§1.5 事件的独立性与贝努利概型

事件的独立性

由前面知识知，一般地有 $P(A|B)\neq P(A)$，但也有例外。这就是在 A 与 B 发生不相互影响，就有 $P(A|B)=P(A)$。由此，引出了两事件的相互独立性。

我们先看一个例子。

例 袋中有 a 只黑球，b 只白球。每次从中取出一球，取后放回。令 A = “第一次取出白球”， B = “第二次取出白球”，则

$$P(A)=\frac{b}{a+b},\quad P(AB)=\frac{b^2}{(a+b)^2},\quad P(\bar{A}B)=\frac{ab}{(a+b)^2}。$$

$$\because P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)=\frac{b^2}{(a+b)^2}+\frac{ab}{(a+b)^2}=\frac{b}{a+b},$$

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{[b/(a+b)]^2}{b/a+b}=\frac{b}{a+b}。$$

启发：由例 1可见， $P(B)=P(B|A)$ **。这表明，事件A 是否发生对事件 B 是否发生在概率上是没有影响的， 即事件 A 的发生与事件 B 的发生呈现出某种独立性。因为** $P(A)>0$ **且** $P(B|A)=P(B)$，**故有**

$$P(B)=P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}, \qquad P(AB)=P(B)P(A).$$

由此，我们引出事件独立性的概念：

定义1.4 设A,B是随机试验E的两个事件，若

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件A，B 相互独立.

性质:

1° 若$P(A)>0$,则A,B独立

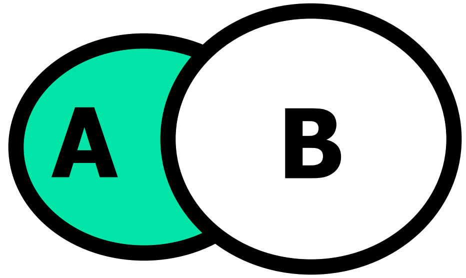
$$\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)$$

2° A,B独立

$\Rightarrow A$与$\overline{B}$、$\overline{A}$与$\overline{B}$、$\overline{A}$与B都独立。

证A与$\overline{B}$独立:

$$\because A\overline{B} = A - AB \quad 且\ AB \subset A$$



$$\therefore P(A\overline{B}) = P(A - AB)$$

$$= P(A) - P(AB)$$

$$\xlongequal{A,B\text{独立}} P(A) - P(A)P(B)$$

$$= P(A)[1 - P(B)]$$

$$= P(A)P(\overline{B}).$$

两两独立与相互独立

定义 设A_1，A_2，…，$A_n(n>=2)$是n个事件.

（1）如果A_i，A_j是其中任意两个事件，（$i\neq j$）满足

$P(A_iA_j)= P(A_i)P(A_j)$,则称这n个事件两两独立。

(2)若其中任意 $k(2\leq k\leq n)$ **个事件** $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}$ **满足**

$$P\left(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\right)=P\left(A_{i_1}\right)P\left(A_{i_2}\right)\cdots P\left(A_{i_k}\right),$$

则称这 n 个事件相互独立。

关于两两独立与相互独立的说明

1.在相互独立的条件中，第一、二行、…，最后分别有 $C_n^2, C_n^3, \cdots, C_n^n$ 个等式，因此共有 $C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n$ 个等式；而在两两独立的条件中共有 C_n^2 个等式。

2. 根据以上定义可以看到，若 n 个事件相互独立，则这 n 个事件必然两两独立。反之不然。

两两独立 $\overset{\Longleftarrow}{\not\Longrightarrow}$ 相互独立

3. 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个相互独立的随机事件，则其中的任意 $k(2 \le k \le n)$ 个事件 $A_{i_1}, \cdots, A_{i_j}, \overline{A_{i_{j+1}}}, \cdots, \overline{A_{i_k}}$ 也相互独立。其中 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的子排列。

关于“多个相互独立的事件中至少有一个发生”的概率的计算： 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i});$$ 特别地，若 $P(A_i) = p,$

$i = 1, 2, \cdots, n,$ 那么 $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}) = 1 - (1-p)^n。$$

注意：在实际应用中，对于事件的独立性，我们往往是根据实际意义而非定义来判断。

例1.22 敌机俯冲时，被一门高射机枪击中的概率为 0.05，现集中 40 门这样的高射机枪向敌机射击。求敌机被击中的概率。

解 设事件 A_i 表“第 $i(i=1,2,\cdots,40)$ 门高射机枪击中敌机”，B 表“敌机被击中”，则 $B=\bigcup\limits_{i=1}^{40}A_i$，由实际情况知 $A_1,A_2,\cdots,A_{40}$ 相互独立且

于是有所求概率为 $P(A_i)=0.05, i=1,2,\cdots,40$

$$P(A)=P\left(\bigcup_{i=1}^{40}A_i\right)=1-\prod_{i=11}^{40}P\left(\overline{A}_i\right)=1-(1-0.05)^{40}=0.8715。$$

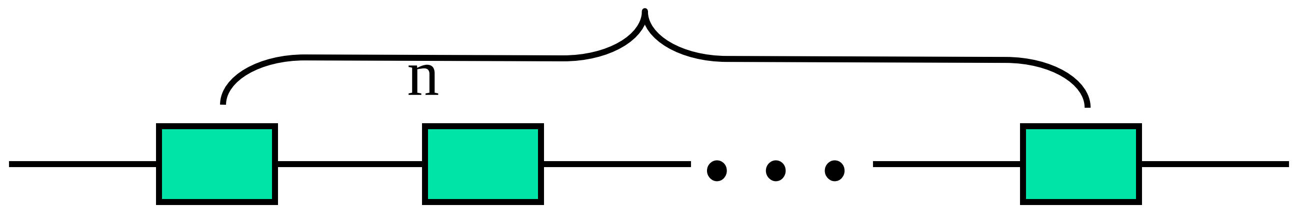
可靠性

一个系统由多个元件组成,系统能否正常工作依赖于每个元件正常工作的情况，**系统能正常工作的概率称为它的可靠性**。可靠性问题在航天航空、国防等领域内相当重要。下面，我们来看一下独立性在这一方面的应用。

在这里，我们总假定各元件能否正常工作相互独立。设一个系统由 n 个元件构成。事件 A_i 表示“第 i 个元件正常工作”且 $P(A_i)=p_i(i=1,2,\cdots,n)$ 则 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立。A 表“系统正常工作”。

由元件构成的系统，其基本连接方式有两种：**串联**、**并联**。下面，我们看看这两种连接方式下系统的可靠性。

串联系统



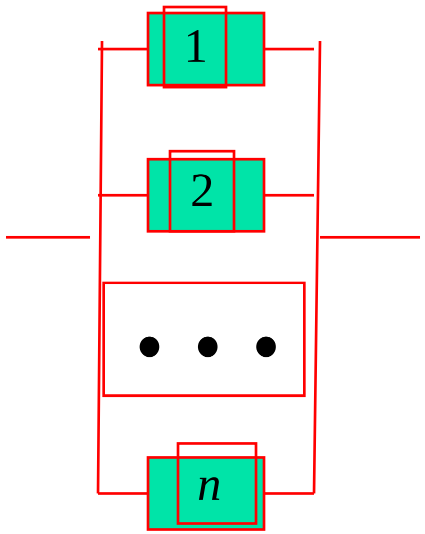
此时

$$A=\bigcap_{i=1}^{n} A_i \text{ 则 } P(A)=P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)=\prod_{i=1}^{n} P(A_i)=\prod_{i=1}^{n} p_i \text{。}$$

特别地 $p_i = p, \forall i = 1, 2, \cdots, n$

则 $P(A)=p^n$。

并联系统



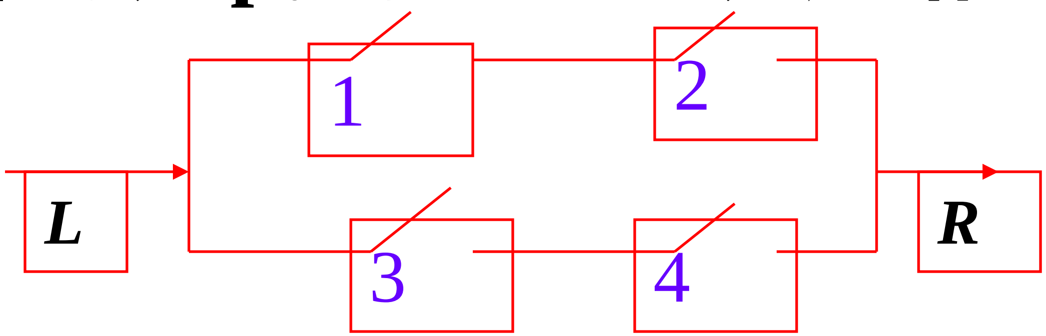
此时$A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，则

$$P(A)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=1-\prod_{i=1}^{n}P\left(\overline{A}_i\right)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)\text{。}$$

特别地$p_i=p,\forall i=1,2,\cdots,n$，则

$$P(A)=1-(1-p)^n\text{。}$$

例 设有电路如图，其中 1, 2, 3, 4 为4个开关。设各开关闭合与否相互独立，且每一个开关闭合的概率均为 p。求 L至 R 为通路的概率。



解： 设事件 A_i(i=1,2,3,4) 为“第 i 个开关闭合”，L 至 R 为通路这一事件可表示为：

$$A = A_1 A_2 \cdot A_3 A_4 \cdot$$

由和事件的加法公式及A$_1$，A$_2$，A$_3$，A$_4$的相互独立性，得到

$$P(A) = P(A_1A_2 \cup A_3A_4)$$

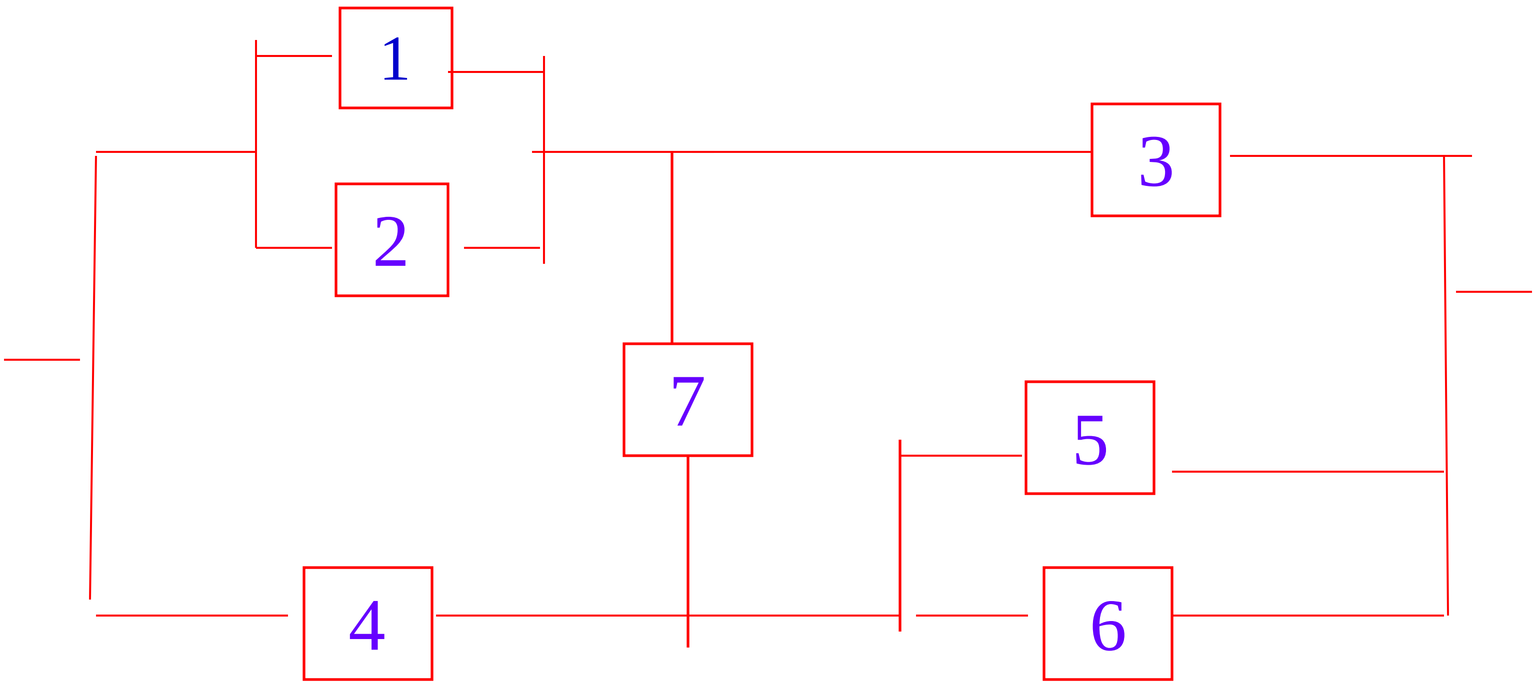
$$= P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4)$$

$$= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$= p^2 + p^2 - p^4$$

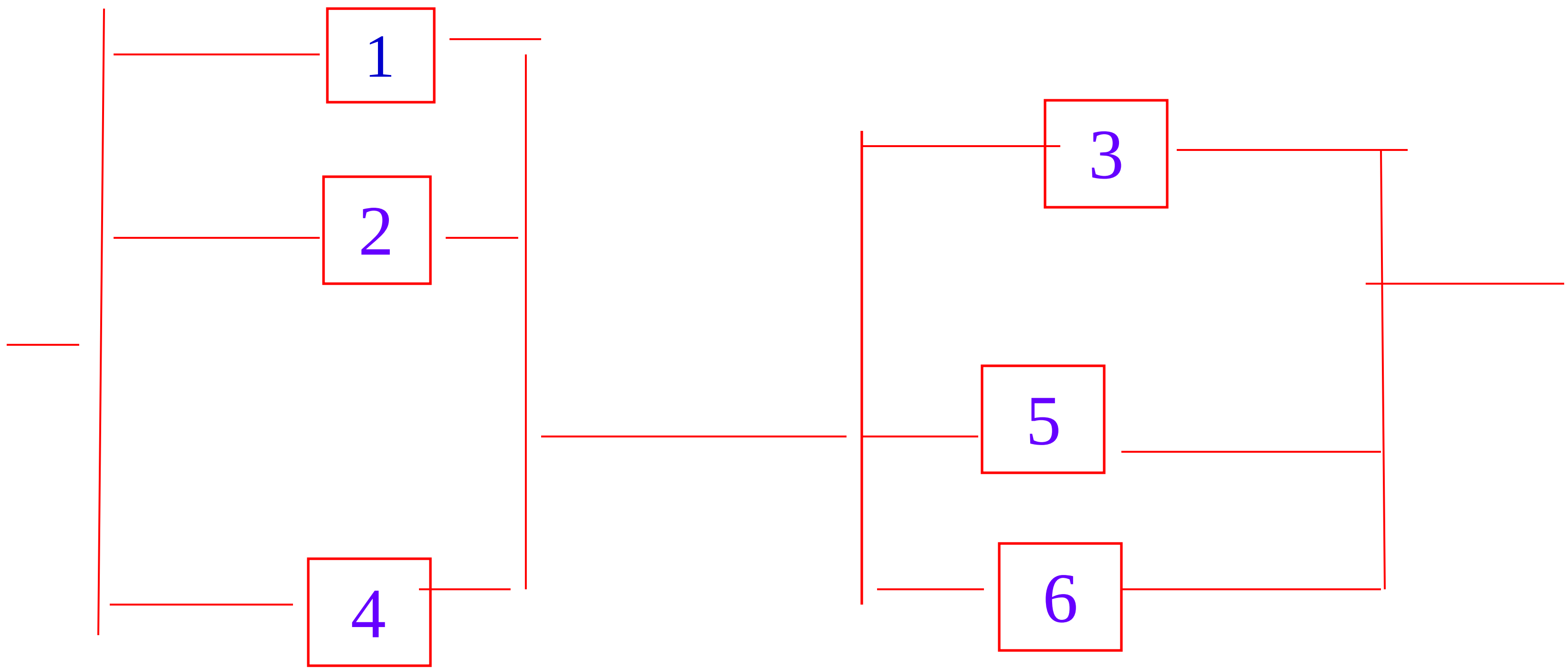
$$= 2p^2 - p^4。$$

例 **设有由7个元件组成的电路如图，每一个元件正常工作的概率均为 p，且每个元件是否正常工作相互独立，求该电路系统的可靠性。**



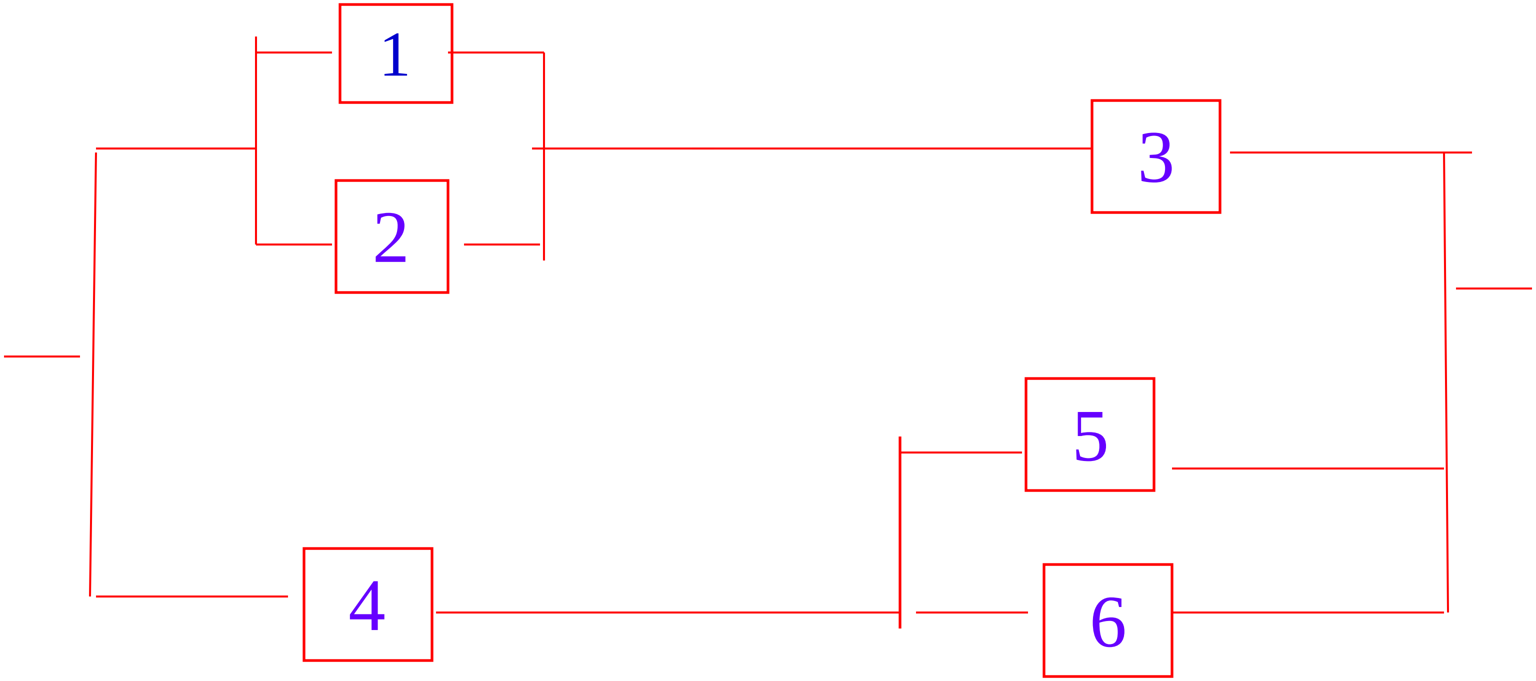
解 设B表示“系统正常工作”。

设A表示“第7号元件正常工作”,则$\{A,\bar{A}\}$是完备组。当A发生时，原系统转化为



当A发生条件下，系统的可靠性就是 $P(B|A)$

当A不正常工作时，原系统转化为



则A不发生，系统正常工作的概率：$P(B|\bar{A})$

利用全概率公式 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$

贝努利概型

将随机试验重复进行**n**次,若每次的结果互不影响(独立),每次试验结果只有两个:“成功”与“失败”，即$\bar{A}$与**A**,且满足**0<P(A)<1**，这样的试验叫**n**重贝努利试验。

定理1.3 **n**重贝努利试验中,用**X**表示事件**A**发生的次数，那么

$$P_n(k) @ P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, (k=0,1,\dots,n)$$

注: 由于$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$正好是二项式$(p+(1-p))^n$展开式中的第$k+1$项，因此称$P_n(k)$为二项概率，而随机变量X服从二项分布（X：B(n, p)），显然$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1.$

例1.25

从某大学到火车站途中有6个交通岗,假设在各个交通岗是否遇到红灯相互独立,并且遇到红灯的概率都是1/3.求汽车行驶途中至少遇到5次红灯的概率.

解:路口交通指示灯显示看作一次试验,试验结果只有"红","不红"两种结果。那么6个交通路口的指示灯灯显示就可以看作是6重贝努利试验。假设遇到红灯次数为X(X~B(6,1/3)),所求的概率为

$$P\{X \geq 5\} = P\{X = 5\} + P\{X = 6\}$$

$$= C_6^5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{13}{729}$$

二项分布的实际应用举例

保险公司预测在某个年龄段的投保人一年内死亡的概率是0.005 ， 现在10000 人参加保险，问未来一年中死亡人数不超过60人的概率。

分析：一个人在未来一年只可能有两种结果：死，不死。这可以看作是贝努利试验，**10000**参加保险的人死活情况就可以看作是**10000**重贝努利试验，设**X**表示死亡人数，则**X~B(10000,0.005).**所求概率为**P(X<=60).**

定理1.4 多项概率公式

n 重独立试验中,每次试验可能的结果是 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 且 $P(A_i) = p_i \in (0,1), \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

则 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 在n 次试验中各发生 r_1, $r_2, \dots, r_k$ 次的概率为

$$\frac{n!}{r_1!r_2!\dots r_k!} p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$$

其中$r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$