§9.2 正态总体的参数的假设检验

设总体$X \sim N(u,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为X 的容量为n的样本。样本均值和样本方差分别为：

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

下面，我们来看看正态总体$X \sim N(u,\sigma^2)$ 的参数 u 和σ^2 的假设检验问题。

一、一个正态总体均值的假设检验

1. σ^2已知时，总体均值u 的假设检验问题：

1. σ^2已知时，总体均值u 的假设检验问题：

I）双侧检验：

$$H_0: u = u_0 \qquad H_1: u \neq u_0 \qquad (u_0\text{已知})$$

当原假设H_0成立时，由样本均值抽样分布定理知，统计量

$$U = \frac{\bar{X} - u_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

给定显著性水平α，查表求得 $u_{1-\alpha/2}$，则

$$P(|U| > u_{1-\alpha/2}) = \alpha,$$

从而，假设检验的拒绝域为$W = \{|u| > u_{1-\alpha/2}\}$。称此检验法为**U检验法**。

II) 单侧检验法（以右侧检验法为例）

$$H_0: u \le u_0 \qquad H_1: u > u_0$$

由样本均值抽样分布定理知，

$$\frac{\bar{X} - u}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1),$$

对于选定的显著性水平α，查表求得 $u_{1-\alpha}$使得

$$P(\frac{\bar{X} - u}{\sigma/\sqrt{n}} > u_{1-\alpha}) = \alpha.$$

由于$\frac{\bar{X} - u}{\sigma/\sqrt{n}}$中含有未知参数u，所以它不能作为统计量。但当$H_0$成立时，有

$$U=\frac{\bar{X}-u_0}{\sigma/\sqrt{n}}\le\frac{\bar{X}-u}{\sigma/\sqrt{n}},$$

从而有

$$\left\{\frac{\bar{X}-u_0}{\sigma/\sqrt{n}}>u_{1-\alpha}\right\}\subseteq\left\{\frac{\bar{X}-u}{\sigma/\sqrt{n}}>u_{1-\alpha}\right\},$$

于是有

$$P\left(\frac{\bar{X}-u_0}{\sigma/\sqrt{n}}>u_{1-\alpha}\right)\le P\left(\frac{\bar{X}-u}{\sigma/\sqrt{n}}>u_{1-\alpha}\right)=\alpha,$$

即有$P(U>u_{1-\alpha})\le\alpha$，所以其拒绝域为

$$W=\{U>u_{1-\alpha}\}。$$

因两种右侧检验有相同的拒绝域，因而当σ^2已知时，总体均值 u 的右侧检验的拒绝域为

$$W=\{u>u_{1-\alpha}\}.$$

类似地，左侧检验的拒绝域为

$$W=\{u<-u_{1-\alpha}\}=\{u<u_{\alpha}\}.$$

例 已知某地早稻亩产量X ~N(u, 144) 。某人根据长势估计亩产量为310kg。收割时，随机选取了 10 块，测得它们的实际亩产量分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，计算得$\bar{x}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i=320kg$。试问：此人所估计的亩产量是否正确？(α=0.05)

解：检验假设

$$H_0: u = u_0 = 310kg \qquad H_1: u \neq u_0 = 310kg$$

当H_0成立时，统计量

$$U = \frac{\bar{X} - u_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

对于给定的α=0.05，查表得 $u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.96,$

又因$n = 10$, $\sigma = \sqrt{144} = 12$, $u_0 = 310$，从而统计量 |U| 的观测值为

$$|u| = \left|\frac{\bar{x} - u_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{320 - 310}{12/\sqrt{10}}\right| = 2.63 > 1.96,$$

由于$|u| > u_{0.975}$，所以拒绝H_0，即认为此人所估计的亩产量 310kg 不正确。

例： 已知某种元件的使用寿命（单位：hour）服从标准差为$\sigma = 120\text{h}$ 的正态分布。按要求，该种元件的使用寿命不得低于1800h才算合格。今从一批这种元件中随机抽取36件，测得其寿命的均值为1750h。试问：这批元件是否合格(α=0.05)?

解：显然，寿命越长越好。故考虑左单侧假设检验。设元件寿命寿命 $X \sim N(u,120^2)$ ，由前面讨论检验假设

$$H_0: u \geq u_0 = 1800 \qquad H_1: u < u_0 = 1800$$

这是一个左侧检验，当H_0 成立时，统计量

$$U=\frac{\bar{X}-u_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1),$$

由于α=0.05，查表得$u_{1-\alpha}=u_{0.95}=1.645$，由已知有

$$\sigma=120,\quad n=36,\quad \bar{x}=1750,\quad u_0=1800,$$

于是统计量的观测值为

$$u=\frac{1750-1800}{120/\sqrt{36}}=-2.5<-1.645,$$

由于 $u<-u_{1-\alpha}$ 所以拒绝 H_0，即认为这批元件不合格。

2. σ^2 未知时，总体均值 u 的假设检验：

I）双侧检验：

$H_0: u = u_0 \qquad H_1: u \neq u_0$ （u_0已知）

当总体方差σ^2 未知时，自然想到借用其无偏估计量样本方差S^2。当原假设H_0 成立时，统计量

$$t = \frac{\bar{X} - u_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

给定显著性水平α，查表得 $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ **则**

$$P(|t| > t_{1-\alpha/2}(n-1)) = \alpha,$$

从而，总体方差σ^2 未知时，对总体均值 u 的双

侧假设检验的拒绝域为$W=\{|t|>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$。称此检验法为t **检验法**。

II) 单侧检验法

与前面类似，当总体方差 σ^2 未知时，总体均值u 的右侧检验与左侧检验得拒绝域分别为

$$W_R=\{t>t_{1-\alpha}(n-1)\} \qquad W_L=\{t<-t_{1-\alpha}(n-1)\}$$

例：某厂生产得产品质量指标服从正态分布，标准规格为均值等于120。从该厂生产的产品中随机抽取5件，测得其指标值为119.6, 119.2, 119.0, 119.7, 120.0。试问：该厂产品是否符合标准规格(α=0.05)?

解：产品指标 $X \sim N(u,\sigma^2)$，σ^2未知，假设

$$H_0: u = u_0 = 120 \qquad H_1: u \neq u_0 = 120$$

因σ^2 未知，故用t 检验法。当H_0 真时，统计量

$$t = \frac{\bar{X} - u_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

对于给定的 $\alpha = 0.05$ ，查表 $t_{1-\alpha/2}(n-1) = 2.776$;

由样本观测值算得$\overline{x} = 119.5$，$s = 0.4$，则统计量$|t|$的观测值为

$$|t| = \left|\frac{119.5 - 120}{0.4/\sqrt{5}}\right| = 2.795 > 2.776 = t_{1-\alpha/2}(n-1),$$

故拒绝H_0，即认为该厂产品不符合标准规格。

例4：已知某种溶液中水分含量$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，要求平均水分含量μ不低于0.5%，今测定该溶液9个样本，得到平均水分含量为 0.039%，均方差为0.453%。 试在显著性水平$\alpha=0.1$下，检验溶液水分含量是否合格。

思路：显然，要检验 “溶液水分含量是否合格” 即是检验：$\mu \ge 0.5\%$，这是一个均值左单侧检验问题 $H_0:\mu \ge \mu_0 = 0.5\%$，$H_1:\mu < \mu_0 = 0.5\%$ 。本题中方差未知，应该用t 检验法。又因为原假设为复合假设，其拒绝域与简单原假设$H_0:\mu=\mu_0=0.5\%$是相同的，为简便起见，本题采用简单原假设。

解：检验假设

$$H_0: \mu = \mu_0 = 0.005, \qquad H_1: \mu < \mu_0$$

在H_0 成立的条件下，统计量

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)。$$

对α=0.01，左单侧检验的拒绝域应选左侧，即

$$W = \left\{ t < -t_{1-\alpha}(n-1) = -t_{0.99}(8) = -2.8965 \right\}.$$

而 t 的统计值为 $t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{0.00451 - 0.005}{0.0039/\sqrt{9}} = -3.77$。

由于$-3.77 = t < -t_{1-\alpha}(n-1) = -2.8965$，在拒绝域内，故拒绝原假设$H_0$，即认为溶液的水分含量低于0.5%，不合格。

综上所述，正态总体的均值的假设检验如表所示:

一个正态总体均值的假设检验

H_0	H_1	σ^2已知	σ^2未知
		在显著性水平α下关于H_0的拒绝域	
$u=u_0$	$u\neq u_0$	$\lvert u\rvert > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\lvert t\rvert > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$u=u_0$	$u>u_0$	$u>u_{1-\alpha}$	$t>t_{1-\alpha}(n-1)$
$u=u_0$	$u<u_0$	$u<-u_{1-\alpha}$	$t<-t_{1-\alpha}(n-1)$

一个正态总体方差的假设检验

在总体均值 u 未知时，对总体方差σ^2 的假设检验：

I）双侧检验：

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2; \qquad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 (\sigma_0^2 \text{已知})$$

样本方差抽样分布定理知，H_0 成立时，统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1),$$

对于给定的α，查得 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 从而有

$$P\left\{\chi^2 < \chi^2_{\alpha/2}(n-1) \text{ 或 } \chi^2 > \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right\} = \alpha$$

此时，拒绝域为 $W = \left\{\chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \text{或} \chi^2 > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$

这种检验方法称为 χ^2 检验法。

II）单侧检验（以左侧检验为例）：

1、在总体均值 u 未知时对总体方差σ^2的假

设检验：

$$H_0:\sigma^2\geq\sigma_0^2;\qquad H_1:\sigma^2<\sigma_0^2（\sigma_0^2\text{已知}）$$

因统计量

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(n-1),$$

对于给定的α，查表得 $\chi_\alpha^2(n-1)$ 从而有

$$P\left\{\chi^2<\chi_\alpha^2(n-1)\right\}=\alpha,$$

当H_0成立时，有$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\geq\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$。因事件

$$\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi_\alpha^2(n-1)\right\} \subseteq \left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_\alpha^2(n-1)\right\}$$

所以 $P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi_\alpha^2(n-1)\right) \le P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_\alpha^2(n-1)\right) = \alpha;$

从而 $P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi_\alpha^2(n-1)\right) \le \alpha,$ 故当u 未知时，σ^2 的左侧假设检验的拒绝域为

$$\boxed{W = \left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi_\alpha^2(n-1)\right\}}$$

相应地，在总体均值 u 未知时，同样方法可得：σ^2的右侧假设检验的拒域为

$$\boxed{W = \left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi_{1-\alpha}^2(n-1)\right\}}$$

一个正态总体方差的假设检验

H_0	H_1		u未知
		在显著性水平α下关于H_0的拒绝域	
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$		$\left\{\begin{array}{l}\chi^2<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\quad or\\ \chi^2>\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\end{array}\right\}$
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\left\{\chi^2>\chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\}$
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\left\{\chi^2<\chi^2_{\alpha}(n-1)\right\}$

其中

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}。$$

例5、已知维尼纶纤度在正常条件下服从方差为$\sigma^2=0.044^2$的正态分布。某日随机抽取了6根纤维，测得其纤度为1.35, 1.50, 1.56, 1.48, 1.44, 1.53。问该日纤度的总体方差是否仍为0.044^2（$\alpha=0.05$）？

解、设该日纤度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ 未知，要检验假设 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2=0.044^2$; $H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$,

当H_0成立时，统计量$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$。

由于α=0.05，查表可得

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(5)=0.831,$$

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(5)=12.833.$$

由样本观察数据计算得$s^2=0.00555$，于是有

$$\chi^2=\frac{(6-1)\times 0.00555}{0.044^2}=14.33,$$

因为$\chi^2>12.833=\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$，所以拒绝$H_0$，认为该日纤度有显著变化。

例6、从一批保险丝中抽取8根，测试其熔化时间（unit : ms）得到数据如下：50, 48, 50, 53, 51, 55, 52, 51。设熔化时间服从正态分布。问：是否可以认为这批保险丝的熔化时间的方差小于35（α = 0.05）？

解：设总体为X且 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，本题即是在总体均值u未知时检验

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2=35,\qquad H_1:\sigma^2<\sigma_0^2,$$

在原假设H_0成立时，有

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1),$$

当$\alpha = 0.05$时，

$$\chi_\alpha^2(n-1) = \chi_{0.05}^2(7) = 2.167,$$

由样本值可求得$S^2 = 4.5$，于是统计量χ^2的观测值为

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{7\times4.5}{35} = 0.9,$$

由于$\chi^2 = 0.9 < 2.167 = \chi_\alpha^2(n-1)$,所以拒绝$H_0$，即认为这批保险丝的熔化时间的方差小于35。

两个正态总体的参数的假设检验

设总体 $X\sim N(u_1,\sigma_1^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 为 X 的容量为 n_1 的样本。其样本均值和样本方差分别为：

$$\overline{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i,\quad S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2$$

总体 $Y\sim N(u_2,\sigma_2^2)$，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 为 Y 的容量为 n_2 的样本。其样本均值和样本方差分别为：

$$\overline{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}X_i,\quad S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(X_i-\bar{Y})^2$$

在本节中，总设总体 与 X 总体是相互独立的。

一、两个正态总体均值的假设检验

以双侧检验为例。

$$H_0: u_1 = u_2; \qquad H_1: u_1 \neq u_2, (u_1, u_2 \text{未知})$$

（1）若 σ_1^2, σ_2^2 已知，当 H_0 成立时，统计量

$$U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}} \sim N(0,1),$$

所以，对于给定的显著性水平 α ，假设检验的拒绝域为

$$W=\left\{|U|>u_{1-\alpha/2}\right\}。$$

（2）若 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知，当 H_0 成立时，统计量

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_W\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\sim t(n_1+n_2-2),$$

其中 $S_W=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$

所以，对于给定的显著性水平 α ，假设检验的拒绝域为

$$W=\left\{\left|T\right|>t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right\}。$$

两个正态总体均值的假设检验

H_0	H_1	σ_1^2,σ_2^2 已知	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知
		在显著性水平α下关于H_0的拒绝域	
$u_1=u_2$	$u_1\neq u_2$	$\lvert u\rvert>u_{1-\alpha/2}$	$\lvert t\rvert>t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)$
$u_1=u_2$	$u_1>u_2$	$u>u_{1-\alpha}$	$t>t_{1-\alpha}(n_1+n_2-1)$
$u_1=u_2$	$u_1<u_2$	$u<-u_{1-\alpha}$	$t<-t_{1-\alpha}(n_1+n_2-1)$

两个正态总体方差的假设检验

以双侧检验为例。设待检假设为

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2;\qquad H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2,(\sigma_1^2,\sigma_2^2\text{未知})$$

（1）若 u_1,u_2 未知，由于样本方差是总体方差的无偏估计，所以当原假设成立时，S_1^2 与 S_2^2 的差异不会很大也不会很小，所以统计量 $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ 的观测值应接近1。因而，拒绝域形式应为

$$\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}<c_1\right\}\cup\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}>c_2\right\},c_1<c_2.$$

因而，当H_0成立时，由抽样分布定理知，

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1).$$

所以，对于给定的显著性水平α，查表得临界值

$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$，$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$，使得

$$P(F<F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1))=P(F>F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1))=\alpha/2,$$

故当 u_1 与 u_2 未知时，假设检验的拒绝域为

$$W=\left\{F<F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\text{或}F>F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\right\}。$$

上述检验方法称为**F-检验法**。由F-分布的性质知：

$$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)}$$

从而，拒绝域可写为

$$W=\left\{F<\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)}\text{或}F>F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\right\}。$$