§3.4二维随机变量函数的分布

设**(X,Y)**是二维随机变量，与一维情形类似**Z=g(X,Y)**可看作是一维随机变量。本节将学习在已知**(X,Y)**分布的情况下求**Z=g(X,Y)**的分布。

复习：X离散型，求Y = g(X)的分布律的一般方法为：

设X 的分布律为 $p_k = P(X = x_k), k = 1, 2, L$

则随机变量Y = g(X)的分布律为：

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	L	$g(x_k)$	L
p_k	p_1	p_2	L	p_k	L

如果有若干个 $g(x_k)$ 相等，将他们合并，并将相应的概率相加（必要时可重新排序）。

离散型

设（X,Y）是二维离散型随机变量，联合分布律为 $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$， $i, j = 1, 2, L$

设Z = g(X,Y)，则Z是一维离散型随机变量，其可能的取值为 $z_{ij} = g(x_i, y_j), i, j = 1, 2, L$

类似一维，Z的分布律为：

Z	L	$g(x_i, y_j)$	L
p_k	L	p_{ij}	L

同样地，如果有若干个 $g(x_i, y_j)$ 相等，将他们合并，并将相应的概率相加。

例题： 已知随机变量 （X,Y）的联合分布律为

X \ Y	1	2	3
1	0.07	0.20	0.13
2	0.35	0.25	0.00

求Z=X+Y的分布律。

解法一： X 的可能取值为1, 2， Y 的可能取值为1, 2, 3， 于是 Z=X+Y 的可能取值为2, 3, 4, 5， 且

$$P(Z=2)=P(X+Y=2)=P(X=1,Y=1)=0.07;$$

$$P(Z=3)=P(X+Y=3)=P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)$$
$$=0.20+0.35=0.55;$$
$$P(Z=4)=P(X+Y=4)=P(X=1,Y=3)+P(X=2,Y=2)$$
$$=0.25+0.13=0.38;$$
$$P(Z=5)=P(X+Y=5)=P(X=2,Y=3)=0;$$

于是，Z 的分布律为

Z	2	3	4
p_k	0.07	0.55	0.38

(X,Y)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
p_{ij}	0.07	0.20	0.13	0.35	0.25	0

$$\Downarrow$$

(X,Y)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
p_{ij}	0.07	0.20	0.13	0.35	0.25	0
$Z=X+Y$	2	3	4	3	4	5

$$\Downarrow$$

Z	2	3	4	5
p_k	0.07	0.55	0.38	0

离散型卷积公式

定理设 X,Y 为相互独立的两个离散型随机变量，其可能的取值 $0,1,2,\cdots$，则Z=X+Y 的分布律为

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i),\quad k=0,1,2,\cdots$$

证：显然，Z 的可能取值为 $0,1,2,\cdots$，并且对任意有 $k=0,1,2,\cdots$

$$P(Z=k)=P(X+Y=k)$$

$$=P\left(\bigcup_{i=0}^{k}\{X=i,Y=k-i\}\right)=\sum_{i=0}^{k}P\left(X=i,Y=k-i\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}P\left(X=i\right)P\left(Y=k-i\right)$$

连续型

复习：在已知连续型随机变量X 的分布情况下

求 $Y=g(X)$的密度函数的方法为：

(1) 确定Y 的取值范围R(Y);

(2) 求出当 $y\in R(Y)$ 时Y 的分布函数$F_Y(y)$：

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=P(X\in G(y))=\int_{G(y)} f(x)dx;$$

其中 $G(y)$是满足 $g(X)\le y$ 的X 的取值范围;

(3) 求出当$y\in R(Y)$时Y 的密度函数$f_Y(y)$：

$$f_Y(y)=F_Y'(y),\quad y\in R(Y);$$

(4) 总结Y 的密 度函数 $f_Y(y)=\begin{cases} F'_Y(y), & y\in R(Y), \\ 0, & else。\end{cases}$

类似于一维情形，设 (X,Y) 为二维连续型随机变量，联合密度为 $f(x,y)$，又设 $Z=g(X,Y)$，则 Z 的密度函数的求法一般为：

(1)　确定Z 的取值范围R(Z);

(2)　求出当 $z\in R(Z)$时Z的分布函数 $F_Z(z)$：

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(g(X,Y)\le z)$$
$$=P((X,Y)\in G(z))=\iint_{G(z)} f(x,y)dxdy;$$

其中 $G(z)$是满足$g(X,Y)\le z$ 的（X,Y）的取值范围;

(3)　求出当 $z\in R(Z)$时 Z的密度函数 $f_Z(z)$：

$$f_Z(z)=F_Z'(z),\quad z\in R(Z);$$

(4) 总结 Z的密度函数 $f_Z(z)=\begin{cases} F'_Z(z), & y\in R(Z), \\ 0, & else。\end{cases}$

重点学习：$Z=XY, Z=aX+bY, Z=\frac{X}{Y},$

$Z=Max\{X,Y\}, Z=Min\{X,Y\}, \ Z=\sqrt{X^2+Y^2},$

例3.15设(X,Y)有密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy, & 0\le x\le 2, 0\le y\le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求Z=XY的密度函数.

解：由于联合密度不为零的区域为 $D: 0\le x\le 2, 0\le y\le 1$

因此不妨认为(X, Y)的可能取值为D. 从而Z=XY的值域R(Z)=[0, 2].

当$z\in R(Z)$时，由分布函数的定义得：

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(XY\le z)=\iint\limits_{xy\le z} f(x,y)dxdy$$

画出被积函数f(x,y)不为零的区域D以及积分区域

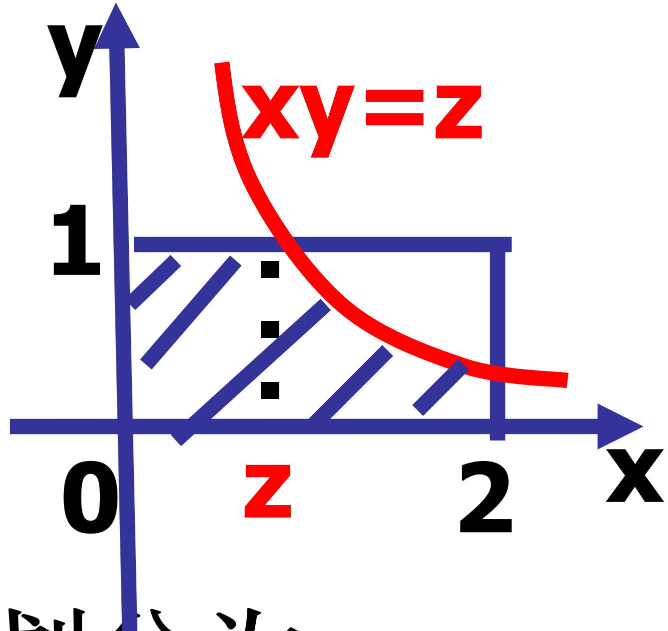
G：$xy\le z$的图形

$$\text{当} z \in [0,2],$$

$$F_Z(z) = \iint\limits_{xy \le z} f(x,y)dxdy$$

$$= \iint\limits_{D \cap G} xydxdy$$

$$= \iint\limits_{\text{阴影部分}} xydxdy$$



积分区域$D \cap G$可划分为

$G_1: 0 \le x \le z, 0 \le y \le 1$以及

$G_2: z \le x \le 2, 0 \le y \le \dfrac{z}{x}$.于是

$$F_Z(z) = \int_0^z dx \int_0^1 xydy + \int_z^2 dx \int_0^{\frac{z}{x}} xydy$$

$$= \frac{z^2}{4} + \frac{z^2}{2}(\ln 2 - \ln z),$$

$$当z \in (0,2],\ f_Z(x) = F_Z'(z) = z\ln\frac{2}{z}.$$

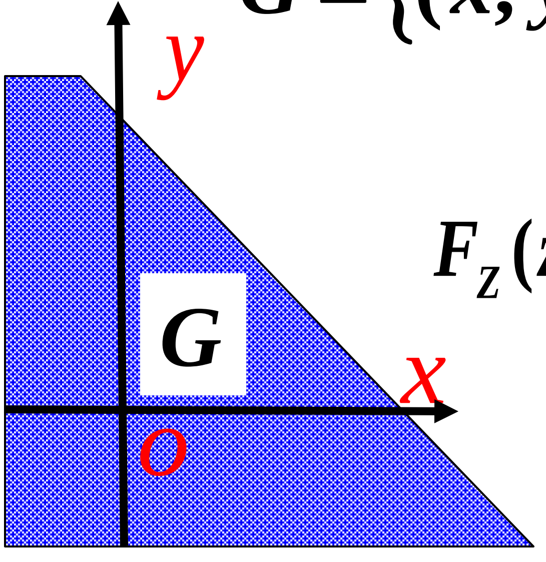
（4）总结 Z的密度函数
$$f_Z(z) = \begin{cases} z\ln\dfrac{2}{z}, & 0 < z \le 2。\\ 0, & else。\end{cases}$$

$Z=aX+bY$ 、连续型卷积公式

例：设(X,Y)的联合密度为 $f(x,y)$，$Z=aX+bY$。求 Z 的密度函数（a, b为不全为0的实常数）。

解：当b不为0时，对任意 $z\in(-\infty,+\infty)$，当 $b>0$ 时，$\{(x,y):ax+by\le z\}$所表示的区域即为图中

$$G=\{(x,y):-\infty<x<+\infty,-\infty<y<(z-ax)/b\};$$



$ax+by=z$

因此，当 $b>0$ 时，

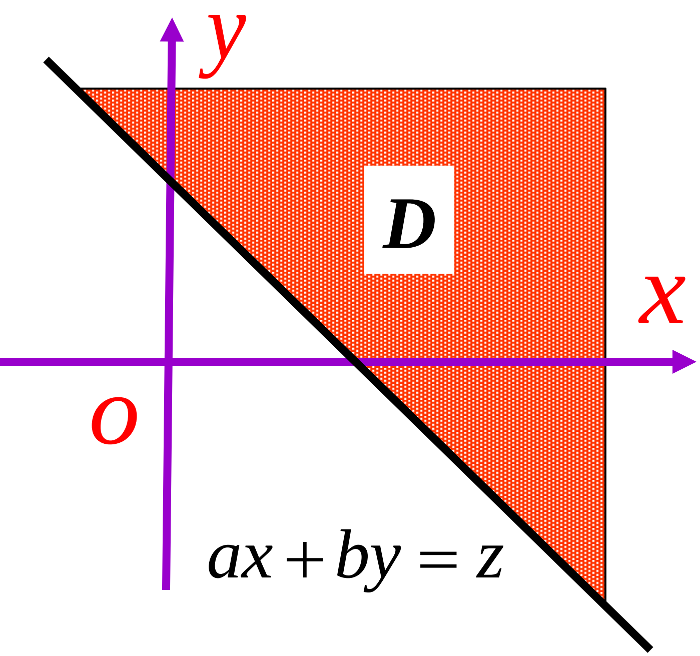
$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(aX+bY\le z)$$

$$=\iint_G f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{(z-ax)/b}f(x,y)dy$$

所以 $$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{1}{b}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\frac{z-ax}{b})dx;$$

当 $b<0$时，$ax+by\le z$ 所表示的区域即为图中

$$D=\{(x,y):-\infty<x<+\infty,(z-ax)/b<y<+\infty\}。$$



所以

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(aX+bY\le z)$$

$$=\iint_D f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{\frac{z-ax}{b}}^{+\infty}f(x,y)dy$$

所以 $$f_Z(z)=F_Z'(z)=-\frac{1}{b}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\frac{z-ax}{b})dx.$$

综上所述，只要 $b\neq 0$，有 $f_Z(z)=\dfrac{1}{|b|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\dfrac{z-ax}{b})dx.$

同理可证，当a不为0时，有 $f_Z(z)=\dfrac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\dfrac{z-by}{a},y)dy$

特别地，当 $a\neq 0, b=0(i.e.\quad Z=aX)$ 时，

$$f_Z(z)=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\tfrac{z}{a},y\right)dy=\frac{1}{|a|}f_X\left(\tfrac{z}{a}\right);$$

特别地，当 $b\neq 0, a=0(i.e.\quad Z=bY)$ 时，

$$f_Z(z)=\frac{1}{|b|}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,\tfrac{z}{b}\right)dx=\frac{1}{|b|}f_Y\left(\tfrac{z}{b}\right);$$

线性变换

当 $a=1, b=-1(i.e.\quad Z=X-Y)$ 时，

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,x-z)dx\left(or\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(z+y,y)dy\right)。$$

特别地，当 $a=1,b=1(i.e.\ \ Z=X+Y)$ 时，

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx\left(or\ \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy\right);$$

这就是连续型卷积公式：

定理3.10（连续型卷积公式） 设二维随机变量（X,Y）的联合密度为 $f(x,y)$，则 $Z=X+Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy,\quad \forall z\in R(z);$$

特别地，若 X 与Y 相互独立，则

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy,\forall z\in R(z).$$

例：若 X 与 Y 相互独立且 $X \sim U(0,1)$，$Y \sim e(1)$，求 $Z = X + Y$ 的密度函数。

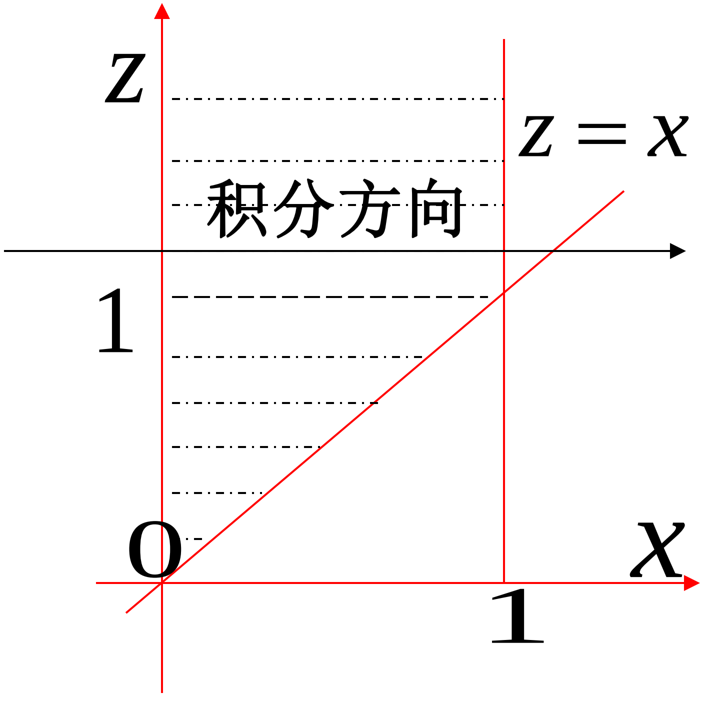
解：由于 $X \sim U(0,1)$，$Y \sim e(1)$，所以 X 和 Y 的密度函数分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0 & else \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0 & else \end{cases}。$$

显然 $R(Z) = (0, +\infty)$。由以上定理知，$Z = X + Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx.$$

为使被积函数不为0，当且仅当$\begin{cases}0<x<1\\ z-x>0\end{cases}$，如图中阴影部分所示。



当 $z\in(0,+\infty)$ 时，图中阴影部分内沿x方向积分，被积函数不为0，因此

$i)\quad when\quad 0<z<1,$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_0^z e^{-(z-x)}dx=1-e^{-z},$$

$ii)$ *when* $z \geq 1$,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx = \int_0^1 e^{-(z-x)}dx = e^{-z}(e-1)。$$

所以 $Z = X + Y$ 的密度函数为：

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \geq 0, \\ 1 - e^{-z}, & 0 < z < 1, \\ e^{-z}(e-1), & z \geq 1。\end{cases}$$

$$Z = X/Y$$

类似于前面的卷积公式，我们有

定理 设二维连续型随机变量（X,Y）的联合密度函数为 $f(x, y)$，则 $Z = X/Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y|\, f(zy, y)dy,\ \forall z \in R(z)。$$

特别地，若 X 与 Y 相互独立，则

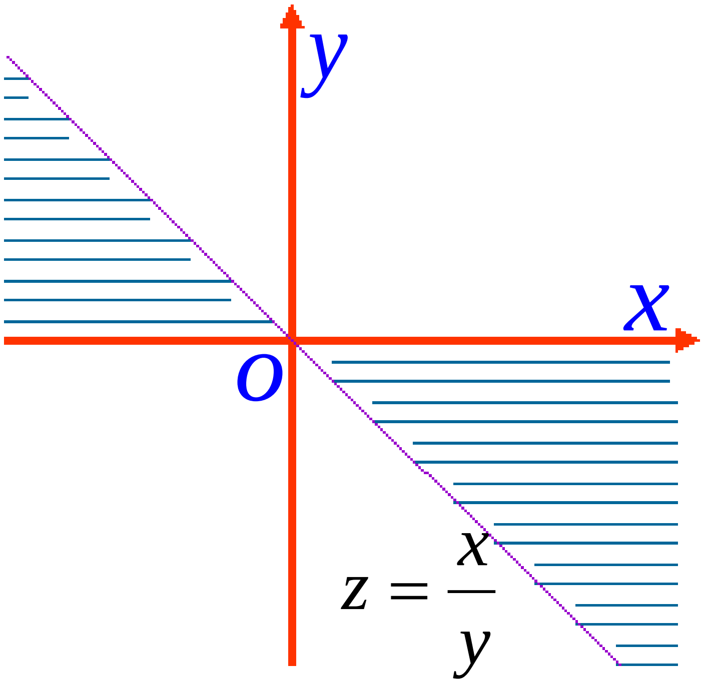
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y|\, f_X(zy) f_Y(y)dy,\ \forall z \in R(z)。$$

分析：证明方法与其它定理的证明一样，都用的是一般方法：由分布函数得密度函数。

证明：由 $\dfrac{x}{y} \le z$ 得：$\begin{cases} \text{当 } y>0 \text{ 时，} x \le yz \\ \text{当 } y<0 \text{ 时，} x \ge yz \end{cases}$ 于是

$$\left\{ (x,y): \frac{x}{y} \le z \right\} = \left\{ (x,y): \begin{array}{c} 0<y<+\infty \\ -\infty < x \le yz \end{array} \right\}$$

$$\cup \left\{ (x,y): \begin{array}{c} -\infty<y<0 \\ yz \le x < +\infty \end{array} \right\}$$



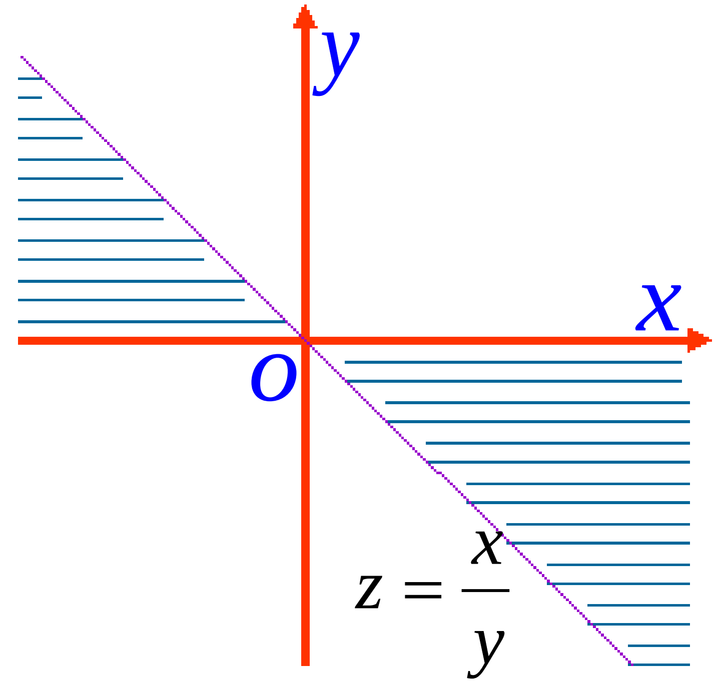
所以

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X/Y \le z)$$

$$= \iint_{x/y \le z} f(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} [\int_{zy}^{+\infty} f(x,y)dx]dy + \int_{0}^{+\infty} [\int_{-\infty}^{zy} f(x,y)dx]dy,$$

于是



$$f_Z(z)=(F_Z(z))'=\int_{-\infty}^{0}(-y)f(zy,y)dy$$

$$+\int_{0}^{+\infty}yf(zy,y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(zy,y)dy。$$

类比与思考：既然 $Z=X/Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(zy,y)dy$$

那么 $Z=Y/X$ 的密度函数应该是怎样的?

例：若 $X \sim U(0,a)$，$Y \sim U(0,a)(a>0)$ 且 X 与 Y 相互独立。求 $Z = X/Y$ 的密度函数。

解：由题意知

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}, & 0\le x\le a,\\ 0, & else,\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{a}, & 0\le y\le a,\\ 0, & else。\end{cases}$$

因 X 与 Y 相互独立，故

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_X(zy)f_Y(y)dy。$$

要使被积函数不为0，需 $\begin{cases}0\le zy\le a\\ 0\le y\le a\end{cases}$，如图。

当 $0 \le z \le 1$ 时，$f_Z(z) = \int_0^a y \dfrac{1}{a^2} dy = \dfrac{1}{2}$;

当 $z > 1$ 时，$f_Z(z) = \int_0^{\frac{a}{z}} y \dfrac{1}{a^2} dy = \dfrac{1}{2z^2}$。

总结有

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & 0 \le z \le 1, \\ \dfrac{1}{2z^2}, & z > 1, \\ 0, & else。\end{cases}$$