§ 3.2 边缘分布与随机变量的独立性

二维随机变量(X,Y)作为一个整体，具有联合分布函数$F(x,y)$，而X和Y单独看又都是一维随机变量，各自也有它们的分布函数，记为$F_X(x)$和$F_Y(y)$，分别称为随机变量(X,Y)关于X及Y的边缘分布函数.

定理3.3 设$F(x,y)$为二维随机变量(X,Y)的联合分布函数,则X及Y的边缘分布函数 $F_X(x), F_Y(y)$,则

$$F_X(x) = F(x,+\infty) = P(X \le x, y < +\infty)$$
$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = P(x < +\infty, Y \le y)$$

注：定理3.3说明,联合分布函数可以确定边缘分布函数，反之则不成立。

事件可定义独立性，随机变量也有独立性的概念

定义3.6 F(x,y)是二维随机变量(X,Y)的分布函数, $F_X(x), F_Y(y)$ 分别为X,Y的边缘分布函数,若对任意

$$x, y \text{有} F(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)$$

则称**X与Y独立**.

定理3.3 设随机变量X,Y相互独立,且 $g(x)$, $h(y)$

分别是x,y的连续函数,则 $X_1 = g(X)$,与$Y_1 = h(Y)$也相互独立

定理 **设X与Y是两个相互独立的随机变量，G_1, G_2是实数轴上的两个任意集合，则**

$$P(X \in G_1, Y \in G_2) = P(X \in G_1)\cdot P(Y \in G_2).$$

离散型联合分布与边缘分布的关系

设**(X,Y)**是二维离散型随机变量**,**联合分布简写为**:**

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), i, j = 1,2,\dots$$

定理**3.4 X**与**Y**的边缘分布可由联合分布求出**,**
即

$$p_{i\bullet} = P(X = x_i) = \sum_j p_{ij}, i = 1, 2, \dots$$

$$p_{\bullet j} = P(Y = y_j) = \sum_i p_{ij}, j = 1, 2, \dots$$

注：联合分布律决定边缘分布律，但边缘分布律不能够决定联合分布律。

联合分布律 及边缘分布律

$Y \backslash X$	x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$	$p_{\bullet j}$
y_1	p_{11}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$	$p_{\bullet 1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
y_j	p_{1j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{\bullet j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$p_{i\bullet}$	$p_{1\bullet}$	$\cdots$	$p_{i\bullet}$	$\cdots$	1

离散型随机变量的独立性

定理3.5设(X,Y)是二维离散型随机变量,

X与Y独立 等价于 $p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}, \forall i, j$

(独立时联合分布律等于边缘分布律的乘积)

例3.7 (X,Y)有联合分布律如下:

Y \ X	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

且事件(X=1)与(X+Y=1)相互独立求a,b之值,并讨论X与Y的独立性.

Y \ X	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

事件$(X=1)$与$(X+Y=1)$相互独立

$(1)P(X=1)=b+0.1$

$(2)P(X+Y=1)=a+b$

$(3)P(X=1,X+Y=1)=P(X=1,Y=0)=b$

$= P(X=1)\ P(X+Y=1)=(b+0.1)(a+b)$

$(4)0.4+a+b+0.1=1$

联合上述方程求解: $a=0.1,b=0.4.$

Y / X	0	1	$p_{i\bullet}$
0	0.4	0.4	0.8
1	0.1	0.1	0.2
$p_{\bullet j}$	0.5	0.5	1

知有 $p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}, \forall i, j$ **X与Y独立.**

连续型联合分布与边缘分布的关系

定理3.7 设(X, Y) 的概率密度为f(x,y),则

关于X 的边缘概率密度为:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy, \quad -\infty < x < +\infty$$

关于Y的边缘概率密度为:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx, \quad -\infty < y < +\infty$$

注：联合密度决定边缘密度，但边缘密度不能决定联合密度。

连续型随机变量的独立性

定理3.7设(X,Y)是二维连续型随机变量,

X与Y独立,等价于 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

在三个密度函数的公共连续点处成立.

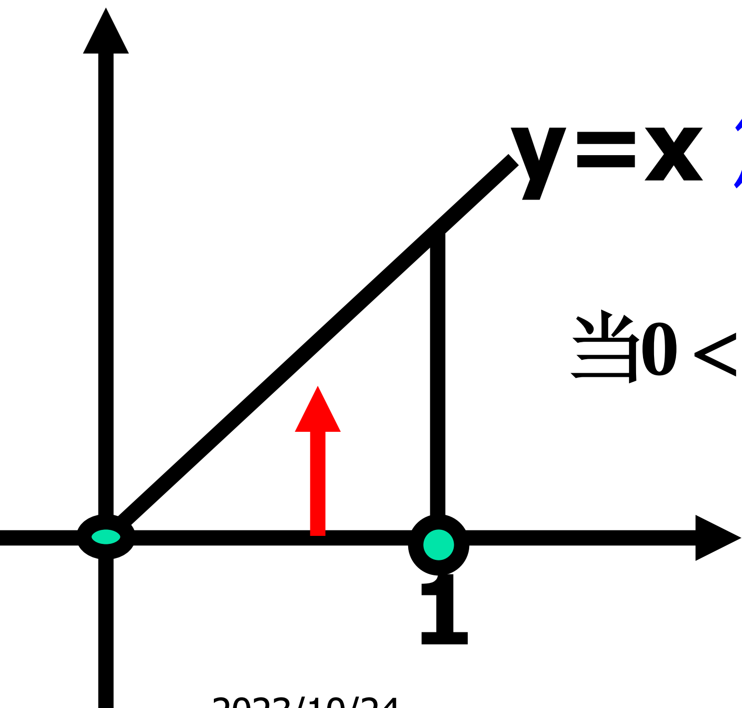
(连续型独立当且仅当联合密度等于边缘密度的乘积)

上式通常用于判断两个连续的随机变量是否独立.

例3.8 设二维随机变量$(X,\ Y)$的密度函数为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}6y, & 0<y<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

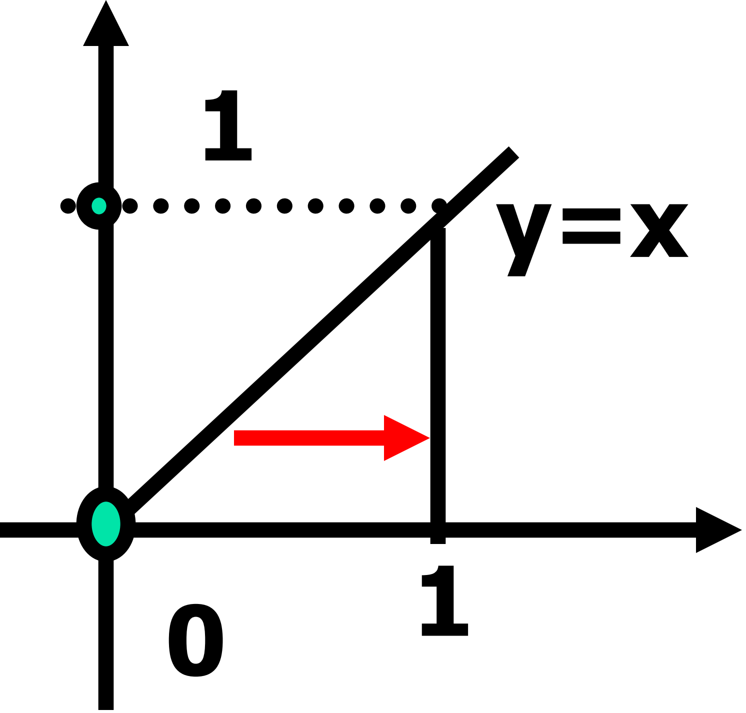
求**X,Y**的边缘密度并讨论独立性.



解: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

当$0<x<1$时，$f_X(x)=\int_0^x f(x,y)dy=3x^2$

当$x\notin(0,1)$时，$f_X(x)=0.$



$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

当$0<y<1$时，$f_Y(y)=$

$$=\int_y^1 f(x,y)dx=6y(1-y)$$

当$y\notin(0,1)$时，$f_Y(y)=0.$

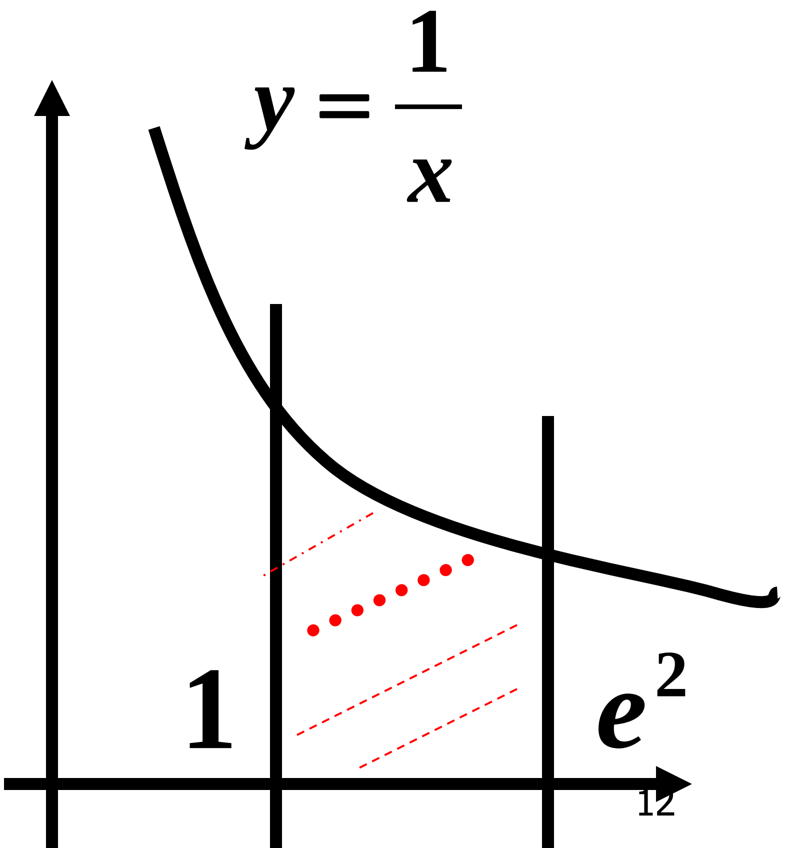
$\because f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$ 所以不独立

例　设平面区域D由曲线$y=\frac{1}{x}$及直线$y=0,x=1,x=e^2$围成。二维随机变量(X, Y)在区域D上服从均匀分布，则求$P(X\geq 2)$.

解：由均匀分布的定义得

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{D\text{的面积}}, & (x,y)\in D\\ 0, & else.\end{cases}$$

$$S_D=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}dx=2,$$



$$\text{故}f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2},(x,y)\in D\\ 0, \qquad\qquad else.\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy,$$

讨论：i)当$1\le x\le e^2$时

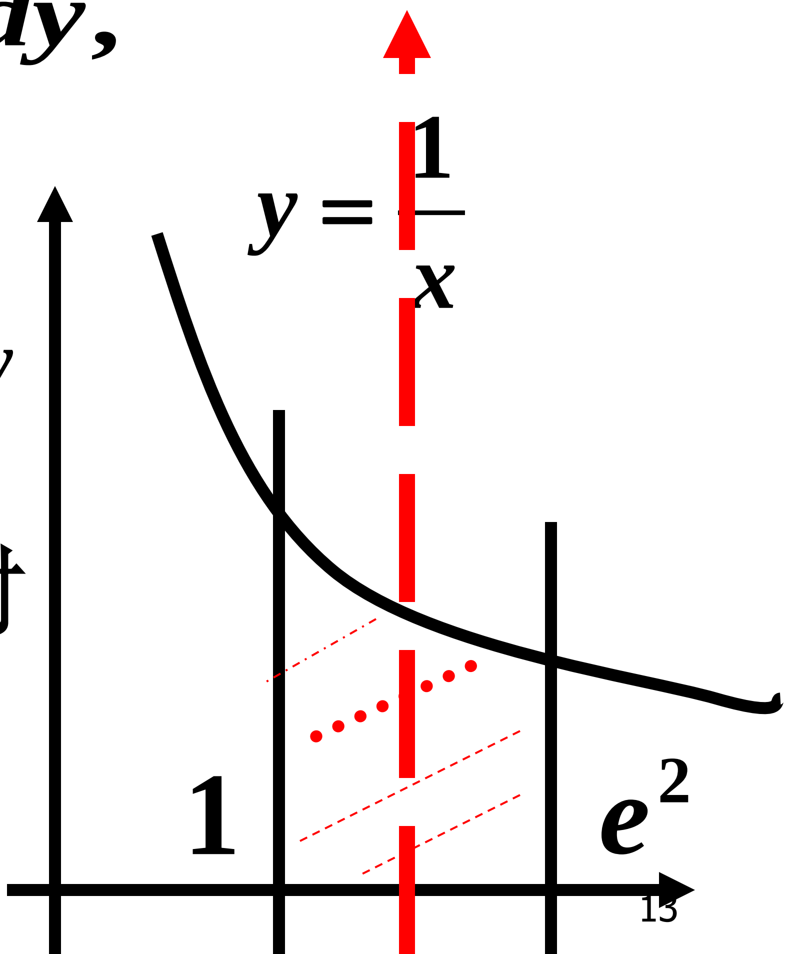
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{0}f(x,y)dy+\int_{0}^{\frac{1}{x}}f(x,y)dy$$

$$+\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\int_{0}^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2x},$$

ii)当x<1或x>e^2时

$$f_X(x)=0,$$



$$故\mathbf{f}_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, 1\le x\le e^2\\ 0, \qquad\qquad else.\end{cases}$$

$$P(X\ge 2)=\int_2^{e^2}\frac{1}{2x}dx=1-\frac{1}{2}\ln 2.$$