

Probability & Statistics

概率论与数理统计

自然界及人类活动中所观察到的现象可大致分为两类：

确定性现象：在一定条件下一定会发生的现象。如“同性电荷必然互斥”、“一标准大气压下，水加热到**100**摄氏度就会沸腾”。

不确定现象(随机现象)：在一定条件下具有多种可能会发生的结果，事先并不能肯定究竟哪一个结果会发生的现象。如“投硬币”、“掷骰子”。随机现象在一次观察中出现什么结果具有偶然性，但在大量试验或观察中，这种结果的出现具有一定的统计规律性。

概率论就是研究随机现象并揭示其规律的一门数学分支。

数理统计是研究怎样去有效地收集、整理和分

析带有随机性的数据，利用概率论的知识对所

考察的问题作出推断或预测的数学分支。

本课程包含上述两部分：教材的前五章讲解概

率论部分，第六章起讲解数理统计部分。

第一章 概率论基础知识

§ 1.1 样本空间与随机事件

随机试验

随机试验的三个特点:

- 1.**可以在相同条件下重复进行;
- 2.**试验结果不止一个, 且试验前可以预知一切可能的结果;
- 3.**试验前不能确定会出现哪一个结果, 而试验后一定会出现一个确定的结果。

具有这三个特点的试验称为**随机试验**。

随机试验的例子

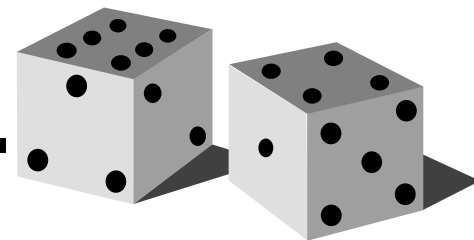
例1: 将一枚硬币连抛两次, 考虑正反面出现的情况;

例2: 将一枚硬币连抛三次, 考虑正面出现的次数;

例3: 记录某网站单位时间内受到的点击次数;

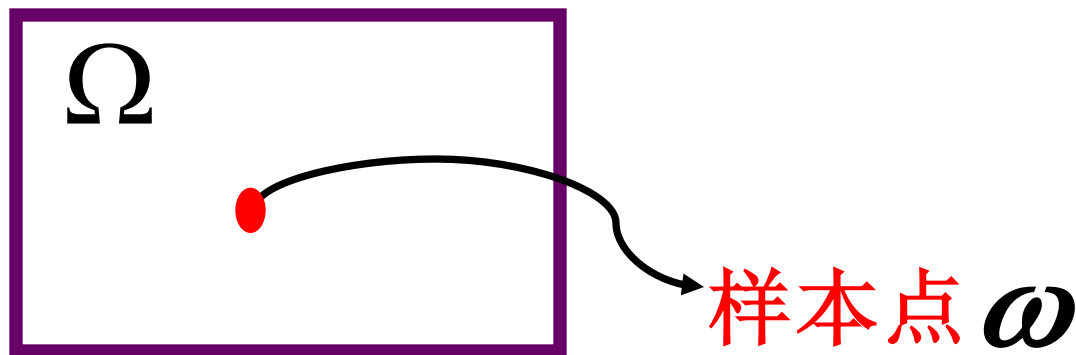
例4: 从一批灯泡中任取一只, 测其使用寿命;

例5: 掷一颗骰子, 考虑可能出现的点数.






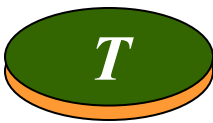




样本空间

由于随机试验的结果不止一个，但所有可能的结果是已知的，我们就称一切可能结果的全体所构成的集合为样本空间，用 Ω 表示。而 Ω 中的元素 ω 称为样本点。



例:考虑试验E1: 将一枚硬币抛掷两次,

可能结果为:

	第1次	第2次
$(H,H):$		
$(H,T):$		
$(T,H):$		
$(T,T):$		

H (**T**) 表示正 (反) 面, 可见, 该随机试验的所有可能的结果, 构成一个集合:

$$\Omega = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$$

我们称该集合为这个随机试验的**样本空间**。

随机事件

在实际问题中，我们需要研究由样本点构成的样本空间的子集.如甲乙两人掷骰子进行赌博:约定点数大的赢. 让 \mathbf{x}, \mathbf{y} 分别表示甲乙掷的点数则样本空间为 $\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}): \mathbf{x}=1, \dots, 6; \mathbf{y}=1, \dots, 6\}$.那么甲赌徒并不太关心掷的骰子具体的点数，而是很关心“自己的点数是否比别人的大”. 满足“自己的点数比别人的大”的全体样本点构成的这种集合，我们就称为**随机事件**。具体说来就是：**样本空间中满足某种条件的样本点所构成的子集，称为随机事件，简称事件**，常用大写字母**A**，**B**，**C**等表示. 设**A**为一事件，若试验后的结果属于**A**，则称事件**A**发生。

特殊事件

基本事件——仅由一个样本点组成的事件，它是随机试验的直接结果，每次试验必定发生且只可能发生一个基本事件。常记为 $\{\omega\}$ 。注意区分基本事件和样本点。

必然事件——全体样本点组成的事件，记为 Ω 。每次试验必定发生的事件。

不可能事件——不包含任何样本点的事件，记为 \emptyset 。每次试验必定不发生的事件。

例如：同时投甲乙两枚骰子，观察其结果。

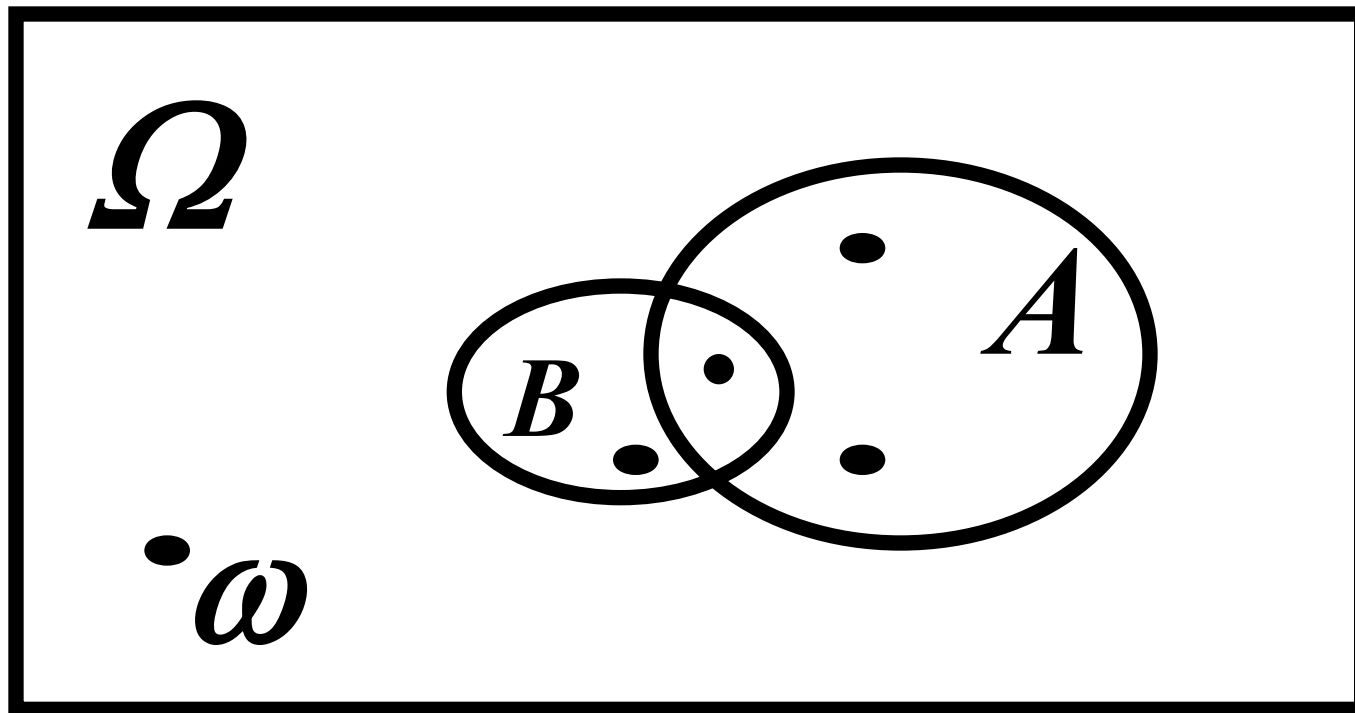
$$\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, \dots, 6\}.$$

事件“**点数之积小于等于36**”就是**必然事件**；事件“**点数之和等于21**”就是**不可能事件**；若**A**表示事件“**点数一样**”，则

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}.$$

若一次试验的结果是甲乙骰子都是二点，
则这次试验**A事件发生了**。

从集合的角度看

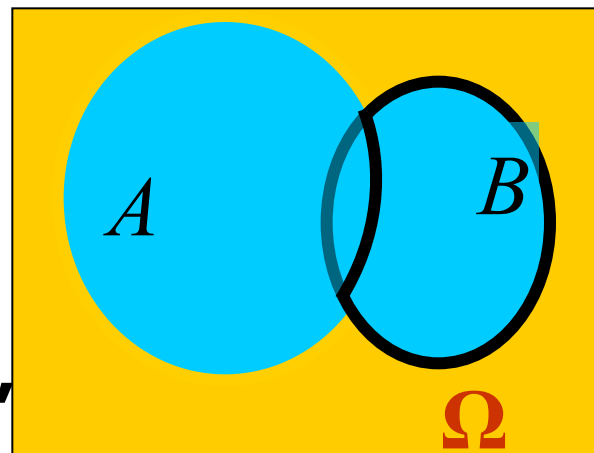


事件的关系及运算

根据定义知事件是样本点的集合，集合之间具有关系及运算，那么相应的事件之间也有关系与运算。由于事件是**具有特定概率意义**的集合，事件之间的关系及运算也就具有特定的概率含义。

事件的和（并）运算

$A \cup B$ = “A与B至少有一个发生”

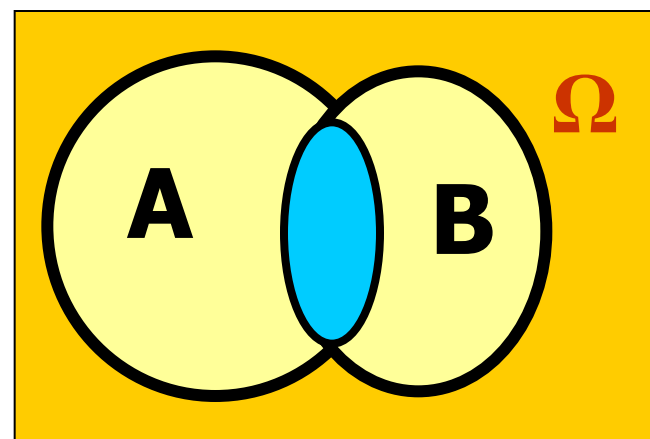


这就是和事件的概率意义，注意其等价的语言描述，如或者A发生，或者B发生等。

一般地, n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 的**和事件**记为 $\bigcup_{i=1}^n A_i$,
可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的和记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, 均表示 “所
列事件中至少有一个发生”。

事件的积 (交) 运算

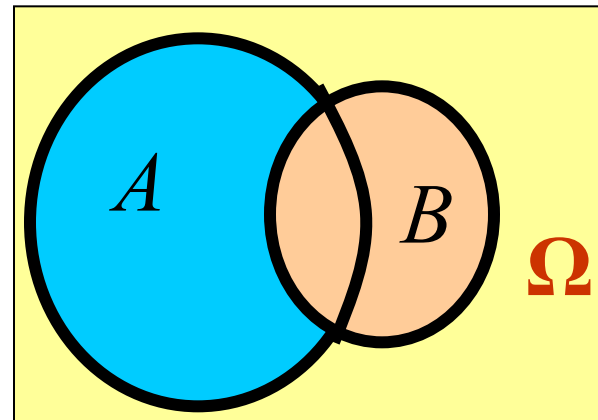
$A \cap B =$ “两事件A与B同时发生”



一般地, n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 的**积事件**记为 $\bigcap_{i=1}^n A_i$,
可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的积记为 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, 均表示 “所
列事件**同时发生**”。

事件的差

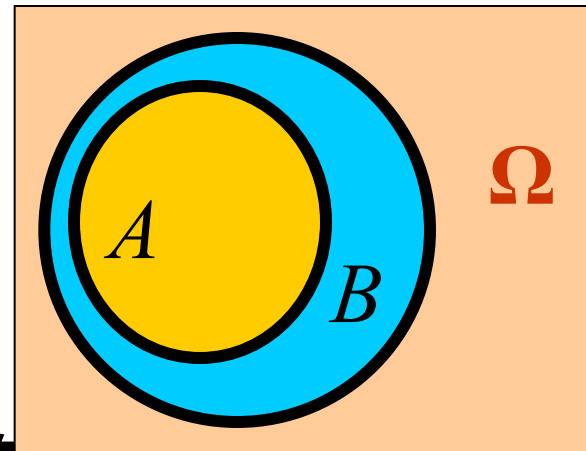
$A - B$ = “A发生而B不发生”



包含关系

$$A \subset B$$

事件A发生，则必有事件B发生



显然，对任意事件A, B, C, 必有

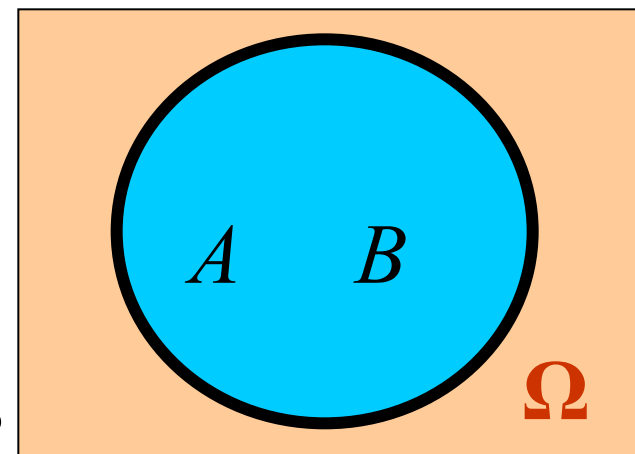
(1) $A \subset \Omega$,

(2) if $A \subset B \wedge B \subset C$ then $A \subset C$

相等关系

$$A = B$$

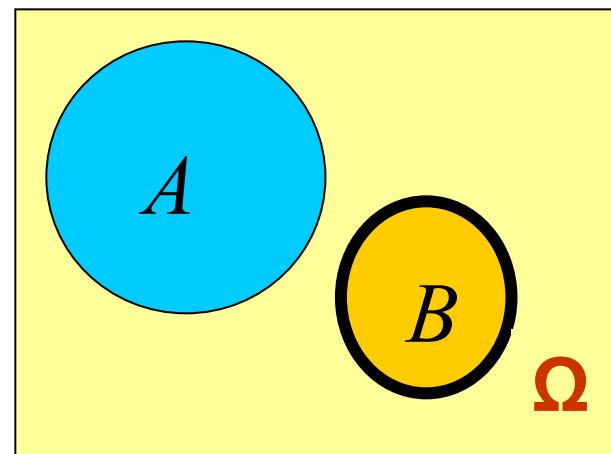
事件A发生，则必有事件B发生；
反之，事件B发生，则事件A发生。



互斥关系，也称互不相容

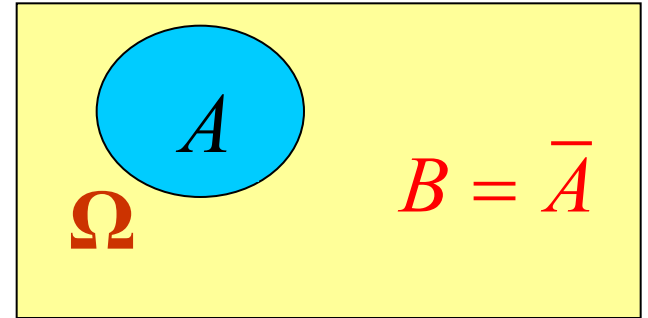
$$A \cap B = \emptyset$$

A与B不能同时发生。



互逆关系，也称对立

$$A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = \Omega \wedge \text{记为 } B = \bar{A}$$



显然，若A与B互逆，则A与B互斥。反之不然。并且有

$$\overline{\overline{A}} = A \wedge$$

$$A \bar{A} = \emptyset \wedge$$

$$A \cup \bar{A} = \Omega \wedge$$

$$A - B = A \bar{B} \quad \nexists$$

完备事件组(划分): A_1, A_2, \dots, A_n 满足

$$(1) A_i A_j = \Phi \quad (i \neq j),$$

$$(2) \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$$

完备事件组将样本空间分为有限个互不相容的事件的和。

事件之间的运算律

- **交换律** $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$

- **结合律**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- **分配律** $A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$, $A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$
- **对偶律**

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \overline{B}, \quad \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{\bigcup A_i} = \bigcap \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap A_i} = \bigcup \overline{A_i}$$

除以上性质之外，另外还有

- **吸收律** *if* $A \subset B$, *then* $AB = A$, $A \cup B = B$
- **分解律** *if* $A \subset B$, *then* $B = A \cup \overline{A}B$
- **蕴涵律** *if* $AB = \emptyset$, *then* $A \subset \overline{B}$, $B \subset \overline{A}$
- **差积转换律** $A \setminus B = A\overline{B} = A \setminus (AB)$

第□个零件是合格品，记为事件 A_i ($i = 1, 2, 3$)

“□个零件中只有□个是合格品” ($i = 1, 2, 3$)

□个零件中最多有□个是合格品” ($i = 1, 2, 3$)

- 1) B_1 = “只有第一个零件是合格品” ;
- 2) B_2 = “三个零件中只有一个合格品” ;
- 3) B_3 = “三个零件中最多有两个合格品” ;
- 4) B_4 = “三个零件中最多有一个不合格品” 。

解 (1) 事件 B_1 等价于 “第一个零件是合格品，同时第二和第三个都是次品”，故有 $B_1 = A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}$

(2) 事件 B_2 =“只有一个合格品” 等价于 “只有第一个零件是合格品”，或 “只有第二个零件是合格品”，或 “只有第三个零件是合格品”，由 (1) 有

$$B_2 = A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} \cup \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \cup \overline{A_1} \overline{A_2} A_3 \quad \text{②}$$

(3) B_3 = “最多有两个是合格品”

方法一：正面考虑，有

$$B_3 = (\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}) \cup (A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} \cup \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \cup \overline{A_1} \overline{A_2} A_3) \\ \cup (\overline{A_1} A_2 A_3 \cup A_1 \overline{A_2} A_3 \cup A_1 A_2 \overline{A_3})$$

方法二：与 B_3 等价的是 “至少有一个零件是次品”，故有 $B_3 = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}$

方法三： B_3 的对立事件是 “三个零件全是合格品”，即为 $A_1 A_2 A_3$ ，所以有 $B_3 = \overline{A_1 A_2 A_3}$

大家可以去验证一下，虽然答案的表现形式不一样，但实质上是一样的。

一般来说，当一个事件直接表示比较困难，或则比较复杂时，就可以考虑先表示其对立事件，然后根据对立事件的对立事件就是其自身，比如出现“至少有多少个”，“最多多少个”的情况可以考虑其对立事件。

4) $B_4 =$ “最多有一个是不合格品”

方法一： B_4 等价于 “三个零件均合格” ，
或者三个零件中仅有一个不合格， 所以

$$B_4 = A_1 A_2 A_3 \cup \overline{A_1} A_2 A_3 \cup A_1 \overline{A_2} A_3 \cup A_1 A_2 \overline{A_3}$$

方法二： B_4 等价于 “三个零件中至少有两个合格品” ， 所以

$$B_4 = A_1 A_2 \cup A_2 A_3 \cup A_1 A_3$$

例题 一工厂生产 n 个零件，设 A_i 表示“第 i 个零件是正品”。试用文字叙述下列事件：

$$\bigcup_{i=1}^n [\bar{A}_i \cap (\bigcap_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n A_k)]$$

只有一个零件不是正品

第 i 个零件不是正品

除第 i 个零件外的其它零件都是正品

只有第 i 个零件不是正品

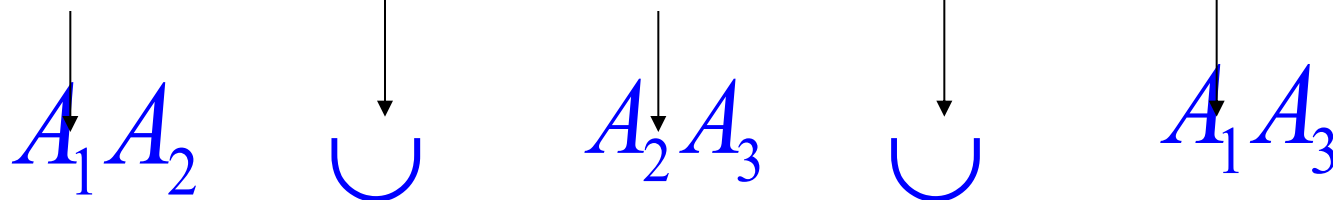
练习 甲乙丙三人各向靶子射击一次, 设 A_i 表示第*i*人击中靶心. 试用事件的运算关系表示下列事件:

(1) 至少两人击中靶心:

(2) 靶上仅中一弹:

(1) 至少两人击中靶心: $A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup A_1A_3$

甲乙击中, 或 乙丙击中, 或 甲丙击中



(2) 靶上仅中一弹: $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$

只有甲中, 或 只有乙中, 或 只有丙中

