第四章 向量空间

第四章 向量空间

第四节 子空间

一、子空间的定义

二、矩阵的列空间行空间和零空间

一、子空间的定义

定义 若 $\mathbb{R}^n$的非空子集 H 满足以下两个条件：

$$(1)\ \alpha,\beta \in H \Rightarrow \alpha+\beta \in H;$$

$$(2)\ \alpha \in H, k \in \mathbb{R} \Rightarrow k\alpha \in H.$$

则称 H 为 $\mathbb{R}^n$的**子空间**.

提醒 子空间是对加法和数乘运算（或线性运算）封闭的 $\mathbb{R}^n$的非空子集.

提醒 任何子空间 H 必含有零向量，即 $0 \in H$.

提醒 两个特殊子空间，平凡子空间：$\mathbb{R}^n$，$\{0\}$.

定理 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{R}^n$，则 $H = \operatorname{span}\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p\}$是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

证明 对任意的 $k \in \mathbb{R}$，及 H 中的任意两向量

$$\xi = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_p\alpha_p,$$

$$\eta = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \cdots + t_p\alpha_p,$$

有

$$\xi + \eta = (l_1 + t_1)\alpha_1 + \cdots + (l_p + tp)\alpha_p \in H,$$

$$k\xi = (kl_1)\alpha_1 + (kl_2)\alpha_2 + (kl_p)\alpha_p \in H.$$

由定义知，H 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

定义 称 $\operatorname{span}\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p\}$为由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ **生成或张成的子空间**.

定理 等价向量组生成的子空间必相同.

证明 设向量组A : $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 与B : $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 为等价向量组.

因 A 能由B 线性表示， 故 A的每个线性组合必能表为B 的线性组合， 这表明

$$\mathrm{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\} \subset \mathrm{span}\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\};$$

同理， 因B 能由A线性表示， 故有

$$\mathrm{span}\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\} \subset \mathrm{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}.$$

综上知

$$\mathrm{span}\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\} = \mathrm{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}.$$

例题 $V=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T:\sum_{i=0}^{n}x_i=0\right\}$是向量空间吗？

解答 对V中任意两向量

$$\alpha=(a_1,\cdots,a_n)^T\in V,\ \beta=(b_1,\cdots,b_n)^T\in V$$

$$\Rightarrow\sum_{i=0}^{n}a_i=0,\sum_{i=0}^{n}b_i=0\Rightarrow\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)=0$$

$$\Rightarrow\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^T\in V;$$

对任意数k及V中任意向量$\xi=(c_1,\cdots,c_n)^T$

$$\Rightarrow\sum_{i=0}^{n}c_i=0\Rightarrow\sum_{i=0}^{n}kc_i=0\Rightarrow k\xi=(kc_1,\cdots,kc_n)^T\in V;$$

综上知，V对加法和数乘封闭，是向量空间.

例题 $W=\left\{(1,x_2,\cdots,x_n)^T: x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\right\}$是向量空间吗？

解答 对 W 中任意向量

$$\xi=(1,c_2,\cdots,c_n)^T$$

却有

$$2\xi=(2,2c_2,\cdots,2c_n)^T\notin W,$$

这表明，W对数乘不封闭，不是向量空间.

提醒 还可更简单地解释为：

因 $O\notin W$, 故 W 不是子空间.

二、矩阵的列空间行空间零空间

矩阵 A 的列向量组的全部线性组合构成的集合，记为 $\mathrm{Col}A$.

若 $A=(a_{ij})_{m\times n}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则

$$\mathrm{Col}A \triangleq \mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}\subset\mathbb{R}^m.$$

定理 若 A 为 $m\times n$ 矩阵，则 $\mathrm{Col}A$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间.

定义 称 $\mathrm{Col}A$ 称为矩阵 A 的**列空间**.

提醒 显然，$\mathrm{Col}A=\{\beta:\exists X\in\mathbb{R}^n,\text{s. t. }\beta=AX\}$，因此，$\mathrm{Col}A$ 也称为 A 的值域空间 $\mathrm{Range}(A)$.

例题 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & -4\\ -4 & 6 & -2\\ -3 & 7 & 6\end{bmatrix}$, $\beta=\begin{bmatrix}3\\ 3\\ -4\end{bmatrix}$, 判断$\beta$是否在 $\mathrm{Col}A$ 中.

解答 β在$\mathrm{Col}A$ 中当且仅当方程组 $AX=\beta$有解.

用行变换化增广矩阵为行阶梯形矩阵，有

$$(A,\beta)=\begin{bmatrix}1 & -3 & -4 & 3\\ -4 & 6 & -2 & 3\\ -3 & 7 & 6 & -4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -3 & -4 & 3\\ 0 & -6 & -18 & 15\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

显然，线性方程组 $AX=\beta$相容，故 β在$\mathrm{Col}A$ 中.

矩阵 A 的行向量组的全部线性组合构成的集合，记为 $\operatorname{Row} A$.

设 $m \times n$ 矩阵 $A = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix}$, 则

$$\operatorname{Row} A = \operatorname{span}\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m\} \subset \mathbb{R}^n.$$

定理 若 A为$m \times n$ 矩阵，则 $\operatorname{Row} A$是$\mathbb{R}^n$ 的子空间.

定义 称 $\operatorname{Row} A$ 称为矩阵 A 的**行空间**.

初等行变换不会改变列向量组的线性关系，但会改变行向量组的线性关系，但如下结果成立.

定理 矩阵 A 经初等行变换化为 B, 则 A 与 B 有相同的行空间.

证明 因 B 由 A 经初等行变换得到，则 B 的行向量能由 A 的行向量组线性表示. 因初等行变换可逆，则 A 的行向量组也能由 B 的行向量组线性表示. 从而 A 与 B 两矩阵的行向量组等价，因而生成的子空间相同，即

$$\mathrm{Row} A = \mathrm{Row} B.$$

提醒 行等价的两矩阵有相同的行空间.

设A为一矩阵，齐次线性方程组 $AX=0$ 的全部解构成的集合，记为

$$\mathrm{Nul}A=\{X\in\mathbb{R}^n:AX=0\}.$$

定理 若 A为$m\times n$ 矩阵，则 $\mathrm{Nul}A$是$\mathbb{R}^n$ 的子空间.

定义 称 $\mathrm{Nul}A$ 称为矩阵A的**零空间**.

等价地，m 个方程 n个未知量的齐次线性方程组 $AX=O$ 的解集是$\mathbb{R}^n$ 的子空间，称为 $AX=O$的**解空间**.

例题 求 $\mathrm{Nul}A$ 的一个生成集，其中

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 6 & -1 & 1 & -7\\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1\\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4\end{bmatrix}.$$

解答 首先，用初等行变换可化 A 为行最简形.

$$A\to\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

$$AX=O \text{ 同解于}\begin{cases}x_1-2x_2-x_4+3x_5=0\\ x_3+2x_4-2x_5=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=2x_2+x_4-3x_5\\ x_3=-2x_4+2x_5\end{cases}$$

令自由变量 $x_2=k_1, x_4=k_2, x_5=k_3$，得通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k_1+k_2-3k_3 \\ k_1 \\ -2k_2+2k_3 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = k_1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

则 $\alpha=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \gamma=\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是 $\mathrm{Nul}A$ 的生成集.

怎样求 $\mathrm{Nul}A$ 的生成集？

(1) 将 A 用初等行变换化为行最简形

(2) 写出相应的最简方程组

(3) 将全部解用向量表示，并写成线性组合形式

(4) 解的线性组合中具体的向量构成所求生成集