四川大学期中考试试卷

（2015—2016 年第二学期）

科目：概率统计（理工）　课程号：201018030　考试时间：90 分钟

注：请将解答写在答题纸上规定的方框内，否则记 0 分。

一、填空题（1-5 题，每空 3 分，共 15 分）

1. 从一大批产品中随机抽取 3 次，每次取一件．已知取出的 3 件产品中至少有一件正品的概率为 $\frac{63}{64}$，则这批产品的正品率为____________.

2. 设随机变量 $X \sim B(50, 0.2)$（二项分布），$Y \sim P(0.5)$（泊松分布），且 X 与 Y 相互独立，记 $Z = X - 2Y - 5$，则 $D(Z) =$____________.

3. 一个袋中有 10 个同样大小的球，其中有 4 个白球，其余是红球, 现有一人做摸球游戏，规则如下：每次从袋中摸取一球，观察颜色后放回，同时向袋中放入 2 个同颜色的球．问此人三次摸出球的颜色依次为红、白、红的概率为____________.

4. 设 $F(x)$ 为连续型随机变量 X 的分布函数，且分布函数值 $F(0) = 0.5$，$F(1) = 0.8413$；令 $Y = 2 - 2X$，则 $P(X \geq 0, Y \geq 0) =$__________.

5. 若每次实验 E 只有三种两两不相容的结果：A_1, A_2, A_3，且这三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$．将实验 E 独立重复做两次，用 X 与 Y 分别表示两次试验中 A_1 与 A_2 出现的次数，则 X 与 Y 的协方差为______________.

二、解答题（6-11 题，共 85 分）

6. (16 分) 设考生的报名表来自三个地区，各有 10 份、15 份、25 份报名表，其中女生报名表分别为 3 份、7 份、5 份。现随机抽一个地区的报名表，从中先后各取一份。试求：
   (1) 先取的一份是男生报名表的概率；
   (2) 在先取的一份是男生报名表的条件下，后取的一份是女生报名表的概率.

7. (12 分) 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-2)}, & x > 2 \\ 0, & x \leq 2 \end{cases}.$$

   用 Y 表示对 X 的 100 次独立重复观测中事件 $\{X > 6\}$ 出现的次数，求 $P(Y \leq 1)$.

8. (15 分) 设 $X \sim U(-2, 1)$ (均匀分布)，$Y = 2X^2 - 1$，求 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

9. (12 分) 一个商店经销某种商品，每周的进货量 X 与顾客对该商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量，都服从区间 $(10, 20)$ 上的均匀分布．商店每售出一件该商品可获利润 100 元，若需求量超过了进货量，则可以要从其它商店调剂供应，此时售出一件该商品可获利润 50 元．试求此商店销售该商品每周的平均利润.

10. (9 分) 设 X 与 Y 是两个相互独立的随机变量，已知 $X \sim B(1, 0.6)$ (0-1 分布), Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \ -\infty < y < +\infty.$$

令 $Z = X + Y$，求 Z 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

11. (21 分) 设区域 $G = \{(x, y) \mid 0 < x < \frac{1}{2}, x < y < 1 - x\}$，随机变量 (X, Y) 服从区域 G 上的二维均匀分布.

试求:

(1) (X, Y) 的概率密度函数 $f(x, y)$;

(2) 条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$;

(3) 条件概率 $P\left(X < \frac{1}{4} \middle| Y = \frac{5}{8}\right)$.

四川大学期中考试试卷

（2015—2016 年第二学期）

科目：概率统计（理工）　课程号：201018030　考试时间：90 分钟

注：请将解答写在答题纸上规定的方框内，否则记 0 分。

一、填空题（1-5 题，每空 3 分，共 15 分）

1. 从一大批产品中随机抽取 3 次，每次取一件．已知取出的 3 件产品中至少有一件正品的概率为 $\frac{63}{64}$，则这批产品的正品率为____________.

2. 设随机变量 $X \sim B(50, 0.2)$（二项分布），$Y \sim P(0.5)$（泊松分布），且 X 与 Y 相互独立，记 $Z = X - 2Y - 5$，则 $D(Z) =$ ____________.

3. 一个袋中有 10 个同样大小的球，其中有 4 个白球，其余是红球，现有一人做摸球游戏，规则如下：每次从袋中摸取一球，观察颜色后放回，同时向袋中放入 2 个同颜色的球．问此人三次摸出球的颜色依次为红、白、红的概率为____________.

4. 设 $F(x)$ 为连续型随机变量 X 的分布函数，且分布函数值 $F(0) = 0.5$，$F(1) = 0.8413$；令 $Y = 2 - 2X$，则 $P(X \ge 0, Y \ge 0) =$ __________.

5. 若每次实验 E 只有三种两两不相容的结果：A_1, A_2, A_3，且这三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$．将实验 E 独立重复做两次，用 X 与 Y 分别表示两次试验中 A_1 与 A_2 出现的次数，则 X 与 Y 的协方差为________________.

二、解答题（6-11 题，共 85 分）

6. (16 分) 设考生的报名表来自三个地区，各有 10 份、15 份、25 份报名表，其中女生报名表分别为 3 份、7 份、5 份。现随机抽一个地区的报名表，从中先后各取一份。试求：

(1) 先取的一份是男生报名表的概率；

(2) 在先取的一份是男生报名表的条件下，后取的一份是女生报名表的概率.

7. (12 分) 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-2)}, & x > 2 \\ 0, & x \le 2 \end{cases}.$$

用 Y 表示对 X 的 100 次独立重复观测中事件 $\{X > 6\}$ 出现的次数，求 $P(Y \le 1)$.

8. (15 分) 设 $X \sim U(-2, 1)$（均匀分布），$Y = 2X^2 - 1$，求 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

9. (12 分) 一个商店经销某种商品，每周的进货量 X 与顾客对该商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量，都服从区间 $(10, 20)$ 上的均匀分布．商店每售出一件该商品可获利润 100 元，若需求量超过了进货量，则可以要从其它商店调剂供应，此时售出一件该商品可获利润 50 元．试求此商店销售该商品每周的平均利润.

10. (9 分) 设 X 与 Y 是两个相互独立的随机变量，已知 $X \sim B(1, 0.6)$ (0-1 分布)，Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}},\ -\infty < y < +\infty.$$

令 $Z = X + Y$，求 Z 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

11. (21 分) 设区域 $G = \left\{(x, y) \middle| 0 < x < \frac{1}{2}, x < y < 1 - x\right\}$，随机变量 (X, Y) 服从区域 G 上的二维均匀分布.

试求：

(1) (X, Y) 的概率密度函数 $f(x, y)$;

(2) 条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$;

(3) 条件概率 $P\left(X < \frac{1}{4} \middle| Y = \frac{5}{8}\right)$.

四川大学 2016 年春概率统计半期考试答案

一. 填空题：

1. 3/4 **2.** 10 **3.** 4/35 **4.** 0.3413 **5.** $-2/9$

二. 解答题：

6. 解答： 设 A_i 表“报名表来自第 i 个地区”，则 $P(A_i)=\frac{1}{3}, i=1,2,3$，且 A_1,A_2,A_3 构成一完备事件组；设 B_j 表“所取第 j 份是男生报名表”，$j=1,2$. 由题知

$$P(B_1|A_1)=\frac{7}{10},\ P(B_1|A_2)=\frac{8}{15},\ P(B_1|A_3)=\frac{20}{25},$$

$$P(B_1\overline{B}_2|A_1)=\frac{3\times 7}{10\times 9},\ P(B_1\overline{B}_2|A_2)=\frac{8\times 7}{15\times 14},\ P(B_1\overline{B}_2|A_3)=\frac{20\times 5}{25\times 24}.$$

(1) 由全概率公式，先取一份为男生报名表的概率为

$$P(B_1)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B_1|A_i)=\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{8}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{20}{25}=\frac{61}{90};$$

(2) 由全概率公式，

$$P(B_1\overline{B}_2)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B_1\overline{B}_2|A_i)=\frac{1}{3}\left[\frac{3\times 7}{10\times 9}+\frac{8\times 7}{15\times 14}+\frac{20\times 5}{25\times 24}\right]=\frac{2}{9},$$

故所求概率为

$$P(\overline{B}_2|B_1)=\frac{P(B_1\overline{B}_2)}{P(B_1)}=\frac{2/9}{61/90}=\frac{20}{61}.$$

7. 解答： 由题知 $P(X>6)=\int_6^{+\infty}e^{-(x-2)}dx=e^{-4}$，从而 $Y\sim B(100,e^{-4})$.

故所求概率为

$$P(Y\le 1)=P(Y=0)+P(Y=1)=C_{100}^{0}\left(e^{-4}\right)^{0}\left(1-e^{-4}\right)^{100}+C_{100}^{1}\left(e^{-4}\right)^{1}\left(1-e^{-4}\right)^{9}$$

$$=\left(1-e^{-4}\right)^{99}\left(1+99e^{-4}\right)\approx 0.4513.$$

8. 解答： 显然 $R(Y)=(-1,7)$；

当 $y\in(-1,1)$时，

$$F_Y(y)=P\left(2X^2-1\le y\right)=P\left(-\sqrt{\frac{y+1}{2}}\le X\le\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{y+1}{2}},$$

此时，$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{y+1}}$;

当 $y\in[1,7)$时，$F_Y(y)=P\left(2X^2-1\le y\right)$

$$=P\left(-\sqrt{\frac{y+1}{2}}\le X\le\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)=P\left(-\sqrt{\frac{y+1}{2}}\le X\le 1\right)=\frac{1+\sqrt{\frac{y+1}{2}}}{3},$$

此时，$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{12}\sqrt{\frac{2}{y+1}}$;

综上所述，有 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{y+1}}, & y\in(-1,1)\\ \frac{1}{12}\sqrt{\frac{2}{y+1}}, & y\in[1,7)\\ 0, & \text{others}\end{cases}$.

9. 解答：设此商店每周的利润为Z，则

$$Z=g(X,Y)=\begin{cases}100Y, & X\ge Y,\\ 100X+50(Y-X)=50(X+Y), & X<Y.\end{cases}$$

又(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1/100, & (x,y)\in[10,20]\times[10,20],\\ 0, & \text{others}.\end{cases}$$

所以，平均利润为

$$E(Z)=E\left(g(X,Y)\right)=\iint_{R^2}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{10}^{20}dx\int_{10}^{x}100y\times\frac{1}{100}dy+\int_{10}^{20}dx\int_{x}^{20}50(x+y)\times\frac{1}{100}dy=\frac{4250}{3}.$$

10. 解答：显然，X 的分布律为

X	0	1
p_k	0.4	0.6

；

从而 Z 的分布函数为：对任意的 $z\in R$，

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$$

$$=P(X=0)P(X+Y\le z|X=0)+P(X=1)P(X+Y\le z|X=1)$$

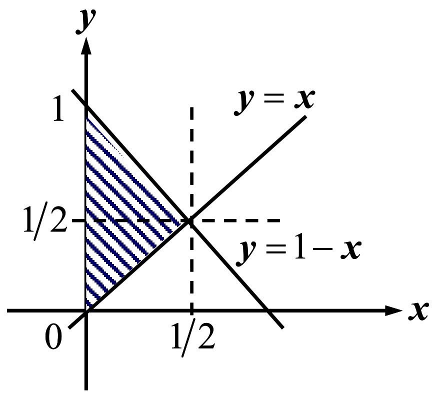
$$=0.4P(Y\le z)+0.6P(Y\le z-1)=0.4F_Y(z)+0.6F_Y(z-1);$$

所以，Z 的密度函数为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=0.4f_Y(z)+0.6f_Y(z-1)$$

$$=\frac{2}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}+\frac{3}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-1)^2}{2}},\qquad z\in R.$$

11. 解答：如图，阴影部分面积为 $\frac{1}{4}$.



(1) (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}4, & 0<x<1/2,x<y<1-x\\ 0, & \text{others}\end{cases}.$$

(2) Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y 4dx=4y, & 0<y<1/2\\ \int_0^{1-y}4dx=4(1-y), & 1/2\le y<1\\ 0, & \text{others}\end{cases},$$

从而，当 $y\in(0,1/2)$ 时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}4/4y=1/y, & x\in(0,y)\\ 0, & \text{others}\end{cases}$$

当 $y\in[1/2,1)$ 时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}4/4(1-y)=1/(1-y), & x\in(0,1-y)\\ 0, & \text{others}\end{cases}$$

(3) 由 (2) 知 $f_{X|Y}\left(x|5/8\right)=\begin{cases}8/3, & x\in\left(0,3/8\right)\\ 0, & \text{others}\end{cases}$，从而

$$P\left(X<\frac{1}{4}\middle|Y=\frac{5}{8}\right)=\int_{-\infty}^{1/4}f_{X|Y}\left(x|5/8\right)dx=\int_{-\infty}^{1/4}\frac{8}{3}dx=\frac{2}{3}.$$