第五章 特征值与特征向量

5.1 方阵的特征值与特征向量

5.2 矩阵的相似对角化

5.3 实对称矩阵的正交相似对角化

第五章 特征值与特征向量

第一节 特征值与特征向量

一、方阵的特征值与特征向量

二、特征值与特征向量的求法

三、特征值的性质

四、特征向量的性质

一、方阵的特征值与特征向量

定义 设 A 为 n 阶方阵，若存在数 λ 以及 n 维非零列向量 α, 使得

$$A\alpha = \lambda\alpha,$$

则称 λ 为 A 的特征值, α 为 A 的属于或对应于特征值 λ 的特征向量.

提醒 矩阵的特征值与特征向量是相互依存的，即它们只能同时存在. 特征向量不能为零向量，特征值可以为零.

提醒 若 α 为方阵 A 的特征向量，则一定有

$$\alpha \neq 0, \quad A\alpha \parallel \alpha,$$

即 $A\alpha$ 与 α 共线或平行，且 $A\alpha$ 与 α 的比值就是特征向量 α 所对应的特征值.

例题 已知 $X=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ 是 $A=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}$ 的特征向量，求 a,b.

提示 $AX \parallel X \Rightarrow \begin{bmatrix}-1\\a+2\\b+1\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ 平行 $\Rightarrow \begin{cases}a=-3\\b=0\end{cases}$

例题 因矩阵$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$每行元素之和都为**6**，则对任意的 a，总有

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix},$$

故对任意 $a \neq 0$，向量$\begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix}$都是矩阵$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$的属于特征值 6 的特征向量.

命题 设 A 为 n 阶方阵，若 A 的每行元素之和都相等，且等于 λ ，则 λ 就是 A 的一个特征值，非零向量

$$\alpha = \begin{bmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (a \neq 0)$$

都是 A 的对应于特征值 λ 的特征向量.

思考 若 $(a, a, \cdots, a)^T (a \neq 0)$ 为方阵 A 的特征向量，A 的每行元素之和会否相等？

课堂练习

1. 设 $\alpha=(1,2,3)^T,\ A=\alpha\alpha^T$, 则 A 有特征值 (　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 6　　(E) 14

2. 设 $\alpha=(1,2,3)^T,\ A=E-3\alpha\alpha^T$, 则 A 必有特征值 (　　　　).

3. 设 $\begin{bmatrix}1 & a & b\\ c & 2 & d\\ f & g & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\\ -1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 2 & 6\\ 1 & 10\end{bmatrix}$, 则 $\begin{bmatrix}1 & a & b\\ c & 2 & d\\ f & g & 3\end{bmatrix}$ 必有特征值(　　　　).

提醒 设 A 为 n 阶矩阵，则以下命题等价.

λ 为 A 的特征值

$\Leftrightarrow$ 存在非零向量 α 使得 $A\alpha = \lambda\alpha$

$\Leftrightarrow$ 存在非零向量 α 使得 $(\lambda E - A)\alpha = 0$

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $(\lambda E - A)X = 0$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(\lambda E - A) < n$

$\Leftrightarrow$ 矩阵 $\lambda E - A$ 不可逆，或不满秩

$\Leftrightarrow$ $|\lambda E - A| = 0$

$\Leftrightarrow$ λ 为方程 $|\lambda E - A| = 0$ 的根

提醒 A 的全部特征值即方程 $|\lambda E - A| = 0$ 的全部根.

定义 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，称多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

为方阵 A 的**特征多项式**

$|\lambda E-A|=0$ 为方阵 A 的**特征方程**

提醒 方阵 A 的全部特征值即特征方程

$$|\lambda E-A|=0$$

的全部根；即特征多项式 $|\lambda E-A|$ 的所有零点.

代数基本定理 任何复系数一元 n 次多项式在复数域上有且只有 n 个根（重根按重数计算）.

提醒 若 A 为 n阶方阵，则 A 恰有 n 个特征值（在复数范围内，重根按重数计算）.

提醒 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为三角阵，则

$$|\lambda E-A|=(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})$$

从而 A 的全部特征值为 $a_{11},a_{22}.\cdots,a_{nn}.$

提醒 三角阵的特征值就是其全部主对角元素！

提醒 设 λ 为 A 的特征值，则以下命题等价.

α 为 A 的属于 λ 的特征向量

$\Leftrightarrow A\alpha=\lambda\alpha,\ \alpha\neq 0$

$\Leftrightarrow (\lambda E-A)\alpha=0,\ \alpha\neq 0$

$\Leftrightarrow \alpha$ 为 $(\lambda E-A)X=0$ 的非零解

方阵 A 的属于特征值 λ 的全部特征向量，就是

$$(\lambda E-A)X=0$$

的全部非零解.

提醒 矩阵 A 的属于特征值 λ 的全体特征向量连同零向量组成一个子空间 $\mathrm{Nul}(\lambda E - A)$, 称为 A 关于特征值 λ 的特征子空间.

提醒 因空间关于加法，数乘，线性运算封闭，故

矩阵的属于同一特征值的多个特征向量的和、差、线性组合（不为零向量），仍是属于该特征值的特征向量.

提醒 对一个方阵而言：

一个特征值总有无穷多特征向量与之对应；

一个特征向量只能对应或属于一个特征值.

$$\begin{cases} A\alpha = \lambda\alpha \\ A\alpha = \mu\alpha \\ \alpha \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\lambda - \mu)\alpha = 0 \\ \alpha \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu.$$

特征向量隔离性定理

$$\mathrm{Nul}(\lambda E - A) \cap \mathrm{Nul}(\mu E - A) = \{0\}, \ \lambda \neq \mu.$$

二、特征值与特征向量的求法

求 $A_{n\times n}$的特征值与特征向量的步骤：

① 计算 A 的特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$.

关于λ的首项系数为1的 n次多项式

② 解特征方程 $|\lambda E-A|=0$ 得 A的全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$;

③ 对每个相异特征值 λ_i，求出线性方程组

$$(\lambda_i E-A)X=0$$

的全部非零解，这些非零解就是 A 的属于特征值 λ_i 的全部特征向量.

例题 求$A=\begin{bmatrix}3 & -4 & 4\\ 1 & -1 & -8\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$的特征值与特征向量.

解答 方阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 4 & -4\\ -1 & \lambda+1 & 8\\ 0 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2,$$

$\Rightarrow A$ 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_{2,3}=1.$

经初等行变换

$$\lambda_1 E-A=\begin{bmatrix}-5 & 4 & -4\\ -1 & -1 & 8\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -28/9\\ 0 & 1 & -44/9\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

在$(\lambda_1 E-A)X=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=28/9x_3\\ x_2=44/9x_3\end{cases}$中令$x_3=9k$

得A的属于特征值λ_1的全部特征向量为

$$k\begin{bmatrix}28\\44\\9\end{bmatrix}, \text{其中 } k\neq 0 \text{ 为任意常数.}$$

经初等行变换

$$\lambda_{2,3}E-A=\begin{bmatrix}-2&4&-4\\-1&2&8\\0&0&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

在$(\lambda_{2,3}E-A)X=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=2x_2\\x_3=0\end{cases}$中令$x_2=l$得$A$的属于特征值$\lambda_{2,3}$的全部特征向量为

$$l\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \text{其中 } l\neq 0 \text{ 为任意常数.}$$

例题 求 $A=\begin{bmatrix}3 & 3 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ -3 & -1 & 0\end{bmatrix}$ **的特征值与特征向量.**

解答 因 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=(\lambda-4)(\lambda+2i)(\lambda-2i),$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=2i,\ \ \lambda_2=-2i,\ \ \lambda_3=4.$

经初等行变换

$$\lambda_1 E-A=\begin{bmatrix}2i-3 & -3 & -2\\ -1 & 2i-1 & 2\\ 3 & 1 & 2i\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & i\\ 0 & 1 & -i\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

在$(\lambda_1 E-A)X=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-ix_3\\ x_2=ix_3\end{cases}$ 中令 $x_3=k$

得A的属于特征值λ_1的全部特征向量为

$$k\begin{bmatrix}-i\\ i\\ 1\end{bmatrix},\text{ 其中 } k\neq 0 \text{ 为任意常数.}$$

因$\lambda_2=\bar{\lambda}_1$, 故$A$的属于特征值 λ_2的特征向量为

$$l\bar{\alpha}=l\overline{\begin{bmatrix}-i\\ i\\ 1\end{bmatrix}}=l\begin{bmatrix}i\\ -i\\ 1\end{bmatrix},\ l\neq 0 \text{ 为任意常数;}$$

求 A 的属于特征值 λ_3 的全部特征向量：略

例题 求 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解答 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)^2,$$

$\Rightarrow A$ 的特征值为 $\lambda_1=5,\lambda_{2,3}=-1.$

解 $(\lambda_1 E-A)X=0$ 得其基础解系为 $\xi=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$

则 A 的属于特征值 $\lambda_1=5$ 的特征向量为

$k\xi$, 其中 $k\neq 0$ 为任意常数.

解$(\lambda_{2,3}E-A)X=0$得其基础解系为

$$\eta_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \eta_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},$$

则 A 的属于特征值$\lambda_{2,3}=-1$的特征向量为

$l_1\eta_1+l_2\eta_2$, 其中 l_1,l_2为不全为零的任意常数.

三、特征值和特征向量的性质

定理 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的全部特征值，则

$$(1)\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}, \qquad (2)\ \prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|.$$

其中 $\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ 称为 A 的迹，记为 $\mathrm{tr}A=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$.

证明 一方面，由行列式的“另一定义”知

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

的 $n-1$ 次项系数由 $(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})$

确定，为

$$-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn});$$

另一方面，因 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的全部特征值，故

$$|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n) \qquad (\diamond)$$

$\Rightarrow |\lambda E-A|$ 的 $n-1$ 次项系数

$$-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n);$$

比较 $|\lambda E-A|$ 的两个 $n-1$ 次项系数知 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$.

在 $(\diamond)$ 式中令 $\lambda=0$ 可得 $\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$.

推论 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 的所有特征值均不为零.

方阵 A 不可逆 $\Leftrightarrow$ 零为 A 的特征值.

定理 设 λ 为 A 的特征值, α 为 A 的属于 λ 的特征向量.

(1) 对任意自然数 k, λ^k 为 A^k 的特征值,

α 为 A^k 的属于 λ^k 的特征向量.

(2) 若 $f(x)$ 为多项式，则 $f(\lambda)$ 为 $f(A)$ 的特征值,

α 为 $f(A)$ 的属于 $f(\lambda)$ 的特征向量.

定理 设 λ 为 A 的特征值, α 为 A 的属于 λ 的特征向量.
若 A 可逆，则

(1) λ^{-1} 为 A^{-1} 的特征值,

α 为 A^{-1} 的属于 λ^{-1} 的特征向量.

(2) $|A|/\lambda$ 为 A^* 的特征值,

α 为 A^* 的属于 $|A|/\lambda$ 的特征向量.

定理 方阵 A与 A^T 有相同的特征值.

证明 因 $|\lambda E - A| = |(\lambda E - A)^T| = |\lambda E - A^T|$,
即 A 与 A^T 特征值多项式相同，故特征值相同.

思考 方阵 A与 A^T 有相同的特征向量吗？

定理 设 A_1, A_2 为同阶方阵, λ_i 为 $A_i(i = 1, 2)$ 的特征值.
若 α 既为 A_1 的属于 λ_1 的特征向量，也为 A_2 的属于 λ_2 的特征向量，则对任意的数 k_1, k_2, $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2$ 为 $k_1A_1 + k_2A_2$ 的特征值， α 为 $k_1A_1 + k_2A_2$ 的属于特征值 $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2$ 的特征向量.

例题 设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 的特征值为 $\lambda_1=-3, \lambda_2=1, \lambda_3=2$.

(1) 证明 A 为可逆矩阵.

(2) 求 $a_{11}+a_{22}+a_{33}$ 的值.

(3) 求 $A^{-1}, A^*, A+6A^{-1}-A^*$ 的特征值.

(4) 设 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，求 $A_{11}+A_{22}+A_{33}$.

(5) 求行列式 $|A^3-3A+E|$.

(1) 证明 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-3\times 1\times 2=-6\neq 0 \Rightarrow A$ 可逆.

另证 因 A 的特征值都不为零，故 A 可逆.

解答 (2) $a_{11}+a_{22}+a_{33}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$.

(3) A^{-1} 的特征值：$\lambda_1^{-1}=-3^{-1}, \lambda_2^{-1}=1, \lambda_3^{-1}=2^{-1}$;

A^* 的特征值：$\dfrac{|A|}{\lambda_1}=2, \dfrac{|A|}{\lambda_2}=-6, \dfrac{|A|}{\lambda_3}=-3.$

$A+6A^{-1}-A^*$ 的特征值：$\lambda_1+\dfrac{6}{\lambda_1}-\dfrac{|A|}{\lambda_1}=-7,$

$$\lambda_2+\frac{6}{\lambda_2}-\frac{|A|}{\lambda_2}=13, \qquad \lambda_3+\frac{6}{\lambda_3}-\frac{|A|}{\lambda_3}=8.$$

(4) $A_{11}+A_{22}+A_{33}=\mathrm{tr}A^*=2-6-3=-7$

(5) 令 $f(x)=x^3+3x+1$, 则 $f(A)$ 的特征值为 :

$$f(\lambda_1)=f(-3)=(-3)^3-3\times(-3)+1=-17,$$

$$f(\lambda_2)=f(1)=1^3-3\times1+1=-1,$$

$$f(\lambda_3)=f(2)=2^3-3\times2+1=3,$$

从而

$$|A^3-3A+E|=|f(A)|=f(\lambda_1)f(\lambda_2)f(\lambda_3)=51.$$

命题 若 n 阶矩阵 A 满足 $f(A)=0$ ，则 A 的特征值 λ 必满足 $f(\lambda)=0,$ 其中 $f(x)$ 为多项式.

证明 设 α 为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量，则

$$A\alpha=\lambda\alpha,\quad \alpha\neq 0,$$

从而有

$$f(A)\alpha=f(\lambda)\alpha,\quad \alpha\neq 0,$$

因 $f(A)=0$ ，所以

$$0=f(\lambda)\alpha,\quad \alpha\neq 0,$$

上式表明 $f(\lambda)=0.$

例题 设矩阵 A满足$A^2 = 2A + 8E$，求A的特征值.

解答 由题意知，A的矩阵多项式

$$f(A) = A^2 - 2A - 8E = 0,$$

由上页命题知，A的特征值 λ必满足

$$f(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0,$$

解之即得 $\lambda = -2 \text{ or } 4.$

特征值的代数重数，几何重数

提醒 设 n 阶方阵 A 的特征多项式

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = (\lambda - \lambda_0)^k g(\lambda),$$

其中 k 为正整数，多项式 $g(\lambda)$ 没有因式 $\lambda - \lambda_0$.

λ_0 的代数重数 : k

λ_0 的几何重数 : $\dim \mathrm{Nul}(\lambda_0 E - A)$

即$(\lambda_0 E - A)X = 0$ 的基础解系所含向量个数

即$(\lambda_0 E - A)X = 0$ 的自由变量个数

即$\lambda_0 E - A$ 的行阶梯形矩阵的零行数

即 $n - \mathrm{rank}(\lambda_0 E - A)$

即 A 的属于 λ_0 的线性无关特征向量的最大个数

特征值代数重数与几何重数的关系

定理 设 A 为 $n\times n$ 矩阵，λ 为 A 的 k 重特征值，则 A 的属于特征值 λ 的特征向量中线性无关的最大个数不多于 k.

提醒 设 λ 为方阵 A 的特征值，代数重数为 k, 几何重数为 s, 则 $1\le s\le k$.

问题 设 n 阶方阵 A 的非零特征值个数为 $\mu(A)$, 秩为 $\mathrm{r}(A)$, 请问，$\mu(A)$ 与 $\mathrm{r}(A)$ 有何关系？

若零不是 A 的特征值，则 $\mu(A)=\mathrm{r}(A)=n$;

若零是 A 的特征值，代数重数为 k, 则零的几何

$n-\mathrm{r}(0E-A)\le k\Rightarrow \mathrm{r}(A)\ge n-k=\mu(A).$

定理 方阵的属于不同特征值的特征向量线性无关.

证明 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 是方阵 A 的互不相同的特征值, ξ_i 是 A的属于 λ_i 的特征向量, $i = 1, 2, \cdots, k$, 则

$$A^l \xi_i = \lambda_i^l \xi_i, \forall i = 1, 2, \cdots, k, l = 1, 2, \cdots.$$

考虑线性方程组

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_k\xi_t = 0 \quad \cdots\cdots \langle 1 \rangle$$

在 $\langle 1 \rangle$ 式两端逐次左乘 $A, A^2, \cdots, A^{k-1}$, 得

$$\begin{cases} x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_k\xi_k = 0 \\ \lambda_1 x_1\xi_1 + \lambda_2 x_2\xi_2 + \cdots + \lambda_k x_k\xi_k = 0 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^{k-1} x_1\xi_1 + \lambda_2^{k-1} x_2\xi_2 + \cdots + \lambda_k^{k-1} x_k\xi_k = 0 \end{cases}$$

将上式写成矩阵形式，有

$$(x_1\xi_1, x_2\xi_2, \cdots, x_k\xi_k)\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_k & \lambda_k^2 & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix} = 0$$

因 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 互不相同，则上式中的范德蒙德矩阵可逆，从而有

$$(x_1\xi_1, x_2\xi_2, \cdots, x_k\xi_k) = 0 \Rightarrow x_i\xi_i = 0,\ i = 1, 2, \cdots, k.$$

因 ξ_i 是特征向量，故 $\xi_i \neq 0$, 从而

$$x_i = 0, i = 1, 2, \cdots, k.$$

于是 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k$ 线性无关.

定理 设 n 阶方阵 A 有不同特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$, 重数分别为 $t_1,t_2,\cdots,t_s$, $\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{il_i}$ 是 A 的属于特征值 λ_i 的 $l_i(i=1,2,\cdots,s)$ 个线性无关的特征向量，则向量组

$$\xi_{11},\cdots,\xi_{1l_1},\xi_{21},\cdots,\xi_{2l_2},\cdots,\xi_{s1},\cdots,\xi_{sl_s}$$

线性无关，且

$$l_1+l_2+\cdots+l_s\le t_1+t_2+\cdots+t_s=n.$$

推论 设 A 为 $n\times n$ 矩阵，则 A 至多有 n 个线性无关的特征向量；若 A 有 n 个不同的特征值，则 A 有 n 个线性无关的特征向量.

例题 设ξ_1,ξ_2为矩阵A的属于不同特征值的特征向量. 证明：$\xi_1+\xi_2$不是A的特征向量.

证明 设ξ_1,ξ_2分别属于特征值λ_1,λ_2, 则

$$A\xi_1=\lambda_1\xi_1,\ A\xi_2=\lambda_2\xi_2\text{ , where }\lambda_1\neq\lambda_2.$$

反证 若$\xi_1+\xi_2$是A的特征向量，则存在λ, 使得

$$A(\xi_1+\xi_2)=\lambda(\xi_1+\xi_2)\Rightarrow A\xi_1+A\xi_2=\lambda\xi_1+\lambda\xi_2$$

$$\Rightarrow\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2=\lambda\xi_1+\lambda\xi_2\Rightarrow(\lambda_1-\lambda)\xi_1+(\lambda_2-\lambda)\xi_2=0$$

因ξ_1,ξ_2属于不同特征值，故ξ_1,ξ_2无关，且

$$\lambda_1-\lambda=0=\lambda_2-\lambda\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2$$

与题设矛盾，故$\xi_1+\xi_2$不是A的特征向量.

课堂回答

1. 矩阵$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$的特征值是（　　）.

$A.1,0,1 \quad B.1,1,2 \quad C.-1,1,2 \quad D.-1,1,1$

2. 三阶矩阵 A 有特征值 $-1,2,4$, 则下列矩阵中，满秩矩阵有（　　）.

$A.\ E+A \quad B.\ A+2E \quad C.\ 2E-A \quad D.\ A-4E$

思考题

设 A 为三阶矩阵，若非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的通解为 $3\beta+k_1\eta_1+k_2\eta_2$，求矩阵 A 的特征值与特征向量.

答案： $\lambda_1=\frac{1}{3}$, $k\beta, k\neq 0$;

$\lambda_{2,3}=0$, $k_1\eta_1+k_2\eta_2, k_1, k_2$ 不全为零.

思考题 设 α,β 为 A 的分别属于特征值 $\lambda,\mu(\lambda\neq\mu)$ 的特征向量，则 $k\alpha+l\beta$ 为 A 的特征向量当且仅当数 k,l 满足条件（　　　　　）.