§8.2 估计量的评选标准

前面介绍了两种估计方法，对同一个参数，可能有多个估计量，一个自然的问题是：多个估计量中，哪一种更好呢？这就需要给出估计量的评选标准。常用的标准有：无偏性、有效性、一致性、均方误差标准。

一、无偏性

θ的估计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是随机变量，它依赖于抽取的样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 及样本值。 样本不一样，则估计值可能就不同。 要 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的一个好的估计量，其取值的平均值就不应当偏离θ，换句话说，应当满足

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

定义8.3：若 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$满足$E(\hat{\theta})=\theta$，则称$\hat{\theta}$为参数 θ的无偏估计量。反之称为有偏估计量

对有偏估计量$\hat{\theta}$，称 $b(\hat{\theta})=E(\hat{\theta})-\theta$ 为 $\hat{\theta}$ 的偏差，若样本容量$n\to\infty$时有 $b(\hat{\theta})\to 0$ 则称$\hat{\theta}$为 θ 的渐近无偏估计。

例8.9：设X 是任意总体，其数学期望$E(X)=u$ 以及方差$D(X)=\sigma^2$均存在，$X_1, X_2, \cdots, X_n$为样本。 证明：样本均值 $\overline{X}$ 和样本方差 S^2分别为 u，σ^2 的无偏估计。

证明：

$$E(\overline{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u=u;$$

$$E(S^2)=E(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2)=\frac{1}{n-1}E(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2)$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-\frac{n}{n-1}E(\bar{X}^2)$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^{\,2})-\frac{n}{n-1}[D(\bar{X})+(E(\bar{X}))^2]$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[D(X_i)+(E(X_i))^2]-\frac{n}{n-1}[D(\bar{X})+(E(\bar{X}))^2]$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+u^2)-\frac{n}{n-1}(\frac{\sigma^2}{n}+u^2)$$

$$=\frac{n(\sigma^2+u^2)-\sigma^2-nu^2}{n-1}=\sigma^2.$$

该例说明，无论总体X 服从什么样的分布，样本均值 $\bar{X}$ 和样本方差 S^2 总分别为总体均值 u 和总体方差 σ^2 的无偏估计。

思考：由矩估计法知样本的二阶中心矩是总体方差的矩估计，那么，它是总体方差的无偏估计吗?

解：

$$B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{n-1}{n}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]$$

$$=\frac{n-1}{n}S^2.$$

$$E(B_2)=E(\frac{n-1}{n}S^2)=\frac{n-1}{n}E(S^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2.$$

故不是无偏估计，而是渐进无偏估计。

二、有效性

一个参数θ的无偏估计可能有很多，例如 $\bar{X}$和 $\frac{X_1}{4}+\frac{3X_2}{4}$都是总体均值的无偏估计，这时候，谁更好呢？由于它们都在θ的周围波动，我们认为波动得越小，取值更稳定。这就涉及另一个评选标准：**有效性**。

定义8.4设 $\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，$\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$都是 θ的无偏估计，若 $D(\hat{\theta}_1)\le D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效。

例：设总体 $X\sim U(0,\theta)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是样本。证明：

$\hat{\theta}_1=2\bar{X}$，$\hat{\theta}_2=\frac{n+1}{n}\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$ 都是θ的无偏估计。试问：

哪一个更有效?

证明： 显然，$E(X)=E(\bar{X})=\dfrac{\theta}{2}$，故

$$E(\hat{\theta}_1)=E(2\bar{X})=2E(\bar{X})=\theta,$$

记 $Y=\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$，则 $\hat{\theta}_2=\dfrac{n+1}{n}Y$，从而 $E(\hat{\theta}_2)=\dfrac{n+1}{n}E(Y)$

因总体 $X\sim U(0,\theta)$，故它的密度函数和分布函数分别为

$$f_X(x,\theta)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{\theta}, & 0<x<\theta,\\ 0, & x\ge\theta.\end{cases}\qquad F_X(x,\theta)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{x}{\theta}, & 0<x<\theta,\\ 1, & x\ge\theta.\end{cases}$$

则Y 的分布函数为 $F_Y(y,\theta)=(F_X(y,\theta))$ 从而其密度为

$$f_Y(y,\theta)=\frac{dF_Y(y,\theta)}{dy}=\frac{d[(F_X(y,\theta))^n]}{dy}=n(F_X(y,\theta))^{n-1}\cdot\frac{dF_X(y,\theta)}{dy}$$

$$=n(F_X(y,\theta))^{n-1}\cdot f_X(y,\theta)=\begin{cases}\dfrac{ny^{n-1}}{\theta^n}, & 0<y<\theta,\\ 0, & else.\end{cases}$$

所以 $E(Y)=\int_0^\theta y\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}dy=\frac{n}{n+1}\theta$ 于是有

$$E(\hat\theta_2)=\frac{n+1}{n}E(Y)=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\theta=\theta.$$

从上可见，有 $E(\hat\theta_1)=E(\hat\theta_2)=\theta$，这就说明 $\hat\theta_1$ 和 $\hat\theta_2$ 都是 θ 的无偏估计。

因 $D(\hat\theta_1)=D(2\bar X)=4D(\bar X)=4\times\dfrac{\sigma^2}{n}=4\times\dfrac{\frac{\theta^2}{12}}{n}=\dfrac{\theta^2}{3n};$

$$D(\hat{\theta}_2)=D(\frac{n+1}{n}Y)=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 D(Y)=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 (E(Y^2)-(E(Y))^2)$$

$$=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\left(\int_0^\theta y^2\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}dy-\left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2\right)$$

$$=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\left(\frac{n\theta^2}{(n+2)}-\left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2\right)=\frac{\theta^2}{n(n+2)};$$

由于$\frac{1}{n(n+2)}\le\frac{1}{3n}$因此 $D(\hat{\theta}_2)\le D(\hat{\theta}_1)$ 即 $\hat{\theta}_2$ 比 $\hat{\theta}_1$ 更有效

三、一致性

不管是对参数θ的点估计还是极大似然估计 $\hat{\theta}$，显然都是与样本容量 n 相关的，即 $\hat{\theta}=\hat{\theta}_n$。当样本容量 n 充分大，我们的估计应越来越准确。所以一个自

然的要求是：当 n 趋于无穷大∞时，$\hat{\theta} = \hat{\theta}_n$应趋于θ。这就是估计量好坏的第3个标准：一致性。

定义8.5：若θ的估计量 $\hat{\theta}_n$ 依概率收敛于θ，即：对任意的ε>0 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\right) = 1,$$

则称 $\hat{\theta}_n$ 是θ的一致估计量（相合估计量）。

例：设总体X服从任何分布，且 $E(X) = u, D(X) = \sigma^2$ 利用独立同分布大数定理可证明：样本均值 $\overline{X}$ 是总体均值u的一致估计量。

四、均方误差标准

定义8.6 对于总体X的未知参数θ，$\hat{\theta}$是θ的估计量，称

$$m(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2$$

为均方误差。若两个估计量$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$有

$$M(\hat{\theta}_1) \le M(\hat{\theta}_2)$$

则称$\hat{\theta}_1$在均方误差下比$\hat{\theta}_2$更有效。

均方误差与偏差、方差的关系

定理**8.2**　在定义**8.6**下，有

$$M(\hat{\theta}) = D(\hat{\theta}) + b^2(\hat{\theta})$$

$$= D(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$$

证：$\because M(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2$

$$= E\{[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})] + [E(\hat{\theta}) - \theta]\}^2$$

将上述完全平方式展开，注意到交叉项为**0**，可验证。