第五章 特征值与特征向量

5.1 方阵的特征值与特征向量

5.2 矩阵的相似对角化

5.3 实对称矩阵的正交相似对角化

第五章 特征值与特征向量

第二节 矩阵的相似对角化

一、矩阵相似的概念

二、相似矩阵的性质

三、矩阵可对角化的条件

四、矩阵可对角化理论的应用

矩阵分解经常能解决很多问题，我们要考虑一种特殊的分解：$A = \mathrm{P}\Lambda\mathrm{P}^{-1}$，其中$\Lambda$为对角阵. 这种分解在很多递推计算中有很广泛的应用，可以大大简化计算的过程.

问题：对一般矩阵，这种分解是否存在？

若存在，如何求P, Λ?

一、矩阵相似的概念

定义 设 A, B 为 n 阶矩阵，若存在可逆矩阵 P, 使得

$$\mathrm{P}^{-1}A\mathrm{P} = B,$$

则称 A 与 B 相似，记为 $A \sim B$.

提醒 相似这种等价关系具有如下三条性质：

(1) 自反性 $A \sim A$;

(2) 对称性 $A \sim B \Rightarrow B \sim A$;

(3) 传递性 $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

提醒 相似的两矩阵一定等价！反之不然.

$A \sim B \Rightarrow A \cong B \qquad A \cong B \nRightarrow A \sim B$

例题 若 $A=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{bmatrix}$, 有否 $A\sim B$?

解答 将 A 第一行与第三行交换，再第一列与第三列交换可得到 B, 由初等矩阵乘法意义，有

$\mathrm{P}(1,3)A\mathrm{P}(1,3)=B$ 即 $[\mathrm{P}(1,3)]^{-1}A\mathrm{P}(1,3)=B$

于是 $A\sim B$.

思考 若 $A\sim kE$, 则 $A=$ ？

$$A=\mathrm{P}^{-1}(kE)\mathrm{P}=k\mathrm{P}^{-1}E\mathrm{P}=kE.$$

数量矩阵（包括单位阵）只和自己相似！

二、矩阵相似的性质

定理 若矩阵 $A \sim B$, 则

(1) $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$;

相似矩阵具有相同的特征多项式,

从而有相同的特征值.

(2) $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}B, \quad |A| = |B|$;

(3) $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.

提醒 相似矩阵具有相同的特征多项式，相同的特征值，相同的迹，相同的秩，相同的行列式，相同的可逆性！

所以，矩阵之间的这种关系叫 “**相似**” ！

定理 若矩阵 $A \sim B$, 则

(1) $A^k \sim B^k, \forall k \in \mathbb{N}$;

(2) $kA \sim kB, k$为任意常数;

(3) $f(A) \sim f(B), f(x)$为任意多项式;

(4) $A^T \sim B^T$.

定理 若矩阵 $A \sim B$, 且 A 可逆，则

(1) B 可逆;

(2) $A^{-1} \sim B^{-1}$;

(3) $A^* \sim B^*$.

思考 若 $A\sim B$, 且 A 可逆，如下结论正确吗？

$$f(A)+A^{-1}+A^{*}\sim f(B)+B^{-1}+B^{*},$$

其中 $f(x)$ 为任意多项式.

思考 若矩阵 $A\sim B$, $C\sim D$, 如下结论正确吗？

$$A+C\sim B+D.$$

例题 已知三阶矩阵 A 与三维列向量 α 使得 α, $A\alpha$, $A^2\alpha$ 线性无关， $A^3\alpha = 3A\alpha - 2A^2\alpha$, 求 A 的特征值.

解答 因向量组 α, $A\alpha$, $A^2\alpha$ 线性无关，故方阵 $Q = (\alpha,\ A\alpha,\ A^2\alpha)$ 可逆，且

$$AQ = A(\alpha, A\alpha, A^2\alpha) = (A\alpha, A^2\alpha, A^3\alpha)$$

$$= (A\alpha, A^2\alpha, 3A\alpha - 2A^2\alpha)$$

$$= (\alpha, A\alpha, A^2\alpha)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = QB,$$

其中 $B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$.

则 $Q^{-1}AQ=B$, 即 $A\sim B$, 从而有相同的特征值.

易求得

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ -1 & \lambda & -3\\ 0 & -1 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda+3),$$

所以 A 的特征值，也即 B 的特征值，为 $0,1,-3$.

相似性质的应用

① 若 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，则 $\lambda = ?$

答案 $1+4+5=\lambda+2+2 \Rightarrow \lambda=6$

② 若 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & a & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$，则 $a = ?\ b = ?$

答案 $\begin{cases} 2+a+3=1+2+b \\ 2\times a\times 3=1\times 2\times b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$

三、矩阵可相似对角化的条件

若矩阵 A 与某对角阵相似，称 A 可相似对角化.

可相似对角化，简称可对角化.

对角阵是结构最简单的矩阵之一. 若 $A \sim \Lambda$, 其中 Λ 为对角矩阵，即 A 可对角化为 Λ, 由相似的性质易知，A 与 Λ 有很多相同的性质，则通过过研究 Λ 的性质来达到研究 A 的性质的目的.

可是，一个矩阵在什么时候才可以对角化呢？下面定理给出了矩阵可对角化的充要条件.

定理 设 A 为 n 阶方阵，则以下命题等价：

(1) A 可相似对角化

(2) A 有 n 个线性无关的特征向量.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) A 可对角化

$$\Rightarrow \text{存在}\ \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \text{及可逆矩阵}$$

$$\mathrm{P} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\ \text{使得}\ \mathrm{P}^{-1}A\mathrm{P} = \Lambda$$

$$\Rightarrow A\mathrm{P} = \mathrm{P}\Lambda$$

$$\Rightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \cdots, \lambda_n\alpha_n)$$

$\Rightarrow A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i, i = 1, 2, \cdots, n$ (i)

P可逆 $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关 (ii)

$(i)(ii) \Rightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量.

$(2) \Rightarrow (1)$ A 有 n 个线性无关的特征向量

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n,$$

分别属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则

$$A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

$$\Rightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \cdots, \lambda_n\alpha_n)$$

$\Rightarrow A\mathrm{P} = \mathrm{P}\Lambda$, 其中 $\mathrm{P} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 可逆

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

$\Rightarrow \mathrm{P}^{-1}A\mathrm{P} = \Lambda \Rightarrow A \sim \Lambda \Rightarrow A$ 可对角化.

提醒 若矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 可对角化，则

① 与 A 相似的对角阵即是由 A 的全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 构成的对角阵

$$\Lambda=\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\,;$$

② 使得 $\mathrm{P}^{-1}A\mathrm{P}=\Lambda$ 成立的可逆矩阵 P 即是由 A 的分别属于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的线性无关的特征向量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为列向量组构成的矩阵

$$\mathrm{P}=(X_1,X_2,\cdots,X_n).$$

定理 设 A 为 n 阶方阵，则如下命题等价:

① A 可对角化;

② A 有 n 个线性无关的特征向量;

③ A 的任一特征值的代数重数与其几何重数相等.

定理 若矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 有 n 个不同特征值，即特征值全为单根，则 A 可对角化.

提醒 以上命题是方阵可对角化的充分条件！

例题 矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{bmatrix}$ 能对角化吗？若能，求出可逆矩阵 P 使得 $\mathrm{P}^{-1}A\mathrm{P}$ 为对角阵.

解答 经计算有

$$|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4),$$

即三阶矩阵 A 有 3个不同的特征值

$$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=4,$$

故 A 可对角化.

解 $(\lambda_1E-A)X=0$ 得其基础解系为 $\xi=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$;

解 $(\lambda_2 E - A)X = 0$ 得其基础解系为 $\eta = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};$

解 $(\lambda_3 E - A)X = 0$ 得其基础解系为 $\zeta = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$

令 $\mathrm{P} = (\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$

则 P 可逆， 使得 $\mathrm{P}^{-1} A \mathrm{P} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 4 \end{bmatrix}.$

提醒 可逆矩阵的列向量顺序与相似对角阵主对角元素顺序要对应！

在上例中，若取

$$\mathrm{P}=(\zeta,\xi,\eta)=\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&1&-1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

则

$$\mathrm{P}^{-1}A\mathrm{P}=\begin{bmatrix}\lambda_3&&\\&\lambda_1&\\&&\lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}=\Lambda$$

例题 证明矩阵$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$不能对角化.

证明 经计算有

$$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-2),$$

则A的特征值为 $\lambda_{1,2}=1,\ \lambda_3=2.$

经初等行变换有 $\lambda_{1,2}E-A\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$

易见，特征值$\lambda_{1,2}$的代数重数与几何重数不等，故A不能对角化.

只需对多重根验证即可

例题 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$能对角化吗？若能，求出可逆矩阵 P使得 $\mathrm{P}^{-1}A\mathrm{P}$ 为对角阵.

解答 经计算有$|\lambda E-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$,

故 A的特征值为 $\lambda_{1,2}=-1,\ \lambda_3=5.$

经初等行变换有$\lambda_{1,2}E-A\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,

易见，特征值 $\lambda_{1,2}$的代数重数与几何重数相等，且A没有其它多重特征值，故A能对角化.

解 $(\lambda_{12}E-A)X=0$ 得其基础解系为

$$X_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\ X_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix};$$

解 $(\lambda_3E-A)X=0$ 得其基础解系为 $\eta=(1,1,1)^T;$

令 $\mathrm{P}=(X_1,X_2,\eta)=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$, 则 P 可逆，使得

$$\mathrm{P}^{-1}A\mathrm{P}=\mathrm{diag}(-1,-1,5).$$

思考 本例中若 $\mathrm{P}=(X_1,X_1+2X_2,9\eta_1)$, $\mathrm{P}^{-1}A\mathrm{P}=?$

思考 若二阶方阵 A 的行列式 $|A|<0$, A 能对角化吗？

例题 设方阵 $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&1&a\\1&0&0\end{bmatrix}$, 问 a 为何值时, A 可对角化?

解答 经计算有 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$,

故 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=1,\ \lambda_3=-1.$

经初等行变换有 $\lambda_{1,2}E-A\to\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{bmatrix}$,

因 $\lambda_{1,2}$ 是唯一的多重特征值，故

A 能对角化 $\Leftrightarrow$ $\lambda_{1,2}$ 的代数重数与几何重数相等

$$\Leftrightarrow 2=3-\operatorname{rank}(\lambda_{1,2}E-A)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{rank}(\lambda_{1,2}E-A)=1$$

$$\Leftrightarrow a+1=0\Leftrightarrow a=-1.$$

四、矩阵可对角化理论的应用

例题 已知$A=\begin{bmatrix}4 & -5\\ 2 & -3\end{bmatrix}$, 求 A^n.

解答 因$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda+1)$,

矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=2, \lambda_2=-1$,

矩阵 A 的特征值全为单根，故可对角化.

解 $(\lambda_1 E-A)X=0$ 得基础解系 $\xi=(5,2)^T$;

解 $(\lambda_2 E-A)X=0$ 得基础解系 $\eta=(1,1)^T$;

令 $\mathrm{P}=(\xi,\eta)=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, 则 P 可逆，使得

$$\mathrm{P}^{-1}A\mathrm{P}=\begin{bmatrix}2 & \\ & -1\end{bmatrix}.$$

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2 & \\ & -1\end{bmatrix}$$

从而有

$$P^{-1}A^nP=(P^{-1}AP)^n=\begin{bmatrix}2 & \\ & -1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}2^n & \\ & (-1)^n\end{bmatrix},$$

于是

$$\begin{aligned}A^n&=P\begin{bmatrix}2^n & \\ & (-1)^n\end{bmatrix}P^{-1}\\&=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^n & 0\\ 0 & (-1)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}^{-1}\\&=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}5\times 2^n-2\times(-1)^n & 5\times(-1)^n-5\times 2^n\\ 2^{n+1}-2\times(-1)^n & 5\times(-1)^n-2^{n+1}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

例题 设 $\eta_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\eta_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$, $\eta_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$ 为 $A_{3\times 3}$ 的分别属于特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=3$ 的特征向量，求矩阵 A.

解答 设 $\mathrm{P}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&-1&1\end{bmatrix}$, 则

$$\mathrm{P}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&2&2\\3&0&-3\\1&-2&1\end{bmatrix}.$$

于是

$$
\begin{aligned}
AP &= A(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (A\eta_1, A\eta_2, A\eta_3) \\
&= (\lambda_1\eta_1, \lambda_2\eta_2, \lambda_3\eta_3) = (0, \eta_2, 3\eta_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow A &= (0, \eta_2, 3\eta_3) P^{-1} \\
&= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

课堂练习

1. 若 n 方阵 A, B 有相同的特征值，也都有 n 个线性无关的特征向量，则(　　).

(1) $A = B$　　(2) $A \neq B$ 但 $|A - B| = 0$

(3) $A \sim B$　　(4) $|A| = |B|$ 但未必有 $A \sim B$

2. 已知 $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求 x, y.

3. 已知 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & x \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求 x, y.