第一部分　数理逻辑

第2章　一阶谓词逻辑

计算机（软件）学院

林　兰

linlan@scu.edu.cn

引入

命题演算中，原子命题是演算的基本单位，不再对原子命题进行分解。故无法研究命题内部的成分、结构及其逻辑特征。

例如：“所有的人总是要死的” P

“苏格拉底是人” Q

“所以苏格拉底是要死的” R

$P\wedge Q\rightarrow R$

$\cancel{P\wedge Q\Rightarrow R}$

凭直觉苏格拉底论证是正确的，但无法用命题演算表达出来。必须扩充引入**谓词演算**。

主要内容

- 2.1 谓词和量词
- 2.2 谓词公式及其赋值
- 2.3 谓词公式的等价与范式
- 2.4 谓词公式的蕴涵
- 2.5 谓词逻辑的推理方法

2.1 谓词和量词

1. 谓词

例1

① 5是质数。	x是质数	F(x)
② 张明生于北京。	x生于y	G(x, y)
③ 2 + 3 = 6。	x+y=z	H(x, y, z)

(1) 个体(客体)　独立存在的具体事物或抽象概念。

个体常元：“5”“张明”“北京”“2”“3”“6”

个体变元：x, y, z…(小写字母或字串)

(2) 谓词　描述个体的性质或几个个体间关系的模式叫谓词。

谓词标识符:F, G, L, GREATER_THAN…(大写字母或字串)

2.1 谓词和量词

(3)谓词命名式　谓词标识符(个体1，个体2，…)，简称谓词。

一个个体变元的谓词称为一元谓词；两个个体变元的谓词称为二元谓词；一般地，n个个体变元的谓词称为n元谓词，记为$P(x_1, x_2, \cdots x_n)$。

(4)个体域(论述域)　谓词命名式中个体变元的取值范围。

论述域不能是空集，至少有一个个体的非空集合D。

为叙述方便，我们设想有一个集合，它包括谓词中各个体变元的所有个体域，称为全总个体域(全论域)。

约定：如果不指明论域，则认为是全体事物构成的集合。

2.1 谓词和量词

(5) 谓词与命题的关系

谓词命名式中，若谓词是常元，个体变元代以个体域中的某一个体，就成为一个命题。

例如：F(x)表示“x是质数”，个体域：正整数。

F(5)：5时质数。 真

F(4)：4是质数。 假

G(x,y)表示“x生于y”，个体域：人类；地名集。

G(张明，北京) 真/假

- ✓ 谓词命名式是一个命题函数，n元谓词也称为n元命题函数。
- ✓ 将谓词P(x)中个体变元x赋一个值，其本质是给变元以约束，此时，谓词就成为命题。

几个结论

1） 谓词中个体词的顺序是十分重要的，不能随意变更。

2） 一元谓词用以描述某一个客体的某种特性或性质，而n元谓词（二个以上）则用以描述n个客体之间的关系。

3） 0元谓词(不含客体词的)实际上就是一般的命题，有真值。

4） 一个n元谓词不是一个命题，但将n元谓词中的客体变元都用个体域中具体的客体取代后，就成为一个命题。而且，客体变元在不同的个体域中取不同的值对命题的真值有很大的影响。

2.1 谓词和量词

2. 量词

例2　符号化（1）所有的人呼吸。　（2）有的人吸烟。

解：令P(x)：x呼吸；Q(x)：x吸烟。

则有：（1）所有x，P(x)　　　$x\in$｛人类｝；

（2）有x，Q(x)　　　$x\in$｛人类｝；

(1) 全称量词 $\forall$

- $\forall x$ 读作“一切x”，“所有的x”。
- $(\forall x)P(x)$ 表示“对一切x，都有性质P”，称为全称量化命题。
- $(\forall x)P(x)$取值为真的充分必要条件是对个体域D中每个个体a，P(a)都为真。

2.1 谓词和量词

(2) 存在量词∃

- ∃x 读作“存在x”，“某个x”，“至少有一x”。
- (∃x)P(x) 表示“有一x，有性质P。”，称为**存在量化命题**。
- ∃xP(x)取值为真的充分必要条件是个体域D中至少存在一个客体a，使P(a)取值真。

上例2：符号化（1）所有的人呼吸。（2）有的人吸烟。

解：令P(x)：x呼吸；　　Q(x)：x吸烟。

则有：（1）$(\forall x)P(x)$　　$x\in\{人类\}$；

（2）$(\exists x)Q(x)$　　$x\in\{人类\}$；

2.1 谓词和量词

例3　设个体域D为整数，判断下面命题的真值。

$(\forall x)(x < x+1)$	T	T
$(\exists x)(x < x+1)$	T	T
$(\forall x)(x = 3)$	F	F
$(\exists x)(x = 3)$	T	F

常用的谓词，可用特定的符号表示，且采用中缀记法。

如果设个体域D为大于3的奇数。结果如何？

2.1 谓词和量词

- ✓ 量化的作用是约束变元。
- ✓ 量化后所得命题的真值与论述域有关。

(3) 量化断言与命题的关系

- 对于**有限可数**个体域D={a_0, a_1, ⋯a_n}，有：

$$(\forall x)A(x) \Leftrightarrow A(a_0) \wedge A(a_1) \wedge \ldots \wedge A(a_n)$$

$$(\exists x)A(x) \Leftrightarrow A(a_0) \vee A(a_1) \vee \ldots \vee A(a_n)$$

- 对于**无限可数**个体域D={a_0, a_1, a_2⋯}，有：

$$(\forall x)A(x) \Leftrightarrow A(a_0) \wedge A(a_1) \wedge A(a_2)\ldots$$

$$(\exists x)A(x) \Leftrightarrow A(a_0) \vee A(a_1) \vee A(a_2)\ldots$$

2.1 谓词和量词

(4) 全总个体域下的量化命题（特性谓词）

例4 ①人总是要死的。 ②有些人不怕死。用逻辑形式表达。

解：(1) 若论域D为人类：

设D(x): x是要死的。F(x): x是不怕死的。

①人总是要死的　　　$\forall x D(x)$

②有些人不怕死　　　$\exists x F(x)$

(2) 若论域D为全总个体域：

逻辑符号？

2.1 谓词和量词

例4（续） ①人总是要死的。 ②有些人不怕死。用逻辑形式表达。

解： (2) 若论域D为全总个体域：

设D(x): x是要死的。F(x): x是不怕死的。 M(x)：x是人。

① 人总是要死的。

语句为“对每一个x，如果x是人，那么x是要死的。”

$$(\forall x)[M(x) \to D(x)]$$

此处**M(x)**为特性谓词，刻划论述对象具有“人”这一特性。

② 有些人不怕死。

语句为“有一个x，x是人并且x不怕死。”

$$(\exists x)[M(x) \wedge F(x)]$$

☞ 特性谓词加入到量化命题的两条规则：

（1）对全称量词，特性谓词作为条件式的前件加入之；

（2）对存在量词，特性谓词作为合取项加入之。

2.1 谓词和量词

例5 将下列命题符号化

(1) 没有不犯错误的人。

(2) 人都是要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的。

(3) 对每个整数**x**，都存在整数**y**，使**y**为**x**的平方数。

解： （约定：若没有指明个体域，都是采用全总个体域。）

(1) 令F(x)：x犯错误，M(x)：x是人。则可翻译为

$$\forall x[M(x)\rightarrow F(x)] \text{ 或 } \neg(\exists x[M(x)\wedge\neg F(x)])$$

(2) 令D(x): x是要死的，M(x): x是人，**s：苏格拉底。**

$$\forall x(M(x)\rightarrow D(x)) \wedge M(s)\rightarrow D(s)$$

(3) 令I(x): x是整数，EQUAL(x, y): x=y，**f(x)：x的平方。**

$$\forall x[I(x)\rightarrow\exists y(I(y) \wedge EQUAL(\ f(x)\ \ y))]$$

客体函数

2.1 谓词和量词

例6 符号化下述语句

1) 天下乌鸦一般黑。
2) 张强和李平都是足球运动员。
3) 每个实数都存在比它大的另外的实数。
4) 并非所有的动物都是脊椎动物。
5) 尽管有人很聪明，但未必一切人都聪明。

解：

1) 设 $F(x)$：x是乌鸦；

$G(x,y)$：x与y一般黑。

符号化为： $(\forall x)(\forall y)(F(x)\wedge F(y)\rightarrow G(x，y))$

或 $\neg(\exists x)(\exists y)(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg G(x，y))$

例6（续）

2）张强和李平都是足球运动员。

设$Z(x)$：x是足球运动员；

c：张强，　　　d：李平。

符号化为：　$Z(c)\wedge Z(d)$

3）每个实数都存在比它大的另外的实数。

设$R(x)$：x是实数；

$L(x,y)$：x小于y。

符号化为：　$(\forall x)(R(x)\rightarrow(\exists y)(R(y)\wedge L(x,y)))$。

例6（续）

4）并非所有的动物都是脊椎动物。

设$A(x)$：x是动物；

$B(x)$：x是脊椎动物。

符号化为：

$$\neg(\forall x)(A(x)\rightarrow B(x))$$

或 $$(\exists x)(A(x)\wedge\neg B(x))$$

5）尽管有人很聪明，但未必一切人都聪明。

设$M(x)$：x是人。

$C(x)$：x很聪明。

符号化为：

$$(\exists x)(M(x)\wedge C(x))\wedge\neg(\forall x)(M(x)\rightarrow C(x))$$

2.1 谓词和量词

例7 设 $I(x)$：x是整数

$Q(x, y)$：$x+y=0$

用语句描述下述句子，并判断其真假值。

1) $(\forall x)(\forall y)(I(x) \wedge I(y) \rightarrow Q(x, y))$
2) $(\forall x)(I(x) \rightarrow (\exists y)(I(y) \wedge Q(x, y)))$
3) $(\exists x)(\forall y)(I(x) \wedge (I(y) \rightarrow Q(x, y)))$

2.1 谓词和量词

1) $(\forall x)(\forall y)(I(x) \land I(y) \to Q(x, y))$

可描述为："对任意的整数x，y，都有x+y=0"，

真值为"假"。

2) $(\forall x)(I(x) \to (\exists y)(I(y) \land Q(x, y)))$

可描述为："对任意的整数x，都存在着整数y，使得x+y=0"，

真值为"真"。

3) $(\exists x)(\forall y)(I(x) \land (I(y) \to Q(x, y)))$

可描述为："存在着整数x，使得对任意的整数y，都有x+y=0"，

真值为"假"。

2.1 谓词和量词

- 量词的顺序说明：
  - 如有多个量词，则读的顺序按从左到右的顺序，即：

    $$(\forall x)(\forall y)G(x,y)=(\forall x)((\forall y)(G(x,\ y))$$

  - 量词对变元的约束，往往与量词的次序有关，不同的量词次序，可以产生不同的真值，此时对多个量词同时出现时，不能随意颠倒它们的顺序，颠倒后会改变原体的含义。

例如：“每个人都有一个好朋友”

（$(\forall x)(\exists y)G(x,y)$）与

“有一个人是所有人的好朋友”

（$(\exists x)(\forall y)G(x,y)$）

是完全不同的含义。

作业

- ✓ 习题二

1、2

主要内容

- 2.1 谓词和量词
- 2.2 谓词公式及其赋值
- 2.3 谓词公式的等价与范式
- 2.4 谓词公式的蕴涵
- 2.5 谓词逻辑的推理方法

2.2 谓词公式及其赋值

1. 谓词公式

(1)基本符号

- 个体常量：一般用a, b, c, …； a_1, b_1, c_1, …来表示， 它可以是D中的某个元素；
- 个体变量：一般用x, y, z, …， x_1, y_1, z_1, …来表示. 它可以取值于D中的任意元素；
- 函数符号：一般用f, g, h, …， f_1, g_1, h_1, …来表示。n元函数符号$f(x_1, x_2, ... x_n)$可以是$D^n \to D$的任意一个函数；
- 谓词符号：一般用P, Q, R, . . . ， P_1, Q_1, R_1, . . . 来表示。n元谓词符号$P(x_1, x_2, ... x_n)$可以是$D^n \to \{0, 1\}$的任意一个谓词。

注：不含客体变元的谓词是命题。

2.2 谓词公式及其赋值

（2）基本定义

定义（项） 在一阶谓词逻辑中，项被递归地定义为：

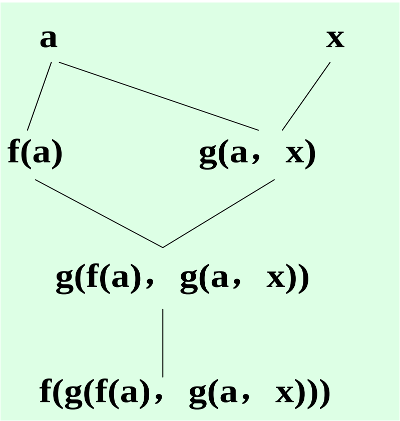
① 任意的常量符号是项；

② 任意的个体变元符号是项；

③ 若$f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$是n元函数符号，$t_1,t_2,t_3,\ldots,t_n$是项，则$f(t_1,t_2,t_3,\ldots,t_n)$是项；

④ 只有有限次使用①~③规则生成的符号串才是项。

例如：复合函数f(g(f(a), g(a, x)))是一个项。



2.2 谓词公式及其赋值

定义（原子公式） 设P是n元谓词标识符， $t_1,t_2,t_3,\ldots,t_n$是项, 则$P(t_1,t_2,t_3,\ldots,t_n)$是原子谓词公式，简称原子公式。

$$P(x_1,\ x_2,\ \cdots x_n)$$

谓词标识符

项

2.2 谓词公式及其赋值

定义（谓词公式） 满足下列条件的表达式，称为谓词合适公式, 简称公式。

① 原子公式是谓词合适公式。

② 若A，B是谓词合适公式，则 $(\neg A)$，$(\neg B)$，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$，$(A \leftrightarrow B)$是谓词合适公式。

③ 若A是谓词公式，x是个体变元，则$(\forall x)[A(x)]$、$(\exists x)[B(x)]$是谓词合适公式。

④ 只有有限次应用①~③生成的符号串才是谓词合适公式（或简称“公式”）。

2.2 谓词公式及其赋值

- 例如：

$(P(x)\rightarrow(Q(x, y)\vee\neg R(x, a, f(z))))$

$(P(x)\vee R(y))$

$(\forall x)(P(x))$

等都是公式。

而

$(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x)$

$(\forall x)\vee P(x)(\exists y)$

等则不是公式，前者括号不匹配，后者量词无辖域。

2.1 谓词和量词

(3) 量词辖域（作用域）

在表达式$(\forall x)A(x)$或$(\exists x)A(x)$中，变元x称为指导变元， $A(x)$称为相应**量词的辖域**。

例如：

$$(\forall x)\underline{P(x)} \to Q(x)$$

$$(\forall x)\underline{[P(x) \to Q(x)]}$$

☞ 辖域即为紧接于量词之后最小的子公式。

如果辖域不是原子公式，其两侧必须用括号将其界定。

2.1 谓词和量词

(4) 约束变元和自由变元

在量词(∀x) 或 (∃x)的辖域内，变元x的一切出现叫约束出现，称这样的变元为约束变元。

变元的非约束出现叫变元的自由出现，称这样的变元为自由变元。

例如：① $\forall x P(x) \to Q(x)$

$P(x)$中的x是约束出现，$Q(x)$中的x是自由出现。

② $\exists x(P(x,y) \to Q(x,y)) \vee P(y,z)$

x是约束出现，y、z是自由出现。

①式中，变元x约束和自由两个“身份”同时出现,容易引起概念上的混乱,故可对约束变元换名,或对自由变元代入,使得一个变元在一个公式中只以一种形式出现。

2.1 谓词和量词

- 规则1：约束变元的换名规则

  使用在量词辖域中未出现过的变元标识符替换原来的指导变元和在辖域中的所有同名变元。

- 规则2：自由变元的代入规则

  使用在公式中未出现过的变元标识符替换原来所有同名自由变元。

换名或代入后的公式 $\Leftrightarrow$ 原公式

2.1 谓词和量词

例如：

$$(\forall x)[P(x) \to (\exists y)[Q(y) \wedge R(f(x,y))]] \vee A(x,y,z)$$

方法一：【约束变元的换名规则】

约束出现的变元x换成u，y换成v：

$$(\forall u)[P(u) \to (\exists v)[Q(v) \wedge R(f(u,v))]] \vee A(x,y,z)$$

方法二：【自由变元的代入规则】

自由出现的变元x换成u，y换成v：

$$(\forall x)[P(x) \to (\exists y)[Q(y) \wedge R(f(x,y))]] \vee A(u,v,z)$$

2.2 谓词公式及其赋值

例8 将命题 **"如果任意两个实数的乘积为0，其中必有一个数为0"** 翻译成谓词公式。（论域为实数R）

解：设论述域为实数R。

令E(x, y)：x=y； product(x, y)：x和y的乘积。

翻译公式为：

$$\forall x \forall y[E(product(x,y), 0) \to (E(x,0) \vee E(y,0))]$$

也可直接翻译常用的谓词符号：

$$\forall x \forall y[(x \cdot y = 0) \to (x = 0) \vee (y = 0)]$$

2.2 谓词公式及其赋值

2. 公式的解释

一个定义在论域D上的公式A的每一个解释(赋值、指派)I由如下三部分组成：

(1) A中的每个常量符号,指定D中的一个元素；

(2) A中的每个n元函数符号,指定D^n到D的一个具体的函数；

(3) A中的每个n元谓词符号,指定D^n到{0,1}的一个具体的谓词。

注：定义中所谓指定一个具体函数，即是对每组可能的变量值给出函数的对应值；所谓指定一个具体的谓词，就是对每组可能的客体变元取值给出谓词的对应值，1表示逻辑真，0表示逻辑假。

2.2 谓词公式及其赋值

例9 公式 $A = (\forall x)P(x, f(x)) \wedge G(a)$

给定赋值I：论域D={1，2}；

P(x，y)：x=y；　G(x)：x=1；

f(1)=2,　f(2)=1;

a=1。

求公式的真值？

解：$A = P(1, f(1)) \wedge P(2, f(2)) \wedge G(a)$

$= P(1,2) \wedge P(2,1) \wedge G(1)$

$= 0 \wedge 0 \wedge 1$

$= 0$

2.2 谓词公式及其赋值

例10 设公式：$(\exists x)(\forall y)(P(x,y)\rightarrow Q(x,y))$。

在如下给定的解释下，判断该公式的真值。

解释I为：

①. 个体域为整数Z；

②. $P(x,y)$指定为：“$x+y=0$”；

③. $Q(x,y)$指定为：“$x>y$”。

在此解释下，原公式变成下述命题：

“存在一个整数x，使对所有的整数y，如果有x+y=0，则x＞y。”

$$(\exists x)(\forall y)(P(x,y)\rightarrow Q(x,y))$$

公式的真值为“真”。

2.2 谓词公式及其赋值

（3）谓词公式的类型

设A是以D为论域的谓词公式，

- 如果在关于D的任一解释下，A的值都是真时，称A是D上的永真式（重言式）；
- 如果关于D的任一解释下，A的值都是假时，称A是D上的永假式(矛盾式，不可满足公式）；
- 如果在关于D的某一解释下，A取值为真，称A是D上可满足公式。

作业

- ✓ 习题二

  3、4、6、7

主要内容

- 2.1 谓词和量词
- 2.2 谓词公式及其赋值
- 2.3 谓词公式的等价与范式
- 2.4 谓词公式的蕴涵
- 2.5 谓词逻辑的推理方法

2.3 谓词公式的等价与范式

1. 谓词公式的等价

定义 设A和B是论域D上的谓词公式，如果任一解释下，A和B都取相同的真值，则称A和B在论域D上等价，记为$A \overset{D}{\Leftrightarrow} B$, 简记为$A \Leftrightarrow B$。

设A和B是论域D上的谓词公式，则 A⇔B当且仅当A↔B是D上的永真式。

2.3 谓词公式的等价与范式

2.谓词演算的基本等价式

(1) 命题演算的基本等价式也是谓词演算的基本等价式。

（利用永真式代入规则）

例如： $P \to Q \Leftrightarrow \sim P \vee Q$ 蕴含律

$A(x) \to B(x) \Leftrightarrow \sim A(x) \vee B(x)$

$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ 分配律

$A(x) \vee (B(x) \wedge C(x)) \Leftrightarrow (A(x) \vee B(x)) \wedge (A(x) \vee C(x))$

2.3 谓词公式的等价与范式

(2) 量词的否定（量词的德摩根定律）

① $\sim(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)[\sim P(x)]$

例如：不是所有的人到学校上课⇔有人没有到学校上课

② $\sim(\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)[\sim P(x)]$

例如：没有人到学校上课⇔所有的人没有到学校上课

- 否定深入可以推广到含多个量词的谓词公式。

$$
\begin{aligned}
&\sim(\exists x)(\forall y)(\forall z)P(x,y,z) \\
\Leftrightarrow\ &(\forall x)\sim(\forall y)(\forall z)P(x,y,z) \\
\Leftrightarrow\ &(\forall x)(\exists y)\sim(\forall z)P(x,y,z) \\
\Leftrightarrow\ &(\forall x)(\exists y)(\exists z)\sim P(x,y,z)
\end{aligned}
$$

2.3 谓词公式的等价与范式

(3) 量词辖域的收缩与扩张

设Q是不含指导变元x的谓词公式（包括命题）

① $(\forall x)[P(x)\vee Q] \Leftrightarrow (\forall x)P(x)\vee Q$

② $(\forall x)[P(x)\wedge Q] \Leftrightarrow (\forall x)P(x)\wedge Q$

③ $(\exists x)[P(x)\vee Q] \Leftrightarrow (\exists x)P(x)\vee Q$

④ $(\exists x)[P(x)\wedge Q] \Leftrightarrow (\exists x)P(x)\wedge Q$

收缩

⑤ $(\forall x)P(x)\rightarrow Q \Leftrightarrow (\exists x)[P(x)\rightarrow Q]$

⑥ $(\exists x)P(x)\rightarrow Q \Leftrightarrow (\forall x)[P(x)\rightarrow Q]$

⑦ $Q\rightarrow(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)[Q\rightarrow P(x)]$

⑧ $Q\rightarrow(\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)[Q\rightarrow P(x)]$

扩充

2.3 谓词公式的等价与范式

(4) 量词的分配形式

① $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$

② $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$

证明： ①式，从定义思考

②式，可由①推出

由于$P(x)$、$Q(x)$为任意公式，可用$\sim P(x)$、$\sim Q(x)$分别取代$P(x)$、$Q(x)$，得

$(\forall x)(\sim P(x) \wedge \sim Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)\sim P(x) \wedge (\forall x)\sim Q(x)$

$\sim(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \sim(\exists x)P(x) \wedge \sim(\exists x)Q(x)$

$\sim(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \sim((\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x))$

否定等价式两边 $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$

2.3 谓词公式的等价与范式

（5）其他等价式

$$(\forall x)(\forall y)(P(x)\vee Q(y))\Leftrightarrow(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(\exists y)(P(x)\wedge Q(y))\Leftrightarrow(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x)\rightarrow Q(x))\Leftrightarrow(\forall x)P(x)\rightarrow(\exists x)Q(x)$$

证明：第一式

$$(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)$$

$$\Leftrightarrow(\forall x)P(x)\vee(\forall y)Q(y)\qquad\text{（换名规则）}$$

$$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)[P(x)\vee Q(y)]$$

2.3 谓词公式的等价与范式

(6) 两个量词的等价式

$(\forall x)(\forall y)A(x, y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)A(x, y)$

$(\exists x)(\exists y)A(x, y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)A(x, y)$

$$(\forall x)(\exists y)A(x,y) \neq (\exists y)(\forall x)A(x,y)$$

例如：所有的人都有一个好朋友 $\neq$ 有一个人是所有人的好朋友

2.3 谓词公式的等价与范式

例11 证明公式成立

$$(\forall x)(\forall y)[P(x)\rightarrow Q(y)]\Leftrightarrow(\exists x)P(x)\rightarrow(\forall y)Q(y)$$

证明： $(\forall x)(\forall y)[P(x)\longrightarrow Q(y)]$

$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)[\sim P(x)\vee Q(y)]$ 蕴含律

$\Leftrightarrow(\forall x)[\sim P(x)]\vee(\forall y)Q(y)$ 辖域收缩

$\Leftrightarrow\sim(\exists x)P(x)\vee(\forall y)Q(y)$ 量词的否定

$\Leftrightarrow(\exists x)P(x)\rightarrow(\forall y)Q(y)$ 蕴含律

2.3 谓词公式的等价与范式

3. 谓词公式的范式

与命题演算类似, 谓词演算也有范式(规范的公式)。

(1) 前束范式

定义 设谓词公式 $A=(Q_1x_1)(Q_2x_2)\ldots(Q_nx_n)G$，其中$Q_ix_i$或是$\forall x_i$或是$\exists x_i$ $(1\le i\le n)$，G是不含有量词的公式，则称A是前束范式，称G是A的母式。

例如：

$$(\forall x)(\forall y)P(x,y,z)$$

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)[P(x)\wedge Q(y)\to R(x,z)]$$

$$(\forall x)(\forall y)P(x,y,z)\vee Q(x)\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)[P(x,y,z)\vee Q(t)]$$

✓**所有量词均非否定地出现在公式的最前面，且它的辖域一直延伸到公式之末。**

2.3 谓词公式的等价与范式

- 前束合取(析取)范式

定义 如果在前束范式 $(Q_1x_1)(Q_2x_2)\ldots(Q_nx_n)G$ 中，母式G是合取(析取)范式时，称这个前束范式为前束合取(析取)范式。

定理（前束范式存在定理） 每个含量词的谓词公式都有与之等价的前束范式。

2.3 谓词公式的等价与范式

- 谓词公式转化为前束范式步骤：

① 将联结词→，↔等价转化为¬，∧，∨；

② 利用量词否定等价式，摩根定律将否定词深入到谓词变元前；

③ 利用约束变元的换名规则或自由变元的代入规则,使所有约束变元之间,自由变元与约束变元之间均不同名。

④ 利用量词辖域扩张与收缩将量词扩充到整个公式；(得到前束范式)

⑤ 将母式等价变换成合取(析取)范式。(得到前束合取/析取范式)

2.3 谓词公式的等价与范式

例12　将公式$(\forall xP(x)\vee\exists yR(y))\to\forall xF(x)$ 化规为前束范式。

解：$(\forall xP(x)\vee\exists yR(y))\to\forall xF(x)$

$\Leftrightarrow\ \sim(\forall xP(x)\vee\exists yR(y))\vee\forall xF(x)$　　蕴含律

$\Leftrightarrow\ (\exists x\sim P(x)\wedge\forall y\sim R(y))\vee\forall xF(x)$　　量词否定定理

$\Leftrightarrow\ (\exists x\sim P(x)\wedge\forall y\sim R(y))\vee\forall zF(z)$　　换名规则

$\Leftrightarrow\ \exists x\forall y\forall z((\sim P(x)\wedge\sim R(y))\vee F(z))$　　辖域扩张

（前束析取范式）

$\Leftrightarrow\ \exists x\forall y\forall z((\sim P(x)\vee F(z))\wedge(\sim R(y)\vee F(z)))$　（前束合取范式）

2.3 谓词公式的等价与范式

(2)斯柯林(Skolem)范式----不含存在量词的前束合取范式

定义 设谓词公式A的等价前束合取范式是

$$(Q_1x_1)\ (Q_2x_2)\cdots(Q_nx_n)\ G,$$

1）从左到右扫描量词，设Q_i是第一个遇到的存在量词，

① 如i=1，则选择一个在G中未使用过的常量标识符代替G中的全部x_1，然后删去(Q_1x_1)；

② 如果i>1，则Q_1，Q_2，…Q_{i-1}都是全称量词，这时选择一个在G中未使用过的函数标识符(如g)，并用$g(x_1, x_2, ..., x_{i-1})$去代替G中的全部$x_i$，然后删去$(Q_ix_i)$；

2）重复这一过程，直到公式中不含存在量词为止。

这样得到的公式称为Skolem范式，而取代存在量词时使用的常量标识符或函数，称为Skolem函数。

例13 求$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w)$的Skolem范式。

解：$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w)$

$(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(a,y,z,u,v,w)$ （消去$\exists x$）

$(\forall y)(\forall z)(\forall v)(\exists w)P(a,y,z,f(y,z),v,w)$ （消去$\exists u$）

$(\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v))$

（消去$\exists w$）

Skolem范式的理解

如 $\forall x\exists yP(x,y)$的Skolem范式是$\forall xP(x,f(x))$

∵ $\forall x\exists yP(x,y)$的意思是对每个x都有一个y使P(x,y)成立,这个y通常是依赖x的,可视为x的某个函数f(x),从而有Skolem范式 $\forall xP(x,f(x))$ 。

然而能找到的y不一定是x的函数f,于是

$\forall x\exists yP(x,y)$与$\forall xP(x,f(x))$并不等值。

例如 $D=\{1,2\}$

$\forall x\exists yP(x,y)\Leftrightarrow(P(1,1)\vee P(1,2))\wedge(P(2,1)\vee P(2,2))$

与$\forall xP(x,f(x))\Leftrightarrow P(1,f(1))\wedge P(2,f(2))$

两者明显不等值,但在不可满足的意义下是一致的。

2.3 谓词公式的等价与范式

Skolem范式是一种重要的范式形式，机器定理证明和逻辑程序设计中的消解(或称归结)原理就建立在这种范式的基础上。

下面的定理说明了Skolem范式的重要性：

定理 设谓词公式A的Skolem范式为S,则A为矛盾式当且仅当S为矛盾式。

注意：只有当A是矛盾式时，S才与它同为矛盾式。一般情况下，A与S并不一定等价。

作业

- ✓ 习题二

  9

  11（2）