DMS Chapter 15 群和半群

元素的周期

➢若<G，*>是群，则幂运算可扩充到负数， 即可定义

$a^{-k} = (a^k)^{-1}$

➢ 定理15-5 设<G，*>是群，对任意的a∈G，令S = {a^n|n∈Z}，则 称<S，*>为<G，*>的由单元素a生成的子群，记为<(a), *>。

如:

1) <Z,+>的由单元素0生成的子群 <(0),+> = <{0},+>
2) <R-{0}, ×>的由单元素3生成的子群 <(3), ×> = <{…,1/3,1,3,9,…}, ×>
3) <Z,+>的由单元素1生成的子群 <(1),+> = <Z,+>
4) <Z_6，⊕>的单元素[1] 生成的子群 <([1]), ⊕> =<Z_6，⊕>
5) <Z_6，⊕>的单元素[2]生成的子群 <([2]), ⊕> = <{[0],[2],[4]}, ⊕>

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

25

DMS Chapter 15 群和半群

元素的周期

群<G,*>的由单元素a生成的子群<（a），*> 可分为两种情况:

(1) 存在整数 i 和 j (j>i)，使得

$a^i = a^j$

(a) 中元素呈现周期性，$a^{(j-i)}$=e，即有限

(2) 对任意的整数i和j(i≠j)，有

$a^i \neq a^j$

(a) 中元素无周期性,即无限

|G| 有限 or 无限？

|G| 有限 or 无限？

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

26

DMS Chapter 15 群和半群

元素的周期

定义15-4 设<G，*>是一个群，对∀a∈G，若有a^n=e，(其中：n是使得a^n=e成立的最小正整数)，则称n为元素a的周期；若对a∈G，这样的n不存在，则称元素a的周期为∞。

如：在剩余类加群<Z_6，⊕>中，
元素[1]、[5]的周期是6；
元素[2]、[4]的周期是3；
元素[3]的周期是2；
元素[0]的周期是1

又如 在整数加群<Z，+>中，
0的周期为1，
其他元素的周期为∞

有限群<G，*>中元素的周期都是有限数，最大为( )?，
无限群<G，*>中元素的周期可能是有限数，也可能是∞

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

27

DMS Chapter 15 群和半群

元素的周期

定理15-7 设<G，*>是一个群，对∀a∈G，若a的周期为n，则

① $a^m = e$ 当且仅当 n|m；

m是n的倍数

② $a^i = a^j$ 当且仅当 n|(i-j)

③ 由a生成的子群<（a），*> 阶为n，即

（a） = {e，a，a^2，a^3，…，a^{n-1}}

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

28

有限/无限循环群均适合

循环群

- 定义15-5 设<G，*>是一个群，若G中存在元素a，使得由a生成的子群（a）= G，则称<G，*>是循环群；称a为G的一个生成元，G中的所有生成元构成的集合叫做该群的生成集。
- 定义15-6 设<G，*>是一个有限群，若G中存在周期为|G|的元素a，则a是G的生成元，即群<G，*>是循环群，
  - ✓ (a) = {e，a，a^2，a^3，…，a^{n-1}} = G

利用元素周期判断有限群是否为循环群

循环群

例如：

1）整数加群<Z，+>是一个无限循环群，
- ✓ 1 和 -1 是其生成元，除此以外别无其它生成元。
- ✓ 即<Z，+>的生成集为{1，-1}。

2）剩余类加群<Z_6，⊕>是一个有限循环群，
- ✓ 元素 [1]、[5]的周期是6，故[1]、[5]为其生成元，
- ✓ 即 { [1]，[5] } 是<Z_6，⊕> 的生成集 。
- ✓ 实际上，满足gcd(a,k)=1的[a]都是<Z_k，⊕>的生成元。

最大公约数

<Z_{15}，⊕>的生成集为（　）？

交换群

定义15.7 若群<G，*>中的运算“*”在G上满足交换律，则称群<G，*>是交换群（或阿贝尔(Abel)群）。

- ✓ 整数加群<Z，+>，实数加群<R，+>，有理数加群<Q，+>，剩余类加群<Zk，⊕>，剩余类乘群<Z_{17}-{[0]}，⊗>、实数乘群<R-{0}，×> 都 是 交换群
- ✓ n阶置换群 <S_n，◦> 不是交换群，因为复合运算不满足交换律。

交换群

定理15-8：群<G，*>为交换群的充分必要条件是：

对 ∀a，b∈G，有$(a*b)^2 = a^2*b^2$

证明 1）必要性 对∀a，b∈G，由于运算“*”是可交换的，所以有：

$(a*b)^2 = a*b*a*b = a*a*b*b = (a*a)*(b*b) = a^2*b^2$。

2）充分性 对∀a，b∈G，有$(a*b)^2 = a^2*b^2$，

$(a*b)*(a*b) = (a*a)*(b*b)$

⇒ a*b*a*b = a*a*b*b　　消去律

⇒ b*a*b = a*b*b　　消去律

⇒ b*a = a*b

⇒ 群<G,*>是交换群。

同态与同构

同态与同构讨论的是两个代数系统是否相似或等价。即撇开集合的元素和运算的具体差异，只考虑运算性质上的差异

定义15-8 设〈X, *〉与〈Y, o〉是两个代数系统，如在集合X与Y之间存在映射(函数) f: X→Y，使得对 ∀a，b∈X，有:

$f(a*b) = f(a)\ o\ f(b)$

则称 f 是从〈X, *〉到〈Y,o〉的同态映射，称代数系统〈X, *〉与代数系统〈Y,o〉（在映射 f 下）同态，记为〈X, *〉∽〈Y, o〉。

$f(X) \subseteq Y$ 称为 X 的同态像或象集。

同态与同构

- f: X→Y是单射，则称 f 是从〈X,*〉到〈Y,o〉的单一同态映射；

$f(X) \subseteq Y$

- f: X→Y是满射，则称 f 是从〈X,*〉到〈Y,o〉的满同态映射；
- f: X→Y是双射，则称 f 是从〈X,*〉到〈Y,o〉的同构映射，称〈X,*〉和〈Y,o〉(在 f 下) 同构，记为〈X,*〉≌〈Y,o〉

$f(X) = Y$

- 若集合X=Y，对应的同态和同构分别称为自同态和自同构。

同态与同构

例 1 证明代数系统〈R^+，×〉与〈R，+〉是同构的。×, + 是普通乘和普通加

证明:

设 $R^+ \to R$ 的双射 f: $f(x) = \ln(x)$

对 ∀x，y∈ R^+，有:

$f(x \times y) = \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y) = f(x) + f(y)$

即满足 $f(x \times y) = f(x) + f(y)$

∴〈R^+，×〉≌〈R，+〉

同态与同构

例2 在自然数加半群〈N，+〉与剩余类加群<Z_2，⊕>之间定义映射 f: N→Z_2 如下:

$$f(n) = \begin{cases} [0], 当n是偶数 \\ [1], 当n是奇数 \end{cases}$$

证明 f 是〈N，+〉到<Z_2，⊕>的满同态映射。

证明:

∵ 对∀$n_1, n_2 \in N$，

1）当 n_1 和 n_2 同奇偶时，$f(n_1+n_2)=[0]=f(n_1) \oplus f(n_2)$；

2）当 n_1 和 n_2 奇偶不同时，$f(n_1+n_2)=[1]=f(n_1) \oplus f(n_2)$；

∴ f 是<N，+〉到<Z_2，⊕>的同态映射

显然，$f(n)$ 是满射，∴ f 是<N，+〉到<Z_2，⊕>的满同态映射

同态的性质

设〈X，*〉与〈Y,o〉是两个代数系统，

➢ 若f:〈X，*〉→〈Y,o〉是同态映射，则：

① ‘*’在X中是封闭的⇒‘o’在f(X)⊆Y中是封闭的；

② 〈X，*〉满足结合律⇒〈f(X),o〉满足结合律；

③ 〈X，*〉满足交换律⇒〈f(X),o〉满足交换律；

④ 〈X，*〉存在幺元e_1⇒〈f(X),o〉存在幺元e_2，且$e_2=f(e_1)$；

⑤ a∈X关于运算‘*’有逆元⇒b=f(a)关于运算‘o’有逆元。

➢ 若f:〈X，*〉→〈Y,o〉是满同态映射，则：

① 如果〈X，*〉是半群⇒〈Y，o〉是半群；

② 如果〈X，*〉是群⇒〈Y，o〉是群。

同构的性质

设〈X，*〉与〈Y,o〉是两个代数系统，若f:〈X，*〉→〈Y,o〉是同构映射，则

① ‘*’在X中是封闭的⇔‘o’在Y中是封闭的；

② 〈X，*〉满足结合律⇔〈Y,o〉满足结合律；

③ 〈X，*〉满足交换律⇔〈Y,o〉满足交换律；

④ 〈X，*〉存在幺元e_1⇔〈Y,o〉存在幺元e_2，且$e_2=f(e_1)$；

⑤ a∈X关于运算‘*’有逆元a^{-1}⇔b=f(a)∈Y关于运算‘o’有逆元$b^{-1}=f(a^{-1})$。

⑥ 如果〈X，*〉是半群⇔〈Y，o〉是半群；

⑦ 如果〈X，*〉是群⇔〈Y，o〉是群。

同态与同构

同态与同构讨论的是两个代数系统是否蕴含或等价。即撇开集合元素的具体差异和运算的具体差异，只考虑运算性质上的差异。

✓若〈X，*〉与〈Y，o〉是同态的，则"*"在源集X的代数性质，"o"在像集f(X)⊆Y上都具有，但反之则未必。

蕴含关系

✓若〈X，*〉与〈Y，o〉是同构的，则"*"在源集X的代数性质，"o"在像集f(X)=Y上都具有，反之亦然。

等价关系

同态核

定义15-9

设f是群〈G，*〉到群〈H，o〉的同态映射，e是H的单位元，令：

$$\mathrm{Ker}(f) = \{a \mid a\in G \wedge f(a) = e\}$$

称Ker(f)为f的**同态核**.

例：试写同态映射f: <N,+>→<Z_2,⊕>的同态核。

$$f(n)=\begin{cases}[0],当n是偶数\\ [1],当n是奇数\end{cases}$$

解：因[0]是<Z_2，⊕>中的幺元，故f的同态核为

Kerf ={0，2，4，6，….} = {n | n∈N ∧ n是偶数}。

课后练习

1. 设 是群<G, #> 的幺元为e。 已知 a,b∈G , a≠e，且$a^3\#b = b\#a^4$

试证明：$a\#b \neq b\#a$

提示， 用反证法

2. 设 p,q,r 是实数，$\circ$ 为R上的二元运算，$\forall a, b \in R$， $a \circ b = pa + qb + r$ 。问 $\circ$ 运算是否满足交换律、结合律和幂等律，是否有单位元和零元，并证明你的结论。

第17章 格与布尔代数

1

主要内容

- 格的定义与性质
- 子格与格同态
- 分配格与有补格
- 布尔代数
- 布尔表达式

2

总序

- 设A是集合，则含两个二元运算的代数系统<u><2^A，∩，∪></u>中的运算∩和∪都满足幂等律、交换律、结合律、吸收律和分配律，含零元，含幺元。
- 设M为命题的集合，则含两个二元运算的代数系统< M, ∧, ∨ >中的运算∧和∨也满足幂等律、交换律、结合律、吸收律和分配律，含零元，含幺元。
- 从运算性质上看，这两个不同的代数系统具有共性。
- 以包含两个二元运算的代数系统为对象，从运算性质着眼进行抽象，提取两个运算的共性，可得到“格”的概念。

3

(代数)格的定义

定义17-1 （格）

设<L，∧，∨>是一个代数系统，如果∧，∨满足：

①结合律：a∨(b∨c)=(a∨b)∨c,

a∧(b∧c)=(a∧b)∧c

②交换律：a∨b=b∨a，a∧b=b∧a,

③幂等律：a∨a=a，a∧a=a

④吸收律：a∨(a∧b)=a，a∧(a∨b)=a

则称<L，∧，∨>是一个（代数）格。

以含两个二元运算的代数系统为对象，从运算性质着眼，提取两个运算的共性

注意：为书写简便起见，用∧和∨表示格的两个运算，它们不再表示狭义的合取与析取逻辑运算符

4

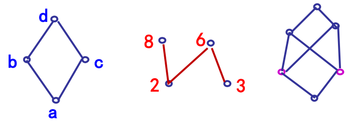
DMS Chapter 17 格与布尔代数(1)

(偏序)格的定义

偏序关系R是集合A上的自反的、反对称、可传递关系,它提供了一种比较集合元素的工具。序偶$<A, R>$称为偏序集。

定义17-2 设<L, ≤>是一个偏序集,若对∀a, b∈L, 子集{a, b}都有最大下界(glb)和最小上界(lub), 则称<L, ≤>是一个偏序格, 简称格, 若 L 是一个有限集, 则称<L, ≤>为有限格。

有限偏序集<L, ≤>是格的必要条件为 <L, ≤>具有最大元和最小元。



全序集一定是格, 也称为全序格

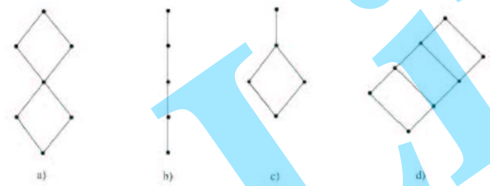
四川大學 SICHUAN UNIVERSITY

5

DMS Chapter 17 格与布尔代数(1)

(偏序)格定义

例1 判断下图所示的偏序集是否是格



有限偏序集<L, ≤>是格的必要条件为 <L, ≤>具有最大元和最小元。

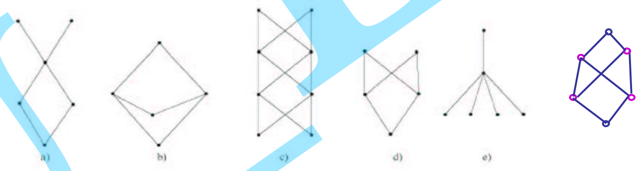


图 18-6

四川大學 SICHUAN UNIVERSITY

6

DMS Chapter 17 格与布尔代数(1)

代数格与偏序格的联系

定理17-1 设<L, ∧, ∨>是一个代数格,

在L上定义偏序关系"≤": a ≤ b 当 a∧b = a

或 (a ≤ b 当 a∨b = b)

则 <L, ≤> 是一个偏序格;

定理17-2 设<L, ≤ >是一个偏序格, 在L上定义二元运算"∧"、"∨": a∧b=glb (a, b) , a∨b= lub (a, b)

则 <L, ∧, ∨> 是一个代数格。

最大下界 最小上界

上述两定理表明: 格的两种定义是完全等价的。

四川大學 SICHUAN UNIVERSITY

7

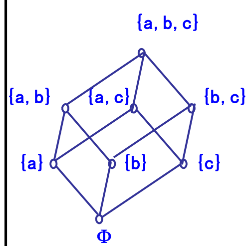
DMS Chapter 17 格与布尔代数(1)

代数格与偏序格的联系

例2: A={a,b,c}, 2^A={Φ , {a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c},{a,b,c}}

问: 1) 偏序集<2^A, ⊆>是否为偏序格?

2) 若是, 写出对应的代数格 <2^A, ∧, ∨ >的运算表



<2^A, ⊆ >哈斯图

a∧b=glb (a, b)

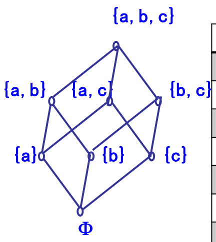
∧	Φ	{a}	{b}	{c}	{a,b}	{a,c}	{b,c}	{a,b,c}
Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
{a}	Φ	{a}	Φ	Φ	{a}	{a}	Φ	{a}
{b}	Φ	Φ	{b}	Φ	{b}	Φ	{b}	{b}
{c}	Φ	Φ	Φ	{c}	Φ	{c}	{c}	{c}
{a,b}	Φ	{a}	{b}	Φ	{a,b}	{a}	{b}	{a,b}
{a,c}	Φ	{a}	Φ	{c}	{a}	{a,c}	{c}	{a,c}
{b,c}	Φ	Φ	{b}	{c}	{b}	{c}	{b,c}	{b,c}
{a,b,c}	Φ	{a]	{b}	{c}	{a,b}	{a,c}	{b,c}	{a,b,c}

四川大學 SICHUAN UNIVERSITY

8

DMS Chapter 17 格与布尔代数(1)

代数格与偏序格的联系



<2ᴬ，⊆>哈斯图

a∨b= lub（a，b）

∨	Φ	{a}	{b}	{c}	{a,b}	{a,c}	{b,c}	{a,b,c}
Φ	Φ	{a}	{b}	{c}	{a,b}	{a,c}	{b,c}	{a,b,c}
{a}	{a}	{a}	{a,b}	{a,c}	{a,b}	{a,c}	{a,b,c}	{a,b,c}
{b}	{b}	{a,b}	{b}	{b,c}	{a,b}	{a,b,c}	{b,c}	{a,b,c}
{c}	{c}	{a,c}	{b,c}	{c}	{a,b,c}	{a,c}	{b,c}	{a,b,c}
{a,b}	{a,b}	{a,b}	{a,b}	{a,b,c}	{a,b}	{a,b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}
{a,c}	{a,c}	{a,c}	{a,b,c}	{a,c}	{a,b,c}	{a,c}	{a,b,c}	{a,b,c}
{b,c}	{b,c}	{a,b,c}	{b,c}	{b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}	{b,c}	{a,b,c}
{a,b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}

推论： 偏序集<2^A，⊆>是一个偏序格，且任何两个元素X、Y∈2^A，都有 X∪Y=lub（X，Y），X∩Y=glb（X，Y）

故 <2^A，⊆>的等价代数格为<2^A，∩，∪>

称为幂集格

DMS Chapter 17 格与布尔代数(1)

代数格与偏序格的联系

例3： A={a,b,c,d}，下表为代数系统<A, ∧,∨ >的∧运算表

问：1）<A, ∧， ∨>是否为格?

2）若是，画出其等价偏序格<A, ≤ >的哈斯图

∧	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	b	d
d	a	d	c	b

解： ∧ 不满足 交换律

故<A, ∨， ∧ >不是格

DMS Chapter 17 格与布尔代数(1)

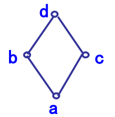
代数格与偏序格的联系

例4： A={a,b,c,d}，下表为代数系统<A, ∧,∨ >的∧运算表

问：1）<A, ∧， ∨ >是否为格?

2）若是，画出其等价偏序格<A, ≤ >的哈斯图

∧	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	a	a	c	c
d	a	b	c	d



<A, ≤ >的哈斯图

解：1） ∧ 满足 交换律，幂等率， 但要判断结合律和吸收率工作量较大，故需换种思路

2）定义关系R： x R y 当 x∧y = x

根据∧运算表得：R = {aR a , aR b, aR c, aR d, bR b, bRd , cR c, cRd, dRd},

显然 R 是偏序关系，记为≤，从偏序集<A, ≤> 的哈斯图可以看出，有最大元和最小元，可能是格；

再根据偏序格的定义可知，任意两元都有最大下界和最小上界，

故 <A, ≤>是偏序格，对应的 <A, ∨， ∧ >是格

DMS Chapter 17 格与布尔代数(1)

格的判断总结

- 若给定的是代数系统形式<L, ∧， ∨>,

  方法1：

  判断∧， ∨ 是否满足交换率，幂等率，结合率及吸收率

  方法2：

  step1：根据代数格与偏序格的关系，得到偏序集<L, ≤>的哈斯图

  step2：判断哈斯图是否有最大元和最小元（有限集）并查看任意两元是否有最大下界和最小上界，or 全序集

- 若给定的是偏序集形式<L, ≤ >

  方法1：画出哈斯图，判断是否有最大元和最小元（有限集）并查看任意两元是否有最大下界和最小上界，or 全序集

  方法2：

  step1：根据偏序格与代数格的关系，得到 ∧， ∨运算表

  step2：判断∧， ∨ 是否满足交换率，结合率，吸收率及幂等率

几个典型格

- 幂集格 $<2^A, \cap, \cup>$，对应的偏序集为$<2^A, \subseteq>$
- 命题逻辑系统 $<\{0,1\}, \wedge, \vee>$，对应的偏序集为 1 0
- 正因子格$<D_k, |>$，其中D_k为k的正因子集，“|”为整除关系，对应的代数格$<D_k, \$, \#>$

最大公约数

最小公倍数

格的性质

定理17-4

设$<L, \wedge, \vee>$是一个格，$\leq$是对应的偏序关系，$a,b,c,d \in L$，则

① $a \leq b \Rightarrow (a \vee c) \leq (b \vee c)$

② $a \leq b \Rightarrow (a \wedge c) \leq (b \wedge c)$ （保序性）

③ $a \leq b$且 $c \leq d \Rightarrow (a \wedge c) \leq (b \wedge d)$

④ $a \leq b$且 $c \leq d \Rightarrow (a \vee c) \leq (b \vee d)$

⑤ $a \leq b$且 $a \leq c \Rightarrow a \leq (b \wedge c)$

⑥ $a \leq c$且 $b \leq c \Rightarrow (a \vee b) \leq c$

⑦ $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$ （准分配关系）

子格

定义17-3 设代数系统$<L, \wedge, \vee>$是一个格，$S \subseteq L$，若S满足：

① $S \neq \Phi$；

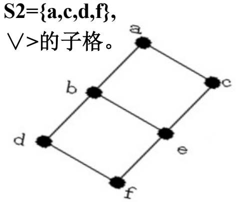
② 运算$\wedge$和$\vee$对子集S都是封闭的；

则称$<S, \wedge, \vee>$是$<L, \wedge, \vee>$的**子格**。

子格

例5:下表是格$<L, \vee, \wedge>$对应的Hasse图，S1={a,b,c,d}, S2={a,c,d,f},

问：$<S1, \wedge, \vee>$，$<S2, \wedge, \vee>$是否为$<L, \wedge, \vee>$的子格。



解： 根据哈斯图可得∧ ∨在L上的运算表

∧	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	b	e	d	e	f
c	c	e	c	f	e	f
d	d	d	f	d	f	f
e	e	e	e	f	e	f
f	f	f	f	f	f	f

∨	a	b	c	d	e	f
a	a	a	a	a	a	a
b	a	b	a	b	b	b
c	a	a	c	a	c	c
d	a	b	a	d	b	d
e	a	b	c	b	e	e
f	a	b	c	d	e	f

∧ ∨在S1上的运算表

∧	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	e	d
c	c	e	c	f
d	d	d	f	d

∨	a	b	c	f
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	a	a	c	c
f	a	b	c	f

∧ ∨在S2上的运算表

∧	a	c	d	f
a	a	c	d	f
c	c	c	f	f
d	d	f	d	f
f	f	f	f	f

∨	a	c	d	f
a	a	a	a	a
c	a	c	a	c
d	a	a	d	d
f	a	c	d	f

∧在S1上不封闭，故< S1, ∧, ∨>不是<L, ∧, ∨>的子格

∧ ∨在S2上均封闭，故< S2, ∧, ∨>是为<L, ∧, ∨>的子格

DMS Chapter 17 格与布尔代数(1)

对偶格

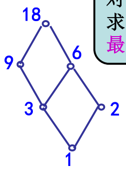
定义17-4 设<L，≤>和<L，≤′>是两个偏序格，如果偏序关系≤′是≤的逆关系，则称<L，≤>和<L，≤′>互为**对偶格**。

例：设L是由18的正因子组成的集合 L={1,2,3,6,9,18}，

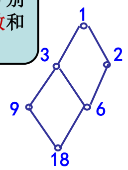
则L上的 整除关系<L,|>与L上的倍数关系<L,∥> 互为对偶格。

对应的运算分别求最大公约数和最小公倍数

对应的运算分别是求最小公倍数和最大公约数



<L,|>



<L,∥>

① 求一个格的对偶格，可通过将哈斯图上下颠倒来得到。

② 从代数格的角度看，互为对偶的两个格，它们的运算也刚好是互换的。故求一个格的对偶格，也可通过交换两个代数运算而得到。

DMS Chapter 17 格与布尔代数(1)

对偶公式

定义17-5 设<L，∧，∨>是一个格，E是格中的公式。将E中的最小元(0)和最大元(1)互换、 ∨和∧互换后得到的新公式E^* 称为E的 **对偶公式**。

例： E = x ∧ (y ∧ z ∨ 0) ∨(x∧z) ∨1

E^* = x ∨ (y ∨ z∧ 1) ∧(x∨z) ∧0

DMS Chapter 17 格与布尔代数(1)

对偶原理

对偶原理： 设X和Y是格 <L，∧，∨>上的两个公式， X^* 和Y^*是其相对应的对偶公式。如果X=Y，则$X^*=Y^*$。

例： 若 x∨(y∧z) ＝ (x∨y)∧(x∨z)

则 x∧ (y∨z) = (x∧y) ∨ (x∧z)

定理17-3 设X和Y是格<L，∧，∨>上的两个公式，≤是对应的偏序关系。如果 X≤Y， 则 $Y^*≤X^*$。

DMS Chapter 17 格与布尔代数(1)

格的同态与同构(1)

定义17-5 设<L,∧，∨>和<S，∩，∪ >是两个格，*f*是L到S的映射。如果对任意x,y∈L，都有

f(x∧y) = *f*(x) ∩ *f*(y)

f(x∨y) = *f*(x) ∪ *f*(y)

f(L) ⊆ S

则称*f*为从格<L,∧，∨>到格<S，∩，∪>的**格同态映射**，格<L,∧，∨>和格<S，∩，∪>同态，当*f*是双射时，称*f*为**格同构映射**，格<L,∧，∨>和格<S，∩，∪>**同构**。

f(L) = S
|L|=|S|

从代数运算的角度定义映射

DMS Chapter 17 格与布尔代数(1)

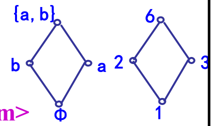
格的同态与同构(2)

例17.2 设D_6表示6的正因子集，证明因子格< D_6，|>和幂集格<$2^{\{a,b\}}$，⊆>是同构的。

证明：定义映射f：$D_6 \to 2^{\{a,b\}}$，使得

最大公约数 最小公倍数

$f(1)=\phi$, $f(2)=\{a\}$, $f(3)=\{b\}$, $f(6)=\{a,b\}$



∵ < D_6，|>对应的代数格为< D_6，gcd，lcm>

<$2^{\{a,b\}}$，⊆>对应的代数格为<$2^{\{a,b\}}$，∩，∪>

∴$f(\gcd(1,3))=f(1)=\phi=\phi\cap\{b\}=f(1)\cap f(3)$

$f(\mathrm{lcm}(1,3))=f(3)=\{b\}=\phi\cup\{b\}=f(1)\cup f(3)$

$f(\gcd(3,3))=f(3)=\{b\}=\{b\}\cap\{b\}=f(3)\cap f(3)$

$f(\mathrm{lcm}(3,3))=f(3)=\{b\}=\{b\}\cup\{b\}=f(3)\cup f(3)$

其余8种情况也可一一验证，又因为是双射，所以命题得证。

两格同构 当且仅当 hasse图完全一致

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

21

DMS Chapter 17 格与布尔代数(1)

保序映射

定义： 设<L_1, ≤>和<L_2 , ⊆>是两个格

如果 存在映射f：$L_1 \to L_2$，使得对∀a，b∈L_1，有：若 a≤b，则$f(a) \subseteq f(b)$，则称映射f是$L_1 \to L_2$的保序映射。

当f为双射时，称f为保序双射。

从偏序关系的角度定义映射

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

22

DMS Chapter 17 格与布尔代数(1)

保序定理(1)

保序定理（1）：设<L_1, ≤>和<L_2 , ⊆>是两个格，

若函数f：$L_1 \to L_2$是格同态映射，则f是$L_1 \to L_2$保序映射。

格同态映射 ⇒ 保序映射

保序定理（2）：设<L_1, ≤>和<L_2 , ⊆>是两个格，

若双射f：$L_1 \to L_2$是格同构映射，则 f 是$L_1 \to L_2$的保序双射，反之亦然。

格同构映射 ⇔ 保序双射

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

23

DMS Chapter 17 格与布尔代数(1)

保序定理(2)

例17.3 设L={1，2，3，12}，在< L，|>和幂集格<2^L，⊆>之间构造映射f：$L \to 2^L$，使得对 ∀x∈L，$f(x)=\{y \mid y\in L且y|x\}$。

判断 f 是否为$L \to 2^L$的保序映射？是否为同态映射？

解：根据f的定义有：$f(1)=\{1\}$，$f(2)=\{1,2\}$，$f(3)=\{1,3\}$，$f(12)=\{1,2,3,12\}$

1）容易验证，对∀x，y∈L，若 x|y，则 $f(x)\subseteq f(y)$成立

所以，f是保序映射。

2）当x=2，y=3时，

$f(\mathrm{lcm}(2,3))=f(12)=\{1,2,3,12\}\neq\{1,2,3\}=f(2)\cup f(3)$

所以，f不是同态映射。

四川大学 SICHUAN UNIVERSITY

24

分配格(1)

定义17-6 设<L, ∧, ∨>是一个格，如果对任意a,b,c∈L，都有：

∨，∧ 互相分配率

$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c) \quad (1)$$

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c) \quad (2)$$

注：式(1)和式(2)是对偶的，在判断格的分配性时，只需判断其中一个即可。

则称<L, ∧, ∨>是一个**分配格**。

典型分配格:

幂集格<2^A,∩,∪>， 命题逻辑格<M, ∧, ∨>，全序格

例17.4 设A为任意一个集合，证明 幂集格<2^A, ∩, ∪>是分配格？

证 对任意P、Q、R∈2^A，有

$$P\cap(Q\cup R)=(P\cap Q)\cup(P\cap R)$$

$$P\cup(Q\cap R)=(P\cup Q)\cap(P\cup R)$$

所以，格<2^A，∩,∪>是一个分配格。

例17.5 证明图中a）、b）所示的两个格都不是分配格

证明： 在图a）、b）中都取b,c,d三个元素来验证。用“∧”和“∨”表示偏序集的**最大下界**和**最小上界**运算。

在图a）中，

$$b\wedge(c\vee d)=b\wedge a=b,$$

$$(b\wedge c)\vee(b\wedge d)=e\vee e=e。$$

在图b）中，

$$b\wedge(c\vee d)=b\wedge a=b,$$

$$(b\wedge c)\vee(b\wedge d)=e\vee d=d。$$

因此，在图a）和图b）中都有，

$$b\wedge(c\vee d)\neq(b\wedge c)\vee(b\wedge d)。$$

故它们都不是分配格。

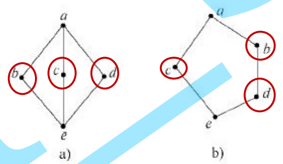
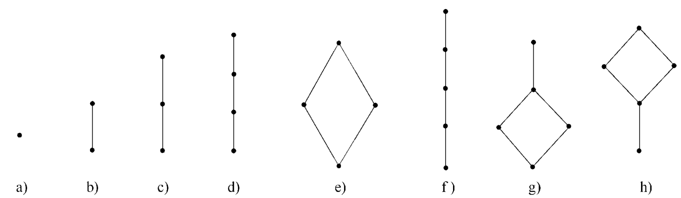


图 18-10

分配格(2)

下图所示的八个哈斯图都是分配格



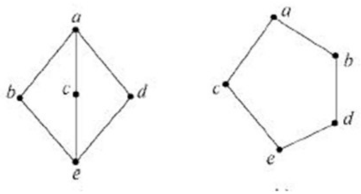
两个有用结论:

1）四个元素以下的格都是分配格;

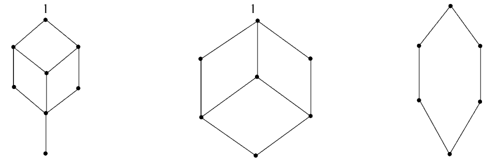
2）五个元素的格仅有两个(上页)是非分配格，其余三个(上图中的图f、图g、图h)都是分配格。

分配格(3)

一个格是分配格，当且仅当 该格中没有任何子格与下面两个格中的任何一个同构。



例：判断下面所示的格是否为为分配格？



分配格(4)

定理17-5 设<L, ∧, ∨ >是分配格，对于任意 a,x,y∈L，如果 $a\wedge x = a\wedge y$ 且 $a\vee x = a\vee y$， 则 $x = y$。

消去律

证明

$x = x\wedge (a\vee x)$	(吸收律)
$= x\wedge (a\vee y)$	(已知 $a\vee x = a\vee y$)
$= (x\wedge a)\vee(x\wedge y)$	(分配律)
$= (a\wedge y)\vee(x\wedge y)$	(已知 $a\wedge x = a\wedge y$)
$= y\wedge (a\vee x)$	(交换律，分配律)
$= y\wedge(a\vee y)$	(已知 $a\vee x = a\vee y$)
$= y$	(吸收律)