第二部分　集合与关系

第4章　二元关系

计算机(软件)学院

林　兰

linlan@scu.edu.cn

集合的幂集和笛卡尔集

一、幂集

定义 由集合A的所有子集组成的集合称为A的幂集，记为$\rho(A)$或2^A。

$$2^A = \rho(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

这种以集合的子集为元素构成的集合，常称为集合的集合或集族。对集族的研究在数学方面、知识库和表处理语言以及人工智能等方面都有十分重要的意义。

集合的幂集和笛卡尔集

例1

(1) 设$A = \{a, b\}$，则：

$2^A = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

(2) 对于空集$\varnothing$，有：

$2^{\varnothing} = \{\varnothing\}$

$2^{\{\varnothing\}} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

(3) $\rho(\{1, \{2, 3\}\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{\{2, 3\}\}, \{1, \{2, 3\}\}\}$

定理 设A和B是两个集合，如$B \subseteq A$， 则$2^B \subseteq 2^A$ 。

定理 若集合A有n个元素，则集合A共有2^n个子集，即：$|\rho(A)| = 2^n$ 。

集合的幂集和笛卡尔集

二. 有序对与笛卡尔积

1. 有序对（序偶）

定义 由两个元素a和b（允许a=b）按一定的顺序排列成的二元组叫做一个有序对（序偶），记为$\langle a, b\rangle$，其中，a是它的第一分量，b是第二分量。

性质：① a和b可取自不同的集合；

② 当$a \neq b$时，$\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$；

③ $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ 当且仅当 $a=c$且$b=d$。

✓集合元素无序的，而序偶是有顺序的。

集合的幂集和笛卡尔集

2. 笛卡儿积（直积）

定义(1) 设A，B是两个集合，称 $A\times B=\{\langle x,y\rangle \mid (x\in A)\wedge(y\in B)\}$ 为由A和B构成的笛卡尔乘积。运算“×”称为直积。

定义(2) 设给定 $n\geqslant 1$ 个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，称 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{<a_1,a_2,\cdots,a_n> \mid a_i\in A_i,1\leqslant i\leqslant n\}$ 为 A_1，A_2，…，A_n 的笛卡尔积。

对所有的i，$A_i=A$ 时，$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 简写成 A^n (A的n重笛卡尔集)，如 $A\times A=A^2$，$A\times A\times A=A^3$。

- 如果所有的集合都是有穷集合，则n个集合的笛卡尔积的基数为：

$$|(A_1\times A_2\times\cdots\times A_n)|=|A_1|\times|A_2|\times\cdots\times|A_n|$$

三、有序对与笛卡尔积

例2：设A={a, b, c}，B={1, 2}，求$\boldsymbol{A\times B}$, $(\boldsymbol{A\times B})\times \boldsymbol{B}$，$\mathbf{A}\times\emptyset$。

解：

$$A\times B=\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,1\rangle,\langle c,2\rangle\}$$

$$(A\times B)\times B$$

$$=\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,1\rangle,\langle c,2\rangle\}\times B$$

$$=\{\langle\langle a,1\rangle,1\rangle,\langle\langle a,2\rangle,1\rangle,\langle\langle b,1\rangle,1\rangle,\langle\langle b,2\rangle,1\rangle,$$

$$\langle\langle c,1\rangle,1\rangle,\langle\langle c,2\rangle,1\rangle,$$

$$\langle\langle a,1\rangle,2\rangle,\langle\langle a,2\rangle,2\rangle,\langle\langle b,1\rangle,2\rangle,\langle\langle b,2\rangle,2\rangle,$$

$$\langle\langle c,1\rangle,2\rangle,\langle\langle c,2\rangle,2\rangle\}$$

$$\mathrm{A}\times\emptyset=\emptyset$$

作业

习题三

10、15、16、17

第4章　二元关系

在第三章我们讨论了集合及其元素，本章讨论集合中元素之间的关系。关系是用于表征事物的结构及其内在联系。

研究事物结构, 主要是研究关系。关系的概念应用广泛, 在计算机科学中起着重要的作用, 如数据结构, 数据库, 数字逻辑, 情报检索, 算法分析, 编译, 人工智能等领域它都是很重要的数学工具。

主要内容

- 4.1 二元关系及其表示
- 4.2 关系的性质
- 4.3 关系的运算
- 4.4 关系的闭包

4.1 二元关系及其表示

1. 二元关系

例1 集合A={ 2, 3, 5, 9 }上建立“小于”关系R，则可表达为：

R={ ⟨2,3⟩, ⟨2,5⟩, ⟨2,9⟩, ⟨3,5⟩, ⟨3,9⟩, ⟨5,9⟩ }

例2 男队A={ a, b, c, d }，女队B={ e, f, g }。如果A和B的元素间有混双配对关系：a和g，d和e。可表达为：

R={ **⟨a, g⟩, ⟨d, e⟩** }

表示所有可能的混双配对有序对集合：

A×B={ ⟨a, e⟩, ⟨a, f⟩, **⟨a, g⟩,** ⟨b, e⟩, ⟨b, f⟩, ⟨b, g⟩, ⟨c, e⟩, ⟨c, f⟩, ⟨c, g⟩, **⟨d, e⟩,** ⟨d, f⟩, ⟨d, g⟩ }

有: $R \subseteq A \times B$

4.1 二元关系及其表示

（1） 定义 设A，B为集合，A×B的任何子集叫做从A到B的一个二元关系，记为R={（x，y）∈A×B｜xRy }。

如果R是从A到A的二元关系，则称R为A上的二元关系。

- 关系R与其元素(x，y)表示：

  序偶对（x，y）∈R 也记为 xRy，读作“x对y有关系R”。

  如(x, y)∉R，则记为$x \not R y$，读作“x对y没有关系R”。

✓ 二元关系的数目：

由于任何A×B的子集都是一个二元关系，按照子集的定义，知A×B共有$2^{|A|\times|B|}$个不同的子集。因此，从A到B不同的二元关系共有$2^{|A|\times|B|}$个。

4.1 二元关系及其表示

(2) 特殊的二元关系

设**A**和**B**是两个集合，**$R \subseteq A \times B$**

① 当**A=B**时，**R**称为集合**A**上的二元关系；

② 当**$R=A \times B$**时，**R**称为从集合**A**到集合**B**的全关系；

③ 当**$R=\varnothing$**时，**R**成为空关系；

④ 集合**A**上的恒等关系：**$I_A=\{(x, y) \in A \times A \mid x=y\}$**。

4.1 二元关系及其表示

(3) 二元关系的表示法

a) 集合表示法

b) 关系图表示法

c) 关系矩阵表示法

4.1 二元关系及其表示

a) 集合表示法

由于关系也是一种特殊的集合，所以集合的两种基本的表示法也可以用到关系的表示中。

- 枚举法
- 叙述法

例如：集合A={2, 3}，考虑A上的小于等于关系表示为：

枚举法 $R=\{(2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

叙述法 $R=\{ (x, y) \mid (x, y \in A) \wedge (x \le y) \}$

4.1 二元关系及其表示

b) 关系图表示法

设$A=\{a_1, a_2, a_3,\dots, a_n\}$, $B=\{b_1, b_2, b_3,\dots, b_m\}$，R是从A到B的一个二元关系，则对应于关系R的关系图G_R有如下规定：

① 设$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$和$b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$分别为图中的节点，用“。”表示；

② 如$\langle a_i, b_j\rangle\in R$, 则从$a_i$到$b_j$可用一有向边$a_i \circ\!\!\longrightarrow\!\!\circ\ b_j$相连。$\langle a_i, b_j\rangle$为对应图中的有向边。

4.1 二元关系及其表示

如果R是定义在A=〈$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$〉上的关系，则对应于关系R有如下规定：

① 设$a_1, a_2, \ldots, a_n$为图中节点，用“。”表示。

② 如〈a_i, a_j〉∈R, 则从a_i到a_j可用一有向边$a_i \circ\!\longrightarrow\!\circ a_j$相连。〈$a_i, a_j$〉为对应图中的有向边；

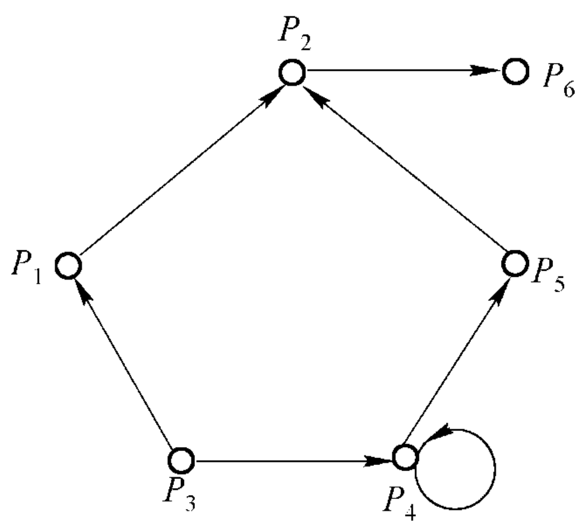
③ 如〈a_i, a_i〉∈R, 则从a_i到a_i用一带箭头的小圆环表示a_i

4.1 二元关系及其表示

例3 设A＝$\{P_1, P_2, P_3, \cdots, P_6\}$是六个程序，考虑它们之间的一种调用关系R，如$P_i$可调用$P_j$，则有$\langle P_i, P_j\rangle \in R$，现假设

$R=\{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_2, P_6\rangle, \langle P_5, P_2\rangle, \langle P_4, P_4\rangle, \langle P_3, P_1\rangle\langle P_3, P_4\rangle\langle P_4, P_5\rangle\}$

则此关系R的关系图如下：



4.1 二元关系及其表示

c) 关系矩阵表示法

设$A=\{a_1, a_2, a_3,\ldots, a_m\}$，$B=\{b_1, b_2, b_3,\ldots, b_n\}$， R是从A到B的一个二元关系，构造m行n列的矩阵 $M_R=(m_{ij})_{m\times n}$，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & 当（a_i, b_j）\in R \\ 0 & 其他\end{cases} \qquad (i=1, 2,\ldots m;\ j=1, 2,\ldots n)$$

称M_R为R的关系矩阵。

显然，关系矩阵是布尔矩阵。

说明 在写关系矩阵时，首先应对集合A和B中的元素进行排序，不同的排序会得到不同的关系矩阵。当集合以枚举法表示时，如果没有对集合的元素排序，则默认枚举的次序为元素的排序。

4.1 二元关系及其表示

例4 设A＝{2，3，4}，B＝{1，2，4}。考虑从A到B的“大于等于”关系R 和“小于等于”关系S：

R＝{<2, 1>, <2, 2>, <3, 1>, <3, 2>, <4, 1>, <4, 2>, <4, 4>},

S＝{<2, 2>, <2, 4>, <3, 4>, <4, 4>}。

写出R，S的关系矩阵。

解:

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

作业

- ✓习题四

  1、2、4

主要内容

- 4.1 二元关系及其表示
- 4.2 关系的性质
- 4.3 关系的运算
- 4.4 关系的闭包

4.2 关系的性质

1. 自反性与反自反性

定义 设R是集合A上的二元关系，

（1）对任意的$x \in A$，都满足$\langle x, x\rangle \in R$，则称R是自反的，或称R具有自反性，即

$$R\text{在}A\text{上是自反的} \Leftrightarrow (\forall x)[(x \in A) \rightarrow (\langle x, x\rangle \in R)]=1$$

（2）对任意的$x \in A$，都满足$\langle x, x\rangle \notin R$，则称R是反自反的，或称R具有反自反性，即

$$R\text{在}A\text{上是反自反的} \Leftrightarrow (\forall x)((x \in A) \rightarrow (\langle x, x\rangle \notin R))=1$$

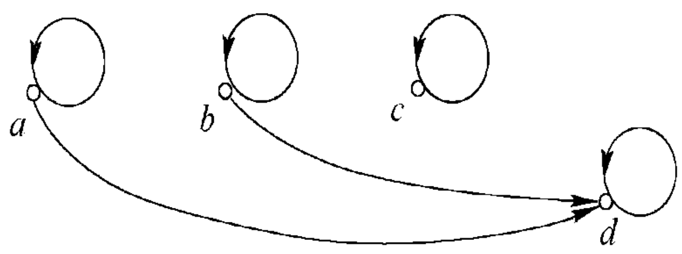
4.2 关系的性质

例5 设A={a, b, c, d}，A上的关系

1） R={<a, a>, <a, d>, <b, b>, <b, d>, <c, c>, <d, d>}。

因为A中每个元素x，都有<x, x>∈R，所以R是自反的。

R的关系图



R的关系矩阵

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

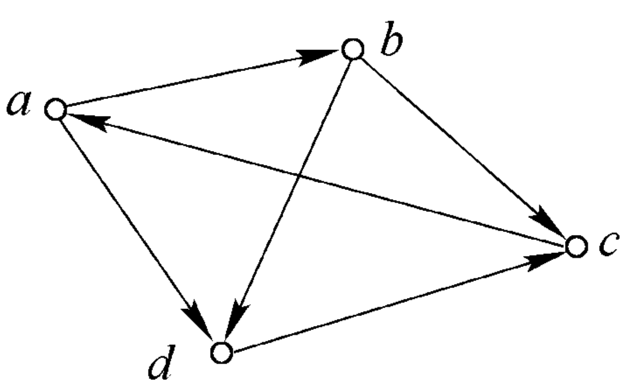
4.2 关系的性质

例5（续）

2）S={⟨a, b⟩, ⟨a, d⟩, ⟨b, c⟩, ⟨b, d⟩, ⟨c, a⟩, ⟨d, c⟩}。

因为A中每个元素x，都有⟨x, x⟩$\notin$S，所以S是反自反的。

S的关系图



S的关系矩阵

$$M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.2 关系的性质

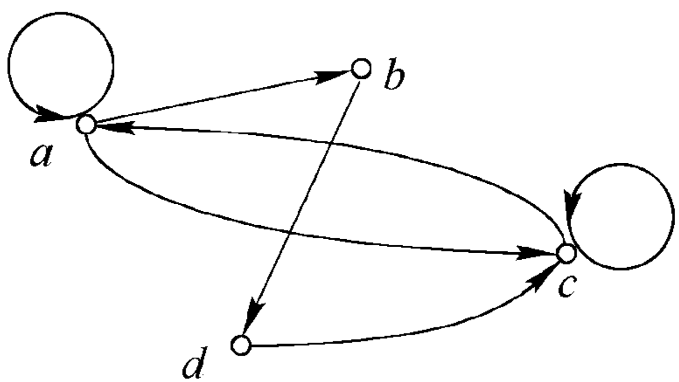
例5（续）

3) T={〈a, a〉, 〈a, b〉, 〈a, c〉, 〈b, d〉, 〈c, a〉, 〈c, c〉, 〈d, c〉}　。

因为A中有元素b，使〈b, b〉∉T，所以T不是自反的；

因为A中有元素a，使〈a, a〉∈T，所以T不是反自反的。

T的关系图



T的关系矩阵

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

结论

1. 任何不是自反的关系未必一定是反自反的关系，反之亦然。即存在既不是自反的也不是反自反的关系。
2. 表现在关系图上：关系R是自反的，当且仅当其关系图中每个结点都有环；关系R是反自反的，当且仅当其关系图中每个结点都无环。
3. 表现在关系矩阵上：关系R是自反的，当且仅当其关系矩阵的主对角线上全为1；关系R是反自反的当且仅当其关系矩阵的主对角线上全为0。

4.2 关系的性质

2. 对称性与反对称性

定义　设R是集合A上的二元关系，

（1）对任意的x, y∈A，如果<x, y>∈R，那么<y, x>∈R，则称关系R是对称的，或称R具有对称性，即

R在A上是对称的 $\Leftrightarrow$ $(\forall x)(\forall y)((x\in A)\wedge(y\in A)\wedge(\langle x,y\rangle\in R)\to(\langle y,x\rangle\in R))=1$

（2）对任意的x, y∈A，如果<x, y>∈R且<y, x>∈R，那么x=y，则称关系R是反对称的，或称R具有反对称性，即

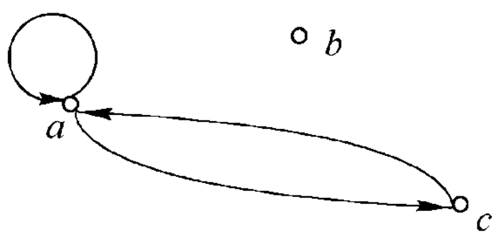
R在A上是反对称的 $\Leftrightarrow$ $(\forall x)(\forall y)[(x\in A)\wedge(y\in A)\wedge((\langle x,y\rangle\in R)\wedge(\langle y,x\rangle\in R))\to(x=y)]=1$

4.2 关系的性质

例6　设A={a, b, c}，A上的关系

1）$R_1=\{\langle a, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, a\rangle\}$　　**对称的**

R_1的关系图

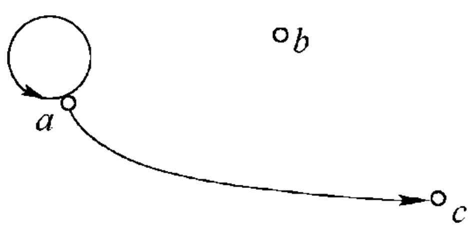


R_1的关系矩阵

$$M_{R_1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

2）$R_2=\{\langle a, a\rangle, \langle a, c\rangle\}$　　**反对称的**

R_2的关系图



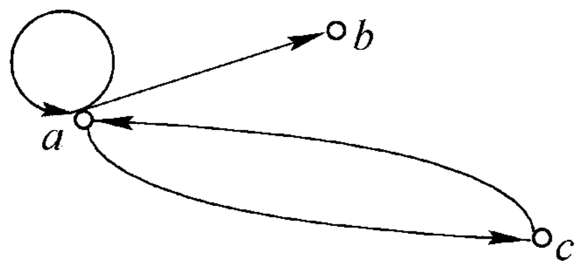
R_2的关系矩阵

$$M_{R_2}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

4.2 关系的性质

3）$R_3=\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, a\rangle\}$ 既不是对称的，也不是反对称的

R_3的关系图

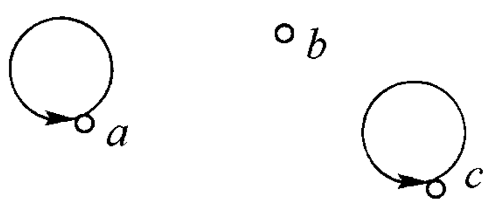


R_3的关系矩阵

$$M_{R_3}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

4）$R_4=\{\langle a, a\rangle, \langle c, c\rangle\}$ 既是对称的，也是反对称的

R_4的关系图



R_4的关系矩阵

$$M_{R_4}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

结论

1) 存在既不是对称的也不是反对称的关系，也存在既是对称的也是反对称的关系。
2) 表现在关系图上：关系R是对称的当且仅当其关系图中，任何一对结点之间，要么有方向相反的两条边，要么无任何边；关系R是反对称的当且仅当其关系图中，任何一对结点之间，至多有一条边。
3) 表现在关系矩阵上：关系R是对称的当且仅当其关系矩阵为对称矩阵，即$r_{ij}=r_{ji}$，i, j=1, 2, …, n；关系R是反对称的当且仅当其关系矩阵为反对称矩阵，即$r_{ij} \cdot r_{ji}=0$，i, j=1, 2, …, n，$i \neq j$。

4.2 关系的性质

3. 传递性

定义　设R是集合A上的二元关系，对任意的x, y, z∈A，如果<x, y>∈R且<y, z>∈R，那么<x, z>∈R，则称关系R是**传递的**，或称R具有**传递性**，即

R在A上是传递的⇔

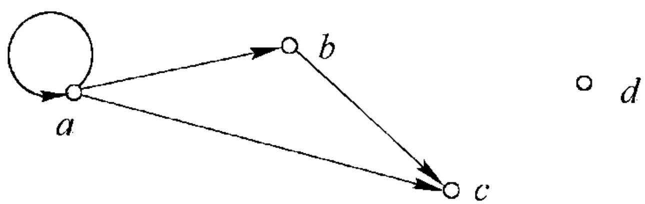
$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(x\in A)\land(y\in A)\land(z\in A)\land((\langle x,y\rangle\in R)\land(\langle y,z\rangle\in R)\rightarrow(\langle x,z\rangle\in R))]=1$$

4.2 关系的性质

例5(续) 设A={a, b, c, d}，A上的关系

1) $R_1=\{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle a,c\rangle\}$ 是传递的

R_1的关系图

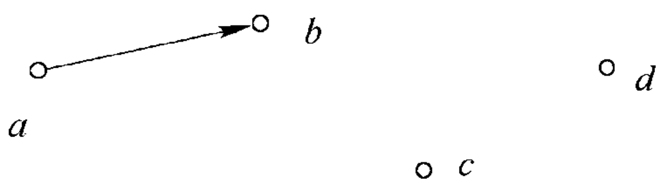


R_1的关系矩阵

$$M_{R_1}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

2) $R_2=\{\langle a,b\rangle\}$ 是传递的

R_2的关系图



R_2的关系矩阵

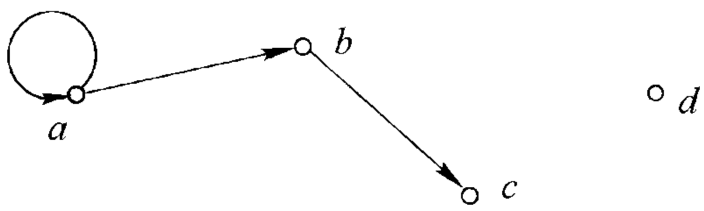
$$M_{R_2}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

4.2 关系的性质

反传递性

3）$R_3=\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$　　不是传递的

R_3的关系图

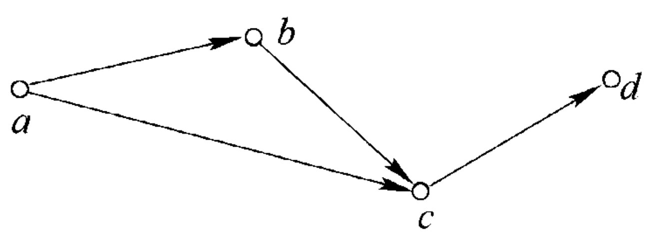


R_3的关系矩阵

$$M_{R_3}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

4）$R_4=\{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$　　不是传递的

R_4的关系图



R_4的关系矩阵

$$M_{R_4}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

结论

1) 表现在关系图上：关系R是传递的当且仅当其关系图中，任何三个结点x, y, z（可以相同）之间，若从x到y有一条边存在，从y到z有一条边存在，则从x到z一定有一条边存在。
2) 表现在关系矩阵上：关系R是传递的当且仅当其关系矩阵中，对任意i, j, k{1, 2, 3, …, n}，若$r_{ij}=1$且$r_{jk}=1$，必有$r_{ik}=1$。

4.2 关系性质

4. 几种特殊关系所具备的性质

① 空关系：空关系是反自反，对称，反对称，传递的关系。

② 集合A上的全关系：全关系是自反，对称，传递的关系。

③ 集合A上的恒等关系：恒等关系是自反，对称，反对称，传递的关系。

作业

- ✓习题四

  6、9

主要内容

- 4.1 二元关系及其表示
- 4.2 关系的性质
- 4.3 关系的运算
- 4.4 关系的闭包

4.3 关系的运算

1. 关系的基本运算

定义 设R和S都是从集合A到B的二元关系，则

$R\cup S$，$R\cap S$，$\overline{R}$，$\overline{S}$，$R-S$，$R\oplus S$ 等也都是从A到B的二元关系，

$$R\cup S=\{(x,y)\in A\times B|(x,y)\in R\vee(x,y)\in S\}$$

$$R\cap S=\{(x,y)\in A\times B|(x,y)\in R\wedge(x,y)\in S\}$$

$$\overline{R}=\{(x,y)\in A\times B|(x,y)\notin R\}$$

$$R-S=\{(x,y)\in A\times B|(x,y)\in R\wedge(x,y)\notin S\}$$

$$R\oplus S=\{(x,y)\in A\times B|(x,y)\in R\cup S\wedge(x,y)\notin R\cap S\}$$

4.3 关系的运算

2. 关系的合成

定义 **设R是集合A到B的二元关系，S是B到C的二元关系，则$\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\in\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}|(\exists\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{B})[(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\boldsymbol{R}\wedge(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\boldsymbol{S}]\}$，称为R和S的复合关系（合成关系）；运算“∘”称为复合运算。**

例如：设R_1是关系“…是…的兄弟”，R_2是关系“…是…的父亲”，则：

$R_1 \circ R_2$是关系“…是…的叔伯”

$R_2 \circ R_2$是关系“…是…的祖父”

4.3 关系的运算

例7 A={1, 2, 3, 4}，B={2, 3, 4}，C={1, 2, 3}

$R \subseteq A \times B$　　　$R=\{(x, y) \mid x+y=6\}$

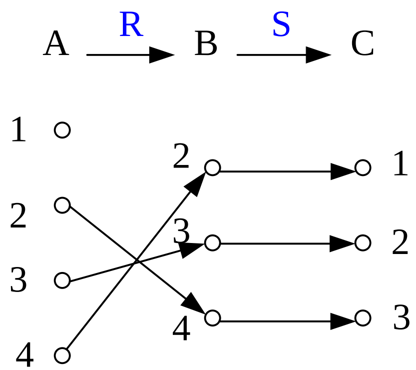
$S \subseteq B \times C$　　　$S=\{(y, z) \mid y-z=1\}$

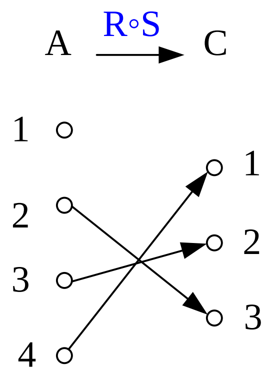
求 $R \circ S=$ ？

解：$R=\{(2,4),(3,3),(4,2)\}$，　$S=\{(2,1),(3,2),(4,3)\}$

$R \circ S=\{(2,3),(3,2),(4,1)\}$

若用关系图分析：





4.3 关系的运算

- **复合运算的性质**

(1) 不满足交换律：$R \circ S \neq S \circ R$

(2) 满足结合律：

设有二元关系$R \subseteq A \times B$，$S \subseteq B \times C$，$T \subseteq C \times D$则

$$(\mathrm{R} \circ \mathrm{S}) \circ T = R \circ (S \circ T)$$

(3) 设**R**是集合**A**到**B**的二元关系，则

$$I_A \circ R = R \circ I_B = R$$

4.3 关系的运算

(4) 合成与并集、交集运算满足：

设R, S, T都是集合A上的二元关系，则有

$$\left.\begin{array}{ll} ① & R\circ(S\cup T)=R\circ S\cup R\circ T \\ ② & (S\cup T)\circ R=S\circ R\cup T\circ R \end{array}\right\}\text{在并集上满足分配律}$$

$$\left.\begin{array}{ll} ③ & R\circ(S\cap T)\subseteq R\circ S\cap R\circ T \\ ④ & (S\cap T)\circ R\subseteq S\circ R\cap T\circ R \end{array}\right\}\text{在交集上分配不可逆}$$

4.3 关系的运算

证明：1)式，设$\forall(x,z) \in R \circ (S \cup T)$，则

$$(\exists y \in A)[(x,y) \in R \wedge (y,z) \in S \cup T]$$

$$\Leftrightarrow (\exists y \in A)[(x,y) \in R \wedge ((y,z) \in S \vee (y,z) \in T)]$$

$$\Leftrightarrow (\exists y \in A)[\big((x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\big)$$

$$\vee \big((x,y) \in R \wedge (y,z) \in T)\big)]$$

$$\Leftrightarrow (\exists y \in A)\big((x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\big)$$

$$\vee (\exists y \in A)\big((x,y) \in R \wedge (y,z) \in T)\big)$$

$$\Leftrightarrow (x,z) \in R \circ S \vee (x,z) \in R \circ T$$

$$\Leftrightarrow (x,z) \in (R \circ S) \cup (R \circ T)$$

得$\boldsymbol{R \circ (S \cup T) = R \circ S \cup R \circ T}$

4.3 关系的运算

证明：3)式，设$\forall\ (x,z) \in R \circ (S \cap T)$，则

$$(\exists y \in A)[(x,y) \in R \land (y,z) \in S \cap T]$$

$$\Leftrightarrow (\exists y \in A)[(x,y) \in R \land ((y,z) \in S \land (y,z) \in T)]$$

$$\Leftrightarrow (\exists y \in A)\Big[\big((x,y) \in R \land (y,z) \in S\big)$$

$$\land \big((x,y) \in R \land (y,z) \in T\big)\Big]$$

$$\Rightarrow (\exists y \in A)\big((x,y) \in R \land (y,z) \in S\big)$$

$$\land (\exists y \in A)\big((x,y) \in R \land (y,z) \in T\big)$$

$$\Leftrightarrow (x,z) \in R \circ S \land (x,z) \in R \circ T$$

$$\Leftrightarrow (x,z) \in (R \circ S) \cap (R \circ T)$$

得$\boldsymbol{R} \circ (\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{T}) \subseteq \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{T}$

4.3 关系的运算

3. 关系的幂

设R是集合A上的二元关系， $n\in N$，那么R的n次幂记为R^n，且R^n也是A上的二元关系，定义如下：

①. $R^0 = I_A = \{\langle a, a\rangle \mid a\in A\}$；

②. $R^1 = R$ ；

③. $R^{n+1} = R^n \circ R = R \circ R^n$。

满足性质：

$$R^m \circ R^n = R^{m+n}$$

$$(R^m)^n = R^{mn}$$ (m, n是非负整数)

4.3 关系的运算

4. 复合运算的矩阵表达

设R是集合A到B的二元关系，S是B到C的二元关系，则$M_{RS}=M_R*M_S$。若|A|=m, |B|=n, |C|=p，则

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \bullet \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \cdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}_{n\times p} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \cdots & & \\ c_{m1} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}_{m\times p}$$

$$\boxed{c_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik} \wedge b_{kj}) \qquad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le p}$$

布尔积运算，类似一般矩阵乘法运算，只是将元素间的乘法改成逻辑与，将加法改成逻辑或。

4.3 关系的运算

例8 设$X=\{1,2\}$，$Y=\{a,b,c\}$，$Z=\{\alpha,\beta\}$，$R\subseteq X\times Y$，$S\subseteq Y\times Z$，$R=\{(1,a),(1,b),(2,c)\}$，$S=\{(a,\beta),(b,\beta)\}$，由关系矩阵求复合关系$R^\circ S$.

$$M_R=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad M_S=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$M_{RS}=M_R * M_S=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

4.3 关系的运算

5. 逆关系

（1）定义 设二元关系R⊆A×B，则R^{-1}={(y, x) | (x, y)∈R}称为关系R的逆关系。

例如：“大于”关系的逆关系为“小于”

“整除”关系的逆关系为“倍数”

- 逆关系的关系图和关系矩阵

①已知关系图G_R，求$G_{R^{-1}}$：有向弧反向

②已知关系矩阵M_R，求$M_{R^{-1}}$：转置矩阵

4.3 关系的运算

（2）逆运算的运算性质

定理 设R和S都是集合A到B的二元关系，则

- $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
- $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
- $(\overline{R})^{-1} = \overline{R^{-1}}$
- $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$
- $(R^{-1})^{-1} = R$

证明：留作课后练习

4.3 关系的运算

定理 设二元关系R$\subseteq$A$\times$B，S$\subseteq$B$\times$C，则$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$。

证明：$(c,a) \in (R \circ S)^{-1}$

$$\Leftrightarrow (a,c) \in R \circ S$$

$$\Leftrightarrow (\exists b \in B)[(a,b) \in R \wedge (b,c) \in S]$$

$$\Leftrightarrow (\exists b \in B)[(b,a) \in R^{-1} \wedge (c,b) \in S^{-1}]$$

$$\Leftrightarrow (c,a) \in S^{-1} \circ R^{-1}$$

$\therefore (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

特殊地，$(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n = R^{-n}$

4.3 关系的运算

定理 设R是A上的二元关系，那么R是对称的当且仅当$R=R^{-1}$。

证明：（课后练习）

作业

- 习题四

  8

  10（1）（3）（5）

  11

主要内容

- 4.1 二元关系及其表示
- 4.2 关系的性质
- 4.3 关系的运算
- 4.4 关系的闭包

4.4 关系的闭包

1. **定义**

设R是集合A上的二元关系。如果另有A上关系R'满足：

① R′是自反的（或对称的，或可传递的）；

② $R \subseteq R'$；

③ A上任何其他满足①和②的关系R″必然满足 $R' \subseteq R''$；

(最小扩充)

则称R′为R的自反闭包。（或对称闭包，或可传递闭包）

分别记为：r(R)，s(R)，t(R)。

定理 设R是A上的二元关系，则

(1) R是自反的⇔r(R)=R；　　(2) R是对称的⇔s(R)=R；

(3) R是可传递的⇔t(R)=R。

4.4 关系的闭包

例9 设集合A＝{a, b, c}, R＝{<a, b>, <b, b>, <b, c>}是定义在A上的二元关系，求r(R), s(R), t(R)，并画出R，r(R), s(R), t(R)的关系图和求出相应的关系矩阵。

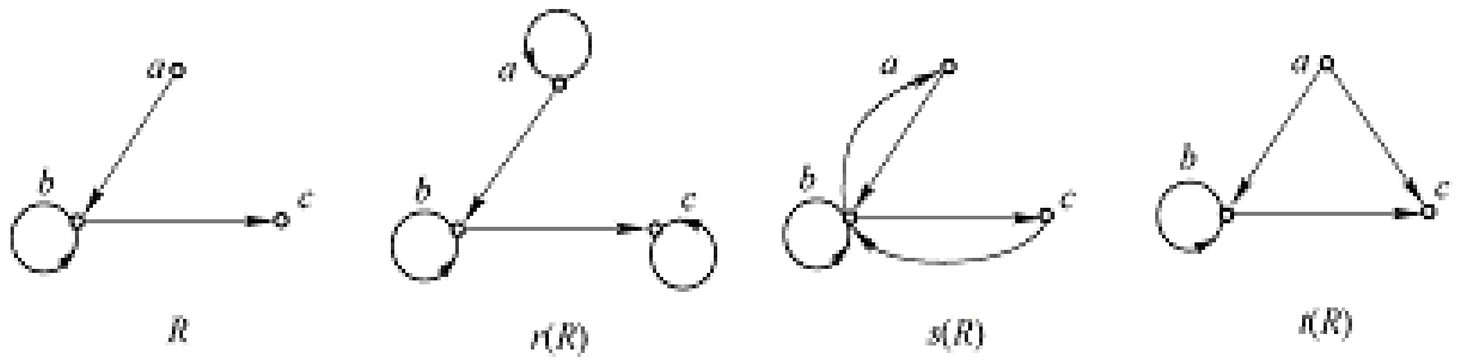
解：

1） r(R)＝{<a, b>, <b, b>, <b, c>, <a, a>, <c, c>}；

2） s(R)＝{<a, b>, <b, b>, <b, c>, <b, a>, <c, b>}；

3） t(R)＝{<a, b>, <b, b>, <b, c>, <a, c>}。

4.4 关系的闭包



$$M_R=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},M_{r(R)}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$M_{s(R)}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix},M_{t(R)}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

4.4 关系的闭包

2. 闭包的构造方法

定理： **设R是A上的二元关系，那么**

① $\boldsymbol{r(R) = R \cup I_A}$

② $\boldsymbol{s(R) = R \cup R^{-1}}$

③ $\boldsymbol{t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots} = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

证明：可采用二种方法，

一种是证明 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 是传递闭包（按定义证明）；

一种是直接证明 $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 。

4.4 关系的闭包

方法一　设$R' = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

(1) 显然$R \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R'$

(2) 对任意a, b, c∈A，若<a, b>∈R′，<b, c>∈R′ ，（要证<a, c>∈R′）

则由$R' = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$，必存在$R^j, R^k$ $(1 \leqslant j, k < \infty)$，使得$\langle a, b\rangle \in R^j$，

$\langle b, c\rangle \in R^k$，即$\langle a, c\rangle \in R^{j+k}$ $(1 \leqslant j+k < \infty)$，∵$R^{j+k} \subseteq R'$

所以 $\langle a, c\rangle \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R'$，即R′是传递的。

(3) 设R″是任何一个关系，且有 $R \subseteq R'' \subseteq A \times A$，R″是传递的。

对任意<a, b>∈R′，存在R^j $(1 \leqslant j < \infty)$，使得$\langle a, b\rangle \in R^j$，所以存在

$c_1, c_2, c_3, \cdots, c_{j-1} \in A$，使得：

4.4 关系的闭包

$\langle a, c_1\rangle\in R$， $\langle c_1, c_2\rangle\in R$， $\langle c_2, c_3\rangle\in R, \ldots\ldots, \langle c_{j-1}, b\rangle\in R$。

因$R\subseteq R''$，所以

$\langle a, c_1\rangle\in R''$， $\langle c_1, c_2\rangle\in R''$， $\langle c_2, c_3\rangle\in R'', \cdots, \langle c_{j-1}, b\rangle\in R''$。

由R''是传递的，有：

$\langle a, c_2\rangle\in R'', \langle c_2, c_3\rangle\in R'', \langle c_3, c_4\rangle\in R'', \cdots, \langle c_{j-1}, b\rangle\in R''$。

一直下去，最终有：$\langle a, b\rangle\in R''$。

所以，$R'\subseteq R''$。

由(1),(2),(3)知：R'是R的传递闭包，即$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$。

4.4 关系的闭包

方法二 设t(R)是R的传递闭包，证明$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

(1)证明 $t(R)\subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

$\because \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 是可传递的，同时 $R \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ （方法一已证）

$\therefore$ 由传递闭包的定义知：$t(R)\subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 。

(2)证明 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq t(R)$。只需证对任意的$i\in N^+$,有$R^i\subseteq t(R)$。

当i＝1时，因 $R\subseteq t(R)$,所以结论成立。

设i＝k时，有 $R^k\subseteq t(R)$结论成立。

当i＝k+1时，对任意$\langle a,b\rangle\in R^{k+1}$，则存在$c\in A$，使得$\langle a,c\rangle\in R^k$，$\langle c,b\rangle\in R$。由归纳假设有：$\langle a,c\rangle\in t(R)$，$\langle c,b\rangle\in t(R)$，由t(R)可传递，所以$\langle a,b\rangle\in t(R)$，

即有：$R^{k+1}\subseteq t(R)$。

4.4 关系的闭包

由归纳法知，对任意有的$i \in N^+$，有$R^i \subseteq t(R)$。所以

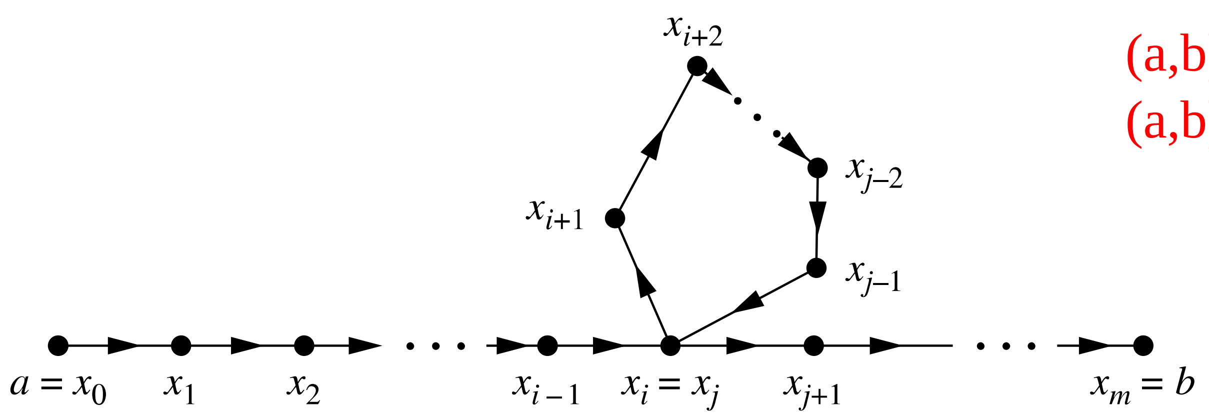
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq t(R)。$$

由(1)、(2)知：$t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$。

4.4 关系的闭包

定理 设A是n个元素的集合，R是A上二元关系，则存在正整数$k(k \le n)$，使 $t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^k = \bigcup_{i=1}^{k} R^i$。

解释：



(a,b)∈ R^m

(a,b)∈ $R^{m-(j-i)}$

(i<j)

- 最长的基本道路长度为n-1；
- 最长的基本回路（起点和终点相同）长度为n。

4.4 关系的闭包

例10 设集合A＝{a, b, c}, R＝{<a, b>, <b, c>, <c, a>}是定义在A上的二元关系。

现用公式计算 $t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^k = \bigcup_{i=1}^{k} R^i \quad (k \le n)$

解：

$$\boldsymbol{R^2 = \{(a, c), (b, a), (c, b)\}}$$

$$\boldsymbol{R^3 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}}$$

$$\boldsymbol{R^4 = \{(a, b), (b, c), (c, a)\} = R}$$

$$\boldsymbol{R^5 = R^2}$$

…

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 =$$

$$\{(a, b), (b, c), (c, a), (a, c), (b, a), (c, b), (a, a), (b, b), (c, c)\}$$

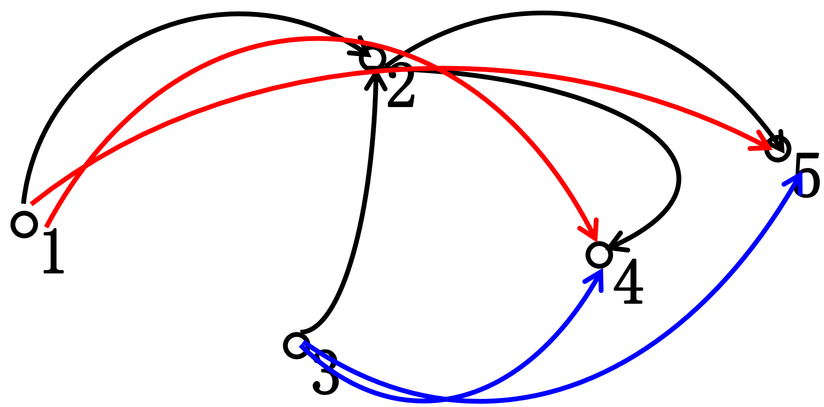
Warshall算法的基本思想

在关系矩阵中，从列看：每列（结点）的每个等于1的元素反映的是其它结点到该结点有一条有向边；从行看：每行（结点）的每个等于1的元素反映的是该结点到其它结点有一条有向边。

对每个结点（从第一列开始, 称为“当前结点”），找出所有到当前结点的有向边的结点（即该列中元素为1的所在行的结点），再将这些结点所在行同当前结点所在行进行逻辑加后作为这些结点所在的新行（添加新的有向边）。

$$
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

从关系图上反映了，如果图中结点没有直接到其它结点的有向边，但有到当前结点的有向边，再通过当前结点间接到达其它结点，根据传递闭包的定义，这些结点就必然有一条有向边到达其它结点。



4.4 关系的闭包

Warshall算法:

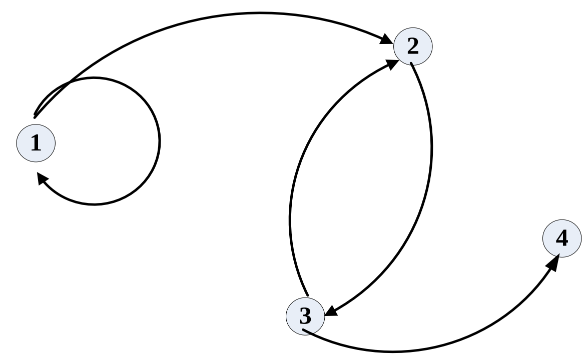
```
void warshall (int m[ ][ ], int n)
{ int i, j, k;
  for(i=0; i<n; i++)                           // 从第1列开始扫描(中间结点)。
    for(j=0; j<n; j++)
      if(m[ j ][ i ]==1)                       //找出当前列中为1的值。
        for(k=0; k<n; k++)
          m[ j ][ k ]=m[ j ][ k ]||m[ i ][ k ];  //值为1元素所在行(j行)与
                                                  i行的每个元素一一进行
}                                                 逻辑或运算，结果放入j行。
```

4.4 关系的闭包

例11 设A={1, 2, 3, 4}, A上的二元关系

R={<1, 1>, <1, 2>, <2, 3>, <3, 2>, <3, 4>}

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

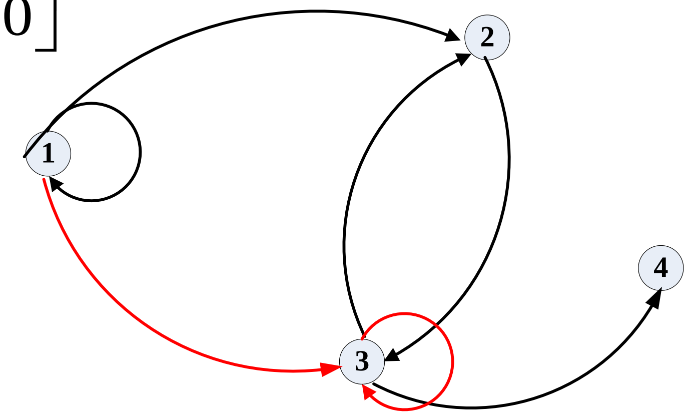


- i:=1; ∵i=1时, M的第一列中只有M(1, 1)=1, 将M的第一行上元素与本身作逻辑加, 结果送该行, M不变。
- i:=i+1; i=2, M的第二列有两个1, 即M(1, 2)=M(3, 2)=1

4.4 关系的闭包

- 分别将M的第1行和第3行与第二行对应元素作逻辑加,将结果分别送1,3行得:

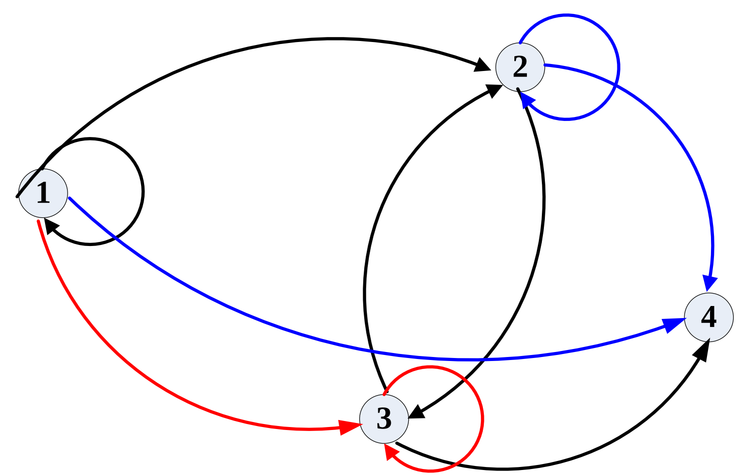
$$M=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\ \boxed{0\quad 0\quad 1\quad 0}\\ 0&1&0&1\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&0\\ 0&0&1&0\\ 0&1&1&1\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}$$



4.4 关系的闭包

- i:=i+1; i=3,M的第3列有3个1,即 M(1,3)=M(2,3)=M(3,3)=1,
- 分别将M的第1,2,3行与第3行对应元素作逻辑加,将结果分别送1,2,3行得:

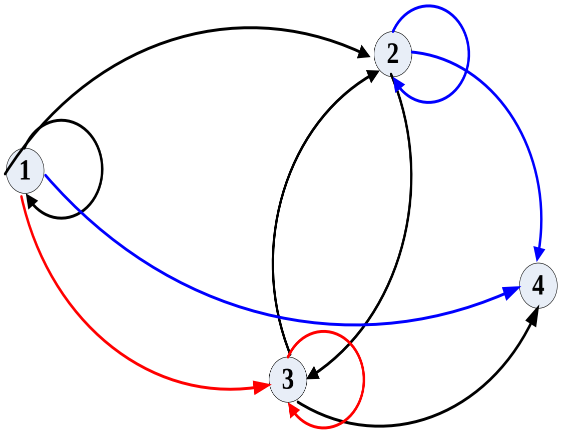
$$M=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$



4.4 关系的闭包

- i:=i+1; i=4, M的第4行全为0, M不变。
- i:=i+1; i=5>4=n, 停止, 即得:

$$M_R^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



4.4 关系的闭包

3. 闭包运算的性质

定理 设R_1，R_2是集合A上的二元关系，且$R_1 \subseteq R_2$，则

$$\begin{cases} r(R_1) \subseteq r(R_2) \\ s(R_1) \subseteq s(R_2) \\ t(R_1) \subseteq t(R_2) \end{cases}$$

4.4 关系的闭包

定理 **设R是集合A上的二元关系，则**

① R是自反的⇒s(R)和t(R)都是自反的

② R是对称的⇒r(R)和t(R)都是对称的

③ R是可传递的⇒r(R)是可传递的

证明：① R是自反的⇒s(R)和t(R)都是自反的

$\because$ R是自反的，对任意$x\in A$，有$(x,x)\in R$。

由定义 $R\subseteq s(R)$， $R\subseteq t(R)$，有$(x,x)\in s(R)$， $(x,x)\in t(R)$

$\therefore$s(R)和t(R)都是自反的。

4.4 关系的闭包

证明： ② R是对称的⇒r(R)和t(R)都是对称的

由定理，R是对称的⇔ $R=R^{-1}$

$(r(R))^{-1}=(R\cup I_A)^{-1}=R^{-1}\cup I_A=R\cup I_A=r(R)$

∴ r(R) 是对称的。

$(t(R))^{-1}=(R\cup R^2\cup\ldots\cup R^n)^{-1}$

$=R^{-1}\cup(R^2)^{-1}\cup\ldots\cup(R^n)^{-1}$

$=R^{-1}\cup(R^{-1}\circ R^{-1})\cup\ldots\cup(R^{-1}\circ\ldots\circ R^{-1})$

$=R\cup R^2\cup\ldots\cup R^n=t(R)$

∴ t(R) 是对称的。

4.4 关系的闭包

证明：③ R是可传递的⇒r(R)是可传递的

对$\forall(x,y),(y,z)\in r(R)=R\cup I_A$，则$(x,y),(y,z)\in R$，

R是可传递的，(x, z) ∈R，R⊆r(R)，∴ (x, z) ∈r(R)

r(R)是可传递的。

问题: R是可传递的⇒s(R)是可传递的？ 不一定

例如：A={1,2}，R={(1,2)}，R是可传递的，

而s(R)={(1,2),(2,1)}不具有可传递性。

4.4 关系的闭包

多重闭包

1）集合A上的关系的自反对称闭包定义为 $rs(R) = r(s(R))$

2）集合A上的关系的自反传递闭包定义为 $rt(R) = r(t(R))$

3）集合A上的关系的对称传递闭包定义为 $st(R) = s(t(R))$

同上，我们还可定义$sr(R)$，$tr(R)$，$ts(R)$，$\cdots$

定理 设R是集合A上的二元关系，则

① $rs(R) = sr(R)$

② $rt(R) = tr(R)$

③ $st(R) \subseteq ts(R)$

4.4 关系的闭包

② $rt(R) = tr(R)$

证明②：对任意n∈N，有$(R \cup I_A)^n = I_A \cup \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。（可以归纳证明）

$tr(R) = t(R \cup I_A)$

$= (R \cup I_A) \cup (R \cup I_A)^2 \cup \ldots \cup (R \cup I_A)^n \cup \ldots$

$= (I_A \cup R) \cup (I_A \cup R \cup R^2) \cup \ldots \cup (I_A \cup R \cup R^2 \ldots \cup R^n) \ldots$

$= I_A \cup R \cup R^2 \cup \ldots$

$= I_A \cup t(R)$

$= rt(R)$

4.4 关系的闭包

例12 设A＝{1, 2}，R＝{(1, 2)}，则：

st(R)＝s(t(R))＝ s({(1, 2)}) ＝{(1, 2), (2, 1)}

ts(R)＝t(s(R))＝t({(1, 2), (2, 1)})

＝{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2)}

即：st(R)$\subseteq$ts(R)

传递闭包和自反传递闭包，常用于形式语言与程序设计中，在计算机文献中，常把关系R的传递闭包t(R)记作R^+，而自反传递闭包rt(R)记作R^*。

作业

- 习题四

  16(2)

  + 补充习题（见后页）

作业

- 补充习题：

  设A={a, b, c, d}, A上的关系

  R={(a, b), (b, a), (b, c), (c, d), (d, b)},

  （1）画出R， r (R)， s(R)， t(R)的关系图；

  （2）试用Warshall算法求出关系R的传递闭包。(写出中间结果)