§ 1.2事件发生的概率

频率的定义和性质

随机试验的定义告诉我们：一个随机实验有多个可能的结果，每个结果出现的机会不一定相同.一个事件在一次试验中可能发生也可能不发生,但在大量的试验中,事件的发生呈现出统计规律性,为反映这一统计规律,我们引入频率的概念。

定义 **在n次重复试验中，若事件A发生了k次，称k为事件A发生的频数，** $f_n(A)=k/n$ **为事件A发生的频率。**

由频率的定义显然可知，频率有如下性质：

1° $0 \le f_n(A) \le 1$；

2° $f_n(\Omega) = 1$;

3^{0} 若$A_1, A_2, \cdots, A_k$ 两两互不相容，则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)。$$

概率的统计定义

显然，频率越大，则事件发生的可能性也越 大。但事件A发生的可能性到底有多大呢？由于事件的发生具有偶然性，因此**频率不稳定，即具有波动性**：在同一条件下，再做多个n次试验，频率不尽相同；n不一样频率也不一样。尽管如此，随着n的增加，我们会发现频率会稳定在一个常数p附近,并且n越大，$|f_n(A)-p|$越小。而这个固定的常数就称为事件发生的**概率**，记为p(A)。

对于以上的统计规律性，历史上许多试验都证明了这一点。如：蒲丰实验

抛硬币试验

实验者	次数 n	正面向上次数 n_A	频率 $f_n(A)$	实验者	次数 n	正面向上次数 n_A	频率 $f_n(A)$
德•摩根	2048	1061	0.5181	K •皮尔逊	12000	6019	0.5016
蒲丰	4040	2048	0.5096	K •皮尔逊	24000	12012	0.5005

概率的公理化定义和基本性质

上面，我们用频率稳定性来描述概率。但在实际生活中，我们不可能做大量的重复的试验。即使可以，但频率值的大小各不相同，也无法说明哪一个常数才是真正的概率。因此，有必要给出另外的定义。下面，相应于频率的三条性质，我们给出概率的公理化定义。

概率的公理化定义：

设Ω为一试验的样本空间，对Ω中的任意事件A，都规定一个实数P(A)与之对应，这样就得到一集合函数P(•). 若P(•)满足下列三条件:

（1）非负性：$P(A) \geq 0$;

（2）规范性： P(Ω)=1；

（3）可列可加性：设 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 是两两互斥的可列个事件，则 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

则称P(•)为定义在样本空间Ω上的一个概率，P(A)为事件A发生的概率.

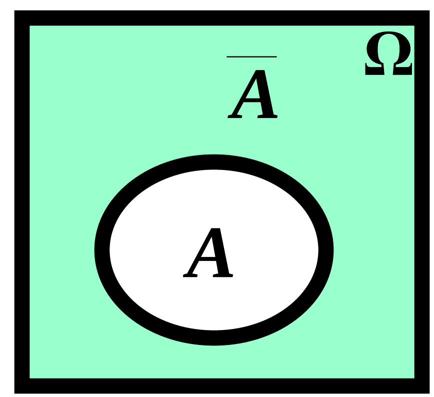
概率的性质

$1^{\circ}\quad P(\phi)=0$

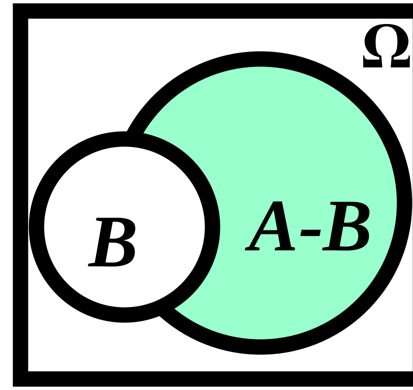
2^{0} 有限可加性：若$A_1,A_2,\mathrm{L}\ ,A_n$两两互斥，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

$3^{0}\quad P(\overline{A})=1-P(A);$



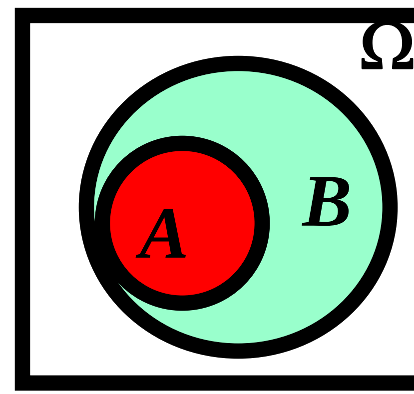
4^0减法：$P(A-B)=P(A)-P(AB)$



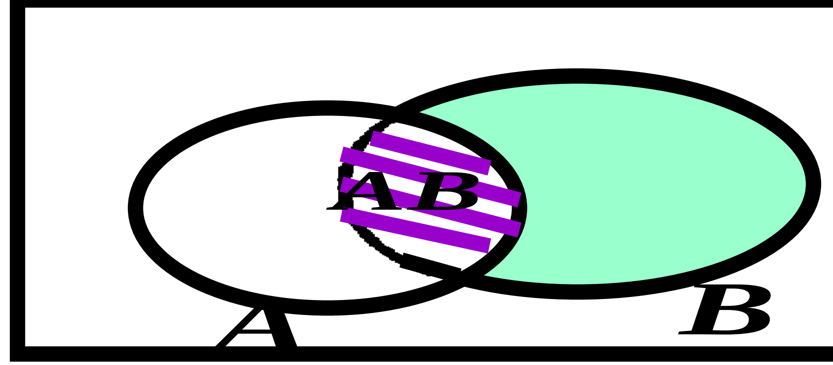
特别：若$B\subset A$,则

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

单调性：若$A\subset B$,则$P(A)\le P(B)$



5° $P(A)\le 1$



6^0 加法公式：

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

一般地：$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)$

$$+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

三个事件的加法公式：$P(A\cup B\cup C)$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)$$

$$-P(BC)-P(AC)+P(ABC).$$

例1.6

- A，B为两事件，已知 $P(B)=0.3$, $P(A\cup B)=0.7, P(\overline{A}\cup B)=?$

解: $P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}B)$

$=P(\overline{A})+P(B)-P(B-A)$

$=P(\overline{A})+P(B)-[P(B)-P(AB)]$

$=1-P(A)+P(AB)$

例1.6（续）

- **A，B**为两事件，已知 $P(B)=0.3,$

$$P(A\cup B)=0.7, P(\overline{A}\cup B)=?$$

$$\therefore P(\overline{A}\cup B)=1-P(A)+P(AB)$$

$$\because P(A)-P(AB)=P(A\cup B)-P(B)$$

$$=0.7-0.3=0.4$$

$$\therefore P(\overline{A}\cup B)=1-0.4=0.6$$

例 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=0,$

$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$,则A, B, C全部不发生的概率。

解： “ A, B, C全部不发生” 可表示为$\bar{A}\ \bar{B}\ \bar{C}$, 则

$$P(\bar{A}\ \bar{B}\ \bar{C})=P(\overline{A+B+C})=1-P(A+B+C),$$

又 $P(A+B+C)$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

由于$ABC\subset AB\Rightarrow 0\le P(ABC)\le P(AB)=0$

于是 $P(\overline{ABC})=\frac{3}{8}$