§9.1　基本概念

问题的提出：

盐厂用一台包装机包装食盐以利外运。规定每袋的标准重量为500g，并假定包得的袋装盐重服从正态分布。据以往的经验知，包装机工作时袋装盐重的标准差为10g。某天开工后随机抽测了16袋，称得其平均重量为510g。试问：该天 包装机工作是否正常?

分析：设该天包装机包装的袋装盐重为X，由题意知 $X \sim N(u,\sigma^2)$，其中$\sigma = 10g$，u 未知。我们关心的问题是：包装机工作是否正常，也即判断该天包装机包装的袋装盐重 X 的均值是否等于

标准重500g，也即是检验 “假设：$u=500g$ ”是否正确。这个问题是有关正态总体方差已知时，对总体均值的假设检验。

这是关于总体参数的假设检验问题。这类问题称为参数检验。

假设检验思想

先看一下我们刚才介绍的例子。由题意设$X \sim N(u,\sigma^2)$，其中已知$\sigma = \sigma_0 = 10g$，而u未知。现在，问题的结论只能有两个，要么 $u = u_0 = 500g$，要么 $u \neq u_0 = 500g$ 。我们要判断哪

个命题成立？为此给出两个假设

H_0: u = u_0 = 500g， H_1: u ≠ u_0 =500g 。

这是两个对立的假设，常称H_0 为**原假设**，H_1 为**备择假设**。现在要利用样本观测值来检验H_0，从而决定拒绝H_0 或接受H_0 。

由于这是对总体均值的假设检验，我们自然想到能否借助样本均值$\bar{X}$，因为样本均值是总体均值的无偏估计。因此，若原假设H_0正确，那么$\bar{X}$与u_0的偏差$|\bar{X}-u_0|$不应太大。若$|\bar{X}-u_0|$太大，我们有理由怀疑H_0 的正确性而 拒绝H_0；反之，若$|\bar{X}-u_0|$不是很大，即是说$\bar{X}$与u_0的差异是由随机因素引起的，故不能拒绝H_0 。

当H_0成立时有

$$U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1),$$

从而可将$|\bar{X}-u_0|$大小的衡量归结为对$|U|$大小的衡量。我们称 U 为**检验统计量**。其方法是给定一小正数α使得

$$P(|U|>u_{1-\alpha/2})=\alpha.$$

再计算统计量$|U|$的观测值$|u|$，若有$|u|>u_{1-\alpha/2}$

则拒绝H_0；否则，就不能拒绝H_0。

为什么要作此判断呢？这是根据**小概率事件的实际推断原理**而作出的。

因为α 很小，通常取 α=0.05, 0.1等，因而事件$\{|U|>u_{1-\alpha/2}\}$是小概率事件。因此，若H_0正确，则在一次试验中，该事件实际上是不会发生的。例如在本例中，若取α=0.05，则 $u_{1-\alpha/2}=u_{0.975}=1.96.$ 而今抽样结果为$n=16, \overline{x}=510,$ 且知 σ=10，则统计量|U|的观测值为

$$|u|=\left|\frac{510-500}{10/\sqrt{16}}\right|=4>1.96,$$

也即有小概率事件$\{|U|>u_{1-\alpha/2}\}$在一次试验中发生了。因此，我们认为原先的假设即原假设H_0是不成立的，因而拒绝 H_0 。从而认为包装机工作不正常。

这里包含了反证法思想，但与一般的反证法是不一样的。因为这里仅仅根据小概率事件的实际推断原理来论证的，因此，这里的反证法是带有概率性质的。给定的α 称为**显著水平**。拒绝原假设成立的区域称为**拒绝区域**，记为W；拒绝域的边界值称为**临界值**。如在上例中，可求得拒绝域为$W=\{|U|>u_{1-\alpha/2}\}$，临界值为$-u_{1-\alpha/2}$和$u_{1-\alpha/2}$。

综上所述，假设检验的基本思想为：**对总体分布的未知参数作出某种假设，根据样本在原假设为真的前提下构造一个小概率事件，基于“小概率原理”（即：小概率事件在 一次试验中几乎不可能发生）而对原假设作出拒绝或不拒绝。**

双侧检验与单侧检验

双侧检验： $H_0: u = u_0$ ， $H_1: u \neq u_0$

右侧检验: $H_0: u \leq u_0$, $H_1: u > u_0$ 或者

$H_0: u = u_0$, $H_1: u > u_0$;

左侧检验: $H_0: u \geq u_0$, $H_1: u < u_0$ 或者

$H_0: u = u_0$, $H_1: u < u_0$;

左侧检验和右侧检验统称为**单侧检验**。在同一显著水平α下，两种形式下的右侧（或左侧）检验方法是一样的。故我们一般只考虑第一种。

上述检验名称来源于拒绝域的形式。

双侧检验拒绝域 $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$.

右侧检验拒绝域 $(b, +\infty)$.

左侧检验拒绝域 $(-\infty, a)$

两类错误

假设检验是依据小概率事件的推断原理来作出判断的，加之抽样的随机性，这就可能导致错误的判断。具体来说，有两类错误：

（1） 当原假设H_0实际上为真时，假设检验结果有可能拒绝H_0。这种“以真为假”，“弃真”的错误称为第一类错误。犯这种错误的概率为

$$P(\text{拒绝}H_0|H_0\text{为真})$$

小于等于显著水平α。

（2） 当原假设H_0实际上不真时，假设检验结果将接受H_0 。这种“以假为真”，”纳伪“的错误称为第二类错误。犯第二类错误的概率为β,其

中

$$\beta = P(\text{接受}H_0|H_0\text{不真})$$

由于我们的假设检验思想，这两种错误是不可能完全避免的，因此，我们只希望犯这两类错误的概率越小越好。然而，当样本容量 n 确定之后，犯这两类错误的概率不能同时减小，减小其中一个，另一个往往会增大。目前，人们的通常做法是：先控制第一类错误的概率α，当α被选定后，再通过增大样本容量 n 使β减小 。

H_0是真的 → 一次实验中小概率事件发生了 → 拒绝了H_0

由检验过程知：$P(\text{拒绝}H_0 | H_0\text{真}) \leq \alpha$

H_0是假的 → 检验中检测值未落入拒绝域 → 接受了H_0

$\beta = P(\text{接受}H_0 | H_0\text{假})$ $\neq 1-\alpha$

假设检验的基本步骤

根据前面的分析，假设检验的步骤如下：

（1） 根据实际问题，提出原假设H_0与备择假设H_1；

（2） 选择适当的检验统计量，使其分布或极限分布在 H_0成立的条件是已知的，确定该统计量的分布；

（3）选定显著性水平α，并根据统计量的分布查表确定临界值；

（4） 根据样本观测值，计算出统计量的值，并将其与临界值作比较；

（5） 下结论：若检验统计量的值落在拒绝区域内，则拒绝 H_0；否则，不拒绝H_0。

注：临界值是与α（给定的显著性水平）相关的。因此，对同一假设检验，所给的α 不同，可能使检验的结果大相径庭。所以α 的选取是很重要的。