习题课4 图的基本概念

主 讲　林 兰

2022 秋季

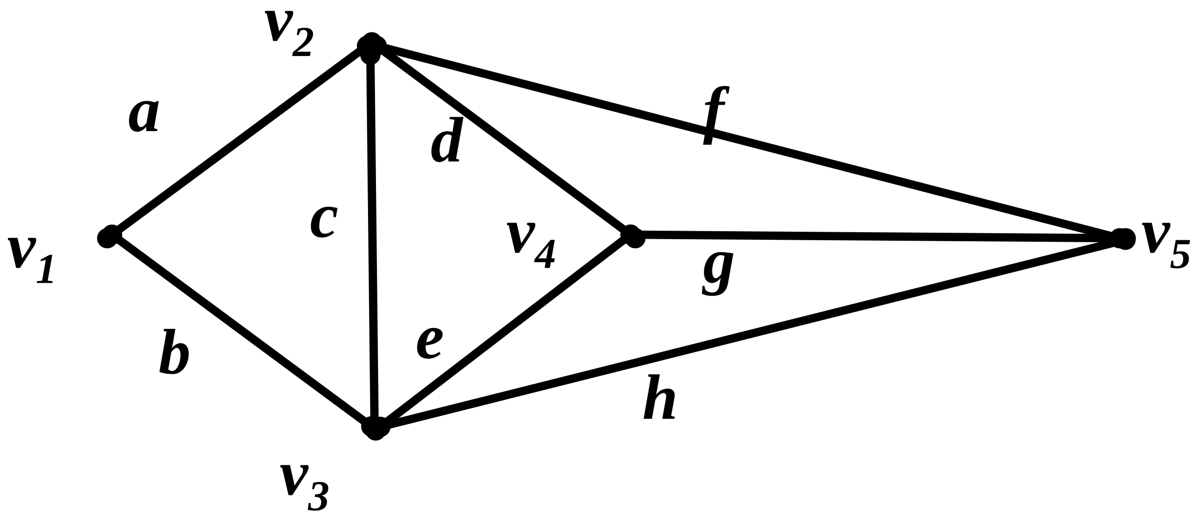
基本要求(第十章)

1. 理解与图的定义有关的诸多概念，以及它们之间的相互关系
2. 深刻理解握手定理及其推论的内容，并能熟练地应用它们
3. 深刻理解简单图、完全图、正则图、子图、补图、二部图、图同构等概念及其它们的性质和相互关系，并能熟练地应用它们
4. 深刻理解道路、简单道路、基本道路与回路、简单回路、基本回路（圈）的定义，掌握道路与回路的各种表示方法
5. 深刻理解无向图的连通性，连通分支等概念

5. 深刻理解无向图的点割集和边割集、点连通度、边连通度等概念及其之间的关系，并能熟练地求出给定的较为简单的图的点割集和边割集、点连通度与边连通度
6. 深刻理解有向图连通性的概念及其分类，掌握判断有向连通图类型的方法
7. 深刻理解有向图的邻接矩阵、可达矩阵的基本概念
8. 熟练掌握用有向图的邻接矩阵及各次幂求图中通路与回路数的方法
9. 熟练掌握用有向图的邻接矩阵及Warshall算法求有向图的所有强分图的方法
10. 了解关联矩阵的基本概念及其基本性质

例1

- 求出下图G中的全部基本点割集和基本边割集.



解： $\{v_2, \ v_3\}$是个基本点割集，而G的点割集必须含有点v_2和v_3，因为它们中每一个都与图中除其自身外的各顶点邻接. 故$\{v_2, \ v_3\}$是该图唯一的基本点割集.

每一个基本边割集把连通图分成恰好2个连通分支，因而导出图的顶点集的一个分成两组的划分(同一个连通分支中的顶点组成一个划分块)。

本题中，顶点集V是个5元集，正整数5分成两个数的划分有1 + 4和2 + 3。V的“1 + 4”的划分有$C^1_5 = 5$个。

如下表所列，表中还列出了相应的边割集:

边割集	顶点集V的划分
$\{a, b\}$	$\{\{v_1\}, \{v_2, v_3, v_4, v_5\}\}$
$\{a, c, d, f\}$	$\{\{v_2\}, \{v_1, v_3, v_4, v_5\}\}$
$\{b, c, e, h\}$	$\{\{v_3\}, \{v_1, v_2, v_3, v_5\}\}$
$\{d, e, g\}$	$\{\{v_4\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}\}$
$\{f, g, h\}$	$\{\{v_5\}, \{v_1, v_3, v_3, v_4\}\}$

V 的“2 + 3”的划分有C^2_5 = 10个，其中7个可以由基本边割集导出，如下表所示：

基本边割集	顶点集 V的划分
$\{b, c, d, f\}$	$\{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4, v_5\}\}$
$\{a, c, e, h\}$	$\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4, v_5\}\}$
$\{a, c, e, f, g\}$	$\{\{v_1, v_3, v_5\}, \{v_2, v_4\}\}$
$\{a, c, d, g, h\}$	$\{\{v_1, v_3, v_4\}, \{v_2, v_5\}\}$
$\{b, c, d, g, h\}$	$\{\{v_1, v_2, v_5\}, \{v_3, v_4\}\}$
$\{b, c, e, f, g\}$	$\{\{v_1, v_2, v_4\}, \{v_3, v_5\}\}$
$\{d, e, f, h\}$	$\{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_4, v_5\}\}$

而V 的以下3个“2 + 3”的划分不能由基本边割集导出：

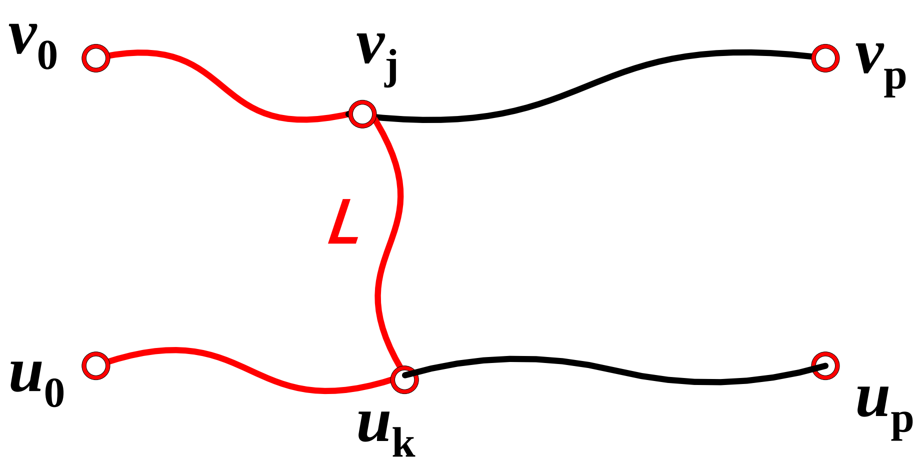
$\{\{v_2, v_3\}, \{v_1, v_4, v_5\}\}$，$\{\{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3, v_5\}\}$，$\{\{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3, v_4\}\}$）。

所以该图的基本边割集有12个。

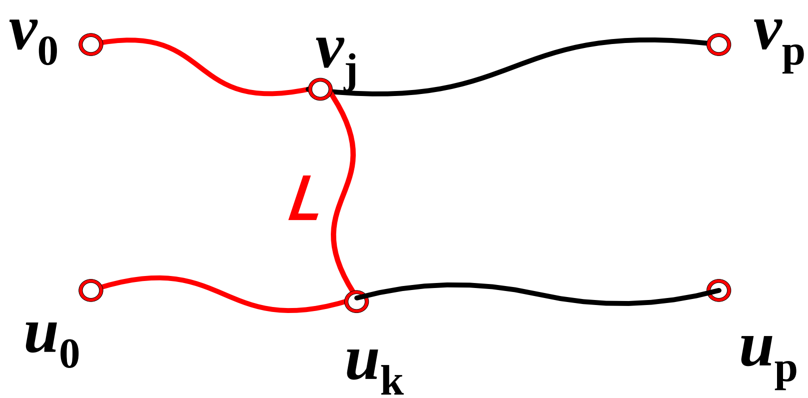
例2

- 证明：在一个连通图中，任意两条最长的基本道路至少有一个公共顶点。

证：（反证法）



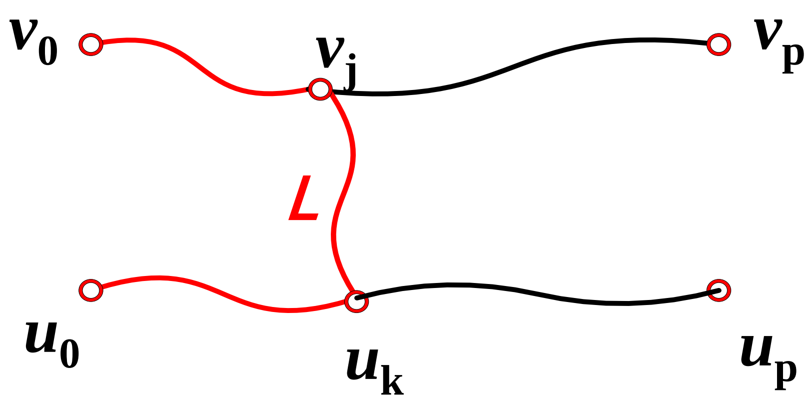
例2（续1）



设 $\Gamma_1=v_0v_1\cdots v_p$和 $\Gamma_2=u_0u_1\cdots u_p$是$G$的两条最长的基本道路(长为$p$)，且无公共顶点。

因为G是连通图. v_0与u_0之间有道路L. 设v_j是从v_0出发沿L前进的最后一个和Γ_1相交的顶点. 而u_k是道路L第一次与Γ_2相交的结点。当$j \geqslant p/2$(这时在基本道路Γ_1上$v_0\cdots v_j$的一段不比$v_j\cdots v_p$的一段短)且$k \geqslant p/2$时(这时在基本道路Γ_2上$u_0\cdots v_k$的一段不比$u_k\cdots u_p$的一段短)。

例2（续2）



构造一条新的路Γ′，它从v_0出发，沿Γ$_1$到v_j，然后沿L从v_j到u_k，最后沿Γ$_2$从u_k到u_0，该道路是一条基本道路（结点不重复，如图中红粗线所示），其长度≥j+1+k≥p+1>p，这与L_1，L_2是最长的基本道路相矛盾，所以Γ$_1$和Γ$_2$有公共顶点.

对 j ，k的其他情况讨论类似(分别在Γ$_1$和Γ$_2$上取分别被顶点v_j和u_k截出的两段路径中较长的一段，加上L上被顶点v_j和u_k截出的一段，构成一条比Γ$_1$和Γ$_2$都较长的基本道路Γ′)。

例3

思路：度数序列不同的图是不同构的。

设G=(5，3)是简单无向图，试画出G的所有非同构的图。

解： 已知阶数n=5, 边数m=3

由握手定理：$\sum d(v_i) = 2m = 6$；

3条边的简单图，最大度数为3，最小度数为0，

则 $\forall v_i$，$0 \le d(v_i) \le 3$ ；

因此，将6个度数分到5个结点上，且奇数度结点个数为偶数个。

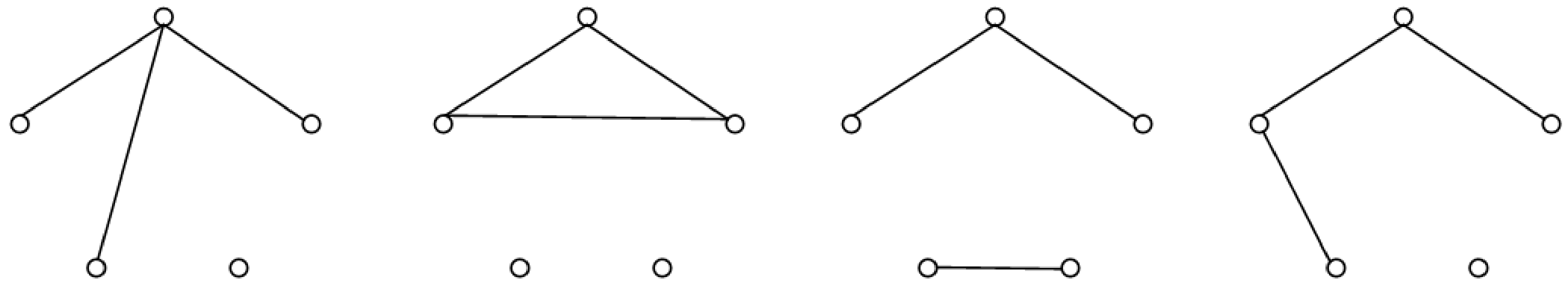
例3（续）

这样的整数序列有只以下4个满足要求：

(3, 1, 1, 1, 0)，(2, 2, 2, 0, 0)，

(2, 2, 1, 1, 0)， (2, 1, 1, 1, 1)

全部非同构的图：



例4

证明：任意一场聚会，至少有两个人与相同数目的人握过手。

分析：即证明非平凡的简单无向图必有两个顶点的度相等。

证：因为n个结点的简单无向图G中，结点的度数只可能是0，1，2…n-1这n个数，又因为如果有结点的度数为0，那么就不可能有结点的度为n-1，反之也然。

所以n个结点，最多有n-1种度数，由鸽巢原理知，其中必有至少两个结点的度数相同。

例5

证明：空间中不可能存在有奇数个面且每个面都有奇数条棱的多面体。

证：（反证法）

若存在某个具有奇数个面，且每个面均有奇数条棱的多面体 V。不妨设 V 有 r(r 为奇数) 个面，设为 R_1，R_2，…，R_r，s_1，s_2，…，s_r 分别为它们的棱数，均为奇数。作无向图 G 如下：在 V 的每个面中放一个顶点 v_i，$i = 1$，2，…，r。且两个面 R_i 与 R_j 有公共棱就连边。若存在这样的无向图 G，则 $d(v_i)$ 均为奇数 s_i。

由握手定理：

$$\sum_{i=1}^{r} d(v_i) = \sum_{i=1}^{r} s_i = 2m(m\text{为边数})$$

但因r，$s_i(i=1, 2, \cdots, n)$均为奇数，上面等式不可能成立。故不存在这样的无向图G，从而也不存在满足要求的多面体。

例6

若$G \cong \overline{G}$，称G是自补图。确定一个图为自补图的最低条件；画出一个自补图来。

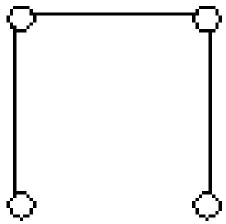
解： 设G为(n,m)图，$\overline{G}$为(n,m')图，

根据补图的定义，至少应该满足 $m+m'=n(n-1)/2$ ①

根据同构的定义，至少应该满足 $m=m'$ ②

①②联立求解得：$m=\frac{1}{4}n(n-1)$， m为正整数，即一个图为自补图，最低条件为结点数$n=4k$或$n=4k+1(k\in Z^{+})$。

例如$n=4$，4阶非同构自补图：



习题讲解(习题十)

6、 证明简单二部图$G(n, m)$满足$m \le \frac{n^2}{4}$ 。

证 ：令V_1， V_2是G 的两个互补顶点集合，

$|V_1| = n_1$，$|V_2| = n_2$ ，$n_1+n_2 = n$

G 的边数m 小于等于完全二部图K_{n_1,n_2}的边数$n_1 n_2$ ，

而

$$m \le n_1 n_2 = \frac{1}{4}\left[(n_1+n_2)^2-(n_1-n_2)^2\right]$$

$$\le \frac{1}{4}\left[(n_1+n_2)^2\right] = \frac{1}{4}n^2$$

习题讲解(习题十)

15、若u与v是G中仅有的两个奇数度结点，证明u和v必是连通的。

证：（反证法）设v与u不连通，那么它们必然分布于两个连通分图中，不妨设v与u分别属于V_1，V_2二个连通分图中。

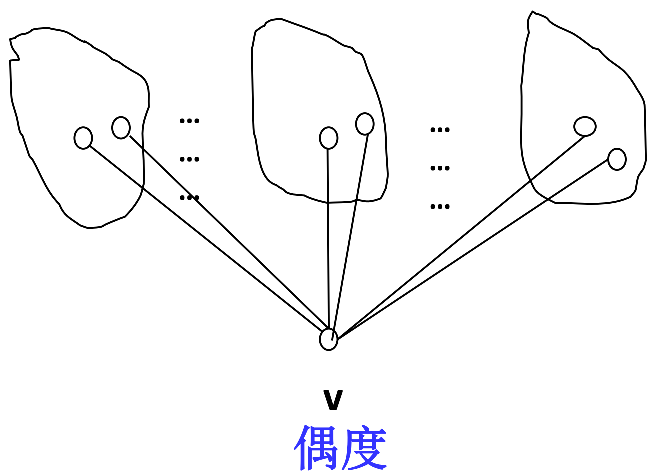
∵ 又因为v与u是G中仅有的二个奇数度结点。

∴v与u即是V_1与V_2中仅有的一个奇数度结点，与握手定理的推论相矛盾，故v与u必连通。

习题讲解(习题十)

19、设$G=(V, E)$是点度均为偶数的连通图。证明：对任何$v \in V$，$\omega(G-v) \le \frac{1}{2}\deg(v)$。

证：G-v产生d(v)个奇数度点，又因为每个连通分支中奇数度点的个数是偶数，即G-v的连通分支中必须原有偶数条边与v关联，最少有两条边和v相连，所以总连通分支数小于等于d(v)/2。



习题讲解(习题十)

16、G是二部图当且仅当G的回路都是偶长回路。

证明（必要性）设G是具有互补结点子集X和Y的二部图。

C是G中任一回路C:(v_0, v_1, v_2, …, v_k, v_0)，不妨设 $v_0 \in X$，则 $v_0, v_2, v_4 \ldots \in X$， $v_1, v_3, v_5 \ldots \in Y$，k必为奇数，不然，不存在边($v_k$， v_0)。

C中共有k+1条边，故C是偶数长度的回路。

（充分性）设G是连通图，否则对G的每个连通分图进行证明。设$G = \langle V, E \rangle$只含有偶数长度的回路，定义互补结点子集X和Y如下：

任取一个顶点$v_0 \in X$，取

$\mathrm{X} = \{\mathrm{v}|$从$\mathrm{v}_0$到v的距离是偶数$\}$，$\mathrm{Y} = \mathrm{V} - \mathrm{X}$

假设存在一条边(v_i, v_j)，$v_i, v_j \in Y$。

由于G是连通的，所以从v_0到 v_i有一条最短路径，其长度为奇数，同理，从v_0到 v_j有一条长度为奇数的最短路径。此时，由这两条路径及(v_i, v_j)构成一条长度为奇数的回路，这与题设矛盾。因此Y的任两结点间不存在边。

同理可证X的任两结点间不存在边。G是二部图得证。

习题讲解(习题十)

17、 设(n, m)简单图G满足 $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，证明G必是连通图。构造一个$m = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$的非连通简单图。

证明：（反证法）设图G不连通，则为连通分支构成，不妨设ω(G)=2，G1, G2为两个连通分支，结点数分别为k和n-k，且1≤k≤n-1。此时，图G的边数最多为

$$C_k^2 + C_{n-k}^2 = \frac{1}{2}\left(k(k-1) + (n-k)(n-k-1)\right)$$

$$= k^2 - nk + \frac{1}{2}\left(n^2 - n\right)$$

是k的二次函数，当k= $\frac{n}{2}$ 时，最小；当k=1或k=n-1时，最大。

若G不连通，边的最大值为k=1或k=n-1时，即

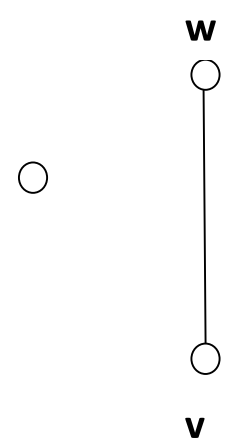
$$m \le \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

与题意矛盾。

所以，$m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$时，G必为连通图。

习题讲解(习题十)

如前所述，若G不连通，边的最大值为k=1或k=n-1时，即图G为两个分支，一个孤立点和一个结点数为(n-1)的完全图，$m = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$。



课堂练习

1. 设无向图G=<V,E>，$|E|=12$。已知有6个3度顶点，其他顶点的度数均小于3。问G中至少有多少个顶点？

2. 设一个无向图的邻接矩阵为A，$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，

运用**矩阵**计算该无向图的连通分支数为多少？

课堂练习（解答）

1. 设无向图G=<V, E>，|E|=12。已知有6个3度顶点，其他顶点的度数均小于3。问G中至少有多少个顶点？

解：设G中度数小于3的顶点有k个。

首先，由握手定理

$$\sum_{v \in V} d(v) = 24$$

可得度数小于3 的顶点度数之和为6。

故当其余的顶点度数都为2时，G的顶点最少，即G中至少有9个顶点。

课堂练习（解答）

2. 设一个无向图的邻接矩阵为A， $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}$ ，

运用**矩阵**计算该无向图的连通分支数为多少？

解：

$$A^2=\begin{bmatrix}2&0&2&0\\0&1&0&1\\2&0&2&0\\0&1&0&2\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}4&0&4&0\\0&1&0&\mathbf{2}\\4&0&4&0\\0&2&0&3\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}\mathbf{8}&0&\mathbf{8}&0\\0&\mathbf{2}&0&\mathbf{3}\\\mathbf{8}&0&\mathbf{8}&0\\0&\mathbf{3}&0&\mathbf{5}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}\quad \mathrm{p}\odot \mathrm{p}^T=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}$$

得到强分图{$\boldsymbol{v_1}$，$\boldsymbol{v_3}$}，{$\boldsymbol{v_2}$，$\boldsymbol{v_4}$}，即该无向图连通分支数为2.