第五章 特征值与特征向量

第三节　实对称矩阵的正交相似对角化

一、向量的内积

二、正交向量组

三、正交矩阵

四、实对称矩阵的性质

一、向量的内积

定义 设$\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}, \beta=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$为$n$维向量，称

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

为α与β的**内积**，记为(α,β)，即

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

定义 若两向量α与β的内积$(\alpha,\beta)=0$，则称向量α与β **正交**，记为$\alpha\perp\beta$.

提醒 两列向量α与β的内积$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta$.

内积的运算性质

(1) $(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=(\beta,\alpha)$;

(2) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$;

(3) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta),\ \forall\, k\in\mathbb{R}$;

(4) $\alpha\neq 0\Leftrightarrow(\alpha,\alpha)>0,\ \alpha=0\Leftrightarrow(\alpha,\alpha)=0$;

(5) $(0,\alpha)=0^T\alpha=0$;

(6) $(\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i,\beta)=\sum_{i=1}^{m}k_i(\alpha_i,\beta)$.

定义 称$\|\alpha\| \triangleq \sqrt{(\alpha,\alpha)}$为$\alpha$的**长度**；

称长度为 1 的向量为**单位向量**.

提醒 (1) $\|k\alpha\| = |k|\|\alpha\|$, 其中 k为任意常数；

(2) 若$\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，则

$$\|\alpha\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

(3) 当 $\|\alpha\| > 0$时，$\dfrac{1}{\|\alpha\|}\alpha$是单位向量.

以数 $\dfrac{1}{\|\alpha\|}$乘 α 称为将 α**单位化**.

例题 若 $\alpha = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$，则

$$(\alpha, \beta) = 0 \Rightarrow \alpha \perp \beta.$$

$$\|\beta\| = \sqrt{(\beta, \beta)} = \sqrt{70}.$$

将 β 单位化得 $\dfrac{1}{\|\beta\|}\beta = \begin{bmatrix} 5/\sqrt{70} \\ -2/\sqrt{70} \\ 4/\sqrt{70} \\ 5/\sqrt{70} \end{bmatrix}.$

二、正交向量组

定义 定义了内积的实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 称为 n 维欧几里德空间，在 $\mathbb{R}^n$ 中，

① 称不含零向量且两两正交的向量组为**正交向量组**.

② 由单位向量构成的正交组称为**规范正交组**或**标准正交组**;

③ 含 n 个向量的规范正交组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 的一个**规范正交基**或**标准正交基**.

定理 任意正交向量组必为线性无关向量组.

证明 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$任意正交组. 考虑

$$\sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

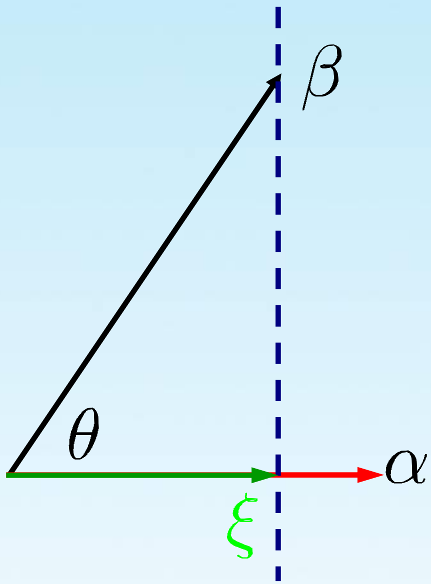
$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i, \alpha_j\right) = 0, \forall j = 1, 2, \cdots, s$$

$$\Rightarrow k_j(\alpha_j, \alpha_j) = 0, \forall j = 1, 2, \cdots, s$$

$$\overset{\alpha_j\neq 0}{\Rightarrow} k_j = 0, \forall j = 1, 2, \cdots, s$$

$\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关.

一向量在另一向量上的投影



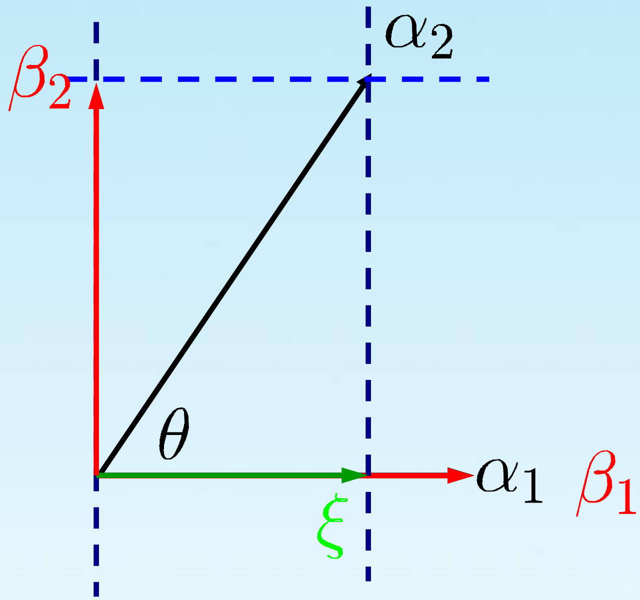
$$\xi = \|\beta\| \cos\theta \frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$$

$$= \frac{\|\beta\| \cdot \|\alpha\| \cos\theta}{\|\alpha\|^2}\alpha$$

$$= \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$$

ξ：向量 β 在向量 α 上的投影（向量）

施密特正交化方法的几何解释

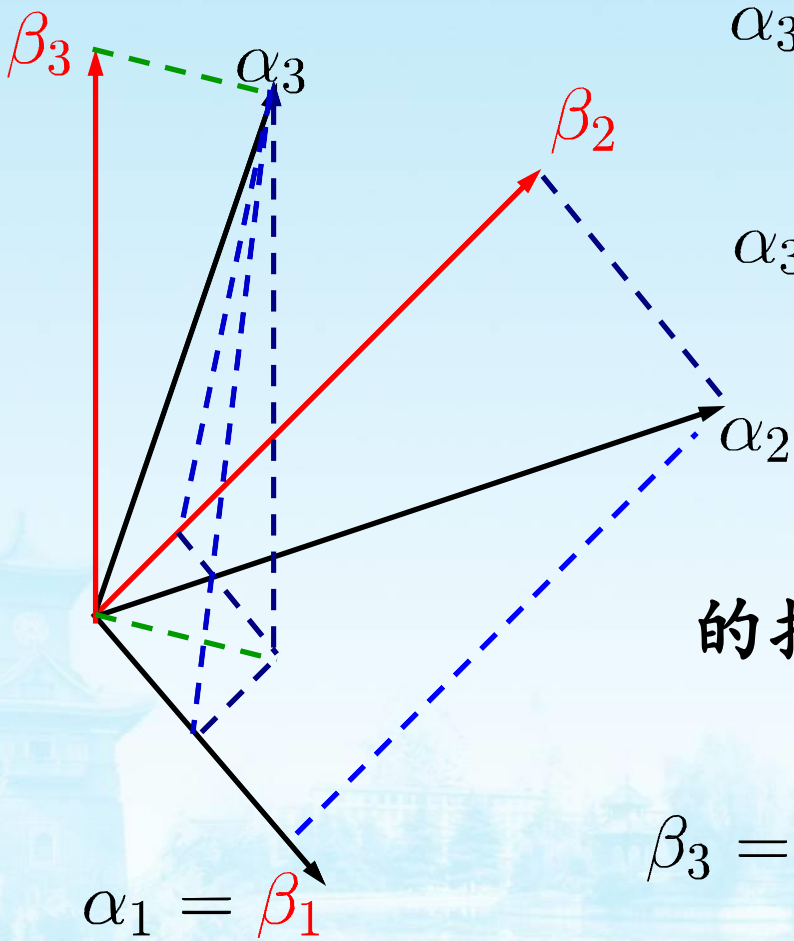


$$\xi = \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$$

ξ：向量α_2在向量 β_1上的**投影**（向量）

$$\beta_2 = \alpha_2 - \xi = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$$

施密特正交化方法的几何解释



α_3 在 β_1 上的投影：$\dfrac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$

α_3 在 β_2 上的投影：$\dfrac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$

α_3 在 β_1, β_2 所在平面上的

的投影：$\dfrac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 + \dfrac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$

线性无关向量组必可正交化

定理 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，令

$$\beta_1 = \alpha_1, \qquad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{(\alpha_s, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_s, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_s, \beta_{s-1})}{(\beta_{s-1}, \beta_{s-1})}\beta_{s-1},$$

则 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 为正交向量组；

提醒 以上正交化方法称为**施密特正交化方法**.

将向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 单位化，可得

$$\gamma_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1,\ \gamma_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2,\ \cdots,\ \gamma_s = \frac{1}{\|\beta_s\|}\beta_s$$

则 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$ 为一规范正交向量组;

且对任意的 $k = 1, 2, \cdots, s$, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$

与 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k$ 等价.

$\boxed{\text{线性无关组}} \Longrightarrow \boxed{\text{正交组}} \Longrightarrow \boxed{\text{规范正交组}}$

例题 用施密特正交化方法将如下向量组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}3\\3\\-1\\-1\end{bmatrix},\ \alpha_3=\begin{bmatrix}-2\\0\\6\\8\end{bmatrix}$$

规范正交化.

解答 首先将向量组正交化

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{4}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} - \frac{12}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-32}{16}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

则 β_1,β_2,β_3 为正交向量组. 将其单位化得规范正交组

$$\gamma_1=\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=\begin{bmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{bmatrix},\ \gamma_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=\begin{bmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\\-1/2\end{bmatrix},$$

$$\gamma_3=\frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3=\begin{bmatrix}-1/2\\1/2\\1/2\\-1/2\end{bmatrix}.$$

提醒 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 是规范正交组，不是规范正交基.

三、正交矩阵

定义 设n阶实矩阵A满足 $A^T A = E$ ，则称矩阵 A 为**正交矩阵**.

提醒 A为正交矩阵 $\Leftrightarrow A^T = A^{-1}.$

正交矩阵的性质 设 P, Q 为同阶正交矩阵，则

① $\mathrm{P}^T = \mathrm{P}^{-1}$, 且它们都为正交矩阵；

② $\mathrm{P}Q$ 为正交矩阵；

③ $|\mathrm{P}| = 1$或$-1.$

提醒 单位矩阵是正交矩阵. 正交矩阵的转置矩阵，逆矩阵，负矩阵，幂都是正交矩阵.

思考 正交矩阵的伴随矩阵是正交矩阵吗？

方阵为正交矩阵的充要条件

定理 设 Q 为 n 阶实矩阵，则 Q 为正交矩阵的充要条件为：Q 的行或列向量组是规范正交基.

证明 将 Q 列分块为 $Q=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则

$$Q^TQ=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\vdots\\\alpha_n^T\end{bmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

$$=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\\alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\\vdots & \vdots & & \vdots\\\alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Q^TQ=\begin{bmatrix} \|\alpha_1\|^2 & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & \|\alpha_2\|^2 & \cdots & (\alpha_2,\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_n,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_n) & \cdots & \|\alpha_n\|^2 \end{bmatrix}$$

于是，

Q为正交矩阵 $\Leftrightarrow Q^TQ=E$

$$\Leftrightarrow \|\alpha_i\|^2=1,(\alpha_i,\alpha_j)=0,\forall i,j,\ i\neq j$$

$$\Leftrightarrow \|\alpha_i\|=1,\alpha_i\perp\alpha_j=0,\forall i,j,\ i\neq j$$

$\Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是规范正交基.

例题 判断下列矩阵是否为正交矩阵：

$$(1)\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad (2)\begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

例题 已知 A 为对称矩阵，满足

$$A^2 - 4A + 3E = 0,$$

请问：矩阵 $A-2E$ 为正交矩阵吗？

例题 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

解答 易见 A 的列向量组为**正交组**，长度均为2，则 $\frac{1}{2}A$ 的列向量组为**规范正交基**，故 $\frac{1}{2}A$ 为正交矩阵，从而有

$$\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}=\left(\frac{1}{2}A\right)^{T}\Rightarrow 2A^{-1}=\frac{1}{2}A^{T}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{4}A^{T}=\frac{1}{4}A.$$

四、实对称矩阵的性质

复数域上的一般矩阵，其特征值为复数，但对实对称矩阵而言，其特征值、特征向量具有特殊性质.

性质1 实对称矩阵的特征值都是实数.

证明 对于实对称矩阵A，有

$$\bar{A}=A=A^T.$$

若λ为A的特征值，则存在$\alpha\neq 0$, 使得

$$A\alpha=\lambda\alpha,$$

从而

$$\alpha^T\overline{A\alpha}=\alpha^T\overline{\lambda\alpha}=\bar{\lambda}\alpha^T\bar{\alpha}.$$

另一方面

$$\alpha^T\overline{A\alpha}=\alpha^TA\bar{\alpha}=(A\alpha)^T\bar{\alpha}=(\lambda\alpha)^T\bar{\alpha}=\lambda\alpha^T\bar{\alpha}.$$

于是有

$$\lambda\alpha^T\alpha=\bar{\lambda}\alpha^T\alpha\xrightarrow{\alpha^T\bar{\alpha}\neq 0}\lambda=\bar{\lambda}\Rightarrow\lambda\text{为实数}.$$

推论 实对称矩阵的特征向量均为实向量.

性质2 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量不仅线性无关，而且正交.

证明 设 α, β 为实对称矩阵 A 的属于不同特征值 λ_1, λ_2 的特征向量， 则

$$\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ A\alpha = \lambda_1\alpha,\ A\beta = \lambda_2\beta,$$

于是有

$$\begin{aligned}\lambda_1\alpha^T\beta &= (\lambda_1\alpha)^T\beta = (A\alpha)^T\beta = \alpha^T A^T\beta \\ &= \alpha^T(A\beta) = \alpha^T(\lambda_2\beta) = \lambda_2\alpha^T\beta\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\alpha^T\beta = (\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha, \beta) = 0$$

$$\overset{\lambda_1 \neq \lambda_2}{\Rightarrow} (\alpha, \beta) = 0 \Rightarrow \alpha \perp \beta.$$

定义 设 A, B 为 n 阶矩阵，若存在正交矩阵 Q, 使得

$$Q^{-1}AQ = B,$$

则称 A 与 B 正交相似.

若矩阵 A 与某对角阵正交相似，则称 A 可正交相似对角化，简称可正交对角化.

性质3 实对称矩阵一定可以正交相似对角化！

即：若 A 为 n 阶实对称矩阵，则一定存在正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵！

证明 略.

推论1 若 A为 n 阶实对称矩阵，λ为 A的 k重特征值，则 A 有 k 个属于λ 的线性无关或正交的特征向量.

提醒 对实对称矩阵而言，任意特征值的代数重数与几何重数总相等！

推论2 n 阶实对称矩阵一定有 n 个正交的单位特征向量.

将实对称矩阵正交对角化的方法与步骤

① 求出 A 的全部不同特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$,
其代数重数分别为 $k_1, k_2, \cdots, k_s$;

② 对任意 $i = 1, 2, \cdots, s$, 求出齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)X = 0$ 的基础解系

$$X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{ik_i},$$

将其正交化后得 A 的 k_i 个属于 λ_i 的正交的特征向量

$$\beta_{i1}, \beta_{i2}, \cdots, \beta_{ik_i};$$

③ 将正交向量组

$$\begin{array}{llll} \beta_{11}, & \beta_{12}, & \cdots, & \beta_{1k_1}, \\ \beta_{21}, & \beta_{22}, & \cdots, & \beta_{2k_2}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{s1}, & \beta_{s2}, & \cdots, & \beta_{sk_s} \end{array}$$

单位化，得规范正交基

$$\begin{array}{llll} \gamma_{11}, & \gamma_{12}, & \cdots, & \gamma_{1k_1}, \\ \gamma_{21}, & \gamma_{22}, & \cdots, & \gamma_{2k_2}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{s1}, & \gamma_{s2}, & \cdots, & \gamma_{sk_s} \end{array}$$

④ 令 $Q = (\gamma_{11}, \cdots, \gamma_{1k_1}, \gamma_{21}, \cdots, \gamma_{2k_2}, \cdots, \gamma_{s1}, \cdots, \gamma_{sk_s})$

则矩阵 Q 为正交矩阵，使得

$$Q^{-1}AQ = Q^{T}AQ$$

$$= \begin{bmatrix} \overbrace{\lambda_1 \quad \ddots \quad \lambda_1}^{k_1} & & & & & & \\ & \overbrace{\lambda_2 \quad \ddots \quad \lambda_2}^{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overbrace{\lambda_s \quad \ddots \quad \lambda_s}^{k_s} \end{bmatrix}$$

例题 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, 求正交矩阵 Q 使

$Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵.

解答 经计算有 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$,

则 A 的特征值为 $\lambda_1=10,\ \lambda_{2,3}=1.$

解 $(\lambda_1 E-A)X=0$ 得其基础解系为 $X_1=\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$;

解 $(\lambda_{2.3}E-A)X=0$ 得其基础解系为

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix};$$

将 α_1,α_2 正交化得

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2\\4\\5\end{bmatrix};$$

将 X_{11},β_1,β_2 单位化得

$$\gamma_1=\frac{1}{|X_{11}|}X_{11}=\begin{bmatrix}-1/3\\-2/3\\2/3\end{bmatrix},$$

$$\gamma_2=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1=\begin{bmatrix}-2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\\0\end{bmatrix},$$

$$\gamma_3=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2=\begin{bmatrix}2\sqrt{5}/15\\4\sqrt{5}/15\\\sqrt{5}/3\end{bmatrix}.$$

令$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix}$,

则 Q 为正交矩阵且 $Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix} 10 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$.

实对称矩阵与一般方阵之比较

比较项	一般方阵	实对称阵
特征值	可能为实数 也可能是虚数	必为实数
	代数重数≥几何重数	代数重数=几何重数
特征向量	可能为实向量 也可能是虚向量	必为实向量
	属于不同特征值的特征向量线性无关	属于不同特征值的特征向量不仅线性无关而且正交
对角化	可能能对角化 也可能不能对角化	不仅能对角化 还能正交相似对角化

例题 已知三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = 1$. $\xi_2 = (1,1,-1)^T$, $\xi_3 = (2,3,-3)^T$ 为属于特征值 $\lambda_{2,3}$ 的特征向量. 求属于特征值λ_1的一个特征向量及矩阵 A.

解答 设属于 λ_1 的一特征向量 $\xi_1 = (x_1, x_2, x_3)^T$. 因实对称阵的属于不同特征值的特征向量正交，所以

$$\begin{cases} (\xi_1, \xi_2) = 0 \\ (\xi_1, \xi_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

解之得属于λ_1 的一特征向量 $\xi_1 = (0,1,1)^T$.

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&1&3\\1&-1&-3\end{bmatrix}$， 则

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

从而

$$A=P\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3/2&1/2\\0&1/2&3/2\end{bmatrix}.$$

例题 已知三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-2$. $\xi_1=(1,-1,1)^T$ 为属于特征值 λ_1 的特征向量. 且 $B=A^5-4A^3+E$.

(1) 验证 ξ_1 是 B 的特征向量;

(2) 求 B 的全部特征值与特征向量;

(3) 求 B.

提示 (1)验证略.

(2)设 A 的属于特征值 λ_2, λ_3 的特征向量为 $(x_1,x_2,x_3)^T$, 则 $x_1-x_2+x_3=0$, 解之得属于 λ_2, λ_3 的特征向量分别为

$$\xi_2=(1,1,0)^T,\xi_3=(1,-1,-2)^T.$$

因$B=f(A)$, 其中$f(x)=x^5-4x^3+1$，故B的特征值为

$$f(1)=-2, f(2)=f(-2)=1.$$

且B也为实对称矩阵，ξ_1, ξ_2, ξ_3 是B的分别属于特征值$-2,1,1$的特征向量，所以

$$B(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(-2\xi_1,\xi_2,\xi_3)$$

$$B=(-2\xi_1,\xi_2,\xi_3)(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

命题 设 A 为方阵，$\mu(A)$ 表 A 的非零特征值个数.
若 A 能对角化，则 $\mu(A) = \text{rank}(A)$.

证明 设 A 为 n 阶方阵，特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

A 能对角化，则 $A \sim \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$

从而 $\text{rank}(A) = \text{rank}(\Lambda) = \mu(A)$.

推论 若 A 为实对称阵，则 $\mu(A) = \text{rank}(A)$.

补充练习

1. 设 A 为三阶实对称矩阵，$\mathrm{rank}(A)=2$, $A^2=A$. 求 A 的特征值.

提示 $A^2=A \Rightarrow A$的特征值 λ 必满足 $\lambda^2=\lambda$

$\Rightarrow A$的特征值$\lambda=0$ 或 $\lambda=1$.

因 A实对称，且 $\mathrm{rank}(A)=2$, 由上页命题知：

A恰有两个非零特征值，所以

A的全部特征值为$\lambda_{1,2}=1$, $\lambda_3=0$.

补充练习

2. 设 α 为三维单位列向量，则 $\mathrm{rank}(E-\alpha\alpha^T)=?$

提示 令 $A=E-\alpha\alpha^T$, 则 A 为实对称阵.

因 α 为单位向量，经计算知 $A^2=A$,

从而 A 的特征值只能为 0 或 1.

又 $\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}(E-\alpha\alpha^T)=\mathrm{tr}E-\mathrm{tr}(\alpha\alpha^T)$

$$=3-\mathrm{tr}(\alpha^T\alpha)=3-\alpha^T\alpha$$

$$=3-\|\alpha\|^2=3-1=2.$$

综上知 A 的特征值必为 $\lambda_{1,2}=1, \lambda_3=0$.

从而 $\mathrm{rank}(A)$ 为 A 的非零特征值个数2，即

$\mathrm{rank}(E-\alpha\alpha^T)=2.$

2. 设 α 为三维单位列向量，则 $\operatorname{rank}(E-\alpha\alpha^T)=?$

另解 令 $A=E-\alpha\alpha^T$, 因 α 为单位向量，则

$$A^2=(E-\alpha\alpha^T)^2=A\Rightarrow A(A-E)=0$$

$$\Rightarrow \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(A-E)\le 3. \qquad (1)$$

又

$$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(A-E)\ge \mathrm{r}(A-(A-E))=3. \qquad (2)$$

联立 (1)(2) 知

$$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(A-E)=3$$

$$\Rightarrow \mathrm{r}(A)=3-\mathrm{r}(A-E)=3-\mathrm{r}(-\alpha\alpha^T)=2.$$

3. **设** A **为三阶实对称矩阵，特征值为** $3,\ -6,\ 0.$ $\alpha_1=(1,a,1)^T,\ \alpha_2=(a,a+1,1)^T$ **为分别属于特征值** $3,\ -6$ **的特征向量，求矩阵** A **.**

提示 首先由 $\alpha_1 \perp \alpha_2$ 求出 $a=-1.$

然后，属于特征值0的特征向量 α_3 应与 α_1 和 α_2 都正交,以此性质求出 $\alpha_3.$

最后，因 A 的特征值，特征向量均已知，从而

可求出 $A=\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$

4. 设 A 为三阶实对称矩阵，$\mathrm{r}(A)=2$, $AB=-2B$.

其中 $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$. 求 A 的特征值和特征向量，并求 $\mathrm{rank}(A^*)$.

---

4. $\lambda_{1,2}=-2, k_1\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}; \lambda_3=0, k\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

$\mathrm{rank}(A^*)=1$

5. 已知三阶矩阵 A 的第一行元素全为 1, 且 $\alpha_1=(1,1,1)^T, \alpha_2=(1,0,-1)^T, \alpha_3=(1,-1,0)^T$ 为 A 的三个特征向量，求 $A, (A-1.5E)^{2022}$.

解答 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ d & e & f\end{bmatrix}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的分别属于特征值

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的特征向量，从而有

$$\begin{cases} A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1 \Rightarrow \lambda_1=3, a+b+c=d+e+f=3 \\ A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2 \Rightarrow \lambda_2=0, a=c, d=f \\ A\alpha_3=\lambda_3\alpha_3 \Rightarrow \lambda_3=0, a=b, d=e \end{cases}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

因三阶方阵 A 有三个线性无关特征向量，故 A 能对角化.

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 P 可逆，使得 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow P^{-1}(A-1.5E)P=P^{-1}AP-1.5E=1.5\begin{bmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1}(A-1.5E)^{2022}P=1.5^{2022}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}=1.5^{2022}E$$

$$\Rightarrow (A-1.5E)^{2022}=P(1.5^{2022}E)P^{-1}=1.5^{2022}E.$$