2021-2022 学年第 1 学期

概率统计（理工）A 卷 参考答案

一、填空题

1，0.8

2，$\frac{1}{3}$

3，$\frac{5}{9}$

4，$\frac{7}{30}$

5，$1-\overline{X}$

6，0.6554

二、解答题

1，**答案：*t*=0.1**

***Y* 的分布律为：**

Y	-1	0	1
P	0.3	0.6	0.1

***Y* 的分布函数为：**

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.3, & -1\le x<0\\ 0.9, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

2，**解：此人答对（记作A）的概率为**

$$P(A)=0.4\times 1+0.3\times\frac{1}{3}+0.2\times\frac{1}{2}+0.1\times\frac{1}{4}=0.625=\frac{5}{8}$$

则答对的情况下，此人知道答案（记作B）的概率为

$$\boldsymbol{P(B|A)=\frac{0.4}{0.625}=0.64}$$

3，解

（1）正态分布的随机变量 $\boldsymbol{X\sim N(\mu,\sigma^2)}$ 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$H(X)=-\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)f(x)dx$$

$$=-\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}+\frac{1}{2}=\ln\sqrt{2\pi e}\sigma$$

（2）指数分布的随机变量 $\boldsymbol{X\sim N(\mu,\sigma^2)}$ 的概率密度为

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x},x>0$$

$$H(X)=-\int_{0}^{+\infty}(\ln\lambda-\lambda x)f(x)dx=-\ln\lambda+1=\ln\frac{e}{\lambda}$$

（3）设(X,Y)相互独立，则联合概率密度为边缘密度的乘积，即有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

$$H(X,Y)=-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{f(x,y)\ln f(x,y)\,dxdy}$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(y)\,\mathbf{ln}\,f_X(x)f_Y(y)\,\boldsymbol{dxdy}$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(y)(\mathbf{ln}\,f_X(x)+\mathbf{ln}\,f_Y(y))\boldsymbol{dxdy}$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(y)\ln f_X(x)\,\boldsymbol{dxdy}$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(y)\ln f_Y(y)\,\boldsymbol{dxdy}$$

$$=\boldsymbol{H(X)+H(Y)}$$

故所求答案为 $\Delta(X,Y)=0$.

4，解：

（1）相关系数的计算：

$$\boldsymbol{EX=EY=\int_0^1\int_0^1 x(2-x-y)dxdy=\frac{5}{12}}$$

$$\boldsymbol{EX^2=EY^2=\int_0^1\int_0^1 x^2(2-x-y)dxdy=\frac{1}{4}}$$

$$\boldsymbol{DX=DY=EX^2-(EX)^2=\frac{11}{144}}$$

$$\boldsymbol{EXY=\int_0^1\int_0^1 xy(2-x-y)dxdy=\frac{1}{6}}$$

$$\boldsymbol{cov(X,Y)=EXY-EX\cdot EY=-\frac{1}{144}}$$

$$\boldsymbol{R(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=-\frac{1}{11}}$$

（2）条件概率的计算

Y 的边缘概率密度为

$$\boldsymbol{f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^1(2-x-y)dx=\frac{3}{2}-y, & 0<y<1\\ 0, & others\end{cases}}$$

在 $0<y<1$ 时，X关于Y的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{2-x-y}{\frac{3}{2}-y}, & if\ 0<x<1\\ 0, & others\end{cases}$$

故所求条件概率为

$$P\left\{2X>Y|\ Y=\frac{1}{2}\right\}=P\left\{X>\frac{1}{4}|Y=\frac{1}{2}\right\}=\int_{\frac{1}{4}}^{+\infty}f_{X|Y}(x|y)$$

$$=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(2-x-\frac{1}{2}\right)dx=\frac{21}{32}$$

（3）$Z=X+Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^z(2-z)dx=z(2-z),0<z<1\\ \int_{z-1}^{1}(2-z)dx=(2-z)^2,1\le z<2\\ 0, & others\end{cases}$$

5，解：由题意，$X\sim e(\lambda),\lambda=1/10$，$EX=10,DX=100$

（1）设每件成品的组装时间为$X_i,i=1,2,...,100$;由中心极限定理 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 渐近正态分布，于是$P\left(15\times 60<\sum_{i=1}^{100}X_i<20\times 60\right)=F(1200)-F(900)$

$$=\Phi\left(\frac{1200-100\times 10}{\sqrt{100\times 100}}\right)-\Phi\left(\frac{900-100\times 10}{\sqrt{100\times 100}}\right)$$

$$=\Phi(2)-\Phi(-1)=0.9772-(1-0.8413)=0.8185$$

（2）由题意，$P\left(\sum_{i=1}^{n}X_i<16.5\times 60\right)\ge 0.9772$

即

$$\Phi\left(\frac{16.5\times 60-10n}{\sqrt{100n}}\right)\geq\Phi(2)，n\leq 81$$

因此，最多可以组装 81 件产品。

6，解：由题意，总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2), n=25,\ \bar{x}=65,\ s=10$

（1）检验假设　H_0：$\mu=70$，　H_1：$\mu<70$

选择检验统计量　$t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$, 拒绝区域为$\{t<t_\alpha(n-1)\}$, 代入数据得

$$t=\frac{65-70}{10/\sqrt{25}}=-2.5<t_{0.05}(24)=-1.7109$$

因此，拒绝原假设，即在显著性水平 0.05 下，可以认为平均成绩低于 70 分。

（2）成绩波动σ^2的 90%的置信区间为：$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.95}(n-1)}\quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.05}(n-1)}\right]$, 代入数据得

$$\left[\frac{24\times 100}{36.415}\quad \frac{24\times 100}{13.848}\right]\approx[65.9,173.7]$$

7，解：(1) $EX=\int_0^\theta xf(x,\theta)dx=\int_0^\theta x\frac{4x^3}{\theta^4}dx=\frac{4}{5}\theta$

建立估计方程　$\frac{4}{5}\hat{\theta}_M=\bar{x}$　，得$\hat{\theta}_M=\frac{5}{4}\bar{x}$，所以参数$\theta$的矩估计量为 $\hat{\theta}_M=\frac{5}{4}\bar{X}$;

(2) 由题意，似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{4x_i^3}{\theta^4}$$

$\frac{\mathrm{dlnL}(\theta)}{d\theta}=0$ 无解，$\mathrm{L}(\theta)$是参数θ的单调减函数，又每一个数据$x_i \le \theta$，

所以$\theta \ge \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$

因此，可以取极大似然估计量$\hat{\theta}_{MLE}=\max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$.

（3）总体X的分布函数为$F_X(x)=\begin{cases} 0, \ x<0 \\ \frac{x^4}{\theta^4}, \ 0 \le x \le \theta \\ 1, \quad x \ge \theta \end{cases}$

记 $\hat{\theta}_{MLE}$ 的分布函数为 $F_{\hat{\theta}_{MLE}}(z)$ ，则 $F_{\hat{\theta}_{MLE}}(z)=P(\max\{X_1, X_2, ..., X_n\} \le z)=F_X^n(z)$，

所以 $\hat{\theta}_{MLE}$的密度函数为$f_{\hat{\theta}_{MLE}}(z)=\frac{4nx^{4n-1}}{\theta^{4n}}, \ 0 \le x \le \theta$, 从而

$E\hat{\theta}_{MLE}$=$\int_0^\theta x\frac{4nx^{4n-1}}{\theta^{4n}}dx=\frac{4n}{4n+1}\theta$，故只需取$a=\frac{4n+1}{4n}$即可。