DMS Chapter 13(1) 欧拉图

# 第13章 欧拉图与哈密顿图

1

DMS Chapter 13(1) 欧拉图

## Euler图及其应用

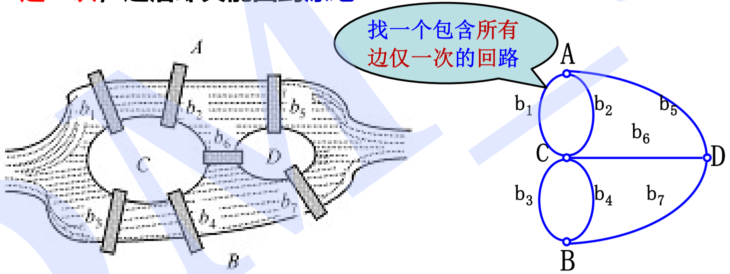
- 欧拉图的定义
- 欧拉图的判定
- 连通有向图的欧拉道路与欧拉回路
- 欧拉回路的构造_Fleury算法
- 中国邮递员问题
- Euler图的应用—模数转换问题

2

DMS Chapter 13(1) 欧拉图

## 引子--哥尼斯堡七桥问题

**哥尼斯堡城有一条横贯全城的河，城的各部分用七座桥联接，每逢假日，城中居民进行环城逛游，这样就产生了一个问题：能不能设计一次“遍游”，使得从某地出发对每座桥走且只走一次，之后却又能回到原地？**




3

DMS Chapter 13(1) 欧拉图

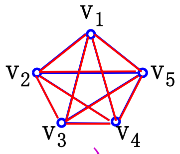
## Euler图的定义

- **定义13-1.1** 设G是一个无孤立结点的图，包含G的每条边的简单道路（回路）称为该图的一条欧拉道路（欧拉回路）。有欧拉回路的图称为欧拉图。
  - ✓ 规定平凡图为欧拉图。
  - ✓ 欧拉图必然是连通图。
  - ✓ 欧拉道路（欧拉回路）是经过图中每边一次且仅一次的道路（回路）。

4

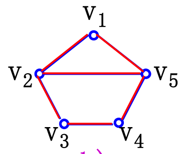
## Euler图的定义

**例**



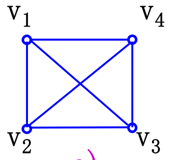
a)

是欧拉图



b)

存在欧拉道路，
但不是欧拉图



c)

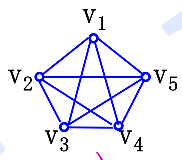
没有欧拉道路，
也不是欧拉图



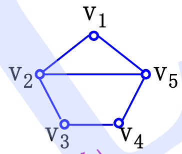


## Euler图的判定

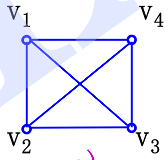
**定理13-1 无向连通图G＝<V，E>是欧拉图当且仅当G的所有结点的度都为偶数。**



a)



b)



c)

**a)** 是欧拉图
**b)** **c)** 不是欧拉图

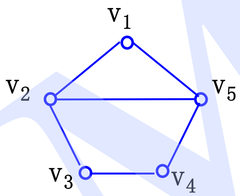


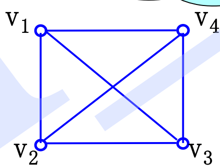


## Euler图的判定

**推论13-1.1 无向连通图G＝<V，E>含有欧拉道路 当且仅当 G仅有 零个或者 两个 奇度结点。**

它们是G中每条
欧拉道路的端点。



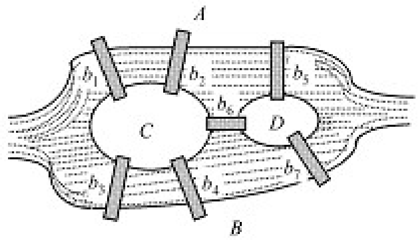


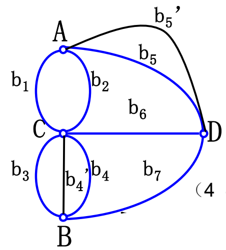
左上图 含有欧拉道路, **v2, v5** 是端点
右上图 不含欧拉道路





## 哥尼斯堡七桥问题





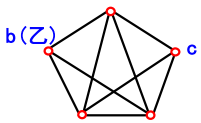
(4 4 6 4)

**① 放宽条件，可重复走一些桥，但要求重复走的桥个数最少**
**② 添重复边 b5′，b4′ 得到欧拉图**

DMS Chapter 13(1) 欧拉图

## 欧拉图

**例：甲、乙两只蚂蚁分别位于图中的结点a，b处。甲、乙进行比赛：从它们所在的结点出发，走过图中的所有边最后到达结点c处。如果它们的速度相同，问谁先到达目的地？**




**解**

1. **图中仅有两个奇度结点b，c，因而存在从b到c的欧拉道路；**
2. **蚂蚁乙走到 c 只要走一条欧拉道路，即9条边。**
3. **蚂蚁甲要想走完所有的边到达c，至少要先走1条边到达b，再走一条长为9的欧拉道路，因而它至少要走10条边才能到达c，**
4. **所以乙会先到达c。**

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

9

DMS Chapter 13(1) 欧拉图

## 有向图的欧拉道路和欧拉图

类似于无向图的讨论，对有向图有以下结论：

定理13-2

① 有向弱连通图G含有有向欧拉道路，当且仅当 除两个结点以外，其余结点的入度等于出度，这两个例外的结点中，一个结点(道路的起点)的出度比入度大1，另一个结点(道路的终点)的入度比出度大1。

② 有向弱连通图G含有有向欧拉回路，当且仅当 G中的所有结点的入度等于出度。

同样，有向Euler图的结点度数都为偶数；含有有向Euler道路的图仅有零个或者两个奇度数结点。

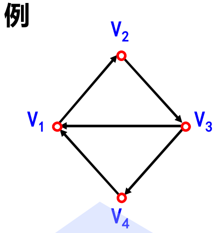
四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

10

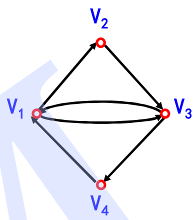
DMS Chapter 13(1) 欧拉图

## 有向图的欧拉道路、欧拉图

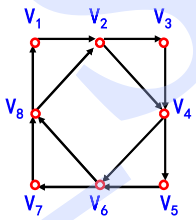
**例**




(a)




(b)




(c)

入度序列（2 1 1 1）
出度序列（1 1 2 1）
存在欧拉道路：$V_3V_1V_2V_3V_4V_1$；
但不是欧拉图

入度序列（2 1 2 1）
出度序列（2 1 2 1）
是欧拉图
回路：$V_1V_2V_3V_4V_1V_3V_1$

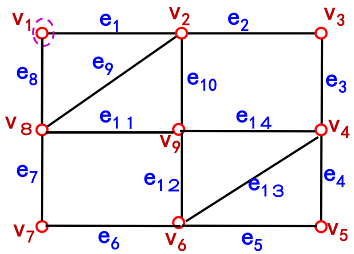
入度序列（1 2 1 2 1 2 1 2）
出度序列（1 2 1 2 1 2 1 2）
是欧拉图，存在欧拉回路

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

11

DMS Chapter 13(1) 欧拉图

## Euler回路的构造




（9,14）

顶点处选择边时比较随机，无明确指导原则，可能出现走不下去，得回头重新选择的情况

$v_1e_1\ v_2e_9v_8\ e_8\ v_1$

$v_1e_1\ v_2e_9v_8e_7v_7e_6v_6e_5v_5e_4v_4e_{13}v_6e_{12}v_9e_{11}\ v_8e_8v_1$

$v_1e_1\ v_2e_9v_8e_7v_7e_6v_6e_5v_5e_4v_4e_{13}v_6e_{12}v_9e_{10}v_2e_2v_3e_3v_4e_{14}v_9e_{11}v_8e_8v_1$

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

12

DMS Chapter 13(1) 欧拉图

## Euler回路的构造--Fleury算法

设G = <V，E>是一个欧拉图

① 任取$v_0 \in V$，令$i=0$，$P_i = v_0$；

② 令 $P_i = v_0e_1v_1e_2…e_iv_i$，$G_i = G - \{e_1,e_2,…,e_i\}$，$E_i = E - \{e_1,e_2,…,e_i\}$，

③ 当$E_i$为空时，转至⑤，否则，按下面的原则从$E_i$中选取$e_{i+1}$：

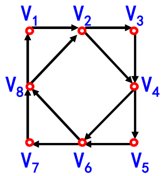
a) $e_{i+1}$与$v_i$相关联，记与$e_{i+1}$相关联的另一结点为$v_{i+1}$；

b) 除非无别的边可选取，否则$e_{i+1}$不应该为$G_i$的桥(割边)；

④ $i=i+1$，返回②。

⑤ $P_i$ 即为图G的一条欧拉回路

能不走桥
就不走桥

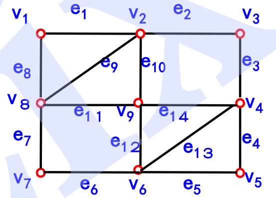



13

DMS Chapter 13(1) 欧拉图

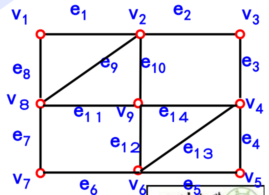
## Fleury算法(构造Euler回路)

例 在右图所示的欧拉图中，甲用Fleury算法求G中的欧拉回路时，走了简单的回路：$v_2e_2v_3e_3v_4e_{14}v_9e_{10}v_2e_1v_1e_8v_8e_9v_2$之后，无法行遍所有边了，试分析在哪步他犯了错误?



解：

此人行遍$v_8$时犯了能不走桥却走了桥的错误



思考：但在行遍$v_3$和$v_1$时，也遇到桥，为什么没有问题呢?

14

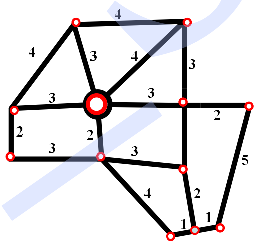
DMS Chapter 13(1) 欧拉图

## 中国邮递员问题

- 山东师范大学，管梅谷先生1962提出并解决。

  一个邮递员从邮局出发，在其分管的投递区域内走遍所有的街道把邮件送到每个收件人手中，最后又回到邮局，要使全程最短该走怎样的线路？

- 这个问题的输入/已知可表示为一个有权图：街道为边，长度为权，交叉口为结点。
- 问题的解/输出：从这样一个图中找出一条至少包含每条边一次且权最小的闭道路。



15

DMS Chapter 13(1) 欧拉图

## 中国邮递员问题

运筹学中一个典型的优化问题

① 中国邮递员问题，即为从带权连通图中找一条包括全部边且权最小的闭道路。

② 当此图是欧拉图时，从邮局出发的欧拉回路即符合要求；当此图不是欧拉图时，所求闭道路必然要重复通过某些边。

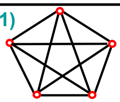
③ 对此，管梅谷先生曾证明，若图的边数为m，则所求闭道路的长度最小是m，最多为2m，并且每条边在其中最多重复一次。

④ 中国邮递员问题最直观的方法之一是：把图中的某些边复制成两条边，使其变为欧拉图，然后再构造从邮局出发的欧拉回路。

关键是：复制哪些边？

16

DMS Chapter 13(1) 欧拉图



## 中国邮递员问题--算法

（1）若G不含奇数度结点，则问题转化为构造G的欧拉回路。

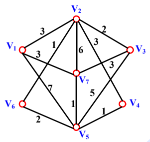
（2）否则若G含有2K(K>0)个奇度结点，求出其中任意两点间的距离及其对应的最短路径(共? ？条)，然后在这(? ？)条最短路径之中按以下2个条件找出K条路径$P_1$，$P_2$，…，$P_K$:

① K条路径的起点和终点与2K个奇度结点一一对应。

② $P_1$，$P_2$，…$P_K$的长度总和最短。

每个奇度结点出现且仅出现一次

（3）在原图G中复制所有出现的在这K条最短道路$P_1$，$P_2$，…，$P_K$上的边一次，得欧拉图G′。



（4）构造G′的欧拉回路，即中国邮递员问题的解。

17

DMS Chapter 13(1) 欧拉图

## 中国邮递员问题

例 在右图中找一条包括全部边且权最小的闭道路

解：1. G不是欧拉图，故需要复制某些边，构造欧拉图G’

2. G中有4 个奇结点$V_1$，$V_2$，$V_3$，$V_5$, 即K=2

3．这4点中任意2点间的距离及对应的最短路径为

$d(V_1,V_2)=3$，$V_1V_2$； $d(V_1,V_3)=5$，$V_1V_2V_3$;

$d(V_1,V_5)=4$，$V_1V_7V_5$; $d(V_2,V_3)=2$，$V_2V_3$

$d(V_2,V_5)=3$，$V_2V_6V_5$; $d(V_3,V_5)=4$，$V_3V_7V_5$

4. 符合条件(1)的 2 条道路 组合 有:

$V_1V_2(3)$，$V_3V_7V_5(4)$ — 7

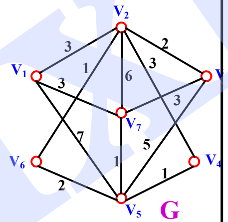
$V_1V_2V_3(5)$，$V_2V_6V_5(3)$—8

$\boxed{V_1V_7V_5(4),\ V_2V_3(2)—6}$

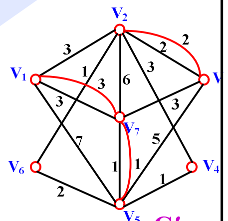
符合条件(2)

4. 复制边 $V_1V_7$，$V_7V_5$， $V_2V_3$ 得 欧拉图G’

4．构造G’的欧拉回路即为待求解。



G



G′

18

DMS Chapter 13(1) 欧拉图

## Euler图的应用 ---模数转换问题

设有旋转鼓轮其表面被等分成16个部分，如图1所示。

其中每一部分分别用绝缘体或导体组成，绝缘体部分给出信号0，导体部分给出信号1，在图中阴影部分表示导体，空白部分表示绝缘体，根据鼓轮的位置，触点将得到信息1101，如果鼓轮沿顺时针方向旋转一个部分，触点将有信息1010。

问鼓轮上16个部分怎样安排导体及绝缘体，才能使鼓轮每旋转一个部分，四个触点能得到一组不同的四位二进制数信息。

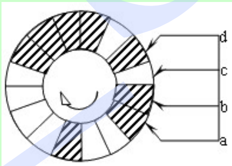



图1

19

DMS Chapter 13(1) 欧拉图

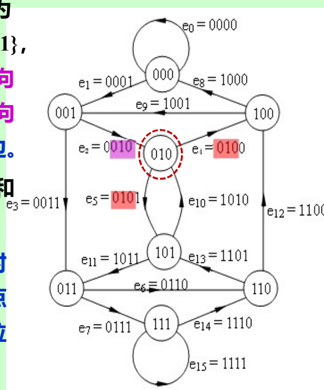
## Euler图的应用 ---模数转换问题

➢ 设有一个八结点的有向图，其结点分别记为{000，001，010，011，100，101，110，111}，设$a_i$∈{0，1>，从结点$a_1a_2a_3$ 可引出两条有向边，其终点分别是$a_2a_30$和$a_2a_31$。该两条有向边分别记为$a_1a_2a_30$ 和 $a_1a_2a_31$。共有？ 条边。

➢ 图中任一条道路中，邻接的边必是$a_1a_2a_3a_4$和$a_2a_3a_4a_5$的形式

➢ 图中的一条边可看成鼓轮转动至某一位置时触点上的二进制信息，故16个不同位置触点上的二进制信息，即对应于图中的一条欧拉回路。

➢ 回路中每条边对应码的第1个符号构成的循环序列就是待求结果



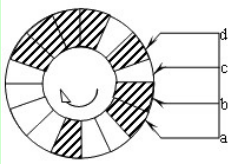

20

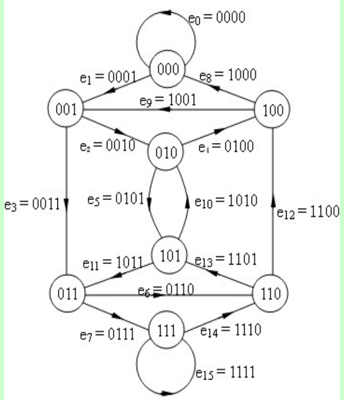
DMS Chapter 13(1)
欧拉图

## Euler图的应用
## ---模数转换问题

如$e_0e_1e_2e_4e_9e_3e_6e_{13}e_{10}e_5e_{11}e_7e_{15}e_{14}e_{12}e_8$是一条欧拉回路，这16个二进制数的第1个bit 对应的二进制序列为0000100110101111。把这个序列按鼓轮转动反方向排成环状，即与所求的鼓轮相对应。

实际上第2个bit，第3个bit，第4个bit也都行



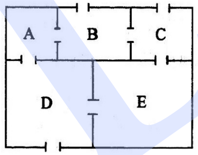




21

DMS Chapter 13(1)
欧拉图

## 课堂测验

1. 下图表示一开发商所设计房屋的平面图，缺口处表示门的位置。如果希望从户外进入该房屋，穿过每个门一次并且恰好一次，再回到户外，目前的设计能实现这个愿望吗？如果不能，应该如何修改设计，通过增加最少的门来实现这个愿望？




2. ($P_{174}$ 7) n为何值时，Kn 是欧拉图？ n为何值时，Kn仅存在欧拉道路而不存在欧拉回路

22

DMS Chapter 13(1)
欧拉图

## 哈密顿图及其应用

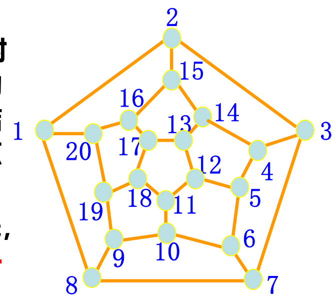
- 哈密尔顿图的定义
- 哈密尔顿图的性质---必要条件
- 哈密尔顿图的判定---充分条件
- 图的闭包
- 推销商问题

23

DMS Chapter 13(1)
欧拉图

## 引子--周游世界问题

- 1857（59）年爱尔兰数学家W.R.Hamilton在给他朋友的一封信中，首先谈到关于十二面体的一个数学游戏：将图中的每个结点看成一个城市，联结两个结点的边看成是交通线。
- 问题：能不能找到一个旅行路线，沿着交通线经过每个城市恰好一次，再回到原来的出发地？




找一个包含所有结点的圈

24

## 哈密尔顿图

➢ 定义13-2 若图G ={V, E}中存在一条包含全部结点的基本道路，则称这条道路为G的哈密尔顿道路；若G中存在一个包含全部结点的圈，则称这个圈为G的哈密尔顿圈；含有哈密尔顿圈的图称为哈密尔顿图。

- ✓ 规定平凡图为哈密尔顿图。
- ✓ 哈密尔顿图一定是连通图
- ✓ 哈密尔顿道路是经过图中所有结点的道路中长度最短的；n−1
- ✓ 哈密尔顿圈是经过图中所有结点的闭道路中长度最短的。n

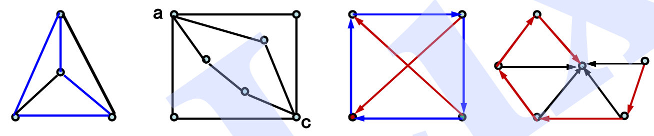
**判断哈密尔顿图比判断欧拉图要困难得多**





## 哈密尔顿图

**例**




(a) (b) (c) (d)

a) **是哈密尔顿图，既存在哈密尔顿道路，又存在哈密尔顿圈。**
b) **不是哈密尔顿图：既不存在哈密尔顿道路,也不存在哈密尔顿圈。**
c) **是哈密尔顿图：既存在哈密尔顿道路，又存在哈密尔顿圈**
d) **不是哈密尔顿图：存在哈密尔顿道路，但不存在哈密尔顿圈,**





## 哈密尔顿图的性质(1)

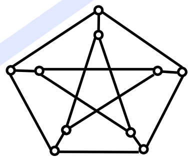
--可用来判定某图是非哈密尔顿图

**定理13-3 设无向连通图G = <V,E>是哈密尔顿图，则对V的任意非空真子集S，有**

$\omega(G-S) \leq |S|$ 必要条件

**其中 ω(G-S) 是删点子图（G-S）的连通分支数。**

**右图所示的彼得森图，对V的任意非空子集$V_1$，均满足$\omega(G-V_1) \leq |V_1|$，但它不是哈密尔顿图。**



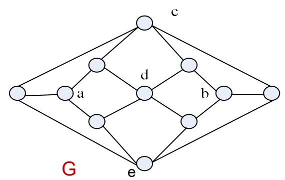




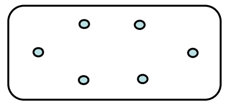
## 哈密尔顿图的性质(1)

--可用来判定某图是非哈密尔顿图

**在应用中，定理13-2本身用处不大，但它的逆否命题却非常有用。可利用它的逆否命题来判断某些连通图不是哈密尔顿图，即：若存在V的某个非空子集S使得ω(G-S) > |S|，则G不是哈密尔顿图。**




G



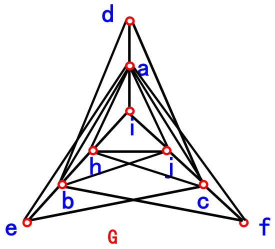
G-S

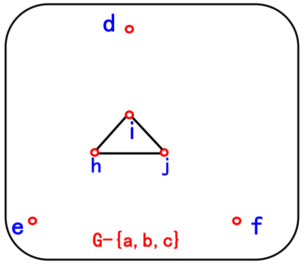
令 $S = \{a,b,c,d,e\}$，

**显然 $\omega$（G-S）= 6 > |S| = 5，故 G不是哈密顿图.**

## 哈密尔顿图

**例　证明 下图所示的图中，不存在哈密尔顿圈。**




证明　令 S={a,b,c}，

显然，　ω(G-S)=4　> |S|=3

故 G不是哈密尔顿图，即G中不存在哈密尔顿圈。

S中点的选择原则：优先选 度大的点





## 哈密尔顿图的性质(2)

--可用来判定某图是非哈密尔顿图

**定理13-3**

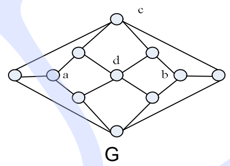
**设G = <V,E>是一个n阶连通平面图。若G含有哈密尔顿圈C，则**

$$\sum_{i=3}^{n}(i-2)(f_i^{(1)}-f_i^{(2)})=0$$

必要条件

**其中 $f_i^{(1)}$ 和 $f_i^{(2)}$ 分别表示含在圈C内部和外部的 i 度面的个数。**

**可以利用此定理来否定某些连通平面图是哈密尔顿图。**




1. 因G中只有4度面，故若G有哈密尔顿圈，则有

$$2(f_4^{(1)}-f_4^{(2)})=0 \quad (1)$$

2. 因图中共有9个面，所以（1）不可能成立，
3. 故G不含哈密尔顿圈





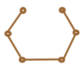
## 哈密尔顿图的充分条件

--可用来判定某图是哈密尔顿图

**定理13-4　设G = <V，E>是具有n个结点的简单图。如果对任意两个结点u,v∈V，均有**

deg(u)+deg(v)≥n-1　充分条件

**则G中存在哈密尔顿道路。**

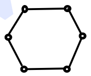


存在哈密尔顿道路，但不满足上述条件

**定理13.5　设G = <V,E>是具有n个结点（n≥3）的简单图。如果对任意的两个结点u,v∈V，均有**

deg(u)+deg(v) ≥ n　充分条件

**则G必是哈密尔顿图。**



是哈密尔顿图，但不满足上述条件





## 哈密尔顿图的判断

**例　某地有5个风景点，若每个风景点均有两条道路与其他某两点相通。问**

**1）游人可否经过每个风景点恰好一次而游完这5处?**

**2）游人可否经过每个风景点恰好一次最后又回到起点?**

**解　将5个风景点看成是有5个结点，两风景点间的道路看成是结点之间的边。则得无向图 G = (V,E)，　|V|=5**

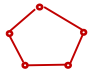
1）　∵ ∀v ∈ V，deg(v) =2

∴ ∀v，u ∈ V，deg(v) +deg(u)=4 ≥ |V|-1，即 满足汉密尔顿道路存在的充分条件

∴ 此图中存在一条哈密尔顿道路。即 1）有解

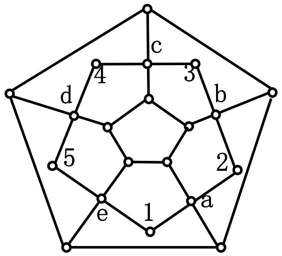
2）　哈密尔顿图的充分条件不满足，不能判断有解；

实际上，根据度序列图化后可知有解。



## 哈密尔顿图的判断

**例 判断右图所示的图是否为哈密尔顿图。**




**解 1) 判断充分条件，不满足**

**故不能断定是哈密尔顿图**

**2) 因 图为连通图，**

**判断必要条件1**

**令 S={a,b,c,d,e}**

**ω(G-S)=7 ＞ |S|=5**

**必要条件1不满足，**

**故可断定不是哈密尔顿图。**





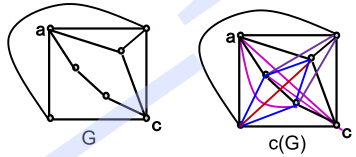
## 图的闭包

哈密尔顿图的充分条件很强，不满足该条件的图也可能是哈密顿图，如N(>4)边形图； 还有一些图虽然不直接满足该条件，但可通过在一定条件下加边的办法获得的一个新图（即原图的闭包），通过新图来判断原图。

**定义13-3:**

**设G＝<V,E>是n阶简单图。若存在一对不 相邻的结点u,v∈V，满足 deg(u)+deg(v)≥n**

**则构造图G'＝G+uv，并且新图G '上重复上述步骤，直至不再存在这样的结点对为止，最终所得之图称为图G的闭包，记为c(G)。**



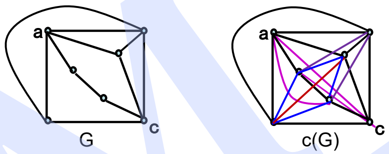





## 利用闭包判断哈密尔顿图

**定理13-6**

**一个简单图G是哈密尔顿图当且仅当其闭包是哈密尔顿图。**



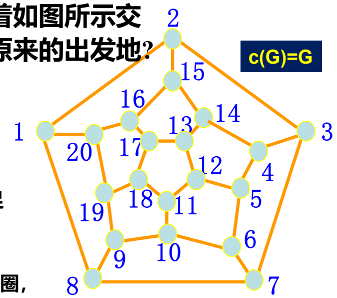

因为**c(G)**是哈密尔顿图，故**G**是哈密尔顿图





## 周游世界问题

**问题：能不能找到一个旅行路线，沿着如图所示交通线经过每个城市恰好一次，再回到原来的出发地？**




**解 1) 判断充分条件，不满足**

**故 无法断定一定有解**

**2) 判断必要条件，**

**① 试定理13-2.1的逆否： 找不到 不满足 ω(G-S) ≤ |S| 的子集S**

**② 试（定理13-2.2）：**

**因G中只有5度面，故若G有哈密尔顿圈，则有** $3(f_5^{(1)} - f_5^{(2)}) = 0 \quad (1)$

**图中共有12个面，（1）可能成立**

**结合 ①② 无法 断定一定无解**

**3) 图G的闭包与它本身相同，故**

**无法用充要条件来判定是否有解**

**故 无法断定是否有此路线**

实际上，该问题有解，如：
**1 2 3 7 8 9 19 18 17 13 12 11 10 6 5 4 14 15 16 20 1**

无简单有效的充分必要条件来判定哈密尔顿图

DMS Chapter 13(1)
欧拉图

## Your turn

**已知 (n,m) 图G 为(无向)连通简单图，且n>2，**

**m >= (n-1)*(n-2)/2+2， 证明G是哈密尔顿图。**

证： 假设G不是哈密尔顿图，则一定存在两点s，t，满足

d(s)+d(t) < n (1)

构造G的删点子图G1=G-{s，t}，

设G1 为（n-2, m1）图，则有：m1 <= (n-2)(n-3)/2 (2)

设G中与 s和t关联的边的条数为m2，

则有： m = m2 + m1 (3)

且 m2 <= d(s)+d(t) (4)

将（2）(4) 代入（3） 有： m<= d(s)+d(t) + (n-2)(n-3)/2 (5)

将（1）代入（5）并整理有：

m < (n-1)*(n-2)/2+2

与题中信息 m >= (n-1)*(n-2)/2+2 矛盾

故G是哈密尔顿图

反证法：从待证结论出发，结合结合图的阶与边数的关系，推出与已知矛盾的表达式

等号成立当且仅当 s,t不邻接

37

DMS Chapter 13(1)
欧拉图

## Your turn

**已知 (n,m) 图G 为(无向)连通简单图，且n>2，**

**m >= (n-1)*(n-2)/2+2， 证明G是哈密尔顿图。**

证： 任取G中两点，记为s，t；

构造G的删点子图G1=G-{s，t}，

设G1 为（n-2, m1）图，则有：m1 <= (n-2)(n-3)/2 (1)

设G中与 s和t关联的边的条数为m2，

则有： m2 = m - m1 (2)

且 d(s)+d(t) >= m2 (3)

将（2）代入（3） 有： d(s)+d(t) >= m - m1 (4)

将 m >= (n-1)(n-2)/2+2 和（1）代入（4）并整理有：

d(s) + d(t) >= n

∵ s,t 的任意性，所以充分条件满足，故G是哈密尔顿图

从已知出发，结合图的阶与边的关系，推出充分条件成立，从而证明结论

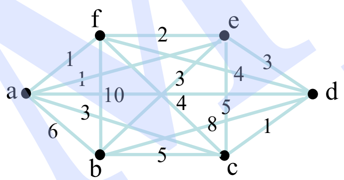
等号成立当且仅当 s,t不邻接

38

DMS Chapter 13(1)
欧拉图

## 推销商问题(TSP)

- **推销商问题：设$v_1$，$v_2$，….，$v_n$代表n个城市，w（$v_iv_j$）表示城市$v_i$和$v_j$之间的距离（或旅费）。有一个商人从其中的一个城市出发，去每个城市经商一次，最后回到出发地。问怎样安排行程以使总的路程最短（或旅费最少）？**
- **实际上，推销商问题就是：在一个带权的完全图中，找一个各边权之和最小的哈密尔顿圈的问题。**




若某哈密尔顿图为非完全图，如何将其转化为TSP?

39

DMS Chapter 13(1)
欧拉图

## 推销商问题

- **推销商问题具有重要的实际意义，是一个典型的优化问题**
  - 对无向完全图，即从 (n-1)!/2个哈密尔顿圈中找出权最小的那个
  - 对有向完全图，即从 (n-1)!个哈密尔顿圈中找出权最小的那个
- **目前推销商问题的解决办法主要有两大类：**
  - ① **求精确解法**—权最小的那个最优解
    - ✓ **分枝定界法**
      - **计算复杂度较高**
      - **需要的存储空间较多**
      - **直观，适合处理不太复杂的加权图（n较小）**
  - ② **求近似解法**—次优解
    - 1） **回路修正法** 2） **近邻法**

思考：
1 若某哈密尔顿图为非完全图，如何利用这些解决办法去寻找其哈密尔顿圈？
2 若某个连通图为非哈密尔顿图，如何利用这些解决办法找到一条能遍游所有结点且花费最少的路线？

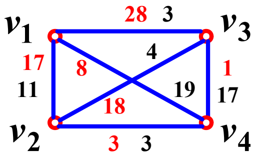
40

DMS Chapter 13(1) 欧拉图

## 推销商问题

例 给定在4个城市间旅行所需费用的矩阵如下，如何安排行程以使旅行费用最少?

$$D=\begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{array}\begin{bmatrix}\infty & 17 & 28 & 8\\ 11 & \infty & 18 & 3\\ 3 & 4 & \infty & 1\\ 19 & 3 & 17 & \infty\end{bmatrix}$$
$$\quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4$$




该问题实际上就是要在右图中找出一个权最小的哈密尔顿圈。

分枝定界法



DMS Chapter 13(1) 欧拉图

## 推销商问题

操作1

1. 将D变成每行每列都有0的矩阵

① 找出D中每行的最小元，同时用该行各元素减去这个最小元，得$D_1$

$$D=\begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{array}\begin{bmatrix}\infty & 17 & 28 & 8\\ 11 & \infty & 18 & 3\\ 3 & 4 & \infty & 1\\ 19 & 3 & 17 & \infty\end{bmatrix} \Rightarrow D_1=\begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{array}\begin{bmatrix}\infty & 9 & 20 & 0\\ 8 & \infty & 15 & 0\\ 2 & 3 & \infty & 0\\ 16 & 0 & 14 & \infty\end{bmatrix}_{(15)}$$

② 找出$D_1$中每列的最小元，同时用该列各元素减去这个最小元，得D’

$$D'=\begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{array}\begin{bmatrix}\infty & 9 & 6 & 0\\ 6 & \infty & 1 & 0\\ 0 & 3 & \infty & 0\\ 14 & 0 & 0 & \infty\end{bmatrix}_{(31)}$$

D’与 D 对应于相同的最优解，其中(31)是从各行各列减去的最小元素之和，它是所求问题的一个下界，称为权累积下界。



DMS Chapter 13(1) 欧拉图

## 推销商问题

2. 在 D’ 中找最小元: (1,4) . 依据权累积下界确定边(1,4)是否包含在最优解中

① 假设 边 (1,4) 包含在最优解中:

√ 1) 将D’中元(4,1)改成 ∞，并划去 $v_1$行和$v_4$列。 操作2

2) 按步骤1将1）得到矩阵化为每行每列均有0的矩阵，记为$D'_{14}$ 操作1

$$D'=\begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{array}\begin{bmatrix}\infty & 9 & 6 & 0\\ 6 & \infty & 1 & 0\\ 0 & 3 & \infty & 0\\ 14 & 0 & 0 & \infty\end{bmatrix}_{(31)} \Rightarrow \begin{array}{c}v_2\\v_3\\v_4\end{array}\begin{bmatrix}6 & \infty & 1\\ 0 & 3 & \infty\\ \boxed{\infty} & 0 & 0\end{bmatrix}_{(31)} \Rightarrow D'_{14}=\begin{array}{c}v_2\\v_3\\v_4\end{array}\begin{bmatrix}5 & \infty & 0\\ 0 & 3 & \infty\\ \infty & 0 & 0\end{bmatrix}_{(32)}$$

更新后的权累积下界

因为32<37, 继续沿此方向进行搜索

② 假设 边 (1,4) 不包含在最优解中: 操作3

1) 将D’中元(1,4) 改为∞

2) 按步骤1将其化为每行每列均有0的矩阵 操作1

$$D'=\begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{array}\begin{bmatrix}\infty & 9 & 6 & 0\\ 6 & \infty & 1 & 0\\ 0 & 3 & \infty & 0\\ 14 & 0 & 0 & \infty\end{bmatrix}_{(31)} \Rightarrow \begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{array}\begin{bmatrix}\infty & 9 & 6 & \boxed{\infty}\\ 6 & \infty & 1 & 0\\ 0 & 3 & \infty & 0\\ 14 & 0 & 0 & \infty\end{bmatrix}_{(31)} \Rightarrow D'_{\overline{14}}=\begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{array}\begin{bmatrix}\infty & 3 & 0 & \infty\\ 6 & \infty & 1 & 0\\ 0 & 3 & \infty & 0\\ 14 & 0 & 0 & \infty\end{bmatrix}_{(37)}$$

更新后的权累积下界



DMS Chapter 13(1) 欧拉图

## 推销商问题

3. 在$D'_{14}$中找最小元:(2,3). 依据权累积下界确定边(2,3)是否包含在最优解中

① 假设 边 (2,3) 包含在最优解中

1) 将$D'_{14}$中元(3,2) 改成 ∞，并从中划去第$v_2$行和$v_3$列；

2) 按步骤1 将1) 得到矩阵化为每行每列均有0的矩阵$D'_{14\text{-}23}$

$$D'_{14}=\begin{array}{c}v_2\\v_3\\v_4\end{array}\begin{bmatrix}5 & \infty & 0\\ 0 & 3 & \infty\\ \infty & 0 & 0\end{bmatrix}_{(32)} \Rightarrow \begin{array}{c}v_3\\v_4\end{array}\begin{bmatrix}0 & \boxed{\infty}\\ \infty & 0\end{bmatrix}_{(32)} = D'_{14\text{-}23}$$

权累积下界依然为 32

继续沿此方向进行搜索

② 假设 边 (2,3) 不包含在最优解中: 不必处理

1) 将$D'_{14}$中元(2,3) 改为∞,

2) 按步骤1将其化为每行每列均有0的矩阵

DMS Chapter 13(1) 欧拉图

## 推销商问题

4. 在$D'_{14-23}$中找最小元: (3,1),

① 假设 边 (3,1) 包含在最优解中：

1) 从$D'_{14-23}$中划去$v_3$行和$v_1$列, 得矩阵$D'_{14-23-31}$；

$$D'_{14-23} \begin{array}{c} v_3 \\ v_4 \\ \\ \end{array}\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 0 & \infty \\ \infty & 0 \end{bmatrix}_{(32)} \\ v_1 \quad v_2 \end{array} \Rightarrow D'_{14-23-31} = v_4 \begin{array}{c}[0]_{(32)} \\ v_2\end{array} \Rightarrow D'_{14-23-31-42} = \Phi_{(32)}$$

权累积下界依然为 32

最终权累积下界

② 假设 边 (3,1) 不包含在最优解中

不必处理

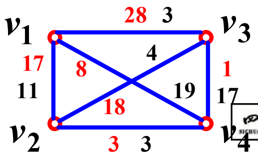
至此，我们已获得最优哈密尔顿圈 $v_1v_4v_2v_3v_1$，其权为32。

实际上，右图共有$(n-1)! = 6$个哈密尔顿圈

$v_1v_2v_3v_4v_1(55)$； $v_1v_4v_3v_2v_1(40)$

$v_1v_3v_4v_2v_1(43)$； $v_1v_2v_4v_3v_1(40)$

$v_1v_4v_2v_3v_1(32)$； $v_1v_3v_2v_4v_1(54)$




四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

45

DMS Chapter 13(1) 欧拉图

## 分枝定界法总结

$$D = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{bmatrix} \infty & 17 & 28 & 8 \\ 11 & \infty & 18 & 3 \\ 3 & 4 & \infty & 1 \\ 19 & 3 & 17 & \infty \end{bmatrix}$$
$$\qquad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4$$

操作1

$$D' = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{bmatrix} \infty & 9 & 6 & 0 \\ 6 & \infty & 1 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 \\ 14 & 0 & 0 & \infty \end{bmatrix}_{(31)}$$
$$\qquad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4$$

$\overline{(1,4)}$ 操作3+操作1

$$D'_{\overline{14}} = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{bmatrix} \infty & 3 & 0 & \infty \\ 6 & \infty & 1 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 \\ 14 & 0 & 0 & \infty \end{bmatrix}_{(37)}$$
$$\qquad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4$$

因：32<37

(1,4) 操作2+操作1

$$D'_{14} = \begin{array}{c} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{bmatrix} 5 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty \\ \infty & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(32)}$$
$$\qquad v_1 \quad v_2 \quad v_3$$

$\overline{(2,3)}$ 不必搜索

(2,3) 操作2+操作1

$$D'_{14-23} = \begin{array}{c} v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{bmatrix} 0 & \infty \\ \infty & 0 \end{bmatrix}_{(32)}$$
$$\qquad v_1 \quad v_2$$

$\overline{(3,1)}$ 不必搜索

(3,1) 操作2+操作1

$$D'_{14-23-31} = v_4 \begin{array}{c}[0]_{(32)} \\ v_2\end{array}$$

$$D'_{14-23-31-42}$$

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

46

DMS Chapter 13(1) 欧拉图

## 课后思考：（n,m）图 n和m之间关系

1. 若G是阶为n的无向图，则G的边数 m最小为（ ），最大为( )
2. 若G是阶为n的无向简单图， 则G的边数 m最小为（ ），最大为( )
3. 若G是阶为n的无向简单连通图， 则G的边数 m最小为（ ），最大为( )
4. 若G是阶为n，分支为k的无向简单图， 则G的边数 m最小为（ ），最大为( )
5. 若G是阶为n(>2)的简单平面图， 则G的边数 m最小为（ ），最大为( )
6. 若G是阶为n(>2)的简单连通平面图， 则G的边数 m最小为（ ），最大为( )
7. 若G是阶为n(>2)，分支为k(<n-1)的简单平面图， 则G的边数 m最小为（ ），最大为( )
8. G为(n,m）简单图，n给定时，m越( ) G越可能为平面图
9. G为(n,m）简单图，n给定时，m越( ) G越可能为哈密尔顿图，
10. 已知（8，m）平面图G的面数 f=7， 分支数 k=2， 若要保持其分支数(连通性)不变，最多可删掉（ ）条边

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

47