第六章 二次型

第六章 二次型

第二节 二次型化为标准形

一、正交变换法

二、配方法

三、合同变换法

任意二次型总能通过可逆线性变换化为标准形.

本节将介绍二次型化为标准形的方法:

配方法、正交变化法、合同变换法.

一、配方法

1. 二次型有平方项的情形

例题 用配方法化如下三元二次型

$$f = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

为标准形，并求出所用的可逆线性变换.

解答 二次型中含平方项 x_1^2，对 x_1 配方，消去所有含 x_1 的交叉项，得

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 4x_2x_3 - 2x_3^2 \end{aligned}$$

再对 x_3 配方，消去所有含 x_3 的交叉项得

$$
\begin{aligned}
f &= (x_1+x_2+x_3)^2 - 4x_2x_3 - 2x_3^2 \\
&= (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_2+x_3)^2 + 2x_2^2
\end{aligned}
$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \qquad\ x_2 + x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad x_2 \end{cases}$，即存在可逆线性变换

$$
\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_3 \\ x_3 = y_2 - y_3 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}
$$

使得 $f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_3^2.$

提醒 在上题中，如果令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \sqrt{2}x_2 \\ y_3 = x_2 + x_3 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - y_3 \\ x_2 = y_2/\sqrt{2} \\ x_3 = y_3 - y_2/\sqrt{2} \end{cases}$$

它仍是一可逆线性替换，但在这种线性替换下，二次型的标准形为 $f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2.$

显然，这个标准形与刚才的标准形是不同的，但它们都是原二次型的标准形，所以有

命题 二次型的标准形是不唯一的.

2. 二次型无平方项的情形

例题 用配方法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$$

为标准形，并求出所用的可逆线性变换.

解答 二次型中无平方项，但含 x_1x_2，利用平方差公式作可逆线性变换，使新变量的二次型含平方项. 作可逆线性变换

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

则

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) = 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + 2(y_1 + y_2)y_3 \\
-6(y_1 - y_2)y_3
\end{aligned}
$$

$$
= 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3
$$

$$
= 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2
$$

作可逆线性变换

$$
\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix},
$$

化二次型为标准形为

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2,$$

所用可逆线性替换为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}.$$

二、正交变换法

因任何实对称矩阵总可以正交相似（既相似又合同）对角化，得化二次型为标准形的正交变换法.

定理 对于任意 n 元实二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX, \ A = A^T$$

总存在正交矩阵 Q，使得原二次型在可逆线性变换 $X = QY$ 下成为标准形

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$为 A 的全部特征值.

定义 当 Q 为正交矩阵时，称可逆线性变换 $X = QY$ 为**正交变换**.

例题 用正交变换法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4$$
$$-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$$

为标准形，并写出所用的正交变换.

解答 二次型的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{bmatrix};$$

因 $|\lambda E-A|=(\lambda+3)(\lambda-1)^3,$

故 A 的特征值为 $\lambda_{1,2,3}=1, \lambda_4=-3;$

解 $(\lambda_{1,2,3}E-A)X=0$ 得其基础解系为

$$X_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad X_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\quad X_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix},$$

将 X_1, X_2, X_3 正交化，得

$$Y_1=X_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},$$

$$Y_2 = X_2 - \frac{(X_2, Y_1)}{(Y_1, Y_1)} Y_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Y_3 = X_3 - \frac{(X_3, Y_1)}{(Y_1, Y_1)} Y_1 - \frac{(X_3, Y_2)}{(Y_2, Y_2)} Y_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix};$$

解$(\lambda_4 E - A)X = 0$得其基础解系为$X_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

将Y_1, Y_2, Y_3, X_4单位化得规范正交基

$$\beta_1 = \frac{1}{\|Y_1\|}Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \beta_2 = \frac{1}{\|Y_2\|}Y_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix},$$

$$\beta_3 = \frac{1}{\|Y_3\|}Y_3 = \frac{\sqrt{3}}{6}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\3\end{bmatrix}, \beta_4 = \frac{1}{\|X_4\|}X_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix},$$

令 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$

$$=\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & -\sqrt{3}/6 & 1/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/6 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/6 & -1/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

则 Q 是正交矩阵，满足

$$Q^T AQ = Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}\,(1,1,1,-3)\,.$$

作正交变换 $X=QY$，化原二次型为标准形

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_4^2.$$

例题 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$
$+2\lambda x_1x_2+2\mu x_2x_3+2x_1x_3$

经正交变换化为 $f=2y_2^2+y_3^2$，求 λ,μ.

解答 由题知 $A=\begin{bmatrix}1&\lambda&1\\ \lambda&1&\mu\\ 1&\mu&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&&\\&2&\\&&1\end{bmatrix}$,

故 A 的特征值为 $0,2,1$，从而有

$$\begin{cases}|0E-A|=0\\ |1E-A|=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(\lambda-\mu)^2=0\\ (\lambda+\mu)^2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\lambda=0,\ \mu=0.$$

1 正交变换的特点：保持向量的内积，长度不变！
即当 Q 为正交矩阵时，则

$$(QX, QY) = (X, Y), \ \|X\| = \|QX\|.$$

从而，正交变换能保持向量间的夹角不变！

2 正交变法换化二次曲线、二次曲面的方程为标准形时，能保持图形的几何性质如形状，大小等.

3 正交变换法只能将二次型化为标准形，不能范化为规形！配方法可以化为标准形，也可化为规范形！

例题 已知 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 且 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

证明：$-\dfrac{3}{2} \le 3xy + \dfrac{\sqrt{2}}{2}yz + \dfrac{\sqrt{2}}{2}zx \le \dfrac{3+\sqrt{13}}{4}$.

证明提示 设 $f(x, y, z) = 3xy + \dfrac{\sqrt{2}}{2}yz + \dfrac{\sqrt{2}}{2}zx$.

显然，$f(x, y, z)$为一个实二次型，必存在正交变换

$$X = QY(X = (x, y, z)^T, Y = (u, v, w)^T)$$

使得

$$f(x, y, z) = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 w^2,$$

其中$\lambda_1 = -\dfrac{3}{2}, \lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{13}}{4}, \lambda_3 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{4}$为$f(x, y, z)$的矩阵的特征值.

因 $x^2+y^2+z^2=1$，故

$$u^2+v^2+w^2=\|Y\|^2=\|X\|^2=x^2+y^2+z^2=1.$$

从而

$$\begin{cases}\lambda_1u^2+\lambda_2v^2+\lambda_3w^2\geq\lambda_1\left(u^2+v^2+w^2\right)=\lambda_1,\\ \lambda_1u^2+\lambda_2v^2+\lambda_3w^2\leq\lambda_3\left(u^2+v^2+w^2\right)=\lambda_3.\end{cases}$$

于是

$$\lambda_1\leq\lambda_1u^2+\lambda_2v^2+\lambda_3w^2\leq\lambda_3,$$

即

$$-\frac{3}{2}\leq 3xy+\frac{\sqrt{2}}{2}yz+\frac{\sqrt{2}}{2}zx\leq\frac{3+\sqrt{13}}{4}.$$

三、合同变换法（略）

第六章 二次型

6.1 二次型及其矩阵表示

6.2 二次型化为标准形

6.3 正定二次型

第六章 二次型

第三节 正定二次型

一、二实次型的分类

二、惯性定理

三、二次型正定的判别方法

一、实二次型的分类

定义 设 $f = X^T AX(A = A^T)$ 为 n 元实二次型.

若对任意 $X = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T \neq 0$, 有

(1) $X^T AX > 0$, 则称 f 为正定二次型;

(2) $X^T AX < 0$, 则称 f 为负定二次型;

(3) $X^T AX \geq 0$, 则称 f 为半正定二次型;

(4) $X^T AX \leq 0$, 则称 f 为半负定二次型;

(5) $X^T AX$ 既可取得正值，又可取得负值, 则称 f 为不定二次型.

提醒 f（半）负定 $\Leftrightarrow$ $-f$（半）正定.

定义 设A为实对称阵，二次型$f = X^T AX.$

若二次型 f 正定，称其矩阵 A为**正定矩阵**；

若二次型 f 负定，称其矩阵A为**负定矩阵**；

若二次型 f 不定，称其矩阵A为**不定矩阵**；

若二次型 f 半正定，称A为**半正定矩阵**；

若二次型 f 半负定，称A为**半负定矩阵**.

提醒 A（半）负定 $\Leftrightarrow -A$（半）正定

提醒 （半）负定问题均可以转化为（半）正定问题来研究，本节主要讲正定问题.

例题 (1) 二次型 $f = x_1^2 + 2x_2^2 + \cdots + nx_n^2$

及其矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{bmatrix}$ 正定;

(2) 二次型 $q(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2$

及其矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & \\ & -2 \end{bmatrix}$ 负定.

例题 二次型 $g = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_4^2$

及其矩阵 $A_g = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & -3 & \\ & & & -4 \end{bmatrix}$ 不定.

思考 判断二次型

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$$

及其矩阵 $A_\phi = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ 的正定性.

显然可见，当二次型为标准二次型，实对称矩阵为对角阵时，其类型很容易判断.

对一般的二次型而言，可以通过可逆线性变换将其化为为标准形，再判断其类型！实对称矩阵同理可判断.

但问题是：可逆线性变换前后两个二次型及其矩阵的正定性是一致的吗？

定理 可逆线性变换不改变二次型的类型！

证明 只证可逆线性变换不改变正定二次型的类型！

设正定二次型 $f = X^T AX$ 经可逆线性变换

$X = PY$ 后化为 $f = Y^T BY$, 其中 $B = P^T AP$.

现证明新二次型 $f = Y^T BY$ 也正定.

对任意的 $Y \neq 0$, 因 P 可逆，则 $X = PY \neq 0$,

$$\Rightarrow Y^T BY = Y^T \left(P^T AP\right) Y = X^T AX > 0$$

$$\Rightarrow f = Y^T BY \text{ 正定.}$$

同理：可逆线性变换不改变其它二次型类型！

二、惯性定理

一个实二次型，既可以通过正交变换化为标准形，也可以通过配方法化为标准形．显然，同一个二次型的标准形是不唯一的．但仔细观察可发现，同一二次型的不同标准形所含的正平方项的项数是确定的，负平方项的项数也是确定的．

惯性定理 二次型 $f = X^T AX(A = A^T)$ 经满秩线性变换后化为标准形，则正平方项项数和负平方项项数都是唯一确定的.

定义 设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX(A=A^T)$为$n$元二次型，称$f$的标准形中所含正平方项的项数$p$和负平方项的项数$q$分别为二次型$f$和实对称矩阵$A$的**正惯性指数**和**负惯性指数**，称$s=p-q$为$f$的**符号差**.

提醒 若$\mathrm{rank}(f)=r$, 则$p+q=r$，r与s同奇偶.

结合以上定义，可得惯性定理的如下推论：

推论1 二次型 $f = X^T AX(A = A^T)$和实对称矩阵 A的正负惯性指数就是 A的正负特征值个数（要计算重数）.

推论2 任意二次型的规范形是唯一的.

推论3 二次型经过可逆线性变换不改变正负惯性指数，故相合同的两矩阵有相同的正负惯性指数.

推论4 两同阶实对称矩阵合同的充要条件为它们具有相同的正负惯性指数.

正负惯性指数与二次型类型间有何关系？

提醒 设n元二次型$f = X^T AX \ (A = A^T)$的正负正负惯性指数为$p, q,$ 且$\mathrm{r}(f) = r = \mathrm{r}(A).$

当$p = r = n,\ q = 0$时，f和A 正定；

当$p = r \le n,\ q = 0$时，f和A 半正定；

当$q = r = n,\ p = 0$时，f和A 负定；

当$q = r \le n,\ p = 0$时，f和A 半负定；

当 $p \ge 1,\ q \ge 1$ 时，f和A 不定.

例题 确定二次型 $f(x,y)=xy$ 的类型.

解答 二次型 $f(x,y)=xy$ 的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix},$$

因 $|A|<0$, 故 A 有一正一负两个特征值，

即二次型的正负惯性指数均为1，所以

该二次型为不定二次型.

三、二次型正定的判别方法

定理 设 $f = X^T AX\,(A = A^T)$ 为 n元实二型，则以下命题等价.

① A 为正定矩阵，或 f 为正定二次型；

② A 的特征值全为正数；

③ A 或 f 的正惯性指数 $p = n$;

④ 存在可逆矩阵 C，使得 $C^T AC = E$;

⑤ 存在可逆矩阵 P，使得 $P^T P = A$;

提醒 命题④和⑤即实对称矩阵 $A \simeq E$.

证明 采用循环证明法.

①⇒② 设 λ 是 A 的任一特征值，则 $\lambda \in \mathbb{R}$ 且存在 $X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0$, 使得 $AX = \lambda X$.

$$f\text{正定} \Rightarrow 0 < X^T AX = (AX)^T X = \lambda \|X\|^2$$
$$\Rightarrow \lambda > 0;$$

②⇒③ 显然成立;

③⇒④ f 的正惯性指数 $p = n$, 由惯性定理及推论，存在可逆线性变换 $X = CY$ 使得

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2,$$

该规范形的矩阵为 E, 故 $C^T AC = E$;

④⇒⑤ 令 $P=C^{-1}$, 则 P 可逆且

$$C^TAC=E\Rightarrow A=P^TP;$$

⑤⇒① 矩阵 P可逆$\Rightarrow PX\neq 0,\forall X\neq 0$

$$\Rightarrow f=X^TAX=X^TP^TPX=(PX,PX)>0$$

$\Rightarrow A$ 和 f 正定.

思考 根据以上定理，能否给出二次型 f 或实对称矩阵 A 负定的充要条件?

定义 称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 位于**左上角**的子式

$$|A_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

为 A 的 $k(k=1,2,\cdots,n)$ 阶**顺序主子式**.

霍尔魏茨定理 n元实二次型 $f=X^TAX\ (A=A^T)$ 或 n 阶实对称矩阵 A 正定的充要条件为: A的各阶顺序主子式均大于零.

证明略.

例题 已知三元二次型

$$f = {x_1}^2 + 2{x_2}^2 + (1-t)\,{x_3}^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$$

为正定二次型，求 t 的取值范围.

解答 f 的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{bmatrix}$, 则

f 正定 $\Leftrightarrow A$ 正定

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |A_1| = 1 > 0 \\ |A_2| = 2 - t^2 > 0 \\ |A_3| = t\,(t+1)\,(t-2) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 < t < 0 \Leftrightarrow t \in (-1, 0).$$

正定矩阵的性质

定理 设A为 n阶正定矩阵.

① $|A|>0,\ A$可逆.

② $sA(s>0),\ A^k(k\in\mathbb{Z}),\ A^{-1},\ A^*$为正定矩阵.

③ 若矩阵$B\simeq A$, 则B为正定矩阵.

④ 若 B 为n阶半正定矩阵，则 $A+B$为正定矩阵，且$|A+B|>|A|+|B|$.

⑤ 若B 为正定矩阵，且 B与A 可交换，则AB 为正定矩阵.

⑥ 正定矩阵的主对角元必大于零.

性质6的证明 因$A=(a_{ij})_{n\times n}$正定，则对

只有第 i 分量不为零的$e_i=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$, 有

$$(e_i)^T Ae_i>0\Rightarrow a_{ii}>0,\ \forall i=1,2,\cdots,n.$$

提醒 性质6的逆不成立. 如 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$.

例题 设 A 为正定矩阵，证明：$|E+A|>1.$

证明 设 A 的全部特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,$

则 $E+A$ 的全部特征值为

$$1+\lambda_1,1+\lambda_2,\cdots,1+\lambda_n.$$

$$A\text{正定}\Rightarrow \lambda_i>0,\ i=1,2,\cdots,n$$

$$\Rightarrow 1+\lambda_i>1,\ i=1,2,\cdots,n$$

$$\Rightarrow |E+A|=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)>1.$$

例题 设$A_{n\times n}$为正定矩阵，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in\mathbb{R}^n$满足$\alpha_i\neq 0,\ \alpha_i^TA\alpha_j=0,\ i\neq j,\ \forall\, i,j=1,2,\cdots,r$

证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

证明 设$\sum\limits_{j=1}^{r}k_j\alpha_j=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0,$ 则

$$0=\alpha_i^TA\sum_{j=1}^{r}k_j\alpha_j=\sum_{j=1}^{r}k_j\alpha_i^TA\alpha_j=k_i\alpha_i^TA\alpha_i \quad \langle 1\rangle$$

因A正定且$\alpha_i\neq 0$，故有

$$\alpha_i^TA\alpha_i>0,\ \forall\, i=1,2,\cdots,r \qquad \langle 2\rangle$$

联立$\langle 1\rangle$ $\langle 2\rangle$两式得 $k_i=0,\ i=1,2,\cdots,r.$

所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关 .

四、例题选讲

1. A, B为同阶方阵且有相同的特征值，则（　　）.

$\mathbb{A}.A \sim B$　$\mathbb{B}.A \simeq B$　$\mathbb{C}.A = B$　$\mathbb{D}.|A| = |B|$

解答 答案$\mathbb{D}$必然正确，$\mathbb{A}, \mathbb{B}$不正确，反例如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

A, B有相同特征值，但 $A \nsim B$, $A \not\simeq B$.

若$A \simeq B$, 因 B对称，则 A对称，矛盾！

若$A \sim B$, 因 B为数量阵，则 $A = B$，矛盾！

2. 实对称矩阵 A 满足 $A^3-6A^2+11A-6E=0$,

证明： A 是正定阵.

提示：特征值全正的实对称矩阵必正定!

3. 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,

则 A 与 B(　　).

(A) 合同且相似　　(B) 不合同但相似

(C) 合同但不相似　(D) 不合同也不相似

4. 下列矩阵中，与 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 合同的有(　　　　).

(A) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

5. 设 A为 n 阶实对称阵， $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是A 的分别属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的两两正交的单位特征向量. 证明：

$$A = \lambda_1\alpha_1\alpha_1^T + \lambda_2\alpha_2\alpha_2^T + \cdots + \lambda_n\alpha_n\alpha_n^T$$

提示 由题知 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 为正交矩阵，使得 $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$， 从而

$$\begin{aligned} A &= P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)P^{-1} \\ &= P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)P^T \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1\alpha_1\alpha_1^T + \lambda_2\alpha_2\alpha_2^T + \cdots + \lambda_n\alpha_n\alpha_n^T \end{aligned}$$

6. 设 A为 n 阶实对称阵，$\mathrm{rank}(A)=r$. 证明：A可表为 r 个秩为1的实对称矩阵的和.

提示 由题知存在正交矩阵 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 使得$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)$,

$$A=P\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)P^{-1}$$

$$=P\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)P^{T}$$

$$=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_r^T \\ \alpha_{r+1}^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T\end{bmatrix}$$

$$=\lambda_1\alpha_1\alpha_1^T+\lambda_2\alpha_2\alpha_2^T+\cdots+\lambda_r\alpha_r\alpha_r^T$$

7. 设 A为 n 阶实矩阵，且 $A^2 = kA(k \neq 0)$.

证明： A必能对角化.

提示 $A^2 = kA$ 表明A只有特征值 $0, k$.

$$A^2 = kA \Rightarrow \mathrm{r}(kE - A) + \mathrm{r}(0E - A) = n$$

$$\Rightarrow [n - \mathrm{r}(kE - A)] + [n - \mathrm{r}(0E - A)] = n$$

$\Rightarrow$ A的特征值的几何重数之和等于n

$\Rightarrow$ A有 n 个线性无关的特征向量

$\Rightarrow$ A必能对角化.

8. 设 A为 n 阶实对称阵，证明：存在 n 阶矩阵 B使得$AB+B^TA$正定的充要条件是：A 可逆.

提示 充分性 A 可逆且实对称

$$\Rightarrow A \sim \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n), \lambda_i \neq 0$$

$$\Rightarrow A^2 \sim \operatorname{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2), \lambda_i^2 > 0$$

$\Rightarrow A^2$正定 $\Rightarrow A^2 + A^TA = 2A^2$ 正定

$\Rightarrow AB + B^TA$ 正定，其中 $B = A$.

必要性 反证 若A不可逆$\Rightarrow AX=0$有非零解

$\Rightarrow$存在$X \neq 0$使得$AX=0 \Rightarrow$存在$X \neq 0$使得

$$X^T(AB+B^TA)X = (AX)^T(BX) + (BX)^T(AX) = 0,$$

这与$AB+B^TA$正定矛盾，故 A可逆.

二次型的系统研究是从18世纪开始的，它起源于对二次曲线和二次曲面的分类问题的讨论，将二次曲线和二次曲面的方程变形，选择主轴方向的轴作为坐标轴以简化方程的形状.

Euler在他的《引论》（1748年）中就讨论了用旋转变换化二次曲面方程为标准形的方法.

Cauchy在他的著作中曾给出结论：当方程式为标准形时，二次曲面用二次项的符号来进行分类，还讨论化一般二次型为标准形的方法.

然而，那时并不太清楚，在化成标准形时，为何总是得到同样数目的正项和负项.

19世纪中叶，英国数学家Sylvester回答了这个问题，并于1852年给出了n个变数的二次型的惯性定律，并用反证法给出了严格的证明.

1801年，Gauss在《算术研究》中引进了二次型的正定、负定、半正定、半负定等术语.

1868年，Weierstrass（维尔斯特拉斯，1815-1897）较系统地完成了二次型的理论.

二次型的理论在最优化、物理学、几何学、概率论等学科中都有着广泛的应用.