习题课2 －谓词逻辑

主 讲 林 兰

2022 秋季

第二章

一、基本概念

全总个体域（全论域）、全称量词、存在量词、特性谓词、指导（作用）变元、辖域（作用域）、约束变元、自由变元、约束变元的改名规则、自由变元的代入规则、常量符号、变量符号、函数符号、谓词符号、谓词公式、公式的解释、永真公式(重言式）、永假公式(矛盾式，不可满足公式）、 可满足公式、前束范式、母式、前束合取(或析取)范式、Skolem范式、US(全称指定规则)、ES(存在指定规则)、UG(全称推广规则)、EG(存在推广规则)

二、基本要求

- 能准确地将给定命题符号化
- 深刻理解全称量词、存在量词及量词的辖域、全总个体域的概念
- 能准确理解约束变元(量)和自由变元的概念
- 掌握约束变元的改名规则和自由变元的代入规则
- 掌握与量词相关的基本等价式和基本蕴涵式
- 能熟练地运用US、ES、UG、EG规则进行推理

语句的符号化

1、将下列命题翻译成谓词公式

① 每个有理数都是实数，但是并非每个实数都是有理数，有些实数是有理数。

R(x):x是实数

Q(x):x是有理数

$$\forall x(Q(x)\rightarrow R(x))\land\neg\forall x(R(x)\rightarrow Q(x))\land\exists x(R(x)\land Q(x))$$

② 直线a和b平行当且仅当a和b不相交。

A(x):x是直线

F(x，y):x与y平行

G（x,y): x 与 y 相交

$$\forall a\forall b\ (A(a)\land A(b)\rightarrow(F(a,b)\leftrightarrow\neg G(a,b)))$$

语句的符号化

③ 除非所有会员都参加，这个活动才有意义。

等于说：如果这个活动有意义，那么所有会员都参加这个活动。

A(x)：x 是会员

B(x)：x有意义　　　　a：这个活动

F(x，y)：x 参加 y

$B(a)\rightarrow\forall x(A(x)\rightarrow F(x,a))$

或 $\neg\forall x(A(x)\rightarrow F(x,a))\rightarrow\neg B(a)$

④ 任何正整数不是合数就是素数。

A(x)：x 是正整数

B(x)：x 是合数

C(x)：x 是质数

$\forall x(A(x)\rightarrow B(x)\nabla C(x))$

语句的符号化

⑤ 凡是存钱的人都想有利息，如果没有利息，人们就不会存钱。

等于说：所有存钱（人）都有利息，如果存钱没有利息，那么就不存钱。

P(x)：x 存钱

I(x)：x 有利息

$\forall x[P(x) \rightarrow (I(x) \wedge (\neg I(x) \rightarrow \neg P(x))]$

或 $\forall x[P(x) \rightarrow I(x)] \wedge \forall x[\neg I(x) \rightarrow \neg P(x)]$

典型例题

例1 将下列三条自然数公理翻译成谓词公式：

① 每个自然数有且仅有一个直接后继；

② 没有任何自然数以0为其直接后继；

③ 对0以外的任何自然数，有且仅有一个直接先行。

解：设个体域D为自然数

令p(x)：x的直接先行；

s(x)：x的直接后继；

EQUAL(x, y)：x=y

① $(\forall x)(\exists y)[\underbrace{EQUAL(y, s(x))}_{\text{有}} \wedge$

$\underbrace{(\forall z)[EQUAL(z, s(x)) \rightarrow EQUAL(y, z)]]}_{\text{且仅有}}$

② $\sim(\exists x)\mathrm{EQUAL}(0, s(x))$

0以外的任何
自然数

③ $(\forall x)[\underline{\sim \mathrm{EQUAL}(x, 0)}$
$\rightarrow (\exists y)[\mathrm{EQUAL}(y, p(x)) \wedge (\forall z)[\mathrm{EQUAL}(z, p(x))$
$\rightarrow \mathrm{EQUAL}(y, z)]]]$

例2 根据前提集合：同事之间总是有工作矛盾的，张平和李明没有工作矛盾，能得出什么结论？

解：$P(x,y)$：x和y是同事关系，

$Q(x,y)$：x和y有工作矛盾，

a：张平，b：李明。

则前提符号化为：$\forall x \forall y(P(x,y) \rightarrow Q(x,y))$，$\sim Q(a,b)$

例2(续)

由前提： $\forall x \forall y(P(x,y) \to Q(x,y))$， $\sim Q(a,b)$

推理如下：

① $\forall x \forall y(P(x,y) \to Q(x,y))$　　P

② $\forall y(P(a,y) \to Q(a,y))$　　T ① US

③ $P(a,b) \to Q(a,b)$　　T ② US

④ $\sim Q(a,b)$　　P

⑤ $\sim P(a,b)$　　T ③④ 拒取式

所以，得出张平和李明不是同事关系。

例3 证明下列论断的正确性：

有些学生相信所有的教师；任何一个学生都不相信骗子；所以，教师都不是骗子。

解：设谓词如下：

S(x)：x是学生　　T(x)：x是教师

P(x)：x是骗子　　L(x, y)：x相信y

则可符号化为：

前提：$(\exists x)[S(x)\wedge(\forall y)(T(y)\rightarrow L(x,y))]$，

$(\forall x)(\forall y)[(S(x)\wedge P(y))\rightarrow\sim L(x,y)]$。

结论：$(\forall x)[T(x)\rightarrow\sim P(x)]$

证明:

1)	$(\exists x)[S(x)\wedge(\forall y)(T(y)\rightarrow L(x,y))]$	P
2)	$S(c)\wedge(\forall y)(T(y)\rightarrow L(c,y))$	ES,1)
3)	$S(c)$	T,2),I
4)	$(\forall y)(T(y)\rightarrow L(c,y))$	T,2),I
5)	$T(x)\rightarrow L(c,x)$	US,4)
6)	$(\forall x)(\forall y)[(S(x)\wedge P(y))\rightarrow\sim L(x,y)]$	P
7)	$(\forall y)[(S(c)\wedge P(y))\rightarrow\sim L(c,y)]$	US,6)
8)	$(S(c)\wedge P(x))\rightarrow\sim L(c,x)$	US,7)
9)	$S(c)\rightarrow(P(x)\rightarrow\sim L(c,x))$	T,8),E
10)	$P(x)\rightarrow\sim L(c,x)$	T,3),9),I
11)	$L(c,x)\rightarrow\sim P(x)$	T,10),E
12)	$T(x)\rightarrow\sim P(x)$	T,5),11),I
13)	$(\forall x)(T(x)\rightarrow\sim P(x))$	UG,12)

例4 所有的有理数都是实数；所有的无理数也是实数；虚数不是实数。因此，虚数既不是有理数也不是无理数。

解：设Q(x)：x是有理数；R(x)：x是实数；

N(x)：x是无理数； C(x)：x是虚数；

$(\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)]$,

$(\forall x)[N(x) \rightarrow R(x)]$,

$(\forall x)[C(x) \rightarrow \sim R(x)]$

$\Rightarrow (\forall x)[C(x) \rightarrow (\sim Q(x) \wedge \sim N(x)]$

直接演绎推理：

(1)	$(\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x))$	P
(2)	$Q(x)\rightarrow R(x)$	US(1)
(3)	$(\forall x)(N(x)\rightarrow R(x))$	P
(4)	$N(x)\rightarrow R(x)$	US(3)
(5)	$(\forall x)(C(x)\rightarrow \sim R(x))$	P
(6)	$C(x)\rightarrow \sim R(x)$	US(5)
(7)	$R(x)\rightarrow \sim C(x)$	T(6)E
(8)	$Q(x)\rightarrow \sim C(x)$	T(2)(7),I
(9)	$N(x)\rightarrow \sim C(x)$	T(4)(7),I
(10)	$(Q(x)\rightarrow \sim C(x))\wedge(N(x)\rightarrow \sim C(x))$	T(8)(9),I（合取）
(11)	$C(x)\rightarrow(\sim Q(x)\wedge \sim N(x))$	T(10),E,I（二难推理）
(12)	$(\forall x)(C(x)\rightarrow(\sim Q(x)\wedge \sim N(x)))$	UG(11)