DMS Chapter 10 图的基本概念

第10章　图的基本概念

DMS Chapter 10 图的基本概念

主要内容

DMS Chapter 10 图的基本概念

自学简单无向图，图的阶，邻接点，邻接边，多重无向图，伪无向图，基图等概念

1. 已知：简单无向图 G=<V,E>，其中

   V = {u1,u2,u3,u4,u5,u6}，E = {u1u2,u1u3,u2u3,u5u6 }

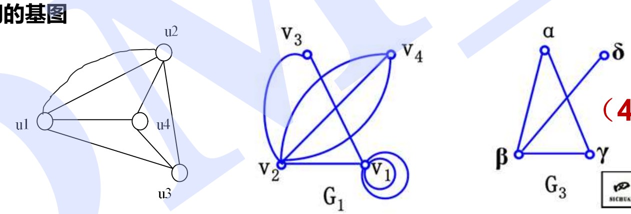
   求：1）画出图G　　（6,4）图

   2）G的阶n，边数m；

   3）u2的邻接点有（　　），u1u3的邻接边有（　　）

2. 边数为m的n阶无向简单图，m和n之间有什么关系?

3. 下列各图是否为简单无向图，若不是，说明他们是什么图，并画出它们的基图



G1　　G3

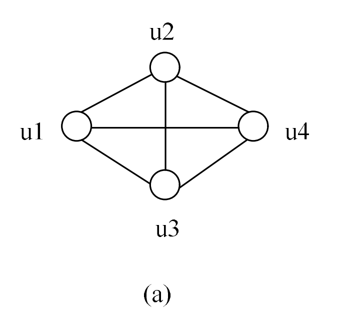
（4,4）图

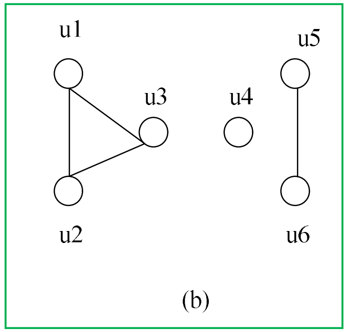
DMS Chapter 10 图的基本概念

图的定义

- **定义10.1：** 一个**无向简单图**G是一个二元组 <V(G), E(G)>，也可记为G = <V, E>，其中
  - V（G）称为G的**结点集**，是一个有限的**非空**集合，其元素称为**结点**或**顶点**；
  - E（G）称为G的**边集**，是一个以**不同结点**u和v构成的**无序**对(记为uv或vu)为元素，且**不含重复元素**的有限集合，其元素称为**边**。
- 图G的结点个数称为G的**阶**，用 |V| 或 n 表示，
- 图G的边个数用|E|， m或 ε(G)表示 。
- 边数为m的n阶图 常简称为 (n, m) 图

图的定义





G1=<V1,E1>　(4,6) 图

V1={u1,u2,u3,u4}

E1={u1u2,u1u3,u1u4,u2u3,u2u4, u3u4}

n=|V1|=4, m= ε(G1)=6

G2=<V2,E2>　(6,4) 图

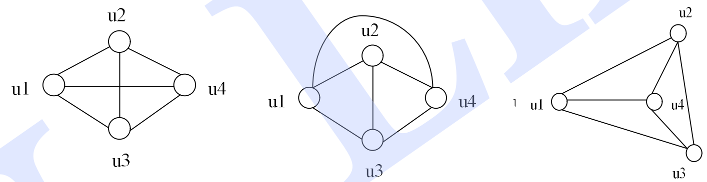
V2 = {u1,u2,u3,u4,u5,u6}

E2 = {u1u2,u1u3,u2u3,u5u6 }

n = 6, m =4

图的定义

在图的图形法表示中，表示结点的圆点和表示边的线，他们的相对位置，长短形状是没有实际意义的。对于同一个图，可以有很多形式.



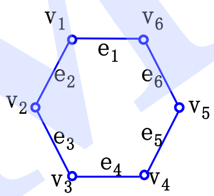
G=<V,E>　V={u1,u2,u3,u4}

E={u1u2,u1u3,u1u4,u2u3,u2u4,u3u4}

n=4, m = 6

几个概念

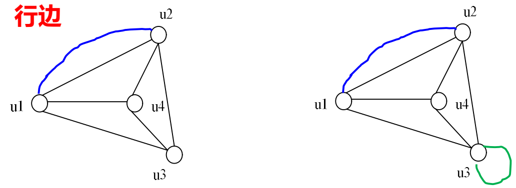
- **邻接点：若e=uv 是图G的一条边，则称边e分别与结点u和v相关联，称u，v为边e的两个端点；并称u和v是相互邻接的，即互为邻接点。**
- **邻接边：若图G中的两条边e1和e2都与同一个结点相关联，则称e1和e2是相互邻接的，即互为邻接边。**



无向简单图

图的扩充形式

- **无向多重图：在定义10.1中若去掉边集E中“不含重复元素”这个限制，则得到(无向)多重图的定义。**
  - ✓ **无向多重图中，允许两条以上的边与同一对结点相关联--平行边**



- **无向广义图/伪图：在多重图基础上，若进一步去掉对边的“不同结点”的限制，则得到(无向)广义图/伪图的定义**
  - **无向广义图中，允许形如环的边, 如uu，存在。**

转化多重图和广义图为简单图

对无向多重图和无向广义图

1）将图中的所有平行边 用一条边代替

2）去掉环，

可得到一个无向简单图，

称这个无向简单图为原来无向多重图或无向广义图的基图。

有向图

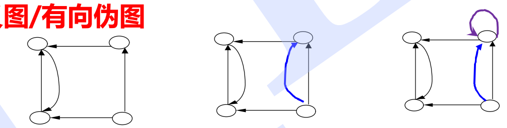
简单无向图，m≤ n*(n-1)/2

➢ 在定义10.1 中若将边集E定义中的“无序对”改为“有序对”，则得到 简单有向图 的定义。

m ≤ n*(n-1)

➢ 有向图的边e用形如 e = (u，v) 的有序对表示，指e是由u指向v的有向线段，并称u是边e的始点。v是边e的终点，统称为e的端点；e是u的出边，是v的入边。

➢ 类似与前面无向图的扩充，可以定义多重有向图，有向广义图/有向伪图



➢ 有向图的基图：去掉边的方向后得到的无向图（可以含平行边和环）

结点的度

➢无向图G中,

➢结点u的度（简称点度）$d_G(u)$：与u关联的边的条数, 每个环在计算度时算作两条边。简写为 d(u);

➢最大点度和最小点度分别记为Δ_G和δ_G, 简写为 Δ 和 δ.

有向图G中,

➢结点u的出度$d_G^+(u)$：以u为始点引出的边的条数；简写为$d^+(u)$

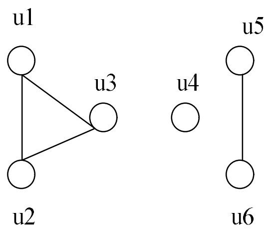
➢结点u的入度$d_G^-(u)$：以u为终点引入的边的条数；简写为$d^-(u)$

➢结点u的度$d_G(u)$： u的出度和入度之和，简写为d(u)

➢最大出度，最小出度，最大入度，最小入度分别记为Δ^+，δ^+, Δ^-，δ^-.

➢度为奇(偶)数的结点称为奇(偶)度结点;

结点的度



d(u1)＝2

d(u2)＝2

d(u3)＝2

d(u4)＝0

d(u5)＝1

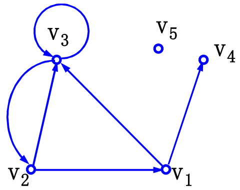
d(u6)＝1

Δ =2

δ =0

结点的度

例10.4



$\Delta^+=2$，$\delta^+=0$
$\Delta^-=3$，$\delta^-=0$
$\Delta=5$，$\delta=0$

$d(v1)=3$，$d^+(v1)=2$，$d^-(v1)=1$；
$d(v_2)=3$，$d^+(v_2)=2$，$d^-(v_2)=1$；
$d(v_3)=5$，$d^+(v_3)=2$，$d^-(v_3)=3$；
$d(v_4)=1$，$d^+(v_4)=0$，$d^-(v_4)=1$；
$d(v_5)=0$，$d^+(v_5)=0$，$d^-(v_5)=0$；

握手(欧拉)定理（Euler,1736年）

- 对于任何(n,m)无向图G＝<V，E>，有

$$\sum_{u\in V} d(u) = 2m;$$

- 对于任何 (n,m) 有向图 G＝<V，E>，有

$$\sum_{u\in V} d^+(u) = \sum_{u\in V} d^-(u) = m;$$

$$\sum_{u\in V} d(u) = \sum_{u\in V} d^+(u) + \sum_{u\in V} d^-(u) = 2m;$$

- 在任何图中，奇度结点个数必为偶数

握手(欧拉)定理

例：证明：在(n,m) 图中，$\delta \le 2m/n \le \Delta$.

证明：

$$\because\ n\delta \le \sum_{v\in V} d(v) \le n\Delta$$

根据欧拉定理 $2m = \sum_{v\in V} d(v)$

$$\Rightarrow n\delta \le 2m \le n\Delta$$

$$\Rightarrow \delta \le \frac{2m}{n} \le \Delta$$

握手(欧拉)定理

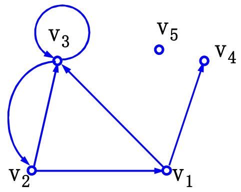
例：无向图G有21条边，12个3度顶点，其余顶点的度数均为2，求G的阶数n .

例：设G是一个(n,n+1)的无向图，证明：G中存在顶点u，d(u) ≥3

用反证法

度序列

定义：设V = {$v_1, v_2,…,v_n$}为图G的结点集，称 ($d(v_1), d(v_2), …,d(v_n)$)为 G的 度序列。



度序列为（3,3,5,1,0）。

17

度序列的特点及图化

依据欧拉定理可确定一个序列是否为图的度序列，

- **如果一个序列为图的度序列，则必须满足欧拉定理**
- **若一个序列为度序列，则可以对它图化，即画出一个对应图**

例：下列序列 可图化吗？若可以，画出一个对应图, 并判断该图是否为简单图。

1) $(5,4,3,2,2,1)$　$\sum_i d_i \bmod 2 = 1$，不能图化；

2) $(5,4,4,3,2)$　$\sum_i d_i \bmod 2 = 0$，能图化；

3) $(3,3,3,1)$　$\sum_i d_i \bmod 2 = 0$，能图化；

18

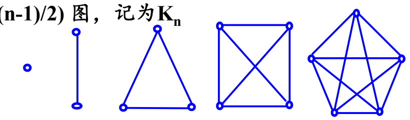
跟点度有关的几个术语

- 孤立结点：度为0的结点；
- 零图：只由孤立结点构成的图；
- 平凡图：只由一个孤立结点构成的图；
- 正则图：所有点的 度 都相等的图；
- *k*度正则图：度为*k* 的正则图。零图是0度正则图

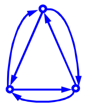
19

完全图

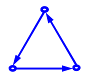
- 无向完全图：任意两个结点均相互邻接的简单无向图
  - ✓ n阶无向完全图是（n, n(n-1)/2) 图，记为K_n
  - ✓ K_n是n-1度正则图



- 有向完全图：任意两个结点u和v之间皆有有向边(u,v) 和 (v,u) 的简单有向图
  - n阶有向完全图的边数为 $P_n^2 = n(n-1)$



- 竞赛图：每对结点u和v之间有且仅有一条有向边<u,v>（或(v,u>）连接的简单有向图



20

完全图

例：设G是一个(n,m)简单图。证明：m≤ C_n^2 ，等号成立当且仅当 G是完全图.

证明：由欧拉定理有

$$2m = \sum_{k=1}^{n} d(k) \quad (1)$$

因为 G是简单图，故 d(k) ≤ n-1, 等号成立当且仅当G是完全图，（1）可化为

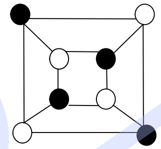
$$2m \le \sum_{k=1}^{n} (n-1) = n(n-1)$$

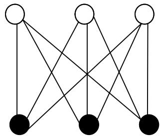
即 $m \le \frac{n(n-1)}{2} = C_n^2$ ，等号成立当且仅当G是完全图

证毕!

二部图

- 设（n,m)图 G=<V,E>，如果它的结点集V 可以划分成两个不相交子集X和Y，使得边集E中每条边的一个关联结点在X中，另一个关联结点在Y中，则这样的图称为二部图。
- 设|X|=n_1，|Y|=n_2。如果X中的每个结点与Y中的全部结点都邻接，则称G为无向完全二部图，并记为$K_{n1,n2}$
  - ✓ 无向完全二部图$K_{n1,n2}$ 边的个数 m= n_1n_2
  - ✓ 无向完全二部图的边集 等于 X×Y





二部图

例：设 G是（n,m）无向简单二部图，证明： $m \le n^2/4$

证：设X，Y为二部图G结点集的两不相交子集，则有

|X|+|Y| = n (1)

根据二部图的定义有

m ≤ |X|*|Y| (2)

结合(1)，(2) 可化为

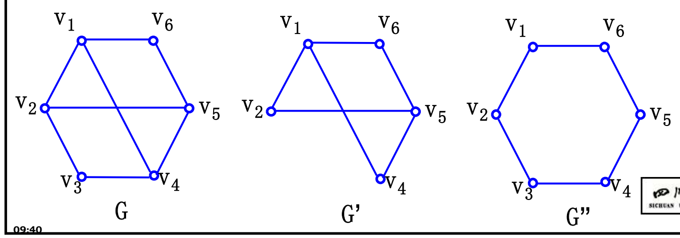
m ≤ (n-|X|)*|X| ≤ $n^2/4$

得证!

子图

定义10-1.4 设有图G=（V ,E）和图 H=（V_1 ,E_1）。

- ✓ 若V_1⊆V，且E_1⊆E，则称H是G的子图，记为H⊆G。
- ✓ 若V_1⊂V或E_1⊂E，则称H是G的真子图，记为H⊂G。
- ✓ 若V_1 = V，称H是G的生成子图。
- ✓ 设V_1=V且 E_1=E或E_1=∅，则称H是G的平凡子图。



构造子图的几种方法

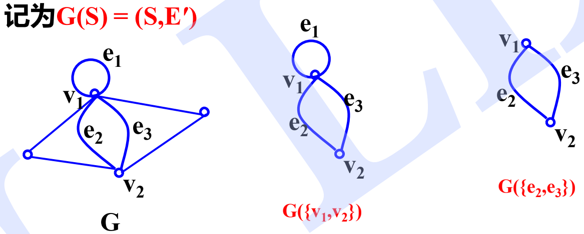
- **删点子图**：若$S=\{v_1,v_2,\ldots v_k\}$是图G的结点集V的子集，则从G中删去**结点**$v_1,v_2,\ldots v_k$以及它们**关联的全部边**后得到图称为G的删点子图，简记为 G - S。

- **删边子图**：若$T=\{e_1,e_2,\ldots e_k\}$是图G的边集E的子集，则从G中删去T中全部边后得到图称为G的删边子图，简记为 G - T。 生成子图

25

构造子图的几种方法

- **点诱导子图**：设图G =（V，E），$S\subseteq V$，则 称以S为结点集，$E'=\{uv|u,v\in S, (u,v)\in E\}$为边集的图为G的**点诱导子图**，记为$G(S) = (S,E')$



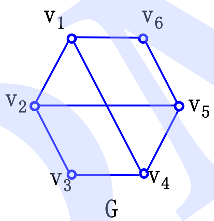
- **边诱导子图**：设图G =（V，E），$T\subseteq E$且$T\neq\varnothing$，则称以T为边集，以T中各边关联的全部结点为结点集的图为G的**边诱导子图**，记为G（T）=(V',T)

26

- **子图的几种构造方法**
  - 删点子图
  - 删边子图
  - 点诱导子图
  - 边诱导子图

已知什么？
共同的已知？ 各自的已知？

要得到什么？
得到的子图有什么区别？



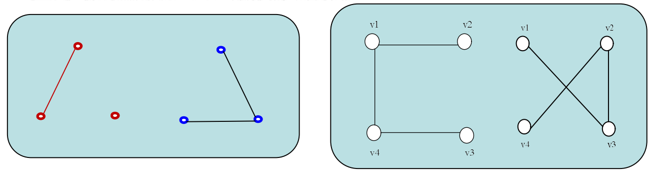
27

补图

设 G = (V , E) 和 G'= (V' , E') 是两个简单图。

若V' = V , $E' = \overline{E} = \{ uv \mid v,u \in V , uv\notin E\}$，则称G'为G的补图, 记为 $\overline{G}$。

注: 全集 为完全图$K_{|V|}$的的边集

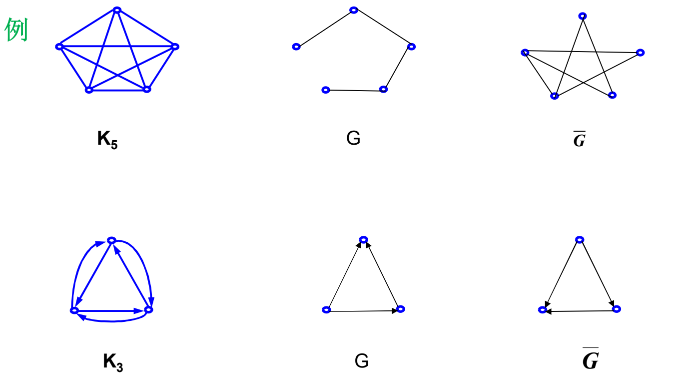


G与 $\overline{G}$ 互为补图，即 $\overline{\overline{G}} = G$

28

补图

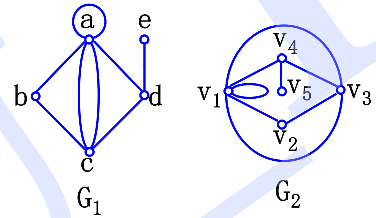
例



图的同构

- **定义10-1.6：设两个图 G=（V,E）和 G′=（V′,E′），如果存在双射函数g：V→V′，使得对于任意边e= v_iv_j ∈E 当且仅当 e′ = g(v_i)g(v_j)∈E′，则称G与G′同构，记为G≌G′。**
- 图的同构关系是图集上的等价关系。

同构是指两个图的边1–1对应



G_1≌G_2：

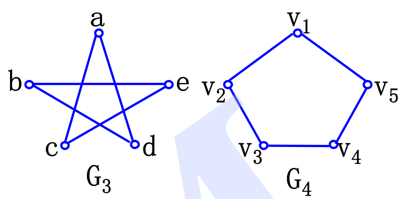
a→v_1，b→v_2，

c→v_3，d→v_4，

e→v_5

图的同构

例



G_3≌G_4：

a→v_1，b→v_4，

c→v_2，d→v_5，

e→v_3；

G_5≌G_6：

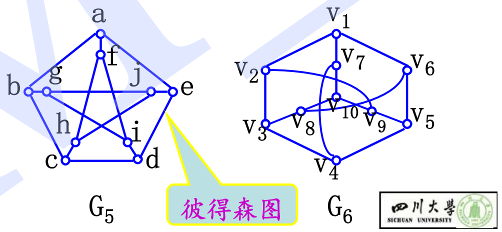
a→v_1，b→v_2，

c→v_3，d→v_4，

e→v_7，f→v_6，

g→v_9，h→v_8，

i→v_5，j→v_{10}

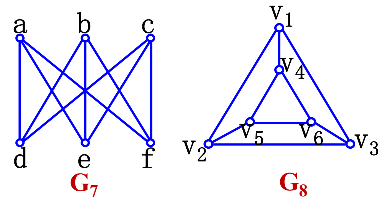


两个图同构的必要条件

① **结点数目相同；**

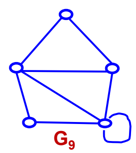
② **边数相同；**

③ **同度的结点数相同**

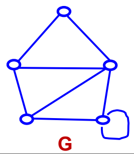


G_7与G_8满足必要条件，但不同构

- ✓ 这三个条件只是必要条件，而非充分条件。
- ✓ 一般说来，判断2个图是否同构很困难，无简单通用方法
- ✓ 但是可用同构的必要条件来排除非同构图，



G_9与G_{20}不满足必要条件3，故不同构



DMS Chapter 10 图的基本概念

图的同构

例：若无向简单图 $G \cong \overline{G}$，则称G是自补图。

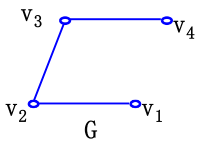
1）确定一个无向简单图图为自补图的最低条件；**m= n(n-1)/4**

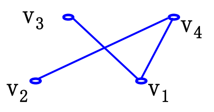
2）画出一个自补图来。

解：设 G=(n,m)，则 $\overline{G}$=(n, m’) = (n, n(n-1)/2-m)

因为 $G \cong \overline{G}$ 所以 m = n(n-1)/2-m => m = n(n-1)/4

自补图的最低条件为：m= n(n-1)/4

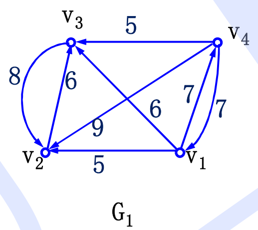


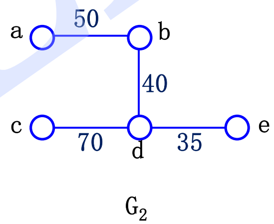


DMS Chapter 10 图的基本概念

带权图

- 定义10.7：给定图 G=(V,E), 对G中任意边e_i, 赋以实数w_i，并将w_i标注在边 e_i 上，则称G为带权图，称实数w_i为边e_i上的权
- 非带权图称为无权图。

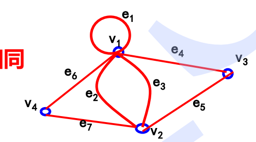




DMS Chapter 10 图的基本概念

10.2 道路与回路

- ✓ 道路及道路的长度 点边点边….边点
- ✓ 零道路，开道路，闭道路。
- ✓ 简单道路与回路：边互不相同。
- ✓ 基本道路与圈：结点（除起终点）互不相同



Ex.

v4e6v1e1v1e2v2e3v1e4v3，

长度为5的开道路

是 简单道路，不是 基本道路

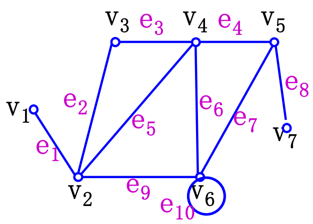
v4e6v1e2v2e7v4

长度为3的闭道路

是 回路，也是 圈

DMS Chapter 10 图的基本概念

10.2 道路与回路



定 义 越 来 越 窄

道路	简单道路	基本道路
闭道路	回路	圈

$v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_4e_4v_5e_7v_6$：

$v_1e_1v_2e_5v_4e_3v_3e_2v_2e_9v_6$：

$v_2e_9v_6e_{10}v_6e_6v_4e_5v_2$：

$v_2e_2v_3e_3v_4e_5v_2$ ：

10.2 道路与回路

在不会引起误解的情况下，在简单图中，道路

$v_0e_1v_1e_2v_2\ldots e_nv_n$

- 可用结点序列 $v_0v_1v_2\ldots v_n$ 来表示，
- 也可用边的序列 $e_1e_2\ldots e_n$ 来表示。

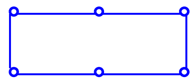
- 定理10.3 在n阶图G中，如果存在从结点u到v的道路，则从u到v的最短道路长度不超过$n-1$。

距离

道路图和圈图

- 若一个图能以一条基本开道路表示出来，则称此图为道路图。n阶道路图记为P_n，P_n一定为(n,n-1)图 Why?
- 若一个图能以一个圈表示出来，则称此图为圈图。n阶的圈图记为C_n，C_n一定为(n,n)图。Why?

P_5



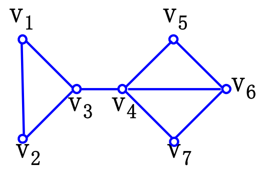
C_6

10. 3 图的连通性

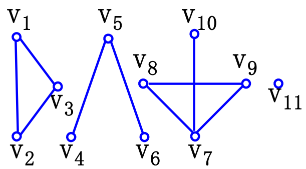
- 定义10.9 若无向图G中的结点u 和v之间存在一条道路，则称u,v在是连通的。对任意结点u，规定u连通u。
- 无向图G=(V,E)中结点之间的连通关系是结点集V上的等价关系。
- 连通关系可决定结点集V上的一个分划 $\{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ （显然，分划块V_i 是一个等价类），使得
  - G中的任意两个结点u和v连通 当且仅当 u和v同属于同一分划块V_i $(1\le i\le k)$。
  - 当 $i\neq j$ 时，V_i 中的结点与V_j中的结点绝不会连通
  - 点诱导子图$G(V_i)$ 是G的极大连通子图，称为G的支(连通分量)
  - 图G的总支数记为$\omega(G)$

连通图

- 定义10.10: 只含一个支的无向图称为连通图，支数大于1的无向图称为非连通图(或分离图)



连通图，$\omega(G_1)=1$。

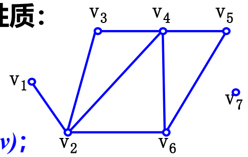


非连通图，$\omega(G_2)=4$。

- 无向完全图K_n $(n\ge1)$ 是连通图，而结点数大于1的零图都是非连通图。

结点间距离

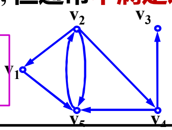
- **定义10.11** 设u，v是无向图G中的两个结点，若u和v是连通的，u和v之间长度最短的道路的长度称为u和v之间的距离，记为$d(u,v)$。若u和v不连通，规定$d(u,v)=\infty$
- 距离 $d(u,v)$ 满足下列性质：
  - ✓ $d(u,v) \geq 0$；
  - ✓ $d(u,v) = d(v,u)$；
  - ✓ $d(u,w)+d(w,v) \geq d(u,v)$；



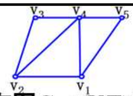
$d(v1,v5) = ?$
$d(v4,v7) = ?$

- 结点间距离$d(u,v)$也可推广到有向图，但通常不满足对称性，即 $d(u,v) \neq d(v,u)$

$d(v1,v3) = ?$
$d(v3,v1) = ?$



43



点割集&割点

定义10.11： 设无向图G = (V,E)是连通图，即$\omega(G)=1$。

- 若存在结点子集$V' \subset V$，使得 $\omega(G-V') > 1$，则称 V' 为G的一个点割集；

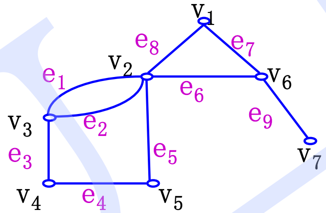
意味着删点子图G - V' 为分离图。

- 进一步的，若点割集V'是极小点割集，则称V'为G的一个基本点割集。

若删除V'中任何结点，则无法用它将G分离为多支。

- 若点割集中只有一个结点u，则称 u 为G的割点。

删除割点可将G分离为多支



点割集：$\{v_2\}$、$\{v_6\}$、$\{v_3,v_5\}$、$\{v_2,v_4\}$、$\{v_2,v_3,v_5\}$ …；

基本割集：$\{v_3,v_5\}$、$\{v_2\}$、$\{v_6\}$。

割点：v_2、v_6

44

点割集&割点

- 完全图Kn没有点割集，它的连通性是最好的

给出了一个找割点的方法

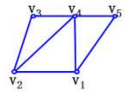
- **定理10.4：** 在非平凡连通图G中，结点v为G的割点的充要条件是存在结点u和w，使u到w的每一条道路都包含结点v。

证明：

设 v 是非平凡连通图G的一个割点，由定义知 ω（G-{v}）>1。设G1 =（V1，E1）和 G2=（V2，E2）是G-{v}中的任意两支。任取u ∈ V1，w ∈ V2，因为，u和w在G中连通的，但是在G-{v}中不是连通的，因此在G中所有的（u,w）道路都必须经过v。

反过来，若G中存在结点u和w，使所有（u,w）道路都包含v结点，则u和w在G-{v}中必然不再连通。因此，v是G的一个割点

45



边割集&割边

定义10.12： 设无向图G = (V,E)是连通图，即$\omega(G)=1$。

- 若存在 $E' \subset E$，使得 $\omega(G-E') > 1$，则称E'为G的一个边割集；

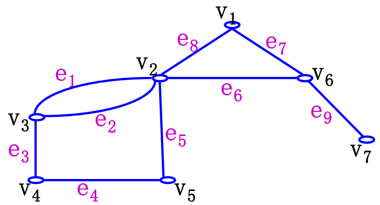
意味着从G中删掉E'中的所有边，可将G分离为多支。

- 进一步的，若边割集E'是极小边割集，则称E'为G的一个基本边割集。

若删除E'中任何边，则无法用它将G分离为多支。

- 若边割集只有一个元素e，则称e为G的割边

删除割边可将G分离为多支



边割集：$\{e_9\}$, $\{e_3,e_4\}$, $\{e_4,e_5\}$, $\{e_6,e_7\}$, $\{e_6,e_8\}$, $\{e_8,e_7\}$, $\{e_1,e_2,e_5\}$, $\{e_1,e_2,e_4\}$, $\{e_1,e_2,e_5,e_6,e_8\}$, … ；

基本边割集：$\{e_9\}$, $\{e_3,e_4\}$、$\{e_4,e_5\}$、$\{e_6,e_7\}$, $\{e_6,e_8\}$, $\{e_8,e_7\}$, $\{e_1,e_2,e_3\}$, $\{e_1,e_2,e_4\}$, …

割边：e_9

46

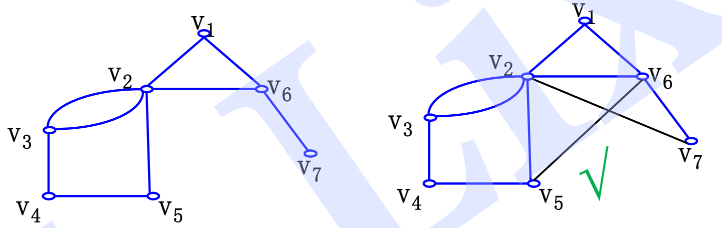
边割集&割边

➢ **定理10.5** 在非平凡连通图G中，边e为G的割边的充要条件是 e 不包含于G的任何圈中。

➢ **非连通图不具有连通性，此时点割集与边割集定义无效。**

47

连通度



哪一个看上连通性更好些？

48

图的点连通度

定义10.13：设G = <V,E> 为无向 连通图，

针对Kn

图G的点连通度 κ(G)指的是 使图G产生非连通子图，或单结点子图所需删掉的最少结点数。

将G分离为多支

- ✓ κ(G) = min{|V′|} ， V′为G的基本点割集
- ✓ $\kappa(K_n)$ = n-1
- ✓ 非连通图的点连通度为0
- ✓ 单节点图的点连通度为0
- ✓ 若κ(G) ≥ k，则称G为 k-连通图。
- ✓ 非平凡连通图都 是 1-连通的

显然，点连通度越大，图的连通性越好

49

图的边连通度

定义10.14：设G = <V,E> 为无向 连通图

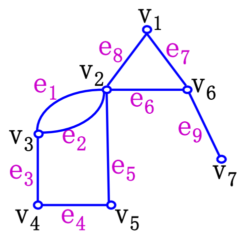
图G的边连通度λ(G) 指的是将G分离为多支所需删掉的最少边数。

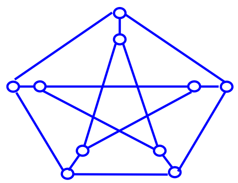
- ✓ λ(G) = min{|E′|}， E′为G的基本边割集
- ✓ $\lambda(K_n)$ = n-1；
- ✓ 非连通图和单结点图的边连通度为0。
- ✓ 若λ (G) ≥ k，则称G为 k边-连通图。
- ✓ 非平凡连通图都是1-边连通的

显然，边连通度越大，图的连通性越好

50

图的连通度





彼得森图

① 点连通度为1，它是1-连通图，
② 边连通度为1，它是1-边连通图

① 点连通度为3，它既是1-连通图、又是2-连通图、3-连通图；
② 边连通度为3，它既是1边-连通图、又是2边-连通图、3边-连通图

图的连通度

定理10:6：对任意无向图G = <V,E>，均有下面不等式成立：

$$\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$$

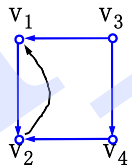
其中，κ(G)：G的点连通度
λ(G)：G的边连通度
δ(G)：结点的最小点度

推论：对任意无向图 G = <V,E>，若G是k-连通图，则G必为k边-连通图, 反之则不然。

有向图结点的可达关系

定义10.15：设u,v为有向图G = <V,E>中的两个结点，若存在从结点u到结点v的道路，则称从结点u到结点v是可达的，记为u→v。对任意结点u，规定 u→u。

- ✓ 有向图结点之间的可达关系具有自反性和传递性，
- ✓ 可达关系没有对称性。
- ✓ 可达关系不是等价关系。



思考： 可达关系是偏序关系吗？

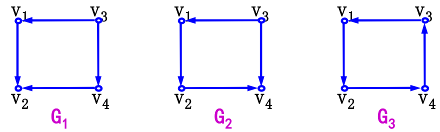
有向图的连通性

定义10.16：设G = <V,E> 是简单有向图，

① 若G的基图是连通的，则称G是弱连通图。

② 若G中任何一对结点之间至少有一个结点到另一个结点是可达的，则称G是单向连通图；。

③ 若G中任何一对结点之间都是相互可达的，则称G是强连通图



定理10.7：一个有向图G是强连通图当且仅当G中有一条包含所有结点的有向闭道路。

弱分图、单向分图、强分图

定义10-17： 设G‘是简单有向图G = <V,E>的子图，

若 1） G’是极大强连通的，则称G‘ 为 G的强分图

2） G’是极大单向连通的，则称G‘ 为 G的单向分图

3） G’是极大弱连通的，则称G‘ 为 G的弱分图

G的基图的支

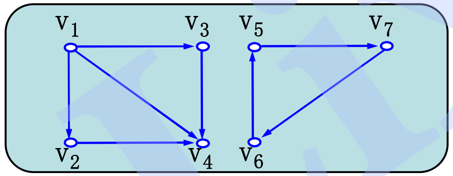
若G'中再增多任何点（或边），则G '不再是强连通的（单向连通的、弱连通的）

定理10.8： 在简单有向图G = <V，E>中，每个结点位于且仅位于一个强(弱)分图中。

任何有向图G都由1个及以上弱（强）连通图组成

55

弱分图、单向分图、强分图



- 强分图：由$\{v_1\}$，$\{v_2\}$，$\{v_3\}$，$\{v_4\}$和$\{v_5,v_6,v_7\}$诱导出的子图；
- 单向分图：由 $\{v_1,v_2,v_4\}$，$\{v_1,v_3,v_4\}$和$\{v_5,v_6,v_7\}$诱导出的子图；
- 弱分图：由$\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$和$\{v_5,v_6,v_7\}$诱导出的子图。

在简单有向图G = <V，E>中，每个结点位于且仅位于一个强(弱)分图中

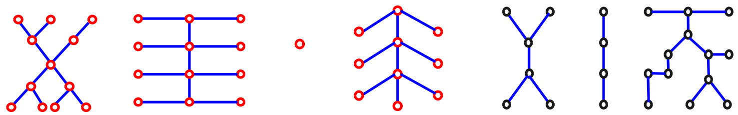
56

树的定义

- **定义** 连通但不含圈的无向图称为无向树，简称树。
  - ✓ 树中度为1的结点称为树叶；
  - ✓ 度大于1的结点称为枝点或内点。
  - ✓ 平凡图K_1是树，既无叶子也无内点
  - ✓ 常用大写字母 T 表示树。
- 若不含圈的无向图G至少有两个连通分支，则称G为林。
  - ✓ 林的每个连通分支都是树。

57

树的定义



(a) (b) (c) (d) (e)

- ✓ (a)、(b)、(c)、(d) 是树
- ✓ (e) 是林，包括3棵树
- ✓ (c)是平凡图，称之为平凡树，其结点的度为 0。

而在任何非平凡树中，没有 度为0的结点

58

树的性质

定理：设T是**非平凡树**（n,m）（其中：m是T的边数，n是T的结点数）。则树T具有以下**等价性质**：

① T连通且无圈；

② T中每对结点之间**有且仅有**一条道路($n \geq 2$)

③ T无圈且$m = n-1$；

④ T连通且$m = n-1$；

割边，边连通度为1

⑤ T连通，但删除任意一条边后，便不再连通；

⑥ T无圈，但在T中任何二结点之间增加一条新边后**有且仅有**一个圈；

树的性质

推论1 任意非平凡树 T (n，m) **至少有两片树叶。**

证： 设T中有 k 片树叶，根据握手原理有

$2m = deg(v_1)+deg(v_2)+deg(v_3)+\ldots\ldots+deg(v_n)$

又因为除树叶外，其余节点的度大于等于2

故有： $2m \geq k + 2(n-k)$

又由于 $m = n-1$，代入上式化简有： $k \geq 2$

证毕■

推论2 阶大于2的树 T 必有内点。 用反证法

推论3 阶大于2的树 T 必有割点。

证：由 推论2可知T至少有一个内点u，T-{u} 后T不再连通，故u是割点 。**树的任何内点都是割点**