四川大学期末考试试题（闭卷）

（2021--2022 学年第 1 学期） A 卷

课程号：201018030 **课序号：** **课程名称：概率统计（理工）** **任课教师：** **成绩：**
适用专业年级：2020 **学生人数：** **印题份数：** **学号：** **姓名：**

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

常用分布的下侧分位点：$\Phi(0.4)=0.6554, \Phi(0.5)=0.6915, \Phi(1)=0.8413,$
$\Phi(2)=0.9772, \Phi(1.96)=0.975, \Phi(1.645)=0.95$
$\chi^2_{0.975}(24)=39.364$，$\chi^2_{0.95}(24)=36.415$，$\chi^2_{0.025}(24)=13.120$，$\chi^2_{0.05}(24)=13.848$
$t_{0.95}(25)=1.7081$，$t_{0.95}(24)=1.71091$，$t_{0.975}(25)=2.0595$，$t_{0.975}(24)=2.0639$

一、填空题（每题 3 分，共 18 分）

1、设 $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{3}{4}$，且事件 A, B 相互独立，则 $P(A|A\cup\overline{B})=$ ________.

2、甲、乙两人玩“剪刀、石头、布”的游戏。甲偏好石头，他出石头的概率为 0.36，出剪刀和布的概率均为 0.32，乙随机出手；则每一局甲获胜的概率为________.

3、设随机变量 $X\sim\Gamma\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$，$Y\sim P(4)$，$\mathrm{R}(X,Y)=0.5$，则根据切比雪夫不等式有

$P(-6\le X-Y\le 0)\ge$ ________.

4、设$\{(X_i,Y_i), i=1,2,..,10\}$是来自总体$(X,Y)\sim N(0,1;1,4;\frac{2}{3})$的简单随机样本，令样本均值

$\overline{X}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i$，$\overline{Y}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}Y_i$，则$D(\overline{X}-\overline{Y})=$ ________.

5、设总体为离散型随机变量 X，其概率分布为

X	-1	0	1
P	λ	μ	$1-\lambda-\mu$

其中参数 $0\le\lambda\le 1, 0\le\mu\le 1, \lambda+\mu\le 1$，设 λ,μ 的矩估计量分别为 $\hat{\lambda}$，$\hat{\mu}$，则

$2\hat{\lambda}+\hat{\mu}=$ ________.

6、设总体 $X\sim N(\mu,16)$，抽取容量为 25 的样本，对假设检验 $H_0:\mu=0$，$H_1:\mu=1$，以 $\alpha=0.05$ 为显著性水平，可得拒绝域为 $\mathrm{W}=\{\overline{X}>1.32\}$，则犯第二类错误的概率为 ________.

二、解答题（共 82 分）

1、（10 分）已知 X 的概率分布为:

X	-2	-1	0	1	2	3
P	t	t	$2t$	t	0.3	$2t$

（1）求 t 的值；（2）求 $Y=\sin\frac{\pi X}{2}$ 的分布律。

2、（10 分）一单选题有 4 个选项。某考生知道正确答案的概率为 0.4，排除其中一个错误选项后随机地从其他三个选项猜测一个作为答案的概率为 0.3，排除两个错误选项后在剩下的两个选项中随机猜测一个作为答案的概率为 0.2，或者不作任何判断随机乱选一个作为答案的概率为 0.1。求该生答对该题的概率。若该生答对了，求他确实知道正确答案的概率。

3、（12 分）香农在他的著名论文 “通信的数学原理” 中提出了信息熵的概念，解决了如何对信息进行度量的问题。一维连续型随机变量 X 的熵定义为 $H(X)=-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln f(x)\,dx$，其中 $f(x)$ 为 X 的概率密度，约定在 $a=0$ 时有 $a\ln a=0$。二维连续型随机变量 (X,Y) 的熵定义为 $H(X,Y)=-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ln f(x,y)\,dxdy$，其中 $f(x,y)$ 为 (X,Y) 的联合概率密度。

(1) 求正态分布的随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的熵。

(2) 求指数分布的随机变量 $T\sim e(\lambda)$ 的熵。

(3) 令 $\Delta(X,Y)=H(X,Y)-H(X)-H(Y)$，若 X,Y 相互独立，试求$\Delta(X,Y)$的值。

4、（15 分）设二维随机变量(X,Y)的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & others\end{cases}$

（1）求相关系数$R(X,Y)$；（2）求 $P\left(2X>Y\middle|Y=\frac{1}{2}\right)$；(3) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

5、（10 分）假设生产线上组装每件产品的时间服从指数分布，统计资料表明该生产线每件成品的平均组装时间为 10 分钟，且各件产品的组装时间相互独立。

（1）试求组装 100 件成品需要 15 到 20 小时的概率；

（2）若要保证总的组装时间在 16.5 小时之内的概率至少是 0.9772，求最多可以组装多少件产品？

6、（10 分）设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机地抽取 25 位考生，算得平均成绩 65 分，标准差为 10 分。

（1）在显著性水平 0.05 下，是否可以认为在这次考试中全体考生的平均成绩低于 70 分？

（2）请给出考生成绩波动(方差)的 90%置信区间。（结果保留小数点后一位）

7、（15 分）设总体X的概率密度为$f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{4x^3}{\theta^4}, & 0\le x\le\theta\\ 0, & others\end{cases}$，其中$\theta>0$为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$X$的简单随机样本，

（1）求参数 θ 的矩估计量$\widehat{\theta}_M$；

（2）求参数 θ 的极大似然估计量$\widehat{\theta}_{MLE}$；

（3）确定 a，使得 $a\widehat{\theta}_{MLE}$为 θ 的无偏估计。