§4.2 方 差

数学期望反映了随机变量取值的平均值，在实际运用中，有时除了要知道随机变量的数学期望，还需要知道随机变量取值的差异程度，也就是本节要学习的方差。

方差的定义

定义：设 X 是随机变量，若 $E(X-E(X))^2$存在，称它为 X 的**方差**，记为 $D(X)=E(X-E(X))^2$ ，$\sqrt{D(X)}$ 为 X 的**均方差或标准差**。

注：1）由定义知，并不是每个随机变量都有方 差。方差是一个随机变量函数的数学期望。

2）当X为离散型随机变量且分布律为

$$p_k = P(X = x_k),k = 1,2,\cdots$$

时，由定义有

$$D(X)=E(X-E(X))^2=\sum_k ((x_k-E(X))^2 p_k$$

3）若 X 为连续型随机变量且密度函数为 $f(x)$ 则

$$D(X)=E(X-E(X))^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2 f(x)dx$$

4）显然，2）和 3）的计算公式都很麻烦，所以在实际计算方差的时候，一般不用 2）和 3）的计算公式，而用如下简单公式：

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$

证明：直接由方差的定义有

$$D(X)=E(X-E(X))^2=E(X^2-2XE(X)+(E(X))^2)$$

$$=E(X^2)-2E(X)E(X)+(E(X))^2=E(X^2)-(E(X))^2$$

特别地，若 $E(X)=0$ 则 $D(X)=E(X^2)$.

例 设二维随机变量（X,Y）的联合分布律为

$Y \backslash X$	-1	1	2
-1	0.2	0.1	0.3
0	0.2	0.1	0.1

则 X 的分布律为

X	-1	1	2
$p_{i\cdot}$	0.4	0.2	0.4

从而有

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i p_{i\cdot}=(-1)\times 0.4+1\times 0.2+2\times 0.4=0.6;$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{3}x_i^2 p_{i\cdot}=(-1)^2\times 0.4+1^2\times 0.2+2^2\times 0.4=2.2;$$

于是

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=2.2-(0.6)^2=1.84。$$

方差的性质

设以下所涉及的方差都存在，方差的性质有

性质1、$D(X)\geq 0$。若 C 为常数，则 $D(C)=0$。

性质2、$D(cX)=D(cX+b)=c^2D(X)$，b,c 为常数。

性质3、$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2[E(XY)-E(X)E(Y)]$

证 $D(X\pm Y)=E(X\pm Y)^2-E^2(X\pm Y)$

$$=E(X^2\pm 2XY+Y^2)-\{E(X)\pm E(Y)\}^2$$

$$=E(X^2)-E^2(X)+E(Y^2)-E^2(Y)$$

$$\pm 2\{E(XY)-E(X)E(Y)\}$$

$$=D(X)+D(Y)\pm 2\{E(XY)-E(X)E(Y)\}$$

性质4、 设$X_1,X_2,\ldots,X_n$相互独立,$c_1,c_2,\ldots,c_n$为常数，则

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 D(X_i).$$

特别地，若X与Y相互独立，有

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

性质5、 $D(X)=0 \Leftrightarrow \exists$常数$c$，$c=E(X), P(X=c)=1.$

例、 设随机变量X的数学期望为E(X)，方差为D(X)且D(X)>0，令

$$X^* = \frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}},$$

则 $E(X^*)=0, D(X^*)=1.$ 称 X^* 为X的**标准化随机变量**。

例、设随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2e^{-|x|},-\infty<x<+\infty$$

（1） 求 $E(2X-3)$ 及 $D(2X-3)$

（2） 设 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立且与 X 同分布，求 $Y=X_1+2X_2-3X_3+4X_4$ 的数学期望及方差。

解： $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4}x^3e^{-|x|}dx=0;$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4}x^4e^{-|x|}dx$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{4}x^4e^{-x}dx=\frac{1}{2}\Gamma(5)=12。$$

（积分时注意被积函数的奇偶性以及 Γ 函数的应用。）

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=12;$$

（1） $E(2X-3)=2E(X)-3=2\times 0-3=-3;$

$D(2X-3)=4D(X)=4\times 12=48;$

2） $E(Y)=E(X_1+2X_2-3X_3+4X_4)$

$=E(X_1)+2E(X_2)-3E(X_3)+4E(X_4)$

$=4E(X)$

$=0;$

$D(Y)=D(X_1+2X_2-3X_3+4X_4)$

$=D(X_1)+4D(X_2)+9D(X_3)+16D(X_4)$

$=30D(X)$

$=30\times 12$

$=360$。

变异系数

定义 4.4设随机变量X的期望与方差均存在，且$E(X)\neq 0$，称$C_v=\dfrac{\sqrt{D(X)}}{|E(X)|}$为X的变异系数，变异系数衡量了X取值在E(X)周围的相对集中程度。

定义 4.5 对随机变量X及非负整数k，若$m_k=E(X^k)$存在，则m_k称为X的k阶原点矩；若$\mu_k=E[X-E(X)]^k$存在，则μ_k称为X的k阶中心矩。

注：$m_1=E(X),\mu_2=\mathrm{D}(X)$。

重要的分布的数学期望与方差。

一、0—1分布

设 $X \sim B(1,p)$ 则 $E(X)=p$, $D(X)=pq$ 。其中 $p\in[0,1]$, $q=1-p$。

证明：$E(X)=0\times q+1\times p=p$;

$E(X^2)=0^2\times q+1^2\times p=p$;

$$X \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{bmatrix}$$

从而

$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=p-p^2=pq$。

二、二项分布

$$\boxed{\begin{aligned}&p(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k},\\&k=0,1,2,\cdots,n。\end{aligned}}$$

设$X \sim B(n,p)$，则$E(X)=np, D(X)=npq$。

此处$p\in[0,1], q=1-p$，n为正整数。

证明：设$X_i \sim B(1,p)$，则$E(X_i)=p$，$D(X_i)=q$ $(i=1,2,\cdots,n)$，且$X_1, X_2,\cdots,X_n$相互独立，由$B(1,p)$分布的可加性知

$$X=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)，从而E(X)=E(\sum_{i=1}^{n} X_i)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)=np。$$

$$D(X)=D(\sum_{i=1}^{n} X_i)=\sum_{i=1}^{n} D(X_i)=npq。$$

三、Poisson分布

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots$$

设$X\sim P(\lambda)$,则$E(X)=D(X)=\lambda$。

此处$\lambda>0$为常数。

证明：$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda;$$

e^x 的Taylor展式

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!}=\sum_{k=1}^{\infty}(1+k-1)\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}1\cdot\frac{\lambda^{k-1}e^{-\lambda}}{(k-1)!}+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\cdot\frac{\lambda^{k-1}e^{-\lambda}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}+\lambda\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}\longrightarrow E(X)$$

$$=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}+\lambda E(X)=\lambda+\lambda^2;$$

$$\therefore D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\lambda+\lambda^2-\lambda^2=\lambda。$$

由此可见，Poisson 分布 $P($的参数 既刻画了服从 Poisson 分布的随机变量取值的集中位置，也刻画了它取值的差异程度。

四、几何分布

$$P(X=k)=pq^{k-1},\quad k=1,2,\cdots$$

设$X\sim G(p)$,则$E(X)=\dfrac{1}{p}$, $D(X)=\dfrac{q}{p^2}$。

此处$p\in(0,1)$为常数,$q=1-p$。

证明:$E(X)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\cdot pq^{k-1}=p\sum\limits_{k=1}^{\infty}(q^k)'_q=p(\sum\limits_{k=1}^{\infty}q^k)'_q$

$$=p\left(\frac{q}{1-q}\right)'_q=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p};$$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2pq^{k-1}=p(\sum_{k=1}^{\infty}kq^k)'_q=p(q\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1})'_q$$

$$=p(q(\sum_{k=1}^{\infty}q^k)'_q)'_q=p(q(\frac{q}{1-q})'_q)'_q=p(\frac{q}{(1-q)^2})'_q$$

$$=p\times\frac{1+q}{(1-q)^3}=p\times\frac{2-p}{p^3}=\frac{2-p}{p^2};$$

从而

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2}。$$

五、均匀分布

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, x\in[a,b]\\ 0. \qquad\qquad \text{else.}\end{cases}$$

设$X\sim U(a,b)$,则$E(X)=\dfrac{a+b}{2}, D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$。

此处$a<b$, a, b为常数。

证明：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_a^b x\cdot\dfrac{1}{b-a}dx=\dfrac{a+b}{2}$;

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{b^3-a^3}{3}\cdot\frac{1}{b-a};$$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{b^3-a^3}{3}\cdot\frac{1}{b-a}-(\frac{a+b}{2})^2=\frac{(b-a)^2}{12}。$$

六、指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0\\ 0. \qquad \text{else.}\end{cases}$$

设$X \sim e(\lambda)$,则$E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$, $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$。

此处λ>0为常数。

七、Γ-分布

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, x>0\\ 0. \qquad \text{else.}\end{cases}$$

设$X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$,则$E(X)=\dfrac{\alpha}{\beta}$, $D(X)=\dfrac{\alpha}{\beta^2}$。

此处α，β>0为常数。

证明： $E(X)=\int_0^{+\infty} x\cdot\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx$

$$=\frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}(\beta x)^{\alpha}e^{-(\beta x)}d(\beta x)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha}{\beta};$$

$$E(X^2)=\int_0^{+\infty} x^2\cdot\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx$$

$$=\frac{1}{\beta^2\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}(\beta x)^{\alpha+1}e^{-(\beta x)}d(\beta x)=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\beta^2\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2};$$

从而

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}-(\frac{\alpha}{\beta})^2=\frac{\alpha}{\beta^2}。$$