四川大学半期考试试题（闭卷）

（2018—2019 学年第 2 学期）

课程号：201018030　　课序号：　　课程名称：概率统计(理工)　　任课教师：　　成绩：

适用专业年级：2018 级　　学生人数：　　印题份数：　　学号：　　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

注： 本卷不允许使用计算器.

一、简答题(每题 5 分，共 20 分. 请简要写出计算过程)

1. 某系统由四个元件并联而成，各元件独立工作，且每个元件能正常工作的概率为 0.9，求该系统能正常工作的概率.

能正常工作的元件个数记为X.
A="该系统能正常工作".
$X \sim B(4, 0.9)$
$P(A)=P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-C_4^0 0.9^0 0.1^4=0.9999$

2. 设随机变量 $X\sim B(100, 0.1)$ (二项分布)，$Y\sim e(0.5)$ (指数分布)，相关系数 $R(X, Y) = 0.5$，求 $D(X-2Y+5)$.

3. 设随机变量 $X\sim\Gamma(4, 2)$ (Γ分布)，$Y\sim U(-2, 4)$ (均匀分布)，且 X 与 Y 独立，求 $D(XY)$.

$E(X)=2$ $D(X)=1$ $E(Y)=1$ $D(Y)=3$
$E(X^2)=D(X)+E^2(X)=5$
$E(Y^2)=D(Y)+E^2(Y)=4$
$D(XY)=E(X^2)E(Y^2)-E^2(X)E^2(Y)$
$=5\times 4-(2\times 1)^2=16$

4. 设随机变量 X 有分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ x^2, & 0<x<1\\ 1, & x\geq 1\end{cases}$，对 X 进行四次独立的观测，求其中有三次观测结果小于 0.5 的概率.

$F(0.5)=0.25$
记对X进行四次独立观测,小于0.5次数为Y
$Y\sim B(4, \frac{1}{4})$
$P(Y=3)=C_4^3(\frac{1}{4})^3\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$

二、解答题

1. (15 分) 某型号的探测器，对指定探测区域进行探测时，若该区域有目标存在，探测器探测到目标的条件概率(即检测概率)为 0.98；若该区域没有目标，探测器认为有目标的条件概率(即虚警概率)为 0.01. 已知该探测区域有目标的概率为 0.2. 为了提高检测概率，用两台这种型号的探测器独立探测，其中任意一台探测器探测到目标，就认为检出了目标.

(1) 求当探测区域有目标时，检出目标的条件概率;（结果精确到小数点后四位）

(2) 求检出目标时，探测区域实际上没有目标的概率.（结果精确到小数点后三位）

试卷编号：

2. (10 分) 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.2, & -1\le x<1\\ 0.5, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

求 $Y=\cos\dfrac{\pi X}{3}$ 的分布函数.

3. (15 分) 设随机变量 X 有分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ a+b(x-2)^3, & 2<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$$

其中 a, b 为常数. 试求:

(1) a, b 的值;

(2) $Y=\sqrt{X}$ 的密度函数 $f_Y(y)$.

4. (20 分) 已知 $X\sim\Gamma(2, 1)$, 即 X 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$. 当 $X=x\ (x>0)$时, Y 服从区间$(0, x)$上的均匀分布.

(1) 求(X, Y)的联合密度函数 $f(x, y)$;

(2) 求 Y 的边缘密度函数 $f_Y(y)$;

(3) 求条件密度 $f_{X|Y}(x|y)$;

(4) 计算概率 $P\{X>2|\ Y=1\}$.

5. (10 分) 设(X, Y)服从区域 G: $\{(x, y)\mid x^2+y^2\le 1, y\ge 0\}$上的均匀分布, 求 $R=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的密度函数.

6. (10 分)设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立, 且都服从参数为λ 的指数分布, $Z=\min\{X_1, \dots, X_n\}$, 求 $E(Z), D(Z)$. (结果用λ和 n 表示)

一、简答题(**每题5分，共20分．请简要写出计算过程**)

1. 设A_i表示第i各元件正常工作，则$P(A_i) = 0.9$．所求概率为

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4) = 1 - \prod_{i=1}^{4} P(\overline{A}_i) = 1 - (1-0.9)^4 = 0.9999$$ ……(5分)

2. $E(X) = 100\times0.1 = 10$, $D(X) = 100\times0.1\times0.9 = 9$, $E(Y) = 2$, $D(Y) = 4$,

$\mathrm{Cov}(X, Y) = R(X, Y)\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} = 0.5\times3\times2 = 3$ ……3(分)

$D(X-2Y+5) = D(X) + 4D(Y) - 4\mathrm{Cov}(X, Y) = 9 + 4\times4 - 4\times3 = 13$ ……(5分)

3. $E(X) = 2$, $D(X) = 1$, $E(Y) = 1$, $D(Y) = 3$. ……(1分)

$E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = 5$, $E(Y^2) = D(Y) + [E(Y)]^2 = 4$ ……(3分)

$D(XY) = E(X^2Y^2) - [E(XY)]^2 = E(X^2)\, E(Y^2) - [E(X)]^2\, [E(Y)]^2 = 5\times4-4\times1 = 16$ ……(5分)

4. $P(X < 0.5) = F(0.5) = 0.25$，所求概率为$C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$ ……(5分)

二、解答题

1. (15分) 设A_i表示“第i台探测器认为有目标”，$i = 1, 2$; B表示“探测区域有目标”．则

$$P(A_i \mid B) = 0.98,\quad P(A_i \mid \overline{B}) = 0.01, P(B) = 0.2$$ ……(2分)

(1) $P(A_1 \cup A_2 | B) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2 \mid B) = 1 - P(\overline{A}_1 \mid B)P(\overline{A}_2 \mid B)$

$= 1 - [1 - P(A_1 \mid B)]\,[1 - P(A_1 \mid B)] = 1-(1-0.98)\,(1-0.98) = 0.9996$ ……(7分)

(2) 记$A = A_1 \cup A_2$，则所求概率为$P(\overline{B} \mid A)$.

$$P(A \mid \overline{B}) = P(A_1 \cup A_2 \mid \overline{B}) = 1 - P(\overline{A}_1 \mid \overline{B})P(\overline{A}_2 \mid \overline{B})$$

$$= 1 - [1 - P(A_1 \mid \overline{B})][1 - P(A_2 \mid \overline{B})] = 1-(1-0.01)\,(1-0.01) = 0.0199$$ ……(11分)

$$P(\overline{B} \mid A) = \frac{P(A\overline{B})}{P(A)} = \frac{P(\overline{B})P(A \mid \overline{B})}{P(\overline{B})P(A \mid \overline{B}) + P(B)P(A \mid B)}$$

$$= \frac{0.8\times0.0199}{0.8\times0.0199 + 0.2\times0.9996} = 0.074$$ ……(15分)

2. (10分) X的分布律为

X	-1	1	2
P	0.2	0.3	0.5

……(2分)

于是$Y = \cos\frac{\pi X}{3}$的分布律为

Y	$-1/2$	$1/2$
P	1/2	1/2

……(5分)

所以 Y 的分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<-\frac{1}{2}\\ 0.5, & -\frac{1}{2}\le y<\frac{1}{2}\\ 1, & y\ge\frac{1}{2}\end{cases}$ ……(10分)

3. (15分)

(1) $\lim\limits_{x\to2^+}F(x)=F(2),\ \lim\limits_{x\to2^+}F(x)=\lim\limits_{x\to2^+}[a+b(x-2)^3]=a$，所以 $a=F(2)=0$;

$\lim\limits_{x\to4^+}F(x)=F(4),\ \lim\limits_{x\to4^+}F(x)=1, F(4)=8b$, 所以 $b=\dfrac{1}{8}$. ……(7分)

(2) $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\sqrt{X}\le y\}$

当 $y<\sqrt{2}$ 时, $F_Y(y)=0$; 当 $y>2$ 时, $F_Y(y)=1$;

当 $\sqrt{2}<y\le 2$ 时, $F_Y(y)=P\{X\le y^2\}=F(y^2)=\dfrac{1}{8}(y^2-2)^3$.

于是 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}y(y^2-2)^2, & \sqrt{2}<y\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ ……(15分)

4. (20分)

(1) $f_X(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$; 当 $x>0$ 时, $f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ ……(2分)

所以 $f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases}e^{-x}, & 0<y<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ ……(5分)

(2) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$.

当 $y\le 0$ 时, $f_Y(y)=0$ ……(8分)

当 $y>0$ 时, $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_y^{+\infty}e^{-x}dx=e^{-y}$

所以 $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$ ……(10分)

(3) 当 $y>0$ 时有

$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(x)}=\begin{cases}e^{-x+y}, & x>y\\ 0, & x\le y\end{cases}$ ……(15分)

(4) $f_{X|Y=1}(x\,|\,y=1)=\begin{cases}e^{-x+1}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$, ……(17分)

$P\{X>2\,|\,Y=1\}=\int_2^{+\infty}e^{-x+1}dx=\mathrm{e}^{-1}$. ……(20分)

5. (10 分) 区域 G 的面积为 $\frac{\pi}{2}$，故(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$ ······ (2分)

先求 R 的分布函数 $F_R(r)=P\{R\le r\}$:
当 $r<0$ 时, $F_R(r)=0$; 当 $r>1$ 时, $F_R(r)=1$;
当 $0\le R\le 1$ 时:

$$F_R(r)=P\{R\le r\}=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\le r\}=\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le r,\, y\ge 0}\frac{2}{\pi}dxdy=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi r^2}{2}=r^2$$ ····(7分)

所以 R 的概率密度

$$f_R(r)=F_R'(r)=\begin{cases}2r, & 0\le r\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$ ······ (10分)

6. (10 分) 记参数为λ的指数分布的分布函数为 $F(x)$，则 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ ····(1分)

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}\le z\}=1-P\{\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}>z\}$
$=1-P\{X_1>z, X_2>z, \ldots, X_n>z\}=1-P\{X_1>z\}P\{X_2>z\}\ldots P\{X_n>z\}$
$=1-(1-F(z))^n$

$$=\begin{cases}1-e^{-n\lambda z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$ ··········· (6分)

即 $Z\sim e(n\lambda)$, $E(Z)=\frac{1}{n\lambda}, D(Z)=\frac{1}{(n\lambda)^2}$ ········ (10分)