

# 习题课2 - 谓词逻辑

---

主讲 林 兰

2022 秋季



## 第二章

### 一、基本概念

全总个体域（全论域）、全称量词、存在量词、特性谓词、指导（作用）变元、辖域（作用域）、约束变元、自由变元、约束变元的改名规则、自由变元的代入规则、常量符号、变量符号、函数符号、谓词符号、谓词公式、公式的解释、永真公式（重言式）、永假公式（矛盾式，不可满足公式）、可满足公式、前束范式、母式、前束合取（或析取）范式、Skolem范式、US（全称指定规则）、ES（存在指定规则）、UG（全称推广规则）、EG（存在推广规则）



## 二、基本要求

- 能准确地将给定命题符号化
- 深刻理解全称量词、存在量词及量词的辖域、全总个体域的概念
- 能准确理解约束变元(量)和自由变元的概念
- 掌握约束变元的改名规则和自由变元的代入规则
- 掌握与量词相关的基本等价式和基本蕴涵式
- 能熟练地运用US、ES、UG、EG规则进行推理

# 语句的符号化

1、将下列命题翻译成谓词公式

- ① 每个有理数都是实数，但是并非每个实数都是有理数，有些实数是有理数。

$R(x)$ :  $x$ 是实数

$Q(x)$ :  $x$ 是有理数

$$\forall x (Q(x) \rightarrow R(x)) \wedge \neg \forall x (R(x) \rightarrow Q(x)) \\ \wedge \exists x (R(x) \wedge Q(x))$$

- ② 直线 $a$ 和 $b$ 平行当且仅当 $a$ 和 $b$ 不相交。

$A(x)$ :  $x$ 是直线

$F(x, y)$ :  $x$ 与 $y$ 平行

$G(x, y)$ :  $x$ 与 $y$ 相交

$$\forall a \forall b (A(a) \wedge A(b) \rightarrow \\ (F(a, b) \leftrightarrow \neg G(a, b)))$$

# 语句的符号化

③ 除非所有会员都参加，这个活动才有意义。

等于说：如果这个活动有意义，那么所有会员都参加这个活动。

$A(x)$  :  $x$  是会员

$B(x)$  :  $x$  有意义                       $a$  : 这个活动

$F(x, y)$  :  $x$  参加  $y$

$B(a) \rightarrow \forall x (A(x) \rightarrow F(x, a))$

或  $\neg \forall x (A(x) \rightarrow F(x, a)) \rightarrow \neg B(a)$

④ 任何正整数不是合数就是素数。

$A(x)$  :  $x$  是正整数

$B(x)$  :  $x$  是合数

$C(x)$  :  $x$  是质数

$\forall x (A(x) \rightarrow B(x) \vee C(x))$



# 语句的符号化

- ⑤ 凡是存钱的人都想有利息，如果没有利息，人们就不会存钱。

等于说：所有存钱（人）都有利息，如果存钱没有利息，那么就不存钱。

$P(x)$  :  $x$  存钱

$I(x)$  :  $x$  有利息

$\forall x [P(x) \rightarrow (I(x) \wedge (\neg I(x) \rightarrow \neg P(x)))]$

或  $\forall x [P(x) \rightarrow I(x)] \wedge \forall x [\neg I(x) \rightarrow \neg P(x)]$

# 典型例题

**例1** 将下列三条自然数公理翻译成谓词公式：

- ① 每个自然数有且仅有一个直接后继；
- ② 没有任何自然数以0为其直接后继；
- ③ 对0以外的任何自然数，有且仅有一个直接先行。

**解：**设个体域D为自然数

令  $p(x)$  : x的直接先行；

$s(x)$  : x的直接后继；

$EQUAL(x, y) : x=y$

- ①  $(\forall x) (\exists y) [EQUAL(y, s(x)) \wedge$   
 $(\forall z) [EQUAL(z, s(x)) \rightarrow EQUAL(y, z)]]$

有

且仅有



---

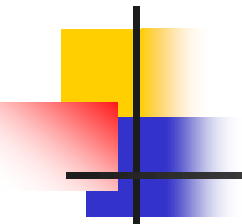
②  $\sim (\exists x) \text{EQUAL}(0, s(x))$

③  $(\forall x) [\sim \text{EQUAL}(x, 0)$

$\rightarrow (\exists y) [\text{EQUAL}(y, p(x)) \wedge (\forall z) [\text{EQUAL}(z, p(x))$   
 $\rightarrow \text{EQUAL}(y, z)]]]$

0以外的任何  
自然数





**例2** 根据前提集合：同事之间总是有工作矛盾的，张平和李明没有工作矛盾，能得出什么结论？

解：  $P(x, y)$ ：  $x$ 和 $y$ 是同事关系，

$Q(x, y)$ ：  $x$ 和 $y$ 有工作矛盾，

$a$ ： 张平，  $b$ ： 李明。

则前提符号化为：  $\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow Q(x, y)), \sim Q(a, b)$



## 例2(续)

由前提:  $\forall x\forall y(P(x, y) \rightarrow Q(x, y)), \sim Q(a, b)$

推理如下:

- |   |          |
|---|----------|
| ① $\forall x\forall y(P(x, y) \rightarrow Q(x, y))$   | P        |
| ② $\forall y(P(\textcolor{red}{a}, y) \rightarrow Q(\textcolor{red}{a}, y))$                          | T ① US   |
| ③ $P(\textcolor{red}{a}, \textcolor{blue}{b}) \rightarrow Q(\textcolor{red}{a}, \textcolor{blue}{b})$ | T ② US   |
| ④ $\sim Q(a, b)$  | P        |
| ⑤ $\sim P(a, b)$  | T ③④ 拒取式 |

所以, 得出张平和李明不是同事关系。



例3 证明下列论断的正确性：

有些学生相信所有的教师；任何一个学生都不相信骗子；所以，教师都不是骗子。

解：设谓词如下：

$S(x)$ ：x是学生

$T(x)$ ：x是教师

$P(x)$ ：x是骗子

$L(x, y)$ ：x相信y

则可符号化为：

前提： $(\exists x) [S(x) \wedge (\forall y) (T(y) \rightarrow L(x, y))]$ ，

$(\forall x) (\forall y) [(S(x) \wedge P(y)) \rightarrow \sim L(x, y)]$ 。

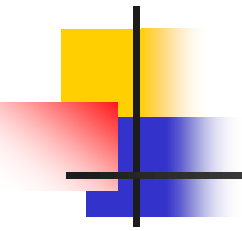
结论： $(\forall x) [T(x) \rightarrow \sim P(x)]$



证明:

---

- 1)  $(\exists x)[S(x) \wedge (\forall y)(T(y) \rightarrow L(x, y))]$  P
- 2)  $S(c) \wedge (\forall y)(T(y) \rightarrow L(c, y))$  ES, 1)
- 3)  $S(c)$  T, 2), I
- 4)  $(\forall y)(T(y) \rightarrow L(c, y))$  T, 2), I
- 5)  $T(x) \rightarrow L(c, x)$  US, 4)
- 6)  $(\forall x)(\forall y)[(S(x) \wedge P(y)) \rightarrow \sim L(x, y)]$  P
- 7)  $(\forall y)[(S(c) \wedge P(y)) \rightarrow \sim L(c, y)]$  US, 6)
- 8)  $(S(c) \wedge P(x)) \rightarrow \sim L(c, x)$  US, 7)
- 9)  $S(c) \rightarrow (P(x) \rightarrow \sim L(c, x))$  T, 8), E
- 10)  $P(x) \rightarrow \sim L(c, x)$  T, 3), 9), I
- 11)  $L(c, x) \rightarrow \sim P(x)$  T, 10), E
- 12)  $T(x) \rightarrow \sim P(x)$  T, 5), 11), I
- 13)  $(\forall x)(T(x) \rightarrow \sim P(x))$  UG, 12)



**例4** 所有的有理数都是实数；所有的无理数也是实数；虚数不是实数。因此，虚数既不是有理数也不是无理数。

**解：** 设 $Q(x)$ ： $x$ 是有理数； $R(x)$ ： $x$ 是实数；

$N(x)$ ： $x$ 是无理数；  $C(x)$ ： $x$ 是虚数；

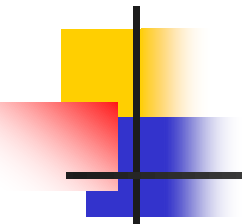
$(\forall x) [Q(x) \rightarrow R(x)]$ ,

$(\forall x) [N(x) \rightarrow R(x)]$ ,

$(\forall x) [C(x) \rightarrow \sim R(x)]$

$\Rightarrow (\forall x) [C(x) \rightarrow (\sim Q(x) \wedge \sim N(x))]$

直接演绎推理：



(1)	$(\forall x) (Q(x) \rightarrow R(x))$	P
(2)	$Q(x) \rightarrow R(x)$	US (1)
(3)	$(\forall x) (N(x) \rightarrow R(x))$	P
(4)	$N(x) \rightarrow R(x)$	US (3)
(5)	$(\forall x) (C(x) \rightarrow \sim R(x))$	P
(6)	$C(x) \rightarrow \sim R(x)$	US (5)
(7)	$R(x) \rightarrow \sim C(x)$	T (6) E
(8)	$Q(x) \rightarrow \sim C(x)$	T (2) (7), I
(9)	$N(x) \rightarrow \sim C(x)$	T (4) (7), I
(10)	$(Q(x) \rightarrow \sim C(x)) \wedge (N(x) \rightarrow \sim C(x))$	T (8) (9), I (合取)
(11)	$C(x) \rightarrow (\sim Q(x) \wedge \sim N(x))$	T (10), E, I (二难推理)
(12)	$(\forall x) (C(x) \rightarrow (\sim Q(x) \wedge \sim N(x)))$	UG (11)