主要内容

- 2.1 谓词和量词
- 2.2 谓词公式及其赋值
- 2.3 谓词公式的等价与范式
- 2.4 谓词公式的蕴涵
- 2.5 谓词逻辑的推理方法

2.4 谓词公式的蕴涵

1. 定义

设A和B是以D为论域的谓词公式，如果在任一解释下，当公式A取值真时，公式B也取值真，则称A(永真)蕴涵B，记为A⇒B。

A⇒B当且仅当A→B是永真式。

2.4 谓词公式的蕴涵

2. 谓词蕴涵式

(1) 对已有的命题基本蕴涵式，利用永真式代入规则，形成谓词基本蕴涵式。

例如： $P \wedge (P \longrightarrow Q) \Rightarrow Q$ 假言推理

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \wedge (A(x) \longrightarrow B(x)) \Rightarrow B(x)$$

2.4 谓词公式的蕴涵

（2）全称指定规则（Universal Specification） US规则

$$(\forall x)G(x) \Rightarrow G(y)$$ 自由变元

$$(\forall x)G(x) \Rightarrow G(c)$$ 任意常量

证明： 在某解释下(∀x)G(x)取值1时，则对任何个体y∈D，G(y)在这个解释下也取值1。根据定义，(∀x)G(x)⇒G(y)。

同理，因为常量c∈D，G(c)在这个解释下也取值1。因此(∀x)G(x)⇒G(c)。

（3）存在指定规则（Existential Specification） ES规则

$$(\exists x)G(x) \Rightarrow G(c)$$ 特定常量

2.4 谓词公式的蕴涵

(4) 全称推广规则（Universal Generalization） UG规则

$$G(y) \Rightarrow (\forall x)G(x)$$

(5) 存在推广规则（ Existential Generalization） EG规则

$$G(c) \Rightarrow (\exists x)G(x)$$

$$G(y) \Rightarrow (\exists x)G(x)$$

2.4 谓词公式的蕴涵

(6) 设P(x)和Q(x)是论域D上的谓词公式，下述蕴涵式成立。

（量词的分配形式）

√① $(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)\Rightarrow(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$

√② $(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$

③ $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))\Rightarrow(\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x)$

√④ $(\exists x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x)\Rightarrow(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$

⑤ $(\forall x)(P(x)\leftrightarrow Q(x))\Rightarrow(\forall x)P(x)\leftrightarrow(\forall x)Q(x)$

2.4 谓词公式的蕴涵

举例说明：

① $(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)\Rightarrow(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$。

设个体域D：某班的学生。

$P(x)$：x是高才生；

$Q(x)$：x是运动健将。

则$(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)$表示：“该班的所有学生是高才生或该班的所有学生是运动健将”；

$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$表示：“该班的所有学生是高才生或是运动健将”。

显然，前者可推出后者，但反之则不然。

2.4 谓词公式的蕴涵

② $(\exists x)(G(x)\wedge H(x)) \Rightarrow (\exists x)G(x)\wedge(\exists x)H(x)$

设个体域D：某班的学生。

P(x)：x是高才生；

Q(x)：x是运动健将。

则$(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$表示："该班的一些学生既是高才生又是运动健将"；

$(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$表示："该班的一些学生是高才生且该班的一些学生是运动健将"。

显然，前者可推出后者，但反之则不然。

2.4 谓词公式的蕴涵

④ $(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

证明1:

$$(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \sim(\exists x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)\sim P(x) \vee (\forall x)Q(x)$$

$$\Rightarrow (\forall x)(\sim P(x) \vee Q(x))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

2.4 谓词公式的蕴涵

④ $(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

证明2：（按定义证明）

设 $(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$ 在某个解释下面取值为1，分二种情况：

1） $(\exists x)P(x)=1$ 必有 $(\forall x)Q(x)=1$，即对 $\forall x \in D$，$Q(x)=1$。所以对 $\forall x \in D$， 无论 $P(x)=1$（$=0$）， 都有 $P(x) \rightarrow Q(x)$ 的值为1，

即 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$ 在此解释下面取值为1；

2） $(\exists x)P(x)=0$，即对 $\forall x \in D$， $P(x)=0$。所以对 $\forall x \in D$， 无论 $Q(x)=1$（或$=0$）， 都有 $P(x) \rightarrow Q(x)$ 的值为1，即 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$ 在此解释下面取值为1；

2.4 谓词公式的蕴涵

(7) 设P(x,y)是论域D上的谓词公式，则有双量词间的逻辑关系如下：

① $(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)P(x,y)$

② $(\forall y)(\forall x)P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x,y)$

③ $(\exists y)(\forall x)P(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x,y)$

④ $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

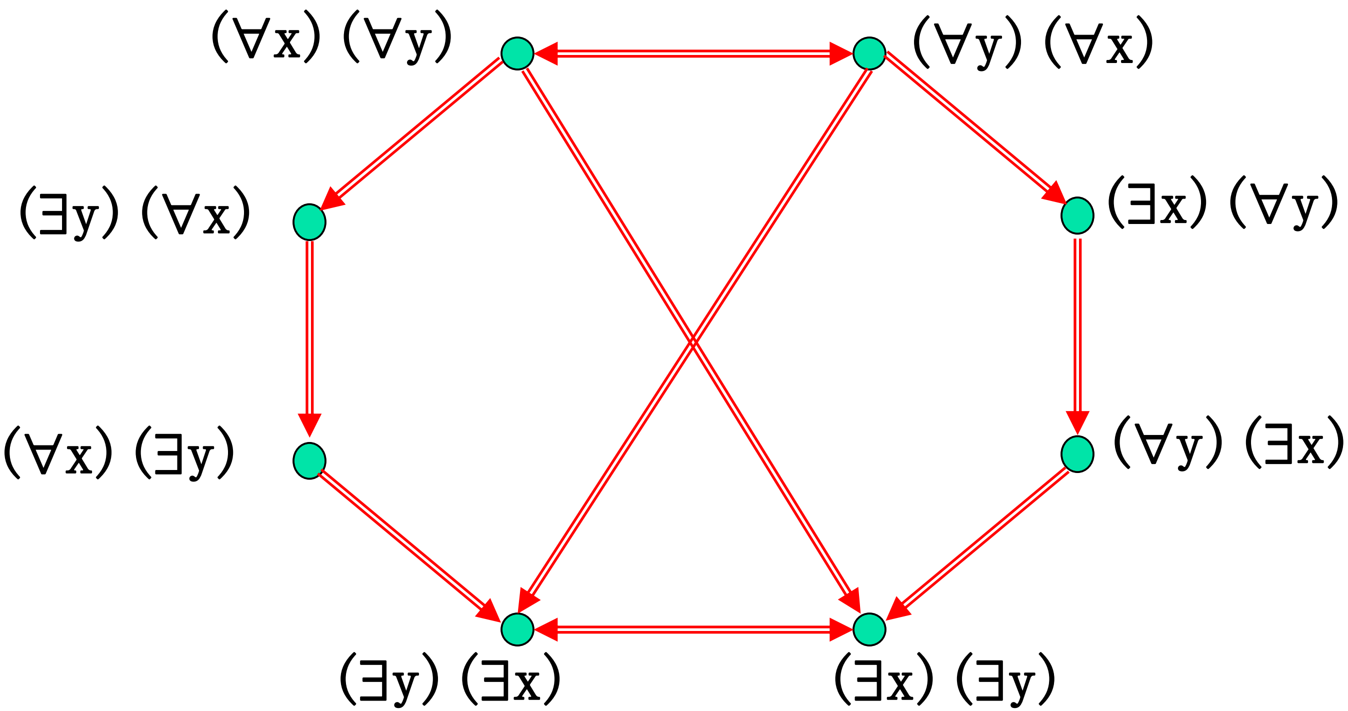
⑤ $(\forall x)(\exists y)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$

⑥ $(\forall y)(\exists x)P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)P(x,y)$

⑦ $(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)P(x,y)$

⑧ $(\forall y)(\forall x)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$

上述结论的量词关系可用如下图表示：



2.4 谓词公式的蕴涵

例14　证明下面蕴涵关系成立

$$(\exists x)[P(x) \to \neg Q(x)] \wedge (\forall x)P(x) \Rightarrow \neg(\forall x)Q(x)$$

- 证明：　$(\exists x)[P(x) \to \neg Q(x)] \wedge (\forall x)P(x)$

$\Leftrightarrow (\exists x)[\neg P(x) \vee \neg Q(x)] \wedge (\forall x)P(x)$　　蕴涵律

$\Leftrightarrow ((\exists x)[\neg P(x)] \vee (\exists x)[\neg Q(x)]) \wedge (\forall x)P(x)$　　量词分配律

$\Leftrightarrow (\neg(\forall x)P(x) \vee \neg(\forall x)Q(x)) \wedge (\forall x)P(x)$　　量词否定

$\Leftrightarrow \neg(\forall x)Q(x) \wedge (\forall x)P(x)$　　分配律、矛盾律

$\Rightarrow \neg(\forall x)Q(x)$　　简化法则

作业

- 习题二

  13 (3)(4)

主要内容

- 2.1 谓词和量词
- 2.2 谓词公式及其赋值
- 2.3 谓词公式的等价与范式
- 2.4 谓词公式的蕴涵
- 2.5 谓词逻辑的推理方法

2.5 谓词逻辑的推理方法

1. 推理规则

(1) P规则：前提引用规则。

(2) T规则：中间结果引用规则。

(3) CP规则：如果要推导形如A⇒B→C的公式，则把B作为**附加前提**，与A一起推导出C。

2.5 谓词逻辑的推理方法

(4) 量词的四条重要的推理规则：

- US(Universal Specification 全称指定规则)：

$$(\forall x)G(x) \Rightarrow G(y) \qquad ①$$

$$(\forall x)G(x) \Rightarrow G(c) \qquad ②$$

- ES(Existential Specification 存在指定规则)：

$$(\exists x)G(x) \Rightarrow G(c) \qquad ③$$

- UG(Universal Generalization 全称推广规则)：

$$G(y) \Rightarrow (\forall x)G(x) \qquad ④$$

- EG(Existential Generalization 存在推广规则)：

$$G(c) \Rightarrow (\exists x)G(x) \qquad ⑤$$

$$G(y) \Rightarrow (\exists x)G(x) \qquad ⑥$$

2.5 谓词逻辑的推理方法

1）US规则的正确使用

$(\forall x)G(x) \Rightarrow G(y)$ ①

$(\forall x)G(x) \Rightarrow G(c)$ ②

①,②成立的条件是：

1) x是G(x)中自由出现的客体变量。

2) 当G(x)中出现量词和变元时，需限制 y 为不在G(x)中约束出现过的客体变元。

3) 在②式中，c为任意的不在G(x)中出现过的客体常量。

2.5 谓词逻辑的推理方法

例15　设实数集中，语句“不存在最大的实数”可符号化为：$(\forall x)(\exists y)G(x,y)$，其中：$G(x,y)$：$y>x$。

下述推导：

(1). $(\forall x)(\exists y)G(x,y)$	P
(2). $(\exists y)G(y,y)$	US, (1)

错误的结论

✓ 正确地推导为：

(1). $(\forall x)(\exists y)G(x,y)$	P
(2). $(\exists y)G(z,y)$	US, (1)

2.5 谓词逻辑的推理方法

2）ES规则的正确使用

$$(\exists x)G(x) \Rightarrow G(c) \qquad ③$$

③成立的条件是：

1) x是G(x)中自由出现的个体变量。
2) 在G(x)中，变元x的每一次自由出现都用相同的个体常量c代入。
3) c是使G(x)为真的特定的个体常量。
4) c为不在G (x)中出现过的个体常量。
5) G(x)中除x以外，若还有其它自由出现的个体变量时，则必须用函数符号来取代。

2.5 谓词逻辑的推理方法

例15（续）在上例中，接着第(2)步进行如下推导：

(1). $(\forall x)(\exists y)G(x,y)$	P
(2). $(\exists y)G(z,y)$	US, (1)
(3). $G(z,f(z))$	ES, (2)

(此时f(z)是随自由变元z的变化而变化)

下述推导则是错误的：

(1). $(\forall x)(\exists y)G(x,y)$	P
(2). $(\exists y)G(z,y)$	US, (1)
(3). $G(z,c)$	ES, (2)

错误的，因为对任意的实数z，c>z不一定成立

2.5 谓词逻辑的推理方法

3）UG规则的正确使用

$$G(y) \Rightarrow (\forall x)G(x) \qquad ④$$

④成立的条件和限制是：

1） y是G(y)中自由出现的个体变量。且y取遍整个个体域时，都有G(y)为真。

2） 取代y的x不能在G(y)中约束出现。

2.5 谓词逻辑的推理方法

接上例，如下推导：

(1). $(\exists y)G(x,y)$ P

(2). $(\forall y)(\exists y)G(y,y)$ （$y>y$） UG, (1)

结论(2)是错误的。

正确的推导为：

(1). $(\exists y)G(x,y)$ P

(2). $(\forall x)(\exists y)G(x,y)$ UG, (1)

设在实数域中，令G(x)：x>0,则下述推导：

(1). $G(x)$ P

(2). $(\forall x)G(x)$ UG, (1)

此时结论(2)是错误的。

2.5 谓词逻辑的推理方法

4）EG规则的正确使用

该规则有两种形式：

$$G(c) \Rightarrow (\exists x)G(x) \qquad ⑤$$

$$G(y) \Rightarrow (\exists x)G(x) \qquad ⑥$$

⑤,⑥成立的条件和限制是：

1） c是使G(c)为真的特定的个体常量。

2） y在G(y)中自由出现，且y取个体域中任何值，G均为真。

3） 取代c的x不能在G(c)中出现过。

4） 取代y的x不在G(y)中约束出现过。

例如：下述推导

(1) $G(x, c)$ P

(2) $(\exists x)G(x, x)$ EG, (1)

结论是错误的（x＞x）

2.5 谓词逻辑的推理方法

例16 G(x, y)：xy＝0，其中：x, y为实数。

则句子：“存在一个y, 使得对任何x, 都有xy＝0”

可符号化为：$(\exists y)(\forall x)G(x,y)$。

下面推导是否正确？

(1)	$(\exists y)(\forall x)G(x,y)$	P
(2)	$(\forall x)G(x,c)$	ES, (1)
(3)	$(\exists x)(\forall x)G(x,x)$	EG, (2)
(4)	$(\forall x)G(x,x)$	T, (3), E

因为从（2）到（3）的推论是错误的

2.5 谓词逻辑的推理方法

2. 推理方法

(1) 直接证明法

(2) **CP**规则推理法

(3) 反证法

2.5 谓词逻辑的推理方法

例17 证明苏格拉底论证有效。

证明：设MAN(x): x是人；MORTAL(x): x是要死的；s: 苏格拉底。

$$(\forall x)[MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)] \wedge MAN(s) \Rightarrow MORTAL(s)$$

采用**直接法**证明其有效性：

① $(\forall x)[MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)]$ P

② $MAN(s) \rightarrow MORTAL(s)$ US ①

③ $MAN(s)$ P

④ $MORTAL(s)$ T ②③ 假言推理

2.5 谓词逻辑的推理方法

例18　证明$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$ 。

证明：采用CP规则演绎法

蕴含式变形：$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \Rightarrow \sim(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$

①	$\sim(\forall x)P(x)$	P（附加前提）
②	$(\exists x)\sim P(x)$	T, ①, E
③	$\sim P(c)$	ES, ②
④	$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$	P
⑤	$P(c) \vee Q(c)$	US, ④
⑥	$Q(c)$	T, ③ ⑤ I
⑦	$(\exists x)Q(x)$	EG, ⑥
⑧	$\sim(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$	CP, ① ⑦

推导过程中，既要使用**US**，又要使用**ES**消去量词，总是先使用**ES**规则，再使用**US**规则消去量词。

作业

- ✓ 习题二

  16(1) (2)

  17