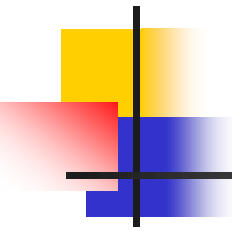


习题课5 - 一些特殊图

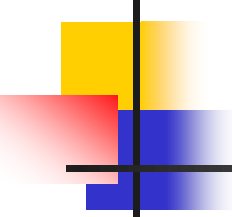
主讲 林 兰

2022 秋季



第十一章

1. 深刻理解树（六个等价命题）及生成树、树枝、树补的定义，掌握生成树的主要性质，并能灵活应用它们；
2. 熟练地应用 Kruskal 算法求最小生成树；
3. 掌握根树、 m 叉树、完全 m 叉树、正则 m 叉树、最优树的概念，熟练掌握 Huffman 算法，并使用它求最优二叉树；



第十二章

1. 深刻理解平面图、面、对偶图的定义；
2. 熟记欧拉公式和二一个平面图的必要条件，并能使用它们来判断图的非平面性；
3. 了解库拉托夫斯基（Kuratowski）定理和细分图的概念；



例1

证明当每个结点的度数大于等于3时，不存在有7条边的连通简单平面图。

证明：(反证法) 设图的边数 $m=7$ ，结点数为 n 。

由题意， $d(v_i) \geq 3$ ，（ v_i 为任意结点）

则由握手定理， $2m = \sum_{i=1}^n d(v_i)$

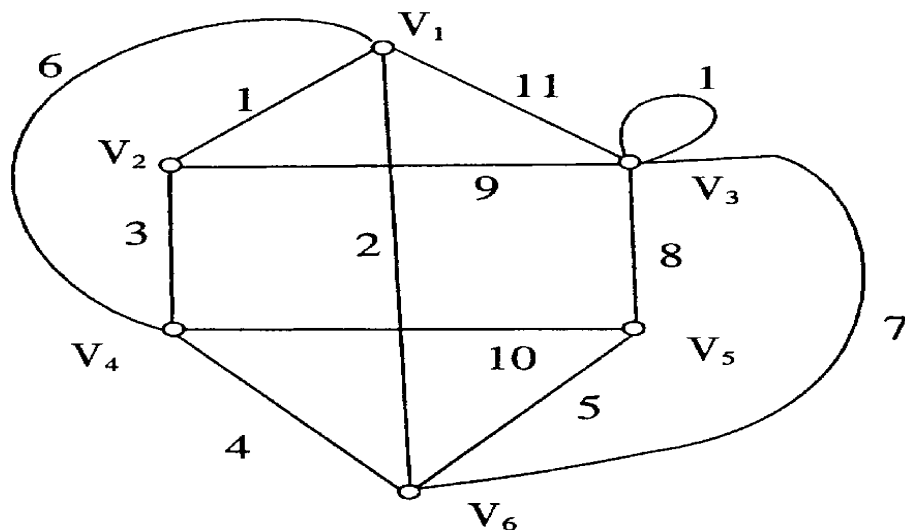
$$\text{则 } 2 \times 7 = \sum_{i=1}^n d(v_i) \geq 3n \quad \Rightarrow \quad n \leq \frac{14}{3}$$

\therefore 结点的个数不超过4个，而结点个数为4的完全图的边数为 6。

故应有环或平行边，不是简单连通平面图，与题设矛盾。

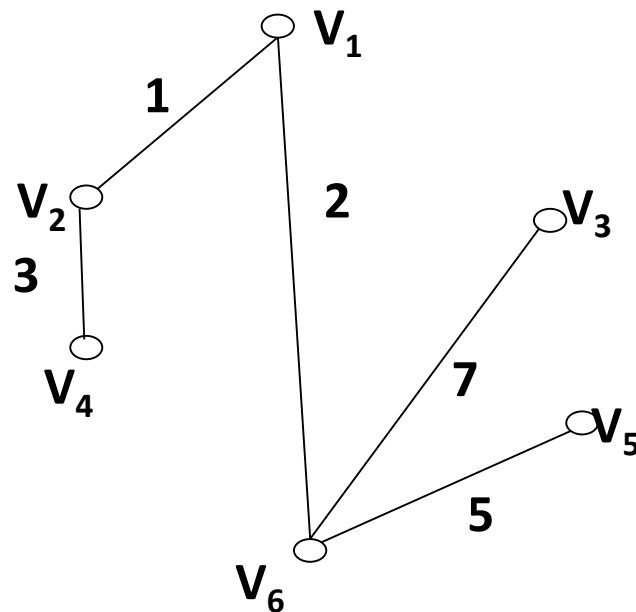
例2

有 6 个村庄 v_i ($i=1, 2, \dots, 6$)，欲修建道路使村村可通。现已有修建方案如下带权无向图所示，其中边表示道路，边上的数字表示修建该道路所需费用，问应选择修建哪些道路可使得任二个村庄之间是可通的且总修建费用最低？要求写出求解过程，画出符合要求的最低费用的道路网络图并计算其费用。



解：利用Kruskal算法产生最小生成树，应选出 $m=n-1=5$ 条边，选边顺序为：

$V_1V_2, V_1V_6, V_2V_4, V_6V_5, V_6V_3$



$$\text{费用} = w(T) = 1 + 2 + 3 + 5 + 7 = 18$$



例3

证明：任何无向树都是二部图。 ($n \geq 2$)

证明：设 T 为任意无向树， 定义互补结点子集 X 和 Y 如下：

任取 T 中一个结点 $v_0 \in X$ ， 取

$X = \{v \mid \text{从 } v_0 \text{ 到 } v \text{ 的距离是偶数}\}$ ， $Y = V - X$ 。

得 X 和 Y 是 T 的结点集合的一个二部分化。

（现证明 X 和 Y 各自集合中结点间均不邻接。）

假设存在一条边 (v_i, v_j) ， $v_i, v_j \in Y$ 。由于 T 是连通的， 所以从 v_0 到 v_i 有一条路径， 同理， 从 v_0 到 v_j 也有一条路径。此时， 由这两条路径及 (v_i, v_j) 构成一条回路， 这与 T 无圈矛盾。

因此 Y 的任两结点间不存在边。同理可证 X 的任两结点间不存在边。任何无向树都是二部图得证。



习题十一

15、证明：简单连通无向图 G 的任何一条边都是 G 的某棵生成树的边。

证明：简单连通无向图 G 的任何一条边，要么是割边，要么是非割边。

如果是割边，那么此边是所有生成树的树边；（由10题）

如果不是割边，设边为 e ，那么 $G - \{e\}$ 连通，可以求出生存树 T ，此 T 也是 G 的生成树，且不包含 e ，那么 e 是 T 的树补边。则 $T + \{e\}$ ，有唯一一个圈 C ，删除圈上任意一条非 e 边，便得到一颗包含 e 边的树。

习题十二

5、证明：少于30条边的简单平面图至少有一个顶点的度不大于4。

证：不妨设G是连通图，否则，因为它的每个连通分支的边数都应小于30，因此可以对它的每个连通分支进行讨论，所以可设G是连通图。

当 $n=1$ 或 2 时，结论显然成立。

当 $n \geq 3$ 时，采用反证法，假设简单平面图 $G = (n, m)$ ，所有顶点的度数 ≥ 5 。

$$\text{握手定理 } 2m = \sum \deg(v_i) \geq 5n, \text{ 则 } n \leq \frac{2m}{5} \quad -(1)$$

$$\text{平面图的判定定理 } m \leq 3n - 6 \quad -(2)$$

$$\text{由(1)(2): } m \leq 3 \cdot \frac{2m}{5} - 6$$

$$\text{得 } m \geq 30$$

与题设 $m < 30$ 矛盾

故，图中至少存在一个顶点的度数不超过4。

习题十二

定义 若一个平面图与其对偶图同构，则称这个平面图为自对偶图。

推导自对偶图必须满足的结点数 n 与边数 m 的关系，并找出一些自对偶图。

解：根据题意有， G 与 G^* 同构，同时又是平面图，因此有如下关系式成立：

$$n - m + f = 2 \quad (1) \quad \text{针对 } G \text{ 图}$$

$$n^* - m^* + f^* = 2 \quad (2) \quad \text{针对 } G^* \text{ 图}$$

由(1)式： $m = n + f - 2$

因为 G 与 G^* 同构，所以 $n = n^* = f$ ，代入上式

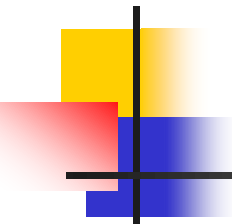
因此有： $m = 2n - 2$ ，这就是自对偶平面图点和边需要满足的关系。

请自己构造自对偶图的例子。



第十三章

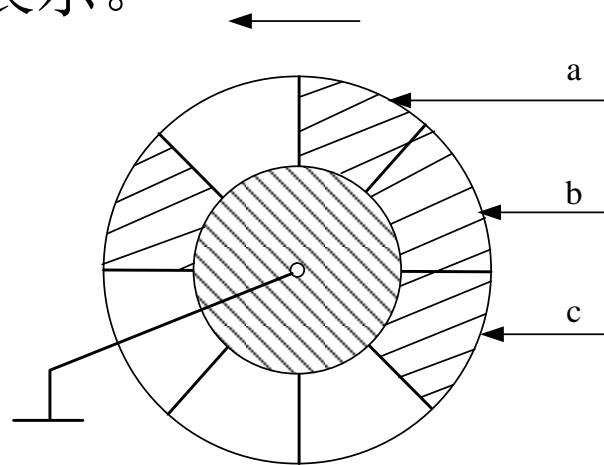
1. 深刻理解欧拉图和欧拉道路的定义，对于给定的图能判断它是否为欧拉图或存在欧拉道路；
2. 掌握 Fleury 算法并会用 Fleury 算法求出欧拉图中的欧拉回路；
3. 理解中国邮递员问题算法并会用中国邮递员算法求出无向图中的欧拉回路；
4. 深刻理解哈密顿道路及其哈密顿图、图的闭包概念；

- 
5. 会用哈密顿图和含哈密顿道路的充分条件来判断某些图是哈密顿图或是否含有哈密顿道路;
 6. 会用破坏哈密顿图的某些必要条件的方法判断某些图不是哈密顿图
 7. 严格区分哈密顿图的充分条件和必要条件
 8. 理解判断哈密顿图的充分必要条件
 9. 了解推销商问题的求解方法

例1 布鲁英序列(Euler图的应用)

旋转股（模数转换问题）的表面分成8块扇形，如图所示。每个扇段由导体材料（阴影部分）或绝缘材料（空白区）构成，分别用1和0两种状态表示，终端a, b和c是接地或不是接地的分别用二进制信号1或0表示。因此，鼓的位置可用二进制信号表示。

问：应如何选取这8个扇形的材料使股轮每转过一个扇段都得到一个不同的二进制信号，即每转一周，能得到000到111的8个二进制数。

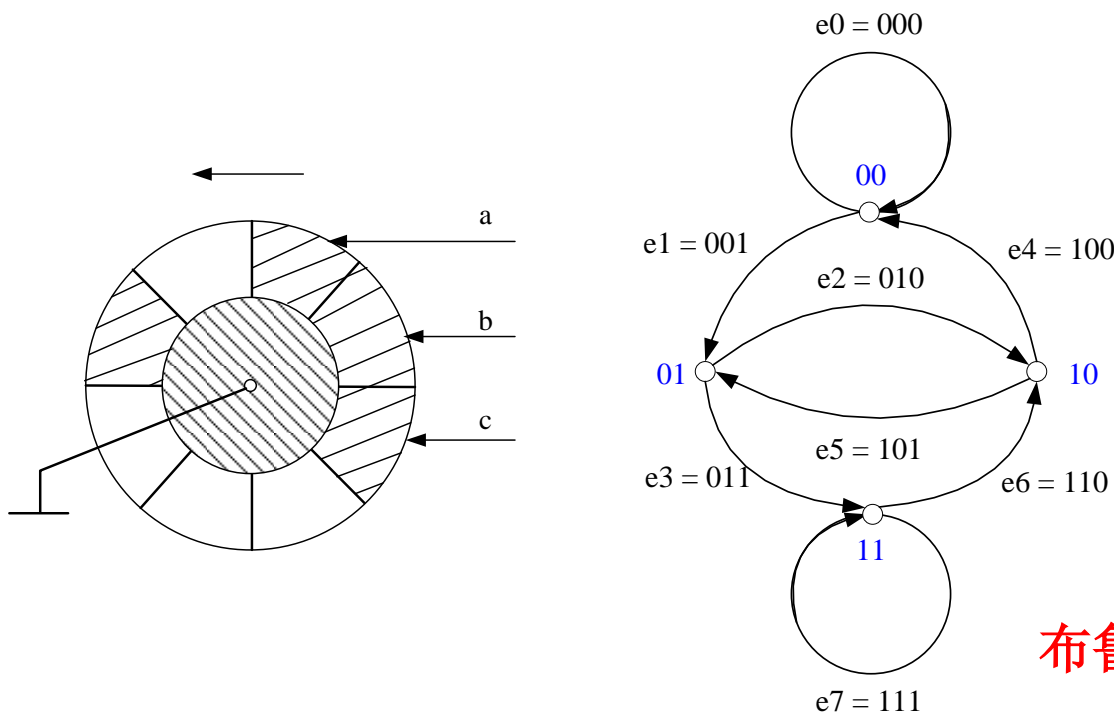


思路：因为每转一个扇段，信号从 $a_1a_2a_3$ 变成 $a_2a_3a_4$ 。

因此，采用所有2位的二进制数作为图的结点（**共4个结点**）从结点 a_1a_2 到 a_2a_3 引一条**有向边** $a_1a_2a_3$ 表示3位二进制数，

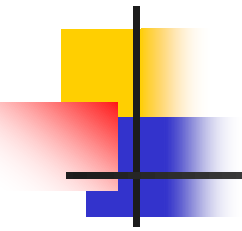
可以在图中作出**8条有向边**表示所有的3位二进制数。

➤ 问题转化：**找有向图的欧拉回路。**



111
110
100
000
001
010
101
011

布鲁英序列： 11100010



上面的例子，我们可以把它推广到鼓轮具有 n 个触点的情况。为此，我们只要构造 2^{n-1} 个结点的有向图，设每个结点标记为 $n-1$ 位二进制数，从结点 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}$ 出发，有一条终点为 $\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{n-1}0$ 的边，该边记为 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}0$ ；还有一条边的终点为 $\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{n-1}1$ 的边，该边记为 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}1$ 。这样构造的有向图，其每一结点的出度和入度都是2，故必是欧拉图。由于邻接边的标记是第一条边的后 $n-1$ 位二进制数与第二条边的前 $n-1$ 位二进制数相同，为此就有一种 2^n 个二进制数的环形排列与所求的鼓轮相对应。



例2

设图G是具有6个顶结点、12条边的无向简单图，证明图G是哈密顿图。

证明：已知一个图是哈密顿图的充分条件是：图中任意不同两点的度数之和大于等于n。

（反证法）假设图G中存在两个结点 v_1, v_2 ，其度数之和不大于等于6，即

$$d(v_1) + d(v_2) \leq 5。$$



而删去这两个点后，至多删去图 G 中的 5 条边。

由于图 G 是具有 6 个顶点，12 条边的无向简单图，删去顶点 v_1, v_2 后，得到的子图为：具有 4 个结点，至少 7 条边的无向简单图，但这样的无向简单图不存在（4 阶无向简单图最多有 6 条边）。

由此证明图 G 中任意不同两点的度数之和大于等于 6，图 G 是哈密顿图。



习题十三

2. 设 $G = (V, E)$ 是一个具有 $2k$ ($k > 0$) 个奇数度结点的连通图。证明: G 中必存在 k 条边不相重的简单道路 P_1, P_2, \dots, P_k , 使得 $E = E(P_1) \cup E(P_2) \cup \dots \cup E(P_k)$ 。

证明: 只要将这 $2k$ 个奇度点分成两个集合 $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, $V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$, 然后添加 k 条边 (v_i, u_i) , 将 G 图变换成欧拉图 G' 。

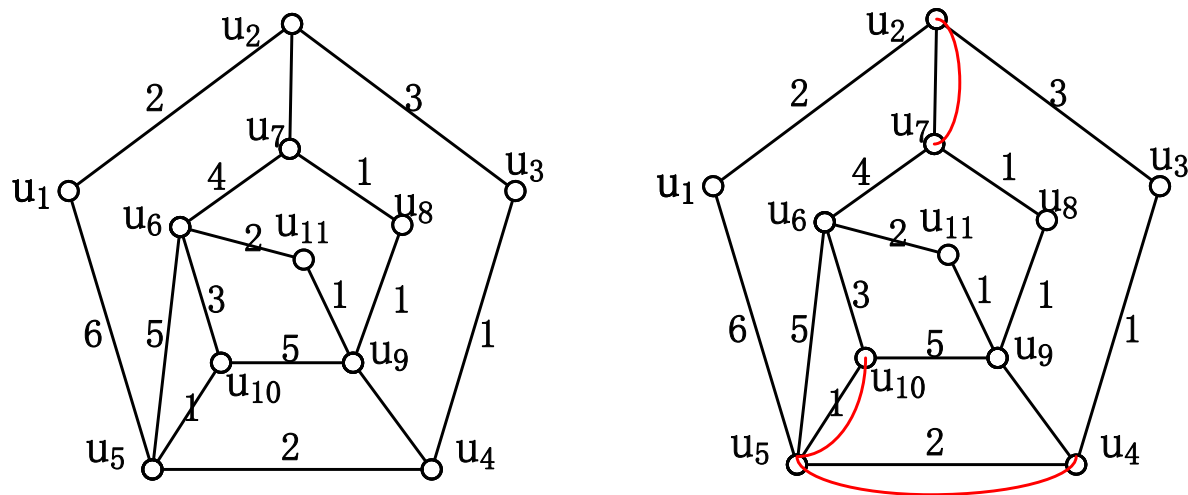
可得出 G' 的欧拉回路 C , 恰包含所有边一次。再将 C 中的添加的 k 条边删除, 得到 k 条简单道路, 这 k 段简单道路没有重复的边, 且包含了 G 中的全部边, 结论得证。

习题十三

5. 在图13-10中求中国邮递员问题的解。

解：图G中含有4个奇度结点： u_2, u_4, u_7, u_{10}

求任意两点间的最短路径为：（略）



选择两条起点和终点不同的最短道路：

$$P_1 = u_2 u_7, P_2 = u_4 u_5 u_{10}$$

可构造图 G' ，如图，则欧拉回路

$$C = u_1 u_2 u_3 u_4 u_9 u_8 u_7 u_2 u_7 u_6 u_{11} u_9 u_{10} u_6 u_5 u_{10} u_5 u_4 u_5 u_1 \circ$$



习题十三

13、今有 n 个人，已知他们中的任何二人合起来认识其余的 $n-2$ 个人。 证明：

1) 当 $n \geq 3$ 时，这 n 个人能排成一列、使得中间的任何人都认识两旁的人，而站在两端的人认识左边（或右边）的人。

2) 当 $n \geq 4$ 时，这 n 个人能排成一个圆圈，使得每个人都认识两旁的人。

证明：建立 n 阶简单无向图 $G = \langle V, E \rangle$,

$V = n$ 个人的集合,

$E = \{ (u, v) \mid u, v \in V \wedge u \neq v \wedge u \text{与} v \text{认识} \}$

那么 $\forall u, v \in V$, 均有 $d(u) + d(v) \geq (n-2)$



(1) 若 u, v 认识(相邻), 则

$$d(u) + d(v) \geq (n-2) + 2 = n.$$

(2) 若 u, v 不认识, 则对 $\forall w \in V - \{u, v\}$, w 必与 u 和 v 都认识。

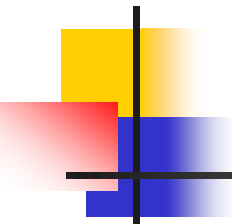
否则, 比如 u 和 w 不认识, 则 v, w 都不认识 u , 于是 v 和 w 合起来至多与其余的 $n-3$ 个人认识, 与已知条件不符。

因而 $d(u) + d(v) \geq 2(n-2)$ 。

① 当 $n \geq 3$ 时, $2(n-2) \geq n-1$, 因此无论第(1)或(2)种情形, 都有

$$d(u) + d(v) \geq n-1$$

由定理13.4知 G 中有哈密顿道路、道路上的人按在道路中的顺序排成一列, 即满足要求。



②当 $n \geq 4$ 时, $2(n-2) \geq n$, 因此无论第 (1) 或 (2) 种情形, 都有

$$d(u) + d(v) \geq n$$

由定理13.5知 G 中有哈密顿圈, 所有的人按圈中的顺序排成一个圆圈, 即满足要求。



课堂练习

设已知下列事实：a会讲英语；b会讲英语和汉语；c会讲英语、意大利语和俄语；d会讲日语和汉语；e会讲德语和意大利语；f会讲法语、日语和俄语；g会讲法语和德语。试问这7个人应该如何安排座位，才能使每个人都能和他身边的人交谈？

练习解答

设已知下列事实：a会讲英语；b会讲英语和汉语；c会讲英语、意大利语和俄语；d会讲日语和汉语；e会讲德语和意大利语；f会讲法语、日语和俄语；g会讲法语和德语。试问这7个人应该如何安排座位，才能使每个人都能和他身边的人交谈？

解： 设无向图 $G = \langle V, E \rangle$ ，其中 $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ，

$E = \{(u, v) | u, v \in V, \text{且} u, v \text{有共同语言}\}$ 。

如图所示，由题将7人排列围桌就坐，使得每个人能与两边人都能交谈，即要在图G中找出**哈密顿圈**。

由图可得 $abdfgeca$ 为一个H圈。

