第四部分　图　论

第12章　平面图及其应用

计算机（软件）学院

林　兰

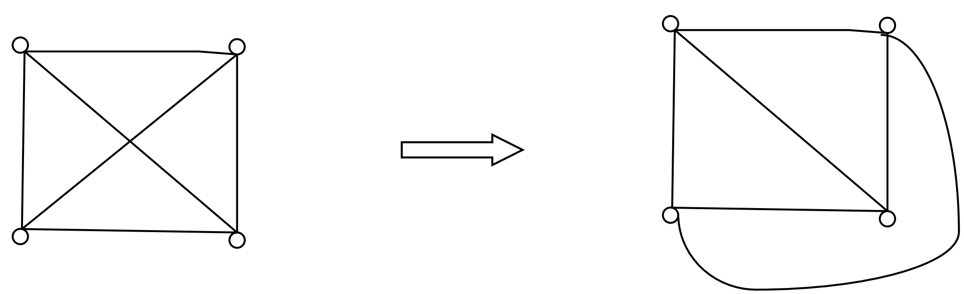
linlan@scu.edu.cn

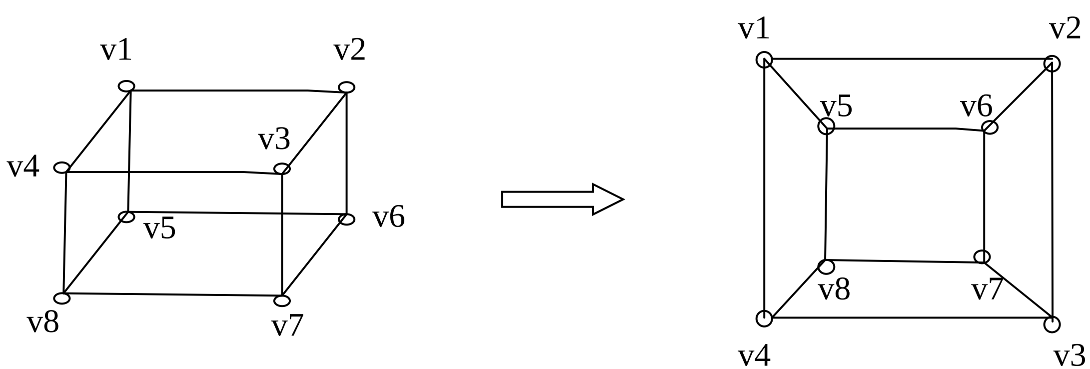
主要内容

12.1 平面图的基本概念

定义1（平面图）

一个无向图G=(V,E)，如果能把它的所有结点和边画在平面上，使得任何两边除公共结点外没有其他交叉点，则称G为平面图，否则称G为非平面图。

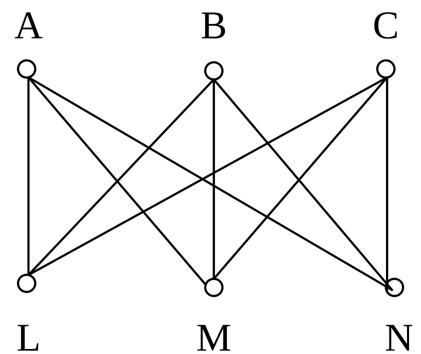




12.1 平面图的基本概念

例1 一工厂有A, B, C三个车间和L, M, N三个仓库，因为工作需要车间与仓库间设专用车道，为了避免车祸，车道最好不相交，问可能吗？

根据题意为：完全二部图 $K_{3,3}$



$K_{3,3}$不是平面图，有交点。

12.1 平面图的基本概念

定义2（面）

设G是一个平面图，由图中的边所包围的其内部不包含图的结点和边的区域，称为G的一个面；

包围该面的诸边所构成的回路称为这个面的边界；

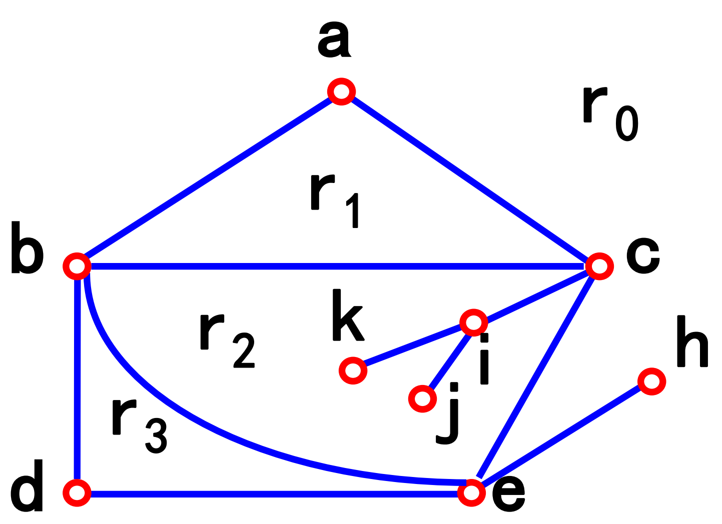
面r的边界的长度（边数）称为该面的度，简称面度，记为deg(r)。

区域面积有限的面称为有限面(内部面)，区域面积无限的面称为无限面(外部面)。

显然，平面图有且仅有一个无限面。

5.1 平面图的基本概念

例2 在右图中有9个结点，11条边，把平面分成4个面r_0、r_1、r_2、r_3。其中



- r_0是外部面(无限面)，

边界为abdeheca，$d(r_0)=7$；

- r_1、r_2、r_3。是内部面(有限面)：
  - ✓ r_1的边界为abca，$d(r_1)=3$；
  - ✓ r_2的边界为becijikicb，$d(r_2)=9$；
  - ✓ r_3的边界为bdeb，$d(r_3)=3$。

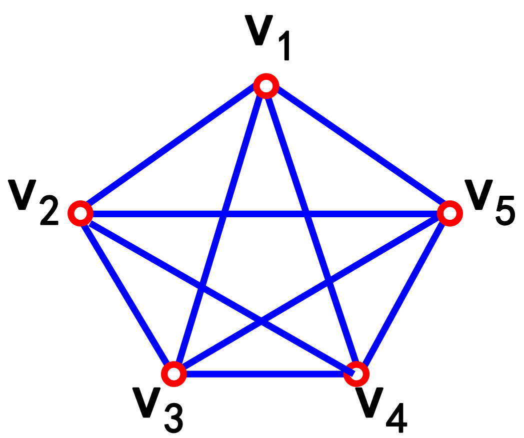
➢ 注意：若一条边不是割边，它必是两个面的公共边；割边只能是一个面的边界，计算面度时为2。

12.1 平面图的基本概念

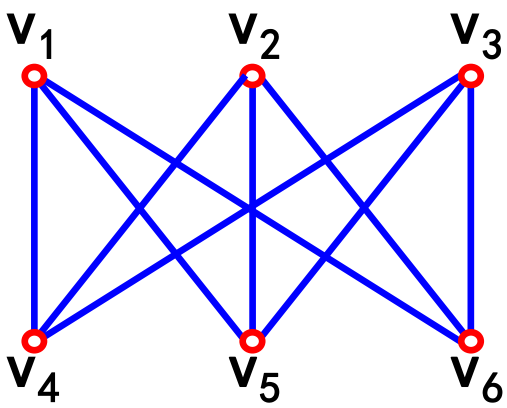
定理1：若图G是平面图，则G的任何子图都是平面图。

定理2：若图G是非平面图，则G的任何母图也是非平面图。

推论：K_n (n≥5) 和 $K_{3,n}$ (n≥3) 是非平面图。



(a)



(b)

12.1 平面图的基本概念

定理3　在一个平面图中，所有面度之和等于图中边数的2倍。即

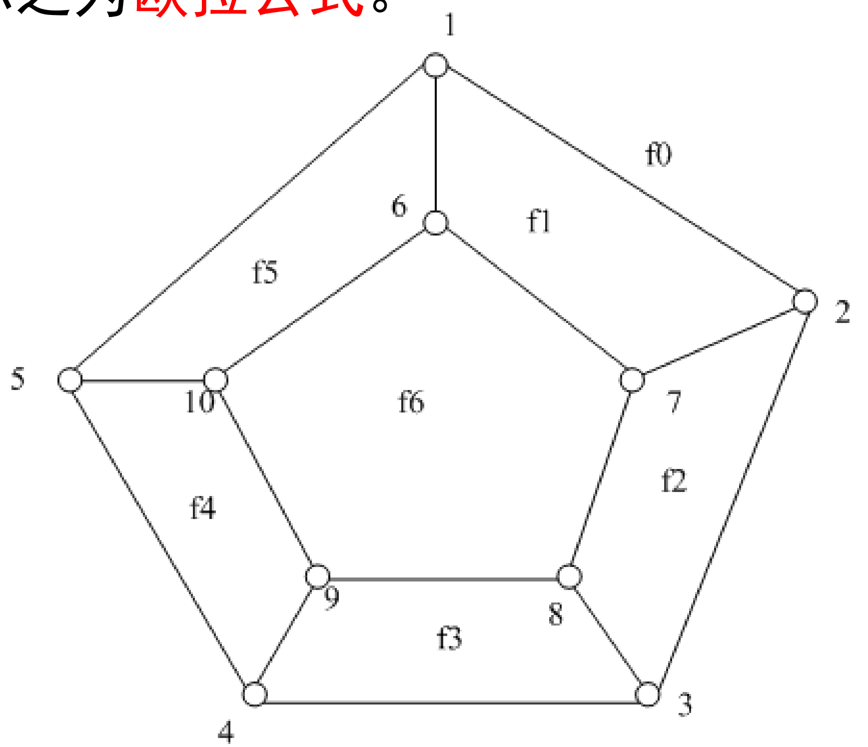
$$\sum_{i=1}^{r} \deg(F_i) = 2m$$

主要内容

- 12.1 平面图的基本概念
- 12.2 欧拉公式
- 12.3 平面图的判断
- 12.4 平面图的对偶图
- 12.5 平面的点着色与图的着色

12.2 欧拉公式

- 1750年，欧拉发现，任何一个凸多面体，若有n个顶点、m条棱和f个面，则有n−m+f＝2。这个公式可以推广到平面图上来，称之为欧拉公式。



n=10，m=15，f=7；　n−m+f=2

12.2 欧拉公式

定理4 **设G是一个面数为f的(n, m)连通平面图，则恒有**

$$n - m + f = 2$$

顶点数-边数+面数=2

证明：∵G是连通图，可构造G的一个生成树T，

则T也是平面图，且只有一个面（外部面）。

再对T依次加入树补边，根据树的等价命题，每增加一条树补边，将增加一个圈，即增加一个内部面。

∵ 树补边共有 m-(n-1)条，即共m-(n-1)个内部面

∴ 面数=内部面数+外部面数，即f＝m-(n-1)+1

整理上式得 n-m+f=2。

推论 **对于具有$k(k \geq 2)$个连通分支的平面图G，有**

$$n - m + f = k + 1$$

12.2 欧拉公式

定理5 **设G是（n, m）连通简单平面图（$\boldsymbol{n \geq 3}$），则有**

$$\boldsymbol{m \leq 3n - 6}$$

证明： ∵ G是连通的、简单图， $\boldsymbol{n \geq 3}$

则G中的面至少有3条边围成，即$\deg(Fi) \geq \mathbf{3}$

又$\because \sum \deg(Fi) = 2m$

设共有f个面，则$2m = \sum \deg(Fi) \geq 3f$

代入欧拉公式： $2 = n - m + f \leq n - m + \frac{2m}{3}$

整理得：$m \leq 3n - 6$

推论 **在任何简单连通平面图中，至少存在一个其度不超过5的结点。**

12.2 欧拉公式

围长：一个图的围长为它包含的最短圈的长度。

一个图若不含圈，则规定其围长为无穷大。

定理6 设G是一个围长g≥3的（n，m）连通平面图，则

$$\boldsymbol{m \leq \frac{gn-2g}{g-2}}$$

证明： 围长 $g \leq$ 图中任何面的度数

设共有f 个面，则$g \cdot f \leq$ 所有面的度数和$= 2m$

代入欧拉公式：$2 = n - m + f \leq n - m + \frac{2m}{g}$

整理得： $m \leq \frac{gn-2g}{g-2}$

12.2 欧拉公式

说明：

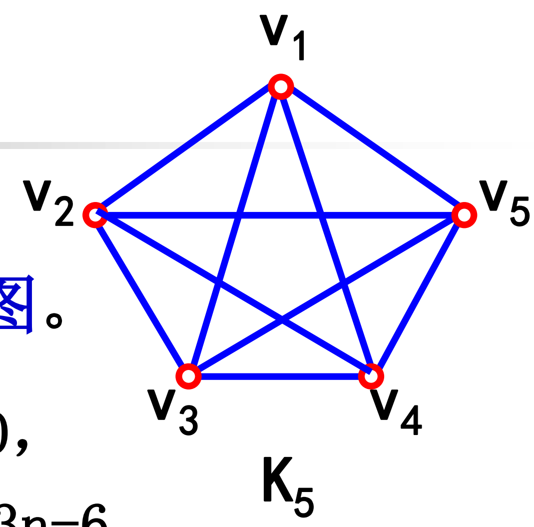
定理5和定理6本身可能用处不大，但它的逆否命题却非常有用，可以用它们来判定某些图是非平面图。即一个简单连通图，若不满足

$$\boldsymbol{m \leq 3n - 6} \text{ 或 } m \leq \frac{gn-2g}{g-2}$$

则一定是非平面图。

但需要注意，满足上面不等式的简单连通图未必是平面图。

12.2 欧拉公式



例3 用以上定理证明K_5和$K_{3,3}$是非平面图。

(1)因为K_5是简单连通图，n＝5，m＝10，

因此m＞3n-6＝3×5-6＝9，不满足m≤3n-6。

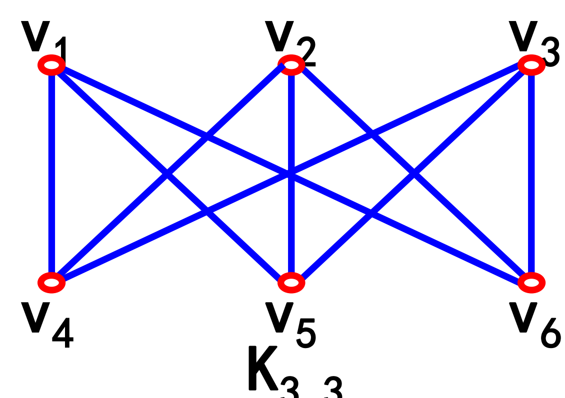
故K_5是非平面图。

(2)图$K_{3,3}$， n＝6，m＝9，围长 g=4，

但9≤（4×6-2×4）/（4-2）=8，不满足第二个必要条件，

所以它也是一个非平面图。

而$K_{3,3}$，满足不等式m≤3n-6。



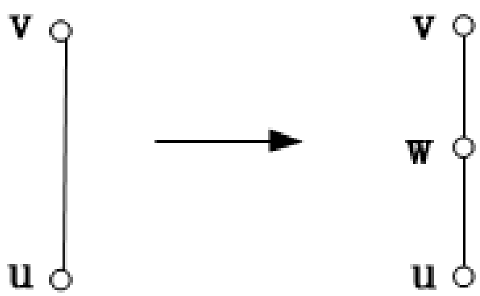
主要内容

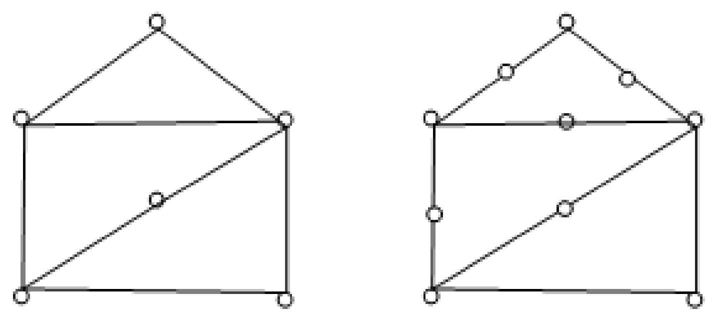
- 12.1 平面图的基本概念
- 12.2 欧拉公式
- 12.3 平面图的判断
- 12.4 平面图的对偶图
- 12.5 平面的点着色与图的着色

12.3 平面图的判断

若一个图是可平面的，则通过删除一条边{u, v}并添加一个新的顶点w和两条边{u, w}与{w, v}，所获得的任何图也是可平面的。这样的操作称为初等细分。

例如：





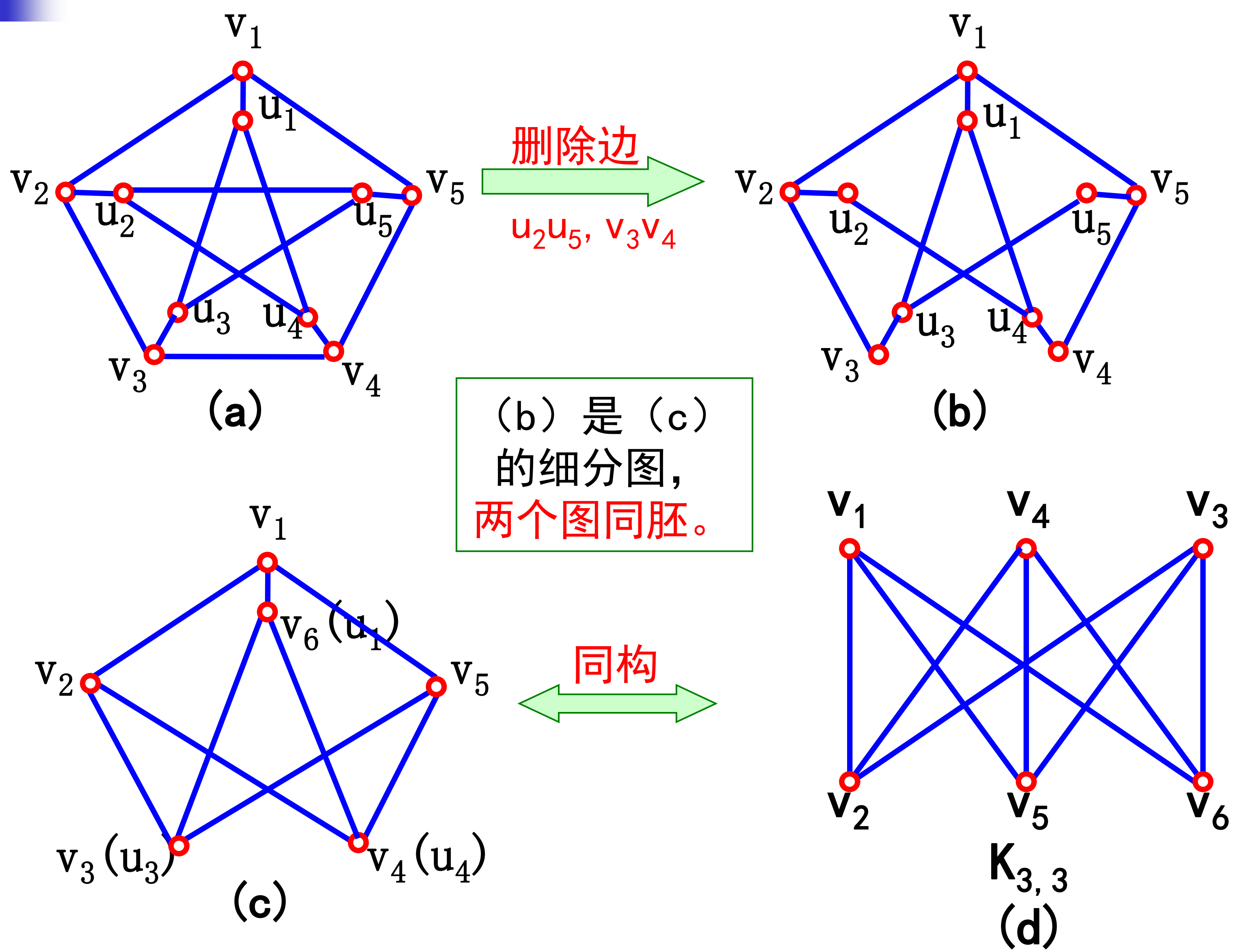
12.3 平面图的判断

定义 若可以从相同的图通过一系列的细分来获得图G1和G2，则称G1和G2是**同胚的（2度结点内同构）**。

定义 K_5和$K_{3,3}$称为库拉托夫斯基图。

定理8（库拉托夫斯基定理）：一个图是平面图，当且仅当它不包含任何在2度结点内和库拉托夫斯基图同构的子图。

例4 证明下图a所示的彼得森图是一个非平面图。



作业

- ✓ 习题十二

2(b)、4、5

主要内容

- 12.1 平面图的基本概念
- 12.2 欧拉公式
- 12.3 平面图的判断
- 12.4 平面图的对偶图
- 12.5 平面的点着色与图的着色

12.4 平面图的对偶图

定义（对偶图）

将平面图G嵌入平面后，通过以下过程：

① 对图G的每个面F_i内部作一个且仅一个结点v_i*；

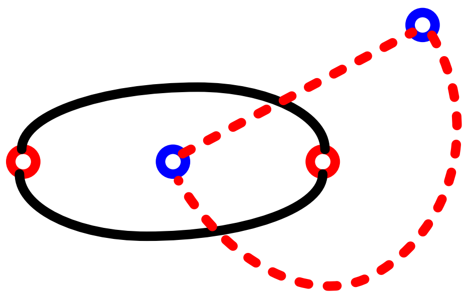
② 经过每两个面F_i和F_j的每一共同边界e_k作一条边$e_k^*=(v_i^*, v_j^*)$与e_k相交；

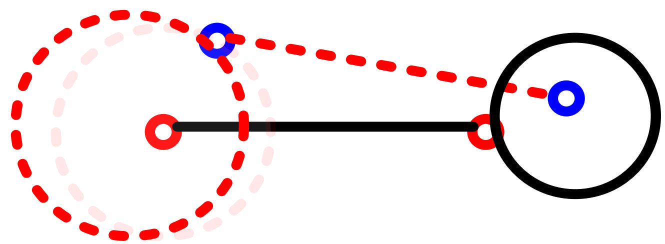
③ 当e_k只是一个面的F_i的边界时，v_i*恰存在一自回路与e_k相交。

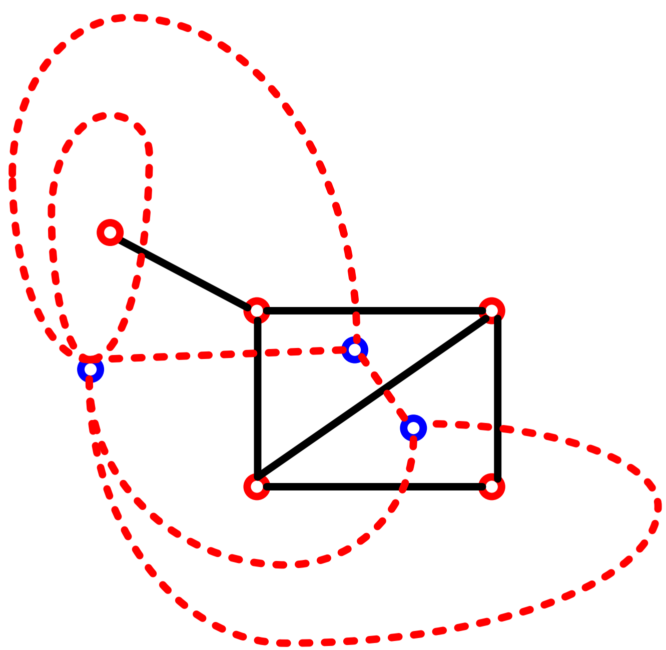
所得的图称为图G的对偶图，记为G*。

12.4 平面图的对偶图

- 对偶图的画法







虚线和兰圈分别是G*的边和结点，实线和红圈分别是G的边和点；G*的每条边只与G中分隔面F_u和F_v的边交叉一次。

12.4 平面图的对偶图

从对偶图的定义，特别是从其表示方法中可以清楚地看到：

- 每个平面图都有对偶图.
- 若G^*是连通图G的对偶图，则G也是G^*的对偶图；
- 若G是连通的平面图，则$G^{**} \cong G$。
- 事实上，存在着对偶图是一个图为平面图的充分必要条件，对偶图的平面性是显而易见的。

12.4 平面图的对偶图

定理9 设G*是连通平面图G的对偶图，n*, m*, f*和n, m, f分别为G*和G的顶点数，边数和面数，则：

① $n^*=f$

② $m^*=m$

③ $f^*=n$

④ 设G*的顶点u_i^*位于G的面R_i中，则$d(u_i^*)=\deg(R_i)$。

作业

- 习题十二

9

主要内容

- 12.1 平面图的基本概念
- 12.2 欧拉公式
- 12.3 平面图的判断
- 12.4 平面图的对偶图
- 12.5 图的着色

12.5 图的着色

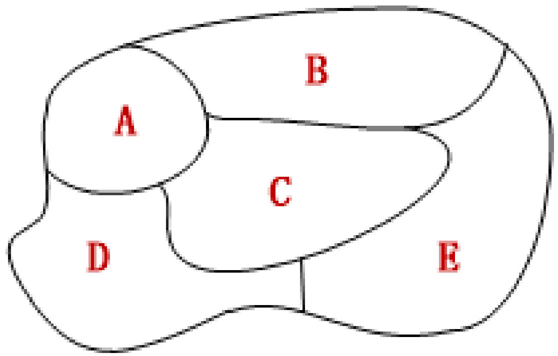
引入

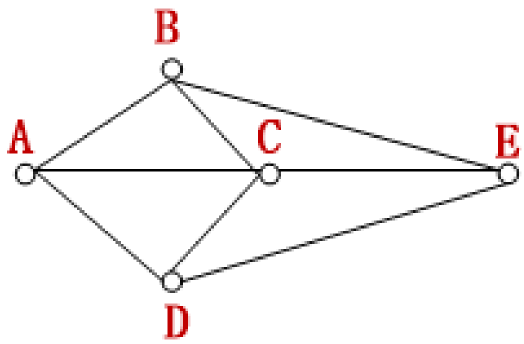
1852年英国一个青年盖思里(Guthrie)提出地图四色问题。

考虑在一张平面地图上，是否可以用四种颜色为地图着色，使得相邻国家着有不同的颜色。这个问题成为数学难题，一百多年来，都未能从理论上严格证明这个问题。直到1976年，由美国的K. Appel和W. Haken利用计算机给出了证明。

12.5 图的着色

引入





根据图的对偶图的构造方法，平面里的任何地图都具有可平面的对偶图。

给地图的区域着色的问题等价于这样一个问题：给对偶图的顶点着色，使得在对偶图里没有两个相邻顶点具有相同的颜色。

12.5 图的着色

1. 定义

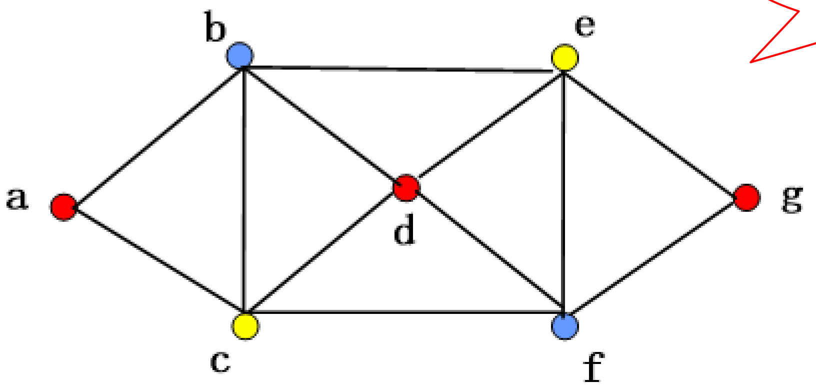
简单图的着色是对图中的每个顶点都指定一种颜色，使得没有两个相邻的顶点颜色相同。

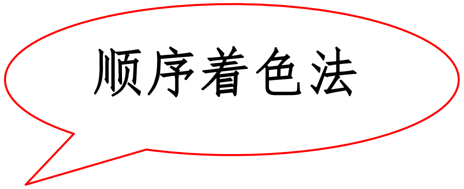
若能用k种颜色给图G的顶点着色，就称对G进行了k着色。

着色这个图所需要的最少颜色数称为图的色数。若色数为k，记为$\chi(G) = k$。

12.5 图的着色

例5 求下图的色数是多少？





- 证明一个图的色数为n需要做两件事：

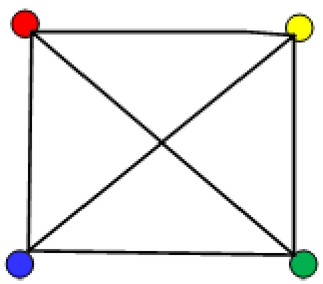
  ① 首先构造出用n种颜色着色这个图；

  ② 证明用少于n种颜色不能着色这个图。

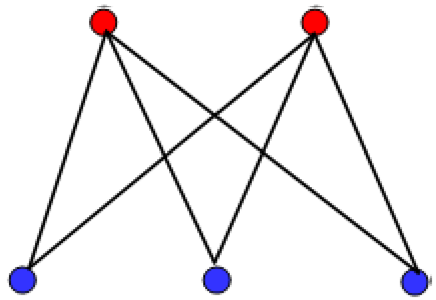
12.5 图的着色

例6 特殊图的着色（定理）

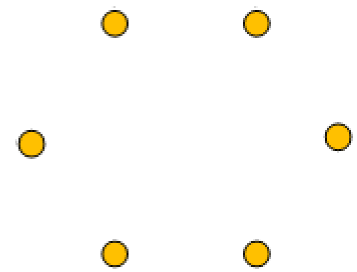
K_4



$K_{2,3}$



零图



色数 x (Kn)=n

G至少一条边， x (G)=2
⇔G是二部图

色数 x (G)=1
⇔G是零图

定理

对于任意的图G（不含环），均有χ（G）≤ Δ（G）+ 1.

12.5 图的着色

2. 五色定理

定理 任何连通简单平面图都是可以5着色的。

引理：在任何简单平面连通图中，至少存在一个顶点v_0，其度数$d(v_0) \leqslant 5$。(P159)

证明：对图的顶点数n作归纳。

当$n \leq 5$时，定理显然成立。

假设$n = k(k > 5)$时，结论成立。现证明$n = k + 1$时也成立。

由引理知：图G至少存在一个顶点v_0，其度数$d(v_0) \leq 5$。在图G中删去v_0得图G-{v_0}，由归纳假设知， G-{v_0}可以5着色的。再将加回去，有两种可能：

12.5 图的着色

（1）$d(v_0)<5$或$d(v_0)=5$但和邻接的5个顶点着色数小于5，则 v_0很容易着色，使得图G是5着色的。

（2） $d(v_0)=5$且和邻接的5个顶点着的5种颜色，如图(a)所示。

G-{v_0}中所有红黄色顶点称为红黄集；

G-{v_0}中所有黑白色顶点称为黑白集。

用$G_{红黄}$表示由红黄集导出的点诱导子图。

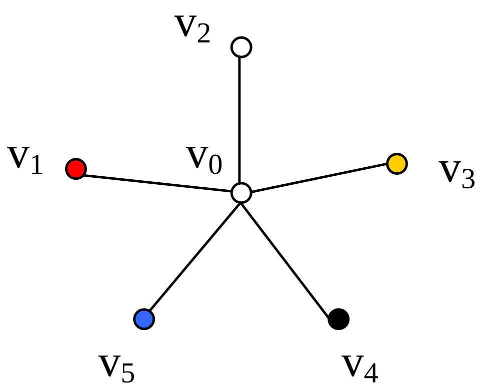


图 (a)

v_1和v_3是$G_{红黄}$中两个结点，根据v_1和v_3是否连通，又有两种可能：

12.5 图的着色

① v_1和v_3在$G_{红黄}$中不连通，属于两个不同分图中，如图(b)。

将v_1所在分图的红黄色对调，不会影响G-{v_0}的正常着色。

然后将v_0着上红色，即得图G的5着色。

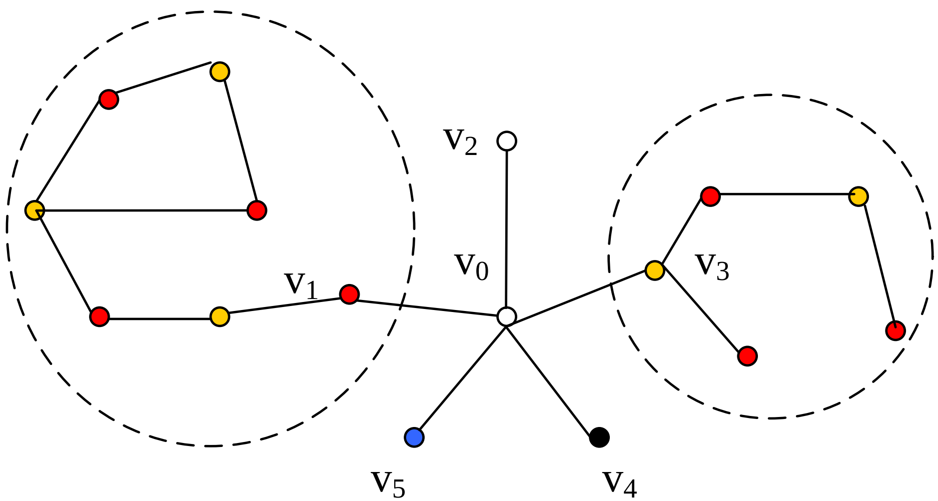


图 (b)

12.5 图的着色

② v_1和v_3在$G_{红黄}$中连通，属于同一分图中，必有一条红黄色间隔出现的路径P，加上v_0可构成回路C。如图(c)。

回路C将黑白集分为两个子集，一个在回路内，一个在回路外，则黑白集导出的子图$G_{黑白}$至少有两个分图，一个在C内，一个在C外。

于是问题转化为①类型处理。即得图G的5着色。

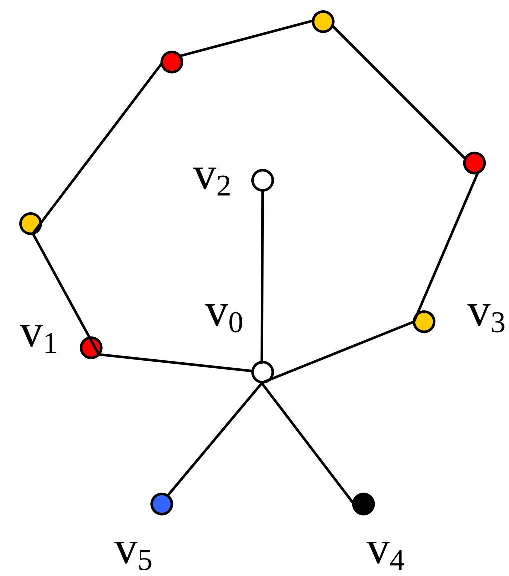


图 (c)

12.5 图的着色

3. 图着色的应用

图着色在调度和分配有关的问题中具有多种应用。

例7 某所大学里期末要安排七门课程的考试，假定科目从1到7编号，下列各对科目的考试有学生都要参加：

1和2, 1和3, 1和4, 1和7, 2和3, 2和4, 2和5, 2和7, 3和4, 3和6，3和7，4和5, 4和6, 5和6, 5和7, 6和7。

如何安排考试，使得没有学生在同一时间段上考试两门课程？

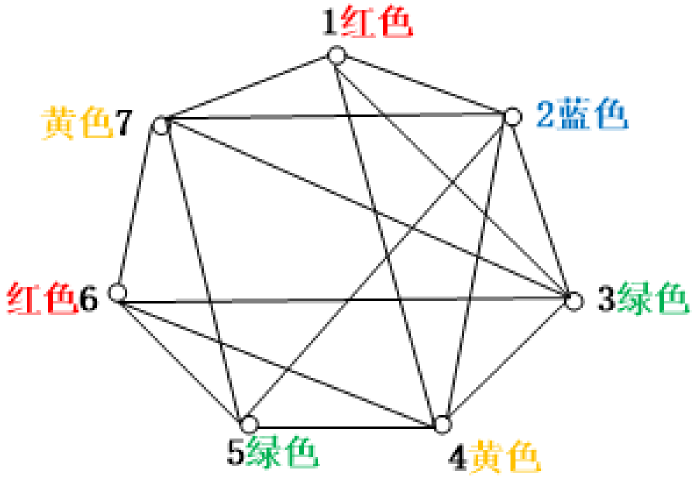
12.5 图的着色

解：首先建立图模型，用顶点表示科目，若有学生要考两门试，则在表示科目的两个顶点之间有边。用不同的点颜色来表示期末考试的每个时间段。考试安排就是对于的图的着色。

画出图，着色，色数为4。

所以，考试需要四个时间段：

时间段	考试科目
I	1, 6
II	2
III	3, 5
IV	4, 7



作业

- ✓ 习题十二

11、12