四川大学数学学院
Mathematical College Sichuan University
地址：中国·成都 邮编：610064
E-mail: nic2601@scu.edu.cn
Tel: +86-28-85412720 Fax: (028) 85412720

2016-2017第2学期期末概率统计(理工)参考解答

一 填空 (3×6=18分)

1. $\frac{1}{50400}$ 2. $2e^{-1}$ (≈ 0.7358) 3. 0.6
4. 106 5. 3 6. $N(2,6)$

二 解答 (共82分)

1 (10分) 记A_1, A_2, A_3分别为电压X不超过200伏，200伏到240伏之间和超过240伏三个事件，B代表电子元件损坏，由$X\sim N(220,400)$

$P(A_1)=P(X\le 200)=\Phi(\frac{200-220}{\sqrt{400}})=\Phi(-1)=1-\Phi(1)=0.1587$

$P(A_3)=P(X>240)=1-P(X\le 240)=1-\Phi(\frac{240-220}{\sqrt{400}})=1-\Phi(1)=0.1587$

$P(A_2)=1-P(A_1)-P(A_3)=1-2\times 0.1587=0.6826$

(1) $P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.1587\times 0.1+0.6826\times 0.002+0.1587\times 0.3\approx 0.065$
(或0.0648)

(2) $P(A_3|B)=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}=\frac{0.1587\times 0.3}{0.065}\approx 0.732$ (或0.7347)

2. (8分) X, Y独立且为$[10,20]$上均匀分布，$Z=X+Y$，~~R(Z)=[20,40]~~
$R(Z)=[20,40]$，由卷积公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$

$f_X(x)\ne 0 \Longleftrightarrow 10\le x\le 20$
$f_Y(z-x)\ne 0 \Longleftrightarrow 10\le z-x\le 20$

$$\begin{cases}10\le x\le 20\\ 10\le z-x\le 20\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}10\le x\le 20\\ z-20\le x\le z-10\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}10\le x\le z-10 & z\in[20,30]\\ z-20\le x\le 20 & z\in(30,40]\\ \phi & \text{else}\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_{10}^{z-10}\frac{1}{100}dx=\frac{1}{100}(z-20) & z\in[20,30]\\ \int_{z-20}^{20}\frac{1}{100}dx=\frac{1}{100}(40-z) & z\in(30,40]\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

四川大学数学学院
Mathematical College Sichuan University
地址：中国·成都 邮编：610064
E-mail：nic2601@scu.edu.cn
Tel：+86-28-85412720 Fax：(028) 85412720

3（10分）设应组织 a 万吨货源，此时利润为 Y 亿美元，则

$$Y=g(X)=\begin{cases}4X-(a-X)=5X-a & X\le a\\ 4a & X>a\end{cases}\qquad f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x\in[4,6]\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f_X(x)dx=\int_4^a(5x-a)\tfrac{1}{2}dx+\int_a^6 4a\cdot\tfrac{1}{2}dx$$

$$=\tfrac{5}{4}(a^2-16)-\tfrac{1}{2}a(a-4)+2a(6-a)=-\tfrac{5}{4}a^2+14a-20$$

当 $a=-\frac{14}{2\times(-5/4)}=5.6$ 时，$E(Y)$ 最大为 19.2 亿美元，应进货 5.6 万吨

4.（15分）G 的面积为 $\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$，故 $f(x,y)=\begin{cases}3 & (x,y)\in G\\ 0 & \text{else}\end{cases}$

(1) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}3(1-\sqrt{y}) & y\in[0,1]\\ 0 & \text{else}\end{cases}$ $\qquad f_Y(\frac{1}{4})=\frac{3}{2}$

$f_{X|Y}(x|\frac{1}{4})=\begin{cases}2 & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$ $\qquad P(X\le\frac{3}{4}|Y=\frac{1}{4})=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}2dx=\frac{1}{2}$

(2) $E(XY)=\iint_G xyf(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^{x^2}3xy\,dy=\frac{1}{4}$

$E(X)=\int_0^1dx\int_0^{x^2}3x\,dy=\frac{3}{4}$，$E(Y)=\int_0^1dx\int_0^{x^2}3y\,dy=\frac{3}{10}$

$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\times\frac{3}{10}=\frac{1}{40}\neq 0$

故 X,Y 为（弱）正相关

(3) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}3x^2 & x\in[0,1]\\ 0 & \text{else}\end{cases}$

$Z=2X^3-1$ $\qquad R(Z)=[-1,1]$

$\forall z\in[-1,1]$，$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(2X^3-1\le z)=P(X\le\sqrt[3]{\frac{z+1}{2}})$

$$=\int_0^{\sqrt[3]{\frac{z+1}{2}}}3x^2dx=\frac{z+1}{2}$$

$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2} & z\in[-1,1]\\ 0 & \text{else}\end{cases}$ $\qquad Z\sim U(-1,1)$

四川大学数学学院
Mathematical College Sichuan University
地址：中国·成都 邮编：610064
E-mail：nic2601@scu.edu.cn
Tel：+86-28-85412720 Fax：(028) 85412720

5 (12分) 记 X 为实际乘座该航班的乘客人数

(1) $X \sim B(260, 0.95)$，由中心极限定理 X 近似服从正态分布. $X \sim N(247, 12.35)$

$E(X) = 260 \times 0.95 = 247$， $D(X) = 260 \times 0.95 \times 0.05 = 12.35$

$P(X>250) = 1 - P(X \le 250) = 1 - \Phi(\frac{250-247}{\sqrt{12.35}}) = 1 - \Phi(0.85) = 0.1977$

(2) 设售出 n 张机票，则 $X \sim B(n, 0.95)$，近似 $N(0.95n, 0.95 \times 0.05n)$

$P(X>250) = 1 - P(X \le 250) = 1 - \Phi(\frac{250 - 0.95n}{\sqrt{0.95 \times 0.05 n}}) \le 50\% = \Phi(0)$

故 $250 - 0.95n \ge 0 \Rightarrow n \le 263.16$ 最多可售 263 张机票.

3

6 (15分) (1) $E(X) = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \theta = 2E(X) \Rightarrow \hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$

(2) 似然函数为 $L(\theta) = (\frac{1}{\theta})^n = \theta^{-n}$ $L'(\theta) < 0$ $L(\theta)$ 单调递减.

$x_i \le \theta \Rightarrow \theta \ge \max\{x_i\}$ 故 $\hat{\theta}_2 = \max\{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ 4

(3) $E(\hat{\theta}_1) = E(2\bar{X}) = 2E(\bar{X}) = 2 \times \frac{\theta}{2} = \theta$ $\hat{\theta}_1$ 为 θ 的无偏估计

2

$D(\hat{\theta}_1) = D(2\bar{X}) = 4D(\bar{X}) = 4 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}$

$X \sim U(0, \theta)$，其密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & x \in [0, \theta] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

$x_1 \cdots x_n$ 与 X 同分布

分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{x}{\theta} & x \in [0, \theta] \\ 1 & x > \theta \end{cases}$

$x_1 \cdots x_n$ 分布函数均为 $F(x)$，

$\hat{\theta}_2 = \max\{x_1 \cdots x_n\}$，则 $F_{\hat{\theta}_2}(x) = F^n(x)$， $f_{\hat{\theta}_2}(x) = nF^{n-1}(x) f(x)$

$f_{\hat{\theta}_2}(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} & x \in [0, \theta] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ $E(\hat{\theta}_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\hat{\theta}_2}(x)\, dx = \frac{n}{n+1}\theta$

4

$\hat{\theta}_3 = \frac{n+1}{n}\hat{\theta}_2$ $E(\hat{\theta}_3) = \theta$ $\boxed{\hat{\theta}_3 \text{ 为 } \theta \text{ 的无偏估计}}$

$D(\hat{\theta}_2) = E(\hat{\theta}_2^2) - E^2(\hat{\theta}_2) = \frac{n}{n+2}\theta^2 - (\frac{n}{n+1}\theta)^2$

$D(\hat{\theta}_3) = D(\frac{n+1}{n}\hat{\theta}_2) = (\frac{n+1}{n})^2 D(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{n(n+2)}\theta^2 \le \frac{\theta^2}{3n} = D(\hat{\theta}_1)$

故：$\hat{\theta}_1$、$\hat{\theta}_3$ 均为 θ 的无偏估计，但 $\hat{\theta}_3$ 比 $\hat{\theta}_1$ 更有效 2

四川大学数学学院
Mathematical College Sichuan University
地址：中国·成都 邮编：610064
E-mail: nic2601@scu.edu.cn
Tel: +86-28-85412720 Fax: (028) 85412720

7 (12分) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，σ^2未知，$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

(1) μ的95% CI为 $\left(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{0.975}(24),\ \bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{0.975}(24)\right)$

此处 $\bar{x}=0.95$，$s=0.4$，$n=25$，$t_{0.975}(24)=2.0639$

代入得 95% CI 为 $(0.785,\ 1.115)$

(2) $H_0: \mu=\mu_0=1$

$H_1: \mu<\mu_0$

检验统计量为 $T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，拒绝域为 $T<t_{0.05}(24)=-1.710$

代入观测值 $T=\frac{0.95-1}{4/\sqrt{25}}=-0.625>-1.7109$

故接受H_0，拒绝H_1，认为限购措施没有明显降低房价.