第一章　线性方程组

1 线性方程组 高斯消元法与矩阵

2 行化简和阶梯形矩阵 解的存在性与唯一性

3 线性方程组的应用

第一节 线性方程组高斯消元法与矩阵

一、 线性方程组相关概念

二、 高斯消元法与矩阵

一、线性方程组的相关概念

例题 明代数学家程大为所著《算法流宗》中有记载：

一百馒头一百僧，大僧三个更无争，小僧三人分一个，大小和尚得几丁?

现有100个和尚分100个馒头，大和尚一人3个，小和尚3人一个，刚好分完. 问：大小和尚各多少人?

解答 设大和尚 x_1 人，小和尚 x_2 人，由题有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 100 \\ 3x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 25 & \text{大和尚25人} \\ x_2 = 75 & \text{小和尚75人} \end{cases}$$

例题 燃烧丙烷(C_3H_3)时，丙烷和氧气结合，生成二氧化碳和水，其方程式为

$$(x_1)C_3H_8 + (x_2)O_2 \to (x_3)CO_2 + (x_4)H_2O$$

请配平化学方程式.

解答 由题意，有

$$\begin{cases} 3x_1 = x_3 \\ 8x_1 = 2x_4 \\ 2x_2 = 2x_3 + x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.25x_4 \\ x_2 = 1.25x_4 \\ x_3 = 0.75x_4 \end{cases}$$

取 $x_4 = 4$ 得 $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = 3.$

$$C_3H_8 + 5O_2 = 3CO_2 + 4H_2O$$

一元线性方程： $ax=b$

平面直线方程： $ax+by=c$

——二元线性方程

空间平面方程： $ax+by+cz=d$

——三元线性方程

特征 只涉及变量的加法与数乘运算

n元线性方程 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$

含 m 个方程，n 个未知变量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

n元线性方程组

若 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots, x_n = c_n$ 满足线性方程组

称其为方程组的一个**解**；常记为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$

提醒 若一个线性方程组有解，则称之为**相容**的；若无解，则称之为**不相容**的.

方程组全部解的集合称为方程组的**解集**.

例题 从几何上看，如下的三个二元线性方程组

$$(1)\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = -1 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ -x_1 + x_2 = -2 \end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

都涉及到两条平面直线的交点问题. 易见，

(1)有唯一解，(2)有无穷多解，(3)无解.

问题 一个线性方程组解只有以上三种情况吗？
或问，有没有可能只有4个解的情况？

线性方程组的三个基本问题：

①方程组是否相容？ 解的存在性问题

② 若解存在，是否只有一个？

解的唯一性问题

③若解存在，如何求解？ 解的算法问题

二、高斯消元法和矩阵

例题 解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$.

解答 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases} \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$

$\xrightarrow{E_2 + (-2)E_1} \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 7 \\ -5x_2 = -10 \end{cases}$

$\xrightarrow{(-1/5) \cdot E_2} \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 7 \\ x_2 = 2 \end{cases} \xrightarrow{E_1 + (-3)E_2} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

线性方程组的初等变换

1. 交换方程组中两个方程的顺序；对换变换

2. 在一个方程的两边都乘以一个非零的常数；倍乘变换

3. 将一个方程的常数倍加在另一个方程上. 倍加变换

问题 将一个方程组经过多次初等变换得到一个新的方程组，新原方程组的解相同吗？

首先，方程组的解与两个方程的顺序无关，故

对换变换不会改变方程组的解.

其次，方程 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 的解必为方程 $ka_1x_1+ka_2x_2+\cdots+ka_nx_n=kb(k\neq 0)$ 的解，反之亦然，所以

倍乘变换不会改变方程组的解.

最后，满足方程 $a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n=b_i$ 和方程 $a_{l1}x_1+\cdots+a_{ln}x_n=b_l$的解必满足倍加后的方程 $(a_{l1}+ka_{i1})x_1+\cdots+(a_{ln}+ka_{in})x_n=b_l+kb_i$;

反之，满足方程 $a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n=b_i$ 和方程 $(a_{l1}+ka_{i1})x_1+\cdots+(a_{ln}+ka_{in})x_n=b_l+kb_i$的解也必满足方程 $a_{l1}x_1+\cdots+a_{ln}x_n=b_l.$ 这表明

倍加变换不会改变方程组的解.

综上所述，有如下结论成立.

<u>结论</u> 将一个线性方程组经过多次初等变换得到一个新的方程组，新原方程组的解相同！即：初等变换前后两线性方程组同解！

提醒 三种初等变换可以将线性方程组化为与之等价或同解的线性方程组.

特别地，三种初等变换可以将线性方程组化为容易求解的**三角形**方程组.

这就是**高斯消元法**.

问题 线性方程组的三种初等变换可逆吗?

若可逆，它们的逆变换分别是什么?

提醒 高斯消元法求解方程组的过程中，参与运算的实际上是方程组各变量的系数及常数项．这些系数和常数项按原来的顺序构成一张长方形的数表，这个数表就是矩阵.

定义 由 $m\times n$ 个数 a_{ij} 排成的 m 行 n 列的数表 $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 m 行 n 列的矩阵，或 $m\times n$ 矩阵，数 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列元素.

表示 矩阵常用大写字母如 A, $A_{s\times n}$ 或 $(a_{ij})_{s\times n}$ 表示，即

$$A = A_{s\times n} = (a_{ij})_{s\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

方括号或圆括号

方阵 $n\times n$矩阵常称为n阶矩阵或 n阶方阵.

线性方程组的
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

系数与常数项按在方程组中的位置顺序可排为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

方程组的**增广矩阵**　　方程组的**系数矩阵**

提醒 一个线性方程组与一个增广矩阵一一对应. 增广矩阵的一行与一个方程对应，系数矩阵的列数对应未知量个数.

对线性方程组的研究可转化为对其增广矩阵的研究.

例题 解线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$.

解答

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 15 \\ 2 & 5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E_2 - E_1 \quad E_3 - 2E_1 \qquad\qquad r_2 - r_1 \quad r_3 - 2r_1$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ x_2 - x_3 = -1 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E_2 \leftrightarrow E_3 \qquad\qquad r_2 \leftrightarrow r_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_2 + 3x_3 = 13 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \end{bmatrix}$$

$$E_3 - 2E_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ 5x_3 = 15 \end{cases}$$

$$1/5 \cdot E_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\mathrm{r}_3 - 2\mathrm{r}_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{bmatrix}$$

$$1/5 \cdot \mathrm{r}_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E_1 + E_3 \quad \Big\downarrow \quad E_2 + E_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

$$E_1 - 2E_2 \ \Big\downarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\mathrm{r}_1 + \mathrm{r}_3 \quad \Big\downarrow \quad \mathrm{r}_2 + \mathrm{r}_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Big\downarrow\ \mathrm{r}_1 - 2\mathrm{r}_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

提醒 作用在增广矩阵上的对应于线性方程组的三种初等变换称为**矩阵的初等行变换**.

① 互换两行的位置；	行对换变换
② 用一非零数乘以某行；	行倍乘变换
③ 将某行的倍数加到另一行.	行倍加变换

线性方程组的初等变换与增广矩阵的初等行变换相对应.

问题 矩阵的的三种初等行变换可逆吗？

若可逆，它们的逆变换分别是什么？

提醒 与线性方程组的三种变换类似，矩阵的初等行变换是可逆的，且其逆变换是同类型的初等行变换.

若两个矩阵可通过初等行变换相互转化，则称这两个矩阵**行等价**.

若两个线性方程组的增广矩阵行等价，则这两个方程组同解.

练习 求解下列线性方程组

$$1.\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{无解}$$

$$2.\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 - k \\ x_2 = 1 - k \\ x_3 = k \end{cases} \text{无穷多解}$$

$$3.\ \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases} \text{有唯一解}$$

课后问题 请说明下列(增广矩阵)矩阵对应的线性方程组解的情况如何，若有解，解是什么？

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 8 & 11\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 5\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix}$$

思考 如何判断线性方程组解的存在性情况？