第三章　行列式

3.1 方阵的行列式

3.2 行列式的主要性质

1.3 行列式的应用

第一节　方阵的行列式

一、低阶方阵的行列式

二、一般行列式的定义

一. 低阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \ (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \ (2) \end{cases}$$

$(1) \times a_{22} - (2) \times a_{12}$, $(2) \times a_{11} - (1) \times a_{21}$, 得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - a_{21}b_1 \end{cases}$$

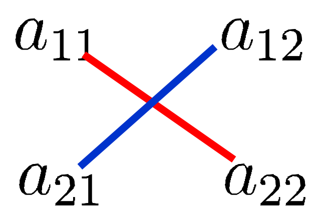
当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，方程组有唯一解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}.$$

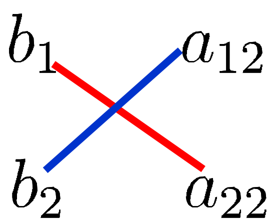
分母 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 为 x_1和

x_2 的系数交叉相乘，再相减

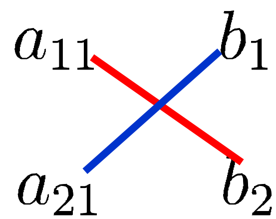


$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

同时，分子也有类似的规律，如下可见



$b_1 a_{22} - a_{12} b_2$



$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

定义 由四个数排成二行二列（横排称行、竖排称列）的数表，外加两条竖线构成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为一个**二阶行列式**，即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

二阶行列式展开式的图示记忆法：**对角线法则**

主对角线

副对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$a_{12}a_{21}$ $\qquad$ $a_{11}a_{22}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

展开式

对于二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \boxed{b_1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \boxed{b_2} \end{cases}$ ← 常数列

若记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ ← 系数行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D \neq 0$ 时，二元线性方程组有唯一解，解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

同样地，当我们合适地定义三阶行列式时，对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

的解的情况，我们能得到与二元线性方程组类似的结论.

那么，三阶行列式该怎么定义呢？

定义 由9数排成三行三列的数表，外加两竖线

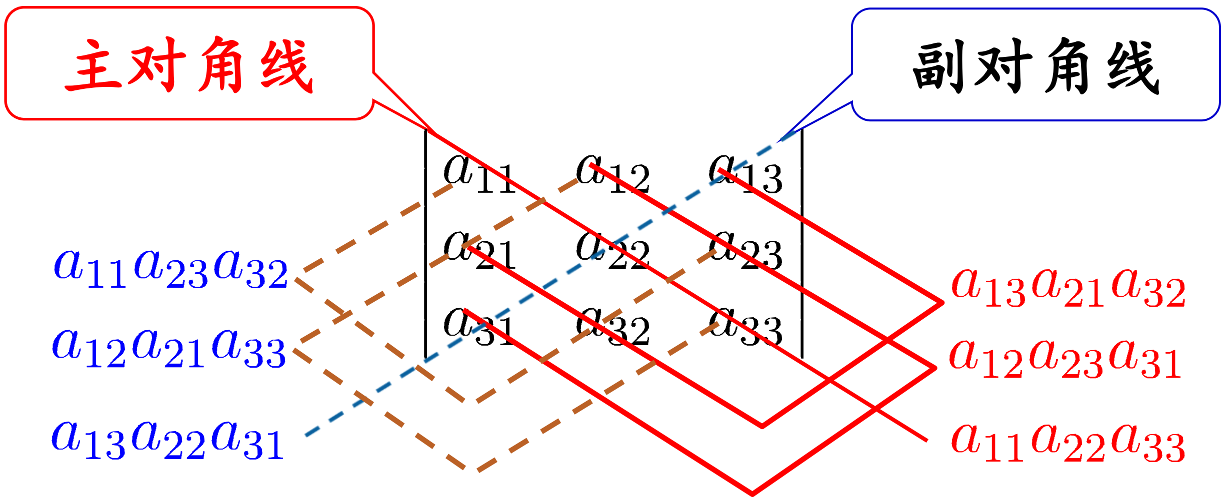
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示算式

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

称记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$为**三阶行列式**.

三阶行列式的图示记忆法之一：**对角线法则**



$$= \boxed{\begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}}$$

展开式

提醒 对角线法则只适用于二、三阶行列式.

三阶行列式的图示记忆法之二：**沙路法则**

$$D=\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

其中数 a_{ij} 称为行列式的**元素**；

元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**，表示该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为**列标**，表示该元素位于第 j 列.

元素 a_{ij} 是行列式的第 i 行第 j 列元素，简称为 (i,j) 元素.

对三元线性方程组而言，

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

常数列

若记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$;

当系数行列 $D \neq 0$时，该方程组有唯一解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ \ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \ x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

实际上，对 n 元线性方程组而言，当 n 阶行列式被合适地定义时，我们能得到与二三元线性方程组类似的结论.

那么，n 阶行列式该如何定义呢?

为此，我们先来研究研究二三阶行列式.

三阶行列式的特点

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \quad = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$-a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \quad + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \quad + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

特点　三阶行列式可用二阶行列式表示.

二阶行列式的特点

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

定义 一阶行列式 $|a| = a.$

$$= a_{11}\left|a_{22}\right| - a_{12}\left|a_{21}\right|$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\left|a_{22}\right| + a_{12}(-1)^{1+2}\left|a_{21}\right|$$

特点 二阶行列式可用一阶行列式表示.

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，在 n 阶行列式 $|A|$ 中，划去元素 a_{ij} 所在的行与列后所得到的 $n-1$ 阶**行列式**称为是元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

提醒 一元素的余子式及代数余子式与该元素的大小无关，只与该元素的位置有关系.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad M_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{44} = (-1)^{4+4} M_{44} = M_{44}$$

提醒 行列式的每个元素都对应着一个余子式和一个代数余子式.

由代数余子式的定义，二、三阶行列式可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{2} a_{1i}A_{1i},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a_{1i}A_{1i},$$

以上两式表明，二、三阶行列式都等于它

第一行的各个元素与其代数余子式乘积之和！

由二三阶行列式的特点，得一般行列式的定义.

二. 一般方阵的行列式

定义 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其行列式记为$|A|$. $|A|$ 是一个与 A 对应的数，它可如下递归定义：

$$|A|=\begin{cases}a_{11}, & n=1\\ a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}, & n\geq 2\end{cases}$$

其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 在 $|A|$ 中的代数余子式.

提醒 当 $n\geq 2$ 时，称

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式 $|A|$ 按第一行展开的**展开式**.

讨论 既然行列式可按第一行展开计算，那能按其它行展开计算吗？进一步地，能按任意一列展开吗？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

按第二行展开

$$= a_{21}(-1)^{2+1}a_{12} + a_{22}(-1)^{2+2}a_{11} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22}$$

按第一列展开

$$= a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + a_{21}(-1)^{2+1}a_{12} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{12}$$

按第二列展开

$$= a_{12}(-1)^{1+2}a_{21} + a_{22}(-1)^{2+2}a_{11} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22}$$

结论 二阶行列式可按任何一行，任何一列展开！

可以验证：三阶行列式可以按任何一行展开，

三阶行列式可以按任何一列展开!

定理 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, A_{ij} 为行列式 $|A|$ 中元素 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的代数余子式，则行列式 $|A|$ 等于它的任意一行或列各元素与其代数余子式乘积之和，即

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},$$

$$|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},$$

$$i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,n.$$

证明 见教材第70-72页. 此处略.

例题 计算行列式 $|A|=\begin{vmatrix}2 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 1\end{vmatrix}$.

解答 按第二列展开有

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 1\end{vmatrix}=4\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 4 & 1\end{vmatrix}$$

$$+3\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix}+2\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}$$

$$=60-30-10=20$$

三. 几个特殊的行列式

例题 计算上三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

解答 连续按最后一行展开，原行列式

$$= 0 \cdot A_{n1} + \cdots + 0 \cdot A_{n,n-1} + a_{nn} A_{nn}$$

$$= a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

$$= a_{nn}a_{n-1,n-1}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-3} & a_{1,n-2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-3,n-3} & a_{n-3,n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-2,n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots\cdots$$

$$= a_{nn}a_{n-1,n-1}\cdots a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{nn}a_{n-1,n-1}\cdots a_{33}a_{22}a_{11}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

上、下三角形行列式，对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

例题 计算副下三角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n,2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解答 连续按第一列展开，原行列式

$$D_n = a_{n1}(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-2,3} & \cdots & a_{n-2,n} \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$= a_{n1}a_{n-1,2}(-1)^{(n+1)+n}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-3,4} & \cdots & a_{n-3,n} \\ a_{n-2,3} & a_{n-2,4} & \cdots & a_{n-2,n} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots\cdots$$

$$= a_{n1}a_{n-1,2}\cdots a_{3,n-2}(-1)^{(n+1)+n+\cdots+4}\begin{vmatrix} 0 & a_{1,n} \\ a_{2,n-1} & a_{2n} \end{vmatrix}$$

$$= a_{n1}a_{n-1,2}\cdots a_{3,n-2}a_{2,n-1}a_{1n}(-1)^{(n+1)+n+\cdots+4+3}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

副上三角，副下三角，副对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_n n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

四. 行列式的另一定义

1. 排列与逆序

定义 由 n 个自然数 $1, 2, \cdots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 **n 阶排列**.

$5, 4, 2, 3, 1$ 5阶排列

$4, 3, 2, 7, 1, 6, 5$ 7阶排列

提醒 n 阶排列的一般形式为 $i_1, i_2, \cdots, i_n$, 其中 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 中的互不相同的数，下标表示这些数在排列中的次序.

定义 在 n 阶排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 中，若 $t < s$ 而 $i_t > i_s$，则称 i_t, i_s 构成一个**逆序**.

提醒 一个较大的数排在一个较小数的前面，则这两个数构成一个逆序，如排列

$$5, 4, 2, 3, 1$$

中，4比3大，且4排在3的前面，则4和3就构成了一个逆序.

还有5与2，4与1，等等，也构成了逆序.

定义 排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 中逆序的总个数称为该排列的**逆序数**，记为 $\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)$;

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**;

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例如 排列 $5, 4, 2, 3, 1$ 中，共有如下9个逆序：

5与4，　5与2，　5与3，　5与1，　4与2，

4与3，　4与1，　2与1，　3与1

所以

$$\tau(5, 4, 2, 3, 1) = 9,$$

排列 $5, 4, 2, 3, 1$ 为奇排列.

关于排列的逆序数的计算

① 计算排列的逆序数方法之一是

$$\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n,$$

其中 t_k 为排列中位于 i_k 前并比 i_k 大的数的的个数，$k = 1, 2, \cdots, n$, $t_1 = 0$.

② 计算排列的逆序数方法之二是

$$\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n) = l_1 + l_2 + \cdots + l_n,$$

其中 l_k 为排列中位于i_k 后并比 i_k 小的数的的个数，$k = 1, 2, \cdots, n$, $l_n = 0$.

例题 求 $3,2,4,1,5$ 的逆序数，并判断其奇偶性.

解答 **法1** $\tau(3,2,4,1,5)=2+1+1+0+0=4$

法2 $\tau(3,2,4,1,5)=0+1+0+3+0=4$

排列 $3,2,4,1,5$ 为偶排列.

提醒 n阶排列共有$n!$个，其中排列 $1,2,\cdots,n$ 称为 n阶自然排列.

因 $\tau(1,2,\cdots,n)=0$为偶数，故自然排列 $1,2,\cdots,n$总为偶排列.

例题 求排列 $n, n-1, \cdots, 2, 1$ 的逆序数，并指出排列类型.

解答 $\tau(n, n-1, \cdots, 2, 1) = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1)$

$$= \frac{n(n-1)}{2}$$

① 当 $n = 4k$ 或 $4k + 1$ 时，该排列为偶排列;

② 当 $n = 4k + 2$ 或 $4k + 3$ 时，排列为奇排列.

练习 请直接说出一下排列的类型.

(1) 54321　　(2) 654321　　(3) 7654321.

定义 将排列中的两个数 i,j 的位置互换，其余数不动，称对该排列作一次**对换**，记为 (i,j) .

相邻两数的对换称为**相邻对换**.

定理 排列经过一次对换后奇偶性改变.

证明 先证特殊情形：相邻对换：

$$\cdots,t,s,\cdots \to \cdots,s,t,\cdots$$

容易看出

$$\tau(\cdots,t,s,\cdots)$$

$$=\begin{cases}\tau(\cdots,s,t,\cdots)+1, & if \quad s<t;\\ \tau(\cdots,s,t,\cdots)-1, & if \quad s>t.\end{cases}$$

这表明：一次相邻对换改变排列的奇偶性.

再证一般情形：不相邻两数的对换：

$$\cdots t, i_1, i_2, \cdots, i_k, s \cdots \xrightarrow{(t,s)} \cdots s, i_1, i_2, \cdots, i_k, t \cdots$$

其中 k 为新旧排列中夹在 t, s 间的数的个数.

下图表明，以上排列的一次不相邻对换可通过多次相邻对换来得到.

$$\begin{tikzcd}
\cdots t, i_1, i_2, \cdots, i_k, s \cdots \arrow[d, "{(t, i_1)}"] & \cdots s, i_1, i_2, \cdots, i_k, t \cdots \\
\cdots i_1, t, i_2, \cdots, i_k, s \cdots \arrow[d, "{(t, i_2)}"] & \vdots \arrow[u, "{(s, i_1)}"] \\
\cdots i_1, i_2, t, i_3, \cdots, i_k, s \cdots \arrow[d] & \cdots i_1, \cdots, i_{k-2}, s, i_{k-1}, i_k, t \cdots \arrow[u] \\
\vdots \arrow[d, "{(t, i_k)}"] & \cdots i_1, \cdots, i_{k-1}, s, i_k, t \cdots \arrow[u, "{(s, i_{k-1})}"] \\
\cdots i_1, i_2, \cdots, i_k, t, s \cdots \arrow[r, "{(t, s)}"] & \cdots i_1, i_2, \cdots, i_k, s, t \cdots \arrow[u, "{(s, i_k)}"]
\end{tikzcd}$$

$$\cdots t, i_1, i_2, \cdots, i_k, s \cdots$$

$$\downarrow (t, i_1)$$

$$\cdots i_1, t, i_2, \cdots, i_k, s \cdots$$

$$\downarrow (t, i_2)$$

$$\cdots i_1, i_2, t, i_3, \cdots, i_k, s \cdots$$

$$\downarrow$$

$$\vdots$$

$$\downarrow (t, i_k)$$

$$\cdots i_1, i_2, \cdots, i_k, t, s \cdots \xrightarrow{(t, s)} \cdots i_1, i_2, \cdots, i_k, s, t \cdots$$

$$\uparrow (s, i_k)$$

$$\cdots i_1, \cdots, i_{k-1}, s, i_k, t \cdots$$

$$\uparrow (s, i_{k-1})$$

$$\cdots i_1, \cdots, i_{k-2}, s, i_{k-1}, i_k, t \cdots$$

$$\uparrow$$

$$\vdots$$

$$\uparrow (s, i_1)$$

$$\cdots s, i_1, i_2, \cdots, i_k, t \cdots$$

由上图可见，总共经历了 $2k+1$ 次相邻对换，这表明，排列的奇偶性改变了$2k+1$ 次，因 $2k+1$ 为奇数，因而，一次不相邻对换后，排列的奇偶性改变了.

定理 在全部的$n(n\geq 2)$ 阶排列中，奇偶排列各占一半，均有$n!/2$个.

证明 设全部的n阶排列中，奇偶排列分别有p, q个，则 $p+q=n!$.

$$p\text{个奇排列} \xrightarrow[\text{数对换}]{\text{第一二}} p\text{个偶排列} \Rightarrow p\leq q$$

$$q\text{个偶排列} \xrightarrow[\text{数对换}]{\text{第一二}} q\text{个奇排列} \Rightarrow q\leq p$$

$$\Rightarrow p=q(=n!/2).$$

2. n 阶行列式

由二阶行列式及其展开式可见

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

① 二阶行列式的展开式中共 $2 = 2!$ 项；

② 展开式的每一项都是取自不同行不同列的两个元素的乘积；

③ 每一项的符号是：当该项元素的行标按自然顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号.

由三阶行列式及其展开式可见

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ +a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ -a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \end{array}$$

① 三阶行列式的展开式中共 $6 = 3!$ 项；

② 展开式的每一项都是取自不同行不同列的三个元素的乘积；

③ 每一项的符号是：当该项元素的行标按自然顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号.

从而，二三阶行列式可分别定义为

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2}}$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}}$$

从而， n阶行列式的定义就呼之欲出了.

定义 由 n^2个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，其中横排称为行，竖排称为列，它表示所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和，各项的符号是：当该项元素的行标按自然顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号.

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式可简记为

$\det(a_{ij}), |a_{ij}|$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表对所有n阶排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和.

行列式一般项为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$

关于行列式定义的说明：

1. n阶行列式是$n!$项的代数和，且冠以正号的项和冠以负号的项（不包括元素本身所带的符号）各占一半，因此，行列式实质上一种特殊定义的数；

2. 一阶行列式$|a| = a,$ 别与绝对值记号混淆！

$$|-2| = -2, \quad |-2| \neq 2!$$

例题 已知多项式

$$f(x)=\begin{vmatrix} x+1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & x-1 & 3 & 4 \\ 1 & 8 & x+2 & 5 \\ 9 & 7 & 6 & x+3 \end{vmatrix},$$

则多项式 $f(x)$ 中 x^3 的系数为多少？

解答 由定义知， $f(x)$ 中含 x^3 的项只有一项，为

$$(x+1)(x-1)(x+2)(x+3),$$

故 $f(x)$ 中 x^3 的系数为

$$1+(-1)+2+3=5.$$

讨论 设 $g_{ij}(x)$ 均为多项式，且

$$f(x)=\begin{vmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) & g_{13}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) & g_{23}(x) \\ g_{31}(x) & g_{32}(x) & g_{33}(x) \end{vmatrix},$$

则

$$f'(x)=\begin{vmatrix} g'_{11}(x) & g'_{12}(x) & g'_{13}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) & g_{23}(x) \\ g_{31}(x) & g_{32}(x) & g_{33}(x) \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) & g_{13}(x) \\ g'_{21}(x) & g'_{22}(x) & g'_{23}(x) \\ g_{31}(x) & g_{32}(x) & g_{33}(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) & g_{13}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) & g_{23}(x) \\ g'_{31}(x) & g'_{32}(x) & g'_{33}(x) \end{vmatrix}$$