



习题课1 - 命题逻辑

主讲 林 兰

2022 秋季



第一章 命题逻辑 总结

一、基本概念

■ 命题

命题的真值

原子命题、复合命题

逻辑联结词 (\sim 、 \vee 、 \wedge 、 ∇ 、 \rightarrow 、 \leftrightarrow)

■ 命题公式

公式的解释

永真式(重言式)

永假式(矛盾式, 不可满足公式)

可满足式



■ 命题公式的等价

基本等价式——命题定律

替换规则（定理）

对偶式

对偶原理

■ 范式

句节、子句、短语、析取范式、合取范式

极小项——主析取范式

极大项——主合取范式



■ 命题公式的蕴涵

基本蕴含（关系）式

■ 推理规则

- ① P规则（称为前提引用规则）
- ② T规则（逻辑结果引用规则）
- ③ CP规则（附加前提规则）
- ④ 合取规则



二、基本方法

1、应用基本等价式及置换规则进行等价演算

2、求主析取（主合取）范式的方法

1) 公式转换法

2) 真值表技术法

主合取范式——在命题公式的真值表中，使公式取值0时的解释所对应的**全部极大项的合取式**。

主析取范式——在命题公式的真值表中，使公式取值1时的解释所对应的**全部极小项的析取式**。



3、推理的各种方法

(1) 直接法

(2) 利用CP规则

(3) 反证法

4、消解法



三、典型例题

1. 命题逻辑表达式的翻译:

(1) 除非你努力, 否则你将失败。

虽然你努力了, 但还是失败了。

(2) 除非你已满16周岁, 否则只要你的身高不足1.2米就不能乘公园滑行铁道游乐车。



三、典型例题

解：(1) 设P：你努力，Q：你失败。翻译为

$$\textcircled{1} \neg P \rightarrow Q$$

$$\textcircled{2} P \wedge Q$$

(2) 除非你已满16周岁，否则只要你的身高不足1.2米就不能乘公园滑行铁道游乐车。

令P：你能乘坐公园滑行铁道游乐车。

Q：你身高不足1.2米。

R：你已满16周岁。

翻译成： $\neg R \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)$

或 $(\neg R \wedge Q) \rightarrow \neg P$



2、试证明

$$(P \wedge (Q \vee R)) \vee (P \wedge \sim Q \wedge \sim R) \Leftrightarrow P$$

证明： $(P \wedge (Q \vee R)) \vee (P \wedge \sim Q \wedge \sim R)$

$$\Leftrightarrow P \wedge ((Q \vee R) \vee (\sim Q \wedge \sim R)) \quad (\text{分配律})$$

$$\Leftrightarrow P \wedge ((Q \vee R) \vee \sim(Q \vee R)) \quad (\text{De Morgan定律})$$

$$\Leftrightarrow P \wedge T \quad (\text{矛盾律})$$

$$\Leftrightarrow P \quad (\text{同一律})$$



3、证明 $((P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q)) \Leftrightarrow \sim (P \leftrightarrow Q)$

证: $((P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q))$

$\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (\sim P \vee \sim Q))$ (De Morgan定律)

$\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge \sim P) \vee ((P \vee Q) \wedge \sim Q)$ (分配律)

$\Leftrightarrow (\underline{(P \wedge \sim P)} \vee (Q \wedge \sim P)) \vee ((P \wedge \sim Q) \vee \underline{(Q \wedge \sim Q)})$

$\Leftrightarrow (Q \wedge \sim P) \vee (P \wedge \sim Q)$ (矛盾律)

$\Leftrightarrow \sim (\sim Q \vee P) \vee \sim (\sim P \vee Q)$ (De Morgan定律)

$\Leftrightarrow \sim ((Q \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow Q))$ (蕴涵式)

$\Leftrightarrow \sim (P \leftrightarrow Q)$ (等价式)

4、 $G = \sim(P \rightarrow Q) \vee R$ ，利用真值表求公式G的主析取范式和主合取范式。

解：首先列出其真值表如下：

| P Q R | $P \rightarrow Q$ | $\sim(P \rightarrow Q)$ | $\sim(P \rightarrow Q) \vee R$ | |
|-------|-------------------|-------------------------|--------------------------------|---|
| 0 0 0 | 1 | 0 | 0 | 极大项 $\rightarrow P \vee Q \vee R$ |
| 0 0 1 | 1 | 0 | 1 | 极小项 $\rightarrow \sim P \wedge \sim Q \wedge R$ |
| 0 1 0 | 1 | 0 | 0 | $\rightarrow P \vee \sim Q \vee R$ |
| 0 1 1 | 1 | 0 | 1 | $\rightarrow \sim P \wedge Q \wedge R$ |
| 1 0 0 | 0 | 1 | 1 | $\rightarrow P \wedge \sim Q \wedge \sim R$ |
| 1 0 1 | 0 | 1 | 1 | $\rightarrow P \wedge \sim Q \wedge R$ |
| 1 1 0 | 1 | 0 | 0 | $\rightarrow \sim P \vee \sim Q \vee R$ |
| 1 1 1 | 1 | 0 | 1 | $\rightarrow P \wedge Q \wedge R$ |



主析取范式

$$\begin{aligned} &= (\sim P \wedge \sim Q \wedge R) \vee (\sim P \wedge Q \wedge R) \vee \\ &\quad (P \wedge \sim Q \wedge \sim R) \vee (P \wedge \sim Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \\ &= m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7 \end{aligned}$$

主合取范式

$$\begin{aligned} &= (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \sim Q \vee R) \wedge (\sim P \vee \sim Q \vee R) \\ &= M_0 \wedge M_2 \wedge M_6 \end{aligned}$$



5、用公式转换法求上题中的主析取和主合取范式

$$\sim(P \rightarrow Q) \vee R$$

$$\Leftrightarrow \sim(\sim P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow (P \wedge \sim Q) \vee R$$

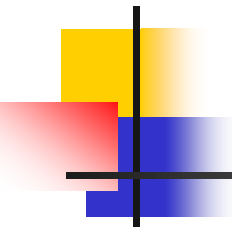
$$\Leftrightarrow (P \wedge \sim Q \wedge (R \vee \sim R)) \vee ((P \vee \sim P) \wedge (Q \vee \sim Q) \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge \sim Q \wedge R) \vee (P \wedge \sim Q \wedge \sim R) \vee ((P \vee \sim P) \wedge ((Q \wedge R) \vee (\sim Q \wedge R)))$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge \sim Q \wedge R) \vee (P \wedge \sim Q \wedge \sim R) \vee (P \vee \sim P) \wedge (Q \wedge R) \vee (P \vee \sim P) \wedge (\sim Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow \underline{(P \wedge \sim Q \wedge R)} \vee (P \wedge \sim Q \wedge \sim R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\sim P \wedge Q \wedge R) \vee \underline{(P \wedge \sim Q \wedge R)} \vee (\sim P \wedge \sim Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge \sim Q \wedge R) \vee (P \wedge \sim Q \wedge \sim R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\sim P \wedge Q \wedge R) \vee (\sim P \wedge \sim Q \wedge R) \quad (\text{主析取范式})$$


$$\sim (P \rightarrow Q) \vee R$$

$$\Leftrightarrow \sim (\sim P \vee Q) \vee R$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge \sim Q) \vee R$$

$$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (\sim Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee (\sim Q \wedge Q) \vee R) \wedge ((\sim P \wedge P) \vee \sim Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee \sim Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (\sim P \vee \sim Q \vee R) \wedge$$
$$(P \vee \sim Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee \sim Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (\sim P \vee \sim Q \vee R)$$

(主合取范式)

6、将下面一段程序简化

```
If A ∧ B then  
    If B ∨ C then
```

X

```
    Else
```

Y

```
    End
```

```
Else
```

```
    If A ∧ C then
```

Y

```
    Else
```

X

```
    End
```

```
End
```

执行程序段X 的条件为

$$((A \wedge B) \wedge (B \vee C)) \vee (\sim (A \wedge B) \wedge \sim (A \wedge C))$$
$$\Leftrightarrow \sim (A \wedge \sim B \wedge C)$$

执行程序段Y的条件为

$$((A \wedge B) \wedge \sim (B \vee C)) \vee (\sim (A \wedge B) \wedge (A \wedge C))$$
$$\Leftrightarrow A \wedge \sim B \wedge C$$

```
If A ∧ ~ B ∧ C then
```

Y

```
Else
```

X

```
End
```

7、习题一 14题

解：由题设 A: A去, B: B去, C: C去, D: D去

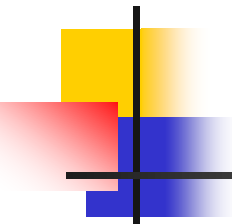
则满足条件的选派应满足如下范式:

$$(A \rightarrow (C \vee D)) \wedge \sim (B \wedge C) \wedge \sim (C \wedge D)$$

构造和以上范式等价的主析取范式

$$(A \rightarrow (C \vee D)) \wedge \sim (B \wedge C) \wedge \sim (C \wedge D)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & (\sim A \wedge \sim B \wedge \sim C \wedge \sim D) \vee (\sim A \wedge \sim B \wedge \sim C \wedge D) \vee \\ & (\sim A \wedge \sim B \wedge C \wedge \sim D) \vee (\sim A \wedge B \wedge \sim C \wedge \sim D) \\ & \vee (\sim A \wedge B \wedge \sim C \wedge D) \vee (A \wedge \sim B \wedge \sim C \wedge D) \vee (A \wedge \sim \\ & B \wedge C \wedge \sim D) \vee (A \wedge B \wedge \sim C \wedge D) \end{aligned}$$



共有四个极小项，但根据题意，需派两人出差，所以，只有其中三项满足要求：

$(A \wedge \sim B \wedge C \wedge \sim D)$, $(A \wedge \sim B \wedge \sim C \wedge D)$,

$(\sim A \wedge B \wedge \sim C \wedge D)$

即有三种方案：A和C去，或者A和D去，或者B和D去。



8、应用举例

在一个决策控制系统中由**A**，**B**，**C**三个关键因素决定结果，其中**C**具有一票否决的权力，然而决策要通过，必须遵守少数服从多数的原则，不允许弃权。请设计出这个系统的逻辑关系式，如果要采用最少数量的逻辑元器件应又该怎么设计。（请写出设计过程）

解：以A，B，C作为系统输入端，值为1表示赞成，值为0表示反对。输出端1表示通过，0表示不通过。根据题意，可得出下面输入输出表。

| A | B | C | 输出 |
|---|---|---|----|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

该表即为输出为一命题公式P的真值表，则可以构造出逻辑公式P的主析取范式。

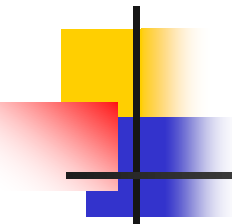
$$P = (\sim A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \sim B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

$$\Leftrightarrow (B \wedge C) \vee (A \wedge \sim B \wedge C) \quad (\text{分配律, 矛盾律})$$

$$\Leftrightarrow (B \vee (A \wedge \sim B)) \wedge C \quad (\text{分配律})$$

$$\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge C \quad (\text{分配律, 矛盾律})$$

最少需要两种门式电路。



9、如果今天是星期一，则要进行离散数学或数据结构两门课程中的一门课的考试；如果数据结构课的老师生病，则不考数据结构；今天是星期一，并且数据结构的老师生病。所以今天进行离散数学的考试。

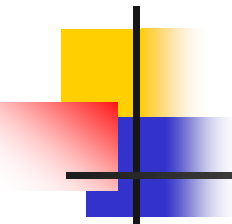
解：设 P：今天是星期一；

Q：要进行离散数学考试；

R：要进行数据结构考试；

S：数据结构课的老师生病；

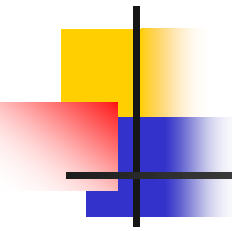
则 $P \rightarrow Q \vee R$, $S \rightarrow \sim R$, $P \wedge S \Rightarrow Q$ 。



(续) $P \rightarrow Q \vee R, S \rightarrow \sim R, P \wedge S \Rightarrow Q$

证:

| | | |
|-----|--------------------------|----------------------------|
| (1) | $P \wedge S$ | P |
| (2) | S | $T, (1), I_1$ |
| (3) | $S \rightarrow \sim R$ | P |
| (4) | $\sim R$ | $T, (2), (3), I_5$ |
| (5) | P | $T, (1), I_1$ |
| (6) | $P \rightarrow Q \vee R$ | P |
| (7) | $Q \vee R$ | $T, (5), (6), I_5$ |
| (8) | Q | $T, (4), (7), I_7$ (析取三段论) |



10、一位计算机工作者协助公安员审查一件谋杀案，他认为下列情况是真的；

- (1) 会计张某或邻居王某谋害了厂长。
- (2) 如果会计张某谋害了厂长，则谋害不能发生在半夜。
- (3) 如果邻居王某的证词是正确的，则谋害发生在半夜。
- (4) 如果邻居王某的证词不正确，则半夜时屋里灯光未灭。
- (5) 半夜时屋里灯光灭了，且会计张某曾贪污过。

计算机工作者用他的数理逻辑知识，很快推断出谋害者是谁？请问：谁是谋害者？怎样推理发现他？



解：设P：会计张某谋害了厂长

Q：邻居王某谋害了厂长

N：谋害发生在半夜。

O：邻居王某的证词是正确的。

R：半夜时屋里灯光灭了。

A：会计张某曾贪污过。

上述案情有如下命题公式：

$$(1) P \vee Q$$

$$(2) P \rightarrow \sim N$$

$$(3) O \rightarrow N$$

$$(4) \sim O \rightarrow \sim R$$

$$(5) R \wedge A$$

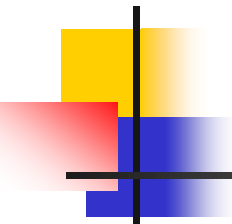
■ 问题是需求证:

$$\{P \vee Q, P \rightarrow \sim N, O \rightarrow N, \sim O \rightarrow \sim R, R \wedge A\} \Rightarrow ?$$

- 证:
- | | |
|-------------------------------|------------------------|
| ① $R \wedge A$ | P |
| ② R | T, ①, I_1 |
| ③ $\sim O \rightarrow \sim R$ | P |
| ④ O | T, ②, ③, E_{23}, I_5 |
| ⑤ $O \rightarrow N$ | P |
| ⑥ N | T, ④, ⑤, I_5 |
| ⑦ $P \rightarrow \sim N$ | P |
| ⑧ $\sim P$ | T, ⑥, ⑦, E_{23}, I_5 |
| ⑨ $P \vee Q$ | P |
| ⑩ Q | T, ⑧, ⑨, I_7 |

$$\therefore \{P \vee Q, P \rightarrow \sim N, O \rightarrow N, \sim O \rightarrow \sim R, R \wedge A\} \Rightarrow Q$$

结论是: 邻居王某谋害了厂长。



11、若 n 是偶数，并且 n 大于5，则 m 是奇数。只有 n 是偶数， m 才大于6。 n 是大于5。所以，若 m 大于6，则 m 是奇数。

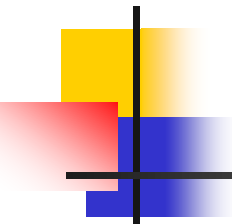
证明上述推理正确。

解：设 p ： n 是偶数， q ： n 大于5，

r ： m 是奇数， s ： m 大于6.

前提： $(p \wedge q) \rightarrow r$, $s \rightarrow p$, q

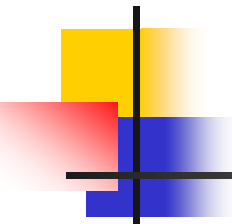
结论： $s \rightarrow r$



(续) $(p \wedge q) \rightarrow r, s \rightarrow p, q \Rightarrow s \rightarrow r$

证明: (方法1, 采用cp规则法)

- | | | |
|---|------------------------------|-----------|
| ① | s | P (附加) |
| ② | $s \rightarrow p$ | P |
| ③ | p | T ①② 假言推理 |
| ④ | q | P |
| ⑤ | $p \wedge q$ | T ③④ 合取规则 |
| ⑥ | $(p \wedge q) \rightarrow r$ | P |
| ⑦ | r | T ⑤⑥ 假言推理 |
| ⑧ | $s \rightarrow r$ | CP ①⑦ |



(续) $(p \wedge q) \rightarrow r, s \rightarrow p, q \Rightarrow s \rightarrow r$

证明: (方法2, 直接证明法)

- | | |
|--|---------------|
| ① q | P |
| ② $\sim s \vee q$ | T ① 扩充法则 (关键) |
| ③ $s \rightarrow q$ | T ② 蕴涵式 |
| ④ $s \rightarrow p$ | P |
| ⑤ $(s \rightarrow p) \wedge (s \rightarrow q)$ | T ③ ④ 合取 |
| ⑥ $s \rightarrow (p \wedge q)$ | T ⑤ 二难推论, 幂等律 |
| ⑦ $(p \wedge q) \rightarrow r$ | P |
| ⑧ $s \rightarrow r$ | T ⑥ ⑦ 假言三段论 |



习题一 18题

解：根据给定的条件有下述命题：

P：珍宝藏在东厢房

Q：藏宝的房子靠近池塘

R：房子的前院栽有大柏树

S：珍宝藏花园正中地下

T：后院栽有香樟树

M：珍宝藏附近

根据题意，得出：

$(Q \rightarrow \sim P)$, $(R \rightarrow P)$, Q , $(R \vee S)$, $(T \rightarrow M)$ $\Rightarrow ?$

（根据分析，结果在P, S, M当中一处）



习题一 18题 (续)

根据题意, 得出:

$$(Q \rightarrow \sim P), (R \rightarrow P), Q, (R \vee S), (T \rightarrow M) \Rightarrow ?$$

$$(Q \rightarrow \sim P) \wedge Q \Rightarrow \sim P$$

(假言推理)

$$\sim P \wedge (R \rightarrow P) \Rightarrow \sim R$$

(拒取式)

$$\sim R \wedge (R \vee S) \Rightarrow S$$

(析取三段论)

即珍宝藏藏在花园正中地下。



习题一 21 (2)

解：根据给定的条件有下述命题：

P：现场无任何痕迹

Q：失窃时，小花在OK厅

R：失窃时，小英在OK厅

S：失窃时，小胖在附近

T：金刚是偷窃者

M：瘦子是偷窃者

则根据案情有如下命题公式：

$\{P, Q \vee R, S \rightarrow \sim P, Q \rightarrow T, \sim S \rightarrow \sim R, R \rightarrow M\}$



(续) $\{P, Q \vee R, S \rightarrow \sim P, Q \rightarrow T, \sim S \rightarrow \sim R, R \rightarrow M\}$

| | | |
|---|-----------------------------|------------------|
| ① | P | P |
| ② | $S \rightarrow \sim P$ | P |
| ③ | $\sim S$ | $T①②E_{23}, I_5$ |
| ④ | $\sim S \rightarrow \sim R$ | P |
| ⑤ | $\sim R$ | $T③④I_5$ |
| ⑥ | $Q \vee R$ | P |
| ⑦ | Q | $T⑤⑥I_7$ |
| ⑧ | $Q \rightarrow T$ | P |
| ⑨ | T | $T⑦⑧I_5$ |

即 金剛是偷窃者