四 川 大 学 试 卷

题目序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总计	评卷教师
各题分数												

概率统计(理工)参考答案

一 填空 (3×6=18)

1. 0.20736(或$\frac{648}{3125}$)　2. $F_X(\frac{y+1}{2})$　3. $\frac{11}{16}$(或0.6875)

4. 37　5. 6　6. $F(3,1)$

二 解答题 (82)

1.(14) (1) $P(Y=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=2,Y=0)$

$=P(X=0)P(Y=0|X=0)+P(X=2)P(Y=0|X=2)$

4分 $=\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})=\frac{5}{8}$

(2) $P(X\neq0|Y=0)=P(X=2|Y=0)=\frac{P(X=2,Y=0)}{P(Y=0)}$

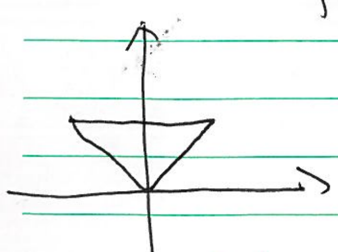
4分 $=\frac{1/8}{5/8}=\frac{1}{5}$

(3)

X\Y	0	2	4
0	$\frac{1}{2}$	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

6分

3.(18) (1) $f(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in G\\ 0 & 其他\end{cases}$



$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{1}1dy=1+x & x\in[-1,0)\\ \int_{x}^{1}1dy=1-x & x\in[0,1]\\ 0 & 其他\end{cases}$

6分

或 $f_X(x)=\begin{cases}1-|x| & x\in[-1,1]\\ 0 & 其他\end{cases}$

（装订线内请勿答题）

教务处制

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-y}^{y}1dx=2y & y\in[0,1]\\ 0 & 其他\end{cases}$

$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，故 X, Y 不独立

(2) $f_{X|Y}(x|\frac{1}{2})=\begin{cases}\frac{1}{2\times\frac{1}{2}}=1 & x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\\ 0\end{cases}$

$P(X\leq0|Y=\frac{1}{2})=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}1dx=\frac{1}{2}$

6分

$P(X\leq0|Y\leq\frac{1}{2})=\frac{P(X\leq0,Y\leq\frac{1}{2})}{P(Y\leq\frac{1}{2})}=\frac{1/8}{1/4}=\frac{1}{2}$

(3) $Z=X+Y$

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\begin{cases}\int_{z-1}^{\frac{z}{2}}1dx=1-\frac{z}{2} & z\in[0,2]\\ 0 & 其他\end{cases}$

6分

2.(12) (1) $Z=\lambda X+(1-\lambda)Y$

$E(Z)=\lambda E(X)+(1-\lambda)E(Y)=\lambda\mu_1+(1-\lambda)\mu_2$

$=(\mu_1-\mu_2)\lambda+\mu_2$

6分

$E(Z)_{max}=\begin{cases}\mu_1 & 当\ \mu_1-\mu_2\geq0\ 时，取\ \lambda=1\\ \mu_2 & 当\ \mu_1-\mu_2<0\ 时，取\ \lambda=0\end{cases}$

即：当 $\mu_1>\mu_2$，全部投到第一种

当 $\mu_1<\mu_2$，全部投到第二种

当 $\mu_1=\mu_2$，所有投资方案期望收益一样。

题目序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总计	评卷教师
各题分数												

（装订线内请勿答题）

概率统计（理工）参考答案

$=2$

(2) 记 $\mu_1=\mu_2=\mu$， $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$

$Z=\alpha X+(1-\alpha)Y$ $\quad E(Z)=\alpha E(X)+(1-\alpha)E(Y)$

$=\alpha\mu_1+(1-\alpha)\mu_2\equiv\mu$

即期望收益率与 α 无关.

风险可用方差衡量

$D(Z)=D(\alpha X)+D((1-\alpha)Y)=\alpha^2D(X)+(1-\alpha)^2D(Y)$

8分 $=\sigma^2[\alpha^2+(1-\alpha)^2]=\sigma^2(2\alpha^2-2\alpha+1)$

$=2\sigma^2[(\alpha-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}]$

当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时， $D(Z)$ 最小，即风险最小.

故最优方案为 $\alpha=\frac{1}{2}$，即各投一半（分散投资理论）

4.(12) (1) 记 X_i 为醉汉第 i 步的结果，则 X_i 满足

$X_i=\begin{cases}0.5 & 向北\\ -0.5 & 向南\end{cases}$ $\quad X_i\sim\begin{pmatrix}0.5 & -0.5\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

X 为1小时后的位置，1小时总共走了360步

则 $X=\sum_{i=1}^{360}X_i$， X_i 独立同分布， $E(X_i)=0$， $D(X_i)=\frac{1}{4}$

$E(X)=\sum_{i=1}^{360}E(X_i)=0$ 6分

$D(X)=\sum_{i=1}^{360}D(X_i)=90$

由中心极限定理 $X\overset{\sim}{\sim}N(0,90)$

$P(X>36)=1-P(X\le 36)=1-\Phi(\frac{36-0}{\sqrt{90}})\approx 1-\Phi(3.8)=0.0001$

(2) 若每步向北概率为 $\frac{2}{3}$，则

$X_i\sim\begin{pmatrix}0.5 & -0.5\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $\quad E(X_i)=\frac{1}{6}$ $\quad D(X_i)=\frac{2}{9}$

$X\overset{\sim}{\sim}N(60,80)$ 6分

$P(X>36)=1-P(X\le 36)=1-\Phi(\frac{36-60}{\sqrt{80}})\approx 1-\Phi(-2.68)$

$=\Phi(2.68)=0.9963$

注：解法2 记 Y 为醉汉1小时内向北走的步数

则 $X\ge 36 \iff 0.5Y-0.5(360-Y)\ge 36 \iff Y\ge 216$

(1) $Y\sim B(360,\frac{1}{2})\overset{\sim}{\sim}N(180,90)$

$P(X\ge 36)=P(Y\ge 216)=1-P(Y\le 216)=1-\Phi(\frac{216-180}{\sqrt{90}})=0.0001$

(2) $Y\sim B(360,\frac{2}{3})\overset{\sim}{\sim}N(240,80)$

$P(X>36)=P(Y>216)=1-P(Y\le 216)=1-\Phi(\frac{216-240}{\sqrt{80}})=0.9963$

5(14). (1) $f(x)=\begin{cases}3e^{-3(x-\theta)} & x\ge\theta\\ 0 & x<\theta\end{cases}$

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{\theta}^{+\infty}3xe^{-3(x-\theta)}dx$

4分 $\xlongequal{t=3(x-\theta)}\int_0^{+\infty}(\frac{1}{3}t+\theta)e^{-t}dt=\frac{1}{3}+\theta$

$\theta=E(X)-\frac{1}{3}$ $\quad \hat{\theta}_1=\bar{X}-\frac{1}{3}$

四 川 大 学 试 卷

题目序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总计	评卷教师
各题分数												

概率统计(理工)参考答案

=5 (2) $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} 3e^{-3(x_i-\theta)}$

$\ln L(\theta) = n\ln 3 + 3n\theta - 3\sum x_i$

4分

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = 3n > 0$，$L(\theta)$为$\theta$的单调增加函数

又 $\theta \le x_i \quad \forall i$ 故 $\theta \le \min\{x_i\}$

$\hat\theta_2 = \min\{x_i\}$

(3) $E(\hat\theta_1) = E(\bar X - \frac{1}{3}) = E(\bar X) - \frac{1}{3} = E(X) - \frac13 = \theta$

$\hat\theta_1$为θ的无偏估计.

$$F_{\hat\theta_2}(y) = 1-[1-F(y)]^n = \begin{cases} 1-e^{-3n(y-\theta)} & y\ge\theta \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $F(y)$为X的分布函数，$F(y)=\begin{cases}1-e^{-3(y-\theta)} & y\ge\theta \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

故 $f_{\hat\theta_2}(y) = \begin{cases} 3ne^{-3n(y-\theta)} & y\ge\theta \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ 6分

$E(\hat\theta_2) = \int_\theta^{+\infty} y\,3n e^{-3n(y-\theta)} d\theta$

$\underline{\underline{t=3n(y-\theta)}} \int_0^{+\infty} [\frac{1}{3n}t+\theta] e^{-t} dt = \frac{1}{3n}+\theta$

$E(\hat\theta_2) \ne \theta$，故 $\hat\theta_2$为有偏估计．偏差 $b(\hat\theta_2) = \frac{1}{3n}$

课程号 课序号 课程名称 任课教师
学 院 年级 学号 姓名

6. (12) (1) $X \sim N(\mu, 0.16^2)$ $\frac{\bar X-\mu}{0.16/\sqrt n} \sim N(0,1)$

由 $P\left(\left|\frac{\bar X-\mu}{0.16/\sqrt{10}}\right| < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$ $\bar x = 0.167$

即 $\left|\frac{\bar x-\mu}{0.16/\sqrt{10}}\right| < u_{0.975} = 1.96$

则 μ 的 95% 置信区间为 6分

$0.0678 < \mu < 0.2662$

(2) $H_0: \mu \ge \mu_0 = 0.27$

$H_1: \mu < \mu_0$

检验统计量为 $U = \frac{\bar X-\mu_0}{\sigma/\sqrt n}$

左侧检验拒绝域为 $U < u_\alpha = u_{0.05} = -1.645$

$U = \frac{\bar x-\mu_0}{\sigma/\sqrt n} = \frac{0.167-0.27}{0.16/\sqrt{10}} \approx -2.0357 < -1.645$

U 落入拒绝域，拒绝H_0，接受H_1，

认为处理后的平均含脂率比处理前明显(有)降低.

6分