

§1.3 等可能概型

等可能概型：每个可能结果(样本点)在实验中出现的可能性相等的随机试验类型。等可能概型分**古典概型**和**几何概型**两种。

古典概型

在概率论的发展史中，其源头是对“抛硬币，掷骰子”等简单试验的研究。这些试验的共同点是：

- ♣ **样本空间的元素只有有限个；**
- ♣ **每个基本事件发生的可能性相同。**

我们称具备以上两个特点的试验模型为**古典概型**。

定理 在古典概型中，设样本空间 Ω 中有 n 个样本点， A 是 Ω 中的事件且 A 中有 k 个样本点。则事件 A 发生的概率为 $P(A) = \frac{k}{n}$

证明略。

古典概率的计算一般可归结为两种摸球模型，使用的基本工具是**排列组合**。

复习：两条原理

加法原理： 设完成一件事可以分为**两种途径**，第一种途径有 n_1 种方法，第二种途径有 n_2 种方法，则完成这件事共有 n_1+n_2 种方法。

乘法原理： 设完成一件事需分**两步**，第一步有 n_1 种方法，第二步有 n_2 种方法，则完成这件事共有 n_1n_2 种方法

样本空间样本点数以排列计算的摸球模型

一袋中装有 n 个编好号码 $(1, \dots, n)$ 的小球，从中抽取 r 次，每次一球。抽取的方法有两种：

1) 有放回抽取，即每次随机的取一只，记下号码后放回袋中，搅匀后再进行下一次的抽取。这时，样本点总数为 n^r ；

2) 不放回抽取，即每次随机的取一只，记下号码后不放回袋中。这时，样本点总数为 P_n^r 。

在前一种抽取法中， r 可以大于 n ，
而在后一种抽取法中， $r \leq n$ 。

样本空间样本点数以组合计算的摸球模型

一袋中装有 N 个小球，其中有 m 个红球，余下的全为白球。现从袋中任意抽取 n ($n \leq N$) 个球，问所取的球中恰有 k 个红球的概率为多少？

分析：这个模型可以不要求取球的顺序，所以可用组合计算。所有可能的取法数为 C_N^n 种。设变量 X 表示 “所取的 n 个球中红球的个数”

则所求概率的事件可表为 “ $X=k$ ”，其概率为

$$p(X = k) = \frac{C_m^k C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n} \quad \langle$$

X 的可能取值为 $0, 1, \dots, m$, 其取值的概率分布情况称为超几何分布。

例1.10

| |
|---|
| 1 |
|---|

| |
|---|
| 2 |
|---|

| |
|---|
| 3 |
|---|

30只元件中有**27**只一等品，**3**只二等品。

随机将**30**只元件均分装入三盒，求：

(1) **A** = “每盒有一只二等品” 的概率；

(2) **B** = “有一盒有**3**只二等品” 的概率；

解： **30**只元件平均分到三盒的分法有 $C_{30}^{10} C_{20}^{10} C_{10}^{10}$ 种。

(1) **3**只二等品均分到三个盒子有**3x2x1**种可能性，
余下的**27**只应该平均分到**3**个盒子中，有 $C_{27}^9 C_{18}^9 C_9^9$ 种。

$$(1) P(A) = \frac{3 \times 2 \times 1 \times C_{27}^9 C_{18}^9 C_9^9}{C_{30}^{10} C_{20}^{10} C_{10}^{10}}$$

例1.10

1 2 3

(2) 毫 两 鼻 瘰 者 痂 3 裂 蝉 渺
 $\times C_3^1$ 颞 丐 刘 炙 者 饺
 币 7 裂 鼻 渺 两 (C_{27}^7 丐 跟 刘 炙 镣 腺 彪 者 岭 10 两
 $\times C_{20}^{10} C_{10}^{10}$ 丐 勺 麓 觥 窠 玻 $C_3^1 C_{27}^7 C_{20}^{10} C_{10}^{10}$.

$$P(B) = \frac{C_3^1 \times C_{27}^7 C_{20}^{10} C_{10}^{10}}{C_{30}^{10} C_{20}^{10} C_{10}^{10}}$$

几何概型

古典概型只讨论了样本空间点数有限的情形，那么，对于样本空间点数无限的情形该怎么计算随机事件的概率呢？下面，我们就研究这种情形，这就是几何概型。首先看下面的例子。

例1.11 随机在单位圆内掷一点**M**,求**M**点到原点距离小于**1/4**的概率。

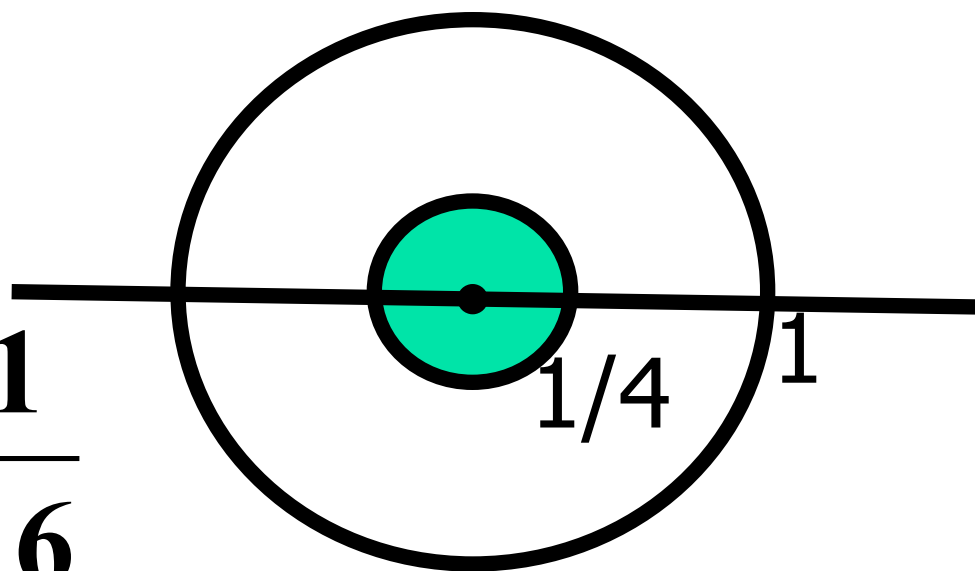
分析：**M**点落在单位圆中任一点的可能性一样大，那么**M**落在单位圆中任意一小区域**A**的概率与位置无关并且与该区域的面积**m(A)**成正比,即 $P(A)=k m(A)$ 。而**M**落在单位圆中的概率

$$P(\Omega) = 1 = km(\Omega).$$

例1.11 随机在单位圆内掷一点**M**,求**M**点到原点距离小于**1/4**的概率.

解:

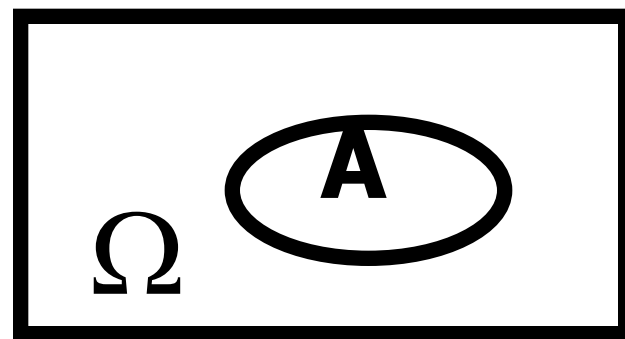
$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{m(A)}{m(\Omega)} \\ &= \frac{\pi \times (1/4)^2}{\pi \times 1^2} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$



几何概型:随机试验的样本空间可以表示为欧氏空间中的一个区域,而且每次试验的每一个结果都是等可能发生的。其等可能性是通过下列方式赋予其意义的:落在某区域 G 的概率与区域 G 的度量 (长度、面积、体积) 称正比。于是,我们有如下定义:

定义：设 Ω 为欧氏空间中的一个区域，以 $m(\Omega)$ 表示 Ω 的度量（一维为长度、二维为面积、三维为体积）， $A \subset \Omega$ 是 Ω 中一个可以度量的子集。定义

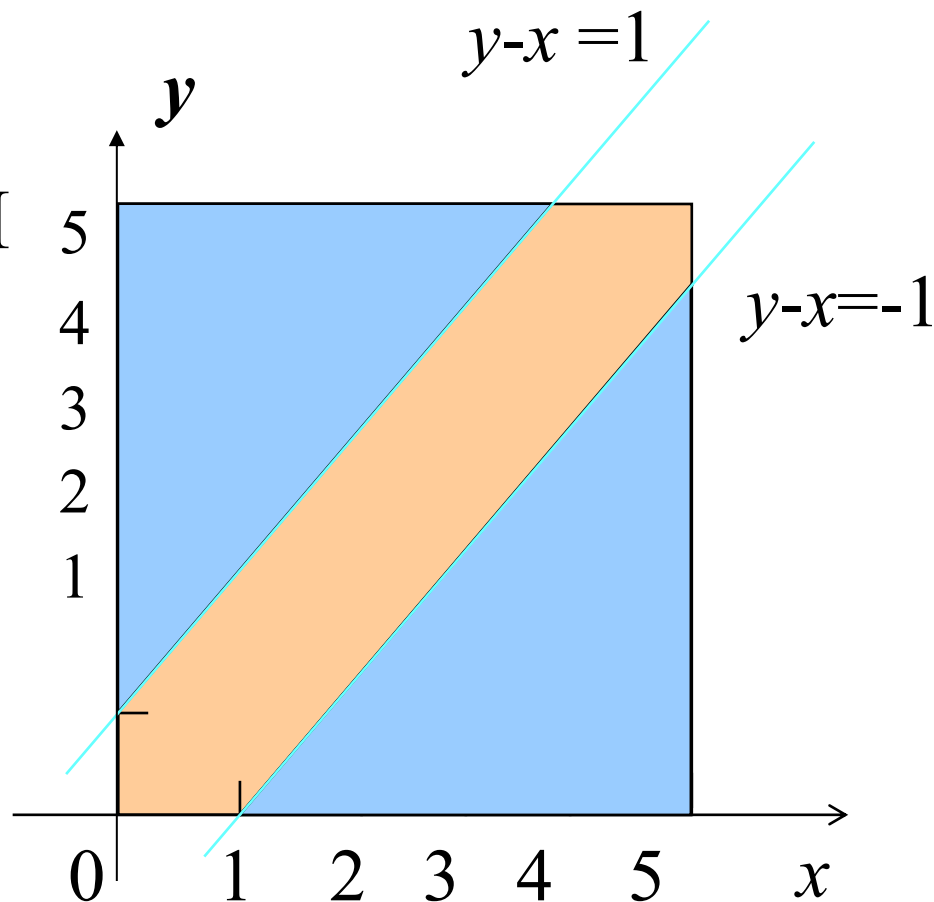
$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$



为事件A 发生的概率。

例（会面问题） 甲、乙二人约定在 中午 12 点到下午 5 点之间在某地会面，先到者等一个小时后即离去.设二人在这段时间内的各时刻到达是等可能的，且二人互不影响。求二人能会面的概率。

解：以 x, y 分别表示甲乙二人到达的时刻，于是即点 M 落在图中的阴影部分。所有的点构成一个正方形，即有无穷多个结果。由于每人在任一时刻到达都是等可能的，

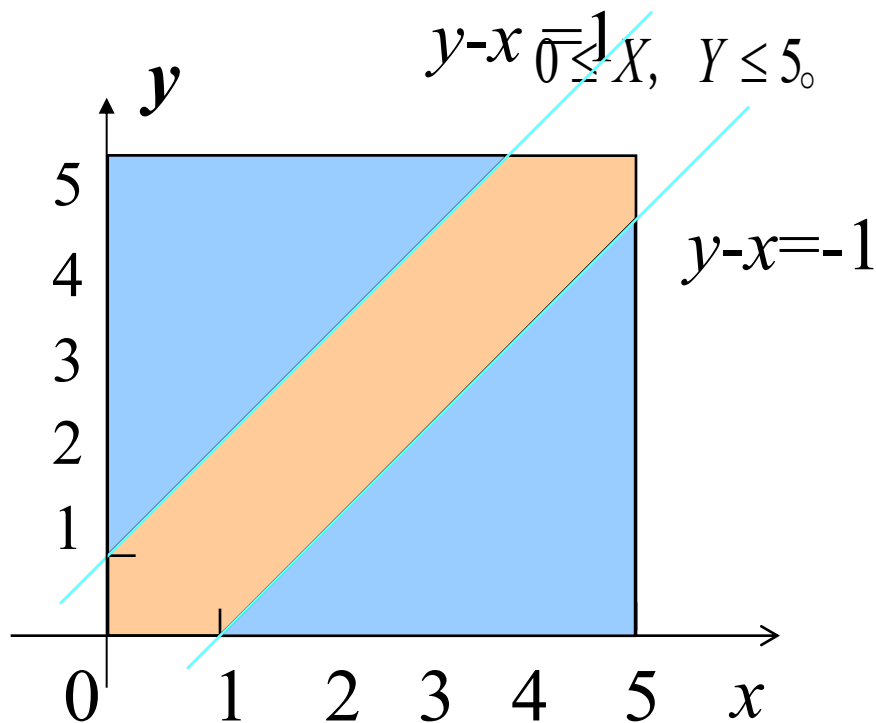


所以落在正方形内各点是等可能的。

二人会面的条件是：

$$|x - y| \leq 1,$$

即 x 和 y 必须落在图中的黄色阴影区域中，故所求概率为



$$p = \frac{\text{阴影部分的面积}}{\text{总面积}} = \frac{25 - 2 \times \frac{1}{2} \times 4^2}{25} = \frac{9}{25}.$$

例1.13蒲丰问题

- **1777**年，法国数学家蒲丰取一根针，量出它的长度，然后在纸上画上一组间距相等的平行线，这根针的长度是这些平行线的距离的一半。把这根针随机地往画满了平行线的纸面上投去。小针有的与直线相交，有的落在两条平行直线之间，不与直线相交。这次实验共投针**2212**次，与直线相交的有**704**次， $2212 \div 704 \approx 3.142$ 。得数竟然是 π 的近似值。这就是著名的蒲丰投针问题。

平行线的距离 a ，针的长度 l ，求针与平行线相交的概率。

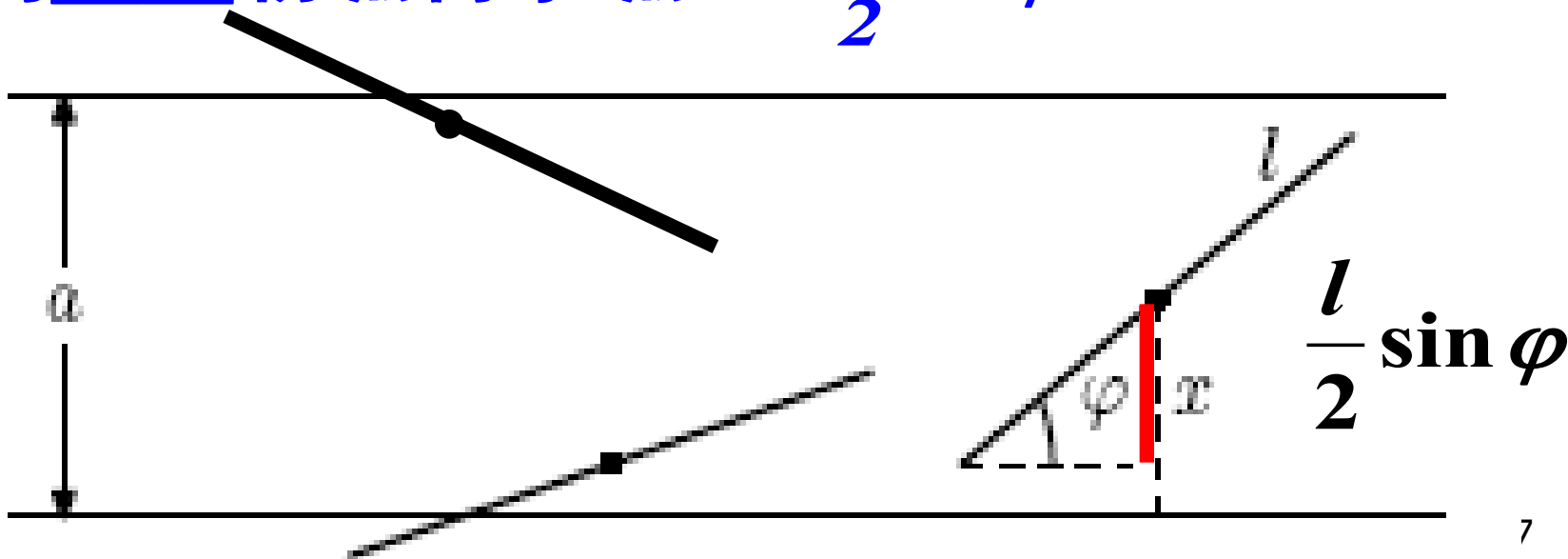
x 表示针的中点与最近的一条平行线的距离

□□ 瀕 □ 束 □ □ 踉 □ □ □ 玻 $x \in (0 \leq x \leq \frac{a}{2})$ <

□ 闭 □ □ 宵 □ 玻 $\phi \in (0 \leq \phi \leq \pi)$ ギ 贾 □ □ 柿 □ 恣

□ 渥 恍 林 □ □ (x, ϕ) 晃 炙 < 臂 吼 躡 □ 林 □ 怩 ギ

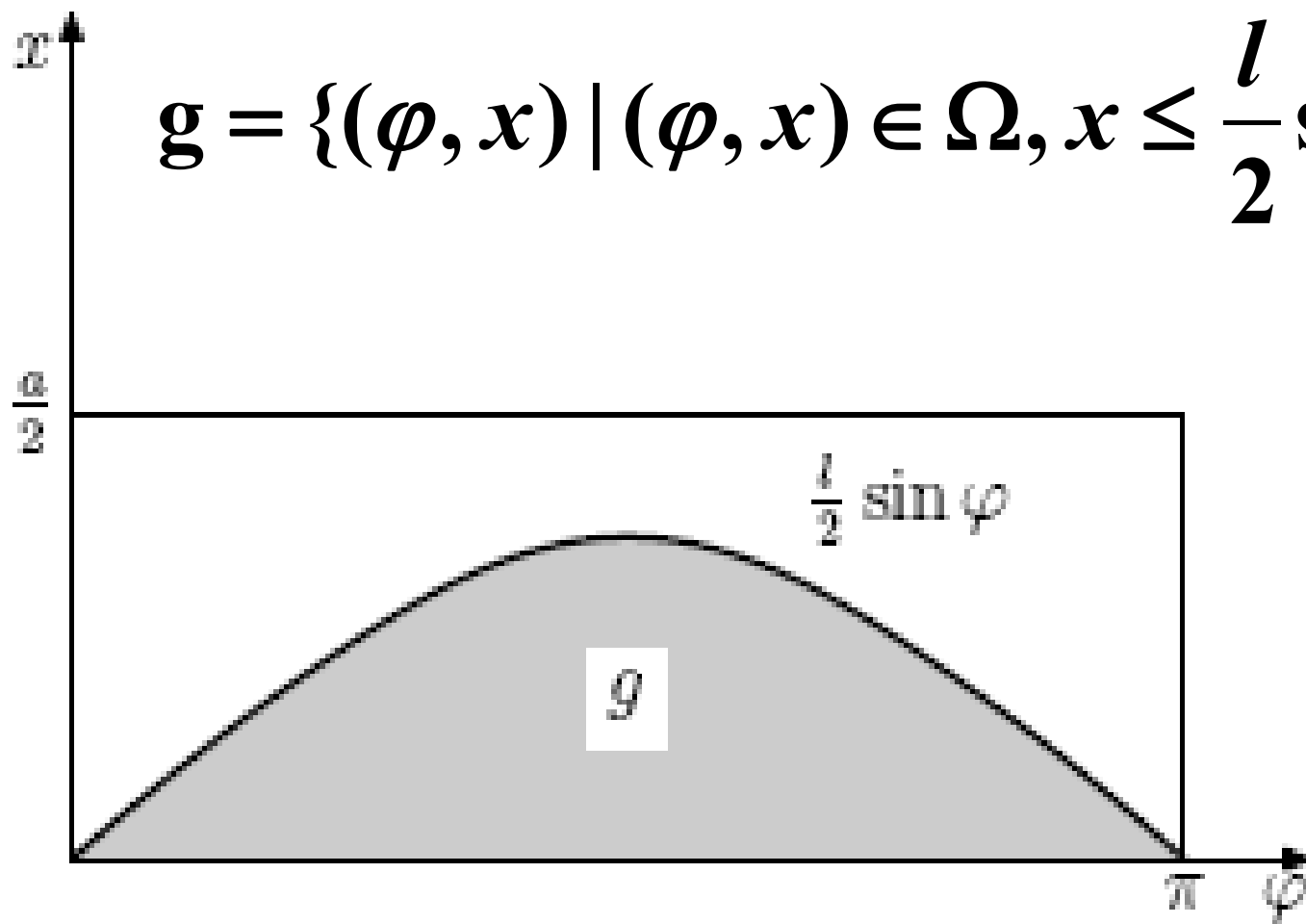
□ 闭 □ □ 朝 噍 臂 承 噍 $x \leq \frac{l}{2} \sin \phi$.



例1.13蒲丰问题

$$\Omega = \{(\varphi, x) \mid 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq x \leq \frac{a}{2}\}$$

$$g = \{(\varphi, x) \mid (\varphi, x) \in \Omega, x \leq \frac{l}{2} \sin \varphi\}$$



例1.13蒲丰问题

$$p(A) = \frac{m(g)}{m(\Omega)} = \frac{\int_0^\pi \frac{l}{2} \sin \varphi d\varphi}{\pi \cdot \frac{a}{2}} = \frac{2l}{\pi a}$$

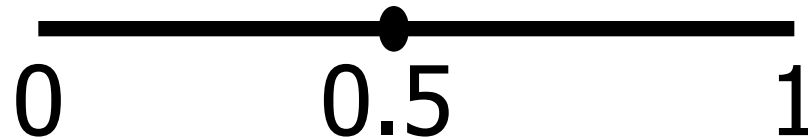
□ 逸 噍_n 峇 详 螺 ◁ □ □ f_n(A) = $\frac{k}{n}$ 闭 □ □ p(A),

□ 瞽 烨 □ ◁ 痢 林 仇 □ 鲔 摧 □ □ □ p(A) ギ

迟 □ 林 仇 □ 鲔 摧 □ $\pi \doteq \frac{2 \ln}{ka}.$

不可能事件的概率为零，概率为零的事件不一定是不可能事件。

在 **$[0,1]$** 区间上任意取一个随机数,则这个随机数恰好等于 **0.5** 的概率是多少?



$$P = \text{点}(0.5)\text{的长度} / [0,1]\text{区间的长度} = 0$$