第三部分　数论与组合论

第8章　基本计数方法

计算机(软件)学院

林　兰

linlan@scu.edu.cn

主要内容

- 8.4 容斥原理
- 8.5 鸽巢原理

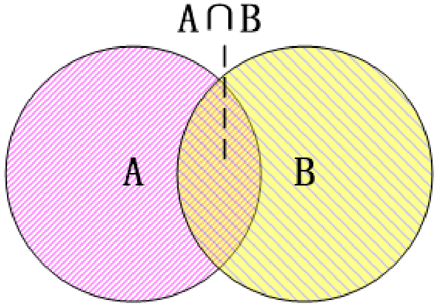
8.4 容斥原理

- 引言

一个离散数学班包含30个女生和50个二年级学生，在这个班里有多少个女生或二年级学生？

1.两个集合的容斥原理

两个有穷集的并集存在多少个元素？



如果被计数的事物有A、B两类，那么

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

8.4 容斥原理

例1 一次期末考试，某班有15人数学得满分，有12人语文得满分，并且有4人语、数都是满分，那么这个班至少有一门得满分的同学有多少人？

$$|A \cup B| = |A|+|B| - |A \cap B|$$

$$=15+12-4=23$$

例2 电视台向100人调查前一天收看电视的情况，有62人看过2频道，34人看过8频道，其中11人两个频道都看过。两个频道都没看过的有多少人？

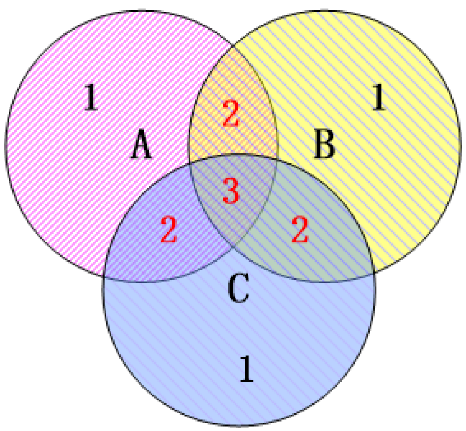
$$\left|\overline{A \cup B}\right| = \left|\bar{A} \cap \bar{B}\right| = |S| - |A \cup B|$$

$$=100-(62+34-11)=15$$

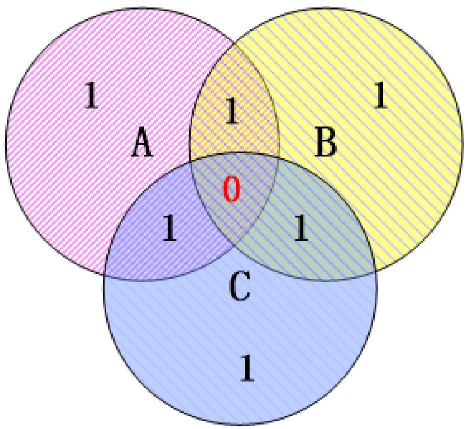
8.4 容斥原理

2. 三个集合的容斥原理

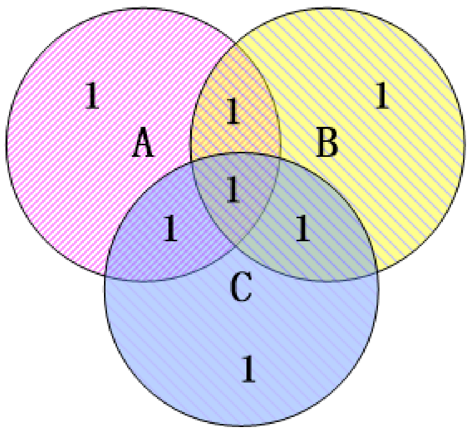
三个有穷集的并集存在多少个元素？



由|A|+|B|+|C|计数的元素



由|A|+|B|+|C|−|A∩B|−|B∩C|−|A∩C|计数的元素



由|A|+|B|+|C|−|A∩B|−|B∩C|−|A∩C|+|A∩B∩C|计数的元素

如果被计数的事物有A、B、C三类，那么，

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C| - |A\cap B| - |B\cap C| - |C\cap A| + |A\cap B\cap C|$$

例3 1232个学生选了西班牙语课，879个学生选了法语课，114个学生选了俄语课。有103个学生选了西班牙语和法语课，23个学生选了西班牙语和俄语课，14个学生选了法语和俄语课。如果2092个学生在三门外语课中至少选了一门，有多少个学生选了所有这3门语言课？

解：设S表示选西班牙语课的学生集合，F表示选法语课的学生集合，R表示选俄语课的学生集合。那么

$|S|=1232$， $|F|= 879$， $|R|= 114$

$|S\cap F|=103$， $|S\cap R|=23$，$|F\cap R|=14$

$|S\cup F\cup R|=2092$

代入等式

$$|S\cup F\cup R|= |S| + |F| + |R| - |S\cap F| - |S\cap R| - |F\cap R| + |S\cap F\cap R|$$

$$2092= 1232+879+114-103-23-14+ |S\cap F\cap R|$$

得：$|S\cap F\cap R|=7$

有7个学生选了所有这3门语言课。

8.4 容斥原理

3. 容斥原理（一般公式）

定理 有限集A中具有性质P_1, P_2, …, P_m中至少一个性质的元素个数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| =$$

$$\sum_{i=1}^{m} |A_i| + (-1)^{2-1} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j>i}^{m} |A_i \cap A_j|$$

$$+ (-1)^{3-1} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j>i}^{m} \sum_{k>j}^{m} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$+ \ldots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

8.4 容斥原理

推论 有限集A中不具有性质$P_1, P_2, \ldots, P_m$的元素个数为

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_m}|$$

$$= |A| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m|$$

$$= |A| + (-1)\sum_{i=1}^{m} |A_i| + (-1)^2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j>i}^{m} |A_i \cap A_j|$$

$$+ (-1)^3 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j>i}^{m} \sum_{k>j}^{m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots +$$

$$(-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

例4 计算从1到1000的整数中有多少个能被3，5，7中至少一个整除？有多少个不能被3，5，7至少一个整除？

解： 设由前1000个正整数构成集合S，集合A表示能被3整除的数，集合B表示能被5整除的数，集合C表示能被7整除的数。则能被3，5，7中至少一个整除的集合为A∪B∪C。现求：

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |B\cap C| - |A\cap C| + |A \cap B\cap C|$$

由题意：$|A|=\lfloor 1000/3\rfloor=333$， $|B|=\lfloor 1000/5\rfloor=200$，

$$|C|=\lfloor 1000/7\rfloor=142$$

$$|A\cap B|=\lfloor 1000/15\rfloor=66，\quad |A\cap C|=\lfloor 1000/21\rfloor=47$$

$$|B\cap C|=\lfloor 1000/35\rfloor=28，\quad |A \cap B\cap C|=\lfloor 1000/105\rfloor=9$$

$$\therefore |A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |B\cap C| - |A\cap C| + |A \cap B\cap C|$$

$$= 333+200+142-66-47-28+9=543$$

不能被3，5，7至少一个整除的集合为$\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$

$$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}|=|S|-|A\cup B\cup C|=1000-543=457$$

8.5 鸽巢原理

1. 简单形式

如果n+1只鸽子飞入n个鸽巢中，则必定有鸽巢中至少飞进了2只鸽子。

（又叫狄利克雷抽屉原理）

例5 (1) **任意13个人中，至少有__2__人的生日同月。**

(2) **在27个英文单词中一定至少有2个单词以同一字母开始。**

(3) **如果考试评分是从0-100，班上必须有多少个学生才能保证在考试中至少有2个学生得到相同的分数?**

8.5 鸽巢原理

例6 在任意11个正整数中，至少有2个数之差是10的倍数。

证明：设11个正整数为$a_1,a_2,\ldots,a_{11}$，它们关于模10的余数分别为$r_1, r_2,\ldots, r_{11}$。

而被10除的余数只能是0，1，…，9中的一个。

11个余数对应10个数，根据鸽巢原理，至少有两个余数相同，即这两个数之差是10的倍数。

8.5 鸽巢原理

2. 广义鸽巢原理

设$q_1, q_2, \ldots q_n$是正整数，如果有$q_1+ q_2+ \ldots +q_n -n+1$只鴿子飞入n个鴿巢中，则：

$$\left.\begin{array}{l}\text{或者第1个鴿巢中至少有}q_1\text{只鴿子}\\ \text{或者第2个鴿巢中至少有}q_2\text{只鴿子}\\ \ldots\\ \text{或者第}n\text{个鴿巢中至少有}q_n\text{只鴿子}\end{array}\right\}\text{至少有一个成立}$$

8.5 鸽巢原理

推论：

当$q_1=q_2=\ldots=q_n=2$时，n+1只鸽子飞进n个鸽巢中，至少有一个鸽巢中有2只鸽子。（简单形式）

当$q_1=q_2=\ldots=q_n=r$时，$(r-1)n+1$只鸽子飞进n个鸽巢中，至少有一个鸽巢中有r只鸽子。

（设m为鸽子数，则$m \geq (r-1)n+1$，使得推理成立的最小正整数$m=(r-1)n+1$。）

定理 当m只鸽子飞进n个鸽巢中，至少有一个鸽巢中有r只鸽子，$r=\lfloor (m-1)/n \rfloor+1$ （或$r=\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$）。

8.5 鸽巢原理

例7 在任意100个人中，有多少人同月生？

解：设鸽巢数n，鸽子数m，则n=12，m=100。

根据鸽巢原理，存在有鸽巢中至少有r只鸽子，则

$$r = \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil = 9$$

所以，任意100个人中，至少有9人同月生。

例8 一个筐中有苹果，香蕉和橙子3种水果，为保证筐中或者至少有8个苹果，或者至少有6个香蕉，或者至少有9个橙子，则放入框中的水果数目至少为多少？

解：根据鸽巢原理，3种水果分别对应3个鸽巢，

鸽子数为8+6+9-3+1=21

∴放入筐中的水果数目至少有21个。

8.5 鸽巢原理

例9 一个人骑车10小时内走完了281公里路程，已知他第一小时走了30公里，最后一小时走了17公里。证明：他一定在某相继的两小时中至少走完了58公里路程。

证明：在这10个小时中有9个相继的两小时，根据题目给定的条件，全部相继的两小时所走的路程之和应该等于281×2-30-17=515公里。

现在可以把问题看成是让515只鸽子飞进9个鸽巢，根据定理，$r=\left\lceil\frac{m}{n}\right\rceil=\left\lceil\frac{515}{9}\right\rceil=58$。

必有一个鸽巢中飞进了至少58只鸽子，得证。

设集合A的元素数为n，R是A上二元关系，那么存在自然数i，j（$0\le i<j\le 2^{n^2}$）使得$R^i=R^j$。

证明：由关系的特点知道，若|A|=n，则A上的关系共有2^{n^2}个，因此，在 R^0，R^1，R^2，…，$R^{2^{n^2}}$这$2^{n^2}+1$个关系中，至少有两个是相同的（鸽巢原理），即有i，j（$0\le i<j\le 2^{n^2}$）使得$R^i=R^j$。

8.5 鸽巢原理

3. Ramsey定理

在任意6个人的集体中，要么有3个人互相认识，要么有3个人互不认识。

证明：

以6人中的任意一人为参照，构造两个子集合S_1和S_2，

S_1：由与张三互相认识的人组成

S_2：由与张三不认识的人组成

有$|S_1|+|S_2|=5$

由鸽巢原理，S_1和S_2中至少有一个集合不少于

$$\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3\text{个人}$$

8.5 鸽巢原理

① 如果S_1中至少有3人，若其中任何2人都互不认识，则找到3个人互不认识；否则，至少有2人相互认识，同时又与张三认识，他们3人构成3个人互相认识。

② 如果S_2中至少有3人，若其中任何2人都相互认识，则找到3个人相互认识；否则，至少有2个人相互不认识，同时又与张三不认识，他们3人构成3个人互不认识。

∴ 综上，定理成立。

问题：在任意5个人的集体中，“要么有3个人互相认识，要么有3个人互不认识”的结论不能保证成立。为什么？

作业

- 习题八

  16、21 (2)