四川大学半期考试试题（闭卷）

（2016-2017 学年第 2 学期）

课程号：201080030　　课序号　课程名称：概率统计（理工）　　任课教师：　　成绩：

适用专业年级：　　　学生人数：　印题份数：　　学号：　　　　　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

一、　填空题（每空 3 分，共计 18 分）

1. 设两个相互独立的事件 ***A*** 和 ***B*** 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，***A*** 发生 ***B*** 不发生的概率与 ***B*** 发生 ***A*** 不发生的概率相等，则 $P(A)=$__________

2. 设 ***A***，***B*** 为两个随机事件，且已知 $P(\bar{A})=0.3, P(B)=0.4, P(A\bar{B})=0.5,$ 则 $P(B|(A\cup\bar{B}))=$__________

3. 某人向同一目标独立重复射击，每次命中目标的概率为 $p(0<p<1)$,则此人第四次射击恰好第二次命中目标的概率为__________

4. 连续型随机变量 ***X*** 的分布函数为 $F(x)$,则 $Y=1-2X$ 的分布函数为__________

5. 设 ***X***，***Y*** 为两个随机变量，且 $E(X)=2, E(Y)=4, D(X)=4, D(Y)=9,$ 相关系数 $R(X,Y)=-0.5,$ 则 $E(3X^2-2XY+Y^2-3)$ ＝ __________，$D(3X-Y+5)$ ＝ __________

二、　解答题（共 82 分）

1．(12 分)三个士兵独立的向某架进犯的敌机射击，每个士兵击中敌机的概率均为 0.4。若只有一个人击中敌机，飞机被击落的概率为 0.3；若两人击中，则飞机被击落的概率为 0.6；若三人都击中，则飞机一定被击落。请回答下列问题：

（1）飞机被击落的概率；

（2）若飞机被击落，但有一人未能击中的概率.

2．（10分） 随机变量 X 服从以4为参数的指数分布：$Y=4-4e^{-4X}$， 求 Y 的分布函数。

3．（18 分）盒子中有 3 个红球、4 个绿球和 5 个白球，从盒子中无放回的摸球两次(每次摸出一球)，记 X 为摸出的红球数，Y 为摸出的绿球数。

（1）请计算（X，Y）的联合概率分布；

（2）请计算 X 的边缘分布函数；

（3）请计算在 Y=0 的条件下 X 的概率分布。

4．（20 分）设随机变量（X, Y）的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y\le 1\\ 0, & elsewhere\end{cases}$$

请回答下列问题：

(1) 分别求 X，Y 的边缘密度函数；

(2) 判断 X，Y 是否独立并说明理由；

(3) 求条件密度 $f_{Y|X}(y\,|\,x)$；

(4) 求 $P\left(Y\ge\frac{3}{4}\,|\,X=\frac{1}{2}\right)$ 和 $P\left(Y\ge\frac{3}{4}\,|\,X\ge\frac{1}{2}\right)$。

5．（12 分）用两个元件构成系统，已知每个元件独立工作且寿命均服从以 2 为参数的指数分布。现考虑备用的方式构成系统（即其中一个先使用，失效后另外一个再投入使用)，用 Z 表示系统的使用寿命，请计算 Z 的密度函数和 $P(Z\ge4)$。(结果保留指数形式）

6．（10 分）一只猴子在键盘上随机的敲击 T、C、G、A 四个字母，总共敲了 515 次，于是屏幕上出现了一个长度为 515 的字符串。

（1）请计算第 2,3,4,5 四个位置刚好构成“TATA”的概率；

(2)请计算字符串中“TATA”出现的期望次数(注：重叠情况按重数算，如“TATATA”算出现两次)。

四川大学半期考试试题（闭卷）

（2016-2017 学年第 2 学期）

课程号：201080030　　课序号　课程名称：概率统计（理工）　任课教师：　成绩：

适用专业年级：　　学生人数：　印题份数：　学号：　　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

一、　填空题（每空 3 分，共计 18 分）

1. 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$________

2. 设 A，B 为两个随机事件，且已知 $P(\bar{A})=0.3, P(B)=0.4, P(A\bar{B})=0.5$，则 $P(B|(A\cup\bar{B}))=$________

3. 某人向同一目标独立重复射击，每次命中目标的概率为 $p(0<p<1)$，则此人第四次射击恰好第二次命中目标的概率为________

4. 连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $Y=1-2X$ 的分布函数为________

5. 设 X，Y 为两个随机变量，且 $E(X)=2, E(Y)=4, D(X)=4, D(Y)=9$，相关系数 $R(X,Y)=-0.5$，则 $E(3X^2-2XY+Y^2-3)$ = ________，$D(3X-Y+5)$ = ________

二、　解答题（共 82 分）

1.（12 分）三个士兵独立的向某架进犯的敌机射击，每个士兵击中敌机的概率均为 0.4。若只有一个人击中敌机，飞机被击落的概率为 0.3；若两人击中，则飞机被击落的概率为 0.6；若三人都击中，则飞机一定被击落。请回答下列问题：

（1）飞机被击落的概率；

（2）若飞机被击落，但有一人未能击中的概率.

2.（10分）随机变量 X 服从以4为参数的指数分布：$Y=4-4e^{-4X}$，求 Y 的分布函数。

3.（18分）盒子中有 3 个红球、4 个绿球和 5 个白球，从盒子中无放回的摸球两次(每次摸出一球)，记 X 为摸出的红球数，Y 为摸出的绿球数。

（1）请计算（X, Y）的联合概率分布；

（2）请计算 X 的边缘分布函数；

（3）请计算在 Y=0 的条件下 X 的概率分布。

4.（20分）设随机变量（X, Y）的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y\le 1\\ 0, & elsewhere\end{cases}$$

请回答下列问题：

(1) 分别求 X, Y 的边缘密度函数；

(2) 判断 X, Y 是否独立并说明理由；

(3) 求条件密度 $f_{Y|X}(y|x)$；

(4) 求 $P\left(Y\ge\frac{3}{4}|X=\frac{1}{2}\right)$ 和 $P\left(Y\ge\frac{3}{4}|X\ge\frac{1}{2}\right)$。

5.（12分）用两个元件构成系统，已知每个元件独立工作且寿命均服从以 2 为参数的指数分布。现考虑备用的方式构成系统（即其中一个先使用，失效后另外一个再投入使用），用 Z 表示系统的使用寿命，请计算 Z 的密度函数和 $P(Z\ge 4)$。（结果保留指数形式）

6.（10分）一只猴子在键盘上随机的敲击 T、C、G、A 四个字母，总共敲了 515 次，于是屏幕上出现了一个长度为 515 的字符串。

（1）请计算第 2, 3, 4, 5 四个位置刚好构成“TATA”的概率；

（2）请计算字符串中“TATA”出现的期望次数（注：重叠情况按重数算，如“TATATA”算出现两次）。

四川大学 2017 年春概率统计半期考试答案

一、 填空题：

1. 由题知 $\mathrm{P}(\bar{A}\bar{B})=\mathrm{P}(\bar{A})\mathrm{P}(\bar{B})=\dfrac{1}{9}$ (1)

$\mathrm{P}(A\bar{B})=\mathrm{P}(B\bar{A})\Rightarrow \mathrm{P}(A\bar{B})+\mathrm{P}(\bar{A}\bar{B})=\mathrm{P}(B\bar{A})+\mathrm{P}(\bar{A}\bar{B})\Rightarrow \mathrm{P}(\bar{B})=\mathrm{P}(\bar{A})$ (2)

联立(1)(2)两式可得 $\mathrm{P}(\bar{A})=\dfrac{1}{3}$ ，故 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{3}$.

2. $\mathrm{P}(\bar{A})=0.3,\mathrm{P}(B)=0.4,\mathrm{P}(A\bar{B})=0.5\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\bar{B})=0.2\\ \mathrm{P}(A\cup\bar{B})=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(\bar{B})-\mathrm{P}(A\bar{B})=0.8\end{cases}$

$$\Rightarrow \mathrm{P}\left(B\middle|\left(A\cup\bar{B}\right)\right)=\frac{\mathrm{P}\left(B\left(A\cup\bar{B}\right)\right)}{\mathrm{P}\left(A\cup\bar{B}\right)}=\frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}\left(A\cup\bar{B}\right)}=\frac{0.2}{0.8}=\frac{1}{4}.$$

3. $\mathrm{C}_3^1p^1(1-p)^2\times p=3p^2(1-p)^2$.

4. $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(1-2X\le y)$

$$=P\left(X\ge\frac{1-y}{2}\right)=1-P\left(X<\frac{1-y}{2}\right)=1-F\left(\frac{1-y}{2}\right),\quad y\in(-\infty,+\infty).$$

5. $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=4+2^2=8$,

$E(Y^2)=D(Y)+[E(Y)]^2=9+4^2=25$,

$Cov(X,Y)=R(X,Y)\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=-0.5\times\sqrt{4}\sqrt{9}=-3$,

$E(XY)=Cov(X,Y)+E(X)E(Y)=-3+2\times4=5$,

$E(3X^2-2XY+Y^2-3)=3E(X^2)-2E(XY)+E(Y^2)-3$

$=3\times8-2\times5+25-3=36$;

$D(3X-Y+5)=9D(X)+D(Y)-6Cov(X,Y)=9\times4+9-6\times(-3)=63$.

二、 解答题：

1. 设 A_i 表事件“飞机被 i 人击中”，$i=0,\ 1,\ 2,\ 3$ ，则 A_0，A_1，A_2，A_3 为一完备事件组，且 $P(A_i)=C_3^i0.4^i0.6^{3-i},i=0,\ 1,\ 2,\ 3.$ 设 B 表事件“飞机被

击落”，由题知

$\mathrm{P}(B|A_0)=0,\ \mathrm{P}(B|A_1)=0.3,\ \mathrm{P}(B|A_2)=0.6,\ \mathrm{P}(B|A_3)=1.$

(1) 由全概率公式有

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)$$

$$=C_3^0 0.4^0 0.6^3\times 0+C_3^1 0.4^1 0.6^2\times 0.3+C_3^2 0.4^2 0.6^1\times 0.6+C_3^3 0.4^3 0.6^0\times 1$$

$$=0.3664;$$

(2) 由贝叶斯公式有

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{C_3^2 0.4^2 0.6^1\times 0.6}{0.3664}=0.4716.$$

2. 显然，X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-4x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，$R(Y)=(0,4)$，

所以当 $y\in(0,4)$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(4-4e^{-4X}\le y)=P\left(X\le -\frac{1}{4}\ln\frac{4-y}{4}\right)=F_X\left(-\frac{1}{4}\ln\frac{4-y}{4}\right)$$

$$=1-e^{-4\left(-\frac{1}{4}\ln\frac{4-y}{4}\right)}=\frac{y}{4},$$

从而 Y 的分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ y/4, & y\in(0,4),\\ 1, & y\ge 4.\end{cases}$

3. (1)

$X\setminus Y$	0	1	2
0	$\frac{C_5^2}{C_{12}^2}$	$\frac{C_4^1C_5^1}{C_{12}^2}$	$\frac{C_4^2}{C_{12}^2}$
1	$\frac{C_3^1C_5^1}{C_{12}^2}$	$\frac{C_3^1C_4^1}{C_{12}^2}$	0
2	$\frac{C_3^2}{C_{12}^2}$	0	0

，即

$X\setminus Y$	0	1	2
0	$\frac{5}{33}$	$\frac{10}{33}$	$\frac{1}{11}$
1	$\frac{5}{22}$	$\frac{2}{11}$	0
2	$\frac{1}{22}$	0	0

(2) $X \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 6/11 & 9/22 & 1/22 \end{bmatrix}$,

从而 X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 6/11, & 0\le x<1 \\ 21/22, & 1\le x<2 \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}$

(3) $X|Y=0 \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5/14 & 15/28 & 3/28 \end{bmatrix}$

4. (1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} \int_x^1 8xydy=4x(1-x^2), & x\in(0,1) \\ 0, & x\notin(0,1) \end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} \int_0^y 8xydx=4y^3, & y\in(0,1) \\ 0, & y\notin(0,1) \end{cases}$$

(2) 显然， $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以，X 与 Y 不相互独立；

(3) 当 $x\in(0,1)$ 时， $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases} \dfrac{8xy}{4x(1-x^2)}=\dfrac{2y}{1-x^2}, & y\in(x,1) \\ 0, & y\notin(x,1) \end{cases}$；

(4) 由(3)知 $f_{Y|X}(y|1/2)=\begin{cases} \dfrac{8y}{3}, & y\in(1/2,1) \\ 0, & y\notin(1/2,1) \end{cases}$，故

$$P\left(Y\ge\frac{3}{4}\middle|X=\frac{1}{2}\right)=\int_{3/4}^{+\infty} f_{Y|X}(y|1/2)dy=\int_{3/4}^{1}\frac{8y}{3}dy=\frac{7}{12};$$

$$P\left(Y\ge\frac{3}{4}\middle|X\ge\frac{1}{2}\right)=\frac{P\left(X\ge\frac{1}{2},Y\ge\frac{3}{4}\right)}{P\left(X\ge\frac{1}{2}\right)}=\frac{\int_{3/4}^{1}dy\int_{1/2}^{y}8xydx}{\int_{1/2}^{1}4x(1-x^2)dx}=\frac{\frac{119}{256}}{\frac{9}{16}}=\frac{119}{144}.$$

5. 设两个元件的寿命分别为 X,Y，由题知， X,Y 独立同分布于 $E(2)$，则备用系统的寿命 $Z=X+Y$ 密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_0^z 2e^{-2x}2e^{-2(z-x)}dx=4ze^{-2z}, & z>0 \\ 0, & z\le 0 \end{cases},$$

$$P(Z \geq 4) = \int_4^{+\infty} f_Z(z)dz = \int_4^{+\infty} 4ze^{-2z}dz = 9e^{-8}.,$$

6. (1) $p = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$;

(2) 对任意的 $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 512$，令

$$X_i = \begin{cases} 1, & 第i到第i+3个位置为\text{"TATA"} \\ 0, & 第i到第i+3个位置不为\text{"TATA"} \end{cases}$$

则 $X_i \sim B(1,1/256)$，$E(X_i) \sim 1/256$.

记 X 为字符串“TATA”出现的次数，则 $X = \sum_{i=1}^{512} X_i$，从而有

$$E(X) = \sum_{i=1}^{512} E(X_i) = 512 \times \frac{1}{256} = 2.$$