第三章 行列式

3.1 方阵的行列式

3.2 行列式的主要性质

3.3 行列式的应用

第二节 行列式的主要性质

一、行列式的转置及分拆性质

二、行列式的基本引理

三、行列式的初等变换

四、方阵可逆的充要条件

五、矩阵乘积的行列式

六、行列式的计算

特别提醒

本节中, 未经特别说明, 总有

$$A = (a_{ij})_{n\times n},$$

M_{ij}, A_{ij} 分别为元素 a_{ij} 在行列式 $|A|$ 中的余子式和代数余子式，$i, j = 1, 2, \cdots, n.$

一、行列式的转置及分拆性质

性质1 设 A 为 n 阶方阵，则 $|A| = |A^T|$.

证明 用数学归纳法可证，证明略.

提醒 称 $|A^T|$ 为 $|A|$ 的转置行列式.

行列式与其转置行列式总相等.

行列式中行列地位对等！

行列式中对行成立的性质，对列同样成立，反之亦然.

性质2 若行列式中某行或列的元素都可表为两数之和, 则该行列式可拆为两行列式的和, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}+a_{r1}^0 & a_{r2}+a_{r2}^0 & \cdots & a_{rn}+a_{rn}^0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}^0 & a_{r2}^0 & \cdots & a_{rn}^0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 按第 r 行展开，有

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{r1}+a_{r1}^0 & a_{r2}+a_{r2}^0 & \cdots & a_{rn}+a_{rn}^0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\sum_{k=1}^{n}(a_{rk}+a_{rk}^0)A_{rk}=\sum_{k=1}^{n}a_{rk}A_{rk}+\sum_{k=1}^{n}a_{rk}^0A_{rk}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{r1}^0 & a_{r2}^0 & \cdots & a_{rn}^0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}.
$$

思考 如下结论是否成立？

$$(1)\ \begin{vmatrix} a+1 & b+2 & c+3 \\ d+x & e+y & f+z \\ g+u & h+v & i+w \end{vmatrix} \overset{?}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}.$$

$$|A+B| \overset{?}{=} |A| + |B|$$

$$(2)\ \begin{vmatrix} a & x_1+x_2+\cdots+x_n & u \\ b & y_1+y_2+\cdots+y_n & v \\ c & z_1+z_2+\cdots+z_n & w \end{vmatrix} \overset{?}{=} \begin{vmatrix} a & x_1 & u \\ b & y_1 & v \\ c & z_1 & w \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a & x_2 & u \\ b & y_2 & v \\ c & z_2 & w \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a & x_n & u \\ b & y_n & v \\ c & z_n & w \end{vmatrix}.$$

二、行列式的基本引理

引理1 设A为$n(n \geq 2)$阶方阵.

(1) 若A有零行或零列，则$|A| = 0.$

(2) 若A有两行或两列相同，则$|A| = 0.$

证明 (1) 按零行或零列展开，即可得证.

(2) 用数学归纳法可证，见教材.

引理2 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, A_{ij} 表$|A|$ 中 a_{ij}的代数余子式， D表$|A|$的第 i 行元素$a_{i1}, a_{i2}\cdots, a_{in}$被换为 $k_1, k_2\cdots, k_n$后的行列式，则

$$D=k_1A_{i1}+k_2A_{i2}+\cdots+k_nA_{in}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

提醒 对阶行列式的列，有类似的结论成立！

例题 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&1&4&2\\4&5&2&3\end{bmatrix}$, 则

(1) $A_{21}+2A_{22}+3A_{23}+4A_{24}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\\3&1&4&2\\4&5&2&3\end{vmatrix}=0$

(2) $2M_{13}-3M_{23}+M_{33}-5M_{43}$

$$=2A_{13}+3A_{23}+1A_{33}+5A_{43}=\begin{vmatrix}1&2&2&4\\2&3&3&5\\3&1&1&2\\4&5&5&3\end{vmatrix}=0$$

例题 求 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ 第四行元素余子式之和.

解答 $M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44}$

$$= -A_{41} + A_{42} - A_{43} + A_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 7\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -28\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -28.$$

性质3（基本引理） 设 A 为 n 阶方阵，则

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases}|A|, & \text{当} i=k,\\ 0, & \text{当} i\neq k.\end{cases}$$

证明 当 $i=k$ 时，等式左端就是 $|A|$ 按第 i 行展开的结果，故等于 $|A|$.

当 $i\neq k$ 时，等式左端就是 $|A|$ 的第 i 行元素被换为第 k 行元素后的行列式(记为 $|\tilde{A}|$)并按第 i 行展开后的结果, 故

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=|\tilde{A}|.$$

因 $|\tilde{A}|$ 中第 i 行与 k 行相同, 故 $|\tilde{A}|=0.$

例题 已知5阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&1&2&4&5\\1&1&1&2&2\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}=27,$$

求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $A_{44}+A_{45}$,

其中 A_{4j} 表 D 的第四行第 j 列元素

$a_{4j}(j=1,2,3,4,5)$ 的代数余子式.

解答 将行列式按第4行展开有

$$(A_{41}+A_{42}+A_{43})+2(A_{44}+A_{45})=27 \quad (1)$$

第2行元素与第4行元素的代数余子式乘积之和为零

$$2(A_{41}+A_{42}+A_{43})+(A_{44}+A_{45})=0 \quad (2)$$

联立以上两式可解得

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9,$$

$$A_{44}+A_{45}=18.$$

三、行列式的初等变换

1. 倍乘变换

将 $|\mathrm{P}(i(k))A|$ 按第 i 行展开，$k \neq 0$，有

$$|\mathrm{P}(i(k))A| = ka_{i1}A_{i1} + ka_{i2}A_{i2} + \cdots + ka_{in}A_{in}$$
$$= k(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}) = k|A|$$

将 $|A\mathrm{P}(i(k))|$ 按第 i 列展开，$k \neq 0$，有

$$|A\mathrm{P}(i(k))| = ka_{1i}A_{1i} + ka_{2i}A_{2i} + \cdots + ka_{ni}A_{ni}$$
$$= k(a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{ni}A_{ni}) = k|A|$$

$$\boxed{|\mathrm{P}(i(k))A| = k|A| = |A\mathrm{P}(i(k))|}$$

$$|\mathrm{P}(i(k))A| = k\,|A| = |A\mathrm{P}(i(k))|$$

性质4 用非零数 k 乘以行列式的某一行或列，等于用 k 乘以这个行列式.

推论1 行列式的某一行或列有公因子 k, 可把该公因子 k 提出来.

推论2 行列式有两行或两列对应成比例，则行列式等于零.

提醒 性质4阐述了数乘变换对行列式的影响！

命题 若 A 为 n 阶方阵，k 为一数，则 $|kA| = k^n|A|$.

命题 任意奇数阶反对称阵的行列式等于零.

证明 设 A 为 n 阶反对称阵， n 为奇数，则

$$A^T = -A \Rightarrow |A^T| = |-A|$$

$$\Rightarrow |A| = (-1)^n|A| = -|A| \Rightarrow |A| = 0.$$

例如 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -a & 0 & -x & -y & -z \\ -b & x & 0 & 1 & 2 \\ -c & y & -1 & 0 & -\sigma \\ -d & z & -2 & \sigma & 0 \end{vmatrix} = 0.$

例题 计算行列式$\begin{vmatrix} 2 & 201 & -1 \\ 3 & 292 & 8 \\ -1 & -95 & -5 \end{vmatrix}$.

分析 观察发现第二列均接近于百位整数.

解答

$$\begin{vmatrix} 2 & 201 & -1 \\ 3 & 292 & 8 \\ -1 & -95 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 200+1 & -1 \\ 3 & 300-8 & 8 \\ -1 & -100+5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 200 & -1 \\ 3 & 300 & 8 \\ -1 & -100 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -8 & 8 \\ -1 & 5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

2. 倍加变换

将 $|\mathrm{P}(i,j(k))A|$ 按第 $i(i\neq j)$ 行展开, 有

$$\begin{aligned}|\mathrm{P}(i,j(k))A| &= (a_{i1}+ka_{j1})A_{i1}+(a_{i2}+ka_{j2})A_{i2}\\ &\qquad +\cdots+(a_{in}+ka_{jn})A_{in}\\ &= (a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in})\\ &\qquad +k(a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\cdots+a_{jn}A_{in})\\ &= |A|+k\times 0=|A|.\end{aligned}$$

因 $[\mathrm{P}(i,j(k))]^T=\mathrm{P}(j,i(k))$ 仍为倍加初等矩阵, 故

$$|A\mathrm{P}(i,j(k))|=|(A\mathrm{P}(i,j(k)))^T|=|\mathrm{P}(j,i(k))A^T|=|A^T|=|A|.$$

$$\boxed{|\mathrm{P}(i,j(k))A|=|A|=|A\mathrm{P}(i,j(k))|}$$

$$|\mathrm{P}(i,j(k))A| = |A| = |A\mathrm{P}(i,j(k))|$$

性质5 将行列式某行或列的倍数加到另外一行或列, 行列式的值不变.

提醒 性质5表明：对行列式而言，倍加变换是等值变换.

提醒 注意到：$|\mathrm{P}(i(k))| = k,\ \ |\mathrm{P}(i,j(k))| = 1,$

又因 $|\mathrm{P}(i(k))A| = k\,|A| = |A\mathrm{P}(i(k))|,$

$$|\mathrm{P}(i,j(k))A| = |A| = |A\mathrm{P}(i,j(k))|,$$

从而知

$$|\mathrm{P}(i(k))A| = |\mathrm{P}(i(k))|\cdot|A|,\ \ |A\mathrm{P}(i(k))| = |A|\cdot|\mathrm{P}(i(k))|,$$

$$|A\mathrm{P}(i,j(k))| = |A|\cdot|\mathrm{P}(i,j(k))| = |\mathrm{P}(i,j(k))A|\,|.$$

于是，有

对任意**倍乘**初等矩阵或**倍加**初等矩阵P, 总有

$$|A\mathrm{P}| = |A|\cdot|\mathrm{P}| = |\mathrm{P}A|.$$

3. 对换变换

为了考察行列式的对换变换对行列式的影响,我们先来看看如下事实.

实际上,一次行对换变换可视为三次行倍加变换和一次行数乘变换共同作用,理由如下

$$A=\begin{array}{cl}\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{is} & \cdots & a_{it} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{js} & \cdots & a_{jt} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \mathrm{r}_i \\ \\ \mathrm{r}_j \\ \\ \end{matrix}\end{array}$$

$$
\xrightarrow{\mathrm{r}_i + \mathrm{r}_j}
\begin{array}{cl}
\begin{bmatrix}
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\cdots & a_{is} + a_{js} & \cdots & a_{it} + a_{jt} & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\cdots & a_{js} & \cdots & a_{jt} & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots
\end{bmatrix}
&
\begin{matrix}
\\ \mathrm{r}_i \\ \\ \mathrm{r}_j \\ \\
\end{matrix}
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow{\mathrm{r}_j - \mathrm{r}_i}
\begin{array}{cl}
\begin{bmatrix}
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\cdots & a_{is} + a_{js} & \cdots & a_{it} + a_{jt} & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\cdots & -a_{is} & \cdots & -a_{it} & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots
\end{bmatrix}
&
\begin{matrix}
\\ \mathrm{r}_i \\ \\ \mathrm{r}_j \\ \\
\end{matrix}
\end{array}
$$

$$\xrightarrow{\mathrm{r}_i + \mathrm{r}_j} \left[\begin{array}{ccccc} \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{js} & \cdots & a_{jt} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \cdots & -a_{is} & \cdots & -a_{it} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mathrm{r}_i \\ \\ \mathrm{r}_j \\ \\ \end{array}$$

$$\xrightarrow{-1 \cdot \mathrm{r}_j} \left[\begin{array}{ccccc} \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{js} & \cdots & a_{jt} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{is} & \cdots & a_{it} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mathrm{r}_i \\ \\ \mathrm{r}_j \\ \\ \end{array}$$

以上事实表明

$\mathrm{r}_i \leftrightarrow \mathrm{r}_j$ 相当于 $\mathrm{r}_i + \mathrm{r}_j,\ \mathrm{r}_j - \mathrm{r}_i,\ \mathrm{r}_i + \mathrm{r}_j,\ -1 \cdot \mathrm{r}_j$

从而 $\mathrm{P}(i,j)A = \mathrm{P}(j(-1))\mathrm{P}(i,j(1))\mathrm{P}(j,i(-1))\mathrm{P}(i,j(1))A,$

再由前面结论，有

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{P}(i,j)A| &= |\mathrm{P}(j(-1))\mathrm{P}(i,j(1))\mathrm{P}(j,i(-1))\mathrm{P}(i,j(1))A| \\
&= |\mathrm{P}(j(-1))| \cdot |\mathrm{P}(i,j(1))| \cdot |\mathrm{P}(j,i(-1))| \cdot |\mathrm{P}(i,j(1))| \cdot |A| \\
&= (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot |A| = -|A|
\end{aligned}
$$

因 $[\mathrm{P}(i,j)]^T = \mathrm{P}(i,j)$, 从而有

$$|A\mathrm{P}(i,j)| = |(A\mathrm{P}(i,j))^T| = |\mathrm{P}(i,j)A^T| = -|A^T| = -|A|.$$

$$|A\mathrm{P}(i,j)| = -|A| = |\mathrm{P}(i,j)A|$$

$$|A\mathrm{P}(i,j)| = -|A| = |\mathrm{P}(i,j)A|$$

性质6 交换行列式的两行或两列, 新行列式为原行列式的相反数.

简言之 交换两行, 符号改变.
交换两列, 符号改变.

提醒 因 $|A\mathrm{P}(i,j)| = -|A| = |\mathrm{P}(i,j)A|$，特别地，有

$$|\mathrm{P}(i,j)| = |\mathrm{P}(i,j)E| = -|E| = -1$$

从而有 $|\mathrm{P}(i,j)A| = |\mathrm{P}(i,j)|\cdot|A| = |A\mathrm{P}(i,j)|.$

再结合前面结论，我们有

对任意**初等矩阵** P，总有

$$|A\mathrm{P}| = |A|\cdot|\mathrm{P}| = |\mathrm{P}A|,\ |\mathrm{P}| \neq 0.$$

若 A, B 为同阶方阵且至少一个**可逆**，必有

$$|AB| = |A|\cdot|B| = |BA|.$$

四、方阵可逆的充要条件

定理 设 A 为一方阵, 则 $\boxed{A\text{可逆} \Leftrightarrow |A| \neq 0.}$

证明 必要性 A可逆$\Rightarrow$存在同阶方阵B, 使得

$$AB = E \Rightarrow |AB| = |E| \Rightarrow |A| \cdot |B| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0.$$

充分性 设 A 的行最简矩阵为 U, 则存在初等矩阵, 不妨设为 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_k$, 使得

$$\mathrm{P}_k \cdots \mathrm{P}_2 \mathrm{P}_1 A = U.$$

$$\Rightarrow |\mathrm{P}_k| \cdots |\mathrm{P}_2| \cdot |\mathrm{P}_1| \cdot |A| = |U| \Rightarrow |U| \neq 0$$

$$\Rightarrow U = E \Rightarrow A\text{与}E\text{ 行等价} \Rightarrow A\text{ 可逆}.$$

引理 行列式不为零的行最简矩阵就是单位阵.

五、 矩阵乘积的行列式

定理 设 A, B 均为 n 阶方阵, 则 $|AB| = |A| \cdot |B|$.

证明 若 B 不可逆, 则方程组 $BX = 0$ 有非零解;

因方程组 $BX = 0$ 的解一定也是 $ABX = 0$

的解，故方程组 $ABX = 0$也有非零解;

则 AB不可逆，从而$|AB| = 0 = |A| \cdot |B|$.

若 B 可逆, 由前面结论知 $|AB| = |A| \cdot |B|$.

综上所述，结论 $|AB| = |A| \cdot |B|$总成立.

例题 设方阵 A 满足 $AA^T = E, |A| < 0$. 证明：

$$|E + A| = 0.$$

证明

$$|E + A| = \left|(E + A)^T\right| = \left|E + A^T\right|$$

$$= \left|AA^T + EA^T\right| = \left|(A + E)\,A^T\right|$$

$$= |A + E|\left|A^T\right| = |E + A|\,|A|$$

$$\Rightarrow |E + A|\,(1 - |A|) = 0$$

$$\xRightarrow{|A| < 0} |E + A| = 0$$

例题 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为三维列向量且 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$$B = (\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2)\,.$$

若行列式 $|A| = 5$, 则行列式 $|B| =?$

解答 显然 $B = (\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2)$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} = AC,$$

其中 $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, 可算得 $|C| = 7$, 故

$$|B| = |AC| = |A| \cdot |C| = 5 \times 7 = 35.$$

方阵 A 为正交矩阵 $\Leftrightarrow AA^T = E.$

例题 若 n 阶正交矩阵 A, B 满足 $|A| + |B| = 0.$

证明：$|A + B| = 0.$

证明 A, B 为正交矩阵 $\Rightarrow A^T A = E, BB^T = E$

$$\Rightarrow |A + B| = |EA + BE| = \left|BB^T A + BA^T A\right|$$

$$= \left|B(B + A)^T A\right| = |B| \cdot |(B + A)^T| \cdot |A|$$

$$= -|B|^2 \cdot |A + B|$$

$$\Rightarrow \left(1 + |B|^2\right) |A + B| = 0$$

$$\Rightarrow |A + B| = 0.$$

例题 已知 A, B 均为 n 阶方阵且 A 与 $E-AB$ 都可逆. 证明： $E-BA$ 可逆.

证明 $A, E-AB$ 可逆

$$\Rightarrow 0 \neq |E-AB| = |AA^{-1}-AB|$$

$$= |A(A^{-1}-B)| = |A| \cdot |A^{-1}-B|$$

$$= |A^{-1}-B| \cdot |A| = |(A^{-1}-B)A|$$

$$= |E-BA|$$

$\Rightarrow E-BA$ 可逆.

定理 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times m}$，$C=(c_{ij})_{m\times n}$，则

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|.$$

证明 经多次初等行变换，化$|A|$为下三角行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} p_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} = p_{11}\cdots p_{nn};$$

经多次初等列变换，化$|B|$为下三角行列式

$$|B| = \begin{vmatrix} q_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ q_{m1} & \cdots & q_{mm} \end{vmatrix} = q_{m1}\cdots q_{mm};$$

对$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix}$的前$n$行作与前面相同的初等行变换，后 m 列作与前面相同的初等列变换，有

$$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & q_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & q_{m1} & \cdots & q_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= p_{11} \cdots p_{nn} \cdot q_{11} \cdots q_{mm} = |A| \cdot |B|.$$

提醒 由以上引理，有

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B| = \begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & * \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| \cdot |B| = \begin{vmatrix} * & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix}$$

其中， A 为 n 阶方阵， B 为 m 阶方阵.

以上六个公式常称为**拉普拉斯展开式**.

例题 计算行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ y & 0 & x & 0 \\ 0 & w & 0 & z \end{vmatrix}$.

解答

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ y & 0 & x & 0 \\ 0 & w & 0 & z \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} - \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ y & 0 & x & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ 0 & w & 0 & z \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2 \leftrightarrow c_3} \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & w & z \end{vmatrix} \xlongequal[\text{公式}]{\text{上面}} \begin{vmatrix} a & b \\ y & x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c & d \\ w & z \end{vmatrix} = \cdots$$

六、 行列式的计算

计算行列式常用方法：化零，展开.

例题 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

解答

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 42.$$

例题 计算三阶行列式$\begin{vmatrix} 3 & 3 & \lambda+1 \\ 3 & \lambda+1 & 3 \\ \lambda+1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$.

分析 行列式特点：每行元素之和相等.

解答 $\begin{vmatrix} 3 & 3 & \lambda+1 \\ 3 & \lambda+1 & 3 \\ \lambda+1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_1+c_2+c_3} \begin{vmatrix} \lambda+7 & 3 & \lambda+1 \\ \lambda+7 & \lambda+1 & 3 \\ \lambda+7 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} \lambda+7 & 3 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

三角化法

$$= (\lambda+7)(\lambda-2)(2-\lambda) = -(\lambda+7)(\lambda-2)^2$$

例题 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

解答 将第 $2,3,\cdots,n$ 列都加到第一列，有

$$D=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}
$$

$$
= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}
$$

三角化法

在计算具体的行列式时，一定要掌握利用行列式的性质来计算，并掌握一些计算技巧.

例题 证明如下行列式等式

$$\mathcal{D}=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}=a^4.$$

证明 $$\mathcal{D}\ \underline{\underline{\begin{matrix} r_4-r_3 \\ r_3-r_2 \\ r_2-r_1 \end{matrix}}}\ \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4 - r_3}{\underset{r_3 - r_2}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4 - r_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= a^4.$$

三角化法

例题 计算行列式 $\mathcal{D}=\begin{vmatrix} a_1 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

解答 $\mathcal{D} \xlongequal{c_2+c_1} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_3 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_3+c_2} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_3 \\ 1 & 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4+c_3} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \end{vmatrix}$$

$$=10a_1a_2a_3$$

三角化法

练习 计算如下 $2n$ 阶行列式，其中空白处的为零.

$$\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$$

答案 该题答案为 $(a^2-b^2)^n$. $\boxed{\text{三角化法}}$

例题 证明范德蒙德行列式

$$\mathcal{V}_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

$$\begin{aligned} =&(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)\cdots(x_n-x_{n-1})\\ &(x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &(x_2-x_1) \end{aligned}$$

思路 对行列式的阶数用数学归纳法证明.

证明 对行列式的阶数用数学归纳法证明.

当 $n=2$ 时,

$$\mathcal{V}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1\le i<j\le 2}(x_j - x_i),$$

结论成立.

假设对 $n-1$ 阶范德蒙德行列式,结论成立,即

$$\mathcal{V}_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n-1}(x_j - x_i).$$

下面证明对 n 阶范德蒙德行列式，结论也成立.

作变换 $\mathrm{r}_n - x_n\mathrm{r}_{n-1}, \mathrm{r}_{n-1} - x_n\mathrm{r}_{n-2}, \cdots, \mathrm{r}_2 - x_n\mathrm{r}_1$，得

$$\mathcal{V}_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 - x_n & \cdots & x_{n-1} - x_n & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-3}(x_1 - x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-3}(x_{n-1} - x_n) & 0 \\ x_1^{n-2}(x_1 - x_n) & & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_n) & 0 \end{vmatrix}$$

按最后一列展开后提出各列公因子，得

$$\mathcal{V}_n = \prod_{k=1}^{n-1}(x_n - x_k)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-2} & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-3} & x_2^{n-3} & \cdots & x_{n-1}^{n-3} & x_{n-1}^{n-3} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-2}^{n-2} & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \left[\prod_{k=1}^{n-1}(x_n - x_k)\right]\mathcal{V}_{n-1},$$

由归纳假设$\mathcal{V}_{n-1} = \prod\limits_{1\le i<j\le n-1}(x_j - x_i)$**，于是**

$$\mathcal{V}_n = \prod_{k=1}^{n-1}(x_n - x_k)\prod_{1\le i<j\le n-1}(x_j - x_i) = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i).$$

例题 利用公式 $|AB|=|A||B|$ 计算如下行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1-a_1^n b_1^n}{1-a_1 b_1} & \dfrac{1-a_1^n b_2^n}{1-a_1 b_2} & \cdots & \dfrac{1-a_1^n b_n^n}{1-a_1 b_n} \\ \dfrac{1-a_2^n b_1^n}{1-a_2 b_1} & \dfrac{1-a_2^n b_2^n}{1-a_2 b_2} & \cdots & \dfrac{1-a_2^n b_n^n}{1-a_2 b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1-a_n^n b_1^n}{1-a_n b_1} & \dfrac{1-a_n^n b_2^n}{1-a_n b_2} & \cdots & \dfrac{1-a_n^n b_n^n}{1-a_n b_n} \end{vmatrix}.$$

分析 要想用$|AB|=|A||B|$来计算以上行列式，需将行列式的(i,j)元素$\dfrac{1-a_i^n b_j^n}{1-a_i b_j}$表为矩阵$A$的第$i$行与$B$的第$j$列相乘！经观察，我们发现

$$\frac{1-a_i^n b_j^n}{1-a_i b_j}=1+a_i b_j+a_i^2 b_j^2+\cdots+a_i^{n-1}b_j^{n-1}$$

$$=\left(1,a_i,\cdots,a_i^{n-1}\right)\begin{bmatrix}1\\ b_j\\ \vdots\\ b_j^{n-1}\end{bmatrix}$$

这样，所求行列式就可写成两行列式之积.

解答 令

$$A=\begin{bmatrix}1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1}\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1}\end{bmatrix},$$

由范德蒙德行列式的计算公式可得

$$|A|=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j),\quad |B|=\prod_{1\le j<i\le n}(b_i-b_j),$$

所以，原行列式的值为

$$|AB|=|A|\cdot|B|=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j).$$

例题 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}.$

解答 每一行提取各行的公因子，于是得到

$$D_n = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

上面等式右端行列式为范德蒙行列式，由范德蒙德行列式的计算公式知

$$
\begin{aligned}
D_n &= n! \prod_{1\le i<j\le n} (j-i) \\
&= n!(2-1)(3-1)(4-1)\cdots(n-1) \\
&\quad \cdot(3-2)(4-2)\cdots(n-2) \\
&\quad \cdot(4-3)\cdots(n-3) \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&\quad \cdot[n-(n-1)] \\
&= n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!.
\end{aligned}
$$

例题 计算如下三对角线形行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & & \\ 1 & a+b & ab & & & \\ & 1 & a+b & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a+b & ab \\ & & & & 1 & a+b \end{vmatrix}_n .$$

思路 考虑用递推法来计算三对角线形行列式.

解答 将三对角线形行列式按第一行展开，有

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & & \\ 1 & a+b & ab & & & \\ & 1 & a+b & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a+b & ab \\ & & & & 1 & a+b \end{vmatrix}_n$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}$$

$$= (a+b)\,(-1)^{1+1}\,D_{n-1} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}$$

提示 此处 M_{11} 就是 D_{n-1}.

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & & \\ 1 & a+b & ab & & & \\ & 1 & a+b & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a+b & ab \\ & & & & 1 & a+b \end{vmatrix}_n$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}$$

$$= (a+b)\,(-1)^{1+1}D_{n-1} + ab(-1)^{1+2}\,D_{n-2}$$

提示 此处 M_{12} 按第一列展开即有 $M_{12} = D_{n-2}$.

于是有

$$\mathcal{D}_n = (a+b)\,\mathcal{D}_{n-1} - ab\mathcal{D}_{n-2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}_n - aD_{n-1} = b\left(\mathcal{D}_{n-1} - a\mathcal{D}_{n-2}\right),$$

递推可得

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_n - a\mathcal{D}_{n-1} &= b^{n-2}\left(\mathcal{D}_2 - a\mathcal{D}_1\right)\\ &= b^{n-2}\left((a+b)^2 - ab - a\,(a+b)\right) = b^n.\end{aligned}$$

提醒 此处 $D_1 = |a+b|,\ D_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix}.$

于是有

$$\mathcal{D}_n = a\mathcal{D}_{n-1} + b^n,$$

再次递推可得

$$\mathcal{D}_n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \begin{cases} (n+1)a^n, & a = b, \\ \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}, & a \neq b. \end{cases}$$

提醒 以上结论可作为公式使用.

升阶法，镶边法，加边法

例题 计算如下行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix},$$

其中 $b_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n.$

分析 观察到每行都有$a_1, a_2, \cdots, a_n,$ 故考虑用升阶法或加边法或镶边法！

解答

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

爪形行列式

$$= \begin{vmatrix} 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix}
1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{b_i} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\
0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & b_n
\end{vmatrix}
$$

$$
= \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\right) b_1 b_2 \cdots b_n .
$$

只要将行列式化为爪形行列式，通常用倍加变换化爪形行列式为三角形行列式——————折翼法

例题 计算 $\begin{vmatrix} x_1 & a & a & a \\ a & x_2 & a & a \\ a & a & x_3 & a \\ a & a & a & x_4 \end{vmatrix}$，其中 $x_i \neq a, i = 1, 2, 3, 4.$

思路 化为爪形行列式

提示 原行列式 $= \begin{vmatrix} x_1 & a-x_1 & a-x_1 & a-x_1 \\ a & x_2-a & 0 & 0 \\ a & 0 & x_3-a & 0 \\ a & 0 & 0 & x_4-a \end{vmatrix} = \cdots\cdots$