第二章　矩阵代数

1 矩阵与向量

2 矩阵的代数运算

3 逆矩阵与矩阵的初等变换

4 转置矩阵与一些重要矩阵

5 分块矩阵

6 广义初等变换和广义初等矩阵

第六节　广义初等变换
广义初等矩阵

一、概念

二、应用

一、概念

将初等变换和初等矩阵的概念推广到分块矩阵上，得广义初等变换和广义初等矩阵.

定义 称分块矩阵的下列三种变换依次为

广义行交换、广义行倍乘、广义行倍加变换：

1）交换分块矩阵两行的位置；

2）用适当阶数的可逆矩阵 K 左乘分块矩阵的某一行；

3）用某个适当阶数的矩阵 K 左乘分块矩阵的某一行之后加到另一行上.

定义 称分块矩阵的下列三种变换依次为

广义列交换、广义列倍乘、广义列倍加变换：

1）交换分块矩阵两列的位置；

2）用适当阶数的可逆矩阵 K 右乘分块矩阵的某一列；

3）用某个适当阶数的矩阵 K 右乘分块矩阵的某一列之后加到另一列上.

定义 将分块的单位矩阵经一次广义初等变换化得的矩阵阵称为广义初等矩阵.

与三种广义初等变换对应，有三种广义初等矩阵.

广义交换初等矩阵

$$\tilde{P}(i,j)=\begin{bmatrix} E_1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && E_{i-1} &&&&&&& \\ &&& 0 & \cdots & E_j &&&& \\ &&& \vdots & \ddots & \vdots &&&& \\ &&& E_i & \cdots & 0 &&&& \\ &&&&&& E_{j+1} &&& \\ &&&&&&& \ddots && \\ &&&&&&&& E_s \end{bmatrix}$$

其中，E_i为n_i阶单位矩阵，$i=1,2,\cdots,s.$

广义倍乘初等矩阵

$$\tilde{P}\left(i\left(K\right)\right)=\begin{bmatrix} E_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & K & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & E_s \end{bmatrix}$$

其中，E_i 为 n_i 阶单位矩阵，$i=1,2,\cdots,s.$

K 为适当可逆矩阵.

广义倍加初等矩阵

$$\tilde{P}(i, j(K)) = \begin{bmatrix} E_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & E_i & \cdots & K & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & E_j & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & E_s \end{bmatrix}$$

其中，E_i 为 n_i 阶单位矩阵，$i = 1, 2, \cdots, s$.

K 为适当阶数的矩阵.

定理 对分块矩阵作广义初等行变换，相当于用相应的广义初等矩阵左乘此分块矩阵；

对分块矩阵作广义初等列变换，相当于用相应的广义初等矩阵右乘此分块矩阵.

例题

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + P \cdot R_1} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} + PA_{11} & A_{22} + PA_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ P & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} + PA_{11} & A_{22} + PA_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{bmatrix} A_{12} & A_{11} \\ A_{22} & A_{21} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12} & A_{11} \\ A_{22} & A_{21} \end{bmatrix}$$

二、应用

例题 设A,B可逆，求 $T=\begin{bmatrix}A&0\\C&B\end{bmatrix}$的逆矩阵.

解答 不妨设A,B分别是m,n阶可逆矩阵.

$$(T,E)=\begin{bmatrix}A&0&E_m&0\\C&B&0&E_n\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2-CA^{-1}R_1}\begin{bmatrix}A&0&E_m&0\\0&B&-CA^{-1}&E_n\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{A^{-1}R_1,\,B^{-1}R_2}\begin{bmatrix}E&0&A^{-1}&0\\0&E&-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}A&0\\C&B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1}&0\\-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\end{bmatrix}$$