§ 8.3　区间估计

前面介绍了参数的点估计方法，即是用一个统计量$\theta(X_1, X_2, \cdot, X_n)$的估计值来估计参数θ。由于样本的随机性，算出来的估计值不一定正好是参数的真实值，即使是真实值，由于不知道参数值本身到底是多少，我们也无法确定这种相等。为了克服这种缺点，我们希望能找出这样的区间，使θ落在这个区间内的概率可以计算。这样，我们就可以在一定的可靠程度下得出估计值可能的最大误差。这就是区间估计的思想。

一、置信区间

定义8.7：设总体X 含有未知参数θ，X_1，X_2，…，X_n 是来自X 的样本，$\theta_1=\theta_1(X_1,X_2,\cdot,X_n)$，$\theta_2=\theta_2(X_1,X_2,\cdot,X_n)$ 是两个统计量。若对给定的概率 $1-\alpha(0<\alpha<1)$ 有

$$P(\theta_1<\theta<\theta_2)=1-\alpha \qquad (*)$$

称$1-\alpha$为**置信度或置信水平**，称 (θ_1,θ_2)为参数θ 的**置信度为 $1-\alpha$的置信区间**，θ_1，θ_2分别称为**置信下限，置信上限**。

注：（1） α通常很小，从而使得落在区间内的概率$P(\theta_1<\theta<\theta_2)=1-\alpha$很大，也即是说我们所估计的θ的区间可靠性很好， α 越小，可靠程度就越高。

（2）往往我们也希望估计的区间要短，即估计的精度要好。比如说，估计成都成人的身高为[1, 3]米，虽然可靠性很好，几乎是肯定的，但这样的估计没有任何意义，因为精度太差了。

（3）然而，上述两项要求是互相矛盾的。要想精度好（即估计区间(θ_1, θ_2)尽可能的窄），则可靠性就越差（即概率 $P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = 1 - \alpha$ 越小）；反之，可靠性越好，精度就越差。区间估计要求在样本容量给定的情况下，如何使二者尽可能都好！现在，人们的通用规则为：**先保证可靠性，然后使估计区间尽可能的窄（也即精度更好）。**

若给定样本值为$x_1, x_2, \cdot, x_n$，代入θ_1, θ_2，则得两实数$\theta_1(x_1, x_2, \cdot, x_n)$，$\theta_2(x_1, x_2, \cdot, x_n)$区间

$$(\theta_1(x_1, x_2, \cdot, x_n), \theta_2(x_1, x_2, \cdot, x_n))$$

也称为**置信区间**。

根据上面的分析，先保证可靠度，即先给出置信度$1-\alpha$，再保证精度尽可能地高，即确定尽可能短的置信区间。那么，怎么确定呢？也即如何确定θ_1，θ_2其**基本思想为**：

（1）$X_1, X_2, \cdot, X_n$是X的样本。取一个关于θ的较优的，最好是无偏的点估计 $\theta(X_1, X_2, \cdot, X_n)$;

（2）从θ出发，找一个仅含唯一未知参数θ 的

样本函数$W=W(X_1,X_2,\cdot,X_n;\theta)$，其分布类型是已知的如$N(0,1),\chi^2(n),t(n),F(n_1,n_2)$等，W 的分位点是能从表中查到的；

（3）查表得 W 的$\alpha/2$，$1-\alpha/2$分位点$W_{\alpha/2},W_{1-\alpha/2}$，此时自然有 $P(W_{\alpha/2}<W<W_{1-\alpha/2})=1-\alpha$;

（4）从不等式$W_{\alpha/2}<W<W_{1-\alpha/2}$解出$\theta$，得该不等式的等价形 式 $\theta_1(X_1,X_2,\cdot,X_n)<\theta<\theta_2(X_1,X_2,\cdot,X_n)$

从而 (θ_1,θ_2) 为θ的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间，此时有 $P(\theta_1<\theta<\theta_2)=1-\alpha.$

这样的置信区间 (θ_1,θ_2) 称为双侧置信区间。

（5）将样本值代入$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$, 得置信区间$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$

二、正态总体未知参数的双侧置信区间

1、**一个正态总体的情形**：设 $X_1, X_2, \cdot, X_n$ 是来自正态总体 $X \sim N(u, \sigma^2)$ 的样本，下面就各种情形加以讨论。

（1）已知 $\sigma^2 = \sigma_0^2$，求总体均值 u 的置信区间：

① 找u 的无偏估计：样本均值 $\bar{X}$ 是u 的无偏估计；；

② 从 $\bar{X}$ 出发，构造仅含未知参数u ，分布类型已知且分位点可查的样本函数：由样本均值的抽样分布定理知符合条件的样本函数可取为

$$U = \frac{\bar{X} - u}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

③ 对于给定的置信度$1-\alpha$，查表得所构造样本函数的分位点：由于$U \sim N(0,1)$，查得$\alpha/2, 1-\alpha/2$分位点分别为$u_{\alpha/2}, u_{1-\alpha/2}$，从而有$P(u_{\alpha/2} < U < u_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha$.，由于$u_{\alpha/2} = -u_{1-\alpha/2}$,所以有 $P(-u_{1-\alpha/2} < U < u_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha$.；

④ 求置信区间：解$-u_{1-\alpha/2} < U < u_{1-\alpha/2}$.，即解不等式

$$-u_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X}-u}{\sigma_0/\sqrt{n}} < u_{1-\alpha/2}$$ 得 $$\bar{X} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} < u < \bar{X} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},$$

此时有 $P(\bar{X} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} < u < \bar{X} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha$,从而u的置信度为 $1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right).$$

例：为估计一件物体的重量u，把它重复称了5次，得到结果（单位：千克）为：5.52, 5.48, 5.64, 5.51, 5.43，且这些测量值都服从正态分布 $N(u, 0.01)$，试对参数u给出置信度为 $1-\alpha=0.95$ 的置信区间。

解由题意知 $X \sim N(u, 0.01)$。由于 $\sigma^2=\sigma_0^2=0.01$ 已知，则置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$(\bar{x}-u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{x}+u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}})$$

因1 - α＝0.95，则 $1-\alpha/2=0.975$ 查表可知

$$u_{1-\alpha/2}=1.96,$$

又 n=5 且 $\sigma_0=\sqrt{0.01}=0.1$，经计算，样本均值为 $\overline{x}=5.516$，从而

$$\overline{x}-u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}=5.428,\quad \overline{x}+u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}=5.604,$$

所以，u的置信度为$1-\alpha=0.95$的置信区间为

(5.428,5.604)。

（2） σ^2未知，求总体均值 u的置信区间：

① 找 u的无偏估计：样本均值 $\bar{X}$是u 的无偏估计

② 从 $\bar{X}$ 出发，构造仅含未知参数 u，分布类型已知且分位点可查的样本函数：由抽样分布定理知符合条件的样本函数可取为

$$t=\frac{\bar{X}-u}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1),$$

（此时不能取（1）中的 $U=\frac{\bar{X}-u}{\sigma_0/\sqrt{n}}$，因为此时不再有已知$\sigma^2=\sigma_0^2$，即 σ^2也为未知参数）；

③ 对于给定的置信度1-α，查表得所构造样本函数的分位点：由于$t \sim t(n-1)$，查得$\alpha/2$和$1-\alpha/2$分位点分别为$t_{\alpha/2}(n-1), t_{1-\alpha/2}(n-1)$由于 $t_{\alpha/2}(n-1) = -t_{1-\alpha/2}(n-1)$，所以有

$$P(-t_{1-\alpha/2}(n-1) < t < t_{1-\alpha/2}(n-1)) = 1-\alpha;$$

④ 求置信区间：解 $-t_{1-\alpha/2}(n-1) < t < t_{1-\alpha/2}(n-1)$ 即解不等式 $-t_{1-\alpha/2}(n-1) < \dfrac{\bar{X}-u}{S/\sqrt{n}} < t_{1-\alpha/2}(n-1)$ 得 u 的置信度为1-α 的置信区间为

$$\bar{X} - t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < u < \bar{X} + t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}.$$

例：为估计一件物体的重量u，把它重复称了5次，得到结果（单位：千克）为：5.52, 5.48, 5.64, 5.51, 5.43，且这些测量值都服从正态分布 $N(u, 0.01)$，试对参数u给出置信度为 $1-\alpha=0.95$ 的置信区间。

在上例中，若σ² 未知，求平均重量u的置信度为1-α=95% 的置信区间。

解：由上例知样本均值为 $\bar{x}=5.516$ 由样本值可算得样本标准差为 $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=0.078$ 对于给定的 $1-\alpha=95\%$，则 $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.975}(4)=2.776$. 于是可得

$$\bar{x}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}=5.516-2.776\times\frac{0.078s}{\sqrt{5}}=5.419,$$

$$\bar{x}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}=5.516+2.776\times\frac{0.078s}{\sqrt{5}}=5.613.$$

则平均重量u 的置信度为1-α=95% 的置信区间为（5.419，5.613）。

注：上面两例相比，u的置信度同样为95% （即可靠性相同）的置信区间，后者比前者宽，即前者的精度要好些。这是因为前者比后者多用了一个信息 $\sigma=0.1$ 。

(3) u未知，求总体方差σ^2 的置信区间：

① 找 σ^2 的无偏估计:样本方差 S^2 是σ^2 的无偏估计；

② 从S^2出发，构造仅含未知参数σ^2 ，分布类型已知且分位点可查的样本函数：由样本方差的抽样分布定理 知符合条件的样本函数可取为

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$$

③ 对于给定的置信度1-α，查表得所构造样本函数的分位点：由于 $\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$，查得 $\alpha/2$，$1-\alpha/2$ 分位点分别为 $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$，$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$，则

$$P(\chi^2_{\alpha/2}(n-1) < \chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)) = 1-\alpha;$$

④ 求置信区间：解 $\chi^2_{\alpha/2}(n-1) < \chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$，即解不等式 $\chi^2_{\alpha/2}(n-1) < (n-1)S^2/\sigma^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ 得σ^2 的置信度为1-α的置信区间为 $\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}$

也即

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$$

例： 设某机床加工的零件长度 $X \sim N(u,\sigma^2)$，今抽查16个零件，测得长度（单位：mm）如下：

12.15，12.12，12.01，12.08，12.09，12.16，12.03，12.01，

12.06，12.13，12.07，12.11，12.08，12.01，12.03，12.06，

在置信度为95%时，试求总体方差σ^2 的置信区间。

解：对于给定的1-α=95%，则

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(15)=27.488,\quad \chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(15)=6.262,$$

并由样本值算得样本方差为 $s^2=0.00244.$，则

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}=\frac{15\times0.00244}{27.488}=0.0013,\quad \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}=\frac{15\times0.00244}{6.262}=0.0058,$$

由此得 σ^2 的置信区间为 (0.0013，0.0058)。

2、两个正态总体情形：设$X\sim N(u_1,\sigma_1^2),Y\sim N(u_2,\sigma_2^2)$是两个相互独立的正态总体，$X_1,X_2,\cdot,X_{n_1}$是来自X 的样本，$Y_1,Y_2,\cdot,Y_{n_2}$是来自Y 的样本，记

$$\bar{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i,\quad \bar{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}Y_i,\quad S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2,\quad S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2$$

X,Y的样本均值

X,Y的样本方差

同前面一样，下面就各种情形加以讨论。

（1）σ_1^2，σ_2^2已知，求总体均值差 u_1-u_2 的置信区间

此时，$\bar{X}-\bar{Y}$ 是u_1-u_2 的无偏估计，从而考虑样本函数

$$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(u_1-u_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1),$$

对于给给定的置信度1-α，与前面的讨论一致有：

$$P(-u_{1-\alpha/2}<U<u_{1-\alpha/2})=P\left(-u_{1-\alpha/2}<\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(u_1-u_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}<u_{1-\alpha/2}\right)=1-\alpha,$$

解 $-u_{1-\alpha/2}<\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(u_1-u_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}<u_{1-\alpha/2}$ 有

$$\bar{X}-\bar{Y}-u_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}<u_1-u_2<\bar{X}-\bar{Y}+u_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2},$$

所以，u_1-u_2 的置信度为1-α的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \bar{X}-\bar{Y}+u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$$

（2）$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知，求总体均值差 u_1-u_2 的置信区间：

此时，$\bar{X}-\bar{Y}$ 仍是u_1-u_2 的无偏估计，由定理6.4.8，我们考虑样本函数

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(u_1-u_2)}{S_W\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\sim t(n_1+n_2-2)\left(S_W=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\right)。$$

对于给给定的置信度1-α，类似于前面的讨论有：

$$P(-t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)<T<t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2))$$

$$=P\left(-t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)<\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(u_1-u_2)}{S_W\sqrt{1/n_1+1/n_2}}<t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right)=1-\alpha;$$

解 $-t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)<\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(u_1-u_2)}{S_W\sqrt{1/n_1+1/n_2}}<t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)$ 得

$$\bar{X}-\bar{Y}-t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{1/n_1+1/n_2}<u_1-u_2<\bar{X}-\bar{Y}+t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{1/n_1+1/n_2},$$

所以，u_1-u_2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为：

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\ \bar{X}-\bar{Y}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)。$$

(3) u_1，u_2，σ_1^2，σ_2^2 未知，求总体方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间：

此时，由定理6.4.8，我们考虑样本函数

$$F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1),$$

对于给定的置信度 1-α，有

$$P(F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)<F<F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1))$$

$$=P\left(F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)<\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}<F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\right)$$

$$=P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{S_1^2}{S_2^2F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)=1-\alpha;$$

所以，$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信度为1-α的置信区间为：

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)。$$

三、正态总体未知参数的单侧置信限：

前面介绍了双侧置信区间，然而，在实际生活中，我们还将遇到只求单侧置信限的问题。

定义：设总体 X 含有未知参数θ, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为 X 的样本。若存在统计量 $\theta_1 = \theta_1(X_1, X_2, \cdot, X_n)$ 使得 $P(\theta > \theta_1) = 1-\alpha$,称$\theta_1$为θ的置信度为1-α的单侧置信下限；若存在统计量 $\theta_2 = \theta_2(X_1, X_2, \cdot, X_n)$使得$P(\theta < \theta_2) = 1-\alpha$,称$\theta_2$为参数θ 的置信度为1-α的单侧置信上限。

下面以一个例子说明单侧置信区间或单侧置信限的求法。

例：设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $X \sim N(u,\sigma^2)$ 的样本，求u 的置信度为的单侧置信限。

解：这是一个正态总体在总体方差未知的情况下，对总体均值的区间估计问题。同双侧情况相同，应取样本函数为

$$t = \frac{\bar{X} - u}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

因为只需对总体均值u 作单侧估计，注意到 t 分布的对称性。查表可得 $t_{\alpha}(n-1)$，$t_{1-\alpha}(n-1)$ 从而有

$$P(t < t_{1-\alpha}(n-1)) = 1-\alpha,$$

$$P(t > t_{\alpha}(n-1)) = 1 - P(t < t_{\alpha}(n-1)) = 1-\alpha$$

因为

$$t < t_{1-\alpha}(n-1) \Leftrightarrow \frac{\bar{X}-u}{S/\sqrt{n}} < t_{1-\alpha}(n-1) \Leftrightarrow u > \bar{X} - t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},$$

$$t > t_{\alpha}(n-1) \Leftrightarrow \frac{\bar{X}-u}{S/\sqrt{n}} > t_{\alpha}(n-1) \Leftrightarrow u < \bar{X} + t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}.$$

于是

$$P(u > \bar{X} - t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha,$$

$$P(u < \bar{X} + t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha.$$

于是得：在总体方差 σ^2 未知的情况下，总体均值u的置信度为$1-\alpha$的单侧置信下限为 $\hat{u}_1 = \bar{X} - t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$

单侧置信上限为 $\hat{u}_2 = \bar{X} + t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$。

与相同情况下的双侧置信区间

$$(\bar{X} - t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})$$

相比，容易看出，只需将双侧置信限的临界值的下标中的$1-\alpha/2$换为$1-\alpha$，$\alpha/2$换为 α就得到相应的单侧置信限。

对于其它情形下的区间估计问题有相同的结论。

如：总体 $X \sim N(u,\sigma^2)$ 且 σ 已知时，应用样本函数

$$U=\frac{\bar{X}-u}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

则u的置信度为1-α的单侧置信下限为 $\hat{u}_1=\bar{X}-u_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$，

单侧置信上限为 $\hat{u}_2=\bar{X}+u_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$。

同样，当总体 $X \sim N(u,\sigma^2)$ 且 u 未知时，应用样本函数

$$\chi^2=\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$$

则 σ_2 的置信度为1-α的单侧置信下限为 $\hat{\sigma}^2{}_1=\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$，单侧置信上限为 $\hat{\sigma}^2{}_2=\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$。

一个正态总体参数的区间估计表

被估参数		条件	用于估计的统计量	统计量的分布	置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间	双侧临界值的求法
一个正态总体	u	σ^2 已知	$U=\dfrac{\bar{X}-u}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0,1)$	$\left(\bar{X}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$P(\lvert u\rvert<u_{1-\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha$
		σ^2 未知	$t=\dfrac{\bar{X}-u}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$\left(\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}},\bar{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$	$P(\lvert t\rvert<t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1))=1-\alpha$
	σ^2	u 已知	$\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-u)^2}{\sigma^2}$	$\chi^2(n)$	$\left(\dfrac{(n-1)\sigma^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)},\dfrac{(n-1)\sigma^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$	$P(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)<\chi^2<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n))$ $=1-\alpha$
		u 未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$	$P(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\chi^2<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1))$ $=1-\alpha$

两个正态总体参数的区间估计表

被估参数		条件	用于估计的统计量	统计量的分布	置信度为$1-\alpha$的置信区间	双侧临界值的求法
两个正态总体	u_1-u_2	σ_1^2 σ_2^2 已知	$U=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-u_1-u_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$N(0,1)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y}-\mu_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \bar{X}-\bar{Y}+\mu_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$	$P(\lvert u\rvert<u_{1-\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha$
		σ_1^2 σ_2^2 未知等	$t=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-u_1-u_2}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$	$t(n_1+n_2-2)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}},\ \bar{X}-\bar{Y}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$	$P(\lvert t\rvert<t_{1-\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha$
	$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	u 未知	$F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$	$F(n_1-1,n_2-1)$	$\left(\dfrac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}},\ \dfrac{S_1^2/S_2^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}}\right)$	$P(F_{\frac{\alpha}{2}}<F<F_{1-\frac{\alpha}{2}})$ $=1-\alpha$