第四章 向量空间

第四章 向量空间

第六节 矩阵的秩

矩阵秩的概念为Sylvester于1861年引进

一、矩阵的 k 阶子式及秩的定义

定义 在 $m \times n$ 矩阵 A 中，任取 k 行 k 列，位于这些行和列交叉处的 k^2 个元素，按它们在 A 中的顺序构成的一个 k 阶行列式，称为矩阵 A 的一个 k 阶子式.

提醒 若 A 所有的 r 阶子式为零，则 A 的所有比 r 更高阶的子式（若存在）必等于零！故 A 的非零子式的最高阶数必存在，这就是矩阵的秩.

定义 矩阵 A 的非零子式的最高阶数 r 称为矩阵 A 的**秩**，记为 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{rank}(A)=r$.

规定 零矩阵的秩为零，即 $\mathrm{r}(O)=0$.

提醒 若 A 有一个 r 阶子式不为零，则 $\mathrm{r}(A)\geq r$.
若 A 的所有 r 阶子式全为零，则 $\mathrm{r}(A)<r$.

提醒 若 A 为 $m\times n$ 矩阵，则

$$\begin{cases}\mathrm{rank}(A)\leq m\\ \mathrm{rank}(A)\leq n\end{cases}\Rightarrow \mathrm{rank}(A)\leq \min\{m,n\}.$$

若阶梯形矩阵 A 有 r 行非零，则 A 的所有比 r 更高阶的子式（若存在，有零行）都为零，从而

$$\operatorname{rank}(A) \leq r;$$

选取 A 的主元所在的行与列，可得到一个 r 阶子式不为零，从而

$$\operatorname{rank}(A) \geq r;$$

于是有 $\operatorname{rank}(A) = r$.

命题 阶梯形矩阵的秩即其非零行行数，或主元个数，或主元列数.

二、矩阵的行秩及列秩

问题 对一般矩阵而言，行向量组有秩，列向量组有秩，本身有秩，这些秩有关系吗？另外，由定义求秩很麻烦，有更好的求秩方法吗？

定义 矩阵 A 的行空间、列空间的维数分别称为 A 的**行秩**row rank、**列秩**column rank.

提醒 矩阵 A 的行秩即 A 的行向量组的秩，矩阵 A 的列秩即 A 的列向量组的秩.

例题 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$ 的秩、行秩和列秩.

解答 A 有二阶子式 $\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}\neq 0,$ 没有三阶子式，

故 $\mathrm{rank}(A)=2;$

A的两个行向量线性无关，A的行秩 $=2;$

A的第 $1,2$ 个列向量线性无关，而三个二维列向量线性相关，故 A的列秩 $=2.$

问题 就以上矩阵而言，我们有

$$\mathrm{rank}(A)=A\text{的列秩}=A\text{的行秩}$$

对任意矩阵，该结论是否成立？

引理1 对任意矩阵 A，有

$$A\text{的列秩} = A\text{的行秩}.$$

证明 A 的列秩是 A的主元列的数目，或者说是 A 的行最简形矩阵 B 中主元的数目.

又 B 的每个主元对应一个非零行，这些行形成 A的行空间的基，因此 A 的行秩也是 B的主元数目.

从而，A的列秩 $=$ A 的行秩.

引理2 对任意矩阵 A，有

$$A\text{的列秩} = \mathrm{r}(A).$$

证明 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, $\mathrm{r}(A)=s$, A 的列秩 $=t$.

一方面，因 A 的列秩 $=t$, 不妨设 A 的前 t 列 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 为 A 的一个列极大无关组，并令

$$B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t).$$

由引理1知, B 的行秩 $=$ B 的列秩 $=t$.

因 B 的行极大无关组构成 A 的一个 t 阶非零子式,

故$\mathrm{rank}(A)=s\geq t$.

另一方面，因 $\mathrm{r}(A)=s$，则 A 有 s 阶非零子式，该子式的 s 列线性无关，且可**增维**为 A 中的 s 个列向量，则 A 中的这 s 个列向量线性无关，从而，有 A 的列秩 $=t\geq s=\mathrm{r}(A)$.

$$A\text{ 的列秩 }=t\geq s=\mathrm{rank}(A).$$

综上，

$$\mathrm{rank}(A)=s\geq t,\ A\text{ 的列秩 }=t\geq s=\mathrm{rank}(A).$$

从而有

$$A\text{ 的列秩 }=\mathrm{rank}(A).$$

定理 对任意矩阵 A，有

$$\mathrm{rank}(A) = A\text{的列秩} = A\text{的行秩}.$$

$$\dim(\mathrm{Col}A) = \dim(\mathrm{Row}A) = \mathrm{rank}(A).$$

推论1 对任意矩阵 A, 有

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^T).$$

$$\mathrm{rank}(A) = A\text{ 的列秩} = A^T\text{ 的行秩} = \mathrm{rank}(A^T).$$

推论2 初等变换不改变矩阵的秩.

矩阵秩的求法 将矩阵用初等行变换化为阶梯形矩阵，则阶梯形矩阵中非零行的行数或主元列数或主元个数，就是原矩阵的秩.

推论3 对任意非零矩阵 A 而言，有：

$$\mathrm{r}(A)=r \Leftrightarrow A \cong \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

推论4 设 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵，P 为 m 阶可逆矩阵， Q 为 n 阶可逆矩阵，则

(1) $A \cong B \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B).$

(2) $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(\mathrm{P}A)=\mathrm{r}(AQ)=\mathrm{r}(\mathrm{P}AQ).$

三、矩阵秩的一些重要结论

秩定理 若矩阵 A 的列数为 n, 则

$$\operatorname{rank}(A)+\dim(\operatorname{Nul}A)=n.$$

证明 矩阵 A 的主元列构成 $\operatorname{Col}A$ 的基，故 $\mathrm{r}(A)$ 即为 A 的主元列数.

而 $\operatorname{Nul}A$ 的维数等于方程组 $AX=O$ 中自由变量的个数，即 A 非主元列数.

故 $\operatorname{rank}(A)+\dim(\operatorname{Nul}A)$

$=A$ 的主元列数 $+A$ 的非主元列数

$=A$ 的总列数 $=n.$

定理 设 A, B 分别为 $m \times n$, $n \times s$ 矩阵，则

$$\operatorname{rank}(AB) \le \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}.$$

证明 因 AB 的行向量组能由 B 的行向量组线性表示，故 AB 的行向量组的秩 $\le B$ 的行向量组的秩，即 AB 的行秩 $\le B$ 的行秩，故

$$\mathrm{r}(AB) \le \mathrm{r}(B).$$

从而有

$$\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}((AB)^T) = \mathrm{r}(B^T A^T) \le \mathrm{r}(A^T) = \mathrm{r}(A).$$

因此 $\mathrm{r}(AB) \le \min\{\mathrm{r}(A), \mathrm{r}(B)\}$.

定义 称列秩与列数相等的矩阵为**列满秩矩阵**；

称行秩与行数相等的矩阵为**行满秩矩阵**；

称既行满秩，又列满秩的矩阵为**满秩矩阵**.

提醒 **行**满秩矩阵即**行**向量组线性无关的矩阵；

列满秩矩阵即**列**向量组线性无关的矩阵；

满秩矩阵 即 **可逆矩阵** 即 **非奇异矩阵**.

推论 设 A, B 分别为 $s \times n, n \times s$ 矩阵.

若 $n < s$, 则行列式 $|AB| = 0$.

证明 $\mathrm{r}(AB) \leq \mathrm{r}(A) \leq \min\{n, s\} = n < s$

$\Rightarrow$ 方阵 AB 不满秩 $\Rightarrow |AB| = 0$.

问题 设 A, B 分别为 $s \times n, n \times s$ 矩阵且 $n \neq s$.

试问： $|AB| \times |BA| = ?$

关于矩阵的秩的一些重要结论

结论1 $\mathrm{r}(A \pm B) \leq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$

结论2 $\mathrm{r}(A, B) \leq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$

结论3 $C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{r}(C) = \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$

结论4 $C = \begin{bmatrix} A & * \\ 0 & B \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{r}(C) \geq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$

结论5 $\mathrm{r}\left(AA^T\right) = \mathrm{r}\left(A^T A\right) = \mathrm{r}(A)$

结论5 $\mathrm{r}\left(AA^T\right) = \mathrm{r}\left(A^TA\right) = \mathrm{r}\left(A\right)$

不妨设 A 为 $m \times n$ 矩阵.

若 X 使得 $AX = 0 \Rightarrow X$ 使得 $A^TAX = 0$;

若 X 使得 $A^TAX = 0 \Rightarrow X$ 使得 $X^TA^TAX = 0$

$\Rightarrow$ X 使得 $(AX)^T(AX) = 0 \Rightarrow X$ 使得 $AX = 0$;

线性方程组 $AX = 0$ 与 $A^TAX = 0$ 同解

$\Rightarrow \mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Nul}(A^TA)$

$\Rightarrow$ (由秩定理)$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^TA)$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(A^T) = \mathrm{rank}(AA^T)$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(AA^T) = \mathrm{rank}(A^TA)$.

$AA^T = 0 \Leftrightarrow A = 0 \Leftrightarrow A^TA = 0$

Frobenius不等式1961年

定理 设 A,B,C 分别为 $s\times n, n\times t, t\times k$ 矩阵，则

$$\mathrm{r}(ABC)\ge \mathrm{r}(AB)+\mathrm{r}(BC)-\mathrm{r}(B)$$

证明 令 $\mathrm{P}=\begin{bmatrix} E & A \\ O & E \end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix} E & O \\ -C & E \end{bmatrix},$

$$M=\begin{bmatrix} ABC & O \\ O & B \end{bmatrix}, N=\begin{bmatrix} O & AB \\ -BC & B \end{bmatrix}.$$

经计算知 $\mathrm{P}MQ=N$, 又矩阵 P,Q 可逆，故

$$\mathrm{r}(ABC)+\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(M)=\mathrm{r}(N)\ge \mathrm{r}(AB)+\mathrm{r}(BC),$$

从而有 $\mathrm{r}(ABC)\ge \mathrm{r}(AB)+\mathrm{r}(BC)-\mathrm{r}(B).$

Sylvester定律1884年

在Frobenius不等式中换B为单位阵，换C为 B, 得Sylvester定律.

推论 设A, B分别为 $s\times n, n\times t$ 矩阵，则

$$\mathrm{r}(AB)\geq \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-n.$$

特别地，若还有 $AB=O$, 则

$$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)\leq n.$$

推论 设A, B分别为$s\times n, n\times t$矩阵，满足

$AB=O,\ \mathrm{r}(A)=n,$ 则 $B=O.$

例题 设 A是$s\times n$ 矩阵且 $\mathrm{r}(A)=n.$ 若矩阵B, C 满足$AB=AC,$ 则$B=C.$

例题 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2-3A-10E=0$.

证明：$\operatorname{rank}(A-5E)+\operatorname{rank}(A+2E)=n$.

证明 $A^2-3A-10E=0 \Rightarrow (A-5E)(A+2E)=0$

$$\Rightarrow \mathrm{r}(A-5E)+\mathrm{r}(A+2E)\le n;$$

$$\mathrm{r}(A-5E)+\mathrm{r}(A+2E)$$

$$\ge \mathrm{r}((A-5E)-(A+2E))=\mathrm{r}(-7E)=n;$$

于是 $\operatorname{rank}(A-5E)+\operatorname{rank}(A+2E)=n$.

例题 设 A^*是 $n(n \geq 2)$ 阶矩阵A 的伴随矩阵.

证明：$\mathrm{r}(A^*) = \begin{cases} n, & \mathrm{r}(A) = n; \\ 1, & \mathrm{r}(A) = n-1; \\ 0, & \mathrm{r}(A) < n-1. \end{cases}$

证明 (1) $\mathrm{r}(A) = n \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow |A^*| = |A|^{n-1} \neq 0$

$\Rightarrow \mathrm{r}(A^*) = n.$

(2) $\mathrm{r}(A) = n-1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow A^*A = |A|E = 0$

$\Rightarrow \mathrm{r}(A^*) + \mathrm{r}(A) \leq n \Rightarrow \mathrm{r}(A^*) \leq n - \mathrm{r}(A) = 1$

$\mathrm{r}(A) = n-1 \Rightarrow A$有$n-1$阶子式 $M_{ij} \neq 0$

$\Rightarrow A^*$有元素 $A_{ij} \neq 0 \Rightarrow A^* \neq 0 \Rightarrow \mathrm{r}(A^*) \geq 1$

综上所述，有 $\mathrm{r}(A^*) = 1.$

(3) $\mathrm{r}(A) < n-1 \Rightarrow A$的所有$n-1$阶子式全为零

$\Rightarrow A$ 的所有元素的余子式全为零

$\Rightarrow A^*$所有元素 $A_{ij}=0 \Rightarrow A^*=0 \Rightarrow \mathrm{r}(A^*)=0.$

思考 以上命题的逆命题是否成立？

设A^*是 $n(n\geq 2)$ 阶矩阵A的伴随矩阵，如下结论是否成立？

$$(1)\ \mathrm{rank}(A^*)=n \xRightarrow{?} \mathrm{rank}(A)=n$$

$$(2)\ \mathrm{rank}(A^*)=1 \xRightarrow{?} \mathrm{rank}(A)=n-1$$

$$(3)\ \mathrm{rank}(A^*)=0 \xRightarrow{?} \mathrm{rank}(A)<n-1$$

四、课堂练习

1. 设 A 为 $n\times n$ 矩阵，证明：

$$\mathrm{r}\,(A)+\mathrm{r}\,(A+E)\geq n.$$

提示 $E=A+E-A$

$$\Rightarrow n=\mathrm{r}(E)=\mathrm{r}(A+E-A)$$
$$\leq \mathrm{r}(A+E)+\mathrm{r}(A)$$

$$\Rightarrow \mathrm{r}\,(A)+\mathrm{r}\,(A+E)\geq n.$$

2. 设 A, B 均为 $n \times n$ 非零矩阵且 $AB = 0$, 则以下关于 $\mathrm{r}(A), \mathrm{r}(B)$ 的说法，正确的是（　　）.

① 必有一个等于零

② 都小于 n

③ 一个小于 n，一个等于 n

④ 都等于 n

正确答案 ②

3. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}$ 且 $\mathrm{r}(A)=3$，则

$k=(\qquad)$.

4. 设A,B均为 $n\times n$ 矩阵且 $A^2-AB=E$，

则 $\operatorname{rank}(AB-BA-A)=(\qquad)$.

5. 设 $n \times n$ 矩阵 A 满足 $A^2 = A$，证明

$$\mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(A - E) = n$$

提示 $A^2 = A \Rightarrow A(A - E) = 0$

$$\Rightarrow 0 = \mathrm{r}(A(A - E)) \geq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(A - E) - n$$

$$\Rightarrow \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(A - E) \leq n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \langle 1 \rangle$$

$$E = A + E - A$$

$$\Rightarrow n = \mathrm{r}(A + E - A) \leq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(E - A)$$

$$\Rightarrow \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(A - E) \geq n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \langle 2 \rangle$$

$$\langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \Rightarrow \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(A - E) = n$$