Probability & Statistics

概率论与数理统计

自然界及人类活动中所观察到的现象可大致分为两类:

确定性现象：在一定条件下一定会发生的现象。如“同性电荷必然互斥”、“一标准大气压下，水加热到100摄氏度就会沸腾”。

不确定现象(随机现象)：在一定条件下具有多种可能会发生的结果，事先并不能肯定究竟哪一个结果会发生的现象。如“投硬币”、“掷骰子”。随机现象在一次观察中出现什么结果具有偶然性, 但在大量试验或观察中, 这种结果的出现具有一定的统计规律性。

概率论就是研究随机现象并揭示其规律的一门数学分支。

数理统计是研究怎样去有效地收集、整理和分析带有随机性的数据，利用概率论的知识对所考察的问题作出推断或预测的数学分支.

本课程包含上述两部分：教材的前五章讲解概率论部分，第六章起讲解数理统计部分。

第一章 概率论基础知识

§1.1 样本空间与随机事件

随机试验

随机试验的三个特点:

1.可以在相同条件下重复进行;

2.试验结果不止一个，且试验前可以预知一切可能的结果;

3.试验前不能确定会出现哪一个结果,而试验后一定会出现一个确定的结果。

具有这三个特点的试验称为随机试验。

随机试验的例子

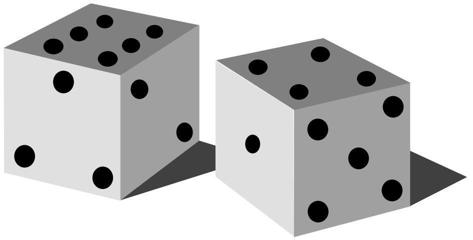
例1: 将一枚硬币连抛两次，考虑正反面出现的情况;

例2 :将一枚硬币连抛三次，考虑正面出现的次数;

例3 : 记录某网站单位时间内受到的点击次数;

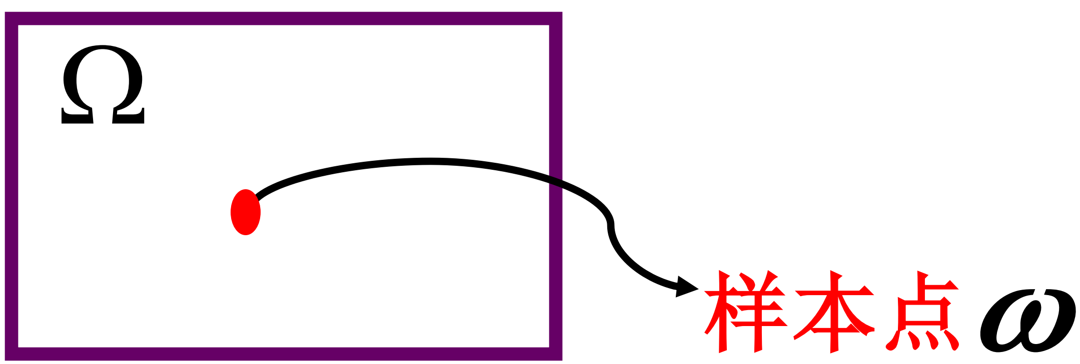
例4 :从一批灯泡中任取一只，测其使用寿命;

例5 :掷一颗骰子，考虑可能出现的点数.



样本空间

由于随机试验的结果不止一个，但所有可能的结果是已知的，我们就称一切可能结果的全体所构成的集合为样本空间，用**Ω**表示。而**Ω**中的元素**ω**称为样本点。



例:考虑试验E1：将一枚硬币抛掷两次，

可能结果为:

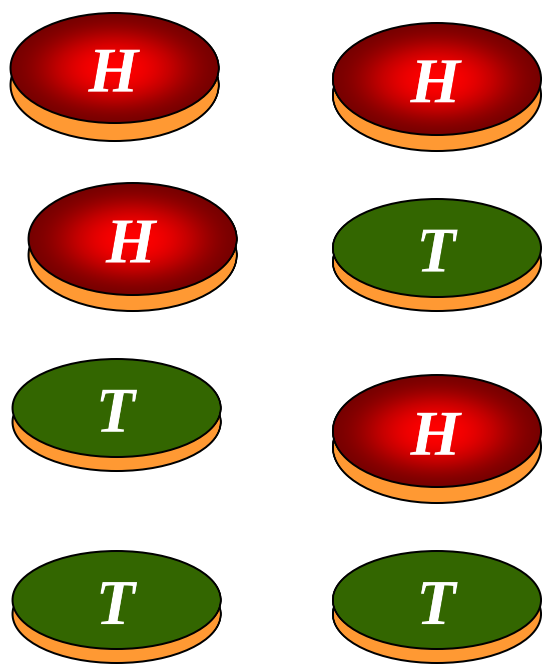
第1次　第2次

(H,H):

(H,T):

(T,H):

(T,T):



H（**T**）表示正（反）面，可见，该随机试验的所有可能的结果，构成一个集合：

$$\Omega = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$$

我们称该集合为这个随机试验的样本空间。

随机事件

在实际问题中，我们需要研究由样本点构成的样本空间的子集.如甲乙两人掷骰子进行赌博:约定点数大的赢. 让**x,y**分别表示甲乙掷的点数则样本空间为**{(x,y):x=1,…,6;y=1,…,6}**.那么甲赌徒并不太关心掷的骰子具体的点数，而是很关心“自己的点数是否比别人的大”.满足“自己的点数比别人的大”的全体样本点构成的这种集合， 我们就称为随机事件。具体说来就是：样本空间中满足某种条件的样本点所构成的子集，称为随机事件，简称事件，常用大写字母**A**，**B**，**C**等表示. 设**A**为一事件，若试验后的结果属于**A**，则称事件**A**发生。

特殊事件

基本事件 —— **仅由一个样本点组成的事件，它是随机试验的直接结果,每次试验必定发生且只可能发生一个基本事件.常记为{⍰}.注意区分基本事件**和样本点.

必然事件——**全体样本点组成的事件,记为⍰. 每次试验必定发生的事件.**

不可能事件——**不包含任何样本点的事件,记为⍰ .每次试验必定不发生的事件.**

例如：同时投甲乙两枚骰子，观察其结果。

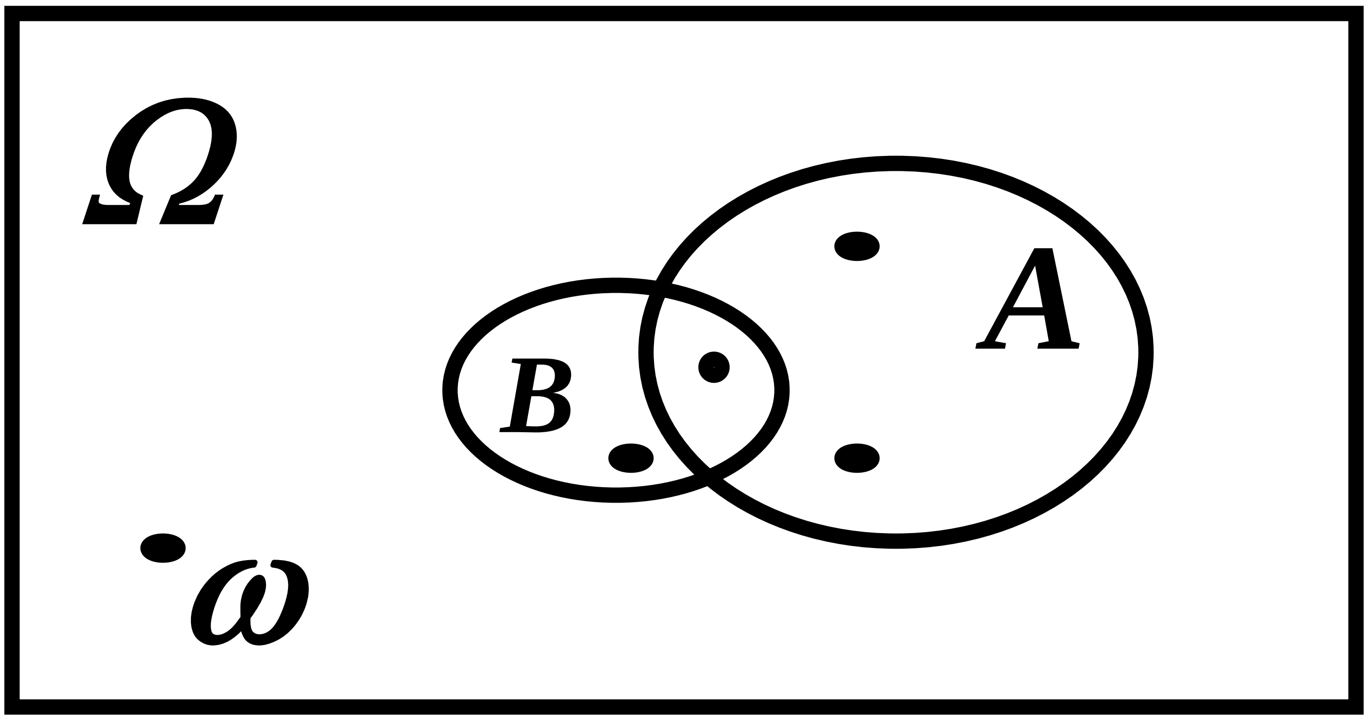
$$\Omega=\{(i,j):i,j=1,2,\cdots,6\}.$$

事件“点数之积小于等于**36**”就是必然事件；事件“点数之和等于**21**”就是不可能事件；若**A**表示事件“点数一样”，则

$$A=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}.$$

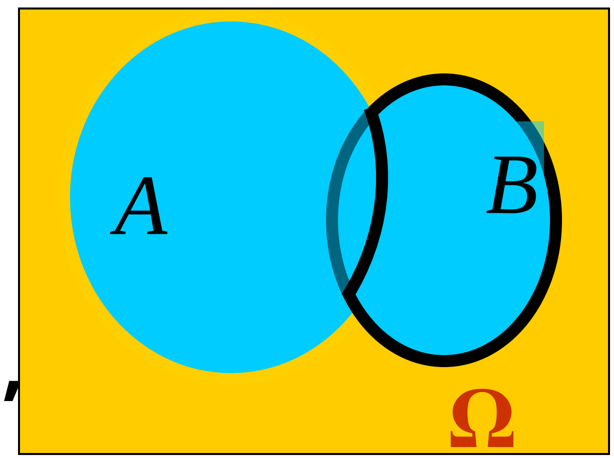
若一次试验的结果是甲乙**骰子都是二点，则这次试验A事件发生了。**

从集合的角度看



事件的关系及运算

根据定义知事件是样本点的集合，集合之间具有关系及运算，那么相应的事件之间也有关系与运算。由于事件是**具有特定概率意义**的集合，事件之间的关系及运算也就具有特定的概率含义。



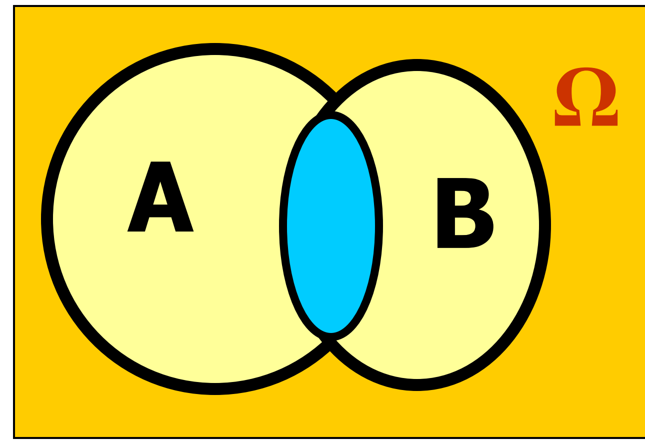
事件的和（并）运算

$A \cdot B$ ＝ “A与B至少有一个发生”

这就是和事件的概率意义，注意其等价的语言描述，如或者A发生，或者B发生等。

一般地，n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$的**和事件**记为$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$，可列个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$的和记为$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$，均表示“所列事件中至**少有一个**发生”。

事件的积（交）运算

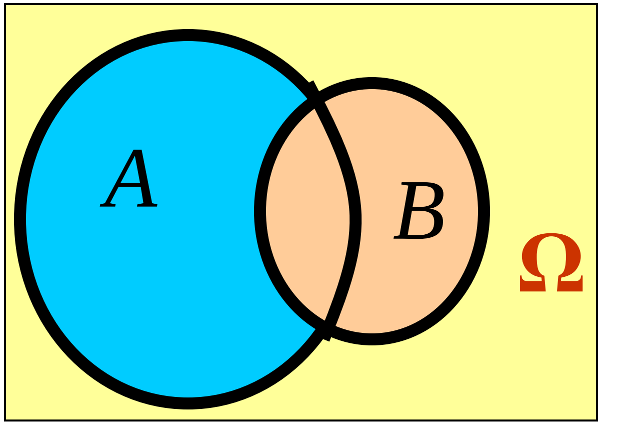


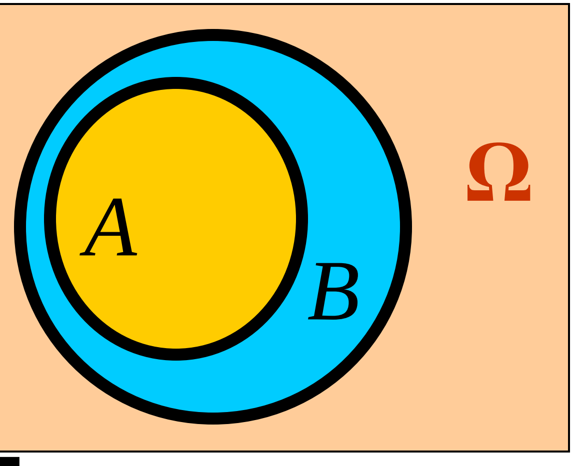
$A \cdot B$ = “两事件A与B同时发生”

一般地，n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$的**积事件**记为$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$，可列个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$的积记为$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$，均表示“所列事件**同时发生**”。

事件的差

$A-B$ =“A发生而B不发生”





包含关系 $A\subset B$

事件A发生，则必有事件B发生

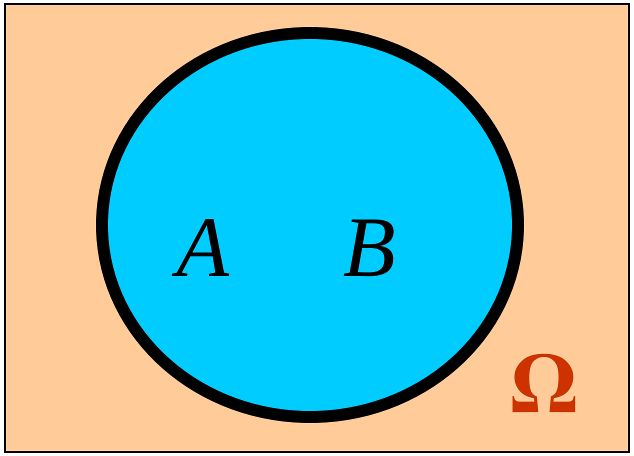
显然，对任意事件A，B，C，必有

(1) $A\subset\Omega$,

(2) if $A\subset B$, $B\subset C$, then $A\subset C$。

相等关系 $A = B$

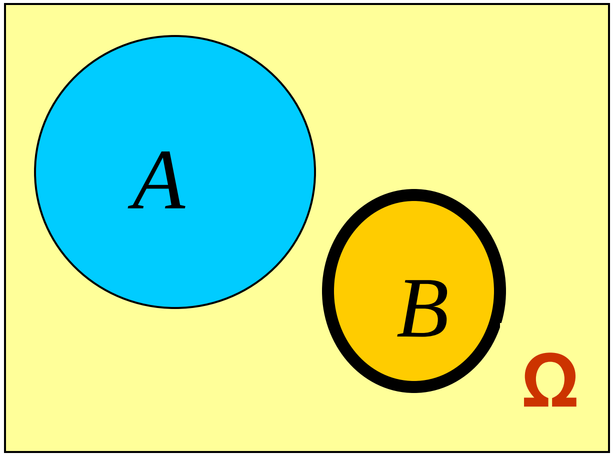
事件A发生，则必有事件B发生；反之，事件B发生，则事件A发生。



互斥关系，也称互不相容

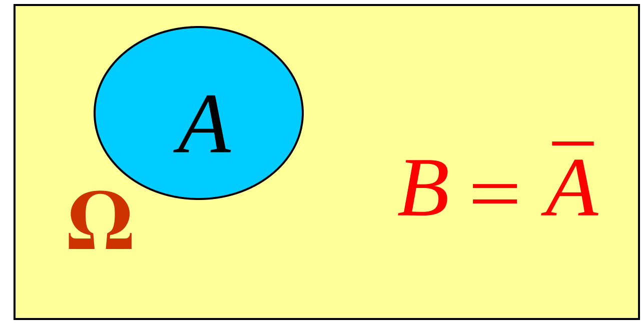
$A \cdot B = \varnothing$

A与B不能同时发生。



互逆关系，也称对立

$A \cdot B = \varnothing$， $A \cdot B = \Omega$， 记为$B = \overline{A}$。



显然，若A与B互逆，则A与B互斥。反之不然。并且有

$$\overline{\overline{A}} = A, \qquad A\overline{A} = \varnothing,$$

$$A \cdot \overline{A} = \Omega, \qquad A - B = A\overline{B} \text{。}$$

完备事件组(划分): $A_1, A_2,\ldots,A_n$ 满足

$$(1)A_iA_j=\Phi\,(i\neq j),$$

$$(2)\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$$

完备事件组将样本空间分为有限个互不相容的事件的和。

事件之间的运算律

- **交换律** $A\cup B=B\cup A,\ \ A\cap B=B\cap A$
- **结合律**

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\ \ (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

- **分配律** $A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C),\ A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$
- **对偶律**

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B},\quad \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B},\quad \overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}$$

除以上性质之外，另外还有

- **吸收律** $\textit{if}\quad A\subset B,\ \textit{then}\quad AB=A,\ A\cup B=B$
- **分解律** $\textit{if}\quad A\subset B,\ \textit{then}\quad B=A\cup\overline{A}B$
- **蕴涵律** $\textit{if}\quad AB=\varnothing,\ \textit{then}\quad A\subset\overline{B},\ B\subset\overline{A}$
- **差积转换律** $A\setminus B=A\overline{B}=A\setminus(AB)$

例题：一个工人生产了3个零件，事件A_i表示‘该工人生产的第i 个零件合格”，$i=1,2,3$。

试用A_i（$i=1,2,3$)表示如下事件：

1） B_1=“只有第一件是合格品”；

2） B_2=“三个零件中只有一个是合格品”；

3） B_3=“三个零件中最多有两个是合格品”；

4） B_4=“三个零件中最多有一个是不合格品”。

解（1）事件 B_1 等价于“第一个零件是合格品，同时第二和第三个都是次品”，故有 $B_1=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$

(2) 事件 B_2 =“只有一个是合格品”等价于“只有第一个零件是合格品”，或“只有第二个零件是合格品”，或“只有第三个零件是合格品”，由（1）有

$$B_2 = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3 \quad ;$$

(3) B_3=“最多有两个是合格品”

方法一：正面考虑，有

$$B_3=\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\right)\cup\left(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right)$$

$$\cup\left(\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup A_1A_2\overline{A_3}\right);$$

方法二：与B_3等价的是“至少有一个零件是次品”，故有 $B_3=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$

方法三：B_3的对立事件是“三个零件全是合格品”，即为$A_1A_2A_3$，所以有$B_3=\overline{A_1A_2A_3}$

大家可以去验证一下，虽然答案的表现形式不一样，但实质上是一样的。

一般来说，当一个事件直接表示比较困难，或则比较复杂时，就可以考虑先表示其对立事件，然后根据对立事件的对立事件就是其自身，比如出现“至少有多少个”，“最多多少个”的情况可以考虑其对立事件。

4） B_4 = “最多有一个是不合格品”

方法一：B_4等价于“三个零件均合格”，或者三个零件中仅有一个不合格，所以

$$B_4 = A_1A_2A_3 \cup \overline{A_1}A_2A_3 \cup A_1\overline{A_2}A_3 \cup A_1A_2\overline{A_3};$$

方法二： B4等价于“三个零件中至少有两个合格品”，所以

$$B_4 = A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup A_1A_3。$$

例题 一工厂生产n个零件，设A_i 表示“第i个零件是正品”.试用文字叙述下列事件:

$$\bigcup_{i=1}^{n}\left[\bar{A}_i \cap \left(\bigcap_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} A_k\right)\right]$$

只有一个零件不是正品

第i个零件不是正品

除第i个零件外的其它零件都是正品

只有第i个零件不是正品

练习 **甲乙丙三人各向靶子射击一次，** 设 A_i 表示第i人击中靶心.试用事件的运算关系表示下列事件：

(1) 至少两人击中靶心：

(2) 靶上仅中一弹：

(1) 至少两人击中靶心：$A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup A_1A_3$

甲乙击中，或 乙丙击中，或 甲丙击中

$A_1A_2 \quad \cup \quad A_2A_3 \quad \cup \quad A_1A_3$

(2) 靶上仅中一弹：$A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$

只有甲中，或 只有乙中，或 只有丙中

$A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \quad \cup \quad \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 \quad \cup \quad \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$