2019-2019 概率统计理工 A 卷参考解答

一、填空（3*6=18 分）

1. 2/9；　2. 1/2；　3. 0.6；　4. 0.3085；　5. 4/9；　6. $\pm\sqrt{2}/2$

二、解答题（82 分）

1. （12 分）记 A 为该生知道答案，B 为他答对该题，则

(1) $P(B)=P(A)P(B\mid A)\overset{2}{+}P(\bar{A})P(B\mid\bar{A})=0.4\times1+0.\overset{2}{6}\times0.25=0.55$ 2

(2) $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}\overset{2}{=}\dfrac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}=\dfrac{\overset{2}{0.4\times1}}{0.55}=\dfrac{8}{11}$ 2

2. （10 分）(1) 根据概率分布求和为 1，$9a+0.1=1\Rightarrow a=0.1$ 3

(2) Y 的概率分布为 $Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3 & 8\\ 0.3 & 0.2 & 0.3 & 0.2\end{pmatrix}$． 4

分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<-1\\ 0.3, & -1\le y<0\\ 0.5, & 0\le y<3\\ 0.8, & 3\le y<8\\ 1, & y\ge 8\end{cases}$ 3

3. （10 分）(1) “第二个学生拿到自己的帽子”等价于“第一个学生没有拿到第二个的帽子，然后第二个人拿到自己的帽子”，故概率为 $\dfrac{49}{50}\times\dfrac{1}{49}=\dfrac{1}{50}$ 4

(2) 记随机变量 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{个学生拿到自己的帽子}\\ 0, & \text{第}i\text{个学生没有拿到自己的帽子}\end{cases}$，则 $X=\sum_{i=1}^{50}X_i$ 2

$E(X_i)=P(X_i=1)=\dfrac{C_{49}^{i-1}}{C_{50}^{i-1}}\times\dfrac{1}{50-(i-1)}=\dfrac{1}{50}$， 2 $E(X)=\sum_{i=1}^{50}E(X_i)=1$ 2

4. （15 分）(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,y=\begin{cases}\int_x^1 3y\,\mathrm{d}\,y=\dfrac{3}{2}(1-x^2), & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ 2

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,x=\begin{cases}\int_0^y 3y\,\mathrm{d}\,x=3y^2, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ 2

$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，不独立 1

(2) 给定$y \in (0,1), f_{X|Y}(x \mid y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{3y}{3y^2} = \dfrac{1}{y}, 0 < x < y \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$ 2

$$P\left(X \geq \frac{1}{2} \middle| Y = \frac{3}{4}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x \mid \frac{3}{4}) \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{4}{3} \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$ 2

(3) $Z = Y - X, Z \in (0,1), \forall z \in (0,1)$， 2

$$F_Z(z) = P(Y - X \leq z) = 1 - \int_z^1 dy \int_0^{y-z} 3y dx = \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}z^3$$ 2

$$f_Z(z) = F_Z{}'(z) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}(1 - z^2), \ 0 < z < 1 \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$$ 2

5. (8分)(1) X_i的密度函数为$f_X(x) = \begin{cases} 1, \ 0 < x < 1 \\ 0，其它 \end{cases}$

X_i独立同分布$\Rightarrow g(X_i)$独立同分布 1

$$E(g(X_i)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx = \int_0^1 g(x) dx = I$$ 2

$E(g^2(X_i)) = \int_0^1 g^2(x) dx$存在，故$g(X_i)$方差存在

根据独立同分布的大数定律，随机变量序列$\{Y_n\}$依概率收敛到I

(2) Y_{100}为 100 个独立同分布的随机变量的平均，根据中心极限定理，Y_{100}近似服从正态分布，$I = \int_0^1 x^{1.5} dx = 0.4$， $E(g(X_i)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx = \int_0^1 x^{1.5} dx = 0.4$， 1

$$E(g^2(X_i)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x) f_X(x) dx = \int_0^1 x^3 dx = 0.25$$ 1

$$D(g(X_i)) = E(g^2(X_i)) - E^2(g(X_i)) = 0.25 - 0.4^2 = 0.09$$ 1

$$E(Y_{100}) = I = 0.4, D(Y_{100}) = D(g(X_i))/100 = 0.0009, Y_{100} \sim N(0.4, 0.0009)$$ 1

$$P(|Y_{100} - I| < 0.01) = \mathrm{P}(0.39 < Y_{100} < 0.41) = \Phi(\frac{0.41 - 0.4}{0.03}) - \Phi(\frac{0.39 - 0.4}{0.03})$$
$$= \Phi(1/3) - \Phi(-1/3) = 2\Phi(1/3) - 1 = 2 \times 0.6304\text{-}1\text{=}0.2608$$ 1

6. （15分）（1） $E(X)=\int_0^\theta x\frac{3x^2}{\theta^3}dx=\frac{3}{4}\theta\Rightarrow\theta=\frac{4}{3}E(X)\Rightarrow\hat{\theta}_1=\frac{4}{3}\bar{X}$ 2 2

(2) $L(\theta)=\frac{3x_1^2}{\theta^3}\frac{3x_2^2}{\theta^3}\cdots\frac{3x_n^2}{\theta^3},\ln L(\theta)=n\ln 3-3n\ln\theta+2\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ 2

$[\ln L(\theta)]'=-\frac{3n}{\theta}<0\Rightarrow L(\theta)$单调递减 2

$X_i\le\theta\Rightarrow\theta\ge\max\{X_i\}\Rightarrow\hat{\theta}_2=\max\{X_i\}$ 2

(3) $E(\hat{\theta}_1)=E(\frac{4}{3}\bar{X})=\frac{4}{3}E(X)=\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\theta=\theta$，故$\hat{\theta}_1$为无偏估计 2

X的分布函数$F(x)=\begin{cases}0,x<0\\ \frac{x^3}{\theta^3},0\le x\le\theta\\ 1,x>\theta\end{cases}$，$F_{\hat{\theta}_2}(x)=F^n(x)$

$f_{\hat{\theta}_2}(x)=nF^{n-1}(x)f(x)=\begin{cases}3n\frac{x^{3n-1}}{\theta^{3n}},0\le x\le\theta\\ 0,其它\end{cases}$ 1

$E(\hat{\theta}_2)=\int_0^\theta x(3n\frac{x^{3n-1}}{\theta^{3n}})\mathrm{d}x=\frac{3n}{3n+1}\theta\ne\theta$，故$\hat{\theta}_2$不是无偏估计 2

7. （12分） （1） $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1),1-\frac{\alpha}{2}=0.975,t_{0.975}(24)=2.0639$ 2

$95\%CI:(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{0.975}(24),\ \bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{0.975}(24))=(7.69,8.11)$ 2

(2) $H_0:\mu\ge\mu_0=8,H_1:\mu<\mu_0$， 2

$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$， 在原假设下，$P(T<t_{0.05}(24))\le 0.05$， 2

$t_{0.05}(24)=-t_{0.95}(24)=-1.7109$，故拒绝域为： $T<-1.17109$ 2

代入数据得$T=\frac{7.9-8}{0.5/\sqrt{25}}=-1>-1.7109$， 2

没有落入拒绝域，故不能拒绝原假设，即不能认为这批弹壳直径明显低于标准值