习题课3 - 集合与关系

主 讲　林 兰

2022 秋季

基本要求

1. 正确理解幂集、笛卡尔集和关系的定义；
2. 能正确使用集合表达式，关系矩阵，关系图表示给定的二元关系；
3. 牢记关系的5个性质的定义，对给定A上的关系R，能用三种方式（集合、矩阵、图）判断该关系R所具有的性质；
4. 熟练掌握关系的各种运算，特别是复合运算和逆运算；

5. 正确理解关系运算的性质
6. 熟练掌握关系的闭包的概念和性质；
7. 掌握用矩阵计算传递闭包的Warshall(1962)算法；
8. 能正确理解闭包运算；
9. 熟练掌握等价关系、等价类的定义；
10. 正确理解集合的划分(分划)；
11. 熟练掌握偏序关系、偏序集、哈斯图等概念；
12. 熟练掌握由关系图得到哈斯图的方法；

13. 熟练掌握偏序集中特定元素的计算；
14. 掌握全序关系、良序关系、良序集等概念；
15. 掌握对给定的有限偏序集构造全序集的拓扑排序算法；
16. 能正确使用按定义证明的方法进行关系的性质和特殊关系的证明 。
17. 掌握函数定义；单射，满射，双射。
18. 函数的运算。
19. 集合的基数。

例1

设$A=\{a, b, c, d, e, f\}$，定义在A上的关系

$R=\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, e\rangle, \langle e, f\rangle\}$，

$S=\{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, e\rangle, \langle e, f\rangle\}$，求$R^n$和$S^n$。

解 $R^1=R$，

$R^2=R\circ R=\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, e\rangle, \langle d, f\rangle\}$，

$R^3=R\circ R\circ R=R^2\circ R$

$=\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, e\rangle, \langle c, f\rangle\}$，

$R^4=R^3\circ R=\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle a, e\rangle, \langle b, f\rangle\}$，

$R^5=R^4\circ R=\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle a, e\rangle, \langle a, f\rangle\}$，

$R^6=R^5\circ R=\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle a, e\rangle, \langle a, f\rangle\}$

$=R^5$，

$R^7=R^6\circ R=R^5$， …， $R^n=R^5$ （$n>5$）。

例1（续）

$S^1 = S = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, e\rangle, \langle e, f\rangle\}$,

$S^2 = S \circ S = \{\langle a, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, e\rangle, \langle d, f\rangle\}$,

$S^3 = S \circ S \circ S = S^2 \circ S = \{\langle a, d\rangle, \langle b, e\rangle, \langle c, f\rangle\}$,

$S^4 = S^3 \circ S = \{\langle a, e\rangle, \langle b, f\rangle\}$,

$S^5 = S^4 \circ S = \{\langle a, f\rangle\}$,

$S^6 = S^5 \circ S = \Phi$,

$S^7 = \Phi$， …,

$S^n = \Phi$ （$n > 5$）。

例2

集合A={a，b，c，d}上有多少不同的等价关系？

解：不同的划分个数为:

$$\mathbf{1+}C_4^2+C_4^3+\frac{1}{2}C_4^2+1=15$$

不同的等价关系个数等于不同的划分个数，所以不同的等价关系个数为15。

商集(*Quotient set*)

设R是非空集合A上的等价关系，以R的所有不同等价类为元素作成的集合称为A在R下的商集，简称A的商集，记作A/R。

$$A/R=\{[x]_R | x \in A\}$$

A/R恰是集合A的一个划分。

例如 设集合A={1, 2, 3, ..., 10}，R是模3同余关系，则A在R下的商集为A/R＝{$[1]_R$，$[2]_R$，$[3]_R$}

这里 $[1]_R=\{1, 4, 7, 10\}$

$[2]_R=\{2, 5, 8\}$

$[3]_R=\{3, 6, 9\}$

例3

是否存在非空集合A上的一个关系R，它既是等价关系，又是偏序关系？

解：

集合A上恒等关系I_A具有自反性、传递性、对称性和反对称性，既是等价关系，也是偏序关系。

例4

非空集合|A|=n，A上有多少个自反对称关系？又有多少个反对称关系？

解：

自反对称关系个数：$2^{C_n^2}$

反对称关系个数： $3^{C_n^2} \cdot 2^n$

例5

设R是集合A上的一个传递关系和自反关系，S是A上的一个关系，使得对任意$a, b \in A$，$\langle a, b\rangle \in S$当且仅当$\langle a, b\rangle \in R$且$\langle b, a\rangle \in R$，试证明S是A上的一个等价关系。

证明：

1）对任意$a \in A$，因R是自反的，所以$\langle a, a\rangle \in R$。由$\langle a, a\rangle \in R$并且$\langle a, a\rangle \in R$，有$\langle a, a\rangle \in S$，即S是自反的。

2）对任意$a, b \in A$，若$\langle a, b\rangle \in S$，则由已知条件有$\langle a, b\rangle \in R$并且$\langle b, a\rangle \in R$，即有$\langle b, a\rangle \in R$并且$\langle a, b\rangle \in R$，
所以，$\langle b, a\rangle \in S$，即S是对称的。

3）对任意$a, b, c \in A$，若$\langle a, b\rangle \in S$，$\langle b, c\rangle \in S$，

则由已知条件有：$\langle a, b\rangle \in R$并且$\langle b, a\rangle \in R$和$\langle b, c\rangle \in R$并且$\langle c, b\rangle \in R$。

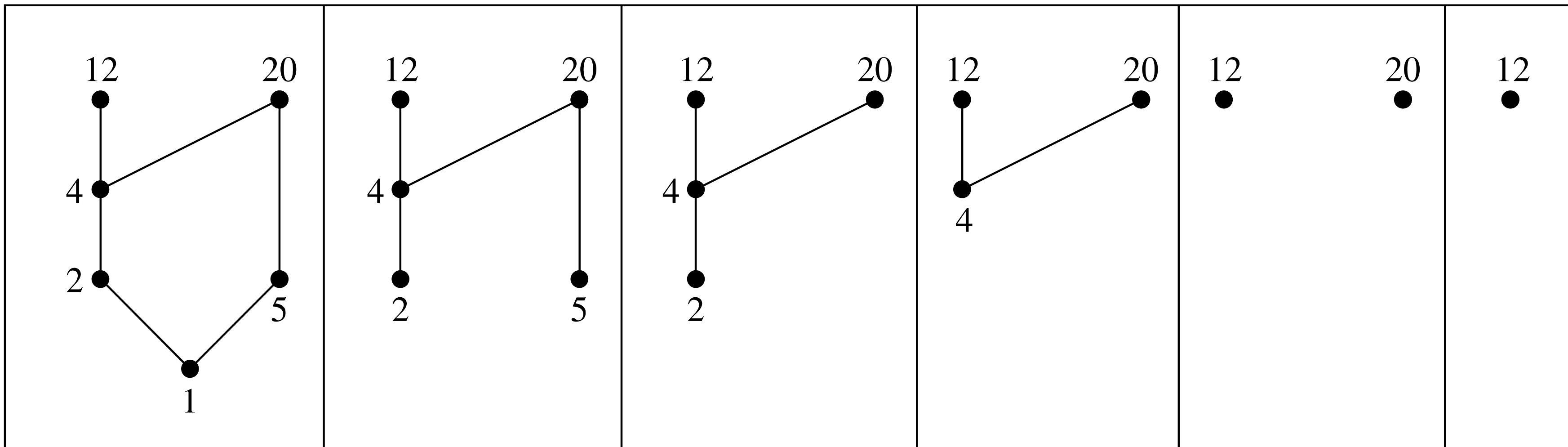
所以，由$\langle a, b\rangle \in R$并且$\langle b, c\rangle \in R$，有$\langle a, c\rangle \in R$；

由$\langle c, b\rangle \in R$并且$\langle b, a\rangle \in R$，有$\langle c, a\rangle \in R$；由：$\langle a, c\rangle \in R$并且$\langle c, a\rangle \in R$，有$\langle a, c\rangle \in S$，即S是传递的。

由1)，2)，3)知，S是A上的一个等价关系。

例6

对于偏序集({1, 2, 4, 5, 12, 20}, |)，画出Hasse图，并求出它的一种拓扑排序。



极小元选择	1	5	2	4	20	12

$1 \preccurlyeq 5 \preccurlyeq 2 \preccurlyeq 4 \preccurlyeq 20 \preccurlyeq 12$

几种拓扑排序?

习题三

17 证明：(1) 设$X \in 2^A \cup 2^B$

有 $X \in 2^A \cup 2^B \Leftrightarrow X \in 2^A \vee X \in 2^B$

$\Leftrightarrow X \subseteq A \vee X \subseteq B$

$\Rightarrow X \subseteq A \cup B$

$\Leftrightarrow X \in 2^{A \cup B}$

等号成立的条件：$A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$

(2) 设$X \in 2^A \cap 2^B$

有 $X \in 2^A \cap 2^B \Leftrightarrow X \in 2^A \wedge X \in 2^B$

$\Leftrightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B$

$\Leftrightarrow X \subseteq A \cap B$

$\Leftrightarrow X \in 2^{A \cap B}$

习题四

6. 解：

	$x\|y$	$x \equiv y \pmod m$	$xy>0$	$x=y$或$\|x-y\|=1$	$x^2>y^2$
自反性	×	√	×	√	×
反自反性	×	×	×	×	√
对称性	×	√	√	√	×
反对称性	×	×	×	×	√
传递性	√	√	√	×	√

习题四

8. 解：

运算 性质	$R\cap S$	$R\cup S$	$R-S$	$R\circ S$	$\overline{R}$	R^{-1}
自反性	√	√	×	√	×	√
反自反性	√	√	√	×	×	√
对称性	√	√	√	×	√	√
反对称性	√	×	√	×	×	√
传递性	√	×	×	×	×	√

习题四

12. 解： 如题，令$A_1=\{a,b,c\}$, $A_2=\{d,e,f,g,h\}$, 则$A=A_1 \cup A_2$，

对应关系R_1，R_2，$R = R_1 \cup R_2$，且$R_1 \cap R_2 = \emptyset$。

那么，$R^K = {R_1}^k \cup {R_2}^k$,

而有 $R_1^3 = I_{A_1}$ $R_2^5 = I_{A_2}$，

则k应满足3|k，5|k（求最小公倍数）

得 k=15，即当n=16时

$$R^{16} = {R_1}^{16} \cup {R_2}^{16} = R_1 \cup R_2 = R$$

故使 $R^m=R^n$ 的最小正整数：m=1, n=16

习题四

16.证明

(2) ①式，

$s(R_1 \cup R_2)=(R_1 \cup R_2) \cup (R_1 \cup R_2)^{-1}=(R_1 \cup R_2) \cup (R_1^{-1} \cup R_2^{-1})$

$= (R_1 \cup R_1^{-1}) \cup (R_2 \cup R_2^{-1})=s(R_1) \cup s(R_2)$

②式，由于$R_1 \cap R_2 \subseteq R_1$，$R_1 \cap R_2 \subseteq R_2$，由定理4.7

$s(R_1 \cap R_2) \subseteq s(R_1)$，$s(R_1 \cap R_2) \subseteq s(R_2)$

$\Rightarrow s(R_1 \cap R_2) \subseteq s(R_1) \cap s(R_2)$

得证。

习题六

5.设 $f: A \to B, C \subseteq A$, 证明:$f(A) - f(C) \subseteq f(A - C)$

证明: 设任意$b \in f(A) - f(C)$，则

$$b \in f(A) - f(C)$$

$$\Rightarrow b \in f(A) \ \wedge \ b \notin f(C)$$

$$\Rightarrow (\exists a)[a \in A \ \wedge a \notin C \wedge f(a) = b]$$

$$\Rightarrow (\exists a)[a \in A - C \ \wedge \ f(a) = b]$$

$$\Rightarrow b \in f(A - C)$$

所以 $f(A) - f(C) \subseteq f(A - C)$

习题六

9.证明：

设 x_1, x_2是有限集X上的2个元素，如果 $f(x_1) = f(x_2)$

则 $x_1 = f^2(x_1) = f^2(x_2) = x_2$

$\therefore$ f是X上的单射。

假设有限集X有n个元素，若f 不是满射，那么

X中至少有1个元素没有像源，则 $|f(X)| < n$

又$\because f: X \to X$是单射, $|f(X)| = |X| = n$ ，矛盾。

$\therefore$ f是X上的满射。

故 f是双射。

习题六

10.证明：

根据g的定义，$g(b) = \{x \in A | f(x) = b\}$，可见$g(b)$是b在$f$下的像源集合。

当f为满射时，如果$g(b_1) = g(b_2)$,

则对$\forall x \in g(b_1) = g(b_2)$,都有$b_1 = f(x) = b_2$,

所以 g为单射；

反之，g为单射时，f不一定为满射

如：$A = \{a, b\}, B = \{1,2,3\}$

$f(a) = 1, f(b) = 2$,所以f为不满

而$g(1) = \{a\}, g(2) = \{b\}, g(3) = \emptyset$,所以g为单射。

习题六

设card(A)=$\aleph$，B是A的可数子集，card(A-B)是否为可数的？解释你的结果。

解：card(A-B)不是可数的。用反证法证明：

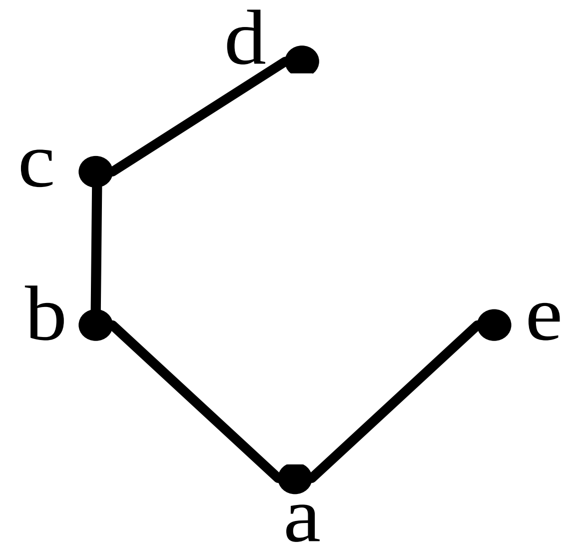
假设card(A-B)是可数的，已知B是可数的，由定理，它们的并集也可数。那么

$$\mathrm{card}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{card}((\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\cup \boldsymbol{B}) \leq \aleph_0$$

而$\aleph_0 < \aleph$，与已知card(A)=$\aleph$矛盾。

课堂练习

1. 右图是偏序集<A, ≼>的哈斯图，请指出该偏序集的极大元、极小元、最大元、最小元、子集合{b, c, e}中元素的最小上界和最大下界。



2. 集合A={1，2，3}，求出：

（1）A上有多少个非等价关系？

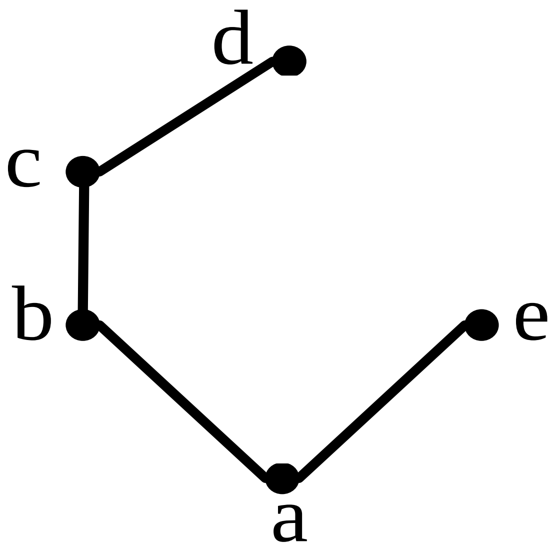
（2）列出A上所有既是对称的，又是反对称的二元关系。

1. 解：极大元：d, e；极小元：a；

最大元：无；最小元：a；

{b, c, e} 的最小上界：无,

最大下界：a。



2. 集合A={1，2，3}，求出：

（1）A上有多少个非等价关系？ 507个

（2）列出A上所有既是对称的，又是反对称的二元关系。

解：{(1, 1), (2, 2), (3, 3)}，{(1, 1), (2, 2)}，{(1, 1), (3, 3)}，{(2, 2), (3, 3)}，{(1, 1)}，{(2, 2)}，{(3, 3)}，∅。