有界格

定义17-7 设< L, ≤ >（<L, ∧, ∨>）是格，若存在元素 a∈L，使得对任意x∈L，都有

$$a \le x \ (\text{或}\ x \le a),$$

则称a为格<L,≤>的**最小元**(或**最大元**)，分别记为0(或1)，而具有**最大元**和**最小元**的格称为**有界格**。

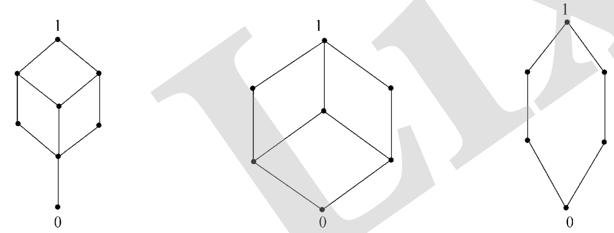
根据最大元“1”和最小元“0”的定义，对任意x∈L，

$1 \wedge x = x \wedge 1 = x$，　$1 \vee x = x \vee 1 = 1$　同一律

$0 \wedge x = x \wedge 0 = 0$，　$0 \vee x = x \vee 0 = x$　零率

有界格

例17.6 如图所示的格是有界格，具有最大元和最小元



集合元素有限

① 有限格**一定**是有界格。

② 但有界格**不一定**是有限格，如<[0,1]，≤>

有补格

定义17-8 设<L, ∧, ∨>为有界格，1和0分别为它的最大元和最小元。

➢ 对于 a∈L，如果存在b∈L，使得

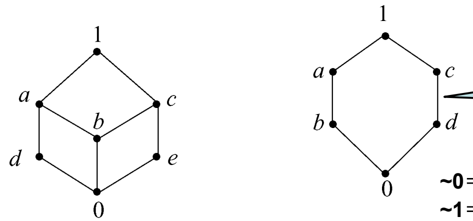
$$a \wedge b = 0 \ \text{且}\ a \vee b = 1$$

则称a和 b **互为补元**，具体的，

称b为a的补元，记为 ~a = b， a为b的补元，记为 ~b = a 。

➢ 若对 ∀a∈L，都有补元 ~a 存在，则称<L, ∧, ∨ >为**有补格**。

例17.7 求以下所示哈斯图对应格所有元素的补元(若有的话)



有补格

~0=1，~1=0，
~a=e，~c=d，
~d =c 或 e，
~e =a 或 d，
b无补元

注意：补元不一定唯一

~0=1，
~1=0，
~a=d 或 c，
~b= d 或 c，
~c= a 或 b，
~d=a 或 b

有补分配格(1)

有补格中，元素的补元不一定唯一，那么，什么情况下补元唯一呢？

定理17-6 在有补分配格 <L, ∧, ∨ >中，每元有唯一补元。

证明 设a有两个补元b和c，由补元的定义知

$$a\wedge b = a\wedge c = 0,\ a\vee b = a\vee c = 1$$

由消去律知， b = c。

典型有补分配格：
幂集格<2^A,∩,∪>， 命题逻辑格< {0,1}, ∧, ∨ >

有补分配格(2)

定理17-7

设<L, ∧, ∨>是有补分配格， “≤” 是该格的偏序关系，则对任意a,b∈L，都有

① $\sim(\sim a) = a$； 双重否定

② $\sim(a\vee b) = (\sim a)\wedge(\sim b)$

③ $\sim(a\wedge b) = (\sim a)\vee(\sim b)$

(De Morgan律)

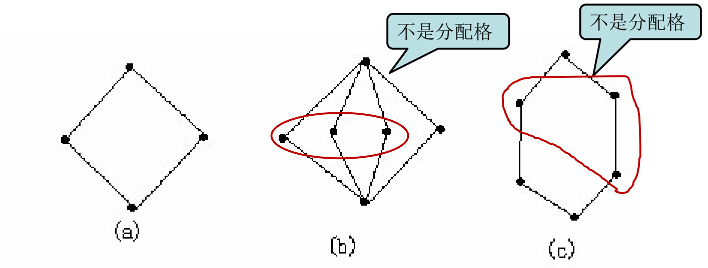
布尔代数的定义

定义17-9

- 有补分配格 <B, ∧, ∨> 又称为 布尔格。
- 因有补分配格中每个元都有补元且唯一，则可以将求元素的补元 “~” 作为一元运算，此时布尔格<B, ∧, ∨>可记为<B, ∧, ∨, ~, 0, 1>，称其为布尔代数。 (突出了代数特征)
- 若一个布尔代数的集合B的元素个数是有限的，则称此布尔代数为有限布尔代数。

典型有限布尔代数：
幂集格<2^A,∩,∪>， 命题逻辑格<{0,1}, ∧, ∨)

例17.8 判断下列那些是布尔代数。



布尔代数 不是布尔代数

DMS Chapter 17 格与布尔代数(1)

布尔代数的性质

布尔代数即有补分配格，故布尔代数<B, ∨, ∧, ~, 0, 1>具有如下性质：

① 结合率，交换率，吸收率，幂等率；（格）

② 分配律，消去率；（分配格）

③ 同一律：$a\wedge 1=a$，$a\vee 1=1$；（有界格，最大元）

⑤ 零律：$a\wedge 0=0$，$a\vee 0=a$；（有界格，最小元）

⑥ 每元的补元存在且唯一；（有补分配格）

⑦ De Morgan律（有补分配格）

40

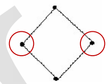
DMS Chapter 17 格与布尔代数(1)

布尔代数的原子

定义17-10 在布尔代数 <B, ∨, ∧, ~, 0, 1> 中，设 ≤ 为对应的偏序关系，直接盖住最小元的元素称为原子。即，若 a是格中的原子，则不存在元素b(b≠0 , b≠a)，使得 0≤ b ≤a。

例如

✓ <{0,1},∧,∨,~,0,1> 有1个原子：1



✓ 2个原子

✓ 幂集代数<2^A，∩,∪,-, Φ, A>共有 |A| 个原子，即A的所有单元素子集。

41

DMS Chapter 17 格与布尔代数(1)

布尔代数的同构（1）

定理17-10 若布尔代数<A, ∧, ∨, ~ ,0,1> 和 布尔代数 <B, ∩, ∪, - ,0′,1′>的具有相同的原子个数n，则

<A,∨, ∧, ~ ,0,1> 与 <B, ∪, ∩, - ,0′,1′> 同构

即：一定存在双射 f: A→B，使得对A中的任意元素x、y，有：

① $f(x\wedge y)=f(x)\cap f(y)$，

② $f(x\vee y)=f(x)\cup f(y)$，

③ $f(\sim x)=\sim f(x)$

42

DMS Chapter 17 格与布尔代数(1)

布尔代数的同构(2)

推论17-10

① 具有相同原子数目的布尔代数都是同构的。

② 任何具有n个原子的布尔代数<B,∨,∧,¯,0,1> 与 n元集A所对应的幂集代数 <2^A;∩,∪,¯,Φ, A> 同构。

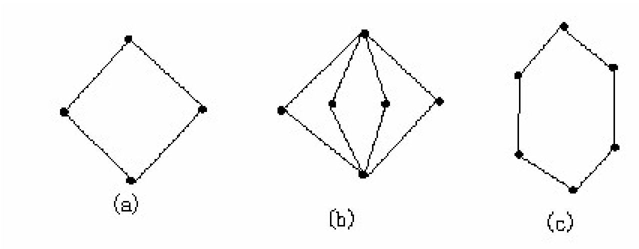
③ 若布尔代数<B,∨,∧,¯,0,1>具有n个原子，则$|B|=2^n$。

给了一个判断有补分配格的方法

43

DMS Chapter 17 格与布尔代数(1)

例17.8　判断下列那些是布尔代数。



布尔代数　　　　不是布尔代数

44

DMS Chapter 17 格与布尔代数(1)

布尔表达式(1)

定义17-11 设<B,∨, ∧,~,0,1>是一个布尔代数， B中的元素称为**布尔常元**；取值于B中元素的变元称为**布尔变元**。在B上的**布尔表达式**定义如下:

① B中任何一个布尔常元是布尔表达式;

② B中任何一个布尔变元是布尔表达式;

③ 如果e_1和e_2是布尔表达式，则 $\sim e_1$ 、$e_1 \wedge e_2$、$e_1 \vee e_2$也是布尔表达式;

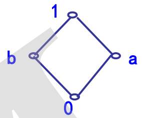
④ 只有有限次使用1)、2)和3)所构造的符号串才是**布尔表达式**。

45

DMS Chapter 17 格与布尔代数(1)

布尔表达式(2)

例17.10　设<B, ∧, ∨, ~ ,0,1>是一个布尔代数，B = {0,1,a,b}，



则　　0，1，a，b，a∨b，1∧(x∨y)，

(~a∨y)∧(z∨b)，(a∧b)∨(~a∧y∧z)

等都是布尔表达式，其中x,y,z是布尔变元。

46

DMS Chapter 17 格与布尔代数(1)

布尔函数

定义17-12 设<B,∧,∨,¯,0,1>是一个布尔代数，一个从B^n到B的函数(n个定义域为B的自变量，1个值域为B的因变量)，如果能够用该布尔代数上的布尔表达式表示，则称这个函数为**布尔函数**。

例　设< {0,1} ,∧,∨,~, 0,1>是一个布尔代数，∧,∨,~分别是合取，析取，否定逻辑运算。右表所给出的从B^3到B的3元函数 $f(x_1,x_2,x_3)$是否为布尔函数?

(x_1, x_2, x_3)	$f_1(x_1, x_2, x_3)$
(0, 0, 0)	1
(0, 0, 1)	1
(0, 1, 0)	0
(0, 1, 1)	0
(1, 0, 0)	1
(1, 0, 1)	0
(1, 1, 0)	0
(1, 1, 1)	1

解：根据右表，可得f的布尔表达式为:

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = (\sim x_1 \wedge \sim x_2 \wedge \sim x_3) \vee (\sim x_1 \wedge \sim x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \sim x_2 \wedge \sim x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$

故函数$f(x_1,x_2,x_3)$是布尔函数

47

课后练习

1. 下列集合中，（　）关于整除关系构成分配格，（　）关于整除关系构成有补格，（　）关于整除关系构成有补分配格；

A、{1，3，4，6，8，24}；　　B、{1，2，3，6，12}；

C、{1，2，3，5，6, 10，15，30}；　　D、{3，6，9，18}

2. 若布尔代数 $<B,\vee,\wedge,^-, 0, 1>$ 具有6个原子，则 $|B|=$（ ）

A. 6　B. 64　C. 2　D. 36

3. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\wedge\sim x_2)\vee(x_2\wedge\sim x_3)\vee(\sim x_1\wedge x_3)\vee(x_1\wedge x_2\wedge x_3)$ 是布尔代数 $<\{0,1\},\wedge,\vee,^-,0,1>$ 上的一个从 B^3 到B的布尔函数，试写出其主析取范式和主合取范式.

ALL End