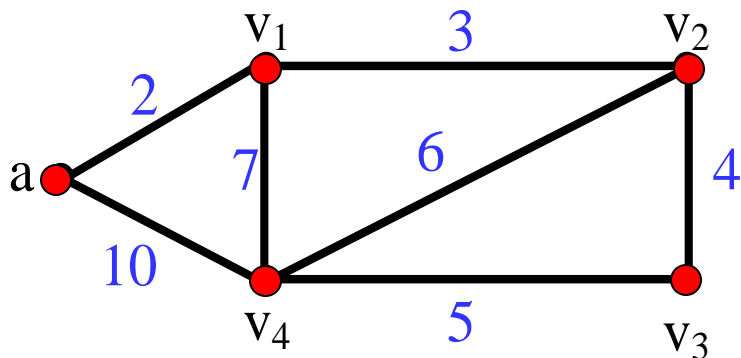
(3) 若 $T = \emptyset$, 则结束;

否则, $\forall t \in T$ 计算: $d(t) = \min\{d(t), d(x) + w(x, t)\}$

(4) 重复 (2) (3)。

13.1 欧拉图

例8

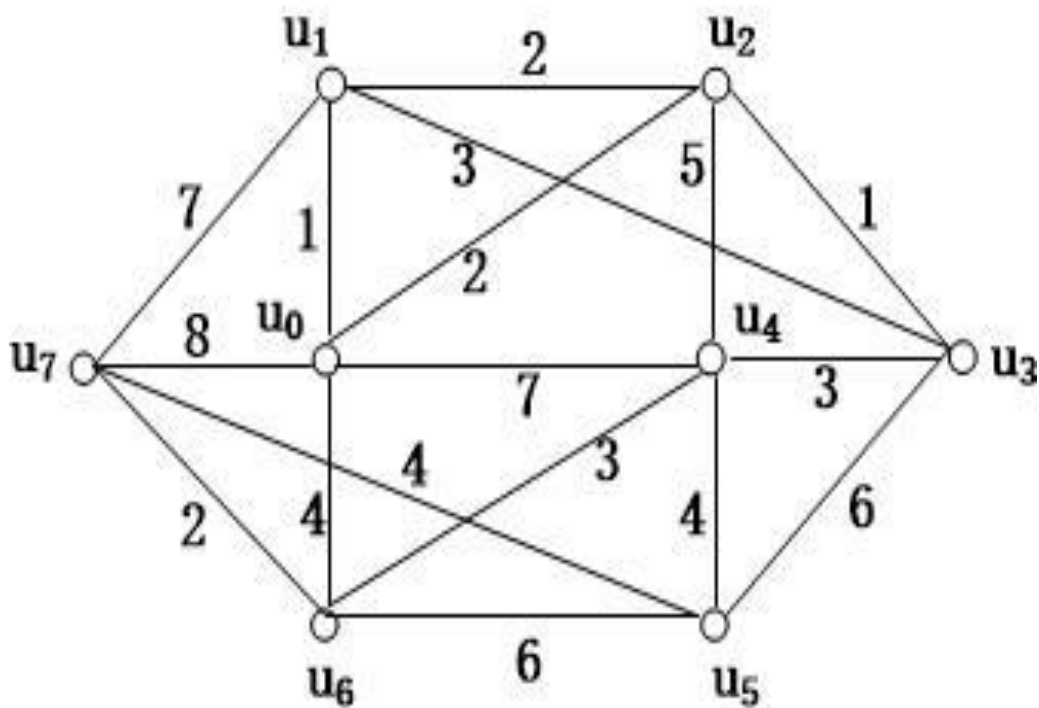


重复次数	S	$d(v_1)$	$d(v_2)$	$d(v_3)$	$d(v_4)$	x	$d(x)$
初始	{a}	2	∞	∞	10	v_1	2
1	{a, v_1 }		5	∞	9	v_2	5
2	{a, v_1 , v_2 }			9	9	v_3	9
3	{a, v_1 , v_2 , v_3 }				9	v_4	9
4	{a, v_1 , v_2 , v_3 , v_4 }						

$T=\emptyset$, 算法结束。

作业

- 用Dijkstra算法求赋权图中结点 u_0 到其余结点的最短路径。





作业

✓ 习题十三

5、7、8



主要内容

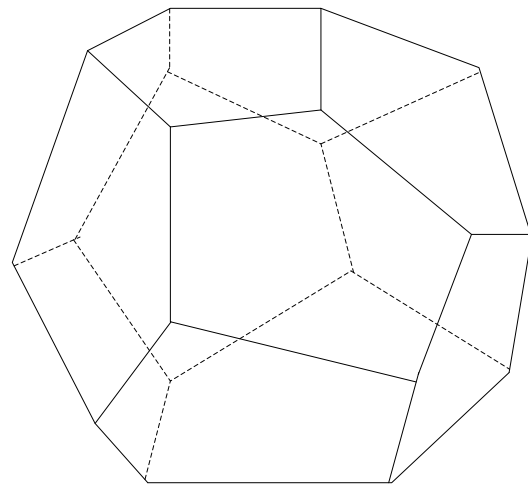
- 13.1 欧拉图及应用
- 13.2 哈密顿图及应用

13.2 哈密顿图及应用

■ 问题引入

1857年爱尔兰数学家
W.R.Hamilton发明一种游戏——
“**周游世界**”。用12面体的20个
顶点标记为世界上20个城市，每
条棱表示城市间的一条路线。

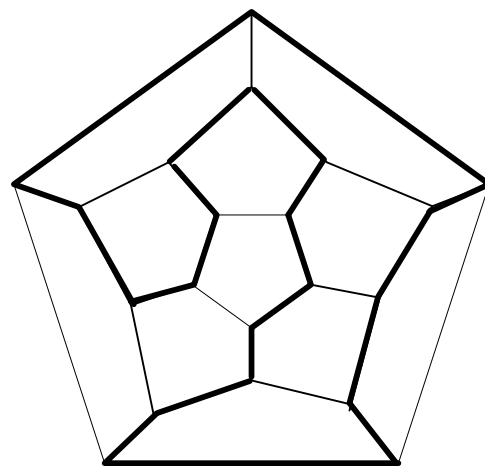
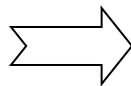
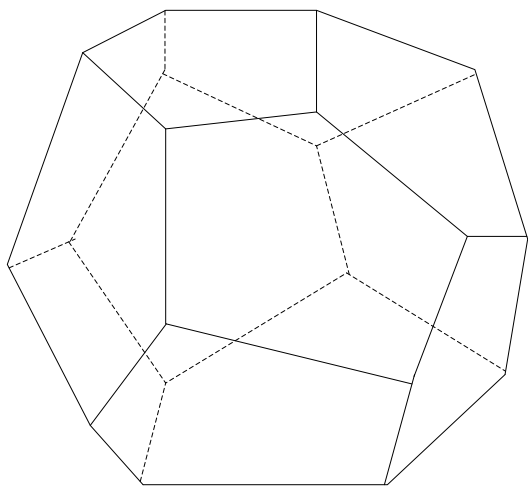
问题：能否从任何一城市出
发，沿棱行走，通过每个城市一
次且仅一次，最后又回到出发点。



13.2 哈密顿图及应用

- 考虑一个等价的问题：

图中是否具有恰好经过每个顶点一次的回路(即包含全部结点的圈)?





13.2 哈密顿图及应用

1. 定义

- 设 G 是一个连通图，若 G 中存在一条包含全部结点的基本道路，则称这条道路为 G 的哈密顿道路。

（即：穿程于 G 的每个结点一次且仅一次的道路）

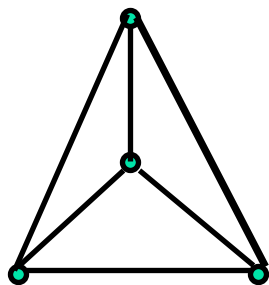
- 若 G 中存在一条包含全部结点的基本回路（圈），则称这个圈为 G 的哈密顿回路（或哈密顿圈）。

（即：穿程于 G 的每个结点一次且仅一次的回路）

- 含有哈密顿圈的图成为哈密顿图。
- 规定：平凡图为哈密顿图。

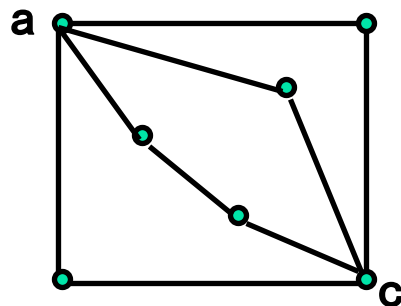
13.2 哈密顿图及应用

例8



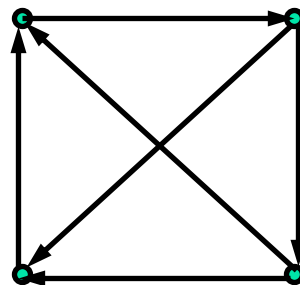
(a)

存在哈密顿圈，即为哈密顿图。



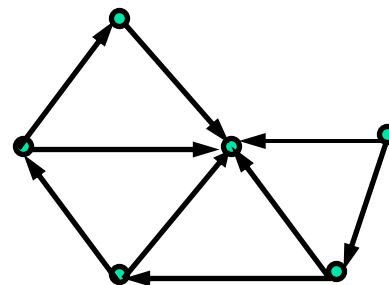
(b)

既不存在哈密顿道路，也不存在哈密顿圈。



(c)

存在哈密顿圈，即为哈密顿图。



(d)

存在哈密顿道路，但不存在哈密顿圈。

13.2 哈密顿图及应用

2. 判断条件

定理3 如果 $G=(V,E)$ 是哈密顿图, 则对 V 的任何非空真子集 S , 都有

$$\omega(G-S) \leq |S|$$

此定理表明哈密顿图有较好的连通性

证明: 设 $G=(V,E)$ 是哈密顿图, 则有哈密顿圈 C , 所有结点在圈中。

对 $\forall S \neq \emptyset, S \subset V$, 有 $\omega(C-S) \leq |S|$

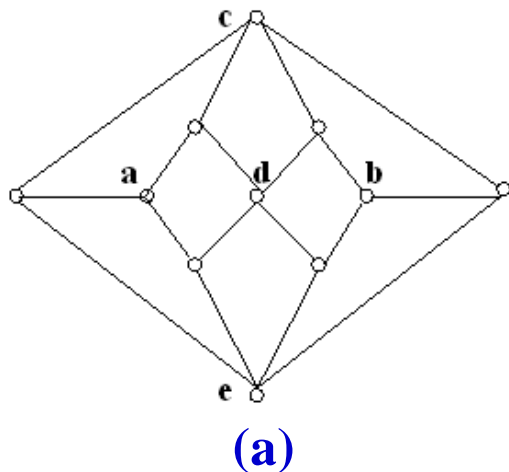
而 $C-S$ 是 $G-S$ 的生成子图, 有 $\omega(G-S) \leq \omega(C-S) \leq |S|$

即: $\omega(G-S) \leq |S|$

✓ 哈密顿图的必要条件, 可以判断不是哈密图!

13.2 哈密顿图及应用

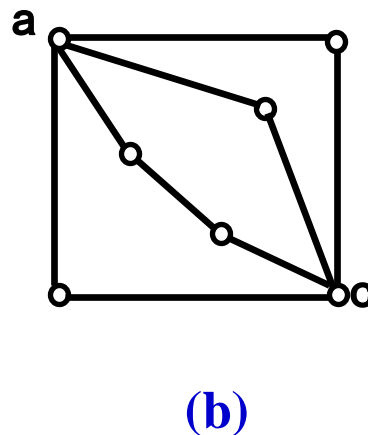
例9 用删点法判别下图是否为H图



选取 $S = \{a, b, c, d, e\}$

$$\omega(G-S) = 6 > |S|$$

不是H图



选取 $S = \{a, c\}$

$$\omega(G-S) = 4 > |S|$$

不是H图

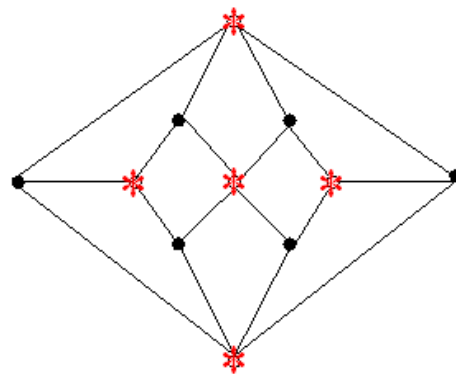
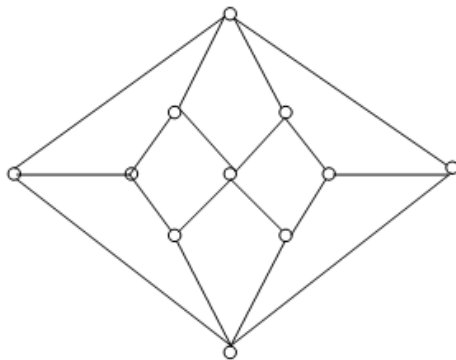
下面给出一种较简便得否定一个图是H图的方法，但也不是通用的。

13.2 哈密顿图及应用

例9（续） 证明下列图不是哈密顿图。

证：(标记算法)用A标记某一顶点v，所有与A邻接的顶点标记为B。继续不断地用A标记所有邻接于B的顶点，用B标记所有邻接于A的顶点，直到所有顶点标记结束。

标记：A=★，B=●



图中有5个顶点A，6个顶点B，两种标记个数不等，无H回路。

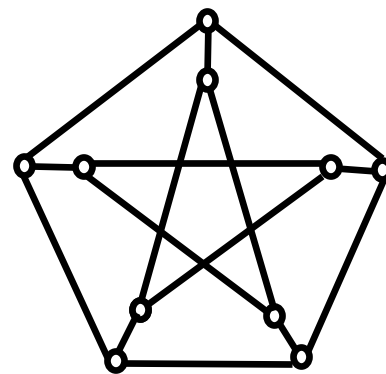
13.2 哈密顿图及应用

说明

1) 定理3给出的是哈密顿图的必要条件，而不是充分条件。

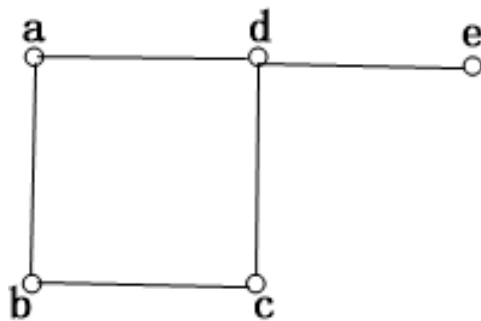
例如，彼得森图，对结点集合 V 的任意非空子集 V_1 ，均满足 $\omega(G-V_1) \leq |V_1|$ ，但它不是哈密顿图。

2) 定理3的逆否命题却非常有用。经常用于判断某些图不是哈密顿图。

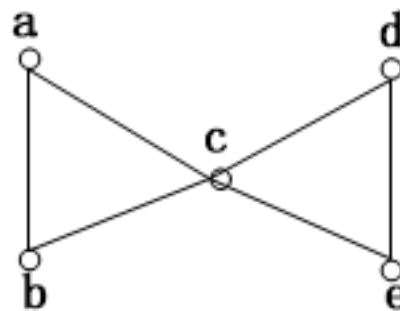


13.2 哈密顿图及应用

例10 证明下列得图都没有哈密顿回路。



(a)



(b)

解：(a)图中有**1度顶点**e，无哈密顿回路。

(b)图中，顶点a, b, d, e四个顶点都为**2度顶点**，这些顶点关联得两条边都必然属于一条H回路。但这样得情况下，c点关联得4条边都属于H图，是不可能的。图(b)无哈密顿回路。



13.2 哈密顿图及应用

定理4

设 $G=\langle V, E \rangle$ 是具有 n 个结点的简单图。如果任意一对结点 $u, v \in V$ ，均有

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n-1$$

则 G 中存在哈密顿道路。

证明：(1) 首先证明满足上述条件的 G 是连通图。否则 G 至少有两支，即

$$G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle \text{ 和 } G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$$

$$\text{对 } \forall v_1 \in V_1, v_2 \in V_2,$$

$$\text{显然 } \deg(v_1) + \deg(v_2) \leq |V_1| - 1 + |V_2| - 1 = n - 2$$

与已知矛盾，故 G 是连通的。



证明(续1)

(2) 证明 G 中存在哈密尔顿道路。

设 $L = v_1v_2 \dots v_k$ 为 G 中最长的一条基本道路，显然 $k \leq n$ 。

1) 若 $k = n$ ，则 L 为 G 中经过所有结点的道路，即为哈密尔顿道路。

2) 若 $k < n$ ，由 L 的最长性可知， v_1 和 v_k 的全部邻接点都在 L 上。

a) 若 $v_1v_k \in E$ ，则 $v_1v_2 \dots v_kv_1$ 就构成 G 的一个包含 L 的圈。

b) 若 $v_1v_k \notin E$ ，则存在 L 上的结点 v_i ，使得

$$v_1v_i \in E \Rightarrow v_{i-1}v_k \in E。$$



证明(续2)

假设对 $\forall v_i \in L$, $v_1 v_i \in E$ 而 $v_{i-1} v_k \notin E$ 。

设 v_1 在 L 上与 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_t}$ 相邻 ($t \geq 2$) ,

(因为如果 $t=1$, 则 v_1 只有一个邻接点 v_{i_1} , $d(v_1)=1$,

而 $v_1 v_k \notin E$, 所以 $d(v_k) \leq k-2$, 有 $d(v_1)+d(v_k) \leq k-1 < n-1$ 。(矛盾) $\therefore t \geq 2$)

则 v_k 不能与 $v_{i_1-1}, v_{i_2-1}, \dots, v_{i_t-1}$ 中的任何一个相邻,

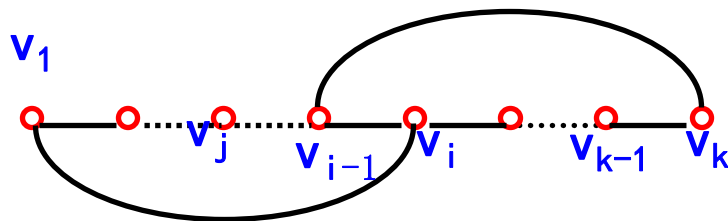
这样就有 $d(v_k) \leq k-t-1$, $d(v_1)=t$,

$d(v_1)+d(v_k) \leq k-1 < n-1$ 。推出矛盾。

证明(续3)

这样就可以构造一个圈

$$C = v_1 v_2 \cdots v_{i-1} v_k v_{k-1} \cdots v_i v_1.$$

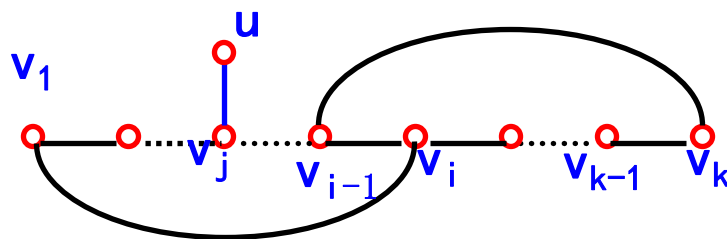


如图所示，这个圈包含了L中的全部结点。

这样，对a) 和b)，都可以构造一个包含L中的全部结点的一个圈C。

证明(续4)

因为 $k < n$ ，所以 V 中还有一些结点不在 C 中，由 G 的连通性知，存在 C 外的结点 u 与 C 上结点 v_j 相邻。



证明方法是一种
构造性证明方法。

显然，可以构造一条基本道路 $P' = uv_jv_{j+1} \cdots v_{i-1}v_kv_{k-1} \cdots v_iv_1v_2 \cdots v_{j-1}$ 。 P' 比 P 长，与 L 的最长性相矛盾。所以，必然 $k=n$ ，即 L 必是 G 的一条哈密尔顿道路。



13.2 哈密顿图及应用

定理5 设 $G=\langle V, E \rangle$ 是具有 n 个结点 ($n \geq 3$) 的简单图。如果任意一对 (不相邻) 结点 $u, v \in V$, 均有

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n$$

则 G 必是哈密顿图。

证明: 以上已经证明哈密顿道路的存在, 仿照定理4中b)的方法, 可构造出一个包含所有结点的哈密尔顿圈。

以上**定理**给出的是哈密尔顿图的**充分条件**, 而不是必要条件。在六边形中, 任意两个结点的度数之和都是 $4 < 6$, 但六边形是哈密尔顿图。



13.2 哈密顿图及应用

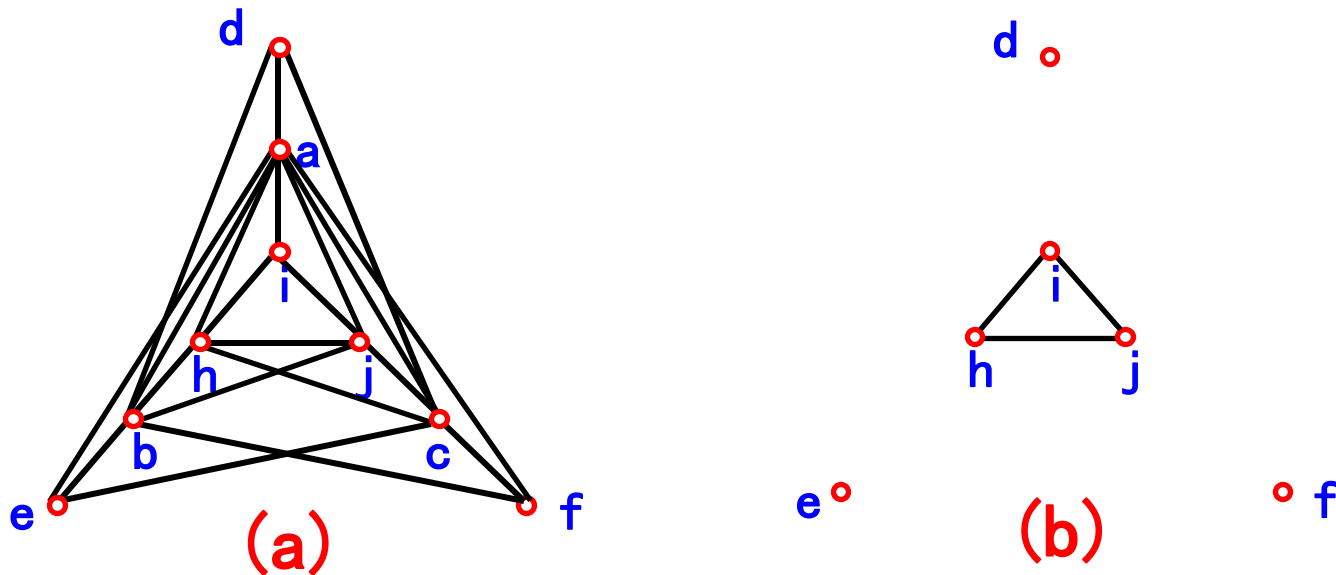
例10 某地有5个风景点，若每个风景点均有两条道路与其他点相通。问游人可否经过每个风景点恰好一次而游完这5处？

解：将5个风景点看成是有5个结点的无向图，两风景点间的道路看成是无向图的边，因为每处均有两条道路与其他结点相通，故每个结点的度数均为2，从而任意两个结点的度数之和等于4，正好为总结点数减1。

故此图中存在一条哈密尔顿道路，因此本题有解。

13.2 哈密顿图及应用

例11 证明下图(a)所示的图中，不存在哈密顿圈。



证明：在图(a)中，删除结点子集 $V_1 = \{a, b, c\}$ ，得到图(b)，在图(b)中，它的连通分支为4，显然有： $\omega(G - V_1) = 4 > |V_1| = 3$ 。

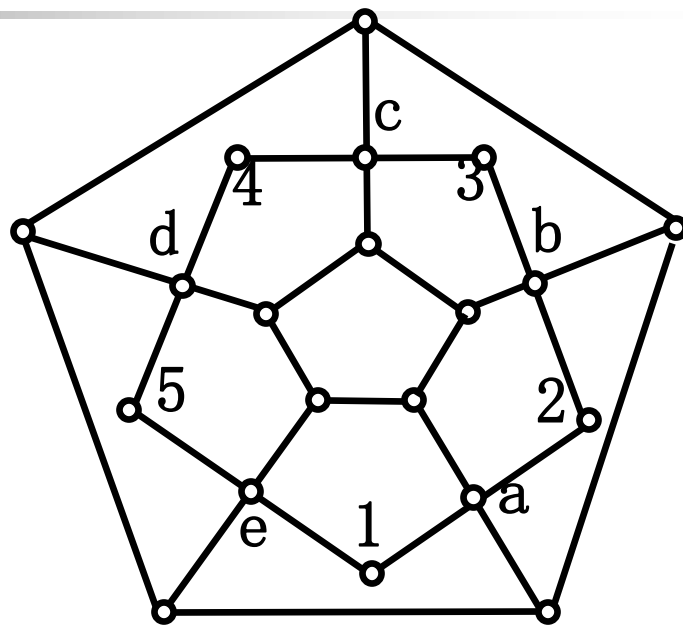
由定理3可知：图(a)所示的图中不会存在哈密顿圈，即不是哈密顿图。

13.2 哈密顿图及应用

例12 判断右图所示的图是否存在哈密顿圈。

解：若图中存在哈密顿圈，则圈中任何结点的度数均为2。

（图中若有2度结点，与之关联的2条边必定在H回路中。）



因而结点1、2、3、4、5所关联的边均在圈中，于是在结点a、b、c、d、e处均应将不与1、2、3、4、5关联的边删除，而要删除与结点a、b、c、d、e关联的其他边，这样一来，图就不连通了，因而图中不存在哈密顿圈。



13.2 哈密顿图及应用

判定定理(定理5)的条件很强,有些图虽然不直接满足这个条件,但可以通过在**一定条件下加边**的办法来满足这个条件。

定义(图的闭包)

设 $G=\langle V, E \rangle$ 是 n 阶的简单图。若存在一对不相邻的结点 $u, v \in V$, 满足

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n$$

则构造图 $G' = \langle V, E \cup (u, v) \rangle$, 并且在图 G' 上重复上述步骤, 直至不再存在这样的结点对为止, 所得之图称为图 G 的**闭包**, 记为 $C(G)$ 。



13.2 哈密顿图及应用

引理

设 u, v 是简单图 G 的两个不相邻结点, 且 $\deg(u) + \deg(v) \geq n$, 则 G 是哈密顿图当且仅当 $G+uv$ 是哈密顿图。

证明: 首先证明, 若 G 是哈密顿图, u, v 是 G 的两个非邻接结点且 $\deg(u) + \deg(v) \geq n$, 则 G 是哈密顿图, $G+uv$ 当然也是哈密顿图。必要性是显然的。

现证充分性, 若 $G+uv$ 是哈密顿图。

如果 $G+uv$ 的H圈不含边 uv , 则 G 中有一个H圈;

如果 $G+uv$ 的H圈含边 uv , 则 G 中必然存在一条以 u 为起点, v 为终点的哈密顿道路 L , 仿照定理4的证明过程, 由 L 可以构造一个哈密顿圈, 即 G 也是一个哈密顿图。



13.2 哈密顿图及应用

定理6

一个简单图 G 是哈密尔顿图当且仅当其闭包图是哈密尔顿图。

证明：略。

由上引理知，在构造 $c(G)$ 的过程中，所得的图与 G 同为哈密尔顿图或同不为哈密尔顿图。

13.2 哈密顿图及应用

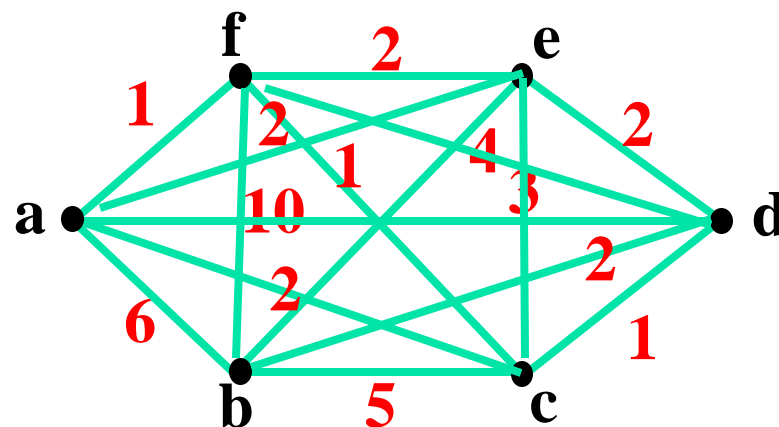
3. 典型应用（推销商问题）

设 u_1, u_2, \dots, u_n 代表 n 个城市，每两个城市间都有一条直接通路， $W(u_i, u_j)$ 表示 u_i 和 u_j 之间的距离（或旅费）。

有一个商人从其中一个城市出发，去每个城市经商一次，最后又回到出发地。问：怎样安排行程使得总的路程最短？

➤ 转化为图论问题

实际上，这个问题就是要在一个带权的完全图中，找一个各边权之和最小的哈密尔顿圈，即最优哈密尔顿圈的问题。





13.2 哈密顿图及应用

- 完全图 K_n 都是哈密顿图 ($n \geq 3$)，有多少条不同的哈密顿圈？

思路： 因为 K_n 任意两点都是连通的，从其中的任意一结点开始来构成包含每个结点一次的回路都是可能的。

选择一个出发点后，其余各点的排列数为哈密顿回路的条数： $\frac{1}{2}(n-1)!$ （排除逆时针和顺时针排列是一样的回路）

✓ 推销商问题：检查 $\frac{1}{2}(n-1)!$ 个H回路，找出最小权和一个回路。



13.2 哈密顿图及应用

这个问题具有重要的实际意义，但至今仍未找到一个有效的解决办法。

现在提出的解决办法有两种：求近似解和精确解。

- 求近似解的代表方法有回路修正法和邻近法。
- 求精确解的方法——分枝定界法。



作业

✓ 习题十三

9、15