第二部分　集合与关系

第5章　特殊关系

计算机(软件)学院

林　兰

linlan@scu.edu.cn

主要内容

- 5.1 等价关系
- 5.2 偏序关系
- 5.3 全序集与良序集

5.1 等价关系

1. 等价关系与等价类

定义(等价关系)：设R是非空集合A上的一个二元关系，如果R是自反的、对称的和可传递的，称R是A上的一个等价关系。

例1-a) 同学集合A={ a，b，c，d，e，f }, A上的关系R是“同住一间寝室”。

关系R是等价关系。

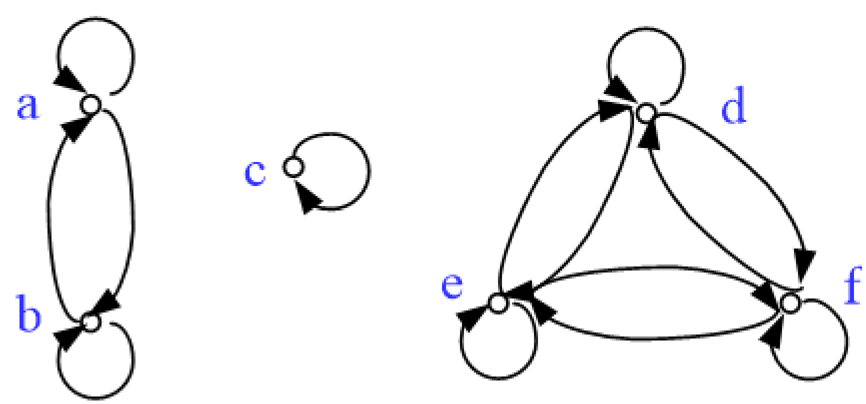
现假设a和b同住一间，d，e，f同住一间，c住一间：

R={(a,a),(b,b),(a,b),(b,a),

(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),

(d,e),(e,d),(d,f)(f,d),

(e,f),(f,e)}



5.1 等价关系

例1（续）

b) 数中的相等关系、命题演算中的“$\Leftrightarrow$”关系是等价关系。

c) 在全体中国人所组成的集合上定义的“同姓”关系，就是具备自反的、对称的、传递的性质，因此，就是一个等价关系；

d) 对任何集合A, 考虑R＝A×A, 则R是A上的等价关系；

e) 三角形的“相似关系”、“全等关系”等都是等价关系；

f) 幂集上定义的“$\subseteq$”，整数集上定义的“$\leqslant$”都不是等价关系，因为它们不是对称的。

5.1 等价关系

例2 设k为正整数，考虑整数集合Z上的关系如下：

$R=\{\langle x,y\rangle \mid \{x,y\in Z\} \land (k \mid (x-y))\}$，证明R是一个等价关系。

证明

(1) 对任意$x\in Z$，有$k \mid (x-x)$，所以$\langle x,x\rangle\in R$，即R是自反的。

(2) 对任意$x,y\in Z$，若$\langle x,y\rangle\in R$，即$k \mid (x-y)$，所以，$k \mid (y-x)$，即有$\langle y,x\rangle\in R$，即R是对称的。

(3) 对任意$x,y,z\in Z$，若$\langle x,y\rangle\in R$且$\langle y,z\rangle\in R$，有$k \mid (x-y)$，且$k \mid (y-z)$，所以由$(x-z)=(x-y)+(y-z)$得$k \mid (x-z)$，

即有$\langle x,z\rangle\in R$，即R是传递的。

由(1)、(2)、(3)知，R是Z上的等价关系。

5.1 等价关系

- **以k为模的同余关系**

定义 设$a,b \in Z$，$k \in Z^+$，如果对某整数m，有$a-b=m \cdot k$，那么a和b是模k等价关系，记为 $a \equiv b \pmod k$ ，k叫做等价的模数。

定理 模k等价是任何集合$A \subseteq Z$上的等价关系。

例如：**设A={0，1，2，3，5，6，8}，R是集合A上的模3同余关系。**

5.1 等价关系

例3 设模数k=3时，整数集合Z上的与0模3等价的元素，构成的集合为：

$$[0]_3=\{\ldots-6, -3, 0, 3, 6,\ldots\}$$

与1模3等价的元素 $[1]_3=\{\ldots-5, -2, 1, 4, 7,\ldots\}$

与2模3等价的元素 $[2]_3=\{\ldots-4, -1, 2, 5, 8,\ldots\}$

与3模3等价的元素 $[3]_3=\{\ldots-6, -3, 0, 3, 6,\ldots\} = [0]_3$

与4模3等价的元素 $[4]_3=\{\ldots-5, -2, 1, 4, 7,\ldots\} = [1]_3$

…

Z被划分为3个子集。($\because$mod k=3)

5.1 等价关系

定义(等价类) 设R是非空集合A上的一个等价关系。对每一个a∈A，记 $[a]_R=\{\, x \mid x\in A，且xRa \,\}$, 称A的子集合$[a]_R$为关系R的一个等价类，a称为代表元素。 $[a]_R$可以简记为[a]。

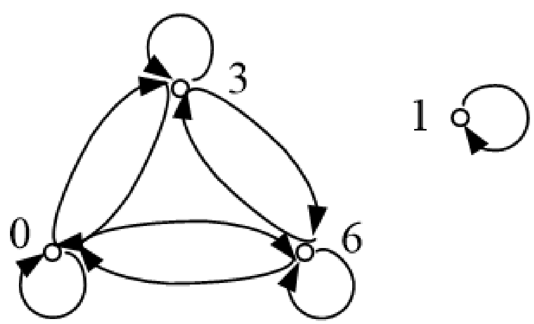
例4 A={0, 1, 2, 3, 5, 6, 8}，R是A上的模3同余关系。

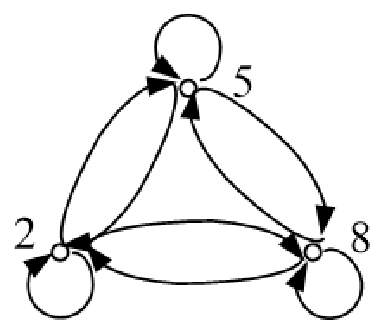
模3等价类有：

[0]={0, 3, 6} =[3]=[6]

[1]={1}

[2]={2, 5, 8} =[5]=[8]





✓等价类特点：同一子集中的元素之间有关系R，不同子集的元素间无关系R。

5.1 等价关系

2.等价类的性质

定理 设R是非空集合A上的等价关系，则

① 对任意$x\in A$，$[x]_R\neq\emptyset$；

② 对任意a，$b\in A$，要么$[a]=[b]$，要么$[a]\cap[b]=\emptyset$；

③ $\bigcup_{a}[a]=A$ 。

$aRb\Leftrightarrow[a]=[b]$

$a\not R b\Leftrightarrow[a]\cap[b]=\emptyset$

证明 1）对任意$x\in A$，因为R是等价关系，所以R是自反的，因此$\langle x,x\rangle\in R$，即有$x\in[x]_R$，$[x]_R\neq\varnothing$。

3）因为对任意$x\in A$，$[x]_R\subseteq A$，所以 $\bigcup_{x\in A}[x]_R\subseteq A$。

反过来，对任意$x\in A$，因R是自反的，所以$\langle x,x\rangle\in R$，即$x\in[x]_R$。所以$x\in\bigcup_{x\in A}[x]_R$，即$A\subseteq\bigcup_{x\in A}[x]_R$。

综上，$\bigcup_{x\in A}[x]_R=A$。

2） 对任意$x, y \in A$，分$y \in [x]_R$和$y \notin [x]_R$进行讨论

(1) 若$y \in [x]_R$，则$\langle x, y\rangle \in R$。 （要证明$[x]_R = [y]_R$ ）

a) 对任意$z \in [x]_R$，则有：$\langle x, z\rangle \in R$，又$\langle x, y\rangle \in R$，由R的对称性有：$\langle y, x\rangle \in R$，由R的传递性有：$\langle y, z\rangle \in R$。

所以$z \in [y]_R$，即：$[x]_R \subseteq [y]_R$。

b） 对任意$z \in [y]_R$，则有：$\langle y, z\rangle \in R$，又$\langle x, y\rangle \in R$，由R的传递性有：$\langle x, z\rangle \in R$。所以，$z \in [x]_R$，即：$[y]_R \subseteq [x]_R$。

所以，$[x]_R = [y]_R$。

(2) 若$y \notin [x]_R$，假设$[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$，则存在$z \in [x]_R \cap [y]_R$。即$z \in [x]_R$，$z \in [y]_R$，则有：$\langle x, z\rangle \in R$，$\langle y, z\rangle \in R$，由R的对称性，$\langle z, y\rangle \in R$。由R的传递性有：$\langle x, y\rangle \in R$，所以$y \in [x]_R$，矛盾。所以$[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$。

5.1 等价关系

3. 划分

定义 设A是一个非空集合，$A_1, A_2, \ldots, A_m$都是A的非空子集，集合族$\pi=\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$，如果

1) π是A的覆盖，即$\bigcup_{i=1}^{m} Ai = A$

2) $A_i \cap A_j = \varnothing (i, j = 1, 2, \ldots m \text{且} i \neq j)$

则称π是集合A上的一个划分，记为π(A)；而$A_1, A_2, A_3, \ldots A_m$称为这个划分的块。

例如 设A={a, b, c}，则A上的划分有：

$\pi_1=\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$， $\pi_2=\{\{a, b, c\}\}$， $\pi_3=\{\{a\}, \{b, c\}\}$，

$\pi_4=\{\{b\}, \{a, c\}\}$， $\pi_5=\{\{c\}, \{a, b\}\}$。

5.1 等价关系

等价关系与划分的联系：

定理 非空集合A上每一个等价关系都能决定A的一个划分；A的每个划分都能导出A上的一个二元等价关系。

现假设$\pi(A)=\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m\}$是非空集合A的一个划分，则A上的关系

$$R_\pi=\{\langle a,b\rangle \mid (a,b\in A)\wedge(a,b\text{同属 }\pi(A)\text{的一个划分块})\}$$

$$=(\forall a, b\in A)[(a, b)\in R\leftrightarrow (\exists i)[1\leqslant i\leqslant m\wedge a\in A_i \wedge b\in A_i]]$$

要证明： R_π是A上的等价关系。

5.1 等价关系

证明：　现证R_π是等价关系

① $\forall a \in A$，有aRa。 ∴R自反。

② $\forall a,b \in A$， 若aRb，即a, b在同一划分块中， 当然b, a也在同一划分块中，故bRa。 ∴R对称。

③ $\forall a,b,c \in A$， 若a, b在同一划分块中，b, c在同一划分块中，显然a, c在同一划分块中，则aRc。 ∴R可传递。

故，　R_π 是A上的等价关系，称之为由π(A)所导出的等价关系。

- ✓ **等价类与划分是相同概念的不同描述。**

5.1 等价关系

例5 设$A=\{a, b, c, d\}$上有一个划分$\pi=\{\{a\}, \{b, c, d\}\}$，求有$\pi$导出的A上的一个等价关系R。

解：已知$A=\{a, b, c, d\}$，$\pi=\{\{a\}, \{b, c, d\}\}$

设$A_1=\{a\}$，$A_2=\{b, c, d\}$

则$R=\{(a, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, c), (c, b), (c, d), (d, d), (d, b), (d, c)\}$

请画出关系图。

作业

习题五

1、3、4、6

主要内容

- 5.1 等价关系
- 5.2 偏序关系
- 5.3 全序集与良序集

5.2 偏序关系

偏序关系是集合上的次序关系, 它提供了比较集合中元素的工具; 也提供了事物之间的顺序关系。

1. 定义

设**R**是非空集合**A**上的二元关系。如果**R**是自反的，反对称的和可传递的，则称**R**是**A**上的一个偏序关系。称序偶〈**A, R**〉为偏序集合。

偏序集〈**A, R**〉常记为〈**A,** ≼〉，读作“小于等于”（指的元素的顺序性）。

R是偏序时，**aRb**就记为**a** ≼ **b**。

5.2 偏序关系

例6　整数集合Z上的小于等于关系是偏序关系，偏序集 ⟨Z, ≤⟩ 。

证明：① ∀x∈Z，有x≤x，R自反；

② ∀x，y∈Z，如果x≤y，y≤x，则x=y，R反对称；

③ ∀x，y，z∈Z，如果x≤y，y≤z，则x≤z，R可传递。

∴ “≤”是Z上的偏序关系， ⟨Z, ≤⟩ 是偏序集。

容易证明：偏序≼的逆关系$\preccurlyeq^{-1}$也是一个偏序，我们用“≽”表示，读作“大于等于”。

5.2 偏序关系

例7 正整数集Z^+上的整除关系“|”是偏序关系。

证明：

① $\forall a \in Z^+$，$a|a$，“|”是自反的；

② $\forall a, b \in Z^+$，如果$a|b$，$b|a$，则必有$a=b$，“|”是反对称的；

③ $\forall a, b, c \in Z^+$，如果$a|b$，$b|c$，则必有$a|c$，“|”是可传递的；

∴ “|”是 Z^+上的偏序关系，$\langle Z^+, | \rangle$是偏序集。

思考：整除关系是不是整数集Z上的偏序关系？

5.2 偏序关系

例8 证明〈 2^A, ⊆ 〉是偏序集。

证明：

① $\forall B \in 2^A$，$B \subseteq B$，“⊆”是自反的；

② $\forall B$，$C \in 2^A$，如果$B \subseteq C$，$C \subseteq B$，则必有$B=C$，
“⊆”是反对称的；

③ $\forall B$，C，$D \in 2^A$，如果$B \subseteq C$，$C \subseteq D$，则必$B \subseteq D$，
“⊆”是可传递的；

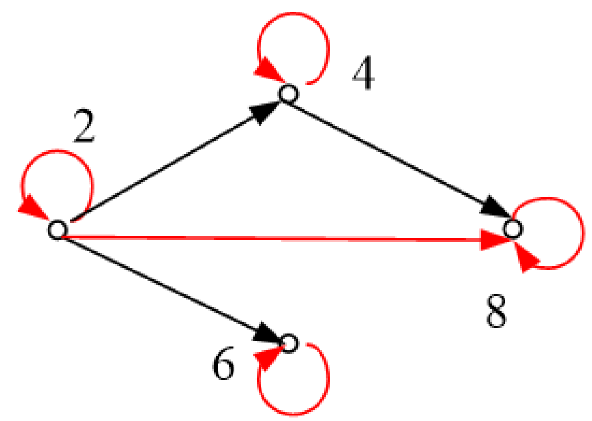
∴“⊆”是 2^A上的偏序关系，〈 2^A, ⊆ 〉是偏序集。

5.2 偏序关系

2.哈斯（Hasse）图

例如：A={2, 4, 6, 8},

〈A, |〉是偏序集。



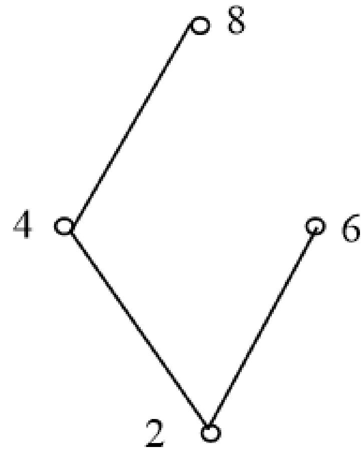
从关系图得到Hassea图的方法：

(1) 去掉自环；（自反性）

(2) 去掉传递边；（传递性）

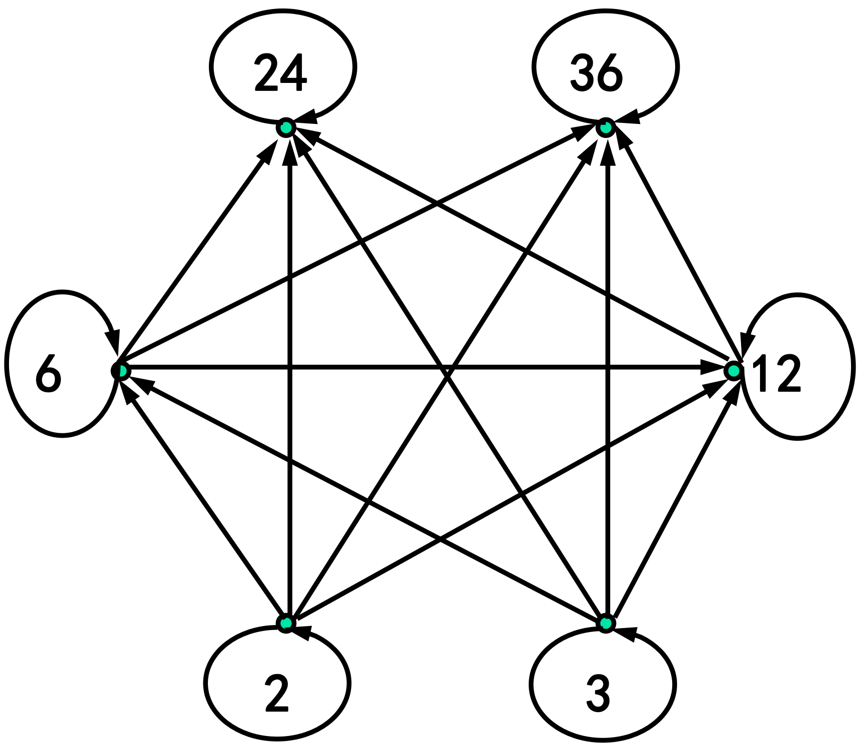
(3) 将所有箭头朝上，去掉箭头的方向。

（反对称性）

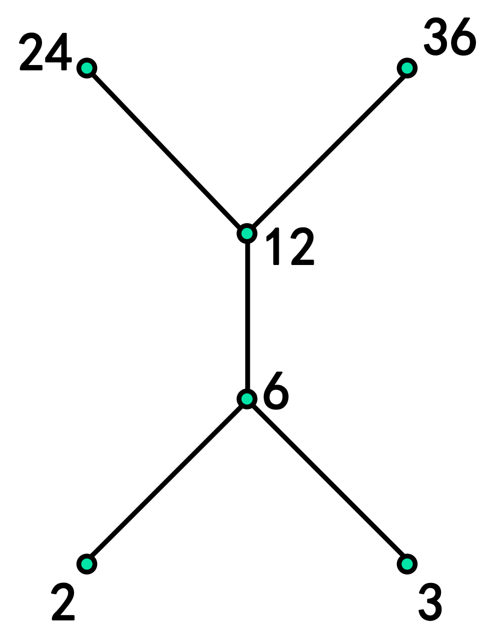


5.2 偏序关系

例9　设A＝{2, 3, 6, 12, 24, 36}，“|”是A上的整除关系，画出其一般的关系图和哈斯图。



关系图



哈斯图

5.2 偏序关系

偏序关系R的Hasse图是由R的一个真子集cover(R)的关系图构成的。这个cover(R)又称为盖住关系，可以用符号表示为

$$\text{Cover}(R)=\{(x,y)\in R \mid (\forall t\in A)[(t\neq x \wedge t\neq y) \rightarrow \neg((x,t)\in R \wedge (t,y)\in R)]\}$$ （其中$x \neq y$）

求出了R的cover(R)，作Hasse图就容易了。因为，偏序关系R的Hasse图对应cover(R)的关系图。

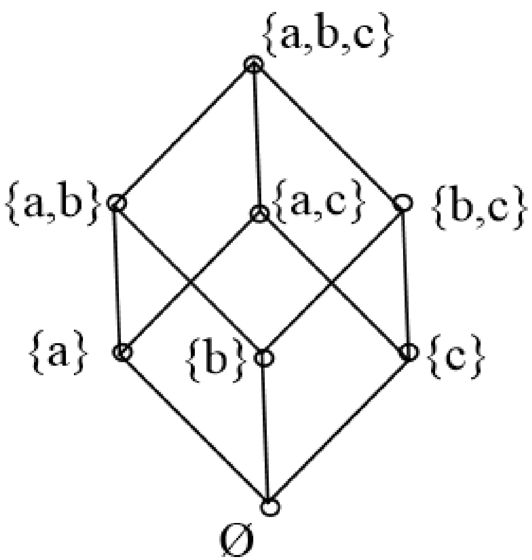
5.2 偏序关系

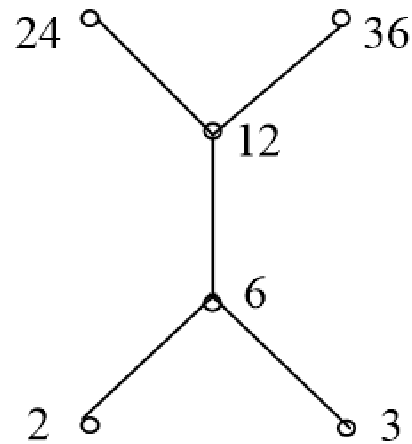
例10 画出下面偏序集对应的Hasse图：

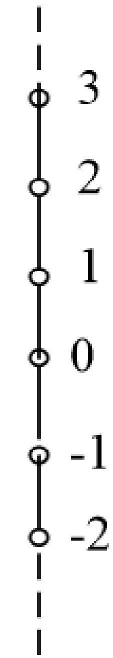
(1) $A=\{a, b, c\}$， $\langle 2^A, \subseteq\rangle$

(2) $A=\{2，3，6，12，24，36\}$， $\langle A, |\rangle$

(3) $\langle Z, \leqslant\rangle$





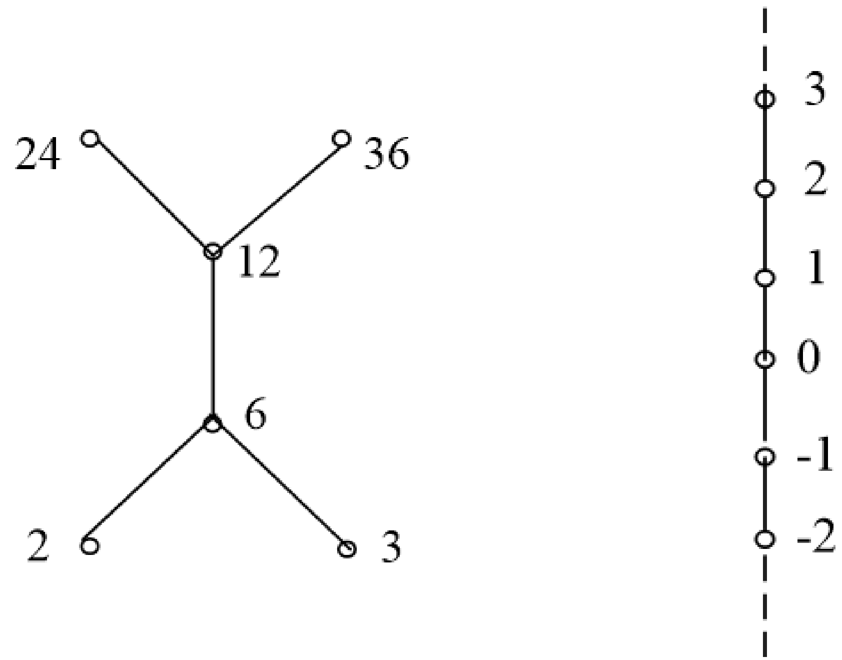


5.2 偏序关系

定义 设a和b是偏序集〈A, ≼〉的两个元素。如果$a \preccurlyeq b$，或$b \preccurlyeq a$之一成立，则称a和b是可比较的；

否则$a \npreceq b$且$b \npreceq a$， a和b是不可比较的。

- 在Hasse图中，元素是分层次排列的，显然，同一层元素是不可比较的。



5.2 偏序关系

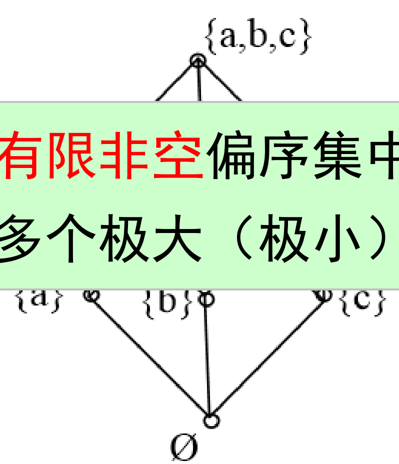
3. 偏序集的特殊元素

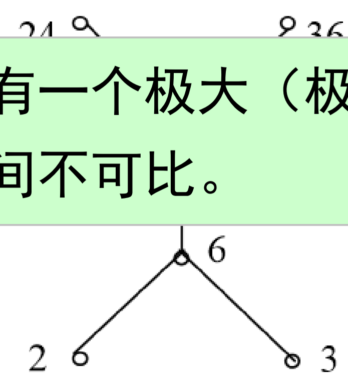
（1）极大元、极小元

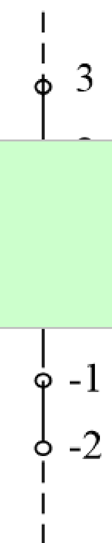
定义：设〈A, ≼〉是一个偏序集，a是A中元素，

① 若∀x∈A，或者x≼a，或者x与a不可比，则称a是A中的一个**极大元**。

② 若∀x∈A，或者a≼x，或者a与x不可比，则称a是A中的一个**极小元**。







- ✓ 有限非空偏序集中至少有一个极大（极小）元；
- ✓ 多个极大（极小）元之间不可比。

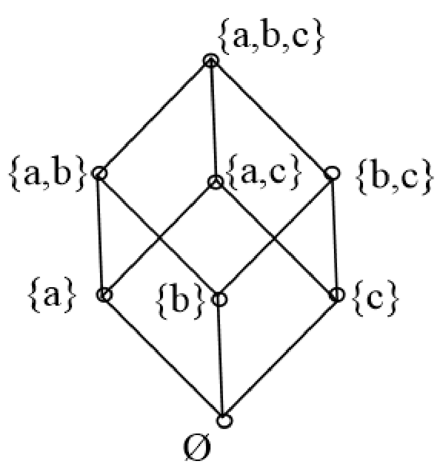
5.2 偏序关系

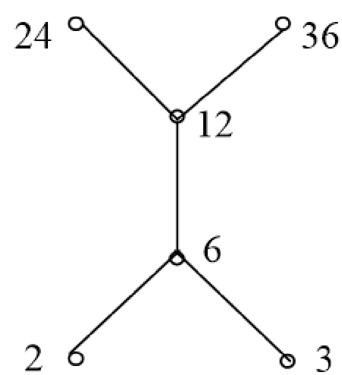
(2) 最大元、最小元

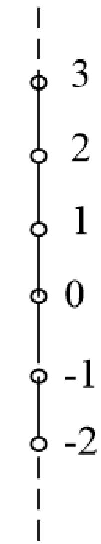
定义 设〈A, $\preccurlyeq$〉是一个偏序集，a是A中元素，

① 若$\forall x \in A$，均有$x \preccurlyeq a$，则称a是A中的**最大元**。

② 若$\forall x \in A$，均有$a \preccurlyeq x$，则称a是A中的**最小元**。







✓ 如果集合A有最大元（最小元），那么是**唯一的**。

5.2 偏序关系

(3) 上界、下界

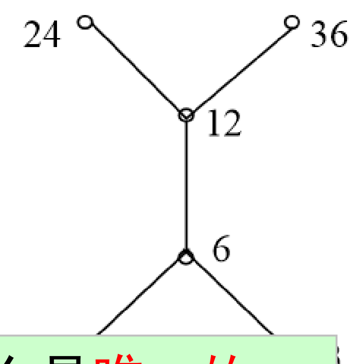
定义 设〈A, ≼〉是一个偏序集，B⊆A，a是A中元素，

① 如果∀b∈B，均有b≼a，则称a是子集B的一个上界。

如果a’是B的任意一个上界时，都有a≼a’，则称a是B的最小上界，记为lub。

② 如果∀b∈B，均有a≼b，则称a是子集B的一个下界。

如果a’是B的任意一个下界时，都有a’≼a，则称a是B的最大下界，记为glb。



- 上确界：最小上界为子集B中元素。
- 下确界：最大下界为子集B中元素。

✓ 如果集合B有最小上界（最大下界），那么是唯一的。

5.2 偏序关系

例11 设集合A＝{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}，|是A上的整除关系，则<A，|>是偏序集，考虑A的子集：B_1＝{1, 2, 3, 6}，B_2＝{2, 3, 5, 7}，B_3＝A。求出B_1，B_2，B_3的最大(小)元、极大(小)元、上(下)界、最小上界、最大下界。

集合	最大元	最小元	极大元	极小元	上界	下界	最小上界	最大下界
B_1	6	1	6	1	6	1	6	1
B_2	无	无	2, 3, 5, 7	2, 3, 5, 7	无	1	无	1
B_3	无	1	5, 6, 7, 8	1	无	1	无	1

主要内容

- 5.1 等价关系
- 5.2 偏序关系
- 5.3 全序集与良序集

5.3 全序集与良序集

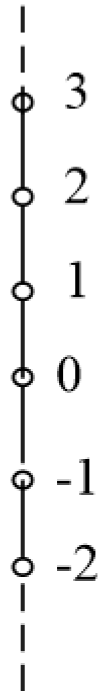
1. 全序 (线序) 集合

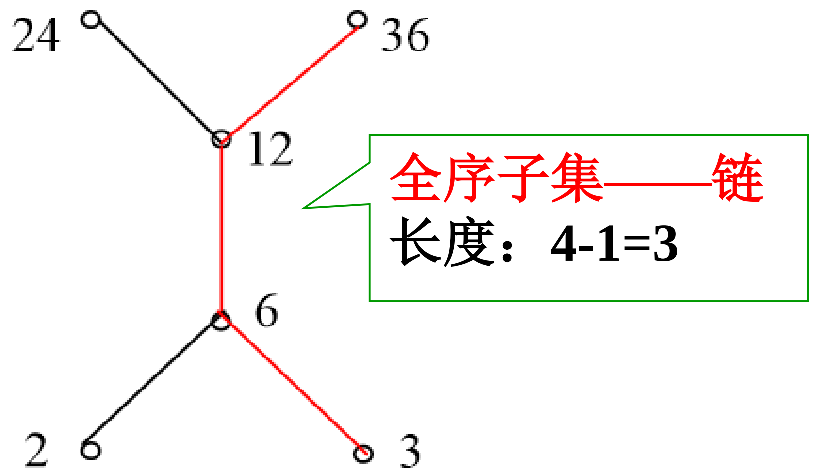
定义 如果偏序集〈A, ≼〉中的任何两个元素都是可比较的，则称≼是A上的一个全序（线序）关系，这时的序偶〈A, ≼〉是全序集合或链。

定义 设<A, ≼>是一个偏序集，B⊆A。如果<B, ≼>是一个全序子集，则称B为A中的一条链。

链中元素数目减1称为该链的长度。

例如：　$\langle \mathbf{Z}, \leq \rangle$　　　$\langle \{2, 3, 6, 12, 24, 36\}, | \rangle$





- 实数集合R上定义的“≤”是全序关系，$\langle R, \leq \rangle$是全序集。
- 集合A＝{a}的幂集2^A上定义的“$\subseteq$”是全序关系，$\langle 2^A, \subseteq \rangle$是全序集。若$|A| \geq 2$，则$\langle 2^A, \subseteq \rangle$不是全序集。

5.3 全序集与良序集

2. 良序集合

定义 设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是全序集，如果A的任何非空子集B都有最小元，就称 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 为良序集。

例如： $\langle N, \leqslant\rangle$ 是良序集

$\langle N, \geqslant\rangle$ 不是良序集

“$\preccurlyeq$”是良序关系 $\Rightarrow$ “$\preccurlyeq$”是全序关系 $\Rightarrow$ “$\preccurlyeq$”是偏序关系

（“$\Leftarrow$”？）

但：良序集 $\Leftarrow$ 有限全序集

5.3 全序集与良序集

一般地，任何有限的全序集的每一个非空的子集一定有最小元，所以，有限全序集一定是良序集。

对于无穷的全序集，则并非如此。如全序集$\langle N, \leqslant\rangle$是良序集，但全序集$\langle Z, \leqslant\rangle$和$\langle [0, 1), \leqslant\rangle$都不是良序集，因为Z的子集(负整数集)和[0, 1)的子集(0, 1)都没有最小元。

5.3 全序集与良序集

3. 偏序与全序的转化

定义 设$\preccurlyeq$和$\preccurlyeq'$是集合A上的两个偏序关系，如果对$\forall a, b \in A$，每当a $\preccurlyeq$ b时，有a $\preccurlyeq'$b，则称关系$\preccurlyeq$与$\preccurlyeq'$是**可比较的**。

例如： “|” 和 “≤”是正整数$\boldsymbol{Z}^+$上的两个偏序关系，

∵ $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{Z}^+$，如果a|b，必有a≤b

∴ 集合$\boldsymbol{Z}^+$上的 “|” 和 “≤”是可比较的。

注意： “|” 是$\boldsymbol{Z}^+$上的偏序关系， “≤” 是$\boldsymbol{Z}^+$上的全序(良序)关系。

✓ 如果<A, $\preccurlyeq$>是**非空有限的**偏序集合，我们能在A上**构造一个全序$\preccurlyeq'$**，使得$\preccurlyeq$与$\preccurlyeq'$是可比较的（即每当a $\preccurlyeq$ b时，有a $\preccurlyeq'$b）。这个过程叫**拓扑排序**。

5.3 全序集与良序集

拓扑排序算法：

输入： 〈A, ≼〉

输出： 〈A, ≼’〉

1. 任选〈A, ≼〉中的一个极小元x；
2. 令A=A-{x}；
3. 如果A=Ø，算法停止；否则

   ①任选极小元y∈A；

   ②定义序关系x ≼’ y；

   ③令A=A-{y}，x=y，转步骤3。

5.3 全序集与良序集

例12 用拓扑排序算法将偏序集〈{2, 3, 6, 12, 24, 36}，|〉转变为一个全序集。

序号	当前A	x	y	≼'	算法步骤
1	{2, 3, 6, 12, 24, 36}	2			1
2	{3, 6, 12, 24, 36}		3	2≼'3	2，3 ①，3②
3	{6, 12, 24, 36}	3	6	3≼'6	3③，3 ①，3②
4	{12, 24, 36}	6	12	6≼'12	同上
5	{24, 36}	12	24	12≼'24	同上
6	{36}	24	36	24≼'36	同上
7	∅（算法结束）				同上

定义的全序为：2 ≼'3≼'6 ≼'12≼'24≼'36

5.3 全序集与良序集

- ✓ 由拓扑排序定义的全序关系是什么？完全取决于极小元的选择方法。

如上例中也可以定义为：$3 \preccurlyeq' 2 \preccurlyeq' 6 \preccurlyeq' 12 \preccurlyeq' 36 \preccurlyeq' 24$（因为在$<\{2, 3, 6, 12, 24, 36\}, |>$中，2和3是不可比的）

定理：任何有限偏序集都可以转变成全序集（良序集）。

作业

习题五　8、10、14、15

(备注：14题、15题均用9题的题目完成)