10.4 图的矩阵表示

图的描述方式

① 用定义描述；

② 用图形描述；

③ 用矩阵表示；

- ✓ 便于利用代数知识研究图的性质，构造算法；
- ✓ 便于计算机处理。

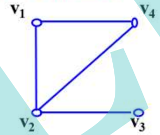
1

图的矩阵表示

图的矩阵表示主要有两种形式：

① 邻接矩阵：常用于研究图的各种道路问题；

0	1	0	1
1	0	1	1
0	1	0	0
1	1	0	0



② 关联矩阵：常用于研究有关子图的问题。

2

图的邻接矩阵表示

定义10-3.1：设G = <V,E>是一个简单图，

$V = \{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，$E = \{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$，则n阶方阵$A = (a_{ij})_{n\times n}$称为G的邻接矩阵。其中：

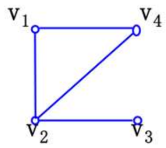
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_iv_j \in E \\ 0 & v_iv_j \notin E \end{cases}$$

实际上就是集合V(顶点集)上关系E(边集)的关系矩阵

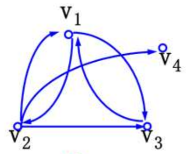
- 邻接矩阵是一个布尔矩阵
- 无向图的邻接矩阵是对称的
- 有向图的邻接矩阵不一定 对称

3

图的邻接矩阵表示



G_1



G_2

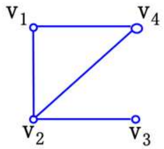
邻接矩阵：

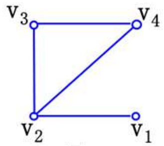
0	1	0	1
1	0	1	1
0	1	0	0
1	1	0	0

0	1	1	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	0	0	0

4

图的邻接矩阵表示





邻接矩阵：⇩

V1	0	1	0	1
V2	1	0	1	1
V3	0	1	0	0
V4	1	1	0	0

⇩

V1	0	1	0	0
V2	1	0	1	1
V3	0	1	0	1
V4	0	1	1	0

当改变图的结点编号顺序时，得到不同的邻接矩阵。同一个图可对应多种邻接矩阵,但本质上是一样的（同构）故，在将图表示为邻接矩阵前，需要先对结点进行编号。

邻接矩阵的性质

设G = <V，E>是一个无(有)向图，则有：

① 零图的邻接矩阵的元素全为零，并称它为零矩阵。 E是空集

② 若图的每一结点有环而再无其他边时，则该图(伪图）的邻接矩阵是单位矩阵。 E是V上的单位置换

③ 简单图的邻接矩阵主对角元全为零。 E是反自反的

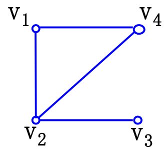
顶点集V上 邻接关系(E)是等价关系吗？是偏序关系吗？

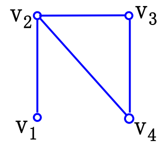
用邻接矩阵判断图的同构

- 对给定的无(有) 向图，当各元素编号顺序不同时，虽然得到的邻接矩阵不同，但它们实质上是同一矩阵，即各矩阵对应的图是同构的。
- V中各元素次序的任意性，给图的邻接矩阵带来任意性。如何判断二图同构是图论的一个难题。
- 给定两个无(有)图及其相应的邻接矩阵，如果对一个图的邻接矩阵进行某些行(列)交换后能够得到另一图的邻接矩阵，则这两个图是同构的。

给出了一种判断两图同构的方法

用邻接矩阵判断图的同构





邻接矩阵：

0	1	0	1
1	0	1	1
0	1	0	0
1	1	0	0

1,3行交换，
1,3列交换
⇨

0	1	0	0
1	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0

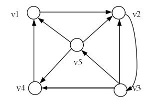
故左图和右图是同构的

有向图的邻接矩阵与道路的关系

① 设A = $(a_{ij})_{n\times n}$为 有向图G = <V,E>, V = $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$的邻接矩阵，则a_{ij}表示从结点v_i到结点v_j长度为 1 的道路的数目；

② 令 B = (b_{ij}) = A² = A×A = $(a_{ij}^{(2)})_{n\times n}$, 则有:

$$b_{ij} = a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$$

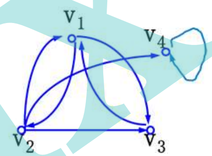


$$A = \begin{array}{c} v1 \\ v2 \\ v3 \\ v4 \\ v5 \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- ✓ b_{ij}表示从v_i到v_j长度为 2的道路（含回路）数目
- ✓ b_{ii}表示v_i到自身长度为 2的回路数目；
- ✓ $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}$ 表示G中长度为 2 的道路（含回路）总数，
- ✓ $\sum_{i=1}^{n} b_{ii}$ 表示G中长度为 2 的回路总数。

有向图的邻接矩阵与道路的关系

$$A(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 7 \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 1$$



G_2中长度为1的道路（含回路）总数为7，其中1条为回路。

$$B = (A(G_2))^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 11 \qquad \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = 5$$

G_2中长度为2的道路（含回路）总数为11，其中5条为回路。
从V1到它自身长度为2的回路有2条
从V1到V2长度为2的道路有0条

有向图的邻接矩阵与道路的关系

➢ **定理10-3.1** 设G = <V,E>为一个n阶简单有向图，V=$\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$， $A=(a_{ij})_{n\times n}$为G的邻接矩阵，对k≥1，令

$$A_k = A^k = (a_{ij}^{(k)})_{n\times n}$$

则 $a_{ij}^{(k)}$ 为从结点v_i到结点v_j长度为k的有向道路的数目。

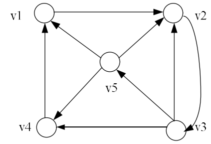
➢ **推论10-3.1.1** 给了我们一个求两节点间(v_i到v_j)距离的算法

$A=(a_{ij})_{n\times n}$为G的邻接矩阵，对k≥1，令 $A_k = A^k = (a_{ij}^{(k)})_{n\times n}$

则使 $a_{ij}^{(k)} > 0$ 的最小k值，正是结点v_i到结点v_j的距离 $d(v_i, v_j)$ 。

已知： 图G =（V,E）, V={v1.v2,…vn}, E={e1,e2,….em}
求结点vi到结点vj 的距离 d(vi, vj)

写出图G的邻接矩阵A
输入： A， i， j
输出： 结点vi到结点vj 的距离 d(vi, vj)



求 d(v3, v1)
d(v4, v5)

算法步骤:

A1=A； k=1
while A1[i,j] ==0
  A1=A1*A； k++
输出k d(vi, vj)

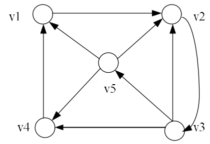
$$A = \begin{array}{c} v1 \\ v2 \\ v3 \\ v4 \\ v5 \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A1 = \begin{array}{c} v1 \\ v2 \\ v3 \\ v4 \\ v5 \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

k=4

试着改写此算法求所有结点对 (v_i,v_j), i,j=1,2,…,n 的距离

故： d(v3, v1) = 2
d(v4, v5) = 4

示例



$$A=\begin{array}{c}v1\\v2\\v3\\v4\\v5\end{array}\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&1&1\\1&0&0&0&0\\1&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&1&0&1&1\\2&1&1&1&0\\0&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\end{bmatrix},A^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1&1\\2&1&1&1&0\\1&3&1&1&1\\0&0&1&0&0\\0&2&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$A^4=\begin{bmatrix}2&1&1&1&0\\1&3&1&1&1\\2&3&3&2&1\\0&1&0&1&1\\2&2&2&2&1\end{bmatrix},A^5=\begin{bmatrix}1&3&1&1&1\\2&3&3&2&1\\3&6&3&4&3\\2&1&1&1&0\\3&5&2&3&2\end{bmatrix}$$

1. 从v4和v5长度分别为1,2,3,4,5的道路各有多少条？ 0, 0, 0, 1, 0
2. d(v4,v3)=? 3

13

有向图的邻接矩阵与道路的关系

➢ **推论10-3.1.2**

$A=(a_{ij})_{n\times n}$为有向图G的邻接矩阵，对 $1\le k\le n$，令$A^k=\left(a_{ij}^{(k)}\right)_{n\times n}$。则对$1\le k\le n$，$a_{ij}^{(k)}=0$ 恒成立（$i\ne j$）**当且仅当** 从结点v_i到结点v_j **不可达**。

$a_{ij}^{(1)}+a_{ij}^{(2)}+a_{ij}^{(3)}+\ldots+a_{ij}^{(n)}=0$

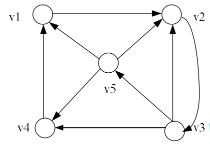
➢ **推论10-3.1.3**

$A=(a_{ij})_{n\times n}$为G的邻接矩阵，对$k\ge1$，令$A^k=\left(a_{ij}^{(k)}\right)_{n\times n}$。存在t、s使 $a_{ij}^{(t)}>0$ 和 $a_{ji}^{(s)}>0$ **当且仅当** G中有一条包含v_i和v_j的长度为（t+s）的**有向回路**。

➢ **前述定理及其推论对于无向图同样成立。**

14

示例



$$A=\begin{array}{c}v1\\v2\\v3\\v4\\v5\end{array}\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&1&1\\1&0&0&0&0\\1&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&1&0&1&1\\2&1&1&1&0\\0&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\end{bmatrix},A^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1&1\\2&1&1&1&0\\1&3&1&1&1\\0&0&1&0&0\\0&2&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$A^4=\begin{bmatrix}2&1&1&1&0\\1&3&1&1&1\\2&3&3&2&1\\0&1&0&1&1\\2&2&2&2&1\end{bmatrix},A^5=\begin{bmatrix}1&3&1&1&1\\2&3&3&2&1\\3&6&3&4&3\\2&1&1&1&0\\3&5&2&3&2\end{bmatrix}$$

1. 图中有无不可达两结点？ 无
2. v4和v5之间是否有回路？ 长度多少？ 1+4
3. v1和v3之间是否有回路？长度多少？ 2+2

15

有向图的邻接矩阵与道路的关系

➢ 设G=<V,E>为简单有向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，$A=(a_{ij})_{n\times n}$为G的邻接矩阵，令

$$B_r=A+A^2+A^3+\cdots+A^r=\left(b_{ij}^{(r)}\right)_{n\times n},r\ge1$$

其中 $$b_{ij}^{(r)}=a_{ij}^{(1)}+a_{ij}^{(2)}+\cdots+a_{ij}^{(r)}=\sum_{m=1}^{r}a_{ij}^{(m)}$$

则有

① $b_{ij}^{(r)}$ 为从结点v_i到结点v_j长度小于等于r的有向道路条数；

② $b_{ii}^{(r)}$ 为结点v_i到自身的长度小于等于r的回路数目；

③ $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^{(r)}$ 为G中长度小于等于r的道路（含回路）总数；

④ $\sum_{i=1}^{n}b_{ii}^{(r)}$ 为G中所有长度小于等于r的回路总数。

16

可达矩阵

设A为图G={V,E}的邻接矩阵

- 由矩阵 $B_n = A^1 + A^2 + A^3 + \ldots + A^n = (b_{ij}^{(n)})_{n\times n}$ 可知：

若 $b_{ij}^{n} = 0$，则表明从结点v_i到v_j是不可达的； 即 $p_{ij}=0$

若 $b_{ij}^{n} \neq 0$，则表明从结点v_i到v_j有b_{ij}^{n} 条长度小于等于n的通路，即此时从结点v_i到v_j是可达的。

- 定义方阵$P = (p_{ij})_{n\times n}$，：

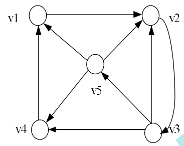
$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & b_{ij}^{(n)} > 0, \\ 0 & b_{ij}^{(n)} = 0, \end{cases}$$

为图G的可达矩阵

- ✓ 可达矩阵P描述了任意两结点间是否存在至少一条有向道路
- ✓ 一般不能由P重构G，但P很有用处

17

示例



$$A = \begin{array}{c} v1 \\ v2 \\ v3 \\ v4 \\ v5 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & 6 & 5 & 3 \\ 9 & 14 & 8 & 9 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 11 & 6 & 6 & 4 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

18

用布尔矩阵运算求可达矩阵P

可以看出，由B_n求P, 工作量较大　O(n^4)

∵ 因可达性矩阵是布尔矩阵，在计算过程中不必求路径条数，而只关心两点间是否存在路径。

∴ 可将A，$A^2,\ldots,A^n$分别改为布尔矩阵$A^{(2)}, A^{(3)},\ldots,A^{(n)}$,则

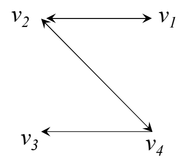
$P = A \vee A^{(2)} \vee A^3 \vee \ldots \vee A^3$

其中A^i表示布尔矩阵运算意义下的A的 i 次幂，　$\vee$ 为布尔运算

$C = A \vee B \qquad c_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij}$

19

用布尔矩阵运算求 可达矩阵P



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{O}(n^4)$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

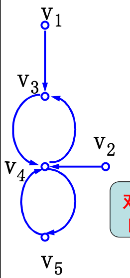
$$P = A \vee A^2 \vee A^3 \vee A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

如果将图G的边集E看成结点V上的二元关系，求G的可达矩阵P就是 求E的传递闭包t(E)。可用Warshall算法 O(n^3)

Why?

20

利用可达矩阵P构造有向图的强分图



➢ 设G = <V,E>为有向图，$P = (p_{ij})_{n\times n}$是图G的可达性矩阵，P^T是P的转置矩阵，定义P与P^T的布尔交

$P\odot P^T=(g_{ij})_{n\times n}$ 如下:

$$g_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ p_{ij}\wedge p_{ji}, & i\neq j,\end{cases}$$

对角线为1的对称阵

$$P=\begin{bmatrix}0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}\quad P\odot P^T=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}\quad P^T=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

➢ $P\odot P^T$每一行的非零元素所对应结点在同一个强分图中。

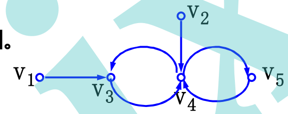
结点集上的双向可达关系

设某行非零元素所在列为 $j_1, j_2,\dots, j_k$，则点诱导子图 $G(\{v_{j1},v_{j2},\dots,v_{jk}\})$ 是 G 的一个强分图。

21

利用P构造有向图的强分图

例 利用可达性矩阵求右图的所有强分图。



解： 由右图可得其邻接 和可达性矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\quad P=\begin{bmatrix}0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}\quad P^T=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$P\odot P^T=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}$$

故：点诱导子图 $G(\{v_1\})$、 $G(\{v_2\})$ 和 $G(\{v_3,v_4,v_5\})$ 是G的强分图

22

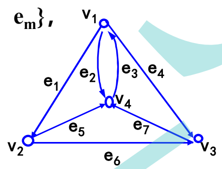
关联矩阵的定义

定义 10-3.3 设 G = <V，E>是一个|E|>0的无环有向图，$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$，$E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$，

称矩阵 $M = (m_{ij})_{n\times m}$，

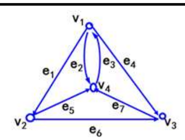
$$m_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当}e_j\text{是}v_i\text{的出边},\\ -1 & \text{当}e_j\text{是}v_i\text{的入边},\\ 0 & \text{其它},\end{cases}$$

称为G的关联矩阵。



$$M=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}e_1&e_2&e_3&e_4&e_5&e_6&e_7\end{array}\\\begin{bmatrix}1&1&-1&1&0&0&0\\-1&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&-1&0&-1&1\\0&-1&1&0&-1&0&-1\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{array}$$

23



关联矩阵的性质

1. 第i行（1≤i≤n）中，1的个数是V_i的出度，-1的个数是V_i的入度。
2. 每列恰有一个1和一个-1。
3. 若第i行全为0，则V_i为孤立结点。
4. 若有向图G的结点和边在一种编号（定序）下的关联矩阵是M_1，在另一种编号下的关联矩阵是M_2，则必存在方阵$P_{n\times n}$和$Q_{m\times m}$使 $M_1 = PM_2Q$。

$$M=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}e_1&e_2&e_3&e_4&e_5&e_6&e_7\end{array}\\\begin{bmatrix}1&1&-1&1&0&0&0\\-1&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&-1&0&-1&1\\0&-1&1&0&-1&0&-1\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{array}$$

24

关联矩阵的秩

- 定理10-3.2：设G是n阶弱连通无环有向图，其关联矩阵是M，则M的秩为 n-1。
- 推论10-3.2.1：支数(弱分图个数)为k，阶数为n的无环有向图G，其关联矩阵的秩是n-k

证明：设各支的关联矩阵为M_j，j=1,2,…k，则G的关联矩阵M为

$$M=\begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & M_k \end{pmatrix}$$

M的秩为

$\gamma(M)= \gamma(M_1)+\gamma(M_2)+\ldots+\gamma(M_k)$

$= (n_1-1)+(n_2-1)+\ldots+(n_k-1)$

$=n-k$

第12章 平面图及其应用

1

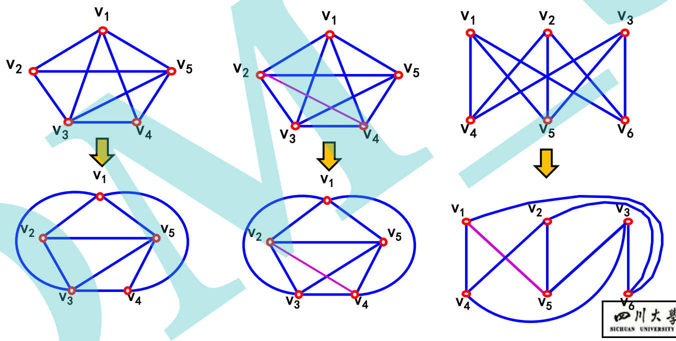
主要内容

- 平面图
- 对偶图
- 着色问题

2

平面图

定义12-1.1 如果能把一个无向图G的所有结点和边画在一个平面上，使得任何两边没有交叉点（除公共结点外），则称G为平面图，否则称G为非平面图。



3

平面图

定理 12-1.1: 若图G是平面图，则G的任何子图都是平面图.

定理 12-1.2; 若图G是非平面图，则G的任何母图也都是非平面图.

推论 12-1.2-1 K_n（$n\geq5$）和 $K_{3,n}$（$n\geq3$）都是非平面图.

要判定一个无向图是否为平面图，只要判定它对应的基图（即简单无向图）是否为平面图即可

WHY?

4

平面图

几个定义： 设G是一个平面图，

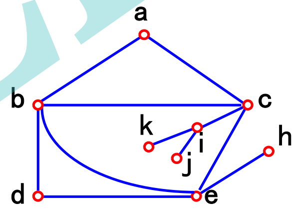
- **面：** 由图中的边所包围的、其内部不包含结点和边的区域，称为G的一个面；
- **面的边界：** 包围面r的诸边所构成的闭合道路称为面r的边界；
- **面的度：** 面r的边界的长度（边数）称为面r的度/次数，记为D(r)。简单平面图（m>1）任何面的度至少为3。
- **有限面：** 区域面积有限的面称为有限面/有界面/内部面。
- **无限面：** 区域面积无限的面称为无限面/无界面/外部面。

平面图

自学概念： 面， 面的边界， 面的度， 有限面， 无限面

在右下图中有9个结点，11条边，把平面分成（ ）个面

1. 各个面边界为( ),
2. 各个面的度为（ ）
3. （ ）面是有限面,
4. （ ）是无限面



简单平面图(m>1)任何面的度至少为3

平面图

例 在右图中有9个结点，11条边，把平面分成 4 个面 r_0、r_1、r_2、r_3。其中

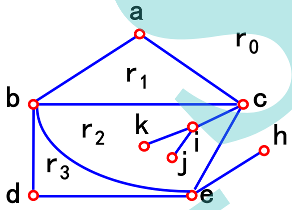
r_0的边界为abdeheca，$D(r_0) = 7$;

r_1的边界为abca，$D(r_1) = 3$;

r_2的边界为becijikicb，$D(r_2) = 9$;

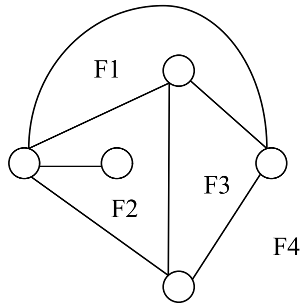
r_3的边界为bdeb，$D(r_3) = 3$。

r_1、r_2和r_3是有限面，r_0是无限面。



简单平面图(m>1)任何面的度至少为3

平面图

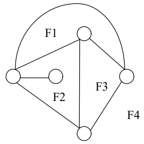


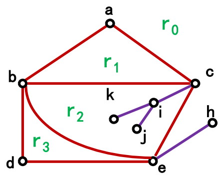
Fl，F2，F3称为有界面或内部面，
F4称为无界面或外部面.
F1，F3，F4的度都是3，
F2的度是5

简单平面图(m>1)任何面的度至少为3

DMS Chapter 12
平面图

平面图





- 平面图有且仅有一个无限面
- 不是割边的边一定是2个面的公共边
- 有公共边的两个面互称为相邻面。
- 在一个平面图中，所有面的度之和等于图中所有结点的度之和，即边数的2倍。
- 1750年，欧拉发现，任何一个凸多面体，若有n个顶点、m条边和f个面，则有n – m+ f = 2。这个公式可以推广到连通平面图上来，称之为欧拉公式。

DMS Chapter 12
平面图

欧拉公式
--平面图的必要条件(1)

定理12-2.1： 设G = <V,E>是连通平面图，若它有n个结点、m条边和f个面，则有

连通图为平面图的必要条件 $n-m+f=2$ （欧拉公式）

推论 12-2.1.1： 对于具有k（$k \ge 2$）个连通分支的平面图G，有

$n-m+f=k+1$ 无向简单图为平面图的必要条件

证： $n_i - m_i + f_i = 2$ $i = 1,2,\ldots,k$

因 $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$,

$f_1 + f_2 + \ldots + f_k = f + (k-1)$ 一个平面图只有一个无限面

$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = m$,

故 $2k = n-m+f + (k-1)$

$\Longrightarrow n-m+f = k+1$

DMS Chapter 12
平面图

平面图的必要条件(2)

定理12-2.2： 设G是一个(n,m)简单连通平面图，若m > 1，则有:

$m \le 3n-6$

证明: 设G有 f 个面，因为G是m>1的简单平面图，所以G的每个面的度至少为3，而G中各面度之和是边数的二倍，所以$2m \ge 3f$，即$f \le 2m/3$

代入欧拉公式 $n - m + f = 2$ 有:

$n - m + 2m/3 \ge 2$

整理得 $m \le 3n-6$ 简单连通图（m>1）是平面图的必要条件

推论10-4.2.1 任何简单连通平面图中，至少存在1个度不超过5的结点

证明: (反证法) 设 所有结点的度都大于5，根据握手定理有 $2m \ge 6n$

=> $m \ge 3n$, 与简单连通平面图的必要条件$m \le 3n-6$ 矛盾。

DMS Chapter 12
平面图

平面图的必要条件(3)

围长： 一个图包含的最短圈的长度称为该图的围长。 一个图若不含圈，则规定其围长为无穷大。

- ✓ 任何简单图的围长大于等于3
- ✓ 任何二部图的围长大于等于4

定理12-2.3 设G是一个(n,m)简单连通平面图，其围长$k > 2$，则有

$$m \le \frac{k}{k-2}(n-2)$$

简单连通图是平面图的另一个必要条件

适用条件：图包含圈

平面图的必要条件

$n-m+f=2$，$m \le 3n-6$，和 $m \le \frac{k}{k-2}(n-2)$

均是简单连通平面图的必要条件，用它们不能判断一个简单连通图是否为平面图，但其逆否命题非常有用，可以用来判定一些简单连通图的非平面性。

一个简单连通图，若不满足以下三者之一，则一定是非平面图。

1. $n-m+f=2$,
2. $m \le 3n-6$
3. $m \le k(n-2)/(k-2)$

2) 适用条件: n>2(m>1)
3) 适用条件: n>2 & 有圈

简单连通图是平面图的必要条件

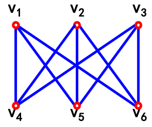
平面图

定理12-2.4 K_5 和$K_{3,3}$都是非平面图

证:

1) 5个结点的完全图K_5是简单连通图，$n=5$，$m=10$，
有 $3n-6=3\times5-6=9$，不满足 $m \le 3n-6$。
故K_5是非平面图。

2) 图$K_{3,3}$是简单连通图，$n=6$，$m=9$, $k=4$
虽满足不等式 $m \le 3n-6$，
但不满足 $m \le \frac{k}{k-2}(n-2)$
故$K_{3,3}$是非平面图。



$K_{3,3}$

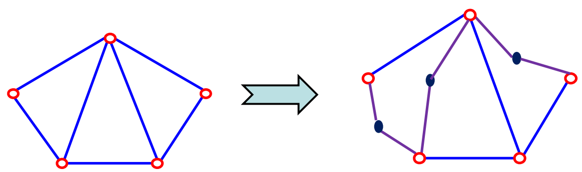
平面图

- 前述的几个必要条件只能用来判断一个简单连通图不是平面图，但不能用来判断一个简单连通图是平面图
- 一个图有平面的图形表示，是判别平面图的最具说服力的方法，但是，当n较大时，因工作量太大而不实用.
- 要找到一个好的方法去判断任何一个图是否平面图，就得对平面图的本质有所了解.
- Kuratowski（库拉托夫斯机）建立了一个定理，定性地说明了平面图的本质.

平面图---细分图

删除边uv， 增加结点w，边uw和wv

- **细分图：在图G的任意边uv上新增加有限个二度结点，所得的新图称为图G的细分图。**

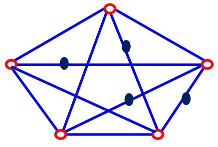


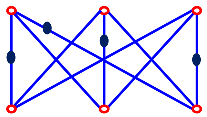
G　　G的细分图

平面图
---库拉托夫斯基定理

➢ **库拉托夫斯基定理： 一个图是平面图的充分必要条件是它的任何子图 不与 K_5或$K_{3,3}$及其细分图同构。**

此定理定性地说明了平面图的本质。





➢ **通常将K_5和$K_{3,3}$称为库拉托夫斯基图**

对偶图

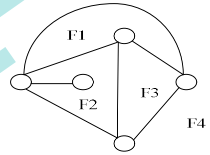
定义11-4.1 若图G = <V,E>是一个平面图，构造图 $G^* = <V^*, E^*>$如下：

① **G的面F_1，F_2，…，F_f与V^*中的结点 $v_1^*, v_2^*, \cdots, v_f^*$ 一一对应；**

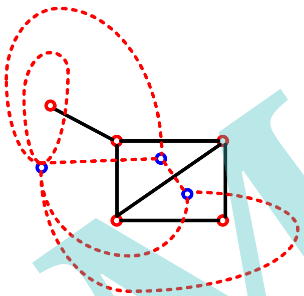
② **若面F_i和F_j邻接且有n条分隔边，则 v_i^* 与 v_j^* 之间有n条边 $v_i^*v_j^*$ ，每条边 $v_i^*v_j^*$ 与F_i和F_j 的一个分隔 边交叉。**

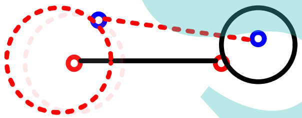
③ **若G中某条边 e 只是面F_i的边界，则 v_i^* 有一环。**

则称G^*为是G的对偶图。



对偶图





➢ 实线和红圈分别是平面图G的边和结点；

➢ 虚线和兰圈分别是G对偶图G*的边和结点，

➢ G*的每条边只与G中面F_u和F_v的分隔边交叉一次。

对偶图

定理12.9 设 G *是连通平面图G的对偶图， n*, m*, f* 和 n,m, f 分别为G*和G的结点数，边数和面数，则：

① $n^* = f$

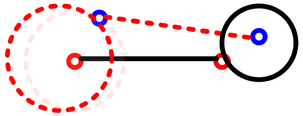
② $m^* = m$

③ $f^* = n$

④ 设G*中顶点v_i^* 与 G中面R_i对应， 则 $d(v_i^*) = D(R_i)$

⑤ G ** 与G同构

定义12.4 设 G *是平面图G的对偶图， 若G *与G同构，称G为自对偶图



思考：自对偶图的最低必要条件是什么？

DMS Chapter 12 平面图

着色问题

在一张平面地图上，是否可以用四种颜色为地图着色，使得相邻国家着有不同的颜色？

- 图着色问题的研究起源于“四色猜想”
  - ✓ 1979年，由美国的K.Appel和W.Haken利用计算机给出了证明。
  - ✓ 但至今为止，还未能从理论上严格证明这个猜想。
- 着色定义：
  - ✓ 相邻点涂不同色，称为 (点)着色; 若能用k种颜色对图G(点)着色，称G是k(点)可着色的。
  - ✓ 相邻面涂不同色，称为面着色。若能用k种颜色对G面着色，称G是k面可着色的。

DMS Chapter 12 平面图

着色问题

- 利用对偶图的概念，可以将平面图的面着色问题转换成的点着色问题。

相邻点着不同色

相邻面着不同色

- 定理： 地图G是k面可着色的， 当且仅当 G的对偶图G*是k 点可着色的
- 五色定理（Heawood定理，1890年得到证明）：

  任何连通平面图都是可 五着色的。

DMS Chapter 12 平面图

课后思考

1. (n, m)图为无向简单图，m最小为（ ），最大为( )
2. (n, m)图为无向简单连通图，m最小为（ ），最大为( )
3. (n, m)图（n>2）为无向简单连通平面图，m最小为（ ），最大为( )
4. (n, m) 图为连通分支为k的无向简单图，m最小为（ ）， 最大为( )
5. (n, m) 图为连通分支为k的无向简单平面图（n > k+1），m最小为（ ），最大为( )
6. 已知（8，m）平面图的面数 f=7， 分支数 k=2，若想保持其分支数(连通性)不变，最多可删掉（ ）条边。