四川大学期中试题（A）

（2021-2022 学年第 1 学期）

课程号：________________ 课程名称：**离散数学** 任课教师：________________

适用专业年级：____________ 学号：________________ 姓名：________________

注：本试题由五个题目构成，所有题目的答卷均写在答题单上，写在本试题单上一律不给分，交卷时只交答题单。

一、选择题（本大题共 5 小题，每题 3 分，共 15 分）在每小题列出的四个备选项中至少由一个是符合题目要求的，请将其代码填写在题后的括号内。错选、多选或少选均无分）

1）集合 A 上的所有置换都是（ B C ）

A、自反的二元关系　B、单射　C、满射　D、对称的二元关系

2）一个命题公式的主析取范式的极小项项数为 5，其主合取范式的极大项项数为 11，那么该命题公式的命题变元个数为(　A　)。

A、4；　B、3；　C、11；　D、5。

3）下列集合 X 和 Y 等势的是（　B，C，D　），注 N 表示自然数集合，R 表示实数集合。

A、X=R,Y=N；　B、X=N,Y=2^N；

C、$X=N$，Y 为集合 N 上二元关系；　D、X=N,Y 为以 5 为分子的真分数；

4）下列推理正确的有（ B C　）。

A、$\forall x\forall y p(x,y) \Leftrightarrow \forall x\exists y p(x,y)$；B、$\exists x\exists y[p(x)\wedge q(y)] \Rightarrow \exists x p(x)$；

C、$\forall x\exists y p(x,y) \Rightarrow \exists x\exists y p(x,y)$；D、$\exists x\exists y p(x,y) \Rightarrow \exists x\forall y p(x,y)$。

5）下列语句真值为 1 的有（　A，B　）。

A、如果$1+2=4$，则$2+4=5$；　B、集合间的等势关系是等价关系；

C、如果雪是白色的，则人会长生不老；　D、集合 A 的空关系具有自反性。

二、填空题（本大题共 10 空，每空 3 分，共 30 分）

1)若集合 $A=\{a,b,c,d\}$，那么在 A 上有(　1024　)个具有对称性的二元关系；有(　$2^4\times 3^6$　)个具有反对称性的二元关系，有（　15　）个具有自反的、对称的和传递的二元关系；集合 A 上有（　24　）个不同的置换。

2) 设 R 是 A = {1，2, 3, 6, 12, 24,36}上的整除关系，该偏序集<A,R>可转变为（　4　）种不同全序集。

3）在论域 $D=\{a,b\}$ 内，$p(x,y)$ 的解释为

$P(a,a)$	P(a,b)	P(b,a)	P(b,b)
1	0	1	0

，则 $\forall y\exists x P(x,y)\rightarrow \exists x\forall y P(x,y)$ 的真值（　1　）。

4）集合 M={1,2,3,4,5}，σ 和 τ 是 M 上的两个置换，σ=(1　3　5）（2　4），$\tau=(1\quad 4\quad 5)(2\quad 3)$，

则 $\sigma\circ\tau=((1\quad 2\quad 5\quad 3\quad 4))$，　$\tau^{-1}\circ\sigma$ =（$(1,2)(3,4)$）。

5）设函数 $f:R\times R\to R\times R$，f 定义为：$f(\langle x,y\rangle)=\langle x+y,x-y\rangle$。其逆函数 $f^{-1}(<x,y>)=$（$<\dfrac{x+y}{2},\dfrac{x-y}{2}>$），复合函数 $f\circ f(<x,y>)=$（ $<2x,2y>$）

三、演算题（本大题共 2 小题，每小题 5 分　共 10 分 ）

1）设 A＝{a，b，c，d}，R 是 A 上的二元关系，且 R＝{<a，b>，<b，a>，<b，c>，<c，d>}，求 r(R)、s(R)和 t(R)。

解

r(R)＝R∪IA＝{<a，b>，<b，a>，<b，c>，<c，d>，<a，a>，<b，b>，<c，c>，<d，d>}

s(R)＝R∪R^{-1}＝{<a，b>，<b，a>，<b，c>，<c，d>，<c，b>，<d，c>}

R^2＝{<a，a>，<a，c>，<b，b>，<b，d>}

R^3＝{<a，b>，<a，d>，<b，a>，<b，c>}

R^4＝{<a，a>，<a，c>，<b，b>，<b，d>}＝R^2

t(R)＝＝{<a，b>，<b，a>，<b，c>，<c，d>，<a，a>，<a，c>，<b，b>，<b，d>，<a，d>}

2）3、某班有学生 60 人，其中有 38 人会说中文， 16 人会说英文， 21 人会说德文；有 3 个人这三种语言都会说，有 2 个人这三种语言都不会说，问只会说两门语言的学生数是多少？

解　设 A 、B 、C 分别表示说中文、英文、德文的学生集合，则|A|＝38，|B|＝16，|C|＝21，

|A∩B∩C|＝3，|$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$|＝2。

|A∪B∪C|＝60－|$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$|＝58

由容斥原理，得

|A∪B∪C|＝|A|＋|B|＋|C|－|A∩B|－|A∩C|－|B∩C|＋|A∩B∩C|

所以

|A∩B|＋|A∩C|＋|B∩C|＝|A|＋|B|＋|C|＋|A∩B∩C|－|A∪B∪C|＝38＋16＋21＋3－58＝20

又因为

|A∩B∩$\overline{C}$|＝|A∩B|－|A∩B∩C|

所以

|A∩B∩$\overline{C}$|＋|A∩$\overline{B}$∩C|＋|$\overline{A}$∩B∩C|＝|A∩B|＋|A∩C|＋|B∩C|－3|A∩B∩C|＝20－9＝11

会说两门语言的学生数是 11 人。

四、证明题（本大题共 3 小题，第 1,2 小题 10 分，第 3 小题 15 分，共 35 分 ）

1）证明 P→(Q→S)是 P→(Q→R)，R→(Q→S) 的有效结论。

证明：

（1）　P　　　　　附加前提

（2） Q 附加前提

（3） P→(Q→R) 前提

（4） Q→R （1），（3）

（5） R （2），（4）

（6） R→(Q→S) 前提

（7） Q→S （5），（6）

（8） S （2），（7）

（9） Q→S CP，（2），（8）

（10） P→(Q→S) CP，（1），（9）

2）运用推理规则证明$\sim P(a)\wedge G(a)$是$\forall x\big(P(x)\to\big(Q(x)\wedge R(x)\big)\big)$，$\sim\big(Q(a)\wedge R(a)\big)$，$S(a),\forall x\big(S(x)\leftrightarrow G(x)\big)$的有效结论。

（1） $\forall x\big(P(x)\to\big(Q(x)\wedge R(x)\big)\big)$ P

（2） $\big(P(a)\to\big(Q(a)\wedge R(a)\big)\big)$ US(1)

(3) $\neg(Q(a)\wedge R(a))$ P

(4) $\neg P(a)$ T(2)(3)I

(5) $\forall x(S(x)\leftrightarrow G(x))$ P

(6) $S(a)\leftrightarrow G(a)$ US(5)

(7) $S(a)\to G(a)$ T(6)E,I

(8) $S(a)$ P

(9) $G(a)$ T(7)(8)I

(10) $\neg P(a)\wedge G(a)$ T(4)(9)I

所以，结论有效。

3）某小学生兴趣小组负责人正拟定在 30 天内对学生进行 45 课时的兴趣实践,要求每天至少 1 课时.证明:他无论怎样安排,必然存在相继若干天内正好安排了 14 课时.

证明：设第i天的实践课时为t_i,则 30 天内的实践课时为$t_{1,}\cdots,t_i,\cdots,t_{30}$，前$i$天的实践总课时序列$X=(x_{1,}\cdots,x_i,\cdots,x_{30})$，其中$x_i=\sum_{j=1}^{i}t_j$，$1\le x_i\le 45$．构建一个新的实践课时序列$Y=(y_{1,}\cdots,y_i,\cdots,y_{30})$，其中$y_i=x_i+14$．$15\le y_i\le 59$．将$X$和$Y$组合成序列$Z=(z_1,\cdots z_i,\cdots z_j,\cdots z_{60})=(X,Y)$，其中$1\le z_i\le 59$。由于$Z$序列中由 60 个元素，其取值为 59 个

不同的整数，由鸽巢原理可知，该序列中必存在两个元素相等，即 $z_i = z_j$. 每天至少 1 课时的兴趣实践，X 和 Y 序列元素均为单增，则 z_i, z_j 不可同时位于 X 和 Y 序列中，只能一个位于 X 序列中 $z_j = x_j$，另一个位于 Y 序列中 $z_i = y_i$，那么 $x_j = y_i$. 因为 $x_j = x_i + 14$,则 $x_j - x_i = 14$.即从第 $i+1$ 天到第 j 内兴趣实践课时为 14，

五、应用题（本大题共 1 小题，共 10 分，注：给出具体过程，无过程以 0 分计）

设集合 $A = \{1, 3, 4, 5, 7\}$，以集合 A 上任意两元素的差被 3 整除为依据，

1） 试构建集合 A 上的二元关系 R 。

2） 试分析是否可以运用 1）中的 R 对集合 A 进行划分。如果能？可将集合 A 划分为多少个子集，每个子集由哪些元素构成。

解：

1) 集合 A 上任意两元素的差被 3 整除关系 R：

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2)

(1) 对任意 x∈A，有 3|(x-x)，所以<x,x>∈R，即 R 是自反的。

(2) 对任意 x,y∈A，若<x,y>∈R，即 3|(x-y)，所以 3|(y-x)，所以，<y,x>∈R，即 R 是对称的。

(3) 对任意 x,y,z∈A，若<x,y>∈R 且<y,z>∈R，有 3|(x-y) 且 3|(y-z)，所以由(x-z)=(x-y)+(y-z)得 3|(x-z)，所以，<x,z>∈R，即 R 是传递的。

由(1)、(2)、(3)知，R 是 A 上的等价关系。 故 R 可对集合 A 的元素进行划分

将矩阵 R 进行初等行列变换，得到

$$R' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$，可将集合 A 划分为 3 个子集，分别为 $\{1, 4, 7\}, \{5\}, \{3\}$.