海纳百川 有容乃大

第四章 向量空间

第一节 向量的定义及运算

一、向量的定义

二、向量的线性运算及向量空间

三、向量组的线性组合

一、向量的定义

定义 由数域 $\mathbb{P}$ 中的 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 构成的一个有序数组

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \text{ 或 } \beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

称为数域 $\mathbb{P}$ 上的一个 n 维**向量**，a_i 为 α 和 β 的第 i 个**分量**, $i = 1, 2, \cdots, n$.

α 为 n 维**行向量**，β 为 n 维**列向量**.

n 维行向量和 n 维列向量统称为 n **维向量**.

提醒 实数域 $\mathbb{R}$ 上的向量称为实向量，如

$$\alpha=(2,0,-3)$$

复数域 $\mathbb{C}$ 上的向量称为复向量，如

$$\beta=(i,1-i,2+3i)$$

未经特别说明，本课程的向量均为实向量.

提醒 若 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，称 $(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$ 为 α 的负向量，记为 $-\alpha$.

提醒 分量全为零的向量称为零向量，记作 0.

同型向量 若向量 α 与 β 维数相同，且都为行向量或都为列向量，则称 α 与 β 为**同型向量**.

相等向量 若向量 α, β 满足：

(1) 是同型向量；

(2) 相同位置的分量相等，

则称 α 与 β **相等**.

向量组 由若干个同型向量构成的集合.

设 A 为 $s \times n$ 矩阵，

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix}$$

矩阵 A的第 i个行向量 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$

$$i = 1, 2, \cdots, s.$$

矩阵 A的**行向量组** $\Sigma_{\mathrm{r}} : \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$

矩阵的**行**向量组中：向量个数 = 矩阵的行数

向量维数 = 矩阵的列数

设 A 为 $s \times n$ 矩阵，

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$$

矩阵 A的第 j个列向量 $\beta_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{sj})^T$

$j = 1, 2, \cdots, n.$

矩阵 A的列向量组 $\Sigma_c : \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$

矩阵的列向量组中：向量个数 = 矩阵的列数

向量维数 = 矩阵的行数

二、向量的线性运算及向量空间

定义 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$.

加法 称向量 $(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$ 为 α 与 β 的和，记作

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n).$$

数乘 k 为一个数，称 $(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$ 为 k 与 α 的**数量乘积**或**数乘**，记作

$$k\alpha=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n).$$

提醒 向量的加法以及数与向量的数乘统称为向量的线性运算.

向量的线性运算是矩阵的线性运算的特殊情形.

对任意的 n 维向量 α,β,γ 及任意的数 $k,l,$ 向量的线性运算满足下面八条基本的运算规律：

向量的线性运算规律

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

(3) $\alpha+0=\alpha$

(4) $\alpha+(-\alpha)=0$

(5) $1\alpha=\alpha$

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$

(7) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

(8) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

定义 在数域 $\mathbb{P}$ 上的全体 n 维行向量构成的集合

$$\mathbb{P}^{1\times n} \triangleq \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) : a_i \in \mathbb{P}\}$$

里，如前面那样定义了向量加法，$\mathbb{P}$ 中数与向量的数乘运算时，则称 $\mathbb{P}^{1\times n}$ 构成了数域 $\mathbb{P}$上的 n 维行向量空间；

类似地，可定义 $\mathbb{P}$ 上的 n 维列向量空间.

提醒 n 维行向量空间和 n 维列向量空间统称为 n 维向量空间，记为 $\mathbb{P}^n$.

n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ n 维复向量空间 $\mathbb{C}^n$

例题 设 $\alpha_1 = (1, -1, 2)$, $\alpha_2 = (1, 2, 0)$, $\alpha_3 = (1, 0, -3)$,

求 $\alpha = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 12\alpha_3$.

解答

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_1 - 2\alpha_2 + 12\alpha_3. \\
&= (1, -1, 2) - 2(1, 2, 0) + 12(1, 0, -3) \\
&= (1 - 2 + 12, -1 - 4 + 0, 2 - 0 - 36) \\
&= (11, -5, 34).
\end{aligned}
$$

三、向量组的线性组合

定义 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 为一向量组，称

$$\sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s,$$

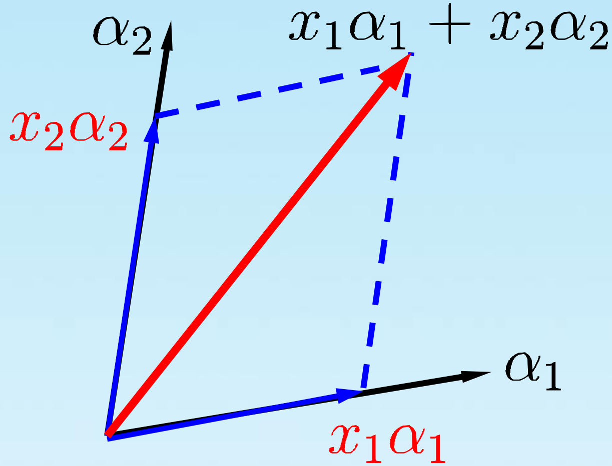
为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个**线性组合**，其中数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 称为该线性组合的**组合系数**，简称**系数**.

提醒 若向量 β 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的线性组合，即存在数 $k_1, k_2, \cdots, k_s,$ 使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s,$$

称 β 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ **线性表出**.

两向量的线性组合的几何示意图



定义 设 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_s \in \mathbb{R}^n$, 由 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_s$ 的所有可能的线性组合构成的集合称为由该向量组**张成或生成的子集**，记为

$$\operatorname{span}\{\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_s\} = \left\{ \sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i : k_1, k_2, \cdots, k_s \in \mathbb{R} \right\}$$

思考 一个非零向量张成的子集的是什么？

思考 若向量 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \alpha$ 与 β 不平行，则以下集合分别表什么？

$$Q_1 = \operatorname{span}\{\alpha, \beta\}$$

$$Q_2 = \{k\alpha + l\beta : k, l \in \mathbb{R}, k > 0, l > 0\}$$

$$Q_3 = \{k\alpha + l\beta : k, l \in \mathbb{R}, k > 0, l > 0, k + l = 1\}$$

提醒 若 $\alpha \neq 0$，则 $\operatorname{span}\{\alpha\}$ 表示由 α 确定的直线.

若向量 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ 且不共线，则 $\operatorname{span}\{\alpha, \beta\}$ 表示由向量 α 和 β 确定的平面.

提醒 任何n维行向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$

都可表为向量组

$$\begin{aligned}\varepsilon_1&=(1,0,\cdots,0),\\ \varepsilon_2&=(0,1,\cdots,0),\\ &\vdots\\ \varepsilon_n&=(0,0,\cdots,1)\end{aligned}$$

基本向量组

的一个线性组合，且表出法唯一，为

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}a_i\varepsilon_i=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n.$$

提醒 任何 n 维列向量 $\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ 均可表为向量组

$$\zeta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \zeta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \zeta_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

基本向量组

的一个线性组合，且表出法唯一，为

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} b_i \zeta_i = b_1 \zeta_1 + b_2 \zeta_2 + \cdots + b_n \zeta_n .$$

定理 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 为一向量组， 则以下两个命题等价：

(1) β 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出；

(2) 线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$ 有解.

提醒 向量组中的每一个向量都可以由向量组自身线性表出.

例题 向量 $\beta=\begin{bmatrix}7\\4\\-3\end{bmatrix}$能否写成 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\-5\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\5\\6\end{bmatrix}$

的线性组合?

解答 问题即判断 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=\beta$是否有解?

用初等行变换将增广矩阵化成行最简形:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\beta)=\begin{bmatrix}1 & 2 & 7\\-2 & 5 & 4\\-5 & 6 & -3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

方程组有（唯一）解，解为 $x_1=3,x_2=2,$

即 β 可写成 α_1和α_2 的线性组合：$\beta=3\alpha_1+2\alpha_2.$

提醒 判断 β 能否由向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性表出，即判断线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$$

有无解.

当 $\mathbb{R}^n$是列向量空间时，其增广矩阵为

$$(\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n, \beta).$$

当 $\mathbb{R}^n$是行向量空间时，因

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$$

$$\Leftrightarrow x_1\alpha_1^T + x_2\alpha_2^T + \cdots + x_n\alpha_n^T = \beta^T$$

故其增广矩阵为 $(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \cdots, \alpha_n^T, \beta^T)$.

例题 已知 $\alpha_1=(1,-2,3),\alpha_2=(5,-13,-3)$, 那么 $\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 为 $\mathbb{R}^3$中经过原点的平面.

问：向量 $\beta=(-3,8,1)$ 是否位于此平面中？

解答 考虑线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=\beta.$

线性方程组的增广矩阵经初等行变换，有

$$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\beta^T)=\begin{bmatrix}1&5&-3\\-2&-13&8\\3&-3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&5&-3\\0&-3&2\\0&0&-2\end{bmatrix},$$

显然方程组无解，即 β不在 $\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 中.

提醒 此处方程组的增广矩阵不是 $(\alpha_1,\alpha_2,\beta)$!

课堂练习 判定以下命题是否正确?

1. 零向量可以由任何一个向量组线性表示.
2. 一个向量组内的任何一个向量都可由这个向量组线性表示.