四川大学数学学院
Mathematical College Sichuan University

地址：中国·成都 邮编：610064
E-mail：nic2601@scu.edu.cn
Tel：+86-28-85412720 Fax: (028) 85412720

2017-2018 概率统计理工参考解答 A卷

一 填空 $(3\times 6=18)$

1. $\frac{5}{14}$　2. $1-F(\frac{1-y}{3})$　3. 0.3085　4. $\frac{7}{16}$　5. 7　6. 2

二 解答题（共82分）

1. (10分) 记A此邮件为垃圾邮件，B为邮件中出现"书" 2

(1) $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{1}{4}\times 0.4+\frac{3}{4}\times 0.04=0.13$ 2 2

(2) $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.1}{0.13}=\frac{10}{13}$ 2 2

2. (8) 用 X_1, X_2 表示两袋5千克装土豆质量，Y表示10千克装质量

$Z=X_1+X_2-Y$ 2　$E(Z)=0.2$ 1　$D(Z)=0.64$ 1　$Z\sim N(0.2,\ 0.64)$ 2

$P(Z>0)=1-\Phi\left(\frac{0-0.2}{\sqrt{0.64}}\right)=\Phi(0.25)=0.5987$ 2

3 (10分)

(1) 5

X\Y	0	1	2
0	$\frac{3}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{1}{28}$
1	$\frac{9}{28}$	$\frac{6}{28}$	0
2	$\frac{3}{28}$	0	0

(2) 3

X|Y=0	0	1	2
	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$F_{X|Y}(x|0)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{5} & 0\le x<1\\ \frac{4}{5} & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$ 2

4 (15分)

(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\begin{cases}3x^2 & 0\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$ 1 1

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\begin{cases}1+2y-3y^2 & 0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$ 1 1

$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，故X、Y不独立 1

四川大学数学学院
Mathematical College Sichuan University
地址：中国·成都　　邮编：610064
E-mail：nic2601@scu.edu.cn
Tel：+86-28-85412720　　Fax：(028) 85412720

(2) 给定 $y\in(0,1)$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)} ① =\begin{cases}\dfrac{2(x+y)}{1+2y-3y^2} & x\in[y,1] \\ 0 & \text{其它}\end{cases} ①$$

当 $y=\frac{1}{2}$ 时 $f_{X|Y}(x|\frac{1}{2})=\begin{cases}\frac{8}{5}(x+\frac{1}{2}) & x\in[\frac{1}{2},1] \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ ①

$$P(X\le\tfrac{3}{4}|Y=\tfrac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} ① \frac{8}{5}(x+\tfrac{1}{2})\,dx=\frac{9}{20} ①$$

(3) $Z=3X^3-1$ 　　 $R(Z)=[-1,2]$ ①

$\forall z\in[-1,2]$ 　 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(3X^3-1\le z)=P(X\le\sqrt[3]{\frac{1+z}{3}})$

$$=\int_0^{\sqrt[3]{\frac{1+z}{3}}}3x^2\,dx=\frac{1+z}{3} ②$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{3} & z\in[-1,2] \\ 0 & \text{其它}\end{cases} ②$$ 故 $Z\sim U(-1,2)$

5 (12分) 记 X 为顾客去世的人数，Y 为保险公司一年的利润

③ ②

(1) $X\sim B(10000,0.01)\approx N(100,99)$ 　　注：$X_i\sim\begin{pmatrix}200 & -9800 \\ 0.99 & 0.01\end{pmatrix}$

$Y=10000\times200-10000X$ 　 $Y\ge100$万 $\Leftrightarrow X\le100$ 　　利润 $X=\sum_{i=1}^{10000}X_i$ 亦可

$P(X\le100)=\Phi(\frac{100-100}{\sqrt{99}})=\Phi(0)=0.5$ ②

(2) 设保费应降低 a 元， 此时 $X\sim B(10000+125a,\ 0.01)$ ②

$E(Y)=(200-a)(10000+125a)-10000\times(10000+125a)\times0.01$

$=-125a^2+2500a+1000000$ ② 　　 $X_i\sim\begin{pmatrix}200-a & -9800-a \\ 0.99 & 0.01\end{pmatrix}$

当 $a=-\frac{2500}{-125\times2}=10$ 时 $E(Y)$ 最大 　　 $X=\sum_{i=1}^{10000+125a}X_i$

故最优的保费为每年 $200-10=190$ 元 ①

四川大学数学学院
Mathematical College Sichuan University
地址：中国・成都　邮编：610064
E-mail：nic2601@scu.edu.cn
Tel：+86-28-85412720　Fax: (028) 85412720

6 (15分) (1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{\theta}^{+\infty} x\cdot\frac{2\theta^2}{x^3}\,dx = 2\theta$ 3

$\theta=\frac{E(X)}{2} \Longrightarrow \hat\theta_1=\frac{\bar X}{2}$ 2

(2) $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\frac{2^n\theta^{2n}}{x_1^3x_2^3\cdots x_n^3}$ 2　$L'(\theta)>0$ 故 $L(\theta)$ 单增

$\theta\le x_i \Longrightarrow \theta\le \min\{x_i\}$　故 $\hat\theta_2=\min\{x_i\}$ 3

(3) $E(\hat\theta_1)=E(\frac{\bar X}{2})=\frac12 E(\bar X)=\frac12\cdot 2\theta=\theta$　$\hat\theta_1$ 为无偏估计 2

记 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $F(x)=\begin{cases}1-\frac{\theta^2}{x^2} & x\ge\theta\\ 0 & 其它\end{cases}$

$f_{\hat\theta_2}(x)=n[1-F(x)]^{n-1}f(x)=\begin{cases}\frac{2n\theta^{2n}}{x^{2n+1}} & x\ge\theta\\ 0 & 其它\end{cases}$

$E(\hat\theta_2)=\int_{\theta}^{+\infty} x\cdot\frac{2n\theta^{2n}}{x^{2n+1}}\,dx=\frac{2n}{2n-1}\theta\ne\theta$　$\hat\theta_2$ 为有偏估计 3

7. (12分) (1) $T=\frac{\bar X-\mu}{S/\sqrt n}\sim t(n-1)$ 2　$P(|T|<2.0639)=0.95$

95% CI 为 $(\bar x-\frac{S}{\sqrt n}t_{1-\frac{\alpha}{2}},\ \bar x+\frac{S}{\sqrt n}t_{1-\frac{\alpha}{2}})=(20436.1,\ 24563.9)$ 2 2

(2) H_0: $\mu\le\mu_0=20000$ 千米　H_1: $\mu>\mu_0$ 2

$T=\frac{\bar X-\mu_0}{S/\sqrt n}$　$P(T>t_{0.95}(24))\le 0.05$ 2

拒绝域为 $T>1.7109$　$T=\frac{22500-20000}{5000/\sqrt{25}}=2.5>1.7109$

拒绝 H_0，认为平均里程数大于 20000 千米 2

注：$P(\bar X>21710.9)\le 0.05$　拒绝域为 $\bar X>21710.9$ 亦可