第六章 二次型

6.1 二次型及其矩阵表示

6.2 二次型化为标准形

6.3 正定二次型

第六章 二次型

第一节 二次型及其矩阵表示

一、二次型及其矩阵表示

二、可逆线性变换

三、矩阵的合同

一、二次型及其矩阵表示

二次型的“型”意指齐次多项式，故二次型就是二次齐次多项式.

定义 称系数取自于数域 $\mathbb{P}$ 的含有 n 个变量的二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = a_{11}x_1^2 &+ 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
&+ a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{二次型的一般表示}}$

为数域 $\mathbb{P}$ 上的一个 n 元**二次型**.

定义 只含平方项的二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$

称为**标准二次型**；

称各项系数为$1,-1$或 0 的标准二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_r^2$$

为**规范二次型**；其中 $r\le n.$

提醒 未经特别说明，本章讨论的二次型都为实二次型，即二次项系数均为实数的二次型.

设 $a_{ji}=a_{ij},\ i<j$, 则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$.

利用矩阵的乘法运算，二次型的一般形式可改为

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n)= &\ a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n \\
&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n \\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

二次型的矩阵表示

$$
=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
$$

如果令

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix},$$

则二次型的一般形式可改写为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX \quad \boxed{\text{矩阵表示}}$$

其中A为对称矩阵，称为**二次型 f 的矩阵**.

二次型 f 的秩：$\mathrm{rank}(f)=\mathrm{rank}(A)$

提醒 二次型与其矩阵一一对应！

提醒 标准二次型 $f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$ 的矩阵为对角阵

$$A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\mathrm{r}(f) = \mathrm{r}(A)$ 为数 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 中的非零数的个数.

提醒 规范二次型

$$f = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2$$

的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & O \end{bmatrix}$$

其中 $\mathrm{r}(f) = \mathrm{r}(A) = r.$

例题 写出如下二次型的矩阵及秩.

$$f=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}1&3&4\\1&4&-6\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}.$$

解答 令$B=\begin{bmatrix}1&3&4\\1&4&-6\\0&0&0\end{bmatrix}$，则该二次型的矩阵为

$$A=\frac{1}{2}(B+B^T)=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&4&-3\\2&-3&0\end{bmatrix},$$

该二次型的秩为$\operatorname{rank}(f)=\operatorname{rank}(A)=3.$

提醒 在上面例题中，虽然

$$f=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}1&3&4\\1&4&-6\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=X^TBX$$

但因B不对称，故它不是二次型f的矩阵；从而

$$\mathrm{rank}(f)\neq\mathrm{rank}(B)=2!$$

提醒 二次型的矩阵必须是对称矩阵!

二、可逆线性变换

在平面上，化二次曲线方程为标准形，实际上就是通过坐标轴的旋转来得到的，也即是用新变量的一次式代替原来的变量. 在此，我们仍沿用这种方法来化简一般二次型.

作变量代换

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

写成矩阵形式即为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{或} X = CY,$$

$$\text{其中} X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ C = (c_{ij})_{n\times n}, \ Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

$X = CY$ 表示的变量间的替换称为**线性变换**.

当C 可逆时，称这种线性变换为**可逆线性变换**，或者**满秩线性变换**，或**非退化线性变换**.

为什么要用可逆线性变换?

提醒 若线性变换
$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

不是可逆的，那么可能有的点就没有新坐标与之对应（该方程无解），而有的点却又有无穷多个新坐标与之对应，这样新二次就不能变回原二次型，这样的变换显然是没有意义的，所以我们要用可逆线性变换.

定理 对$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX \left(A = A^T\right)$
作可逆线性变换$X = CY$，则f化为

$$g(y_1, y_2, \cdots, y_n) = Y^T BY,$$

其中矩阵$B = C^T AC$为二次型g的矩阵.

证明 因 $B = C^T AC$，由题意有

$$f = X^T AX = Y^T \left(C^T AC\right) Y = Y^T BY$$

易证B对称. 因f是二次型，故$A \neq 0$.
又C可逆且$B = C^T AC$，于是$B \neq 0$. 故

$$g(y_1, y_2, \cdots, y_n) = Y^T BY$$

是二次型，对称矩阵B为g的矩阵.

三、矩阵的合同

定义 设A, B均为n阶方阵，若存在可逆阵C使得$B = C^T AC$, 则称A与B**合同**，记为$A \simeq B$.

合同的性质

1. 矩阵的合同关系是一种等价关系.

2.
$$\begin{tikzcd} & A \sim B \arrow[dr, Rightarrow] & \\ A\text{与}B\text{正交相似} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & A \cong B \\ & A \simeq B \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

3. $A \simeq B \Rightarrow \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B)$（保秩性）

4. $A \simeq B$且A对称，则B也对称：保对称性

5. $A \simeq B \Rightarrow |A|$与$|B|$ 同号（保号性）

定理 任一实对称矩阵都合同于一对角阵.

证明 设 A 为一实对称矩阵；因任意实对称矩阵总能正交相似对角化，故存在正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角阵；又 $P^{-1} = P^T$, 从而 $P^TAP = \Lambda$ ，即 $A \simeq \Lambda$. 得证.

推论 任意二次型都能经过可逆线性变换化为标准形.

思考 若 A 与 B 均为实对称矩阵，且 A 与 B 相似，那么， A 与 B 合同吗？