第三节 行列式的应用

一、用行列式求逆矩阵

二、crammer 法则

三、行列式的几何意义及应用

一、用行列式求逆矩阵

先回顾一下第二节的基本引理.

引理 设 A 为 n 阶方阵，则对 $\forall i, j = 1, 2, \cdots, n$,

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = \begin{cases} |A|, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

也即

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})\begin{bmatrix} A_{k1} \\ A_{k2} \\ \vdots \\ A_{kn} \end{bmatrix} = \begin{cases} |A|, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

以上 n^2 个公式可以写成如下矩阵等式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & |A| \end{bmatrix} = |A|E$$

因行列地位平等，如下结论也成立.

命题 设 A 为 n 阶方阵，则对 $\forall i, j = 1, 2, \cdots, n$,

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = \begin{cases} |A|, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

也即

$$(A_{1k}, A_{2k}, \cdots, A_{nk}) \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \begin{cases} |A|, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

以上 n^2 个公式可以写成如下矩阵等式

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & |A| \end{bmatrix} = |A|E$$

定义 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, A_{ij} 表 a_{ij} 在 $|A|$ 中的代数余子式 $,i,j=1,2,\cdots,n(n\geq 2)$, 称矩阵

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

为矩阵 A 的**伴随矩阵**，记为 A^*.

提醒 注意 A 和 A^* 元素的下标不同.

重要结论 $\boxed{AA^*=A^*A=|A|E.}$

提醒 若 A 为 n 阶方阵，可定义 $\boxed{A^{**} = (A^*)^*.}$

类似地，可定义 $A^{***}, A^{****}, \cdots$.

定理 若 A 为 n 阶方阵，则

$$\boxed{A \text{ 可逆} \Leftrightarrow |A| \neq 0}$$

且当 A 可逆时，其逆为 $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*}$

提醒 求逆矩阵的方法之一：伴随矩阵法.

例题 设 $A=(a_{ij})_{2\times 2}$, 求 A^*.

设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, 求 A^{-1}.

提醒 对二阶方阵而言，有如下结论：

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}^{**} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}.$$

提醒 对三阶或三阶以上的方阵，无以上结论.

命题 对任意 n 阶方阵 A，有 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

证明 (1) 若 $|A| = 0$，则 $|A^*| = 0$.

若 $|A^*| \neq 0$，则 A^* 可逆；由 $A^*A = |A|E$ 得 $A = 0$. 从而 $A^* = 0$. 这与 $|A^*| \neq 0$ 矛盾，所以 $|A^*| = 0$.

此时，$|A^*| = 0 = |A|^{n-1}$，结论成立.

(2) 若 $|A| \neq 0$. 由 $A^*A = |A|E$ 有

$$|A^*A| = ||A|E| \Rightarrow |A| \cdot |A^*| = |A|^n$$

$$\Rightarrow |A^*| = |A|^{n-1}.$$

综上，对任意 n 阶方阵 A，有 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

伴随矩阵的性质

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times n}$, k 为一个数，则

(1) $(kA)^*=k^{n-1}A^*$;

(2) $(A^T)^*=(A^*)^T$;

(3) $|A^*|=|A|^{n-1}$;

(4) 若 A 可逆，则 $A^*=|A|A^{-1}$ 可逆，且

$$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}=|A|^{-1}A;$$

(5) $(AB)^*=B^*A^*$.

(6) $AA^*=A^*A=|A|E$.

二、克莱姆(crammer)法则

定理 未知量个数与方程个数相同的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (*)$$

中，若它的系数行列式

$$d = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则线性方程组 (*) 存在唯一解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1/d \\ d_2/d \\ \vdots \\ d_n/d \end{bmatrix} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix},$$

其中，对任意的 $k = 1, 2, \cdots, n$,

$$d_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 令 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$，则方程组 $(*)$ 即为矩阵方程 $AX=\beta$. 因 $|A|\neq 0$，故 A 可逆，从而方程 $AX=\beta$ 有唯一解

$$X_0=A^{-1}\beta=|A|^{-1}A^*\beta$$

$$=|A|^{-1}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{d}\begin{bmatrix} b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1} \\ b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots+b_nA_{nn} \end{bmatrix}=\frac{1}{d}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}.$$

例题 解线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$

解答 因系数行列式

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0,$$

由Cramer 法则知方程组有唯一解.

经计算知

$$d_1=\begin{vmatrix}-3 & 1 & -1 & 1\\ 4 & -1 & 1 & 2\\ 7 & 1 & 2 & -1\\ 6 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=-13,\quad d_2=\begin{vmatrix}3 & -3 & -1 & 1\\ 1 & 4 & 1 & 2\\ 2 & 7 & 2 & -1\\ 1 & 6 & 2 & 1\end{vmatrix}=26,$$

$$d_3=\begin{vmatrix}3 & 1 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 7 & -1\\ 1 & 0 & 6 & 1\end{vmatrix}=-39,\quad d_4=\begin{vmatrix}3 & 1 & -1 & -3\\ 1 & -1 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 2 & 7\\ 1 & 0 & 2 & 6\end{vmatrix}=13,$$

原方程组的解为 $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\dfrac{1}{d}\begin{bmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\\ d_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 3\\ -1\end{bmatrix}.$

关于 Cramer 法则的提醒

1. Cramer法则仅适用于系数矩阵为方阵的情形.
2. 用Cramer法则解线性方程组计算量太大，不现实，理论意义：给出了解与系数的明显关系.

Cramer法则的推论

设 A为n 阶方阵.

(1) $AX=\beta$ 有唯一解 $\Leftrightarrow |A|\neq 0.$

$AX=\beta$ 无解或有两个以上的解 $\Leftrightarrow |A|=0.$

(2) $AX=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow |A|\neq 0.$

$AX=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A|=0.$

例题 问 λ 取何值时，如下方程组有非零解？

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

解答 因齐次线性方程组有非零解，等价于其系数行列式必为零，故

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3),$$

当 $\lambda = 0$或 2或 3 时，方程组有非零解.

例题 求$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$的所有元素的代数余子式之和.

提示 $A^*=|A|A^{-1}=-\frac{1}{24}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} A_{ij} = -\frac{1}{24}(1+2+3+4) = -\frac{5}{12}.$$

例题 设 A, B 均为 n 阶方阵，$C=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$,

则 C 的伴随矩阵为（ ）.

(1) $\begin{bmatrix} |A|\,A^* & O \\ O & |B|\,B^* \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} |B|\,B^* & O \\ O & |A|\,A^* \end{bmatrix}$

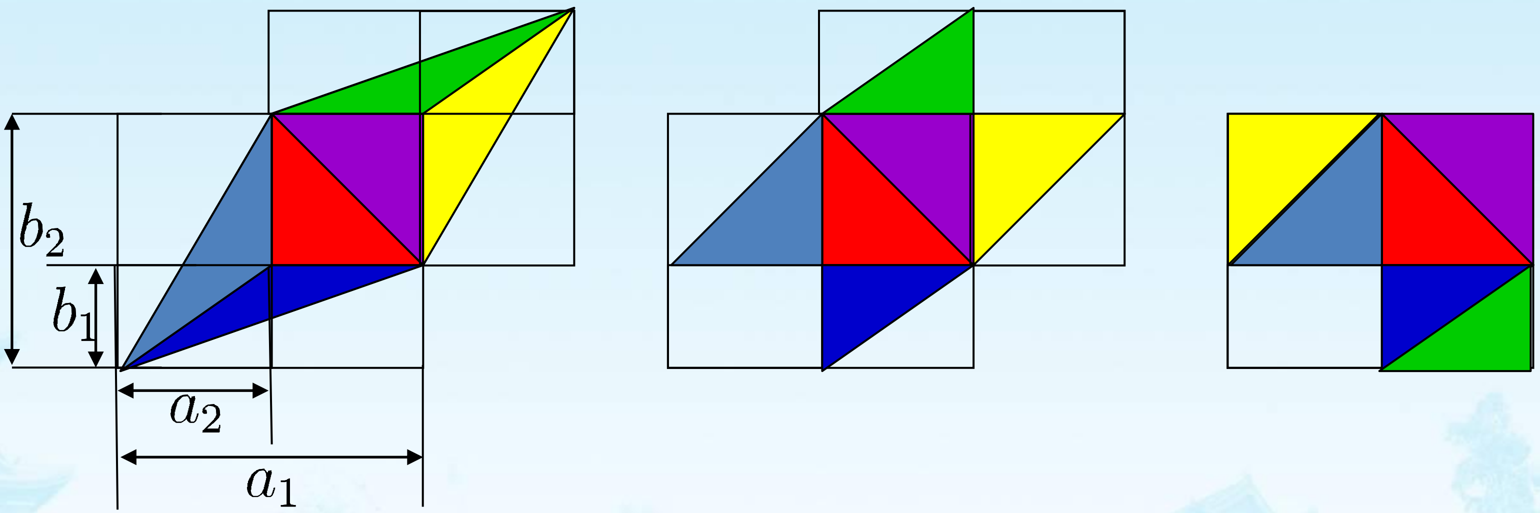
(3) $\begin{bmatrix} |A|\,B^* & O \\ O & |B|\,A^* \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} |B|\,A^* & O \\ O & |A|\,B^* \end{bmatrix}$

例题 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, B 满足 $A^*BA=2BA-4E$,

求 $|B|$. **答案** (4), -2

三、行列式的几何意义及应用

命题 若 A 是 2×2 矩阵，则由 A 的列向量确定的平行四边形的面积等于 $|\det A|$.



二阶行列式的几何意义：平行四边形的有向面积！

例题 求顶点为$(-2,-2),(4,-1),(6,4)$的三角形面积.

解答 设 $P=(-2,-2), Q=(4,-1), M=(6,4)$, 则

$$\overrightarrow{MP}=(-8,-6),\quad \overrightarrow{MQ}=(-2,-5).$$

从而，所求面积即为

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix}-8 & -2\\ -6 & -5\end{bmatrix}\right|=\frac{1}{2}\times|28|=14.$$

命题 若 A 是 3×3 矩阵，则由 A 的列向量确定的平行六面体的体积等于 $|\mathrm{det}A|$.

例题 求以原点, $(1,0,-2),(1,2,4),(7,1,0)$ 为顶点的平行六面体的体积.

解答 所求体积即为 $\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix}\right| = |-22| = 22.$

第四章 向量空间

第一节 向量的定义及运算

一、向量的定义

二、向量的线性运算及向量空间

三、向量组的线性组合

一、向量的定义

定义 由数域 $\mathbb{P}$ 中的 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 构成的一个有序数组

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \text{ 或 } \beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

称为数域 $\mathbb{P}$ 上的一个 n 维**向量**，a_i 为 α 和 β 的第 i 个**分量**, $i = 1, 2, \cdots, n.$

α 为 n 维**行向量**， β 为 n 维**列向量**.

n 维行向量和 n 维列向量统称为 n **维向量**.

提醒 实数域 $\mathbb{R}$ 上的向量称为**实向量**，如

$$\alpha = (2, 0, -3)$$

复数域 $\mathbb{C}$ 上的向量称为**复向量**，如

$$\beta = (i, 1 - i, 2 + 3i)$$

未经特别说明，本课程的向量均为实向量.

提醒 若 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，称 $(-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$ 为 α 的**负向量**，记为 $-\alpha$.

提醒 分量全为零的向量称为**零向量**，记作 0.

同型向量 若向量 α 与 β 维数相同，且都为行向量或都为列向量，则称 α 与 β 为**同型向量**.

相等向量 若向量 α, β 满足：

(1) 是同型向量；

(2) 相同位置的分量相等，

则称 α 与 β **相等**.

向量组 由若干个同型向量构成的集合.

设 A 为 $s\times n$ 矩阵，

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix}$$

矩阵 A的第 i个行向量 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$

$$i=1,2,\cdots,s.$$

矩阵 A的行向量组 $\Sigma_{\mathrm{r}}:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$

矩阵的行向量组中：向量个数 = 矩阵的行数

向量维数 = 矩阵的列数

设 A 为 $s \times n$ 矩阵，

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$$

矩阵 A的第 j个列向量 $\beta_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{sj})^T$

$$j = 1, 2, \cdots, n.$$

矩阵 A的列向量组 $\Sigma_c : \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$

矩阵的列向量组中：向量个数 = 矩阵的列数

向量维数 = 矩阵的行数

二、向量的线性运算及向量空间

定义 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$.

加法 称向量 $(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$ 为 α 与 β 的和，记作

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n).$$

数乘 k 为一个数，称 $(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$ 为 k 与 α 的**数量乘积**或**数乘**，记作

$$k\alpha=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n).$$

提醒 向量的加法以及数与向量的数乘统称为向量的线性运算.

向量的线性运算是矩阵的线性运算的特殊情形.

对任意的 n 维向量 α,β,γ 及任意的数 $k,l,$ 向量的线性运算满足下面八条基本的运算规律：

向量的线性运算规律

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

(3) $\alpha+0=\alpha$

(4) $\alpha+(-\alpha)=0$

(5) $1\alpha=\alpha$

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$

(7) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

(8) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

定义 在数域 $\mathbb{P}$ 上的全体 n 维行向量构成的集合

$$\mathbb{P}^{1\times n} \triangleq \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) : a_i \in \mathbb{P}\}$$

里，如前面那样定义了向量加法，$\mathbb{P}$ 中数与向量的数乘运算时，则称 $\mathbb{P}^{1\times n}$ 构成了数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维行向量空间；

类似地，可定义 $\mathbb{P}$ 上的 n 维列向量空间.

提醒 n 维行向量空间和 n 维列向量空间统称为 n 维向量空间，记为 $\mathbb{P}^n$.

n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$　　n 维复向量空间 $\mathbb{C}^n$

例题 设 $\alpha_1 = (1, -1, 2)$, $\alpha_2 = (1, 2, 0)$, $\alpha_3 = (1, 0, -3)$,

求 $\alpha = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 12\alpha_3$.

解答

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1 - 2\alpha_2 + 12\alpha_3.\\ &= (1, -1, 2) - 2(1, 2, 0) + 12(1, 0, -3)\\ &= (1 - 2 + 12, -1 - 4 + 0, 2 - 0 - 36)\\ &= (11, -5, 34).\end{aligned}$$

三、向量组的线性组合

定义 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 为一向量组，称

$$\sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s,$$

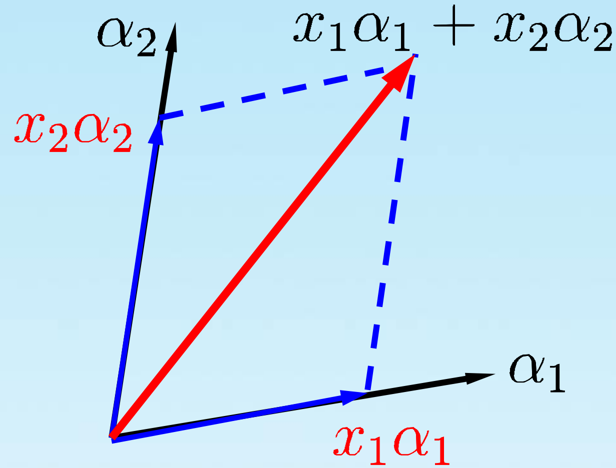
为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个**线性组合**，其中数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 称为该线性组合的**组合系数**，简称**系数**.

提醒 若向量 β 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的线性组合，即存在数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$, 使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s,$$

称 β 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ **线性表出**.

两向量的线性组合的几何示意图



定义 设 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_s \in \mathbb{R}^n$， 由 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_s$ 的所有可能的线性组合构成的集合称为由该向量组**张成或生成的子集**，记为

$$\operatorname{span}\{\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_s\} = \left\{ \sum_{i=1}^{s} k_i \alpha_i : k_1, k_2, \cdots, k_s \in \mathbb{R} \right\}$$

思考 一个非零向量张成的子集的是什么？

思考 若向量 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \alpha$ 与 β 不平行，则以下集合分别表什么？

$$Q_1 = \operatorname{span}\{\alpha, \beta\}$$

$$Q_2 = \{k\alpha + l\beta : k, l \in \mathbb{R}, k > 0, l > 0\}$$

$$Q_3 = \{k\alpha + l\beta : k, l \in \mathbb{R}, k > 0, l > 0, k + l = 1\}$$

提醒 若 $\alpha \neq 0$，则 $\operatorname{span}\{\alpha\}$ 表示由 α 确定的直线. 若向量 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ 且不共线，则 $\operatorname{span}\{\alpha, \beta\}$ 表示由向量 α 和 β 确定的平面.

提醒 任何 n 维行向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 都可表为向量组

$$\begin{aligned}\varepsilon_1&=(1,0,\cdots,0),\\ \varepsilon_2&=(0,1,\cdots,0),\\ &\vdots\\ \varepsilon_n&=(0,0,\cdots,1)\end{aligned}$$

基本向量组

的一个线性组合，且表出法唯一，为

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}a_i\varepsilon_i=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n.$$

提醒 任何 n 维列向量 $\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ 均可表为向量组

$$\zeta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \zeta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \zeta_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

基本向量组

的一个线性组合，且表出法唯一，为

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} b_i \zeta_i = b_1 \zeta_1 + b_2 \zeta_2 + \cdots + b_n \zeta_n.$$

定理 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta$ 为一向量组， 则以下两个命题等价：

(1) β能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出；

(2) 线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 有解.

提醒 向量组中的每一个向量都可以由向量组自身线性表出.

例题 向量 $\beta=\begin{bmatrix}7\\4\\-3\end{bmatrix}$能否写成 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\-5\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\5\\6\end{bmatrix}$

的线性组合?

解答 问题即判断 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=\beta$是否有解?

用初等行变换将增广矩阵化成行最简形:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\beta)=\begin{bmatrix}1&2&7\\-2&5&4\\-5&6&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix},$$

方程组有（唯一）解，解为 $x_1=3,x_2=2,$

即 β 可写成 α_1和α_2 的线性组合：$\beta=3\alpha_1+2\alpha_2.$

提醒 判断 β 能否由向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性表出，即判断线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$$

有无解.

当 $\mathbb{R}^n$是列向量空间时，其增广矩阵为

$$(\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n, \beta).$$

当 $\mathbb{R}^n$是行向量空间时，因

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$$

$$\Leftrightarrow x_1\alpha_1^T + x_2\alpha_2^T + \cdots + x_n\alpha_n^T = \beta^T$$

故其增广矩阵为 $(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \cdots, \alpha_n^T, \beta^T)$.

例题 已知 $\alpha_1=(1,-2,3),\alpha_2=(5,-13,-3)$, 那么 $\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 为 $\mathbb{R}^3$中经过原点的平面.

问：向量 $\beta=(-3,8,1)$ 是否位于此平面中？

解答 考虑线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=\beta.$

线性方程组的增广矩阵经初等行变换，有

$$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\beta^T)=\begin{bmatrix}1&5&-3\\-2&-13&8\\3&-3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&5&-3\\0&-3&2\\0&0&-2\end{bmatrix},$$

显然方程组无解，即 β不在 $\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 中.

提醒 此处方程组的增广矩阵不是 $(\alpha_1,\alpha_2,\beta)$!

课堂练习 判定以下命题是否正确?

1. 零向量可以由任何一个向量组线性表示.
2. 一个向量组内的任何一个向量都可由这个向量组线性表示.