第二部分　集合与关系

第6章　函　数

计算机(软件)学院

林　兰

linlan@scu.edu.cn

函　数

函数是一种特殊的二元关系,我们可以把函数看作输入输出关系:它把一个集合(输入集合)的元素变成另一个集合(输出集合)的元素。

在高等数学中，函数的概念是从变量的角度提出来，而且是在实数集合上讨论，这种函数一般是连续或间断连续的函数。这里，将连续变量的概念推广到对离散量的讨论。前面所讨论的有关集合或关系的运算和性质，对于函数完全适用。

任何程序在计算机中的实现, 都包含种种这样或那样的变换。如编译程序把一个源程序变换成机器语言的指令集合—目标程序。或者说, 计算机中的程序可以把一定范围内的任一组数据变换成另一组数据。

函数是许多数学工具的基础, 计算机科学中大量用到函数, 如数据结构, 程序语言的设计与实现, 开关理论, 自动机理论, 代数结构, 可计算性理论, 计算复杂化, 程序正确性证明等。

主要内容

- 6.1 函数的定义与性质
- 6.2 单射、满射和双射
- 6.3 函数的复合与逆运算
- 6.4 集合的基数、可数集和不可数集

6.1 函数的定义与性质

1. 定义

设f是集合X到Y的关系，如果对每个x∈X，都存在唯一的y∈Y，使得<x, y>∈f，则称关系f为X到Y的(一元)函数（或映射），记为$f:X\rightarrow Y$。

当<x, y>∈f时，通常记为y=f(x)，这时称x为函数的自变量，称y为x在f下的函数值（或像）。

X称为函数f的定义域（像源集）；f(X)称为函数f的值域（像集）。(f(X)⊆Y)

如果X=Y，就说f是X上的函数。

注意，$f(x)$仅表示一个变值，但f则代表一个集合，因此$f(x) \neq f$。

- 函数满足：①∀x∈X有定义；②单值。（称为全函数）
  如果不满足∀x∈X有定义，则称为部分函数（或偏函数）。

6.1 函数的定义与性质

2. 函数与关系的差别

如果记$f=\{(x,y)|x\in A,\ y\in B,f(x)=y\}$, 由此可以知道，函数确是一种特殊的关系，它与一般关系比较具备如下差别：

1) A×B的任何一个子集，都是A到B的二元关系，因此，从A到B的不同的关系有$2^{|A|\times|B|}$个；但从A到B的不同的函数却仅有$|B|^{|A|}$个。
2) 函数中的每一个序偶的第一个元素一定是互不相同的(每一元素只有一个像)，关系则无限制。
3) 关系的并、交、差、补仍然是关系，而函数的并、交、差、补则不一定是函数。

6.1 函数的定义与性质

例1　设$A=\{a, b\}$，$B=\{1, 2\}$，$A\times B=\{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$

此时从A到B的不同的关系有$2^4=16$个。分别如下：

$R_0=\varnothing$；$R_1=\{\langle a, 1\rangle\}$；　$R_2=\{\langle a, 2\rangle\}$；　$R_3=\{\langle b, 1\rangle\}$；

$R_4=\{\langle b, 2\rangle\}$；$R_5=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 1\rangle\}$；　$R_6=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$；

$R_7=\{\langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle\}$；　$R_8=\{\langle a, 2\rangle, \langle b, 2\rangle\}$；

$R_9=\{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle\}$；　$R_{10}=\{\langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$；

$R_{11}=\{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle\}$；　$R_{12}=\{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 2\rangle\}$；

$R_{13}=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$；　$R_{14}=\{\langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$；

$R_{15}=\{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$。

从A到B的不同的函数仅有$2^2=4$个。分别如下：

$f_1=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 1\rangle\}$；　$f_2=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$；

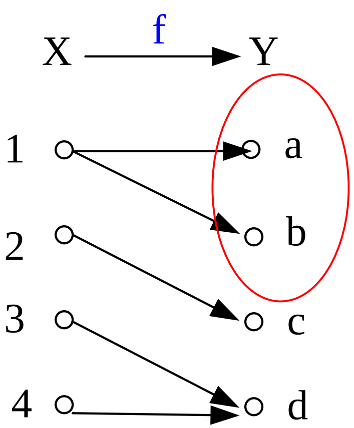
$f_3=\{\langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle\}$；　$f_4=\{\langle a, 2\rangle, \langle b, 2\rangle\}$。

- 常将从A到B的一切函数构成的集合记为B^A：$B^A=\{f \mid f: A\to B\}$

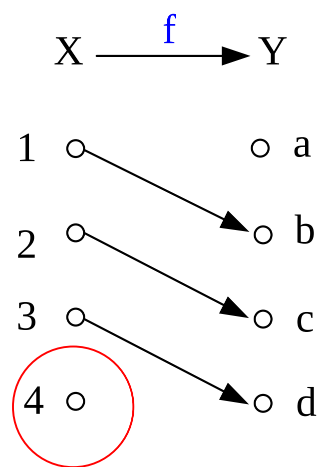
6.1 函数的定义与性质

例2 判断下列关系是否是函数。

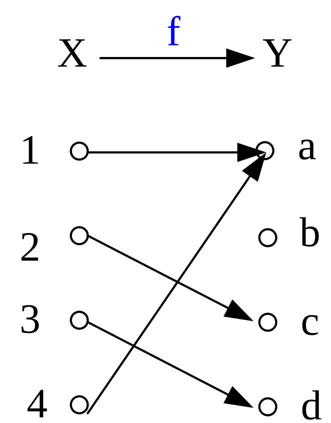
设X={1, 2, 3, 4}，Y={a, b, c, d}，f是X到Y的关系，如图。



(1)



(2)



(3)

f不是X到Y的函数

✓ 是一个关系

f不是X到Y的函数

✓ 是一个关系

✓ f是X到Y的函数

6.1 函数的定义与性质

例3 设A={a, b, c, d}，定义f: A→A如下：

f(a)=a, f(b)=c, f(c)=b, f(d)=c，则f是A上的一个函数。

函数也可记为二元关系表示：

f={(a,a), (b,c), (c,b), (d,c)}

- f的定义域是：A
- f的值域/像集是：$f(A)=\{a,b,c\}$，但$f(A)\neq A$

6.1 函数的定义与性质

例4 (1) 实数集R上的

线性函数 $f(x)=ax+b$

指数函数 $g(x)=a^x$

(2) 正实数集R^+上的对数函数

$h(x)=\ln x$

6.1 函数的定义与性质

例5 (1) 正整数集N^+上的欧拉函数

$$\phi: N^+ \to N^+$$

满足： $\phi(n)$=不超过n且与n互素的正整数个数

根据函数定义，可计算出

$\phi(1)=1$， $\phi(2)=1$， $\phi(3)=2$，…， $\phi(7)=6$，$\phi(8)=4$，…

(2) 集合A上的恒等函数，记为I_A，满足对任何$a \in A$，都有$I_A(a)=a$。

(3) 若存在$b \in Y$，且对任意$x \in X$, $f(x)=b$, 则称f为X上的常值函数。

6.1 函数的定义与性质

3. 多元函数

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$, Y是非空集合，映射$f: X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to Y$，如果$\forall (a_1, a_2, \ldots a_n) \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$，存在唯一的$y \in Y$，使$(a_1, a_2, \ldots a_n, y) \in f$，可记为$f(a_1, a_2, \ldots a_n) = y$。则称f为$X_1, X_2, \ldots, X_n$到Y的多元函数。

6.1 函数的定义与性质

4. 函数相等

定义 设f和g是从集合X到Y的两个函数，如果$\forall x \in X$都有$f(x) = g(x)$，则称函数f和g相等，记为$f = g$。

即：$f = g \Leftrightarrow$ ①有共同的定义域和值域；

②对定义域中的任何x，$f(x) = g(x)$。

例如 $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2$

$\boldsymbol{f}: \{1, 2, 3\} \to \boldsymbol{Z}$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2$

$\because$定义域不同，$\therefore$两个函数不相等。

作业

习题六

2、4、5

主要内容

- 6.1 函数的定义与性质
- 6.2 单射、满射和双射
- 6.3 函数的复合与逆运算
- 6.4 集合的基数、可数集和不可数集

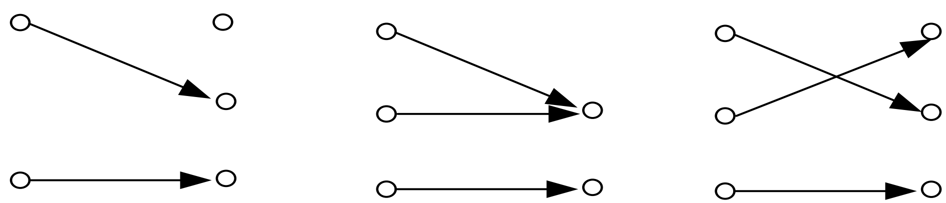
6.2 单射、满射和双射

定义(特殊函数类)：设 f 是从集合 X 到 Y 的函数，

(1) 如果 $\forall x_1, x_2 \in X$，当 $x_1 \neq x_2$ 时，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 是一个单射。

(2) 如果 $\forall y \in Y$，$\exists x \in X$，使 $f(x) = y$，则称 f 是一个满射。

(3) 如果 f 既是单射又是满射，则称 f 是一个双射。（一一映射）



(a) (b) (c)

- 单射- “源不同则像不同”
- 满射- “$\forall y$ 都有像源”
- 双射- “单且满”

6.2 单射、满射和双射

例6 设f, g是实数集R上的函数， (1) $f(x)=x^2-4x+2$

(2) $g(x)=2x+4$，判断它们是什么性质的函数？

(1) f(x)是一元二次函数，函数图是开口向上的抛物线，最小值为-2。当$y<-2$，无像源，不是满射；

对任何$y>-2$，f(x)=y都有两个不同的像源x_1，x_2，因此，也不是单射。

(2) g(x)是一个线性函数，函数图为一条斜率为2的直线，对任意y，f(x)=y都有唯一的像源x。

因此，g(x)既是单设，又是满射，即为双射。

- 考虑：函数f，g是整数集Z上的函数？

6.2 单射、满射和双射

例7

(1) R到R^+ 的指数函数$f(x)=e^x$，R^+到R上的对数函数$f(x)=\ln x$，都满足单射和满射条件，因而都是双射函数。

(2) $(-\infty, +\infty)$到$(-\pi/2, \pi/2)$的映射$f(x)=\arctan(x)$，是双射。

(3) 集合A上的恒等函数I_A，是双射函数。

作业

习题六

7 (1)(2)(4)(5)

主要内容

- 6.1 函数的定义与性质
- 6.2 单射、满射和双射
- 6.3 函数的复合与逆运算
- 6.4 集合的基数、可数集和不可数集

6.3 函数的复合与逆运算

1. 函数的复合

(1) 定义　设**f: X→Y**和**g: Y→Z**是两个函数，称

$$g\circ f=\{(x, z)\in X\times Z \mid (\exists y\in Y)[f(x)=y\wedge g(y)=z]\}$$

为函数f和g的复合函数，即映射**$g\circ f$: X→Z**。

- 注意：函数复合顺序**从右到左**(右合成运算)，函数表达式$(g\circ f)(x)=g(f(x))$。

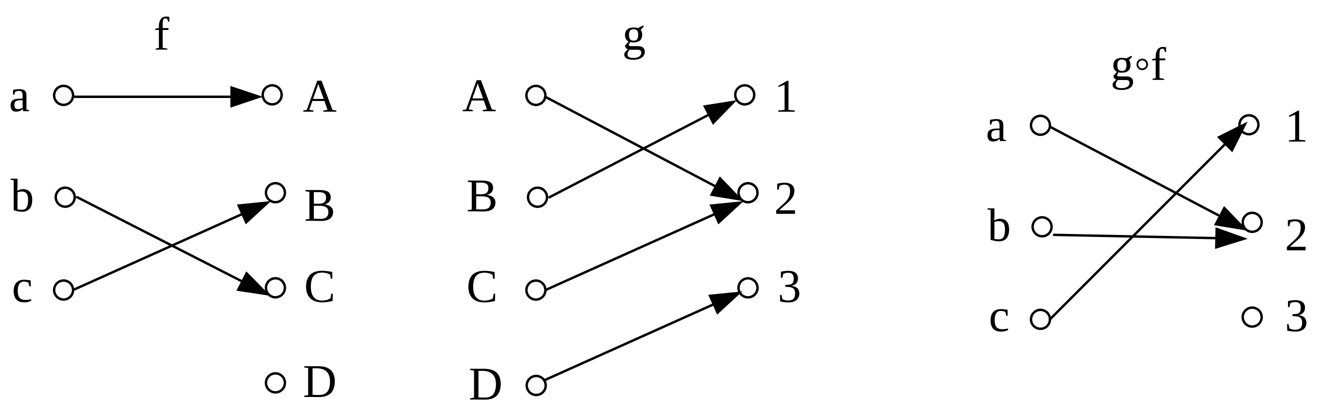
函数复合的性质

1) 函数复合是可结合的, 即 $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$。

2) 函数复合一般是不可交换的。

6.3 函数的复合与逆运算

例8 设 f: {a, b, c}→{A, B, C, D} 和 g: {A, B, C, D}→{1, 2, 3}，f和g如图所示，写出合成函数g∘f: {a, b, c} → {1, 2, 3}，并画出合成函数的有向图。



$g\circ f=\{(a, 2), (b,2), (c,1)\}$

6.3 函数的复合与逆运算

例9 设f, g, h都是实数集R上的函数，分别定义为 $f(x)=x+2$， $g(x)=2x$， $h(x)=x-1$， 求$f\circ f$， $f\circ g$， $g\circ f$， $f\circ g\circ h$。

解： $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x+2)=(x+2)+2=x+4$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x)=2x+2$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+2)=2(x+2)=2x+4$

$(f\circ g\circ h)(x)=f(g(h(x)))=f(g(x-1))=f(2(x-1))=2x$

说明：**$f: X\to Y$和$g: W\to Z$，且$Y\subseteq W$时，如果需要，也可以定义合成函数$g\circ f$。**

6.3 函数的复合与逆运算

(2) 函数的n次合成

设f: A→A，那么函数f能同自身合成任意次。

函数f的n次合成定义为：

1) $f^0(x) = x$（即$f^0 = I_A$，为A上的恒等函数）

2) $f^{n+1}(x) = f\left(f^n(x)\right)$，$n \in N$。

6.3 函数的复合与逆运算

(3) 置换

定义 设A是有限集合，A={$a_1, a_2, \cdots, a_n$}。A上的双射函数称为A上的n阶置换或排列，记为π：A→A，n称为置换的阶。常表示为：

$$\pi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \pi(a_1) & \pi(a_2) & \cdots & \pi(a_n) \end{pmatrix}$$

- ✓ 把每个元素映射到自身的置换称为单位(恒等)置换。
- ✓ 定理 **n**个元素的集合中，不同的**n**阶置换共有**n!**个。

6.3 函数的复合与逆运算

例10 设A={1，2，3}，则A上的所有置换共有3！个：

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \pi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 置换的复合是置换，换言之，置换在合成运算下封闭。

  例如：

$$\pi_3 \circ \pi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \pi_4$$

下面介绍“循环的积”表示置换，能够简捷处理置换的运算。

6.3 函数的复合与逆运算

一个置换可能由一个单一的循环表示出来，也可能由多个循环连接在一起表示，称之为**循环的积**。

例11 设A={1, 2, 3, 4, 5, 6}，定义如下置换：

$$\pi_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&6&5&4&2\end{pmatrix}\quad \pi_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&3&5&6&4\end{pmatrix}$$

$$\pi_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}\quad \pi_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&6&4&2&5\end{pmatrix}$$

表示为循环的积：

省略一个元素的循环。

$\pi_1=(2\ \ 3\ \ 6)(5\ \ 4)$ $\qquad$ $\pi_2=(1\ \ 2)(4\ \ 5\ \ 6)$

$\pi_3=(1)$ $\qquad$ $\pi_4=(1\ \ 3\ \ 6\ \ 5\ \ 2)$

单位置换的表示(1)

例12 设

$$\pi_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&6&5&4&2\end{pmatrix},\ \pi_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&3&5&6&4\end{pmatrix}$$

$$\pi_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix},\ \pi_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&6&4&2&5\end{pmatrix}$$

则有合成运算：

$$\pi_1\circ\pi_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&6&4&2&5\end{pmatrix},$$

$$\pi_2\circ\pi_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&6&5&1\end{pmatrix}$$

6.3 函数的复合与逆运算

循环积表示:

$\pi_1 = (2\ 3\ 6)(4\ 5)$ $\qquad$ $\pi_2 = (1\ 2)(4\ 5\ 6)$

$\pi_3 = (1)$ $\qquad$ $\pi_4 = (1\ 3\ 6\ 5\ 2)$

$$\pi_1 \circ \pi_2 = (2\ \ 3\ \ 6)(4\ \ 5)\ (1\ \ 2)(4\ \ 5\ \ 6)$$
$$= (1\ \ 3\ \ 6\ \ 5\ \ 2)$$

右合成运算

$$\pi_2 \circ \pi_1 = (1\ \ 2)(4\ \ 5\ \ 6)(2\ \ 3\ \ 6)(4\ \ 5)$$
$$= (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 6)$$

6.3 函数的复合与逆运算

(4)复合函数的性质

定理： 设f：X→Y和g：Y→Z是两个函数， $g \circ f$是复合函数：

（1） 如果g和f都是单射，则$g \circ f$是单射。

（2） 如果g和f都是满射，则$g \circ f$是满射。

（3） 如果g和f都是双射，则$g \circ f$是双射。

6.3 函数的复合与逆运算

按定义证明

证明 1）对任意$a_1, a_2 \in X$，$a_1 \neq a_2$，

由于f是单射，所以$f(a_1) \neq f(a_2)$。

令$b_1 = f(a_1)$，$b_2 = f(a_2)$，由于g是单射,所以$g(b_1) \neq g(b_2)$，即$g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$。

从而有$g \circ f\ (a_1) \neq g \circ f\ (a_2)$，

所以$g \circ f$是单射。

2）对任意$c \in Z$，由于g是满射，所以存在$b \in Y$，使得$g(b) = c$。

对于$b \in Y$，又因f是满射，所以存在$a \in X$，使得$f(a) = b$。

从而有$g(b) = g(f(a)) = g \circ f\ (a) = c$。

即存在$a \in X$，使得：$g \circ f\ (a) = c$，所以$g \circ f$是满射。

3）是1),2)的直接结果。

6.3 函数的复合与逆运算

2. 逆函数

给定一个关系R，颠倒R的所有序偶，得到逆关系R^{-1}。但函数f的逆关系，不一定是函数。

例如：函数f：X→Y，X={1，2，3}，Y={a，b，c, d}，f={(1, a), (2, a), (3, c)}

其逆为{(a, 1), (a, 2), (c, 3)} 不是函数。

(破坏了单值、处处有定义的性质。)

定理 设$f: X \to Y$是一双射函数，那么f的逆关系f^{-1}也是双射函数。

定义 设$f: X \to Y$是双射函数，称逆关系$f^{-1}: Y \to X$是f的逆函数。（显然，$(f^{-1})^{-1} = f$）

6.3 函数的复合与逆运算

例13 设f：R→R, 满足：

1）$f=\{\langle x, x^2\rangle \mid x\in R\}$；

2）$f=\{\langle x, x+1\rangle \mid x\in R\}$。求$f^{-1}$。

解 1）对任意$x\in R$，有$f(x)=x^2=(-x)^2=f(-x)$ ，所以f不是单射函数，即f非双射函数，因此f的逆函数不存在。

2）因f是双射函数，所以f^{-1}存在，且有：

$$f^{-1}=\{\langle x, x-1\rangle \mid x\in R\}。$$

例14 集合**A={1, 2, 3, 4, 5, 6}**上的置换$\pi_1=(1\ 3\ 4)(2\ 6\ 5)$，

逆置换为：

$$\pi_1^{-1}=(1\ 4\ 3)(2\ 5\ 6)$$

6.3 函数的复合与逆运算

定理 设$f: X \to Y$是可逆的，则$f^{-1} \circ f = I_X$，　$f \circ f^{-1} = I_Y$ 。

证明： 设$\forall x \in X$，如果$f(x) = y$，则$f^{-1}(y) = x$。

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}(y) = x$$

即$f^{-1} \circ f = I_X$。

同理，设$\forall y \in Y$，如果，则$f^{-1}(y) = x$，则$f(x) = y$

$$f \circ f^{-1}(y) = f\left(f^{-1}(y)\right) = f(x) = y$$

即$f \circ f^{-1} = I_Y$。

6.3 函数的复合与逆运算

定理： 设$f:X\rightarrow Y$和$g:Y\rightarrow Z$是两个双射，则$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$。

- **函数f与f^{-1}的关系**

（1）若$f:X\rightarrow Y$是一个双射函数，则f^{-1}也是一个双射函数，且有$f^{-1}:Y\rightarrow X$

（2）如果函数f是可逆的，则$f^{-1}\circ f=I_x$，$f\circ f^{-1}=I_y$

（3）如果f是双射函数则$(f^{-1})^{-1}=f$

（4）如果$f:X\rightarrow Y$，$g:Y\rightarrow X$，

$g\circ f=I_x$，$f\circ g=I_y$ 当且仅当$g=f^{-1}$。

作业

习题六

9、16(1)

主要内容

- 6.1 函数的定义与性质
- 6.2 单射、满射和双射
- 6.3 函数的复合与逆运算
- 6.4 集合的基数、可数集和不可数集

先看几个问题：

① 有限集同无限集的区别是什么？两个无限集之间可不可以比较大小？

② 自然数集中元素的个数同有理数集中元素的个数哪一个多？

③ 有理数集中元素的个数同无理数集中元素的个数哪一个多？

④ 无理数集中元素的个数同实数集中元素的个数哪一个多？

⑤ 有没有最大的集合，它包含了所有的集合？

6.4 集合的基数、可数集和不可数集

1. 集合间的等势

基数(cardinal number)也叫**势**，指集合所含元素的数量。 一般记为card(X)，如果X是有限集，X基数通常记为|X|。

定义(等势)：设X，Y为任一集合，若能在X和Y之间建立双射f：X→Y，则称X和Y**等势的**(**或对等的**)，记为X～Y。

一般地：若X＝Y，则 X~Y。反之不然。

6.4 集合的基数、可数集和不可数集

例15 Z是整数集合，设2Z是偶数集合，显然$2Z \subset Z$。

可以构造映射$f:Z \to 2Z$，使得$\forall x \in Z$，$f(x)=2x$，

那么f是双射。

因此， $Z \sim 2Z$。

例16 R是实数集，$(0,1)$是实数开区间，证明$R \sim (0,1)$。

证明：构造双射 $f:R \to (0,1)$

$$f(x)=(\arctan x)/\pi+1/2 \qquad \forall x \in R$$

$\because$考虑正切函数，当$x \in (-\pi/2, \pi/2)$，$y=\tan x \in R$

$\therefore$反正切函数$y=\arctan x$，$x \in R, y \in (-\pi/2, \pi/2)$

那么 $y/\pi+1/2 \in (0,1)$，

即 $f(x)=(\arctan x)/\pi+1/2 \in (0, 1)$

显然，函数f是一个双射，所以$R \sim (0, 1)$。

6.4 集合的基数、可数集和不可数集

定理 **等势是集合族上的等价关系。**

即对任意的集合A、B、C，

① $A \sim A$

② $A \sim B \Rightarrow B \sim A$

③ $A \sim B$、 $B \sim C \Rightarrow A \sim C$

而等价关系决定等价类，因此，所有等势的集合构成一个等价类。

6.4 集合的基数、可数集和不可数集

- **结论：**

1. 凡是等势的集合，基数相等。

2. 两个有限集合等势⇔元素个数相等，记为|A|。

3. 非有限集合A的基数为所在等价类的一种共性描述，记为card(A)。

4. **(定义)** 设A，B是两个集合，若存在从A到B的单射，则card(A)≤card(B)；如果这个单射不是双射，则card(A)<card(B)。

下面，我们对集合按照基数进行分类。

6.4 集合的基数、可数集和不可数集

2. 有限集与无限集

定义(m元集) $N_m=\{x|x$是正整数，且$x\leq m\}$，即$N_m=\{1, 2, 3,\ldots m\}$，$m\in N^+$。

定义(有限集与无限集):

设X是非空集合。如果存在正整数m，使得$X\sim N_m$，则称X是有限集，基数$|X|=m$。否则，X是无限集。

特别：$|\varnothing|=0$

定理：有限集合的任一子集为有限集。

6.4 集合的基数、可数集和不可数集

- 下面讨论无限集及其衡量

定理 自然数集合N是无限集合。 (反证法)

证明：如果N是有限集合，则存在正整数m，使得X～N_m。即存在双射 f: {1,2,…m} → N。

设k是比 $\{f(1), f(2), \ldots, f(m)\}$ 中最大元素值多1的自然数，k $\notin \{f(1), f(2), \ldots, f(m)\}$ ，f不是满射。与f是双射的假设矛盾。

✓ 其基数记为card(N)=$\aleph_0$ (读作“阿列夫0”)。

定理 非空集合X是无限集当且仅当存在单射f: N→X。

6.4 集合的基数、可数集和不可数集

3. 可数集

定义 ①有限集是可数集合；

②与自然数集合N等势的集合称为可数集合。

（可数无限集，基数记为$\aleph_0$）

不是可数的集合称为不可数的或不可数无限。

例17 下列集合都是可数集合：

1) $O^+=\{x|x\in N，x是奇数\}$

2) $E^+=\{x|x\in N-\{0\}，x是偶数\}$

3) $P=\{x|x\in N，x是素数\}$

4) 整数集合Z

6.4 集合的基数、可数集和不可数集

解：

1）在0^+与N之间建立1-1对应的关系 f：N→0^+ 如下：

f：N→0^+ ，f(n)=2n+1

N	0	1	2	3	4	...	n	...
f	↓	↓	↓	↓	↓	...	↓	...
0^+	1	3	5	7	9	...	2n+1	...

所以，0^+也是可数集合。

6.4 集合的基数、可数集和不可数集

2）在N与E^+之间建立1-1对应的关系f：N→E^+ 如下：

f：N→E^+， $f(n)=2n+2$

N	0	1	2	3	4	...	n	...
f	↓	↓	↓	↓	↓	...	↓	...
E^+	2	4	6	8	10	...	2n+2	...

所以，E^+也是可数集合。

6.4 集合的基数、可数集和不可数集

3）在P与N之间建立1-1对应的关系f：N→P如下：

$$\left.\begin{array}{llllllll} N & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ f & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots \\ P & & 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & \ldots \end{array}\right\} \text{枚举法}$$

所以，P也是可数集合。

6.4 集合的基数、可数集和不可数集

4）在N与Z之间建立1-1对应的关系f：N→Z如下：

f：N→Z

$$
f(n)=\begin{cases} \dfrac{(n+1)}{2} & n\text{为奇数} \\ -\dfrac{n}{2} & n\text{为偶数} \end{cases}
$$

N	0	1	2	3	4	5	…	2n-1	2n	…
f	↓	↓	↓	↓	↓	↓	…	↓	↓	…
Z	0	1	-1	2	-2	3	…	n	-n	…

所以，Z也是可数集合。

6.4 集合的基数、可数集和不可数集

- 可数集合的性质：

（定理）每个无限集必含有子集合为可数集。

（定理）可数个可数集的并集仍然是可数集。

（推论）$N\times N$是可数集。

证明：

令$A_i=\{(i,0),(i,1),(i,2),\cdots\}$，$i\geq 0$

显然，$A_i\sim N$，则A_i（$i\geq 0$）是可数集

$N\times N= A_0\cup A_1\cup A_2\cup A_3\cdots\cdots$

由上定理知，$N\times N$是可数集。

6.4 集合的基数、可数集和不可数集

定理 有理数是可数集。

证明：

由上推论知：$N\times N$是可数集。

构造$S=\{(m,n)\in N\times N \mid m$和$n$互素且$m，n\neq 0\}$

显然，$S\subseteq N\times N$，S是可数集。

令 $g:S\to Q^+$，使得$g((m,n))=m/n$，则g是双射，

所以，正有理数集是可数集。

同理，可证负有理数集也是可数集。

再由前面定理知，$Q=Q^+\cup\{0\}\cup Q^-$是可数集。

6.4 集合的基数、可数集和不可数集

4. 不可数集(不可数无限集)

定理 集合(0, 1)和实数集R不是可数集。

证明： 1)首先证明（0，1）是不可数集。

(反证法) 假设**(0, 1)**是可数集，则它的元素可以排列如下：

$$a_0=0.a_{00}a_{01}a_{02}a_{03}\cdots$$
$$a_1=0.a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$$
$$a_2=0.a_{20}a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$$
$$\cdots$$

在**(0, 1)**和**N**建立对应关系：

N:	0	1	2	3	…
(0, 1)：	a_0	a_1	a_2	a_3	…

有$f(n)=a_n$，现证$f:N\to(0,\ 1)$是否是双射。

6.4 集合的基数、可数集和不可数集

现在(0, 1)上构造$r=0.b_0b_1b_2b_3\ldots$

令$b_i = \begin{cases} 1 & a_{ii}\neq 1 \\ 0 & a_{ii}=1 \end{cases}$ $(i=0, 1, 2, 3\ldots)$

则$r\neq a_i$（$i=0, 1, 2, 3\cdots$），而$r\in(0, 1)$

$f(N)=\{a_0\quad a_1\quad a_2\quad a_3\cdots\}\neq(0, 1)$

F不是满射，即不是双射。

∴ (0, 1)不是可数集。

2）要证明实数集合R是不可数集合，只需证明R与（0，1）等势成立。

构造映射f：R→（0，1）

$f(x)=(\arctan x)/\pi+1/2\qquad \forall x\in R$

显然，函数f是一个双射，所以R~（0，1）。

✓ 本定理中使用的证明方法，是一种著名的对角化方法。

① 开区间(0, 1)称为不可数集合，其基数设为ℵ(阿列夫)；

② 凡是与区间(0, 1)等势的集合都是不可数集合。

6.4 集合的基数、可数集和不可数集

5. 基数的比较

定义 设A和B是任意集合。

(1) 如果有一个从A到B的双射函数，那么称A和B有相同的基数（或等势），记为card(A)=card(B)。

(2) 如果有一个从A到B的单射函数，那么称A的基数小于等于B的基数，记为card(A) ≤ card(B)。

(3) 如果有一个从A到B的单射函数，但不存在双射，那么称A的基数小于B的基数，记为card(A) < card(B)。

6.4 集合的基数、可数集和不可数集

定理 设A和B是集合，如果card(A)≤card(B)，card(B)≤card(A)，那么card(A)=card(B)。

例18 证明card((0, 1))=card([0,1])。

证明：设f: (0, 1)→[0, 1]，f(x)=x，是单射函数，

∴ card((0, 1)) ≤ card([0,1])

又设g: [0, 1] →(0, 1)，g(x)=x/2+1/4，是单射函数，

∴ card([0,1]) ≤ card((0, 1))

故card((0, 1))=card([0,1])

6.4 集合的基数、可数集和不可数集

定理 设A是有限集合，那么$|A| < \aleph_0 < \aleph$.

已知的基数的大小可以排列：

$$0 < 1 < 2 < 3 \cdots < |A| < \aleph_0 < \aleph$$

Cantor定理

设M是任一集合，S是M的幂集，则card(M) < card(S)。

由Cantor定理：$card(M) < card\left(2^M\right) < card\left(2^{2^M}\right) \ldots$

没有最大基数的集合！

作业

习题六

18(1)(2)

补充题目：

设card(A)= ℵ， B是A的可数子集。card(A-B)是否为可数的？给出解释。