第四部分　图　论

第11章　树及其应用

计算机（软件）学院

林　兰

linlan@scu.edu.cn

主要内容

- 11.1 无向树
- 11.2 生成树
- 11.3 有向树及其应用

11.1 无向树

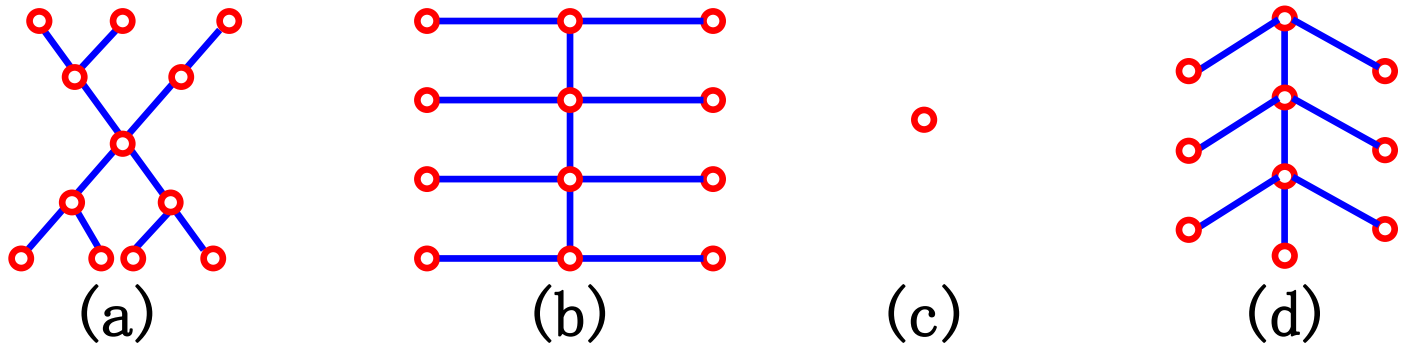
1. 定义

连通且无圈 (回路)的无向图称为**无向树**，简称**树**。常用T表示树。

- **树叶**：结点度数为1。
- **分枝点**：结点度数＞1。
- **森林**：一个无向图的连通分图均是树时，该无向图为森林。

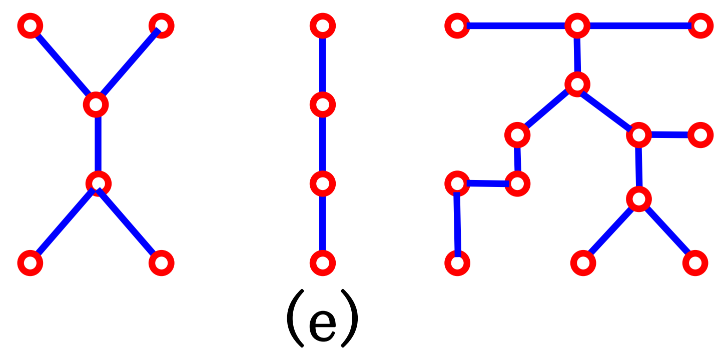
11.1 无向树

例1



- (a)、(b)、(c)、(d)都是树
- (e)是森林
- (c)是平凡图，称之为平凡树，其结点度数为0

✓ 而在任何非平凡树中，都无度数为0的结点。



11.1 无向树

2. 树的性质

定理 设T是**非平凡的图**，则下述命题相互等价。

① T连通且无圈。（定义）

② T无圈且m=n-1。

③ T连通且m=n-1。

④ T无圈，但新增加任何一条边（端点属于T）后有且仅有一个圈。**–最大无圈图**

⑤ T连通，但是删去任何一边后便不再连通。**–最小连通图**

⑥ T的每一对结点之间有且仅有一条道路可通。

- ✓ **以上6条性质任意一条可作为树的定义。**

11.1 无向树

① T连通且无圈。 **② T无圈且m=n-1。**

证明：①⇒② （归纳法）

当n=2时，树T=K_2，m=1，结论成立；

设2≤n≤k时，结论成立。现证n=k+1。

∵T连通且无圈

∴**必存在一个结点度数为1的结点v**，

删去v和与之相连的边，则T-{v}为有k个结点连通无圈图，由归纳假设，边数m=k-1。

若加上v和关联的边，则T有k+1结点，k条边，

即有(m+1)=(k+1)-1。符合公式m=n-1。

结论成立。

11.1 无向树

② T无圈且m=n-1。 ③ T连通且m=n-1。

证明：②⇒③ （反证法）

设树T不连通，且有$\omega(T) = k$个连通分图$(k \geq 2)$

即$T_1(n_1,m_1)$, $T_2(n_2,m_2)$, … $T_k(n_k,m_k)$，有

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n \qquad \sum_{i=1}^{k} m_i = m$$

再有每个分图连通无圈，由上已证m=n-1，得：

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = n - k$$

与已知m=n-1矛盾。

则连通分支数$\omega(T) = 1$，T是连通的。

11.1 无向树

③ T连通且m=n-1。

④ T无圈，但新增加任何一条边（端点属于T）后有且仅有一个圈。

证明：③⇒④ （归纳法）

当n=2时，m=1，无圈，且任意增加一条端点属于T的边有且仅有一个圈。

设2≤n≤k时，结论成立。现证n=k+1。

此时T至少存在一个度数为1的结点v，因为若每顶点度数都≥2，则不少于n条边，与m=n-1矛盾。删掉v及其关联的边得到新图T′=T-v。根据归纳假设T′无圈。

而T中v点仅与T′ 的一个结点邻接，故T也无圈。

11.1 无向树

再由于T是连通图，从u到w有一条通路，再增加(u,w)边，就构成一条基本回路；

再假设如果在T中任加一条边(u,w)，构成至少两个圈，则去掉边uw后，T还有一个圈，与T无圈矛盾。

所以，T新增一条边后有且仅有一个圈。

11.1 无向树

④ T无圈，但新增加任何一条边（端点属于T）后有且仅有一个圈。

⑤ T连通，但是删去任何一边后便不再连通。

证明： ④⇒⑤ （反证法）

假设T不连通，则T中必有点u和v，之间无道路可通。若T增加边(u, v)后，不能构成圈，与前提④矛盾。

又∵T无圈，则T中任何一条边e都是割边，即T-e不连通。

11.1 无向树

⑤ T连通，但是删去任何一边后便不再连通。

⑥ T的每一对结点之间有且仅有一条道路可通。

证明： ⑤⇒⑥ （反证法）

假设T中存在两个结点u和v，它们之间有两条道路，则必有经过u和v的圈，则去掉圈上的任何边，图仍然连通，与前提⑤矛盾。

证明： ⑥⇒①

∵ 由⑥，任何两点有道路可通，则T连通。

（反证）设T有圈，则圈中任意两点间至少有两条道路可通，与⑥矛盾。证毕。

11.1 无向树

推论1 任何非平凡树T=(n, m)中，至少有两片树叶。

证明：设树T有t个叶结点

那么叶的度数=1，枝的度数≥2

握手定理，则 $2m=\sum_{i=1}^{n} d(vi) \geq t+2(n-t)$

再由m=n-1代入上式，可得t≥2。

推论2 阶大于2的树必有割点。（分枝结点）

作业

✓习题十一

1、3、6

主要内容

- 11.1 无向树
- 11.2 生成树
- 11.3 有向树及其应用

11.2 生成树

1. 基本概念

定义 设G=(V, E)是连通无向图，T是G的一个生成子图，若T为树，则称T是G的生成树。

生成树T中的边称为树枝；

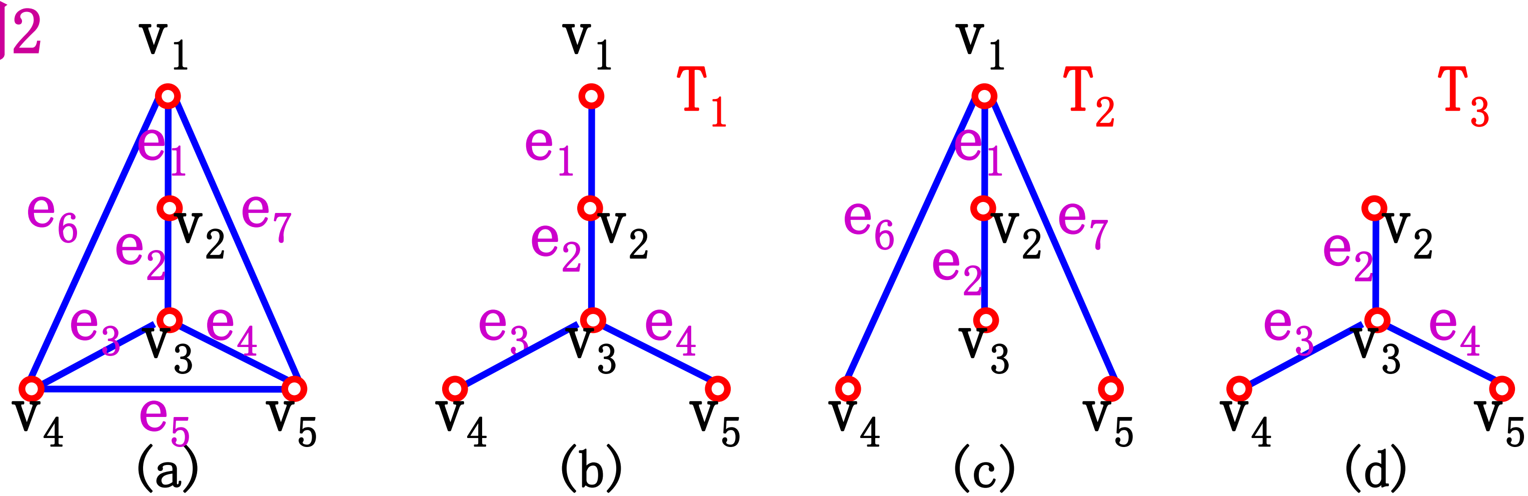
不在T中的边称为树补边；

G-T称为树补。（树补边的集合）

对连通图G＝(n, m)，G的生成树T有n个结点，n-1条边，m-n+1条树补边。

11.2 生成树

例2



图(b)、(c)所示的树T_1、T_2是图(a)的生成树，而图(d)所示的树T_3，不是图(a)的生成树。

对于生成树T_1，e_1, e_2, e_3, e_4是树枝，而e_5, e_6, e_7是树补边，集合$\{e_5, e_6, e_7\}$是T_1的树补；

对于生成树T_2，e_1, e_2, e_6, e_7是树枝，而e_3, e_4, e_5是树补边，集合$\{e_3, e_4, e_5\}$是T_2的树补。

11.2 生成树

定理 任一连通无向图至少有一颗生成树。

证明：设G是连通无向图。

① 若G中不含圈，则G为树，即是一颗生成树。

② 若G中含圈，去掉圈中的任何一边后，得到图G_1，则G_1仍是连通的。

ⅰ）如果G_1无圈，则G_1是G的生成树；

ⅱ）如果G_1含有圈，重复②，直到得到连通且无圈的子图，即为G的生成树。

推论 对任意阶连通图，其边数$m \geq n-1$。

11.2 生成树

定理 设T是连通图G的生成树，则

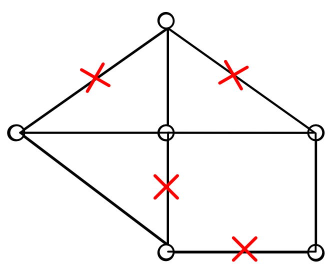
① G的任何边割集与T至少有一条公共边。

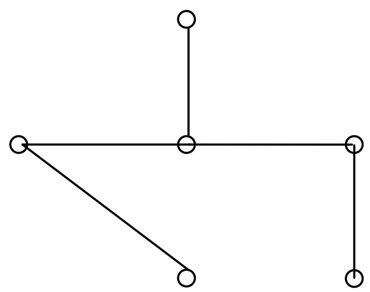
② G的任何圈与树补至少有一条公共边。

11.2 生成树

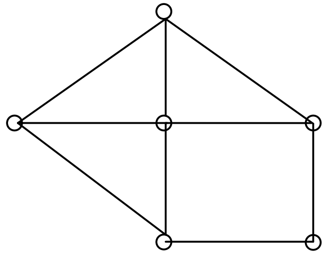
- **生成树的求法**

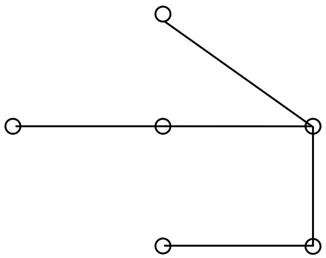
（1）破圈法：(n, m)图，每次去掉回路中的一条边，其去掉的边的总数为m−n+1。





（2）避圈法： (n, m)图，每次选取G中一条与已选取的边不构成回路的边，选取的边的总数为n−1。





11.2 生成树

2. 最小生成树

定义　设G＝<V, E>是n阶连通的赋权图，边(u,v)的权记为$w(u,v)$。若T是G的一棵生成树，T的每个树枝的权之和称为T的权，记为$w(T)=\sum w(u,v)$。G中具有最小权的生成树称为G的最小生成树。

11.2 生成树

- Kruskal（克鲁斯卡尔）算法

  求n阶带权连通图G=(V, E, W)的最小生成树。

  ① 在G中选取最小权边e_1，置$i=1$。

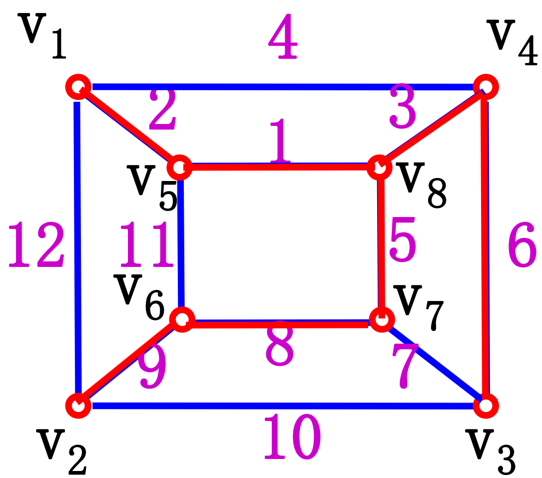
  ② 当$i=n-1$时，结束，否则转③。

  ③ 设已选取的边为$e_1, e_2, \cdots, e_i$，在G中选取不同于$e_1, e_2, \cdots, e_i$的边e_{i+1}，使$\{e_1, e_2, \cdots, e_i, e_{i+1}\}$中无圈且$e_{i+1}$是满足此条件的最小权边。

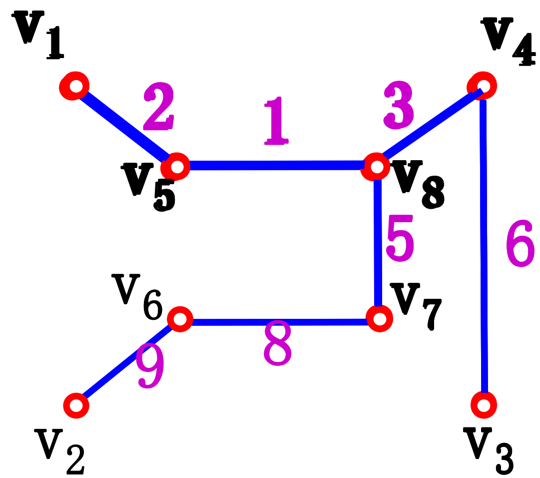
  ④ 置$i=i+1$，转②。

11.2 生成树

例3 用Kruskal算法求下面赋权图的最小生成树。



(a)



解 因为结点数n＝8，所以按算法要执行n-1＝7次。

$w(T)=1+2+3+5+6+8+9=34$

作业

- ✓习题十一

  10、12、15

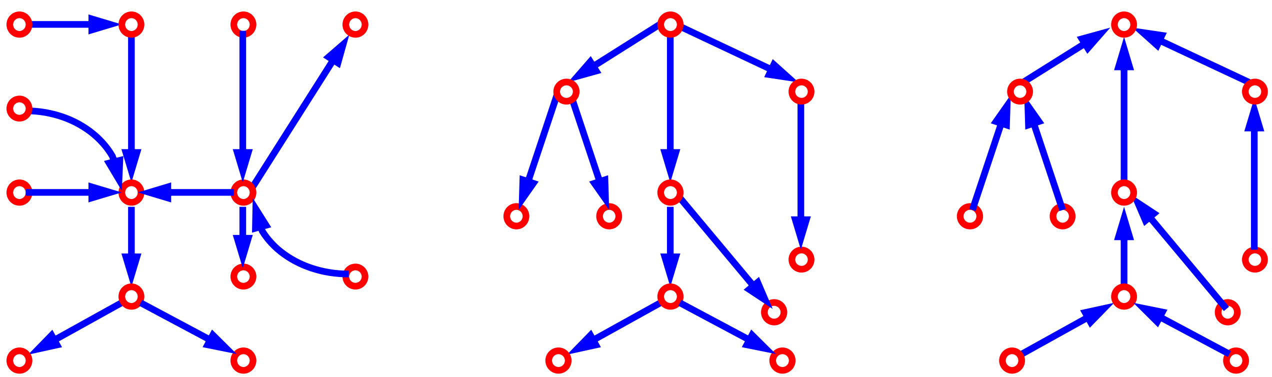
主要内容

- 11.1 无向树
- 11.2 生成树
- 11.3 有向树及其应用

11.3 有向树及其应用

1. 基本概念

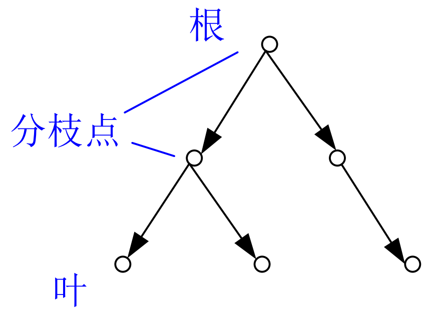
① 定义（有向树） 如果一个有向图G的基图是树，则称G为有向树。



(a) (b) (c)

11.3 有向树及其应用

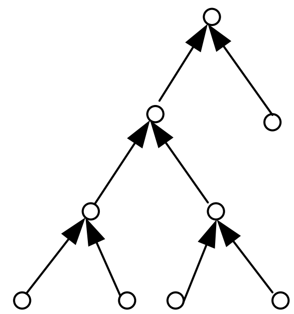
② 定义（外向树）设T是一个非平凡的有向树。如果T恰有一个结点入度为0，其余结点的入度均为1，则称T为根树或外向树。



外向树(根树)

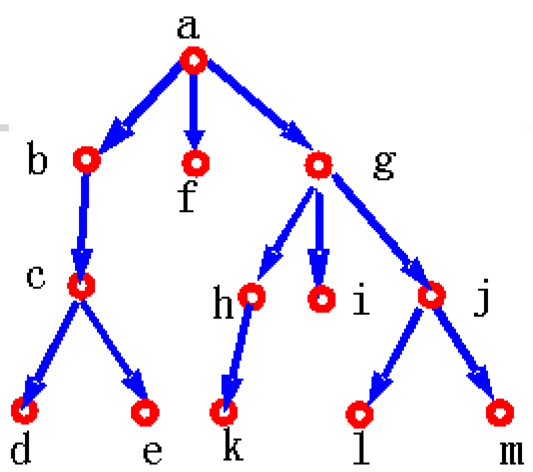
入度为0的结点称为树根；出度为0的结点称为树叶；出度大于0的结点称为分枝点(根也是分枝点)。

③ 定义（内向树）如果有向树T有一个结点出度为0，其余结点出度均为1，则称T是内向树。



内向树

11.3 有向树及其应用



- 根树的几个基本概念

- 父亲、儿子、兄弟、祖先、后裔结点。
- 结点的层次：从树根a到结点c的道路长度称为结点c的层次。
- 树的高度（深度）：层次中的最大值为树T的高度。
- 在根树T中，任一结点v及其所有后代导出的子图T'称为T的以v为树根的子树。
- 结点的出度：子树的个数（分枝的个数）

说明：习惯上把树的根画在上方，叶画在下方，这样可以省略箭头。

11.3 有向树及其应用

2. 常见的根树

(1) m叉树(m元有向树)：在根树T中，每个分支点的出度至多为m。

(2) 完全m叉树：每个分枝结点的出度都等于m。

若T的全部叶结点位于同一层，则称T为正则m叉树。

(3) 有序树：树中每个结点引出的边及结点都规定次序。

(4) 位置树：每个结点的儿子不仅有次序，且指定了位置。（例如：左中右）

(5) 二叉位置树的每个结点v至多有两棵子树，分别称为v的左子树和右子树。

11.3 有向树及其应用

定理 若T是完全（正则）m叉树，其叶数为t，分枝点数为i，则

$$(m-1)i = t-1$$

证明：∵ T中根结点度数为m，

除根以外的分枝点度数为m+1（出度m，入度1），

叶结点度数为1，

完全m叉树的总边数=m·i。

结点数n=m · i+1

由握手定理：m+(m+1)·(i-1)+t = 2m·i

即：(m-1)i=t-1

11.3 有向树及其应用

例4 设有28盏灯，拟公用一个电源插座，问需要多少块具有四插座的接线板？

解：问题即为28个叶结点的完全4叉树，求分枝点的个数i。

根据题意，完全4叉树，m=4；叶结点数 t=28；设分枝点数为i。

由定理： $(m-1)i=t-1$

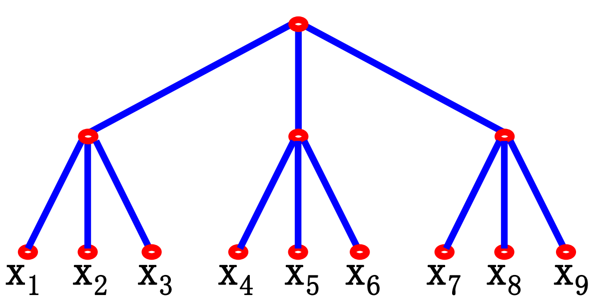
$$i=(t-1)/(m-1)=(28-1)/(4-1)=9$$

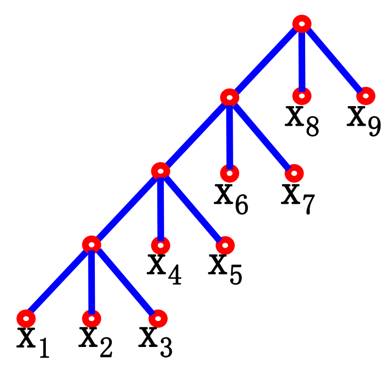
∴至少需要9块四插座接线板。

11.3 有向树及其应用

例5 假设有一台计算机，它有一条加法指令，可计算3个数的和。如果要求计算9个数$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$之和，问至少要执行几次加法指令？

解 用3个结点表示3个数，将表示3个数之和的结点作为它们的父结点。这样本问题可理解为求一个三叉完全树的分支点问题。把9个数看成树叶。由前定理知，有(3-1)i = 9-1，得i = 4。所以至少要执行4次加法指令。

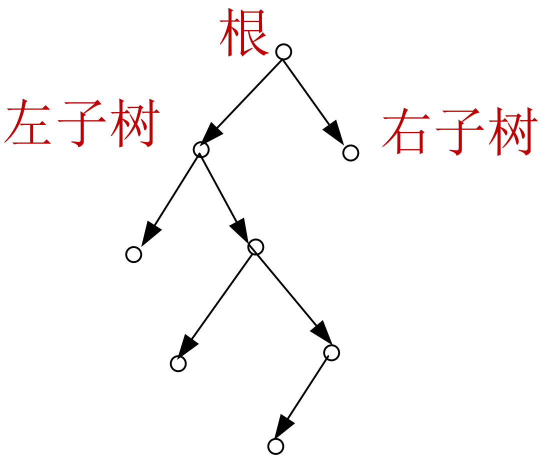




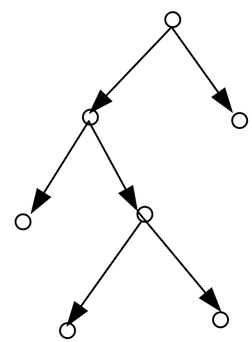
11.3 有向树及其应用

3. 二叉树及其应用

- 二叉树：有向树的每个结点的出度最多为2。
- 完全二叉树：每个分枝结点的出度都等于2。
- 二叉位置树：分枝点v的儿子要确定左右位置，分别称为v的左子树和右子树。



二叉树



完全二叉树

11.3 有向树及其应用

- 有序树转换为二叉位置树

① 从根开始，保留每个父亲同其最左边儿子的连线，删除与别的儿子的连线。

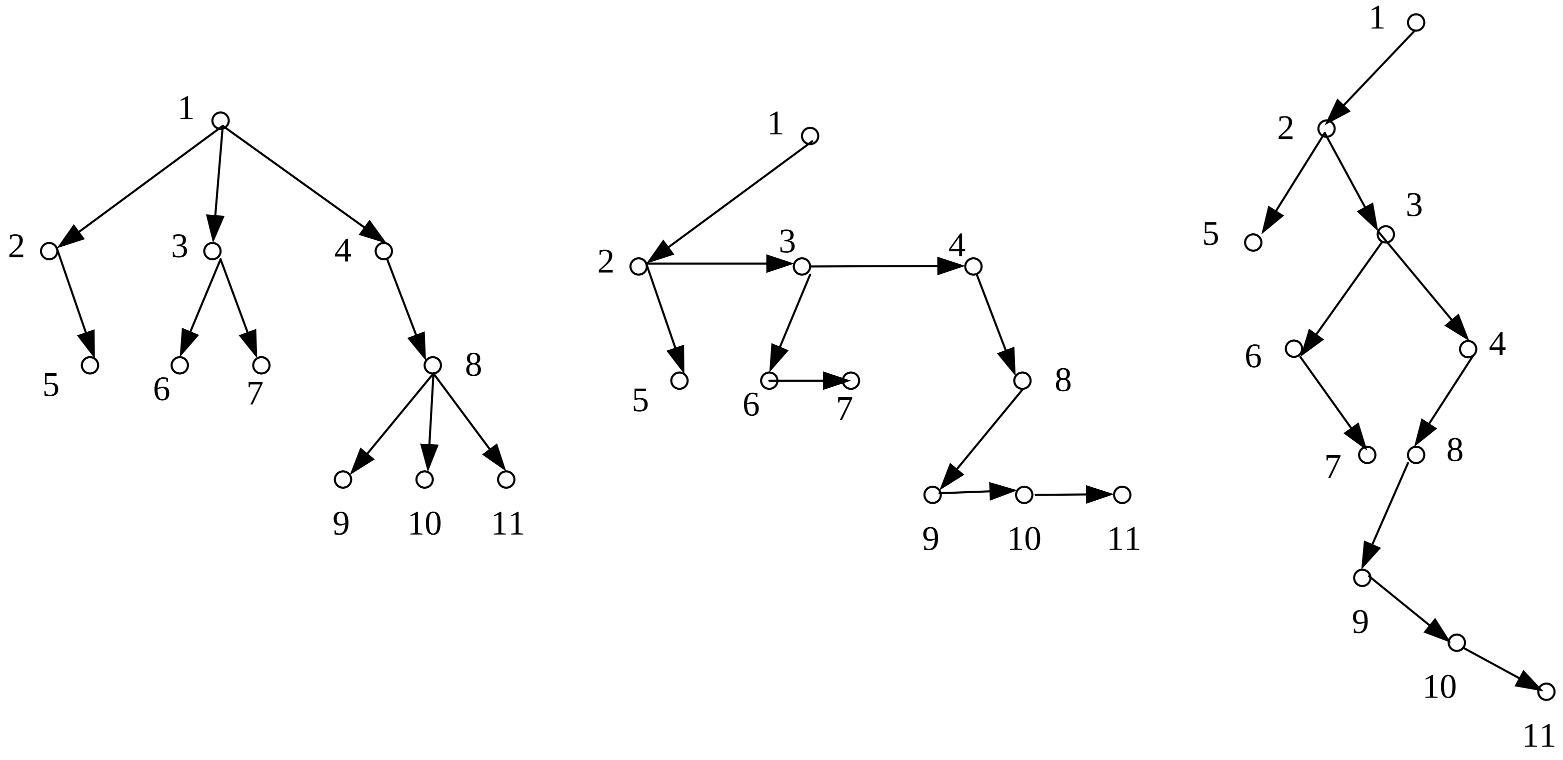
② 兄弟间用从左向右的有向边连接。

③ 按如下方法确定二叉树中结点的左儿子和右儿子：直接位于给定结点下面的结点，作为左儿子，对于同一层上与给定结点右邻的结点，作为右儿子，依此类推。

- 反过来，我们也可以将二叉树还原为有序树。

11.3 有向树及其应用

例6



11.3 有向树及其应用

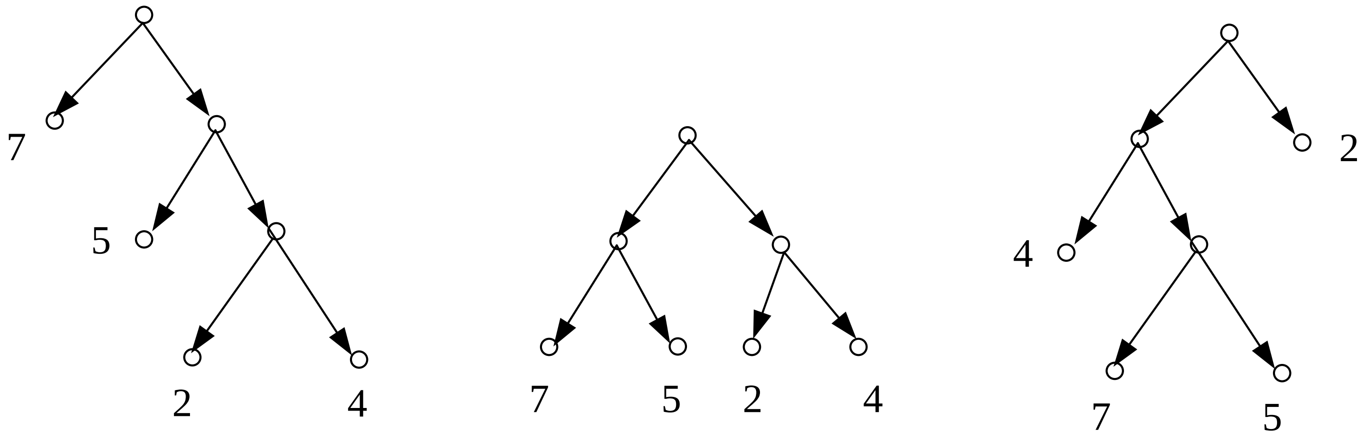
- 最优二叉树

叶加权二叉树：设T是有t个叶结点的二叉树，叶分别带权$w_1, w_2, \ldots w_t$，（设$w_1 \le w_2 \le \ldots \le w_t$）各个叶的道路长度分别为$l_1, l_2, \ldots, l_t$，定义T的权值为：$\boldsymbol{W(T)=\sum_{i=1}^{t} l_i w_i}$ 。

使W(T)取最小值的T，这个T称为带权 w_1，w_2，…,w_t的最优二叉树。

11.3 有向树及其应用

例8 T是4个叶的二叉树，权值 w_1, w_2, w_3, w_4分别为2，4，5，7。



W(T)=35　　　W(T)=36　　　W(T)=46

11.3 有向树及其应用

Huffman定理

在带权为$w_1 \leqslant w_2 \leqslant \cdots \leqslant w_t$的最优二叉树中，必有T满足：

① 权为w_1, w_2的两片树叶v_1, v_2是兄弟；

② 设v_1, v_2的父亲是v，如果从T中删去v_1，v_2，并把v改成带权为w_1+w_2的叶之后的树记为T_1，则T_1是带权为w_1+w_2，w_3，…，w_t的最优二叉树。

11.3 有向树及其应用

Huffman算法（构造最优二叉树）

给定实数w_1, w_2，…，w_t，且$w_1 \leqslant w_2 \leqslant \cdots \leqslant w_t$。

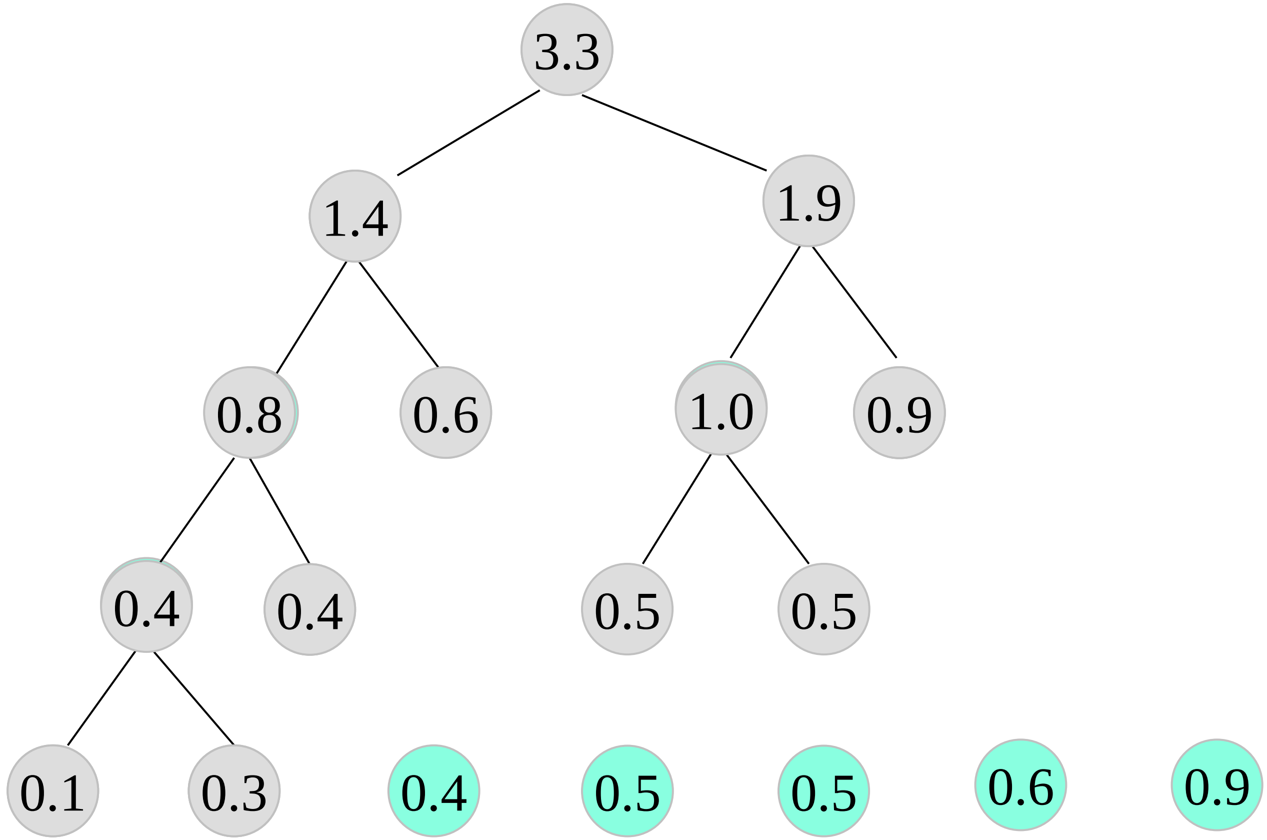
① 连接权为w_1, w_2的两片树叶，得一个分支点，其权为w_1+w_2；

② 在w_1+w_2，w_3，…，w_t中选出两个最小的权，连接它们对应的顶点（不一定是树叶），得新分枝点及所带的权；

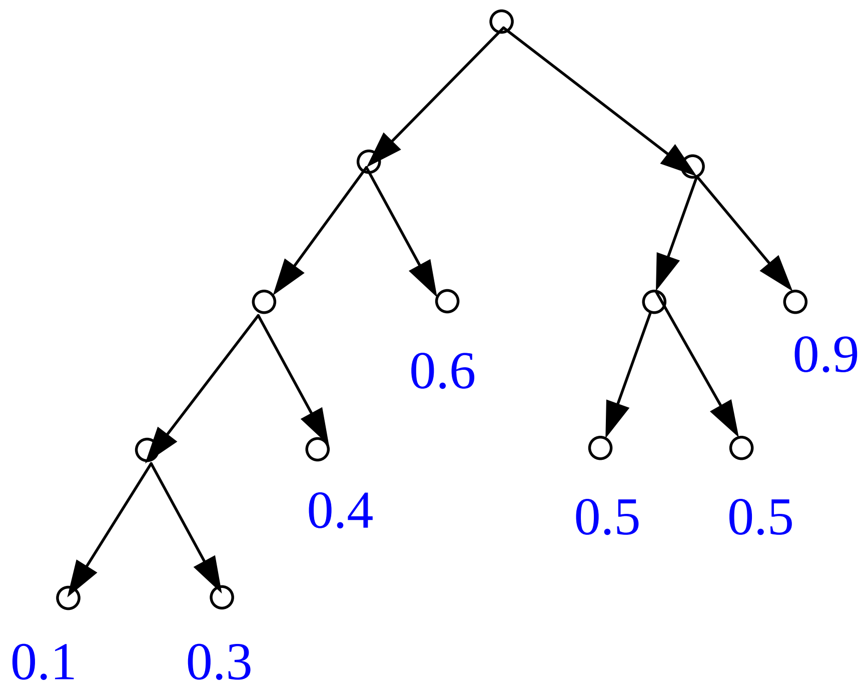
③ 重复②，直到形成t-1个分支点，t片树叶为止。

4.3 有向树及其应用

例8 给定一组权0. 1，0. 3，0. 4，0. 5，0. 5，0. 6，0. 9，构造一个最优二叉树。



11.3 有向树及其应用



$$W(T) = 4 \times (0.1 + 0.3) + 3 \times (0.4 + 0.5 + 0.5) + 2 \times (0.6 + 0.9)$$
$$= 8.8$$

作业

- ✓习题十一

  16、21