《习题册》参考答案及解答

第 1－2 页《样本空间与事件》

一．1. **D**　　2. **C**　　　二．1. A 与 B 恰有一个事件发生　　2. **B**

三．1. $(1)\Omega=\{(x,y):0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，

$$A=\left\{(x,y):x^2+y^2<\frac{1}{4},x\ge 0,y\ge 0\right\}$$

$$B=\left\{(x,y):0\le x<y,\frac{1}{3}<y\le 1\right\}$$

$(2)\Omega=\{(i,j):i,j=1,2,3,4,5,6\}$

$A=\{(i,j):i=1,3,5,j=1,2,3,4,5,6\}$　　　$B=\{(1,3),(3,1),(2,2)\}$

2. $(1)A\bar{B}\bar{C}=\left\{\omega:0\le\omega<\frac{1}{4}\right\}$　　$(2)\bar{A}\bar{B}\bar{C}=\{\omega:\omega=1\}=\{1\}$

$(3)\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}=\overline{ABC}=\{\omega:0\le\omega\le 1\}=\Omega$

$(4)\bar{A}(B\cup C)=\left\{\omega:\frac{1}{3}\le\omega<1\right\}$　　$(5)A\cup B\cup C=\{\omega:0\le\omega<1\}$

3. (1) A,B,C 恰有一个发生　　　(2) 至少两个发生

(3) A 发生，且 B,C 至少一个不发生　　(4) 至多一个发生

第 3－4 页《概率的性质与古典概率》

一．1. **D**

$$\mathrm{P}(\bar{A})=0.3\Rightarrow\mathrm{P}(A)=0.7\Rightarrow\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\bar{B})=0.3$$

$$\Rightarrow\mathrm{P}(\bar{A}\cup\bar{B})=\mathrm{P}(\overline{AB})=1-\mathrm{P}(AB)=1-0.3=0.7$$

2. **C**　　3. **D**

二．1. $\frac{2}{9}$

$$\mathrm{P}(AC)=0\Rightarrow\mathrm{P}(ABC)=0$$

$$\Rightarrow\mathrm{P}(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=\mathrm{P}(\overline{A\cup B\cup C})=1-\mathrm{P}(A\cup B\cup C)$$

$$=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(C)+\mathrm{P}(AB)+\mathrm{P}(AC)+\mathrm{P}(BC)-\mathrm{P}(ABC)$$

$$=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+0-0=\frac{2}{9}$$

2. $\frac{1}{12}$　　3. $1-q$

三．1. 教材习题一(A)三第 5 题

解答：因$\mathrm{P}(A-B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(AB)$，$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB)$，

则

$$\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)\le \mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(AB)\le \mathrm{P}(A)\le \mathrm{P}(A\cup B)\le \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B),$$

即

$$\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)\le \mathrm{P}(A-B)\le \mathrm{P}(A)\le \mathrm{P}(A\cup B)\le \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B).$$

2. 证明：

$$\mathrm{P}(A)\ge \mathrm{P}(A(B\cup C))=\mathrm{P}(AB\cup AC)=\mathrm{P}(AB)+\mathrm{P}(AC)-\mathrm{P}(ABC)$$

$$\ge \mathrm{P}(AB)+\mathrm{P}(AC)-\mathrm{P}(BC),$$

故

$$\mathrm{P}(AB)+\mathrm{P}(AC)-\mathrm{P}(BC)\le \mathrm{P}(A)$$

3. $(1)\ \frac{A_8^5}{8^5}=0.205$　　$(2)\ 1-\frac{A_8^5}{8^5}=0.795$　　$(3)\ \frac{\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_8^1\left(A_7^3+A_7^1\right)}{8^5}=0.5298$

4. 教材习题一(A)三第 10 题

（1）有放回抽取时：$\mathrm{P}(A)=\frac{2^2}{6^2}=\frac{1}{9}$；$\mathrm{P}(B)=\frac{4\times 2+2\times 4}{6^2}=\frac{4}{9}$；因$C=A\cup B$

且$AB=\varnothing$，所以$\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{5}{9}$

（2）无放回抽取时：

用排列计算：$\mathrm{P}(A)=\frac{\mathrm{A}_2^2}{\mathrm{A}_6^2}=\frac{1}{15}$；$\mathrm{P}(B)=\frac{\mathrm{A}_4^1\mathrm{A}_2^1+\mathrm{A}_2^1\mathrm{A}_4^1}{\mathrm{A}_6^2}=\frac{8}{15}$；因$C=A\cup B$

且$AB=\varnothing$，所以$\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$

用组合计算：$\mathrm{P}(A)=\dfrac{\mathrm{C}_2^2}{\mathrm{C}_6^2}=\dfrac{1}{15}$；$\mathrm{P}(B)=\dfrac{\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_2^1}{\mathrm{C}_6^2}=\dfrac{8}{15}$；因 $C=A\cup B$ 且

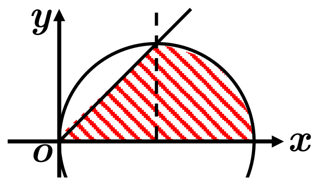
$AB=\varnothing$，所以 $\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$

5. $p=\dfrac{\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_{13}^7\mathrm{C}_{13}^3\mathrm{C}_{13}^1\mathrm{C}_{13}^2}{\mathrm{C}_{52}^{13}}$

第 5－6 页《几何概率、条件概率及乘法公式》

一．1. **B**　2. **D**　3. **D**

二．1. $\dfrac{2+\pi}{2\pi}$



这是一个二维几何概型问题：如图

样本空间为中心在 $(a,0)$ 处，半径为 a 的上半圆，其面积为 $m(\Omega)=\dfrac{1}{2}\pi a^2$，设 A 表事件“原点与该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\dfrac{\pi}{4}$”，则 $m(A)=\dfrac{1}{4}\pi a^2+\dfrac{1}{2}a^2$，所以所求概率为 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{m(A)}{m(\Omega)}=\dfrac{\frac{1}{4}\pi a^2+\frac{1}{2}a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\dfrac{2+\pi}{2\pi}$.

2. $\dfrac{3}{8}$

因事件 A 发生导致事件 B 发生，则 $A\subset B$ 或 $AB=A$；事件 B 与事件 C 互斥，则 $BC=\varnothing$ 或 $B\subset\bar{C}$；从而有 $AB\bar{C}=A$，$B\bar{C}=B$，于是

$$\mathrm{P}(A|B\bar{C})=\frac{\mathrm{P}(AB\bar{C})}{\mathrm{P}(B\bar{C})}=\frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0.3}{0.8}=\frac{3}{8}$$

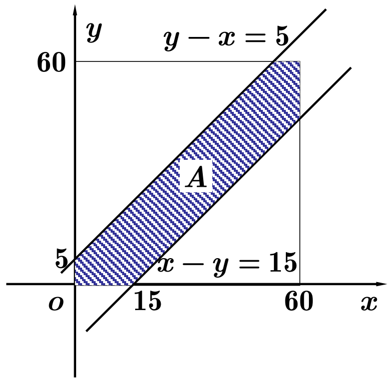
3. $\dfrac{6}{7}$

设 $A=$“至少有一个女孩”，$B=$“至少有一个男孩”，则 $\bar{A}=$“三个孩子全是男孩”

$\overline{AB}=$“三个孩子全是男孩或全是女孩”，从而有 $\mathrm{P}(\bar{A})=\dfrac{1}{8}$，$\mathrm{P}(\overline{AB})=\dfrac{2}{8}$，故所求

概率为 $\mathrm{P}\left(B\middle|A\right)=\dfrac{\mathrm{P}\left(AB\right)}{\mathrm{P}\left(A\right)}=\dfrac{1-\mathrm{P}\left(\overline{AB}\right)}{1-\mathrm{P}\left(\bar{A}\right)}=\dfrac{1-\frac{2}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\dfrac{6}{7}$

三．1. **0.2986**



设王同学于 9 点 X 分到达，张同学于 9 点 Y 分到达，如图，则

$$\Omega=\left\{\left(X,Y\right):0\le X\le 60,0\le Y\le 60\right\}$$

设 $A=$ “两同学能见面”，则

$$A=\left\{\left(X,Y\right):0\le Y-X\le 5\right\}\cup$$

$$\left\{\left(X,Y\right):0\le X-Y\le 15\right\}$$

则所求概率为

$$p=\frac{m\left(A\right)}{m\left(\Omega\right)}=1-\frac{1}{2}\frac{55^2+45^2}{60^2}=0.2986$$

2. **0.7283**

设 $A=$ “该种动物活到 10 岁”，$B=$ “该种动物活到 15 岁”，由已知条件得所求概率为 $p=\mathrm{P}\left(B\middle|A\right)=\dfrac{\mathrm{P}\left(AB\right)}{\mathrm{P}\left(A\right)}=\dfrac{\mathrm{P}\left(B\right)}{\mathrm{P}\left(A\right)}=\dfrac{0.67}{0.92}=0.7283$

3. **0.2333， 0.4651**

因 $A\bar{B}=A-B$，所以

$$\mathrm{P}\left(A\middle|\bar{B}\right)=\frac{\mathrm{P}\left(A\bar{B}\right)}{\mathrm{P}\left(\bar{B}\right)}=\frac{\mathrm{P}\left(A-B\right)}{1-\mathrm{P}\left(B\right)}=\frac{0.14}{1-0.4}=0.2333$$

$$\overline{\bar{A}\cup B}=\bar{\bar{A}}\bar{B}=A\bar{B}=A-B$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}\left(\bar{A}\cup B\right)=1-\mathrm{P}\left(\overline{\bar{A}\cup B}\right)=1-\mathrm{P}\left(A-B\right)=1-0.14=0.86$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}\left(B\middle|\bar{A}\cup B\right)=\frac{\mathrm{P}\left(B\left(\bar{A}\cup B\right)\right)}{\mathrm{P}\left(\bar{A}\cup B\right)}=\frac{\mathrm{P}\left(B\right)}{\mathrm{P}\left(\bar{A}\cup B\right)}=\frac{0.4}{0.86}=0.4651$$

4. $\mathrm{P}\left(B\middle|A\right)=\dfrac{\mathrm{P}\left(AB\right)}{\mathrm{P}\left(A\right)}=\dfrac{\mathrm{P}\left(A\right)-\mathrm{P}\left(A\bar{B}\right)}{\mathrm{P}\left(A\right)}\ge\dfrac{\mathrm{P}\left(A\right)-\mathrm{P}\left(\bar{B}\right)}{\mathrm{P}\left(A\right)}=1-\dfrac{1-p_2}{p_1}$

5. **0.24， 0.424**

设 $A=$ “甲机第一次攻击并击落乙机”， $B=$ “乙机第一次攻击并击落甲机”，
$C=$ “甲机第二次攻击并击落乙机”，则

（1） $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(AB)+\mathrm{P}(\overline{A}B)=0+\mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(B|\overline{A})=0.8\times0.3=0.24$；

（2） $\mathrm{P}(A\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(AC)=0.2+\mathrm{P}(\overline{A}\overline{B}C)-0$

$$=0.2+\mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(\overline{B}|\overline{A})\mathrm{P}(C|\overline{A}\overline{B})$$

$$=0.2+0.8\times0.7\times0.4=0.424.$$

第 7－8 页《全概率与贝叶斯公式、事件的独立性与贝努利概型》

一. 1. C

$$\mathrm{P}(\overline{B}|\overline{A}\cup B)=\frac{\mathrm{P}(\overline{B}(\overline{A}\cup B))}{\mathrm{P}(\overline{A}\cup B)}=\frac{\mathrm{P}(\overline{A}\overline{B})}{\mathrm{P}(\overline{A}\cup B)}=\frac{\mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(\overline{B})}{\mathrm{P}(\overline{A})+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(\overline{A}B)}$$

$$=\frac{\mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(\overline{B})}{\mathrm{P}(\overline{A})+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(B)}=\frac{0.2\times0.6}{0.2+0.4-0.2\times0.4}=0.2308$$

2. D

3. C

$$\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(\overline{A}|\overline{B})=1\Rightarrow\mathrm{P}(A|B)=1-\mathrm{P}(\overline{A}|\overline{B})=\mathrm{P}(A|\overline{B})=\frac{\mathrm{P}(A\overline{B})}{\mathrm{P}(\overline{B})}$$

$$\Rightarrow\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(AB)}{1-\mathrm{P}(B)}\Rightarrow\mathrm{P}(A|B)[1-\mathrm{P}(B)]=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(AB)$$

$$\Rightarrow\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)\Rightarrow A\text{与}B\text{相互独立.}$$

二. 1. $p^3(2-p)$

2. $\dfrac{48}{60}$

因 A 与 B 互斥，故 $A\overline{C}$ 与 $B\overline{C}$ 互斥，从而有

$$\mathrm{P}(A\cup B|\overline{C})=\frac{\mathrm{P}((A\cup B)\overline{C})}{\mathrm{P}(\overline{C})}=\frac{\mathrm{P}(A\overline{C}\cup B\overline{C})}{\mathrm{P}(\overline{C})}=\frac{\mathrm{P}(A\overline{C})+\mathrm{P}(B\overline{C})}{\mathrm{P}(\overline{C})}$$

$$=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(\overline{C})+\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(\overline{C})}{\mathrm{P}(\overline{C})}=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=0.8$$

思考题：一般情况下， A 与 C 独立， B 与 C 独立，则 $A\cup B$ 与 C 也独立吗？

3. $\mathbf{49}$

设同学数为 n，则由题意有 $1-\left(1-p\right)^{n}=1-0.94^{n}\geq 0.95\Rightarrow n\geq 49$

三．1. $\mathbf{0.15}$，最可能乘火车

设 A_1,A_2,A_3,A_4 分别表他乘火车，轮船，汽车，飞机去上海参加会议，则 A_1,A_2,A_3,A_4 构成一个完备事件组，B 表他开会迟到，由题目已知条件可得

$$(1)\ \mathrm{P}\left(B\right)=\sum_{i=1}^{4}\mathrm{P}\left(A_i\right)\mathrm{P}\left(B\middle|A_i\right)=0.3\times\frac{1}{4}+0.2\times\frac{1}{3}+0.1\times\frac{1}{12}+0.4\times 0=0.15$$

$$(2)\ \mathrm{P}\left(A_1\middle|B\right)=\frac{\mathrm{P}\left(B\middle|A_1\right)\mathrm{P}\left(A_1\right)}{\sum_{i=1}^{4}\mathrm{P}\left(A_i\right)\mathrm{P}\left(B\middle|A_i\right)}=\frac{0.3\times\frac{1}{4}}{0.15}=0.5$$

$$\mathrm{P}\left(A_2\middle|B\right)=\frac{\mathrm{P}\left(B\middle|A_2\right)\mathrm{P}\left(A_2\right)}{\sum_{i=1}^{4}\mathrm{P}\left(A_i\right)\mathrm{P}\left(B\middle|A_i\right)}=\frac{0.2\times\frac{1}{3}}{0.15}=0.4444$$

$$\mathrm{P}\left(A_3\middle|B\right)=\frac{\mathrm{P}\left(B\middle|A_3\right)\mathrm{P}\left(A_3\right)}{\sum_{i=1}^{4}\mathrm{P}\left(A_i\right)\mathrm{P}\left(B\middle|A_i\right)}=\frac{0.1\times\frac{1}{12}}{0.15}=0.0556$$

$$\mathrm{P}\left(A_4\middle|B\right)=\frac{\mathrm{P}\left(B\middle|A_4\right)\mathrm{P}\left(A_4\right)}{\sum_{i=1}^{4}\mathrm{P}\left(A_i\right)\mathrm{P}\left(B\middle|A_i\right)}=\frac{0.4\times 0}{0.15}=0$$

因在诸 $\mathrm{P}\left(A_i\middle|B\right)\left(i=1,2,3,4\right)$ 中，$\mathrm{P}\left(A_1\middle|B\right)$ 最大，所以，若他迟到了，他最可能是乘火车去的.

2. $\mathbf{0.0171}$

设 A 表"被检验者经检验认为没有患关节炎"，B 表"被检验者患关节炎"，由贝叶斯公式有

$$\mathrm{P}\left(B\middle|A\right)=\frac{\mathrm{P}\left(B\right)\mathrm{P}\left(A\middle|B\right)}{\mathrm{P}\left(B\right)\mathrm{P}\left(A\middle|B\right)+\mathrm{P}\left(\bar{B}\right)\mathrm{P}\left(A\middle|\bar{B}\right)}=\frac{0.15\times 0.1}{0.15\times 0.1+0.9\times 0.96}=0.0171$$

3. $\left(1\right)0.2157,\quad\left(2\right)0.4095,\quad 0.7678$

$\left(1\right)$ 设 A_i 表"从甲箱中取出的两件产品中有 $i\left(i=0,1,2\right)$ 件次品"，B 表"从乙箱中取得次品"，由全概率公式有

$$\mathrm{P}(B)=\sum_{i=0}^{2}\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i)=\sum_{i=0}^{2}\frac{\mathrm{C}_{10}^{2-i}\mathrm{C}_5^i}{\mathrm{C}_{15}^2}\frac{\mathrm{C}_{3+i}^1}{\mathrm{C}_{17}^1}=\frac{11}{51}=0.2157$$

(2) 设C_1为选自甲箱，C_2为选自乙箱，B_i表第$i(i=1,2)$次取出正品，由全概率公式

$$\mathrm{P}(B_1\bar{B}_2\cup\bar{B}_1B_2)=\mathrm{P}(C_1)\mathrm{P}(B_1\bar{B}_2\cup\bar{B}_1B_2|C_1)+\mathrm{P}(C_2)\mathrm{P}(B_1\bar{B}_2\cup\bar{B}_1B_2|C_2)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_{10}^1}{\mathrm{C}_{15}^2}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_{12}^1}{\mathrm{C}_{15}^2}=\frac{43}{105}=0.4095$$

由条件概率公式及全概率公式有

$$\mathrm{P}(B_1|\bar{B}_2)=\frac{\mathrm{P}(B_1\bar{B}_2)}{\mathrm{P}(\bar{B}_2)}=\frac{\mathrm{P}(C_1)\mathrm{P}(B_1\bar{B}_2|C_1)+\mathrm{P}(C_2)\mathrm{P}(B_1\bar{B}_2|C_2)}{\mathrm{P}(C_1)\mathrm{P}(\bar{B}_2|C_1)+\mathrm{P}(C_2)\mathrm{P}(\bar{B}_2|C_2)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{10}{15}\times\frac{5}{14}+\frac{1}{2}\times\frac{12}{15}\times\frac{3}{14}}{\frac{1}{2}\times\frac{5}{15}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{15}}=\frac{43}{56}=0.7679$$

4. $\mathbf{0.2098},\quad \mathbf{0.0621}$

$$(1)\ p=\frac{\mathrm{C}_{40}^3\mathrm{C}_{10}^2}{\mathrm{C}_{50}^5}=0.2098$$

$$(2)\ p=1-\frac{\mathrm{C}_{40}^5}{\mathrm{C}_{50}^5}=0.0621$$

第 9－10 页《第一章综合练习》

一．1. **B**　　2. **A**

二．1. **0.1837**

设A,B分别表甲乙击中靶子，则所求概率为

$$\mathrm{P}(A\bar{B}|A\cup B)=\frac{\mathrm{P}(A\bar{B})}{\mathrm{P}(A\cup B)}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(\bar{B})}{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}$$

$$=\frac{0.9\times(1-0.8)}{0.9+0.8-0.9\times0.8}=0.1837$$

2. $\frac{1}{4}$

三．1. 教材习题一$(\mathbf{B})$三第 1 题

证明：$\mathrm{P}\left(\bar{A}\bar{B}\right)=\mathrm{P}\left(\overline{A\cup B}\right)=1-\mathrm{P}\left(A\cup B\right)=1-\mathrm{P}\left(A\right)-\mathrm{P}\left(B\right)+\mathrm{P}\left(AB\right)$

$$=1-p-\left(1-\sqrt{p}\right)+\mathrm{P}\left(AB\right)=\sqrt{p}-p+\mathrm{P}\left(AB\right)$$

$$\geq\sqrt{p}-p\left(\because \mathrm{P}\left(AB\right)\geq 0\right)>0\left(\because 0<p<1,\therefore \sqrt{p}>p\right)$$

2. 教材习题一$\left(\mathbf{B}\right)$三第 4 题

解答：设 A_1, A_2, A_3 分别表在 100，150，200 米处击中动物，由 $\mathrm{P}\left(A_1\right)=0.6=\dfrac{k}{100}$

得 $k=60$，从而得 $\mathrm{P}\left(A_1\cup\bar{A}_1A_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\right)=\mathrm{P}\left(A_1\right)+\mathrm{P}\left(\bar{A}_1\right)\mathrm{P}\left(A_2\middle|\bar{A}_1\right)$

$$+\mathrm{P}\left(\bar{A}_1\right)\mathrm{P}\left(\bar{A}_2\middle|\bar{A}_1\right)\mathrm{P}\left(A_3\middle|\bar{A}_1\bar{A}_2\right)=0.6+0.4\times\frac{60}{150}+0.4\times\frac{90}{150}\times\frac{60}{200}$$

$$=0.832$$

3. 教材习题一$\left(\mathbf{B}\right)$三第 5 题

解答：A 表“选正确答案”，B 表“知道正确答案”，由贝叶斯公式得

$$\mathrm{P}\left(B\middle|A\right)=\frac{\mathrm{P}\left(A\middle|B\right)\mathrm{P}\left(B\right)}{\mathrm{P}\left(A\middle|B\right)\mathrm{P}\left(B\right)+\mathrm{P}\left(A\middle|\bar{B}\right)\mathrm{P}\left(\bar{B}\right)}$$

$$=\frac{p\times 1}{p\times 1+\left(1-p\right)\times\dfrac{1}{m}}=\frac{mp}{mp+1-p}$$

4. 教材习题一$\left(\mathbf{B}\right)$三第 3 题

解答：设 A 为“甲系统有效”， B 为“乙系统有效”，则由题意有

$$\mathrm{P}\left(A\right)=0.92,\ \mathrm{P}\left(B\right)=0.93,\ \mathrm{P}\left(B\middle|\bar{A}\right)=0.85,$$

从而有

$$\mathrm{P}\left(AB\right)=\mathrm{P}\left(B\right)-\mathrm{P}\left(\bar{A}B\right)=\mathrm{P}\left(B\right)-\mathrm{P}\left(\bar{A}\right)\mathrm{P}\left(B\middle|\bar{A}\right)=0.962.$$

$$\left(1\right)\ \mathrm{P}\left(A\cup B\right)=\mathrm{P}\left(A\right)+\mathrm{P}\left(B\right)-\mathrm{P}\left(AB\right)=0.988,$$

$$\left(2\right)\mathrm{P}\left(A\middle|\bar{B}\right)=\frac{\mathrm{P}\left(A\bar{B}\right)}{\mathrm{P}\left(\bar{B}\right)}=\frac{\mathrm{P}\left(A\right)-\mathrm{P}\left(AB\right)}{1-\mathrm{P}\left(B\right)}=0.8286.$$

5. 教材习题一$\left(\mathbf{B}\right)$三第 8 题

解答：每个能出厂的概率为 $p = 0.7 + 0.3 \times 0.8 = 0.94$，所以

（1） 全部都能出厂的概率为 0.94^n；

（2） 恰有两个不能出厂的概率为 $C_n^2 0.06^2 0.94^{n-2}$.

第 11－12 页《分布函数及离散型随机变量》

一．1. **B**（利用分布函数的性质判断）　　2. **D**

二．1. 3 或 7（即 $P(X=2)=\frac{7}{30}=\frac{m}{10}\cdot\frac{10-m}{9}$）　　2. $\frac{11}{24}$

三．1. 教材习题二(A)三第 1 题

① 当 $x<0$ 时，显然有 $F(x)=P(X\le x)=P(\varnothing)=0$;

② 当 $0\le x\le a$ 时，由题意有 $P(X\in[0,x])=\delta x^3$ 且 $P(X\in[0,a])=1$，联立两式解得 $\delta=a^{-3}$，从而 $F(x)=P(X\le x)=P(X\in[0,x])=a^{-3}x^3$;

③ 当 $x>a$ 时，有 $F(x)=P(X\le x)=P(\Omega)=1$;

从而分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ a^{-3}x^3, & 0\le x\le a\\ 1 & x>a\end{cases}$，

$$P\left(\frac{a}{3}<X\le\frac{2}{3}a\right)=F\left(\frac{2}{3}a\right)-F\left(\frac{a}{3}\right)=a^{-3}\left[\left(\frac{2}{3}a\right)^3-\left(\frac{a}{3}\right)^3\right]=\frac{7}{27}.$$

2. 教材习题二(A)三第 2 题

由分布函数在 $x=1$ 和 $x=2$ 处的右连续性有 $0=a,1=a+b$，解之得 $a=0,b=1$

$$P\left(X>\frac{3}{2}\right)=1-F\left(\frac{3}{2}\right)=1-\left[a+b\left(\frac{3}{2}-1\right)^2\right]=1-\left(\frac{3}{2}-1\right)^2=\frac{3}{4}$$

3. 教材习题二(A)三第 3 题

显然，X 的可能取值为 $1,2,3$ 且 $P(X=1)=\frac{C_3^1}{C_4^2}=\frac{1}{2}$; $P(X=2)=\frac{C_2^1}{C_4^2}=\frac{1}{3}$;

$P(X=3)=\frac{C_1^1}{C_4^2}=\frac{1}{6}$; 故 $X\sim\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$，分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{1}{2}, & 1\le x<2\\ \frac{5}{6}, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$

4. 教材习题二$\left(\mathbf{A}\right)$三第 4 题

显然X可能取$0,1,2,3$；设A_i表“在第$i\left(i=1,2,3\right)$路口遇到红灯”，则

$\mathrm{P}\left(A_i\right)=\frac{1}{2},i=1,2,3$且$A_1,A_2,A_3$相互独立，所以有

$\mathrm{P}\left(X=0\right)=\mathrm{P}\left(A_1\right)=\frac{1}{2}$;

$\mathrm{P}\left(X=1\right)=\mathrm{P}\left(\bar{A}_1A_2\right)=\mathrm{P}\left(\bar{A}_1\right)\mathrm{P}\left(A_2\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$;

$\mathrm{P}\left(X=2\right)=\mathrm{P}\left(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\right)=\mathrm{P}\left(\bar{A}_1\right)\mathrm{P}\left(\bar{A}_2\right)\mathrm{P}\left(A_3\right)=\frac{1}{8}$;

$\mathrm{P}\left(X=3\right)=\mathrm{P}\left(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\right)=\mathrm{P}\left(\bar{A}_1\right)\mathrm{P}\left(\bar{A}_2\right)\mathrm{P}\left(\bar{A}_3\right)=\frac{1}{8}$.

故有$X\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8}\end{bmatrix}$.

第 13－14 页《常见离散型分布》

一．1. **B**　　2. **D**（用泊松分布近似计算）

二．1. e^{-1}（即为$\mathrm{P}\left(\Delta>0\right)=\mathrm{P}\left(4-4X>0\right)=\mathrm{P}\left(X<1\right)=\mathrm{P}\left(X=0\right)=\frac{1^0}{0!}e^{-1}=e^{-1}$）

2. $\mathrm{C}_3^1\times0.18\times0.82^2$（设对$X$的 3 次取值中取到 1 的次数为$\xi$，而每次取到 1 的概率为

$\mathrm{P}\left(X=1\right)=\mathrm{C}_2^1 0.1^1 0.9^1=0.18$，从而有$\xi\sim\mathrm{B}\left(3,0.18\right)$，所以所求概率为

$\mathrm{P}\left(\xi=1\right)=\mathrm{C}_3^1\times0.18^1\times0.82^2=\mathrm{C}_3^1\times0.18\times0.82^2$）

三．1. 教材习题二$\left(\mathbf{A}\right)$三第 6 题

$\left(1\right)$ $X\sim H\left(6,4,20\right)$，所以$\mathrm{P}\left(X=k\right)=\frac{\mathrm{C}_{16}^{6-k}\mathrm{C}_4^k}{\mathrm{C}_{20}^6},k=0,1,2,3,4$，即

$$X \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \dfrac{C_{16}^{6}C_{4}^{0}}{C_{20}^{6}} & \dfrac{C_{16}^{5}C_{4}^{1}}{C_{20}^{6}} & \dfrac{C_{16}^{4}C_{4}^{2}}{C_{20}^{6}} & \dfrac{C_{16}^{3}C_{4}^{3}}{C_{20}^{6}} & \dfrac{C_{16}^{2}C_{4}^{4}}{C_{20}^{6}} \end{bmatrix}$$

(2) $Y \sim \mathrm{B}(6,0.2)$，所以 $\mathrm{P}(Y=k)=C_6^k 0.2^k 0.8^{6-k}$， $k=0,1,2,3,4,5,6$

2. 教材习题二(A)三第 7 题

显然 $X \sim \mathrm{B}(15,0.2)$

(1) $\mathrm{P}(X=3)=C_{15}^{3}0.2^3 0.8^{12}=0.2501$

(2) $\mathrm{P}(X \geq 2)=1-\mathrm{P}(X=0)-\mathrm{P}(X=1)$

$$=1-0.8^{15}-15\times 0.8^{14}\times 0.2=0.8329$$

(3) $\mathrm{P}(1 \leq X \leq 3)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=1)$

$$=C_{15}^{3}0.2^3 0.8^{12}+C_{15}^{2}0.2^2 0.8^{13}+C_{15}^{1}0.2^1 0.8^{14}=0.6130$$

(4) $\mathrm{P}(X \leq 1)=1-\mathrm{P}(X \geq 2)=1-0.8329=0.1671$

3. 教材习题二(A)三第 9 题

设 X 为任意时刻同时出故障的车床台数，则 $X \sim \mathrm{B}(300,0.01)$

$\mathrm{P}(X=4)=C_{300}^{4}0.01^4 0.99^{296}=0.1689$

由泊松定理近似地有 $X \sim \mathrm{P}(3)$，所以 $\mathrm{P}(X=4)\doteq \dfrac{3^4}{4!}e^{-3}=\dfrac{27}{8}e^{-3}=0.1680$

相对误差为 $\dfrac{0.1689-0.1680}{0.1689}=0.533\%$

4. 教材习题二(A)三第 10 题

(1) $\mathrm{P}(X>r)=\sum\limits_{k=r+1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p=\dfrac{p(1-p)^r}{1-(1-p)}=(1-p)^r$

(2) 由(1)的结论知 $\mathrm{P}(X>t+r)=(1-p)^{r+t}$， $\mathrm{P}(X>t)=(1-p)^t$ 从而

$$\mathrm{P}\left(X>r+t \middle| X>r\right)=\frac{\mathrm{P}\left(X>r+t, X>r\right)}{\mathrm{P}\left(X>r\right)}=\frac{\mathrm{P}\left(X>r+t\right)}{\mathrm{P}\left(X>r\right)}$$

$$=\frac{\left(1-p\right)^{r+t}}{\left(1-p\right)^{r}}=\left(1-p\right)^{t}=\mathrm{P}\left(X>t\right).$$

第 15－16 页《连续型随机变量》

一．1. **C** （用密度函数的特征（非负性和归一性）进行检验）

2. **C**

3. **A** 因密度函数为偶函数，则必有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)dx=2\int_{0}^{+\infty} f\left(x\right)dx=2\left[\mathrm{F}\left(+\infty\right)-\mathrm{F}\left(0\right)\right]=2-2\mathrm{F}\left(0\right),$$

从而 $\mathrm{F}\left(0\right)=\frac{1}{2}$；所以

$$\mathrm{P}\left(\left|X\right|>a\right)=1-\mathrm{P}\left(\left|X\right|\le a\right)=1-\int_{-a}^{a} f\left(x\right)dx=1-2\int_{0}^{a} f\left(x\right)dx$$

$$=1-2\left[\mathrm{F}\left(a\right)-\mathrm{F}\left(0\right)\right]\ =1-2\mathrm{F}\left(a\right)+2\mathrm{F}\left(0\right)=2\left[1-\mathrm{F}\left(a\right)\right]$$

二．1. $\frac{2}{\pi}$

由归一性得 $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)dx=\int_{0}^{1}\frac{A}{\sqrt{1-x^2}}dx=A\arcsin x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}A\Rightarrow A=\frac{2}{\pi}$

2. $\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{\frac{3}{2}} f\left(x\right)dx=\int_{0}^{+\infty} x^{\frac{3}{2}}\frac{1^2}{\Gamma\left(2\right)}x^{2-1}e^{-x}dx=\int_{0}^{+\infty} x^{\frac{7}{2}-1}e^{-x}dx=\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$$

$$=\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

3. $\mathrm{B}\left(3, e^{-1}\right)$

$X\sim e\left(1\right)$，故 X 的分布函数为 $\mathrm{F}\left(x\right)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，

电子元件寿命大于 1 万小时的概率为 $p=\mathrm{P}\left(X\ge 1\right)=1-\mathrm{F}\left(1\right)=e^{-1}$

所以有$\boldsymbol{Y} \sim \mathbf{B}\left(3, e^{-1}\right)$.

三．1. 教材习题二$\left(\mathbf{A}\right)$三第 12 题

首先函数$\varphi\left(x\right)$满足非负性；

其次证明存在c使得函数$\varphi\left(x\right)$满足归一性：由$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(x\right) dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{c^2} e^{-\frac{x^3}{c}} dx$

$= \frac{1}{3c} \int_{0}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x^3}{c}\right)} d\left(\frac{x^3}{c}\right)$（此处应需$c > 0$）$= \frac{1}{3c} \Gamma\left(1\right) = \frac{1}{3c}$，这说明当$c = \frac{1}{3}$时函数

$\varphi\left(x\right)$满足归一性；

所以，当$c = \frac{1}{3}$时函数$\varphi\left(x\right)$为某连续型随机变量的密度函数．此时

$$\mathrm{P}\left(X \leq 1\right) = \int_{0}^{1} 9x^2 e^{-3x^3} dx = \int_{0}^{1} e^{-\left(3x^3\right)} d\left(3x^3\right) = -e^{-3x^3}\Big|_{x=0}^{x=1} = 1 - e^{-3}$$

2. 教材习题二$\left(\mathbf{A}\right)$三第 14 题

$\left(1\right)$ 由归一性有$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right) dx = \int_{-A}^{A} \frac{2}{\pi\left(1+x^2\right)} dx = \frac{4}{\pi} \int_{0}^{A} \frac{1}{1+x^2} dx$

$= \frac{4}{\pi} \arctan x\Big|_{0}^{A} = \frac{4}{\pi} \arctan A$，所以$\arctan A = \frac{\pi}{4}$，从而$A = 1$

$$\left(2\right)\ \mathrm{F}\left(x\right) = \int_{-\infty}^{x} f\left(t\right) dt = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \int_{-1}^{x} \frac{2}{\pi\left(1+t^2\right)} dt = \frac{2}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}, & -1 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

3. 教材习题二$\left(\mathbf{A}\right)$三第 15 题

$\left(1\right)$ 由归一性有$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right) dx = \int_{0}^{2} \frac{1}{8} dx + \int_{2}^{4} kx dx = \frac{1}{4} + 6k$，所以$k = \frac{1}{8}$；

$$(2)\ \mathrm{F}(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \int_0^x \frac{1}{8}dt=\frac{1}{8}x, & 0<x<2 \\ \int_0^2 \frac{1}{8}dt+\int_2^x \frac{1}{8}tdt=\frac{1}{16}x^2, & 2\le x<4 \\ 1, & x\ge 4 \end{cases}$$

4. 教材习题二$(\mathbf{A})$三第 16 题

显然X的分布函数为$\mathrm{F}(x)=\begin{cases} 1-e^{-\frac{x}{1000}}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$，每只元件寿命不超过 400 小时的概率为$p=\mathrm{P}(X\le 400)=\mathrm{F}(400)=1-e^{-\frac{1}{1000}\times 400}=1-e^{-0.4}$

设在仪器使用的最初 400 小时内元件的损坏数，则$Y\sim \mathrm{B}(6,1-e^{-0.4})$，从而有

$(1)\ \mathrm{P}(Y=1)=\mathrm{C}_6^1\times(1-e^{-0.4})e^{-0.4\times 5}=6e^{-2}(1-e^{-0.4})$；

$(2)\ \mathrm{P}(Y\ge 1)=1-\mathrm{P}(Y=0)=1-e^{-0.4\times 6}=1-e^{-2.4}$

第 17－18 页《随机变量函数的分布》

一．1. **D** （$\mathrm{F}_Y(y)=\mathrm{P}(Y\le y)=\mathrm{P}(3X-1\le y)=\mathrm{P}\left(X\le\frac{y+1}{3}\right)=\mathrm{F}\left(\frac{y+1}{3}\right)$）

2. **C**

二．1. $f_Y(y)=\frac{1}{4}y^{-\frac{1}{2}},\ 0<y<4$

对任意$y\in(0,4)$，$\mathrm{F}_Y(y)=\mathrm{P}(Y\le y)=\mathrm{P}(X^2\le y)=\mathrm{P}(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})$

$=\mathrm{P}(0\le X\le\sqrt{y})=\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{y}$，所以$f_Y(y)=\mathrm{F}_Y'(y)=\frac{1}{4}y^{-\frac{1}{2}}$

也可以直接利用平方变换的公式求解

2. $\mathrm{P}(Y\ge 2)=\mathrm{P}(1-\sqrt[3]{X}\ge 2)=\mathrm{P}(X\le -1)=\mathrm{F}_X(-1)=0$

三．1. 教材习题二$(\mathbf{A})$三第 18 题

$(1)\ X\sim\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 & 3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$　　$(2)\ Y\sim\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}$

2. 教材习题二$(\mathbf{A})$三第 19 题

$$(1)\ \mathrm{F}_Y(y)=\mathrm{P}(Y\le y)=\mathrm{P}(2X-1\le y)=\mathrm{P}\left(X\le\frac{y+1}{2}\right)=\mathrm{F}_X\left(\frac{y+1}{2}\right)$$

$$f_Y(y)=\mathrm{F}_Y'(y)=\frac{1}{2}f_X\left(\frac{y+1}{2}\right)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y+1}{2}}, & y>-1,\\ 0, & y\le -1\end{cases},$$

$$(2)\ \mathrm{F}_Y(y)=\mathrm{P}(Y\le y)=\mathrm{P}(e^X\le y)=\begin{cases}0, & y\le 1\\ \mathrm{P}(X\le \ln y)=\mathrm{F}_X(\ln y), & y>1\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\mathrm{F}_Y'(y)=\begin{cases}0, & y\le 1\\ \mathrm{F}_X'(\ln y)=\frac{1}{y}e^{-\ln y}=\frac{1}{y^2}, & y>1\end{cases}$$

$$(3)\ \mathrm{F}_Y(y)=\mathrm{P}(Y\le y)=\mathrm{P}(X^2\le y)=\begin{cases}\mathrm{P}\left(X\in\left[-\sqrt{y},\sqrt{y}\right]\right), & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\mathrm{F}_X\left(\sqrt{y}\right)-\mathrm{F}_X\left(-\sqrt{y}\right), & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\mathrm{F}_Y'(y)=\begin{cases}\mathrm{F}_X'\left(\sqrt{y}\right)-\mathrm{F}_X'\left(-\sqrt{y}\right), & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X\left(\sqrt{y}\right)+f_X\left(-\sqrt{y}\right)\right]=\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

3. 教材习题二$(\mathbf{A})$三第 22 题

$$\mathrm{F}_Y(y)=\mathrm{P}(Y\le y)=\mathrm{P}(X^2\le y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \mathrm{P}\left(X\in\left[-\sqrt{y},\sqrt{y}\right]\right), & y\in(0,9)\\ 1, & y\ge 9\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \mathrm{F}_X\left(\sqrt{y}\right)-\mathrm{F}_X\left(-\sqrt{y}\right), & y\in(0,9)\\ 1, & y\ge 9\end{cases}$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})\right], & y\in(0,9)\\ 0, & y\notin(0,9)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\right]=\dfrac{1}{4\sqrt{y}}, & y\in(0,1]\\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[0+\dfrac{1}{4}\right]=\dfrac{1}{8\sqrt{y}}, & y\in(1,9)\\ 0, & y\notin(0,9)\end{cases}$$

第 19－20 页《第二章综合练习》

一．1. **C** （用分布函数的特征验证．　注意第二个答案，若 $a=2,b=-1$ 不能保证

$F(x)=aF_1(x)+bF_2(x)$ 的非负性）

2. **B**　教材习题二(B)一第 4 题

$X\sim e(\lambda),Y=\min(X,2)$，显然可见 Y 的有效值域为 $R(Y)=(0,2]$，所以，当

$y\in(0,2)$ 时，"$Y\le y$"$\Leftrightarrow$"$\min(X,2)\le y$"$\Leftrightarrow$"$X\le y$"，从而

$F_Y(y)=P(X\le y)=F_X(y)=1-e^{-\lambda y}$，于是综上有

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ 1-e^{-\lambda y}, & y\in(0,2)\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$$

显然可见，$F_Y(y)$ 在 $y=0$ 处连续，在 $y=2$ 处间断.

（本题中的随机变量 Y 是非离散非连续型随机变量）

二．1. $\dfrac{9}{64}$

因 $P(X\le 1/2)=\int_0^{1/2}2xdx=\dfrac{1}{4}$，则 $Y\sim B(3,1/4)$，故

$$P(Y=2)=C_3^2(1/4)^2\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$$

2. $\dfrac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}$

由归一性得

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)dx = A\int_{0}^{+\infty} x^{3/2}e^{-2x}dx = \frac{A}{2^{5/2}}\int_{0}^{+\infty}\left(2x\right)^{3/2}e^{-2x}d\left(2x\right)=\frac{A}{2^{5/2}}\Gamma\left(5/2\right)$$

所以 $A=\dfrac{2^{\frac{5}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{5}{2}\right)}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\dfrac{3}{4}\sqrt{\pi}}=\dfrac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}$

三．1. $\left(1\right)\dfrac{9}{10}$　$\left(2\right)1-0.9^{10}-C_{10}^{1}0.9^{9}\times 0.1=1-1.9\times 0.9^{9}$　$\left(3\right)1-11e^{-10}$

$\left(1\right)$ $P\left(\left|X\right|<1.8\right)=\dfrac{3.6}{4}=0.9$

$\left(2\right)$ 设 Y 表 10 次测量中误差绝对值大于 1.8 的次数，则 $Y\sim B\left(10,0.1\right)$，从而

$$P\left(Y\geq 2\right)=1-P\left(Y=0\right)-P\left(Y=1\right)=1-0.9^{10}-C_{10}^{1}0.9^{9}\times 0.1$$

$\left(3\right)$ 设 Z 表 100 次测量中误差绝对值大于 1.8 的次数，则 $Z\sim B\left(100,0.1\right)$，故近似地有

$Z\sim P\left(10\right)$，从而 $P\left(Z\geq 2\right)=1-P\left(Z=0\right)-P\left(Z=1\right)=1-11e^{-10}$

2. 教材习题二$\left(B\right)$三第 4 题

显然密度函数是偶函数，所以

$\left(1\right)$ 由归一性得 $1=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)dx=2A\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}dx$ ，作变量代换 $y=e^{x}$ 可得

$$1=2A\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{1+y^{2}}dx=2A\arctan y\Big|_{1}^{+\infty}=\frac{1}{2}\pi A\Rightarrow A=\frac{2}{\pi}$$

$\left(2\right)$ 对任意 $x\in R$， $F_{X}\left(x\right)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f\left(t\right)dt=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{e^{t}+e^{-t}}dt$，作变量代换 $y=e^{t}$ 可得

$$F_{X}\left(x\right)=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{e^{t}+e^{-t}}dt=\frac{2}{\pi}\arctan y\Big|_{y=0}^{y=e^{x}}=\frac{2}{\pi}\arctan e^{x},$$

于是有 $P\left(0\leq X\leq 1\right)=F_{X}\left(1\right)-F_{X}\left(0\right)=\dfrac{2}{\pi}\arctan e-\dfrac{1}{2}$

(3) $\mathrm{F}_Y(y)=\mathrm{P}(Y\le y)=\mathrm{P}\left(e^{-|X|}\le y\right)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \mathrm{P}\left(|X|\ge -\ln y\right), & y\in(0,1)\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$

$$=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_{-\ln y}^{+\infty}\frac{1}{e^t+e^{-t}}dt, & y\in(0,1)\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$$

从而有 $f_Y(y)=\mathrm{F}_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi(1+y^2)}, & y\in(0,1)\\ 0, & y\notin(0,1)\end{cases}$

3. 教材习题二$(\mathbf{B})$三第 8 题

显然，X 的分布函数为 $\mathrm{F}_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-e^{-\frac{1}{60}x}, & x>0\end{cases}$；

设 A_1,A_2,A_3 分别表年龄在 15 岁以下，15 到 50 岁，50 岁以上，则 A_1,A_2,A_3 构成一完备事件组且

$\mathrm{P}(A_1)=\mathrm{F}_X(15)=1-e^{-\frac{1}{4}}$,

$\mathrm{P}(A_2)=\mathrm{F}_X(50)-\mathrm{F}_X(15)=\left(1-e^{-\frac{50}{60}}\right)-\left(1-e^{-\frac{15}{60}}\right)=e^{-\frac{1}{4}}-e^{-\frac{5}{6}}$

$\mathrm{P}(A_3)=1-\mathrm{F}_X(50)=1-\left(1-e^{-\frac{50}{60}}\right)=e^{-\frac{5}{6}}$

再设 B 为某人得重病，则

(1) $\mathrm{P}(B)=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i)=\left[1-e^{-\frac{1}{4}}\right]\times 0.1+\left[e^{-\frac{1}{4}}-e^{-\frac{5}{6}}\right]\times 0.02+e^{-\frac{5}{6}}\times 0.2$

$$=0.1-0.08e^{-\frac{1}{4}}+0.18e^{-\frac{5}{6}}\approx 0.1159$$

(2) $\mathrm{P}(A_1|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(B|A_1)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\left[1-e^{-\frac{1}{4}}\right]\times 0.1}{0.1159}=\dfrac{0.02212}{0.1159}=0.1908$

$$\mathrm{P}(A_2|B)=\frac{\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(B|A_2)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\left[e^{-\frac{1}{4}}-e^{-\frac{5}{6}}\right]\times 0.02}{0.1159}=0.0444$$

$\mathbf{P}\left(A_3 \middle| B\right)=1-0.1908-0.0444=0.7648$

所以若某人得病，他的年龄最可能的是**50**岁以上.

第 *21*－*22* 页《二维随机变量》

一．1. **B**　　2. **C**

二．1. $\mathbf{F}\left(b,c\right)-\mathbf{F}\left(a,c\right)$　　2. **3**　　3. $p=\dfrac{10!}{1!5!3!1!}0.07\times0.43^5\times0.35^3\times0.15$

三．1. 教材习题三$\left(\mathbf{A}\right)$三第 1 题

显然X_1,X_2都只能取$0,1$，且

$$\mathbf{P}\left(X_1=0,X_2=0\right)=\mathbf{P}\left(Y\le1,Y\le2\right)=\mathbf{P}\left(Y\le1\right)=\mathbf{F}_Y\left(1\right)=1-e^{-1};$$

$$\mathbf{P}\left(X_1=0,X_2=1\right)=\mathbf{P}\left(Y\le1,Y>2\right)=\mathbf{P}\left(\varnothing\right)=0;$$

$$\mathbf{P}\left(X_1=1,X_2=0\right)=\mathbf{P}\left(Y>1,Y\le2\right)=\mathbf{P}\left(1<Y\le2\right)$$

$$=\mathbf{F}_Y\left(2\right)-\mathbf{F}_Y\left(2\right)=e^{-1}-e^{-2};$$

$$\mathbf{P}\left(X_1=1,X_2=1\right)=\mathbf{P}\left(Y>1,Y>2\right)=\mathbf{P}\left(Y>2\right)=e^{-2};$$

故$\left(X_1,X_2\right)$的联合分布律为

$X\backslash Y$	0	1
0	$1-e^{-1}$	0
1	$e^{-1}-e^{-2}$	e^{-2}

.

2. 教材习题三$\left(\mathbf{A}\right)$三第 3 题

显然，X 可取$0,1,2,3$，Y 可取$0,1,2$，且

$\mathbf{P}\left(X=0,Y=0\right)=\mathbf{P}\left(\varnothing\right)=0;$　　$\mathbf{P}\left(X=0,Y=1\right)=\mathbf{P}\left(\varnothing\right)=0;$

$\mathbf{P}\left(X=0,Y=2\right)=\dfrac{C_3^0C_2^2C_2^2}{C_7^4}=\dfrac{1}{35};$　　$\mathbf{P}\left(X=1,Y=0\right)=\mathbf{P}\left(\varnothing\right)=0;$

$\mathbf{P}\left(X=1,Y=1\right)=\dfrac{C_3^1C_2^1C_2^2}{C_7^4}=\dfrac{6}{35};$　　$\mathbf{P}\left(X=1,Y=2\right)=\dfrac{C_3^1C_2^2C_2^1}{C_7^4}=\dfrac{6}{35};$

$\mathbf{P}\left(X=2,Y=0\right)=\dfrac{C_3^2C_2^0C_2^2}{C_7^4}=\dfrac{3}{35};$　　$\mathbf{P}\left(X=2,Y=1\right)=\dfrac{C_3^2C_2^1C_2^1}{C_7^4}=\dfrac{12}{35};$

$\mathbf{P}\left(X=2,Y=2\right)=\dfrac{C_3^2C_2^2C_2^0}{C_7^4}=\dfrac{3}{35}$;　　　$\mathbf{P}\left(X=3,Y=0\right)=\dfrac{C_3^3C_2^0C_2^1}{C_7^4}=\dfrac{2}{35}$;

$\mathbf{P}\left(X=3,Y=1\right)=\dfrac{C_3^3C_2^1C_2^0}{C_7^4}=\dfrac{2}{35}$;　　　$\mathbf{P}\left(X=3,Y=2\right)=\mathbf{P}\left(\varnothing\right)=0.$

则$\left(X,Y\right)$的联合分布律为

$X\setminus Y$	0	1	2
0	0	0	$1/35$
1	0	$6/35$	$6/35$
2	$3/35$	$12/35$	$3/35$
3	$2/35$	$2/35$	0

3. 教材习题三$\left(\mathbf{A}\right)$三第 4 题

（1）$1=\iint\limits_{R^2}f\left(x,y\right)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}ce^{-\left(2x+4y\right)}dy=\dfrac{c}{8}\Rightarrow c=8$

（2）$\mathbf{P}\left(X>2\right)=\mathbf{P}\left(X>2,Y<+\infty\right)=\int_2^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)dy$

$$=8\int_2^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}e^{-\left(2x+4y\right)}dy=\int_2^{+\infty}2e^{-2x}dx\int_0^{+\infty}4e^{-4y}dy=e^{-4};$$

$$\mathbf{P}\left(X>Y\right)=\int_0^{+\infty}2e^{-2x}dx\int_0^{x}4e^{-4y}dy=\int_0^{+\infty}\left(1-e^{-4x}\right)2e^{-2x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}2e^{-2x}dx-\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}e^{-6x}dx=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3};$$

$$\mathbf{P}\left(X+Y<1\right)=\int_0^{1}2e^{-2x}dx\int_0^{1-x}4e^{-4y}dy=\int_0^{1}\left(1-e^{-4\left(1-x\right)}\right)2e^{-2x}dx$$

$$=\int_0^{1}e^{-2x}d\left(2x\right)-e^{-4}\int_0^{1}e^{2x}d\left(2x\right)=1-2e^{-2}+e^{-4};$$

（3）显然，当$x\le 0$或$y\le 0$时，必有$\mathbf{F}\left(x,y\right)=\mathbf{P}\left(X\le x,Y\le y\right)=0;$

而当$x>0,y>0$时，$\mathbf{F}\left(x,y\right)=\int_{-\infty}^{x}dt\int_{-\infty}^{y}f\left(t,s\right)ds$

$$=\int_0^x 2e^{-2t}dt\int_0^y 4e^{-4s}ds=\left(1-e^{-2x}\right)\left(1-e^{-4y}\right)$$

综上得 $\mathbf{F}\left(x,y\right)=\begin{cases}\left(1-e^{-2x}\right)\left(1-e^{-4y}\right), & x>0,y>0\\ 0, & others\end{cases}.$

第 23－24 页《边缘分布、边缘密度及独立性》

一．1. **D**（利用分布函数的性质判断）　　2. **B**（利用密度函数的特征判断）　　3. **C**

二．1. $\mathbf{0}$　　2. $\mathbf{F}\left(x\right)\left(1-\mathbf{F}\left(y\right)\right)$　　3. $\dfrac{1}{2}$

三．1. 教材习题三$\left(\mathbf{A}\right)$三第 6 题

$X\setminus Y$	y_1	y_2	y_3	$\mathrm{P}\left(X=x_i\right)=p_{i.}$
x_1	$1/24$	$1/8$	$1/12$	$1/4$
x_2	$1/8$	$3/8$	$1/24$	$3/4$
$\mathrm{P}\left(Y=y_j\right)=p_{.j}$	$1/6$	$1/2$	$1/3$	1

2. 教材习题三$\left(\mathbf{A}\right)$三第 8 题

（1）$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)dy=\int_0^{\pi/2}dx\int_0^1\frac{A\cos x}{\sqrt{1-y^2}}dy=A\int_0^{\pi/2}\cos x dx\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy$$

$$=A\left(\pi/2\right)\Rightarrow A=\frac{2}{\pi};$$

（2）$$f_X\left(x\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)dy=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cos x\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy, & 0<x<\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & others\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\cos x, & 0<x<\pi/2\\ 0, & others\end{cases};$$

$$f_Y\left(y\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)dx=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos x dy, & 0<y<1\\ 0, & others\end{cases}$$

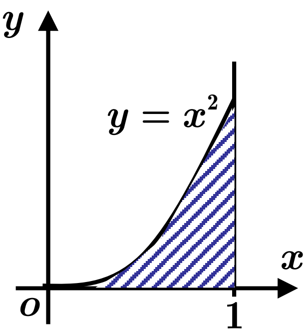
$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1\\ 0, & others\end{cases};$$

（3）$P\left(X\le\dfrac{\pi}{3}\right)=\int_{-\infty}^{\pi/3}f_X(x)dx=\int_0^{\pi/3}\cos x dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2};$

$P\left(Y\ge\dfrac{1}{2}\right)=\int_{1/2}^{+\infty}f_Y(y)dy=\int_{1/2}^{1}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}dx=\dfrac{2}{3};$

（4）由 3 个密度函数可知 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y),\forall x,y\in R$，所以 X 与 Y 相互独立!

3. 教材习题三$(\mathbf{A})$三第 9 题



如图，密度函数不为零的区域即图中阴影部分

$\Omega=\left\{(x,y):0<x<1,0<y<x^2\right\}$，

其面积为 $m(\Omega)=\int_0^1 x^2dx=\dfrac{1}{3}$，所以

（1）联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}3, & 0<x<1,0<y<x^2\\ 0, & others\end{cases}$$

（2）边缘密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{x^2}3dy=3x^2, & 0<x<1\\ 0, & others\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{\sqrt{y}}^{1}3dx=3\left(1-\sqrt{y}\right), & 0<y<1\\ 0, & others\end{cases}$$

（3）在公共连续点$(1/2,1/8)$处，$f_X(x)f_Y(y)\ne f(x,y)$，所以 X 与 Y 不相互独立!

第 25－26 页《条件分布》

1. 教材习题三$(\mathbf{A})$三第 10 题

前面已经得到

$X\setminus Y$	0	1	2
0	0	0	$1/35$
1	0	$6/35$	$6/35$
2	$3/35$	$12/35$	$3/35$
3	$2/35$	$2/35$	0

，由此易得

（1） $X\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 1/35 & 12/35 & 18/35 & 4/35\end{bmatrix}$ $Y\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 5/35 & 20/35 & 10/35\end{bmatrix}$

（2） $\mathrm{P}\left(X=1\middle|Y=2\right)=\dfrac{\mathrm{P}\left(X=1,Y=2\right)}{\mathrm{P}\left(Y=2\right)}=\dfrac{6/35}{10/35}=\dfrac{3}{5}$;

$$\mathrm{P}\left(Y=1\middle|X=2\right)=\frac{\mathrm{P}\left(X=2,Y=1\right)}{\mathrm{P}\left(X=2\right)}=\frac{12/35}{18/35}=\frac{2}{3};$$

$$\mathrm{P}\left(Y=1\middle|X\neq 2\right)=\frac{\mathrm{P}\left(X\neq 2,Y=1\right)}{\mathrm{P}\left(X\neq 2\right)}=\frac{\mathrm{P}\left(Y=1\right)-\mathrm{P}\left(X=2,Y=1\right)}{1-\mathrm{P}\left(X=2\right)}$$

$$=\frac{20/35-12/35}{1-18/35}=\frac{8}{17};$$

（3） $X\middle|Y=2\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 1/10 & 6/10 & 3/10 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1/10 & 6/10 & 3/10\end{bmatrix}$

（4）由于 $\mathrm{P}\left(X=2,Y=3\right)\neq\mathrm{P}\left(X=2\right)\mathrm{P}\left(Y=3\right)$，所以 X 与 Y 不独立！

2. 教材习题三$\left(\mathbf{A}\right)$三第 11 题

由前面的计算结果知，

当 $0<y<1$ 时，$f_{X|Y}\left(x\middle|y\right)=\dfrac{f\left(x,y\right)}{f_Y\left(y\right)}=\begin{cases}\dfrac{3}{3\left(1-\sqrt{y}\right)}=\dfrac{1}{1-\sqrt{y}}, & \sqrt{y}<x<1\\ 0, & others\end{cases}$

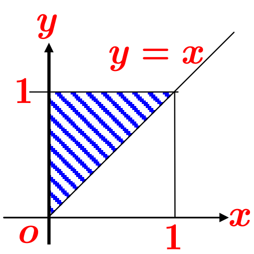
当 $0<x<1$ 时，$f_{Y|X}\left(y\middle|x\right)=\dfrac{f\left(x,y\right)}{f_X\left(x\right)}=\begin{cases}\dfrac{3}{3x^2}=\dfrac{1}{x^2}, & 0<y<x^2\\ 0, & others\end{cases}$

显然 $f_{X|Y}\left(x\middle|1/4\right)=\dfrac{f\left(x,1/4\right)}{f_Y\left(1/4\right)}=\begin{cases}\dfrac{3}{3\left(1-\sqrt{1/4}\right)}=2, & 1/2<x<1\\ 0, & others\end{cases}$，所以

$$P\left(X<2/3 \middle| Y=1/4\right)=\int_{-\infty}^{2/3} f_{X|Y}\left(x \middle| 1/4\right)dx=\int_{1/2}^{2/3} 2dx=\frac{1}{3};$$

$$P\left(X<2/3 \middle| Y>1/4\right)=\frac{P\left(X<2/3, Y>1/4\right)}{P\left(Y>1/4\right)}=\frac{\int_{-\infty}^{2/3} dx\int_{1/4}^{+\infty} f(x,y)dy}{\int_{1/4}^{+\infty} f_Y(y)dy}$$

$$=\frac{\int_{1/2}^{2/3} dx\int_{1/4}^{x^2} 3dy}{\int_{1/4}^{1} 3\left(1-\sqrt{y}\right)dy}=\frac{\frac{5}{108}}{\frac{1}{2}}=\frac{5}{54}$$



3. 教材习题三$(\mathbf{A})$三第 14 题

如图，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x}^{1} 3ydy=\frac{3}{2}\left(1-x^2\right), & 0<x<1\\ 0, & others\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{0}^{y} 3ydx=3y^2, & 0<y<1\\ 0, & others\end{cases}$$

显然可见，$f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$，所以 X 与 Y 不相互独立！

当$0<x<1$时，$f_{Y|X}\left(y \middle| x\right)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{3y}{3\left(1-x^2\right)/2}=\frac{2y}{1-x^2}, & x<y<1\\ 0, & others\end{cases}$

当$0<y<1$时，$f_{X|Y}\left(x \middle| y\right)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{3y}{3y^2}=\frac{1}{y}, & 0<x<y\\ 0, & others\end{cases}$

4. 教材习题三$(\mathbf{A})$三第 12 题

由题意知，

当$0<x<1$时，$f_{Y|X}\left(y \middle| x\right)=\begin{cases}1/x, & 0<y<x\\ 0, & others\end{cases}$，

从而有

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}3x, & 0<x<1, 0<y<x\\ 0, & others\end{cases}$$

故有

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 3xdx=\frac{3}{2}(1-y^2), & 0<y<1\\ 0, & others\end{cases}$$

于是有$\mathrm{P}(Y<1/2)=\int_{-\infty}^{1/2}f_Y(y)dy=\int_0^{1/2}\frac{3}{2}(1-y^2)dy=\frac{11}{16}$

第 27－28 页《二维随机变量函数的分布》

一．1. $\mathbf{0.64}$　　2. $p^2+(1-p)^2$

二．1. 教材习题三$(\mathbf{A})$三第 13 题

前面已经得到

$X\backslash Y$	0	1	2
0	0	0	$1/35$
1	0	$6/35$	$6/35$
2	$3/35$	$12/35$	$3/35$
3	$2/35$	$2/35$	0

，由此易得

(X,Y)	$(0,2)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,0)$	$(3,1)$
p_{ij}	$1/35$	$6/35$	$6/35$	$3/35$	$12/35$	$3/35$	$2/35$	$2/35$

$\Rightarrow$

(X,Y)	$(0,2)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,0)$	$(3,1)$
p_{ij}	$1/35$	$6/35$	$6/35$	$3/35$	$12/35$	$3/35$	$2/35$	$2/35$
$Z=X+Y$	2	2	3	2	3	4	3	4
$U=\max(X,Y)$	2	1	2	2	2	2	3	3
$V=\min(X,Y)$	0	1	1	0	1	2	0	1

$$\Rightarrow Z\sim\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 10/35 & 20/35 & 5/35\end{bmatrix}\qquad U\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 6/35 & 25/35 & 4/35\end{bmatrix}$$

$$V\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 6/35 & 26/35 & 3/35\end{bmatrix}$$

2. 教材习题三$\left(\mathbf{A}\right)$三第 14$\left(\mathbf{3}\right)$题

显然，$R\left(Z\right)=\left(0,1\right)$，对任意$z\in\left(0,1\right)$，有

$$F_Z\left(z\right)=P\left(Z\le z\right)=P\left(Y-X\le z\right)=\iint\limits_{y-x\le z} f\left(x,y\right)dxdy$$

$$=\int_0^z dy\int_0^y 3ydx+\int_z^1 dy\int_{y-z}^y 3ydx=\int_0^z 3y^2dy+\int_z^1 3yzdy$$

$$=z^3+\frac{3}{2}z\left(1-z^2\right)=\frac{3}{2}z-\frac{1}{2}z^3$$

此时，Z的密度函数为$f_Z\left(z\right)=F_Z'\left(z\right)=\frac{3}{2}\left(1-z^2\right)$，综上得$Z$的密度函数为

$$f_Z\left(z\right)=\begin{cases}\frac{3}{2}\left(1-z^2\right), & z\in\left(0,1\right)\\ 0 & z\notin\left(0,1\right)\end{cases}.$$

3. 教材习题三$\left(\mathbf{A}\right)$三第 15 题

显然，$R\left(Z\right)=\left(0,1\right)$，对任意$z\in\left(0,1\right)$，有

$$F_Z\left(z\right)=P\left(Z\le z\right)=P\left(XY\le z\right)=\iint\limits_{xy\le z} f\left(x,y\right)dxdy$$

$$=\int_0^z dx\int_0^1 dy+\int_z^1 dx\int_0^{z/x} dy=\int_0^z dx+\int_z^1\left(z/x\right)dx=z-z\ln z$$

此时，Z的密度函数为$f_Z\left(z\right)=F_Z'\left(z\right)=-\ln z$，综上得$Z$的密度函数为

$$f_Z\left(z\right)=\begin{cases}-\ln z, & z\in\left(0,1\right)\\ 0 & z\notin\left(0,1\right)\end{cases}.$$

4. 教材习题三$\left(\mathbf{A}\right)$三第 16 题

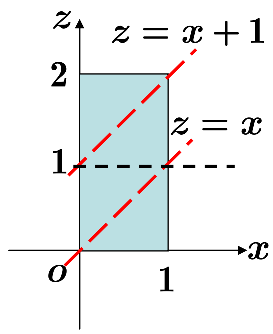
显然，$R\left(Z\right)=\left[0,2\right]$，对任意$z\in\left(0,2\right)$，有$f_Z\left(z\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(x\right)f_Y\left(z-x\right)dx$，要使

被积函数不为零，需$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le z-x\le 1\end{cases}$，即$\begin{cases}0\le x\le 1\\ x\le z\le x+1\end{cases}$，

如图，从而有

（1） 当$z \in [0,1]$时，$f_Z(z) = \int_0^z 1dx = z$；

（2） 当$z \in [1,2]$时，$f_Z(z) = \int_{z-1}^1 1dx = 2 - z$



综上得Z的密度函数为$f_Z(z) = \begin{cases} z, & z \in [0,1] \\ 2 - z, & z \in [1,2] \\ 0, & others \end{cases}$.

5. 教材习题三(A)三第 17 题

显然，$R(Z) = (0, +\infty)$，对任意$z > 0$，有

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X/Y \le z) = \iint_{x/y \le z} f(x,y)dxdy$$

$$= \int_0^{+\infty} dy \int_0^{yz} e^{-x-y}dx = \int_0^{+\infty} e^{-y}dy \int_0^{yz} e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} e^{-y}(1 - e^{-yz})dy$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-y}dy - \int_0^{+\infty} e^{-y(z+1)}dy = 1 - \frac{1}{z+1}$$

此时，Z的密度函数为$f_Z(z) = F_Z'(z) = (1+z)^{-2}$，综上得$Z$的密度函数为

$$f_Z(z) = \begin{cases} (1+z)^{-2}, & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}.$$

6. 教材习题三(A)三第 21 题

显然T_i的分布函数为$F_i(t) = F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-0.2t}, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$，$i = 1, 2, \cdots, 5$.

（1）并联时，系统的寿命$T_{并} = \max\limits_{1 \le i \le 5}\{X_i\}$，其分布函数为

$$F_{并}(t) = (F(t))^5 = \begin{cases} (1 - e^{-0.2t})^5, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases},$$

从而其密度函数为 $f_{并}(t)=\begin{cases} e^{-0.2t}\left(1-e^{-0.2t}\right)^{4}, & t>0 \\ 0, & t\le 0 \end{cases}$；

使用寿命大于 1 万小时的概率为

$$\mathrm{P}\left(T_{并}>1\right)=1-\mathrm{F}_{并}(1)=1-\left(1-e^{-0.2}\right)^{5}=0.9998;$$

（2）串联时，系统的寿命 $T_{串}=\min\limits_{1\le i\le 5}\left\{X_i\right\}$，其分布函数为

$$\mathrm{F}_{串}(t)=1-\left(1-\mathrm{F}(t)\right)^{5}=\begin{cases} 1-e^{-t}, & t>0 \\ 0, & t\le 0 \end{cases},$$

从而其密度函数为 $f_{串}(t)=\begin{cases} e^{-t}, & t>0 \\ 0, & t\le 0 \end{cases}$；

使用寿命大于 1 万小时的概率为

$$\mathrm{P}\left(T_{串}>1\right)=1-\mathrm{F}_{串}(1)=1-\left(1-e^{-1}\right)=e^{-1}=0.3679.$$

第 29－30 页《第三章综合练习》

一．1. 教材习题三(B)一第 2 题 (A)

2. 教材习题三(B)一第 3 题 (D)

显然，X 的分布函数为 $\mathrm{F}_X(x)=\begin{cases} 1-e^{\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$

Y 的分布函数为 $\mathrm{F}_Y(y)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1/2, & 0\le x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$

从而 N 的分布函数为

$$\mathrm{F}_N(z)=1-\left[1-\mathrm{F}_X(z)\right]\left[1-\mathrm{F}_Y(z)\right]=\begin{cases} 0, & z<0 \\ \frac{1}{2}, & z=0 \\ 1-\frac{e^{-\lambda z}}{2}, & 0<z<1 \\ 1, & z\ge 1 \end{cases}$$

二．1. 教材习题三(B)二第 3 题 $\frac{1}{2}$

(X,Y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
p_{ij}	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$
M	0	1	1	1
N	0	0	0	1

2. 类似教材习题三(B)三第 5 题 $\quad f_Z(z)=\dfrac{1}{2}\left[f_Y(z)+f_Y(z-1)\right]$

三．1. (1) 由题意有 $Z\big|Y=n\sim \mathrm{B}(n,0.2)$，所以 $\mathrm{P}\left(Z=k\big|Y=n\right)=\mathrm{C}_n^k 0.2^k 0.8^{n-k}$，

$k=0,1,2,\cdots,n$；

(2) 当 $k\le n$ 时，$\mathrm{P}(Z=k,Y=n)=\mathrm{P}(Y=n)\mathrm{P}\left(Z=k\big|Y=n\right)$

$$=\frac{30^n}{n!}e^{-30}\mathrm{C}_n^k 0.2^k 0.8^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n$$

当 $k>n$ 时，$\mathrm{P}(Z=k,Y=n)=0$

2. 教材习题三(B)三第 2 题

先计算 X 与 Y 的（边缘）密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\begin{cases}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\frac{1}{4}(1+xy)\,dy=\frac{1}{2}, & |x|<1\\ 0, & |x|\ge 1\end{cases},$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\begin{cases}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\frac{1}{4}(1+xy)\,dx=\frac{1}{2}, & |y|<1\\ 0, & |y|\ge 1\end{cases}$$

易见，在三个密度函数的公共连续点$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$处，$f(x,y)=\dfrac{5}{16}\ne\dfrac{1}{4}=f_X(x)f_Y(y)$，

所以 X 与 Y 不独立！

令 $U=X^2,V=Y^2$，显然 $R(U)=R(V)=[0,1]$，当 $0<u<1,0<v<1$ 时，

$$\mathrm{F}(u,v)=\mathrm{P}(U\le u,V\le v)=\mathrm{P}\left(X^2\le u,Y^2\le v\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(-\sqrt{u}\le X\le\sqrt{u},-\sqrt{v}\le Y\le\sqrt{v}\right)$$

$$=\int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}}\left(\int_{-\sqrt{v}}^{-\sqrt{v}}\frac{1}{4}(1+xy)\,dy\right)dx=\sqrt{uv}$$

从而$\left(U,V\right)$的联合密度函数为

$$\psi\left(u,v\right)=\frac{\partial^2 F\left(u,v\right)}{\partial u\partial v}=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{uv}}, & 0<u<1,0<v<1\\ 0, & others\end{cases}$$

而U与V的（边缘）密度函数为

$$\psi_U\left(u\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(u,v\right)dv=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1\frac{dv}{4\sqrt{uv}}=\frac{1}{2\sqrt{u}}, & 0<u<1\\ 0, & others\end{cases},$$

$$\psi_V\left(v\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(u,v\right)du=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1\frac{du}{4\sqrt{uv}}=\frac{1}{2\sqrt{v}}, & 0<v<1\\ 0, & others\end{cases},$$

显然可见，对任意的u,v，都有$\psi\left(u,v\right)=\psi_U\left(u\right)\psi_V\left(v\right)$，所以$U$与$V$相互独立，

即X^2与Y^2相互独立！

3. 教材习题三$\left(\mathrm{B}\right)$三第 6 题

$\left(X,Y\right)$的联合密度为$f\left(x,y\right)=\begin{cases}1/4, & \left(x,y\right)\in\left[1,3\right]\times\left[1,3\right]\\ 0, & others\end{cases}$

显然$U=\left|X-Y\right|$的值域为$R\left(U\right)=\left[0,2\right]$，对任意的$u\in\left(0,2\right)$，有

$$F_U\left(u\right)=P\left(U\le u\right)=P\left(\left|X-Y\right|\le u\right)=\iint\limits_{\left|x-y\right|\le u}f\left(x,y\right)dxdy$$

$$=\frac{4-\left(2-u\right)^2}{4}=u-\frac{1}{4}u^2,$$

从而密度函数为$p_U\left(u\right)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}u, & u\in\left(0,2\right)\\ 0, & u\notin\left(0,2\right)\end{cases}$

第 31－32 页

一. 1. **C**　　2. **B**　　3. **B**

二. 1. $a=2,\ b=8$

2. **780** 设抽得**3**张奖券的总金额为ξ，则$\xi \sim \begin{bmatrix} 600 & 900 & 1200 \\ C_8^3/C_{10}^3 & C_8^2C_2^1/C_{10}^3 & C_8^1C_2^2/C_{10}^3 \end{bmatrix}$，从而

有$E(\xi)=600\times\frac{C_8^3}{C_{10}^3}+900\times\frac{C_8^2C_2^1}{C_{10}^3}+1200\times\frac{C_8^1C_2^2}{C_{10}^3}=780$

3. $-\frac{67}{45}$, $9\frac{8}{15}$

三．1. 教材习题四(A)三第 2 题

显然，X可取$1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,12$，其分布律为

X	1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	12
p_i	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$

平均得分为$E(X)=1/6\sum_{i=1}^{5}i+1/36\sum_{i=7}^{12}i=\frac{15}{6}+\frac{57}{36}=\frac{147}{36}=\frac{49}{12}$

2. 教材习题四(A)三第 4 题

由分布函数的右连续性得$A-\frac{B}{25}=0(1)$，再由$F(+\infty)=1$得$A=1(2)$，联立$(1)(2)$

两式即得$A=1,B=25$，从而密度函数为$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le 5\\ 50x^{-3}, & x>5\end{cases}$，于是动

物的平均寿命为$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{5}^{+\infty}x50x^{-3}dx=50\int_{5}^{+\infty}x^{-2}dx=10$

3. 教材习题四(A)三第 5 题

设工厂售出一台设备获利为Y，则$Y=g(X)=\begin{cases}600, & X<1\\ 1000, & X\ge 1\end{cases}$，从而有

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)g(x)dx=\int_{0}^{1}0.25e^{-0.25x}\times 600dx+\int_{1}^{+\infty}0.25e^{-0.25x}\times 1000dx$$

$$=600\left(1-e^{-0.25}\right)+1000e^{-0.25}=600+400e^{-0.25}$$

4. 教材习题四(A)三第 7 题

显然$E(X)=1, D(X)=1, E(Y)=2, D(Y)=2,$ 从而有

（1） $\mathrm{E}(X-Y)=\mathrm{E}(X)-\mathrm{E}(Y)=1-2=-1;$

（2） $\mathrm{E}(2X^2+3Y^2)=2\mathrm{E}(X^2)+3\mathrm{E}(Y^2)$

$$=2\left[\mathrm{D}(X)+(\mathrm{E}(X))^2\right]+3\left[\mathrm{D}(Y)+(\mathrm{E}(Y))^2\right]=22;$$

（3）若 X 与 Y 相互独立，则 $\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)=2.$

5. Y 表每次检验的次品数，则 $Y\sim \mathrm{B}(10,0.1)$

$$p=\mathrm{P}(Y>1)=1-0.9^{10}-\mathrm{C}_{10}^{1}0.1^{1}0.9^{10}=0.2639$$

$$Z\sim \mathrm{B}(4,0.2639),\quad \mathrm{E}(X)=4\times 0.2639=1.06$$

第 *33－34* 页

一. 1. A　　2. C　　3. B

二. 1. 0.9　　2. $2a^2$　　3. $k!\dfrac{1}{2^k}$

三. 1. 教材习题四(A)三第 10 题

$$\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}x\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=0;$$

$$\mathrm{E}(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{1}x^2\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2};$$

$$\left(\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\mathrm{C}\right)$$

$$\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2=\frac{1}{2}.$$

2. 教材习题四(A)三第 13 题

$$\mathrm{E}(Y)=\int_{0}^{1/2}2x^2\times 2dx=\frac{1}{6};\quad \mathrm{E}(Y^2)=\int_{0}^{1/2}(2x^2)^2\times 2dx=\frac{1}{20};$$

$$\mathrm{D}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-(\mathrm{E}(Y))^2=\frac{1}{20}-\frac{1}{36}=\frac{1}{45}$$

3. 教材习题四$\left(\mathbf{A}\right)$三第 12 题

由于$X \sim U\left(-1,3\right), Y \sim e\left(2\right), Z \sim \Gamma\left(2,2\right)$，所以

$$\mathrm{E}\left(X\right)=1, \mathrm{E}\left(Y\right)=\frac{1}{2}, \mathrm{E}\left(Z\right)=1, \mathrm{D}\left(X\right)=\frac{4}{3}, \mathrm{D}\left(Y\right)=\frac{1}{4}, \mathrm{D}\left(Z\right)=\frac{1}{2},$$

且X,Y,Z相互独立，从而有

（1）$\mathrm{E}\left(U\right)=\mathrm{E}\left(3X-2XY+4YZ-2\right)$

$$=3\mathrm{E}\left(X\right)-2\mathrm{E}\left(X\right)\mathrm{E}\left(Y\right)+4\mathrm{E}\left(Y\right)\mathrm{E}\left(Z\right)-2$$

$$=3\times 1-2\times 1\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{2}\times 1-2=2$$

（2）$\mathrm{D}\left(V\right)=\mathrm{D}\left(X-2Y+3Z-2\right)$

$$=\mathrm{D}\left(X\right)+4\mathrm{D}\left(Y\right)+9\mathrm{D}\left(Z\right)=\frac{4}{3}+4\times\frac{1}{4}+9\times\frac{1}{2}=\frac{41}{6}$$

4. $\mathrm{E}\left(X-c\right)^2=\mathrm{D}\left(X-c\right)+\left[\mathrm{E}\left(X-c\right)\right]^2=\mathrm{D}\left(X\right)+\left[\mathrm{E}\left(X-c\right)\right]^2\geq \mathrm{D}\left(X\right)$

5. **1.5**

设$X_i=\begin{cases}1, & 第i个部件需要调整\\ 0 & 第i个部件不需调整\end{cases}$，$i=1,2,3,4,5$，由题意知$X_1,X_2,X_3,X_4,X_5$相互独立且$X=\sum_{i=1}^{5}X_i$，$X_i\sim\begin{bmatrix}1 & 0\\ i/10 & 1-i/10\end{bmatrix}, i=1,2,3,4,5$，从而有

$$\mathrm{E}\left(X_i\right)=\frac{i}{10}, \mathrm{E}\left(X_i^2\right)=\frac{i}{10}, \mathrm{D}\left(X_i\right)=\frac{i\left(10-i\right)}{100}, i=1,2,3,4,5,$$

所以有

$$\mathrm{E}\left(X\right)=\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{5}X_i\right)=\sum_{i=1}^{5}\mathrm{E}\left(X_i\right)=\frac{1+2+3+4+5}{10}=1.5,$$

$$\mathrm{D}\left(X\right)=\mathrm{D}\left(\sum_{i=1}^{5}X_i\right)=\sum_{i=1}^{5}\mathrm{D}\left(X_i\right)=\sum_{i=1}^{5}\frac{i\left(10-i\right)}{100}=\frac{9+16+21+24+25}{100}=0.95$$

第 35－38 页《协方差与相关系数》

一. 1. **B**　　2. **A**　　3. **C**

二. 1. $\frac{4}{3}+\frac{1}{2\sqrt{3}}$ 2. $\frac{1}{4}$ 3. $\frac{2}{3}\sigma^2$

三. 1. 教材习题四$\left(\mathbf{A}\right)$三第 15 题

$$\mathrm{E}\left(XY\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}xyf\left(x,y\right)dy=\int_{0}^{1}xdx\int_{0}^{1}y\left(2-x-y\right)dy=\frac{1}{6}$$

边缘密度函数为

$$f_X\left(x\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)dy=\begin{cases}\int_0^1\left(2-x-y\right)dy=\frac{3}{2}-x, & 0\le x\le 1\\ 0, & x\notin\left[0,1\right]\end{cases}$$

$$f_Y\left(y\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)dx=\begin{cases}\int_0^1\left(2-x-y\right)dx=\frac{3}{2}-y, & 0\le y\le 1\\ 0, & y\notin\left[0,1\right]\end{cases}$$

从而有

$$\mathrm{E}\left(X\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X\left(x\right)dx=\int_0^1 x\left(3/2-x\right)dx=\frac{5}{12}$$

$$\mathrm{E}\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X\left(x\right)dx=\int_0^1 x^2\left(3/2-x\right)dx=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{D}\left(X\right)=\mathrm{E}\left(X^2\right)-\left(\mathrm{E}\left(X\right)\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{5^2}{12^2}=\frac{36}{144}$$

$$\mathrm{E}\left(Y\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y\left(y\right)dy=\int_0^1 y\left(3/2-y\right)dy=\frac{5}{12}$$

$$\mathrm{E}\left(Y^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f_Y\left(y\right)dy=\int_0^1 y^2\left(3/2-y\right)dy=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{D}\left(Y\right)=\mathrm{E}\left(Y^2\right)-\left(\mathrm{E}\left(Y\right)\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{5^2}{12^2}=\frac{36}{144}$$

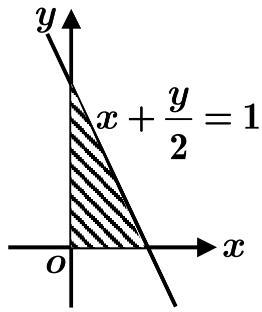
$$\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)=\mathrm{E}\left(XY\right)-\mathrm{E}\left(X\right)\mathrm{E}\left(Y\right)=\frac{1}{6}-\frac{5^2}{12^2}=-\frac{1}{144}$$

协方差阵为$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}\mathrm{D}(X) & \mathrm{Cov}(X,Y)\\ \mathrm{Cov}(X,Y) & \mathrm{D}(Y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{36}{144} & -\frac{1}{144}\\ -\frac{1}{144} & \frac{36}{144}\end{bmatrix}$

相关系数为$R(X,Y)=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{D}(X)}\sqrt{\mathrm{D}(Y)}}=\dfrac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\frac{36}{144}}\sqrt{\frac{36}{144}}}=-\dfrac{1}{36}$

2. 教材习题四$(\mathbf{A})$三第 16 题

如图，联合密度为



$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2-2x\\ 0, & others\end{cases}$$

$$\mathrm{E}(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dy$$

$$=\int_0^1 xdx\int_0^{2-2x}ydy=\frac{7}{6}$$

边缘密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{2-2x}1dy=2-2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & x\notin[0,1]\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{1-y/2}1dx=1-\frac{y}{2}, & 0\le y\le 2\\ 0, & y\notin[0,2]\end{cases}$$

从而有

（1）$\mathrm{E}(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1 x(2-2x)dx=\frac{1}{3}$

$\mathrm{E}(Y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^2 y(1-y/2)dy=\frac{2}{3}$

（2）$\mathrm{E}(X^2)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)dx=\int_0^1 x^2(2-2x)dx=\frac{1}{6}$

$$\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2=\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$$

$$\mathrm{E}(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f_Y(y)dy=\int_0^2 y^2(1-y/2)dy=\frac{2}{3}$$

$$\mathrm{D}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-(\mathrm{E}(Y))^2=\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$$

（3）$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=-\frac{1}{18}$

$$R(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{D}(X)}\sqrt{\mathrm{D}(Y)}}=\frac{-\frac{1}{18}}{\sqrt{\frac{1}{18}}\sqrt{\frac{2}{9}}}=-\frac{1}{2}$$

（4）因 $R(X,Y)(=-1/2)\neq 0$，即 X 与 Y 相关，当然不独立.

3. 教材习题四(A)三第 17 题

$$\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y)=\mathrm{Cov}(X,X)+\mathrm{Cov}(Y,X)-\mathrm{Cov}(X,Y)-\mathrm{Cov}(Y,Y)$$

$$=\mathrm{D}(X)-\mathrm{D}(Y)$$

4. 教材习题四(A)三第 18 题

直接由上题的结论有

$$\mathrm{Cov}(U,V)=\mathrm{Cov}(\alpha X+\beta Y,\alpha X-\beta Y)=\mathrm{D}(\alpha X)-\mathrm{D}(\beta Y)$$

$$=\alpha^2\mathrm{D}(X)-\beta^2\mathrm{D}(Y)=\alpha^2\sigma^2-\beta^2\sigma^2=(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2$$

因 X 与 Y 相互独立，故

$$\mathrm{D}(U)=\mathrm{D}(\alpha X+\beta Y)=\alpha^2\mathrm{D}(X)+\beta^2\mathrm{D}(Y)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$$

$$\mathrm{D}(V)=\mathrm{D}(\alpha X-\beta Y)=\alpha^2\mathrm{D}(X)+\beta^2\mathrm{D}(Y)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$$

从而有

$$R(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{D}(X)}\sqrt{\mathrm{D}(Y)}}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2}\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2}}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$$

5. 教材习题四(A)三第 14 题

由联合分布律易得

$$X\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4/9 & 1/3 & 2/9\end{bmatrix},\ Y\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 5/9 & 1/3 & 1/9\end{bmatrix},\ XY\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 5/9 & 2/9 & 2/9\end{bmatrix}$$

所以

（1）$\mathrm{E}(X)=1\times 4/9+2\times 3/9+3\times 2/9=16/9$

$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times 4/9+2^2\times 3/9+3^2\times 2/9=34/9$$

$$\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2=34/9-16^2/9^2=50/81$$

$$\mathrm{E}(Y)=0\times 5/9+1\times 3/9+2\times 1/9=5/9$$

$$\mathrm{E}(Y^2)=0^2\times 5/9+1^2\times 3/9+2^2\times 1/9=7/9$$

$$\mathrm{D}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-[\mathrm{E}(Y)]^2=7/9-5^2/9^2=38/81$$

（2）$\mathrm{E}(XY)=0\times 5/9+1\times 2/9+2\times 2/9=2/3$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)=\frac{2}{3}-\frac{16}{9}\times\frac{5}{9}=-\frac{26}{81}$$

$$R(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{D}(X)}\sqrt{\mathrm{D}(Y)}}=\frac{-26/81}{\sqrt{50/81}\sqrt{38/81}}=-\frac{13}{5\sqrt{19}}$$

（3）$\mathrm{D}(X-3Y)=\mathrm{D}(X)+9\mathrm{D}(Y)-6\mathrm{Cov}(X,Y)$

$$=\frac{50}{81}+9\times\frac{38}{81}-6\times(-)\frac{26}{81}=\frac{548}{81}$$

第 39－40 页《第四章综合练习》

一．1. $\dfrac{8}{9}$　　　2. $\sqrt{\dfrac{m}{m+n}}$

二．1. 教材习题四$(\mathbf{B})$三第 1 题

设应组织y吨货源，才能使平均收益最大，则必有$y\in(2000,4000)$.

设收益为Y，由题意有

$$Y=g(X)=\begin{cases}3y, & X>y\\ 3X-(y-X)=4X-y, & X\le y\end{cases}$$

于是平均收益为

$$\mathbf{E}\left(Y\right)=\mathbf{E}\left(g\left(X\right)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}g\left(x\right)f_X\left(x\right)dx=\int_{2000}^{y}\frac{4x-y}{2000}dx+\int_{y}^{4000}\frac{3y}{2000}dx$$

$$=\frac{1}{1000}\left[-y^2+7000y-2000^2\right]$$

显然可见，当组织的货源为$y=3500$吨时，平均收益$\mathbf{E}\left(Y\right)$最大.

2. 教材习题四$\left(\mathbf{B}\right)$三第 2 题

设X为停车次数，并设

$$X_i=\begin{cases}1, & 第i站有人下车\\ 0, & 第i站无人下车\end{cases},\quad i=1,2,\cdots,10，则 X=\sum_{i=1}^{10}X_i$$

由题意有

$$X_i\sim\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0.9^{20} & 1-0.9^{20}\end{bmatrix},\quad i=1,2,\cdots,10，则\mathbf{E}\left(X_i\right)=1-0.9^{20},\ i=1,2,\cdots,10$$

从而有平均停车次数为$\mathbf{E}\left(X\right)=\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{10}X_i\right)=\sum_{i=1}^{10}\mathbf{E}\left(X_i\right)=10\left(1-0.9^{20}\right).$

3. 教材习题四$\left(\mathbf{B}\right)$三第 6 题

（1）$\mathbf{E}\left(X\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf\left(x\right)dx=\int_{-1}^{1}x\left|x\right|dx=0$，

$$\mathbf{E}\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f\left(x\right)dx=\int_{-1}^{1}x^2\left|x\right|dx=2\int_{0}^{1}x^2xdx=\frac{1}{2},$$

$$\mathbf{D}\left(X\right)=\mathbf{E}\left(X^2\right)-\left[\mathbf{E}\left(X\right)\right]^2=\frac{1}{2}$$

（2）因$\mathbf{E}\left(X\left|X\right|\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\left|x\right|f\left(x\right)dx=\int_{-1}^{1}x\left|x\right|^2dx=0$，$\mathbf{E}\left(X\right)=0$，所以

$$\mathbf{Cov}\left(X,\left|X\right|\right)=\mathbf{E}\left(X\left|X\right|\right)-\mathbf{E}\left(X\right)\mathbf{E}\left(\left|X\right|\right)=0;$$

（3）$\mathbf{Cov}\left(X,\left|X\right|\right)=0$表明$R\left(X,\left|X\right|\right)=0$，从而$X$与$\left|X\right|$不相关！

但X与$\left|X\right|$不是相互独立的．这是因为：对任意$x\in\left(0,1/2\right)$，有$\mathbf{P}\left(X<x\right)<1$，从而

$$\mathrm{P}\left(X < x, \left|X\right| \le x\right) = \mathrm{P}\left(\left|X\right| \le x\right) \ne \mathrm{P}\left(X < x\right)\mathrm{P}\left(\left|X\right| \le x\right)$$

所以 X 与 $\left|X\right|$ 不相互独立！

4. 教材习题四$\left(\mathrm{B}\right)$三第 8 题

证明　由题意知$\left(X,Y\right)$的联合分布律为

$$\mathrm{P}\left(X=1,Y=1\right)=\mathrm{P}\left(AB\right),\ \mathrm{P}\left(X=-1,Y=-1\right)=\mathrm{P}\left(\bar{A}\bar{B}\right)$$
$$\mathrm{P}\left(X=-1,Y=1\right)=\mathrm{P}\left(\bar{A}B\right),\ \mathrm{P}\left(X=1,Y=-1\right)=\mathrm{P}\left(A\bar{B}\right)$$

从而有

$$XY \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \mathrm{P}\left(AB\right)+\mathrm{P}\left(\bar{A}\bar{B}\right) & \mathrm{P}\left(\bar{A}B\right)+\mathrm{P}\left(A\bar{B}\right) \end{bmatrix},$$

故

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(XY\right) &= 1\times\left[\mathrm{P}\left(AB\right)+\mathrm{P}\left(\bar{A}\bar{B}\right)\right]+\left(-1\right)\times\left[\mathrm{P}\left(\bar{A}B\right)+\mathrm{P}\left(A\bar{B}\right)\right] \\ &= \mathrm{P}\left(AB\right)+\mathrm{P}\left(\bar{A}\bar{B}\right)-\mathrm{P}\left(\bar{A}B\right)-\mathrm{P}\left(A\bar{B}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(AB\right)+\mathrm{P}\left(\overline{A\cup B}\right)-\left[\mathrm{P}\left(B\right)-\mathrm{P}\left(AB\right)\right]-\left[\mathrm{P}\left(A\right)-\mathrm{P}\left(AB\right)\right] \\ &= 3\mathrm{P}\left(AB\right)+\left[1-\mathrm{P}\left(A\cup B\right)\right]-\mathrm{P}\left(B\right)-\mathrm{P}\left(A\right) \\ &= 4\mathrm{P}\left(AB\right)+1-2\mathrm{P}\left(B\right)-2\mathrm{P}\left(A\right) \end{aligned}$$

边缘分布律为

$$X \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \mathrm{P}\left(A\right) & \mathrm{P}\left(\bar{A}\right) \end{bmatrix},\quad Y \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \mathrm{P}\left(B\right) & \mathrm{P}\left(\bar{B}\right) \end{bmatrix},$$

故

$$\mathrm{E}\left(X\right)=1\times\mathrm{P}\left(A\right)+\left(-1\right)\times\mathrm{P}\left(\bar{A}\right)=\mathrm{P}\left(A\right)-\mathrm{P}\left(\bar{A}\right)=2\mathrm{P}\left(A\right)-1$$
$$\mathrm{E}\left(Y\right)=1\times\mathrm{P}\left(B\right)+\left(-1\right)\times\mathrm{P}\left(\bar{B}\right)=\mathrm{P}\left(B\right)-\mathrm{P}\left(\bar{B}\right)=2\mathrm{P}\left(B\right)-1$$

于是　X 与 Y 不相关 $\Leftrightarrow \mathrm{E}\left(XY\right)=\mathrm{E}\left(Y\right)\mathrm{E}\left(X\right)$

$$\Leftrightarrow 4\mathrm{P}\left(AB\right)+1-2\mathrm{P}\left(B\right)-2\mathrm{P}\left(A\right)=\left[2\mathrm{P}\left(A\right)-1\right]\left[2\mathrm{P}\left(B\right)-1\right]$$

$\Leftrightarrow \mathrm{P}\left(AB\right)=\mathrm{P}\left(A\right)\mathrm{P}\left(B\right) \Leftrightarrow A$ 与 B 相互独立

第 41－42 页《正态分布》

一．1. **A**

$$p_1 = \mathrm{P}\left(X \le \mu - 2\right) = \Phi\left(\frac{\mu - 2 - \mu}{2}\right) = \Phi\left(-1\right) = 1 - \Phi\left(1\right)$$

$$p_2 = \mathrm{P}\left(Y \ge \mu + 3\right) = 1 - \mathrm{P}\left(Y \le \mu + 3\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu + 3 - \mu}{3}\right) = 1 - \Phi\left(1\right)$$

2. **C**

$$\mathrm{P}\left(\left|X - \mu\right| < q\right) > \mathrm{P}\left(\left|Y - \mu\right| < q\right) \Rightarrow \mathrm{P}\left(\left|\frac{X - \mu}{\sigma_1}\right| < \frac{q}{\sigma_1}\right) > \mathrm{P}\left(\left|\frac{Y - \mu}{\sigma_2}\right| < \frac{q}{\sigma_2}\right)$$

$$\Rightarrow 2\Phi\left(\frac{q}{\sigma_1}\right) - 1 > 2\Phi\left(\frac{q}{\sigma_2}\right) - 1 \Rightarrow \Phi\left(\frac{q}{\sigma_1}\right) > \Phi\left(\frac{q}{\sigma_2}\right) \Rightarrow \sigma_1 < \sigma_1$$

3. **C**

由 $X \sim f\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{3\pi}} e^{\frac{1}{3}\left(2x - x^2 - 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3/2}} e^{-\frac{\left(x-1\right)^2}{2\left(\sqrt{3/2}\right)^2}}$，即 $X \sim \mathrm{N}\left(1, 3/2\right)$，从而

$\mathrm{E}\left(X\right) = 1, \mathrm{D}\left(X\right) = 3/2$

二．1. **0.2**

因 $X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ 且 $\mathrm{P}\left(X > 2\right) = 0.5$，则 $\mu = 2$，$\mathrm{P}\left(X \le 2\right) = 0.5$，从而

$\mathrm{P}\left(0 < X < 2\right) = \mathrm{P}\left(2 < X < 4\right) = 0.3$，所以

$\mathrm{P}\left(X < 0\right) = \mathrm{P}\left(X \le 2\right) - \mathrm{P}\left(0 < X < 2\right) = 0.5 - 0.3 = 0.2$

2. **0.12**

因 $X \sim \mathrm{N}\left(2, 4\right)$ 且 $\mathrm{P}\left(\left|X - 2\right| > a\right) \ge 0.95$，则 $\mathrm{P}\left(\left|\frac{X - 2}{2}\right| \le \frac{a}{2}\right) \le 0.05$，即

$2\Phi\left(a/2\right) - 1 \le 0.05$，所以 $\Phi\left(a/2\right) \le 0.525$，查表得 $a/2 \le 0.06$，因而 $a \le 0.12$.

3. **0**

因 X 的密度函数是偶函数，所以 $\mathrm{E}\left(X^{2n+1}\right) = 0 = \mathrm{E}\left(X\right)$，从而有 $\mathrm{Cov}\left(X, Y\right) =$

$\mathrm{E}\left(XY\right) - \mathrm{E}\left(X\right)\mathrm{E}\left(Y\right) = \mathrm{E}\left(X^{2n+1}\right) - \mathrm{E}\left(X\right)\mathrm{E}\left(X^{2n}\right) = 0$，故 $\mathrm{R}\left(X, Y\right) = 0$.

三．1. $\left(1\right)0.9525$　　$\left(2\right)0.3707$　　$\left(3\right)0.3115$　　$\left(4\right)0.7714$

2. 教材习题五 $\left(\mathrm{A}\right)$ 三第 2 题

每个新生婴儿体重小于$2719g$的概率为

$$\mathrm{P}\left(X<2719\right)=\Phi\left(\frac{2719-3315}{575}\right)=\Phi\left(-1.0365\right)=1-\Phi\left(1.0365\right)=0.15$$

设所选的100个新生婴儿中体重小于$2719g$的个数为Y，则$Y\sim\mathrm{B}\left(100,0.15\right)$，从而

所求概率为$\mathrm{P}\left(Y\geq 2\right)=1-\mathrm{P}\left(Y=0\right)-\mathrm{P}\left(Y=1\right)=1-\mathrm{C}_{100}^{0}0.15^{0}0.85^{100}-$

$-\mathrm{C}_{100}^{1}0.15^{1}0.85^{99}=1-0.85^{99}\times 15.85=1$

3. 教材习题五$\left(\mathrm{A}\right)$三第 3 题

显然$R\left(Y\right)=\left[0,+\infty\right)$. 对任意的$y>0$，$\mathrm{F}_{Y}\left(y\right)=\mathrm{P}\left(Y\leq y\right)=\mathrm{P}\left(\left|X\right|\leq y\right)=$

$2\Phi\left(y\right)-1$，此时$f_{Y}\left(y\right)=\mathrm{F}_{Y}'\left(y\right)=2\varphi\left(y\right)=\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^{2}}{2}}$，于是综上有

$$f_{Y}\left(y\right)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^{2}}{2}}, & y>0\\ 0, & y\leq 0\end{cases}$$

4. 教材习题五$\left(\mathrm{A}\right)$三第 5 题

（1）联合密度函数为$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}, & x\in\left[0,1\right],y>0\\ 0, & others\end{cases}$

（2）$a^{2}+2aX+Y=0$有实根$\Leftrightarrow X^{2}\geq Y$，故所求概率为

$$\mathrm{P}\left(X^{2}\geq Y\right)=\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{x^{2}}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}dy=1-\int_{0}^{1}e^{-\frac{1}{2}x^{2}}dx$$

$$=1-\sqrt{2\pi}\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^{2}}dx=1-\sqrt{2\pi}\left(\Phi\left(1\right)-\Phi\left(0\right)\right)$$

$$=1-0.3413\sqrt{2\pi}=0.1445$$

第 43－44 页　二维正态分布及自然指数分布族

一．1. **B**　由二维正态密度定义，该密度函数可改写为

$$f\left(x,y\right)=\frac{1}{\sqrt{3}\pi}\exp\left[-\frac{2}{3}\left(x^{2}+xy+y^{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\left(-1/2\right)^2}}\exp\left[-\frac{1}{2\left[1-\left(-1/2\right)^2\right]}\left(x^2-2\left(-1/2\right)xy+y^2\right)\right]$$

2. **C** 由上题显然可见$\left(X,Y\right)\sim N\left(0,0,1,1,-1/2\right)$，故$X,Y\sim N\left(0,1\right)$但不独立.

3. **B** $\left(U,V\right)$服从二维正态分布（因U,V的意一维线性组合服从一维正态），故：U,V独立$\Leftrightarrow \mathrm{C}ov\left(U,V\right)=\mathrm{D}\left(X\right)-\mathrm{D}\left(Y\right)=0\Leftrightarrow \sigma_1^2=\sigma_2^2$

二．1. $\frac{1}{3}$， 7， $N\left(1/3,7\right)$

2. $V\left(m\right)=10p\left(1-p\right)=m-\frac{m^2}{10}$ （因为$V\left(m\right)=\mathrm{D}\left(X\right),m=\mathrm{E}\left(X\right)$）

3. $\frac{1}{2a}\sqrt{2\pi}$

三．1. 教材习题五$\left(\mathrm{A}\right)$三第 4 题

显然，$R(Z)=[0,+\infty)$；对任意的$z>0$，$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\frac{1}{2}m(X^2+Y^2)\le z)$

$$=P(X^2+Y^2\le\tfrac{2z}{m})=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{2z}{m}}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}dxdy$$

$$\xrightarrow[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{\frac{2z}{m}}}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}rdr=1-e^{-\frac{z}{m\sigma^2}}；\text{所以}$$

$$F_Z\left(z\right)=\begin{cases}1-e^{-\frac{z}{m\sigma^2}}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}，\quad f_Z\left(z\right)=\begin{cases}\frac{1}{m\sigma^2}e^{-\frac{z}{m\sigma^2}}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

2. 教材习题五$\left(\mathrm{A}\right)$三第 6 题

$$C_v=1\Rightarrow\frac{\sqrt{D\left(X_i\right)}}{E\left(X_i\right)}=1\Rightarrow\frac{\sigma_i}{i}=1\Rightarrow\sigma_i=i，\quad i=1,2,3,4$$

于是，$X=\sum_{i=1}^{4}X_i\sim N\left(\sum_{i=1}^{4}\mu_i,\sum_{i=1}^{4}\sigma_i^2\right)=N(10,30)$, 从而有

$$P(2<Z<18)=\Phi\left(\frac{18-10}{\sqrt{30}}\right)-\Phi\left(\frac{2-10}{\sqrt{30}}\right)=2\Phi\left(\frac{2-10}{\sqrt{30}}\right)-1=\cdots$$

3. 教材习题五$(\mathbf{A})$三第 7 题（略）

第 45–46 页　　极限定理

一．1. **C**　2. **C**　3. **A**

二．1. $\dfrac{1}{n\lambda}$　2. $\dfrac{1}{12}$

三．1. 教材习题六$(\mathbf{A})$三第 1 题

$$E(X)=\int_0^{+\infty}x\frac{x^me^{-x}}{m!}dx=\frac{\Gamma(m+2)}{m!}=\frac{(m+1)!}{m!}=m+1$$

$$E(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2\frac{x^me^{-x}}{m!}dx=\frac{\Gamma(m+3)}{m!}=\frac{(m+2)!}{m!}=(m+1)(m+2)$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=m+1$$

$$P(0<X<2(m+1))=P(|X-E(X)|<(m+1))>1-\frac{D(X)}{(m+1)^2}$$

$$=1-\frac{m+1}{(m+1)^2}=\frac{m}{m+1}$$

2. 教材习题六$(\mathbf{A})$三第 2 题

$$(1)\frac{\theta}{2};\quad (2)E(X^4)=\int_0^{\theta}x^4\frac{1}{\theta}dx=\frac{1}{5}\theta^4;\quad (3)\theta$$

3. 教材习题六$(\mathbf{A})$三第 4 题

设X_i为第i个灯泡的寿命，则$E(X_i)=0.2,D(X_i)=0.04$，$i=1,2,\cdots,200$.

由独立同分布中心极限定理，近似地有$\sum_{i=1}^{200}X_i\sim N(40,8)$，则灯泡的平均寿命

$\bar{X}\sim N(0.2,0.0002)$，于是，所求概率为

$$P\left(\bar{X}>0.21\right)=1-\Phi\left(\frac{0.21-0.2}{\sqrt{0.0002}}\right)=1-\Phi\left(0.71\right)=0.2389$$

4. 教材习题六$\left(\mathrm{A}\right)$三第 6 题

设X为正常工作的元件个数，由题意知，$X\sim B\left(100,0.9\right)$

$\left(1\right)$由二项分布以正态分布为极限的中心极限定理，近似地有$X\sim N\left(90,9\right)$，

从而系统正常工作的概率为$P\left(X\geq 85\right)=1-\Phi\left(\frac{85-90}{3}\right)=\Phi\left(\frac{5}{3}\right)=0.952$

$\left(2\right)$ 此时，$X\sim B\left(n,0.9\right)$，由二项分布以正态分布为极限的中心极限定理，近似地

有$X\sim N\left(0.9n,0.09n\right)$，由题意应有$P\left(X\geq 80\%n\right)\geq 0.95$，即

$\Phi\left(\frac{0.9n-0.8n}{0.3\sqrt{n}}\right)\geq 0.95$，所以$\frac{0.9n-0.8n}{0.3\sqrt{n}}\geq 1.645$，$n\geq 25$

第 47－48 页 χ^2,t,F 分布

一．1. **D** 2. **C** 3. **D** 4. **C**

二．1. $\frac{1}{3},2$ 2. 0.7 3. $t\left(9\right)$ 4. 0.4234

三．1. 教材习题七$\left(\mathrm{A}\right)$三第 1 题

$\bar{x}=50.56,s^2=4.28,b_2=3.80$

2. 教材习题七$\left(\mathrm{A}\right)$三第 3 题

$\frac{Y_n}{6.4}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{6.4}\sim\chi^2\left(n\right)$，$P\left(Y_n>200\right)\leq 0.01\Rightarrow P\left(\frac{Y_n}{6.4}\leq\frac{200}{6.4}\right)\geq 0.9$

$$\Rightarrow\frac{200}{6.4}\geq\chi^2_{0.9}\left(n\right)\Rightarrow 31.25\geq\chi^2_{0.9}\left(n\right)\Rightarrow n\leq 22$$

3. 教材习题七$\left(\mathrm{A}\right)$三第 5 题

$$\bar{X}\sim N\left(52,\frac{6.3^2}{36}\right)$$

$$(1)P\left(50.8<\bar{X}<54.8\right)=\Phi\left(\frac{54.8-52}{6.3/6}\right)-\Phi\left(\frac{50.8-52}{6.3/6}\right)$$

$$=\Phi\left(2.67\right)-1+\Phi\left(1.14\right)=0.8691$$

$$(2)E\left|\bar{X}-52\right|^2\le 0.05\Rightarrow D\left(\bar{X}\right)+\left(E\left(\bar{X}-52\right)\right)^2\le 0.05\Rightarrow D\left(\bar{X}\right)\le 0.05$$

$$\Rightarrow\frac{6.3^2}{n}\le 0.5\Rightarrow n\ge 79.38\Rightarrow n\ge 80$$

4. 教材习题七$(\mathbf{A})$三第 6 题

$$(1)\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(30-40,\frac{3^2}{9}+\frac{2^2}{12}\right)=N\left(-10,\frac{4}{3}\right)$$

$$P\left(\left|\bar{X}-\bar{Y}\right|<12\right)=\Phi\left(\frac{12-(-10)}{\sqrt{4/3}}\right)-\Phi\left(\frac{-12-(-10)}{\sqrt{4/3}}\right)$$

$$=\Phi\left(11\sqrt{3}\right)-1+\Phi\left(\sqrt{3}\right)=\Phi\left(\sqrt{3}\right)=0.9583$$

$$(2)\frac{\bar{X}-30}{S/3}\sim t\left(8\right),P\left(\frac{\bar{X}-30}{S/3}<C_1\right)=0.975\Rightarrow C_1=t_{0.975}\left(8\right)=2.3060$$

$$\frac{S_2^2/S_1^2}{\sigma_2^2/\sigma_1^2}=\frac{S_2^2/S_1^2}{4/9}\sim F\left(11,8\right)\Rightarrow P\left(\frac{S_2^2}{S_1^2}<C_2\right)=P\left(\frac{S_2^2/S_1^2}{4/9}<\frac{C_2}{4/9}\right)=0.05$$

$$\Rightarrow\frac{9}{4}C_2=F_{0.05}\left(11,8\right)=\frac{1}{F_{0.95}\left(8,11\right)}\Rightarrow C_2=\frac{4}{9}\frac{1}{F_{0.95}\left(8,11\right)}=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2.95}=0.151$$

第 *49*－*50* 页　　《矩估计》

一．1. **C**　　2. **C**

二．1. $\left(\overline{X}-1/2\right)^3$　　2. $\overline{X}^2/3$

三．1. 教材习题八$(\mathbf{A})$三第 1 题

由于有两个未知参数，所以考虑总体的一、二阶原点矩：

$$m_1=E\left(X\right)=\mu,\ \ m_2=E\left(X^2\right)=D\left(X\right)+\left[E\left(X\right)\right]^2=\mu^2+\sigma^2$$

反解得

$$\mu=m_1,\sigma^2=m_2-m_1^2;$$

用样本的一二阶原点矩替换总体的一二阶原点矩，即得$\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}^2$的矩估计为：

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \overline{\boldsymbol{X}}, \quad \hat{\sigma}^2 = A_2 - \hat{X}^2 = B_2,$$

由样本算得$\hat{x} = 6.20$，$b_2 = 0.38$，所以$\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}^2$的矩估计值为：

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{6.2}, \quad \hat{\sigma}^2 = 0.38.$$

因函数$\sigma = \sqrt{\sigma^2}(\sigma > 0)$连续，所以$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2} = \sqrt{0.38} = 0.6164.$

干燥时间小于6.5小时的概率为$P(X < 6.5) = \Phi(\frac{6.5-\mu}{\sigma})$，它是关于$\mu,\sigma$的连续函数，所以其矩估计值为$\hat{P}(X < 6.5) = \hat{\Phi}(\frac{6.5-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{6.5-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}) = \Phi(\frac{6.5-6.2}{0.6164}) = \Phi(0.49) = 0.6879.$

2. 教材习题八$\left(\mathbf{A}\right)$三第 3 题

由于仅一个未知参数，故只需总体期望

（1）$E(X) = \int_0^1 x(1-\theta)x^{-\theta}dx = \frac{1-\theta}{2-\theta}$，解之得$\theta = \frac{1-2E(X)}{1-E(X)}$，用样本均值代替总体均值即得$\theta$的矩估计量为$\hat{\theta} = \frac{1-2\bar{X}}{1-\bar{X}}$；

（2）$E(X) = \int_0^{+\infty} x\frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}dx = 2\theta$，解之得$\theta = \frac{E(X)}{2}$，用样本均值代替总体均值即得$\theta$的矩估计量为$\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{2}$.

3. 教材习题八$\left(\mathbf{A}\right)$三第 4 题

$$\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{f}_X\left(\boldsymbol{x}\right) = \boldsymbol{F}_X'\left(\boldsymbol{x}\right) = \begin{cases} \boldsymbol{\beta x}^{-\beta-1}, & \boldsymbol{x} > 1 \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{x} \le 1 \end{cases}$$

由于仅一个未知参数，故只需总体期望

$E(X) = \int_1^{+\infty} \beta x^{-\beta}dx = \frac{\beta}{1-\beta}$，解之得$\beta = \frac{E(X)}{1+E(X)}$，用样本均值代替总体均值即得$\beta$的矩估计量为$\hat{\beta} = \frac{\bar{X}}{1+\bar{X}}$.

4. $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \overline{\boldsymbol{X}}\Big/\boldsymbol{B}_2$，$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \overline{\boldsymbol{X}}^2\Big/\boldsymbol{B}_2$ （上课已讲）

5. 教材习题八$\left(\mathbf{A}\right)$三第 2 题

由于有两个未知参数，所以考虑总体的一、二阶原点矩：

$$m_1=E\left(X\right)=\int_{\theta_1}^{+\infty}x\frac{1}{\theta_2}e^{\frac{x-\theta_1}{-\theta_2}}dx=\theta_1+\theta_2,$$

$$m_2=E\left(X^2\right)=\int_{\theta_1}^{+\infty}x^2\frac{1}{\theta_2}e^{\frac{x-\theta_1}{-\theta_2}}dx=2\theta_2^2+\theta_1^2+2\theta_1\theta_2=\theta_2^2+\left(\theta_1+\theta_2\right)^2$$

反解得

$$\theta_1=m_1-\sqrt{m_2-m_1^2},\quad \theta_2=\sqrt{m_2-m_1^2};$$

用样本的一二阶原点矩替换总体的一二阶原点矩，即得θ_1,θ_2的矩估计量为：

$$\hat{\theta}_1=\bar{X}-\sqrt{B_2},\quad \hat{\theta}_2=\sqrt{A_2-\bar{X}^2}=\sqrt{B_2}.$$

第 51－52 页

一．1. **D**　　2. **A**

二．1. $\Phi\left(\dfrac{t-\bar{x}}{\sqrt{b_2}}\right)$　　2. $\min\left\{X_1,X_2,\cdots,X_n\right\}$

3. 首先求的极大似然估计：

$$L\left(\beta\right)=\prod_{i=1}^{n}f\left(x_i,\beta\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\beta^3x_i^2e^{-\beta x_i}=\frac{1}{2^n}\beta^{3n}\left[\prod_{i=1}^{n}x_i^2\right]e^{-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

$$\ln L\left(\beta\right)=-n\ln 2+3n\ln\beta+2\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\frac{d\ln L\left(\beta\right)}{d\beta}=0\Rightarrow\frac{3n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

解之即得β的极大似然估计值为$\hat{\beta}=\dfrac{3}{\bar{x}}$；所以$\beta$的极大似然估计量为$\hat{\beta}=\dfrac{3}{\bar{X}}$；

因

$$m_3=\mathrm{E}\left(X^3\right)=\int_0^{+\infty}x^3\frac{\beta^3}{\Gamma(3)}x^{3-1}e^{-\beta x}dx=\frac{1}{2\beta^3}\int_0^{+\infty}\left(\beta x\right)^5e^{-\beta x}d\left(\beta x\right)=\frac{60}{\beta^3}$$

是β的函数，该函数具有单值的反函数，所以其极大似然估计量为

$$\hat{m}_3=\frac{60}{\hat{\beta}^3}=\frac{60}{\left(3/\bar{X}\right)^3}=\frac{20}{9}\bar{X}^3;$$

因$V\left(m\right)=D\left(X\right)=\dfrac{3}{\beta^2}\left(\beta>0\right)$具有单值反函数，所以$V\left(m\right)$的极大似然估计量为

$$\hat{V}\left(m\right)=\frac{3}{\left(\bar{X}/3\right)^2}=\frac{\bar{X}^2}{3}$$

三．1．教材习题八$\left(\mathbf{A}\right)$三第 3 题

（1）似然函数为$L\left(\theta\right)=\prod_{i=1}^{n}f\left(x_i,\theta\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(1-\sqrt{\theta}\right)x_i^{-\sqrt{\theta}}=\left(1-\sqrt{\theta}\right)^n\left[\prod_{i=1}^{n}x_i\right]^{-\sqrt{\theta}}$

$$\Rightarrow \ln L\left(\theta\right)=n\ln\left(1-\sqrt{\theta}\right)-\sqrt{\theta}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

从而有

$$\frac{d\ln L\left(\theta\right)}{d\theta}=0\Rightarrow-\frac{n}{2\left(\sqrt{\theta}-\theta\right)}-\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0,$$

解之即得θ的极大似然估计值为$\hat{\theta}=\left[1+\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}\right]^2$，其极大似然估计量为

$$\hat{\theta}=\left[1+\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}\right]^2;$$

（2）似然函数为$L\left(\theta\right)=\prod_{i=1}^{n}f\left(x_i,\theta\right)=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}=\theta^{-2n}\left[\prod_{i=1}^{n}x_i\right]e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i}$

$$\Rightarrow \ln L\left(\theta\right)=-2n\ln\theta+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

从而有

$$\frac{d\ln L\left(\theta\right)}{d\theta}=0\Rightarrow-\frac{2n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i=0,$$

解之即得θ的极大似然估计值为$\hat{\theta}=\dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\dfrac{1}{2}\bar{x}$，其极大似然估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{1}{2}\bar{X}.$$

2. 教材习题八$\left(\mathbf{A}\right)$三第 4 题

由分布函数得密度函数为 $f_X\left(x,\alpha,\beta\right)=\begin{cases}\alpha^{\beta}\beta x^{-\beta-1}, & x\geq\alpha\\ 0, & x<\alpha\end{cases}$

（1）当$\alpha=1$时，似然函数为$L\left(\beta\right)=\prod_{i=1}^{n}f\left(x_i,\beta\right)=\prod_{i=1}^{n}\beta x_i^{-\beta-1}=\beta^n\left[\prod_{i=1}^{n}x_i\right]^{-\beta-1}$

$$\Rightarrow\ln L\left(\beta\right)=n\ln\beta-\left(\beta+1\right)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

从而有

$$\frac{d\ln L\left(\beta\right)}{d\beta}=0\Rightarrow\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0,$$

解之即得β的极大似然估计值为$\hat{\beta}=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$，其极大似然估计量为

$$\hat{\beta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i};$$

（2）当$\beta=2$时，似然函数为$L\left(\alpha\right)=\prod_{i=1}^{n}f\left(x_i,\alpha\right)=\prod_{i=1}^{n}2\alpha^2x_i^{-3}=2^n\alpha^{2n}\left[\prod_{i=1}^{n}x_i\right]^{-3}$

显然可见，似然函数$L\left(\alpha\right)$关于α严格单增；与此同时，对任意$i=1,2,\cdots,n$，

$\alpha\leq x_i$，故$\alpha\leq\min\left\{x_1,x_2,\cdots,x_n\right\}$，从而$L\left(\alpha\right)$在$\alpha=\min\left\{x_1,x_2,\cdots,x_n\right\}$处

取得最大值，所以α的极大似然估计值为$\hat{\alpha}=\min\left\{x_1,x_2,\cdots,x_n\right\}$，其极大似然

估计量为$\hat{\alpha}=\min\left\{X_1,X_2,\cdots,X_n\right\}$.

3. 教材习题八$\left(\mathbf{A}\right)$三第 5 题

似然函数为$L\left(\sigma^2\right)=\prod_{i=1}^{n}f\left(x_i,\sigma^2\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}}=\left(2\pi\right)^{-\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$

$$\Rightarrow\ln L\left(\sigma^2\right)=-\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\right)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

从而有

$$\frac{d\ln L\left(\sigma^2\right)}{d\sigma^2}=0\Rightarrow-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0\text{，}$$

解之即得 σ^2 的极大似然估计值为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$.

4. 教材习题八$\left(\mathbf{A}\right)$三第 6 题

似然函数为 $L\left(\mu,\sigma^2\right)=\prod_{i=1}^{n}f\left(x_i,\mu,\sigma^2\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x_i}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\ln x_i-\mu\right)^2}$

$$=\left(2\pi\right)^{-\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}\left[\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right]e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln x_i-\mu\right)^2}$$

$$\Rightarrow\ln L\left(\mu,\sigma^2\right)=-\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\right)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right)-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln x_i-\mu\right)^2$$

从而有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L\left(\mu,\sigma^2\right)}{\partial\mu}=0\\ \dfrac{\partial\ln L\left(\mu,\sigma^2\right)}{\partial\sigma^2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln x_i-\mu\right)=0\\ -\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln x_i-\mu\right)^2=0\end{cases},$$

解之即得 μ,σ^2 的极大似然估计值为 $\begin{cases}\hat{\mu}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\\ \hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln x_i-\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln x_j\right)^2\end{cases}$，极大似然估计量为 $\begin{cases}\hat{\mu}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\\ \hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln X_i-\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln X_j\right)^2\end{cases}$.

第 53－54 页

一．1. **B**　2. **B**　3. **B**

二．1. $\frac{1}{6}$　2. $\frac{1}{2\left(n-1\right)}$

三．1. $\mathrm{E}\left(\overline{X}^2\right)=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\to\mu^2$

2. 教材习题八$(\mathbf{A})$三第 7 题

因$E(|X-\mu_0|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-\mu_0|f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-\mu_0|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}dx$，令

$y=\frac{x-\mu_0}{\sigma}$，再因被积函数是偶函数得$E(|X-\mu_0|)=2\sigma\int_0^{+\infty}y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$，用$\Gamma$

函数计算可得$E(|X-\mu_0|)=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}d\frac{y^2}{2}=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(1)=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$，从而有

$$E(\hat{\sigma})=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}E(|X_i-\mu_0|)=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}E(|X-\mu_0|)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}E(|X-\mu_0|)$$

$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}=\sigma$，所以$\hat{\sigma}$为$\sigma$的无偏估计量.

3. 教材习题八$(\mathbf{A})$三第 8 题

由《习题册》第 54 页第 3 题知$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$.

（1）因$E(X)=0$，所以$E(X^2)=D(X)=\sigma^2$，从而有

$$E(\hat{\sigma}^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\sigma^2,$$

所以$\hat{\sigma}^2$为σ^2的无偏估计量.

（2）因总体$X\sim N(0,\sigma^2)$，所以

$$\chi_0^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n),\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$$

从而有

$$D(\hat{\sigma}^2)=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=D\left(\frac{\sigma^2}{n}\chi_0^2\right)=\frac{\sigma^4}{n^2}D(\chi_0^2)=\frac{\sigma^4}{n^2}2n=\frac{2\sigma^4}{n};$$

$$D(S^2)=D\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\chi^2\right)=\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}D(\chi^2)=\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}2(n-1)=\frac{2\sigma^4}{n-1};$$

显然可见$D(\hat{\sigma}^2)=\frac{2\sigma^4}{n}<\frac{2\sigma^4}{n-1}=D(S^2)$，所以$\hat{\sigma}^2$比$S^2$更有效.

4. 教材习题八$\left(\mathbf{A}\right)$三第 9 题　略

5. 教材习题八$\left(\mathbf{A}\right)$三第 10 题　上课已讲！

第 55－56 页　《区间估计》

一．1.　**B**　　2. $4u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma_0^2}{l^2}$

二．1. 教材习题八$\left(\mathbf{A}\right)$三第 11 题

计算得 $\overline{x}=575.2$；$s=8.7025$

（1）因 $1-\alpha=0.95,\sigma^2=\sigma_0^2=25$，故 μ 的 95% 置信区间为

$$\left(\widehat{\mu}_1,\widehat{\mu}_2\right)=\left(\overline{x}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\overline{x}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)=\left(572.101,578.299\right)$$

（2）因 $\sigma=5$ 时，$C_v=\dfrac{\sigma}{\left|\mu\right|}=\dfrac{5}{\mu}\left(\mu>0\right)$ 关于 μ 严格单减，所以 C_v 的 95% 置信区间

为 $\left(\widehat{C}_v^1,\widehat{C}_v^2\right)=\left(C_v\left(\widehat{\mu}_2\right),C_v\left(\widehat{\mu}_1\right)\right)=\left(\dfrac{5}{\widehat{\mu}_2},\dfrac{5}{\widehat{\mu}_1}\right)=\left(0.00865,0.00874\right);$

（3）因 $1-\alpha=0.95,t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right)=t_{0.975}\left(9\right)=2.2622$，又 σ^2 未知，故 μ 的 95% 置信区间为

$$\left(\overline{x}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right)\frac{s}{\sqrt{n}},\overline{x}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)=\left(568.974,581.426\right).$$

2. 教材习题八$\left(\mathbf{A}\right)$三第 12 题

经计算可得 $\overline{x}=10.08333,$；$s^2=0.06333$，$s=0.83467$，

查表可得 $t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right)=t_{0.95}\left(11\right)=1.7959$，$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right)=\chi^2_{0.05}\left(11\right)=4.575$，

$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right)=\chi^2_{0.95}\left(11\right)=19.675$.

因总体均值 μ 及方差 σ^2 未知，又 $n=12$，故 μ,σ^2,σ 的置信度为 90% 的置信区间为

$$\left(\overline{x}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right)\frac{s}{\sqrt{n}},\overline{x}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)=\left(9.6506,10.5160\right)$$

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)=(0.0354,0.1523)$$

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)=(0.1881,0.3902)$$

3. 教材习题八$(\mathbf{A})$三第 13 题 略

4. 教材习题八$(\mathbf{A})$三第 14 题 略

第 57－58 页

一．1. **B**　　2. **D** 教材习题七$(\mathbf{B})$一第 2 题　　3. **C**

二．1. **16**　　2. σ^2　　3. $\frac{1}{\overline{\overline{X}}}$　　$\frac{1}{\overline{\overline{X}}}$

三．1. 教材习题五$(\mathbf{B})$三第 2 题

$$E(M)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}\max(x,y)f_X(x)f_Y(y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{x}^{+\infty}y\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy+\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{x}x\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{x}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}d\frac{y^2}{2}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\int_{y}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}d\frac{x^2}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy\right]=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}(x^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-x^2}dx^2=\frac{1}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$E(N)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}\min(x,y)f_X(x)f_Y(y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{x}^{+\infty}x\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy+\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{x}y\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\int_{-\infty}^{y} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx+\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{-\infty}^{x} ye^{-\frac{y^2}{2}}dy\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\int_{-\infty}^{y} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}d\frac{x^2}{2}$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy=-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-y^2}dy$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(y^2\right)^{-\frac{1}{2}}e^{-y^2}dy^2=-\frac{1}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

2. 教材习题八$\left(\mathbf{B}\right)$三第 2 题

矩估计法：总体的一阶原点矩为

$$m_1=E\left(X\right)=\int_0^1 x\theta dx+\int_1^2 x\left(1-\theta\right)dx=\frac{1}{2}\theta+\frac{3}{2}\left(1-\theta\right)=\frac{3}{2}-\theta$$

反解得$\theta=\frac{3}{2}-m_1$，用样本的一阶原点矩（即样本均值）代替总体的一阶原点矩得

未知参数θ的矩估计量为$\hat{\theta}_M=\frac{3}{2}-\bar{X}$，其矩估计值为$\hat{\theta}_M=\frac{3}{2}-\bar{x}$；

极大似然估计法：$L\left(\theta\right)=\prod_{i=1}^{n}f\left(x_i;\theta\right)=\theta^N\left(1-\theta\right)^{n-N}$

$\Rightarrow \ln L\left(\theta\right)=N\ln\theta+\left(n-N\right)\ln\left(1-\theta\right)$，由此得

$\frac{d\ln L\left(\theta\right)}{d\theta}=0\Leftrightarrow\frac{N}{\theta}-\frac{n-N}{1-\theta}=0$，解之即得$\theta$的矩估计值为$\hat{\theta}_L=\frac{N}{n}$.

3. 教材习题八$\left(\mathbf{B}\right)$三第 3 题

此题即为在一个正态总体下，总体均值未知时对总体总体标准差的区间估计.

$$\left(\sqrt{\frac{\left(n-1\right)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}\left(n-1\right)}},\sqrt{\frac{\left(n-1\right)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}\left(n-1\right)}}\right)=\left(\sqrt{\frac{0.17985}{\chi^2_{0.975}\left(9\right)}},\sqrt{\frac{0.17985}{\chi^2_{0.025}\left(9\right)}}\right)$$

$=\left(\sqrt{\frac{0.17985}{19.023}},\sqrt{\frac{0.17985}{2.7}}\right)=\left(0.0972,0.2581\right)$，显然可见，在$95\%$的置信度下，这批零件长度的标准差符合设计要求.