第五部分　代数结构

第17章　格与布尔代数

计算机（软件）学院

林　兰

linlan@scu.edu.cn

格与布尔代数

布尔代数是一类特殊的格代数，在格与布尔代数中，偏序关系具有重要意义。本章将从格的偏序定义出发，研究格系统的各种性质，建立布尔代数的基本理论。

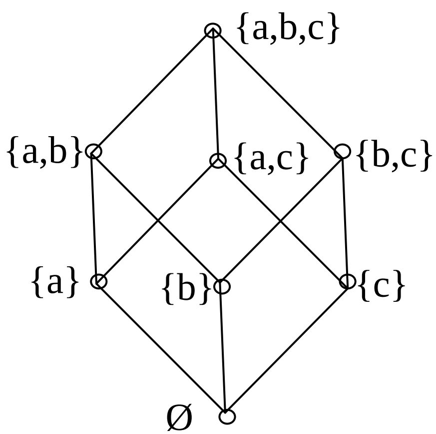
布尔代数在逻辑电路设计和开关网络研究中有着广泛的应用，是计算机科学必需的基础知识。

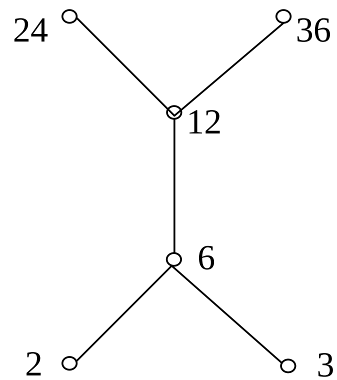
主要内容

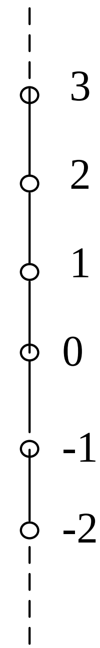
- 1 格的定义与性质
- 2 子格与格同态
- 3 特殊的格及性质
- 4 布尔代数
- 5 布尔表达式

内容回顾

- 偏序集和Hasse图：〈A, ≼〉







〈2^A, ⊆〉

A={2,3,6,12,24,36}

〈A, |〉

〈Z, ≤〉

✓ 最大元（最小元）若存在，必定是唯一的；

✓ 最大下界(最小上界)若存在，必定是唯一的。

1 格的定义与性质

定义1(偏序格)

设<L，≼>是一个偏序集合，如果L中每一对元素a，b都有最大下界(glb)和最小上界(lub)，则称<L，≼>为格（偏序格）。若L是一个有限集，则称<L，≤>为有限格。

通常用“$a \wedge b$”表示{a，b}的最大下界，“$a \vee b$”表示{a，b}的最小上界。即：

$$a \wedge b = glb(a, b)$$

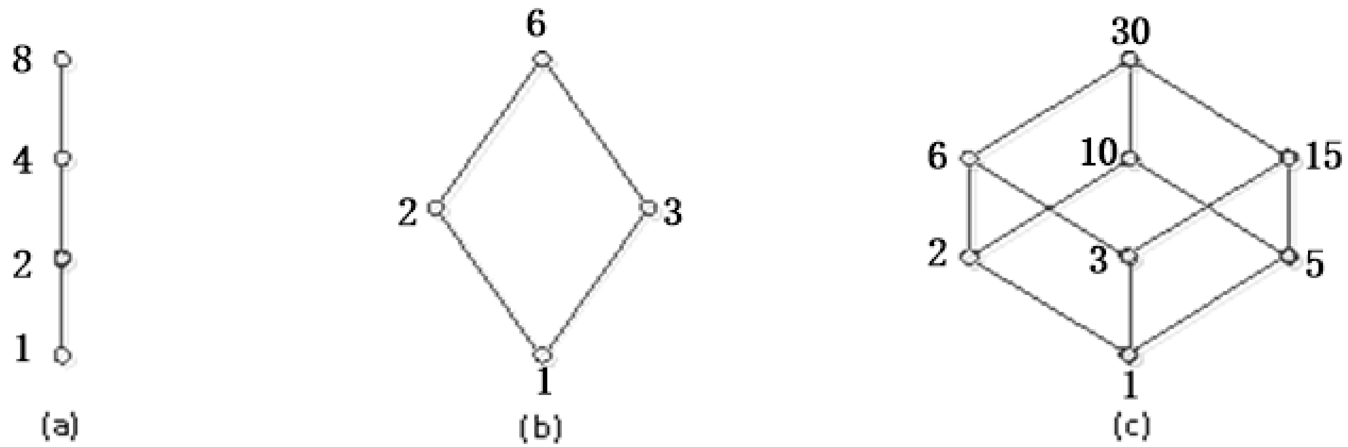
$$a \vee b = lub(a, b)$$

并称为a, b的保交和保联运算。

- 由于最大下界和最小上界属于L，且是唯一的，所以保交和保联都是L上的二元运算。

1 格的定义与性质

例1 设n是一正整数，D_n是n的所有正因子的集合，$\langle D_n, | \rangle$是格。如：$\langle D_8, | \rangle$，$\langle D_6, | \rangle$，$\langle D_{30}, | \rangle$的哈斯图如下(因子格)



glb（a，b）=gcd{a, b}　（a, b的最大公因数）

lub（a，b）=lcm{a, b}　（a, b的最小公倍数）

再如：$\langle Z^+, | \rangle$是格。

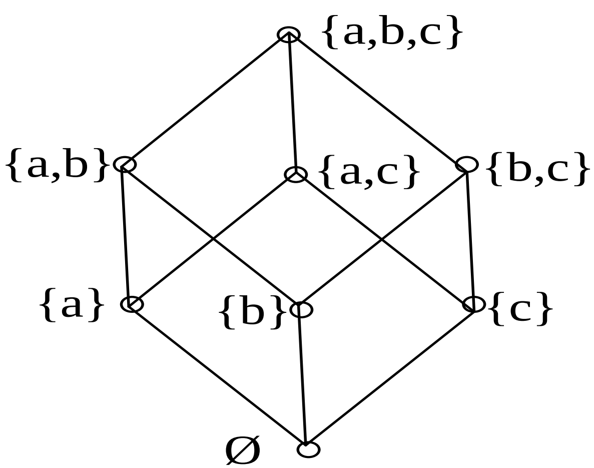
1 格的定义与性质

例2 偏序集<2^A，$\subseteq$>中，任何两个元素X、Y$\in 2^A$，都有

lub（X，Y）=X$\cup$Y， glb（X，Y）=X$\cap$Y，

因此<2^A，$\subseteq$>是一个偏序格，称为幂集格。

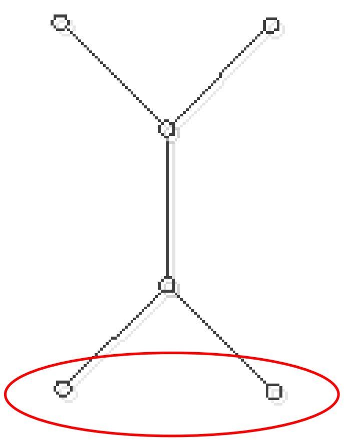
如：A={a, b, c}， 〈2^A，$\subseteq$〉



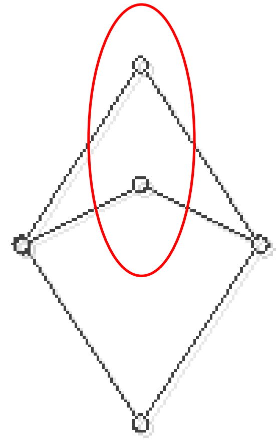
1 格的定义与性质

- 由定义知，不是所有的偏序集都是格。

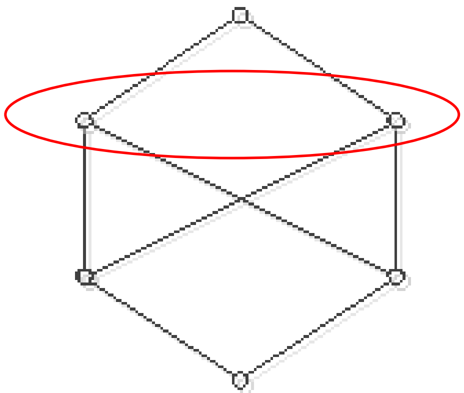
例如：下图所示都是偏序集合，是否构成格？



(a)



(b)



(c)

都不是格

1 格的定义与性质

定义2(代数格)

设<L，∨，∧>是一个代数系统，∨和∧是L上的二元运算，如果∨，∧满足：

① 交换律：a∨b=b∨a，a∧b=b∧a,

② 结合律：a∨(b∨c)=(a∨b)∨c,

a∧(b∧c)=(a∧b)∧c

③ 吸收律：a∨(a∧b)=a，a∧(a∨b)=a

则称<L，∨，∧>是一个格（代数格）。

例如：

$<2^A, \cup, \cap>$

$<\wp, \vee, \wedge>$

($\wp$为命题集)

定理1(幂等律)

设<L，∨，∧>是一个代数格, $a \in L$，则

a∨a=a，a∧a=a。

1 格的定义与性质

定理2

设<L，∨，∧>是一个代数格，定义格上的自然偏序“≼”为：a≼b⇔a∧b=a（或a∨b=b），则<L，≼>是一个偏序格。

证明：首先证明≼是集合L上的偏序

①自反性：由幂等律$a \wedge a = a$ ∴$a \preccurlyeq a$,“≼”具有自反性。

②反对称性：设$a \preccurlyeq b$且$b \preccurlyeq a$，则由上“≼”定义

$$a = a \wedge b = b \wedge a = b$$（交换律）

“≼”具有反对称性。

③传递性：设$a \preccurlyeq b$且$b \preccurlyeq c$，则$a \wedge b = a$，$b \wedge c = b$

$$a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$$（结合律）

得：$a \preccurlyeq c$，“≼”具有传递性。

1 格的定义与性质

其次，证明对$\forall x, y \in L$, $\{x,y\}$在L中有最大下界和最小上界。

$\because x \wedge (x \wedge y) = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y$ （结合律，幂等律）

根据定义有：$x \wedge y \preccurlyeq x$

同理可得： $x \wedge y \preccurlyeq y$

$\therefore$ $x \wedge y$是$\{x,y\}$的一个下界。

设c是$\{x,y\}$的任一下界，即$c \preccurlyeq x$, $c \preccurlyeq y$, 则

$c \wedge (x \wedge y) = (c \wedge x) \wedge y = c \wedge y = c$

$\therefore c \preccurlyeq x \wedge y$，$glb(x, y) = x \wedge y$

类似可得： $lub(x, y) = x \vee y$

$\therefore \langle L, \preccurlyeq \rangle$ 是偏序格

1 格的定义与性质

定理3

设<L，≤>是一个偏序格，在格上定义运算“∨”、“∧”：

$$a \wedge b = \mathrm{glb}(a, b)$$

$$a \vee b = \mathrm{lub}(a, b)$$

则 <L，∨，∧>是一个代数格。

定理2和定理3表明：

格的两种定义是完全等价的。

作业

- ✓习题十七

1

主要内容

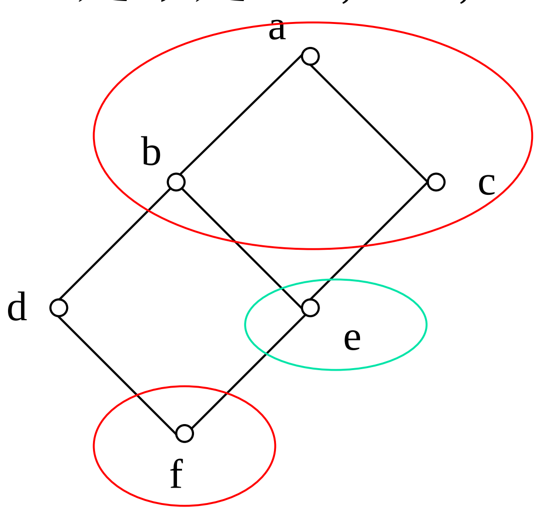
- 1 格的定义与性质
- 2 子格与格同态
- 3 特殊的格及性质
- 4 布尔代数
- 5 布尔表达式

2 子格与格同态

1. 子格

定义 设 $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ 是格，S是L的非空子集。如果运算∧与∨在S上都**封闭**，则称S是L的**子格**，记为 $\langle S, \vee, \wedge \rangle$。

例如：格 $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ 的Hasse图如下，$S_1=\{a, b, c, f\}$，$S_2=\{a, c, d, f\}$，判断 $\langle S_1, \vee, \wedge \rangle$ 和 $\langle S_2, \vee, \wedge \rangle$ 是不是 $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ 的子格。



$\langle S_1, \vee, \wedge \rangle$ 不是子格

$\langle S_2, \vee, \wedge \rangle$ 是子格

2 子格与格同态

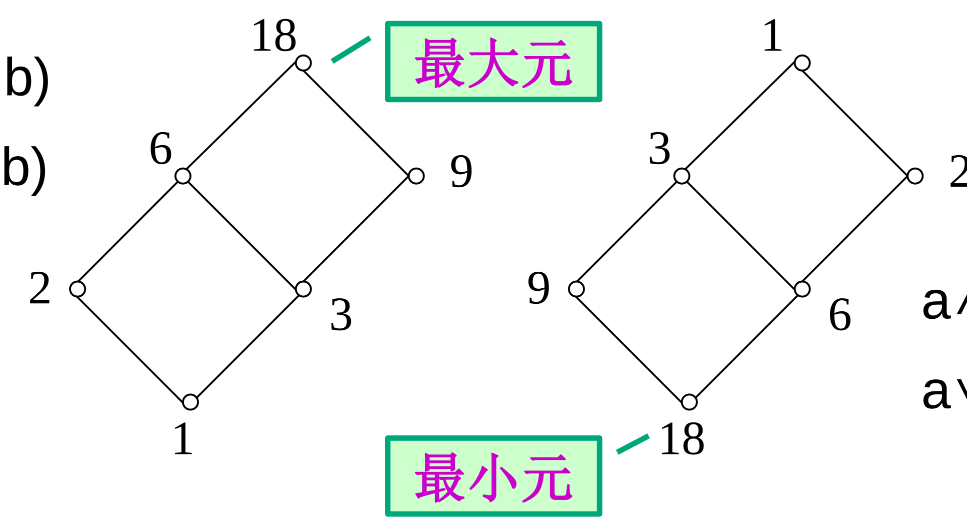
2. 对偶原理

定义 设$\langle L, \preccurlyeq\rangle$和$\langle L, \preccurlyeq'\rangle$是两个偏序格，如果偏序关系$\preccurlyeq'$是$\preccurlyeq$的逆关系，则称这两个偏序格是**互为对偶的格**。

例如：设L是由18的正因子构成的集合，则L关于整除关系构成偏序格$\langle L, |\rangle$。整除的逆关系是倍数关系，记为“$||$”，$\langle L, ||\rangle$也是偏序格，$\langle L, |\rangle$和$\langle L, ||\rangle$互为对偶。

$a \wedge b = \gcd(a, b)$

$a \vee b = \mathrm{lcm}(a, b)$



$a \wedge b = \mathrm{lcm}\ (a, b)$

$a \vee b = \gcd\ (a, b)$

2 子格与格同态

（说明：格中的最大元用1表示，最小元用0表示。）

定义(对偶公式)

设 $<L, \vee, \wedge>$ 是一个格，E是格中的一个公式。将E中的0和1互换，$\wedge$和$\vee$互换后得到的新公式E^*称为E的对偶公式。

对偶原理

设X和Y是格上的两个公式，X^*和Y^*是相对应的对偶公式。如果$X=Y$，那么$X^*=Y^*$。

2 子格与格同态

3. 常用不等式

定理5

设 $<L, \vee, \wedge>$ 为格，$\preccurlyeq$是对应的偏序，$a, b, c, d \in L$，则

① $a \preccurlyeq b \Rightarrow a \vee c \preccurlyeq b \vee c$

② $a \preccurlyeq b \Rightarrow a \wedge c \preccurlyeq b \wedge c$

③ $a \preccurlyeq b$，$c \preccurlyeq d \Rightarrow a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d$

④ $a \preccurlyeq b$，$c \preccurlyeq d \Rightarrow a \vee c \preccurlyeq b \vee d$

⑤ $a \preccurlyeq b$，$a \preccurlyeq c \Rightarrow a \preccurlyeq b \wedge c$

⑥ $a \preccurlyeq c$，$b \preccurlyeq c \Rightarrow a \vee b \preccurlyeq c$

2 子格与格同态

① $a \preccurlyeq b \Rightarrow a \vee c \preccurlyeq b \vee c$

② $a \preccurlyeq b \Rightarrow a \wedge c \preccurlyeq b \wedge c$

证明：

① $a \preccurlyeq b \Rightarrow a \vee b = b$ （定义）

$\Rightarrow (a \vee c) \vee (b \vee c) = b \vee c$ (两端同时$\vee$c, 幂等律,结合律)

$\Rightarrow (a \vee c) \preccurlyeq (b \vee c)$ (定义)

② $a \preccurlyeq b \Rightarrow a \wedge b = a$ （定义）

$\Rightarrow (a \wedge c) \wedge (b \wedge c) = a \wedge c$ (两端同时$\wedge$c, 幂等律,结合律)

$\Rightarrow (a \wedge c) \preccurlyeq (b \wedge c)$ (定义)

2 子格与格同态

③ $a \preccurlyeq b$，$c \preccurlyeq d \Rightarrow a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d$

④ $a \preccurlyeq b$，$c \preccurlyeq d \Rightarrow a \vee c \preccurlyeq b \vee d$

证明：

③ $a \preccurlyeq b$，$c \preccurlyeq d \Rightarrow a \wedge c \preccurlyeq b \wedge c$，$b \wedge c \preccurlyeq b \wedge d$ (由②)

$\Rightarrow a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d$ (传递性)

④ $a \preccurlyeq b$，$c \preccurlyeq d \Rightarrow a \vee c \preccurlyeq b \vee c$，$b \vee c \preccurlyeq b \vee d$ (由①)

$\Rightarrow a \vee c \preccurlyeq b \vee d$ (传递性)

2 子格与格同态

⑤ $a \preccurlyeq b$， $a \preccurlyeq c \Rightarrow a \preccurlyeq b \wedge c$

⑥ $a \preccurlyeq c$， $b \preccurlyeq c \Rightarrow a \vee b \preccurlyeq c$

证明：

⑤ $a \preccurlyeq b$， $a \preccurlyeq c \Rightarrow a \wedge a \preccurlyeq b \wedge c$ (由③)

$\Rightarrow a \preccurlyeq b \wedge c$ (幂等律)

⑥ $a \preccurlyeq c$， $b \preccurlyeq c \Rightarrow a \vee b \preccurlyeq c \vee c$ (由④)

$\Rightarrow a \vee b \preccurlyeq c$ (幂等律)

2 子格与格同态

定理6

设 $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ 为格， $\preccurlyeq$是对应的偏序，$a, b, c, d \in L$，则

① $a\vee(b\wedge c) \preccurlyeq (a\vee b) \wedge (a\vee c)$

② $(a\wedge b)\vee(a\wedge c) \preccurlyeq a\wedge(b\vee c)$

定理说明，一般的格中分配律不成立，但存在稍弱形式的准分配关系。

证明①： $\because$ $a \preccurlyeq a\vee b$, $a \preccurlyeq a\vee c$

由上定理⑤ 式： $a \preccurlyeq (a\vee b)\wedge(a\vee c)$ (1)

$\because$ $b \preccurlyeq a\vee b$, $c \preccurlyeq a\vee c$

由上③式： $b\wedge c \preccurlyeq (a\vee b)\wedge(a\vee c)$ (2)

再由上⑥式，(1)，(2)可得：

$a\vee(b\wedge c) \preccurlyeq (a\vee b)\wedge(a\vee c)$

证明②： 思路同上

2 子格与格同态

4. 格的同态

定义　设<L，∨，∧>和<P，⊕，⊗>是两个格，　f是L到P的映射。如果对任何a, b∈L,

$$f(a \vee b)=f(a) \oplus f(b)$$

$$f(a \wedge b)=f(a) \otimes f(b)$$

则称f是从格<L，∨，∧>到<P，⊕，⊗>的格同态，

特别，当f是双射时，称为格同构。

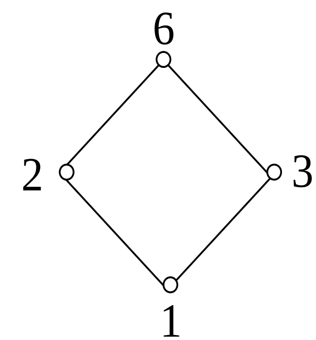
2 子格与格同态

例3 设D_6表示6的正因子集合，因子格 $< D_6, | >$ 和幂集格 $< 2^{\{a,b\}}, \subseteq >$ 建立同态关系。

分析： $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$， $2^{\{a,b\}} = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} \}$，

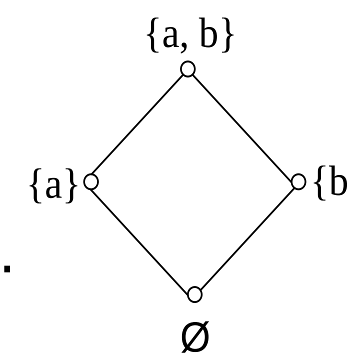
$f: D_6 \to 2^{\{a,b\}}$ 使得

$f(1) = \emptyset$， $f(2)=\{a\}$， $f(3)=\{b\}$， $f(6)=\{a, b\}$



注： $< D_6, | >$ 对应代数格 $< D_6, \mathrm{lcm}, \gcd >$

$< 2^{\{a,b\}}, \subseteq >$ 对应的代数格 $< 2^{\{a,b\}}, \cup, \cap >$



用定义验证数据：

$f(\mathrm{lcm}(1, 3)) = f(3) =\{b\} = \emptyset\cup\{b\} = f(1)\cup f(3)$

$f(\gcd(2, 3)) = f(1) = \emptyset = \{a\}\cap\{b\} = f(2)\cap f(3)$ ...

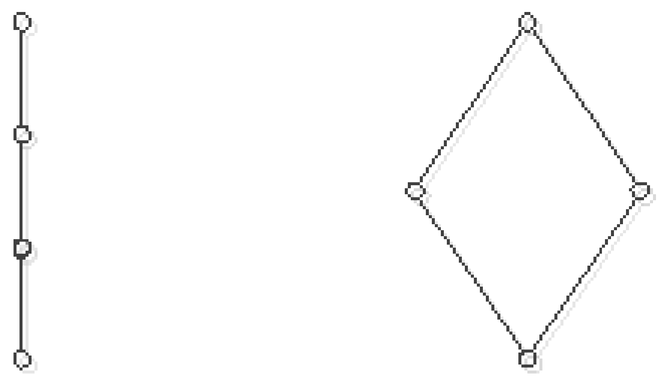
又$f: D_6 \to 2^{\{a,b\}}$ 是双射。

$\therefore < D_6, | >$ 和 $< 2^{\{a,b\}}, \subseteq >$ 是同构的两个格。

2 子格与格同态

例4 (1) 具有一、二、三个元素的格，分别同构于一、二、三个元素的全序格(链格)。

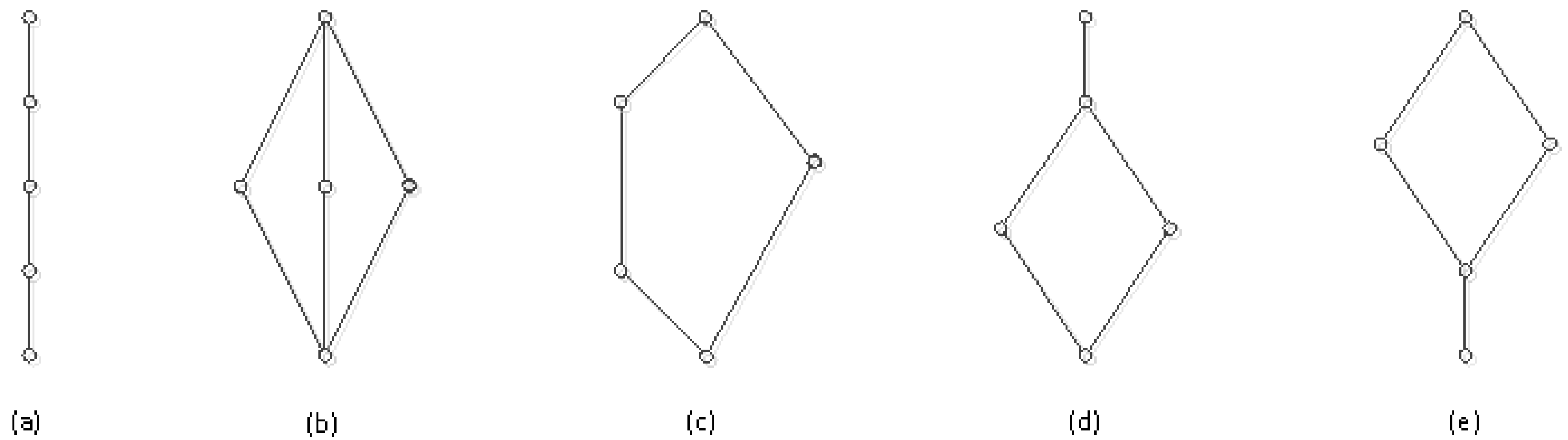
(2) 四个元素的格同构于下面两个图之一：



(a)　　　　　　　　(b)

2 子格与格同态

例4 (3) 五个元素的格同构于下面五个图之一：



作业

- ✓习题十七

7(2)、8(1)

主要内容

- 1 格的定义与性质
- 2 子格与格同态
- 3 特殊的格及性质
- 4 布尔代数
- 5 布尔表达式

3 特殊的格及性质

1. 分配格

(1) 定义 设 $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ 是格，如果对任意a, b, c, d∈L都使

① $a\vee(b\wedge c) = (a\vee b)\wedge(a\vee c)$

② $a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

则称 $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ 是一个分配格。

对偶公式。

例如：常见的分配格

幂集格 $\langle 2^S, \cup, \cap \rangle$

因子格 $\langle D_n, \mathrm{lcm}, \gcd \rangle$ （n是正整数）

3 特殊的格及性质

例6 如果偏序格 $<L, \preccurlyeq>$ 是一个**全序格，则必是分配格。**

证明：设格上运算为$\vee$，$\wedge$。$\forall a, b, c \in L$，有两种情况：

（1） a是三者中最大的，则$b \preccurlyeq a$，$c \preccurlyeq a$，

由不等式⑥知：$b \vee c \preccurlyeq a$，

$\therefore a \wedge (b \vee c) = b \vee c$ ①

由定义： $b \preccurlyeq a \Rightarrow a \wedge b = b$，$c \preccurlyeq a \Rightarrow a \wedge c = c$

可得 $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee c$ ②

由①, ②两式：$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

（2） a不是三者中最大的，则$a \preccurlyeq b$或$a \preccurlyeq c$，不妨设$a \preccurlyeq b \Rightarrow a \preccurlyeq b \vee c$，

则 $a \wedge (b \vee c) = a$ 。

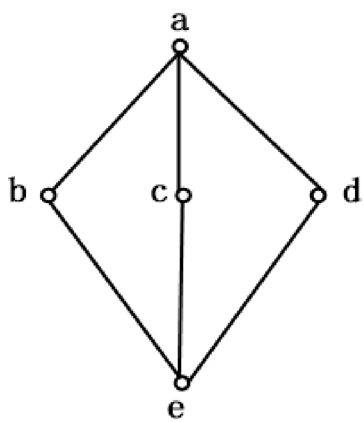
再由 $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \vee (a \wedge c)$ （$\because a \preccurlyeq b \Rightarrow a \wedge b = a$ ）

$= a$ (吸收律)

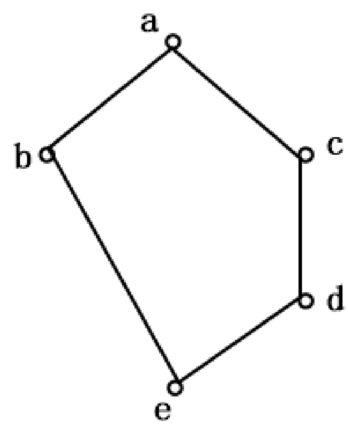
综上，全序格是分配格。

3 特殊的格及性质

(2) 分配格的判断



钻石格



五角格

这两个五元格不是分配格。

定理 设 <L, ∨, ∧> 是格，则L是分配格当且仅当L中不含有与钻石格和五角格同构的子格。

推论 (1) 小于五元的格都是分配格。

(2) 任何一条链都是分配格。

3 特殊的格及性质

定理9

设 $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ 是一个分配格，a, b, c∈L。如果

$a \vee b = a \vee c$ 且 $a \wedge b = a \wedge c$, 则$b=c$。 （消去律）

证明 $b = b \wedge (a \vee b)$ (吸收律)

$= b \wedge (a \vee c)$ (已知$a \vee b = a \vee c$)

$= (b \wedge a) \vee (b \wedge c)$ (分配律)

$= (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$ (已知$a \wedge b = a \wedge c$)

$= c \wedge (a \vee b)$ (交换律，分配律)

$= c \wedge (a \vee c)$ (已知$a \vee b = a \vee c$)

$= c$ (吸收律)

3 特殊的格及性质

2. 有补格

（1）有界格

定义 如果在格 $<L, \preccurlyeq>$ 中存在一个元素a，对任何元素b，都有 $a \preccurlyeq b$（$b \preccurlyeq a$），则称a为格的全下界（全上界）。

全下界和全上界即为最大元和最小元，称为格 $<L, \preccurlyeq>$ 的界，分别用0和1表示。

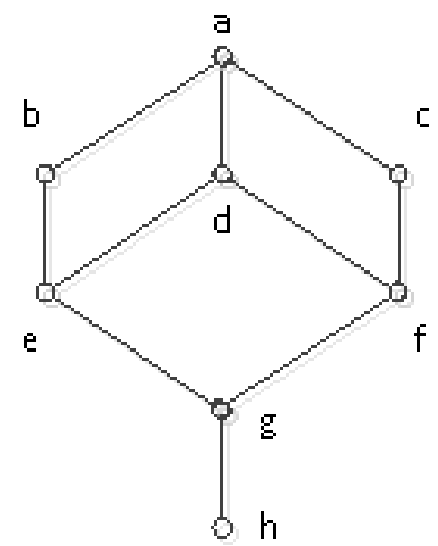
有0和1的格是有界格。

3 特殊的格及性质

例7 (1) 因子格 $<D_n, \mid>$，最大元n，最小元1。

(2) 幂集格 $<2^S, \subseteq>$，最大元S，最小元∅。

(3) 如图所示的格中，最大元(全上界)和最小元(全下界)是a，h。



注意：有限格一定是有界格，但有界格不一定是有限格。

如， $<[0,1], \leqslant>$ 有界，无限集。

3 特殊的格及性质

定理 在有界格 $<L, \vee, \wedge>$ 中下列等式成立：

$a \vee 1=1$，$a \wedge 0=0$ （零律）

$a \vee 0=a$，$a \wedge 1=a$ （同一律）

3 特殊的格及性质

（2）补元

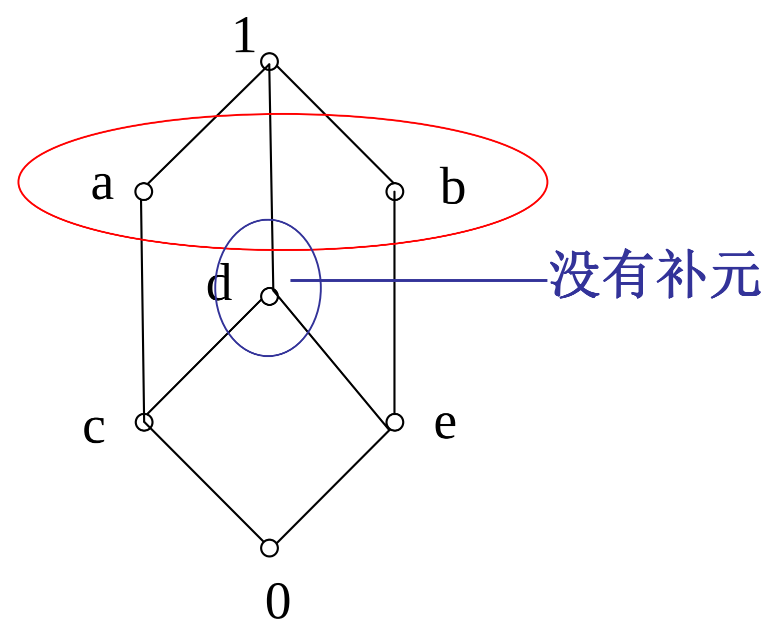
定义 设 $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ 是一个有界格。对于L中的一个元素a，如果存在元素b∈L，使

$$a \wedge b = 0 \qquad a \vee b = 1$$

则称b是a的**补元**，记为$\bar{a}$ 。（a和b是互补的元素）

例如：右图所示的有界格

- **a的补元：b，e**
- **b的补元：a，c**
- **d没有补元**
- **1, 0互补，且是唯一的。**



3 特殊的格及性质

（3）有补格

定义 每个元素都存在补元的有界格，叫做有补格。

定理10 在有补分配格中每个元素的补元是唯一的。

证明：设 $<L, \vee, \wedge>$ 是有补分配格，$\forall a \in L$，如果a有两个补元b，c，由定义：

$$a \vee b = 1 = a \vee c$$

$$a \wedge b = 0 = a \wedge c$$

由分配格的消去律得：b=c

即补元唯一。

3 特殊的格及性质

（4）有补分配格的性质

设$\langle L, \preccurlyeq \rangle$是有补分配格，则对任意$a, b \in L$，都有

1) $\bar{\bar{a}} = a$ （双重否定律）

2) $\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$

$\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$ (De Morgan律)

3) $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \wedge \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \vee b = 1$

3 特殊的格及性质

证明 3) $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \wedge \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \vee b = 1$

证明： $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \wedge \bar{b} = 0$

“$\Longrightarrow$” 设$a \preccurlyeq b$，有$a \wedge b = a$

$a \wedge b \wedge \bar{b} = a \wedge \bar{b}$ （两端同时$\wedge\, \bar{b}$）

即： $a \wedge \bar{b} = 0$ （由补元定义、零律）

“$\Longleftarrow$” 由$a \wedge \bar{b} = 0$

$\left(a \wedge \bar{b}\right) \vee b = 0 \vee b = b$ （两端同时$\vee\, b$）

$(a \vee b) \wedge (\bar{b} \vee b) = b$ （同一律、分配律）

$a \vee b = b$

即： $a \preccurlyeq b$

同理，可证： $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow \bar{a} \vee b = 1$

主要内容

- 1 格的定义与性质
- 2 子格与格同态
- 3 特殊的格及性质
- 4 布尔代数
- 5 布尔表达式

作业

- ✓习题十七

10

4 布尔代数

1. 定义及运算规律

在有补分配格中每个元都有补元而且补元惟一，则可以将求元素的补元“ $\bar{}$ ”作为一种一元运算。我们称有补分配格$\langle B, \preccurlyeq \rangle$为布尔格(布尔代数)。

它包含三种运算 $\vee$，$\wedge$，$\bar{}$ ，有两个特殊元0，1。因而布尔格$\langle B, \preccurlyeq \rangle$又写成$\langle B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1 \rangle$，以突出其代数特征。

4 布尔代数

- 布尔代数的性质

布尔代数是有补分配格，有补分配格<B，≼>必须满足：

1） 是格

2） 分配律成立

3） 有最大元和最小元（有界）；

4） 每个元的补元存在而且唯一；

- ✓ 最大元1和最小元0可以用下面的同一律和零律来描述；
- ✓ 补元的存在可以用下面的互补律来描述。

4 布尔代数

定理13 设a，b，c是布尔代数 $<B, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1>$ 中任意元素，则满足：

① $a \vee b = b \vee a$，$a \wedge b = b \wedge a$ （交换律）

② $a\vee(b\vee c) = (a\vee b)\vee c$，$a\wedge(b\wedge c) =(a\wedge b)\ \ c$ （结合律）

③ $a\vee(b\wedge a) = a$，$a\wedge(a\vee b) =a$ （吸收律）

④ $a \wedge a=a$，$a \vee a=a$ （幂等律）

⑤ $a\vee(b\wedge c) = (a\vee b)\wedge(a\vee c)$，$a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

（分配律）

4 布尔代数

⑥如果 a∨b = a∨c 且 a∧b=a∧c, 则b=c。（消去律）

⑦ 0≤a≤1（有界性）

⑧ a∨0=a，a∧1=a（同一律）

⑨ a∨1=1，a∧0=0（零律）

⑩ $a \wedge \bar{a} = 0$，$a \vee \bar{a} = 1$（互补律）

⑾ $\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$

$\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$（De Morgan）

4 布尔代数

例8

(1) 幂集格 $<2^S, \subseteq>$ 是布尔代数，

$$<2^S, \cup, \cap, {}^{-}, \varnothing, S>$$

(2) 因子格 $<D_{30}, \mid>$ 是布尔代数，

$$<D_{30}, \mathrm{lcm}, \gcd, {}^{-}, 1, 30>$$

(3) 全序格

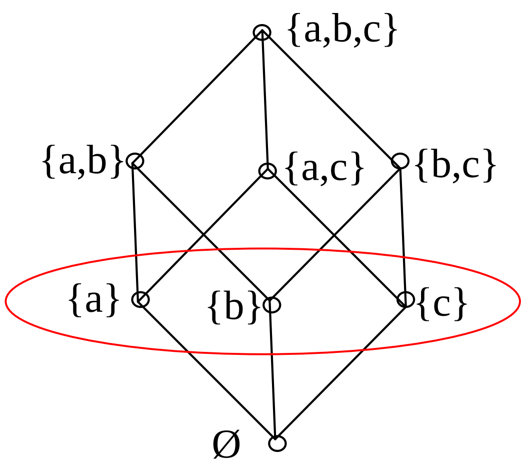
当元素大于2，不是有补格，∴不是布尔格。

4 布尔代数

2. 原子表示

定义 设a, b是一个格中的两个元素，如果$b \preccurlyeq a(b \neq a)$，并且没有别的元素c，使得$b \preccurlyeq c \preccurlyeq a$，则称元素a覆盖元素b。

定义 在布尔格〈 B, ≼〉中，直接盖住最小元0的元素成为原子。



$< 2^{\{a, b, c\}}, \cup, \cap, \bar{\ }, \varnothing, S >$

原子：{a}, {b}, {c}

4 布尔代数

定理14 在有限布尔代数<B, ∨, ∧, $^{-}$, 0, 1>中，a, b是不同的原子，x, y是任意元素，则

① $a \wedge b = 0$。

② $a \preccurlyeq x$和$a \preccurlyeq \bar{x}$ 式中有且仅有一式成立。

推论：$a \wedge x = a$ 或 $a \wedge x = 0$

③ $a \preccurlyeq x \vee y$, 当且仅当$a \preccurlyeq x$或者$a \preccurlyeq y$ 。

4 布尔代数

定理15

设由有限布尔代数<B, ∨， ∧, ¯ , 0, 1>的全体原子构成的集合为S={a_1, a_2, ， …， a_n}，则对B中任何不是0的元素x，存在a_{i_1}, a_{i_2}…a_{i_k}∈S， a_{i_k}≤x (k=1, 2， …, n) 使得

$$x=a_{i_1}\vee a_{i_2}\vee\cdots\vee a_{i_k}.$$

并且当不计原子在式中出现的顺序时，这种表示是唯一的。

- ✓ 定理说明一个布尔代数完全由它的原子所决定。

4 布尔代数

定理16 设A是以S= {a_1, a_2, ,…, a_n }为原子集的布尔代数<A, ∨, ∧, ¯, 0, 1>， B是以V={b_1,b_2,,…,b_n }为原子集的布尔代数<B,∪,∩, ~, 0', 1' >，则必存在双射f：A→B，使得∀x, y∈A，下列式子成立。

① $f(x \vee y) = f(x) \cup f(y)$

② $f(x \wedge y) = f(x) \cap f(y)$

③ $f(\bar{x}) = \widetilde{f(x)}$

结论：具有相同原子数目的两个布尔代数是同构的。

4 布尔代数

推论 任何有n个原子的有限布尔代数<B, $\vee$, $\wedge$, $\bar{\ }$, 0, 1>都和n元集S对应的幂集代数<2^S, $\cup$, $\cap$, $\bar{\ }$, $\emptyset$, S>同构，从而具有n个原子的布尔代数共有2^n个元素。

$$|2^s| = 2^n$$
$$\therefore |B| = 2^n$$

主要内容

- 1 格的定义与性质
- 2 子格与格同态
- 3 特殊的格及性质
- 4 布尔代数
- 5 布尔表达式

5 布尔表达式

1. 布尔表达式

定义 设<B, ∨, ∧, ¯, 0, 1>是一个布尔代数，在此布尔代数是上定义布尔表达式：

① B中任何元素是一个布尔表达式。

② 任何变元是一个布尔表达式。

③ 如果E_1和E_2是布尔表达式，则$E_1 \vee E_2$，$E_1 \wedge E_2$，$\bar{E}$都是布尔表达式。

只有经过有限次使用②和③得到的符号串才是布尔表达式。

例如： <{0, 1, 2, 3}, ∨, ∧, ¯, 0, 1>是一个布尔代数，那么

$E_1 = 0 \wedge x_1$，

$E_2 = (\overline{2 \vee 3}) \wedge \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$ 是布尔表达式。

5 布尔表达式

- n元的布尔表达式及其值

定义 一个含有n个相异变元的布尔表达式，称为含有n元的布尔表达式，记为

$$E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

其中$x_1, x_2, \ldots, x_n$为变元。

布尔代数$<B, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1>$上的一个n元的布尔表达式$E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$的**值**为：将B中的元素对变元$x_i$ $(i=1, 2, 3\ldots n)$的赋值，计算出表达式的值。

5 布尔表达式

例9 设布尔代数<{0, 1}， ∨, ∧, , 0, 1>上的布尔表达式为

$$E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_2 \vee x_3})$$

变元的一组赋值为：$x_1=1$， $x_2=0$， $x_3=1$，那么求得：

$$E(1,0,1) = (1 \vee 0) \wedge (\overline{1} \vee \overline{0}) \wedge (\overline{0 \vee 1}) = 1 \wedge 1 \wedge 0 = 0$$

5 布尔表达式

- 布尔表达式的等价

定义 设布尔代数$<B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1>$上的两个n元的布尔表达式为$E_1(x_1, x_2, ,\ldots, x_n)$ 和 $E_2(x_1, x_2, ,\ldots, x_n)$，如果对于n个变元的任意赋值$x_i=a_i$，$a_i \in B$，均有

$$E_1(a_1, a_2, ,\ldots, a_n) = E_2(a_1, a_2, ,\ldots, a_n)$$

则称这两个布尔表达式是**等价的或相等的**。

5 布尔表达式

2.布尔函数

定义 设布尔代数$\langle B, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1\rangle$是一个布尔代数，一个函数$f: B^n \rightarrow B$，如果它能够用$\langle B, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1\rangle$上的n元布尔表达式来表示，那么，这个函数就称为布尔函数。

定理 对于两个元素的布尔代数$\langle \{0,1\}, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1\rangle$，任何一个从$\{0,1\}^n$到$\{0,1\}$的函数都是布尔函数。

5 布尔表达式

3.布尔表达式的范式表示

（1）析取范式

定义 给定n个布尔变元$x_1, x_2, \ldots, x_n$，表达式

$$\widetilde{x_1} \wedge \widetilde{x_2} \wedge \widetilde{x_3} \ldots \wedge \widetilde{x_n} \quad (\tilde{x}_i\text{为}x_i\text{或}\overline{x_i}\text{两者之一})$$

称为小项。

在布尔代数<{0,1}, ∨, ∧,¯, 0, 1>上的布尔表达式，如果能表示成小项的并，则称这个布尔表达式为析取范式。

5 布尔表达式

- **构造小项的方法**

  对于 f: $\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$

(1) 找出函数值为1的有序n元组，构造小项$\widetilde{x_1} \wedge \widetilde{x_2} \wedge \widetilde{x_3} \ldots \wedge \widetilde{x_n}$

其中

$$\widetilde{x_i} = \begin{cases} x_i & \text{若n元组中第i个分量为1} \\ \overline{x_i} & \text{若n元组中第i个分量为0} \end{cases}$$

(2) 小项作并运算，得到析取范式。

5 布尔表达式

（2）合取范式

定义 给定n个布尔变元$x_1, x_2, \ldots, x_n$，表达式

$$\widetilde{x_1} \vee \widetilde{x_2} \vee \widetilde{x_3} \ldots \vee \widetilde{x_n} \quad (\tilde{x}_i\text{为}x_i\text{或}\overline{x_i}\text{两者之一})$$

称为大项。

在布尔代数<{0,1}, ∨, ∧,¯, 0, 1>上的布尔表达式，如果能表示成大项的交，则称这个布尔表达式为合取范式。

5 布尔表达式

- **构造大项的方法**

对于 f: $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$

(1) 找出函数值为0的有序n元组，构造大项$\widetilde{x_1} \vee \widetilde{x_2} \vee \widetilde{x_3} \ldots \vee \widetilde{x_n}$

其中

$$\widetilde{x_i} = \begin{cases} x_i & \text{若n元组中第i个分量为0} \\ \overline{x_i} & \text{若n元组中第i个分量为1} \end{cases}$$

(2) 大项作交运算，得到合取范式。

例10 讨论下表所给出的函数f的析取范式和合取范式。

	f
〈0，0，0>	1
〈0，0，1>	0
〈0，1，0>	1
〈0，1，1>	0
〈1，0，0>	0
〈1，0，1>	0
〈1，1，0>	0
〈1，1，1>	1

因为函数值为1所对应的有序三元组分别为<0，0，0>，<0，1，0>和<1，1，1>，于是可分别构造小项为：

$$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}，\ \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}，\ x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$$

因此，函数f所对应的析取范式为：

$$(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$

因为函数值为0所对应的有序三元组分别为〈0，0，1〉，〈0，1，1〉，〈1，0，0〉，〈1，0，1〉和〈1，1，0〉，于是可分别构造大项为

$\boldsymbol{x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}}$，$\boldsymbol{x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}}$，$\boldsymbol{\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3}$，$\boldsymbol{\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}}$，$\boldsymbol{\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3}$

函数f所对应的合取范式为:

$(\boldsymbol{x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}}) \wedge (\boldsymbol{x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}}) \wedge (\boldsymbol{\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3}) \wedge (\boldsymbol{\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}}) \wedge (\boldsymbol{\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3})$

5 布尔表达式

将布尔代数$\langle\{0, 1\}, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1\rangle$上的布尔表达式的析取范式和合取范式的概念扩充到一般的布尔代数上。

定理

设$E_1(x_1, x_2, , \cdots, x_n)$是布尔代数$\langle B, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1\rangle$上的任意一个布尔表达式，则它一定能写成析取范式。

5 布尔表达式

4. 布尔代数的应用

命题逻辑可以用布尔代数$\langle \{F, T\}, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$来描述，一个原子命题就是一个变元，它的取值为T或F，因此，任一复合命题都可以用代数系统$\langle \{F, T\}, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$上的一个布尔函数来表示。

5 布尔表达式

开关代数可以用布尔代数<{断开，闭合}, 并联，串联, 反向, 0, 1>来描述，一个开关就是一个变元，它的取值为“断开”或“闭合”，因此，任一开关线路都可以用代数系统<{断开，闭合}, 并联，串联, 反向, 0, 1>上的一个布尔函数来表示。

作业

- ✓习题十七

26