第二章　矩阵代数

1 矩阵与向量

2 矩阵的代数运算

3 逆矩阵与矩阵的初等变换

4 转置矩阵与一些重要矩阵

5 分块矩阵

第四节 转置矩阵

一、转置矩阵

二、对称与反对称矩阵

一、转置矩阵

定义 将矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$ 的行、列互换

得到的矩阵 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$, 称为矩阵 A

的**转置矩阵**，记为A^T或A'.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ a & b & c \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{转置}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & a \\ 2 & 5 & 8 & b \\ 3 & 6 & 9 & c \end{bmatrix} = A^T$$

$$\alpha = (1, a, b) \xRightarrow{\text{转置}} \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix} = \alpha^T$$

提醒 转置矩阵 A^T 的 (i,j) 元素就是原矩阵 A 的 (j,i) $(i=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots,s)$ 元素.

提醒 显然，矩阵与其转置矩阵未必同型！

矩阵转置的运算规律

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(3) $(kA)^T = kA^T$

(4) $(AB)^T = B^T A^T$

$(A_1 A_2 \cdots A_n)^T = A_n^T \cdots A_2^T A_1^T$

$(A^n)^T = (A^T)^n, \ n \in \mathbb{N}$

(5) A可逆，则A^T可逆且$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

证明 仅证明性质4 $(AB)^T = B^T A^T$.

不妨设 $A = (a_{ij})_{s\times n}, B = (b_{ij})_{n\times m}$.

(1) 易见$(AB)^T$与 $B^T A^T$同为 $m \times s$矩阵;

(2) 对任意的 $i = 1, 2, \cdots, m, t = 1, 2, \cdots, s$,

$(AB)^T$的(i, t)元素$[(AB)^T]_{it} = [(AB)]_{ti}$

$$= (a_{t1}, a_{t2}, \cdots, a_{tn}) \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{tk} b_{ki};$$

B^TA^T的(i,t)元素$[B^TA^T]_{it}$

$= (B^T$第i行$)(A^T$第t列$)$

$$= (b_{1i}, b_{2i}, \cdots, b_{ni}) \begin{bmatrix} a_{t1} \\ a_{t2} \\ \vdots \\ a_{tn} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{tk};$$

因 $\sum_{k=1}^{n} a_{tk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{tk}$, 故 $[(AB)^T]_{it} = [B^TA^T]_{it}$.

综上知，$(AB)^T = B^TA^T$.

例题 已知$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$, 求$(AB)^T$, B^TA^T.

解答 $AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 16 & 11\\ 28 & 19\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow (AB)^T=\begin{bmatrix}2 & 16 & 28\\ 1 & 11 & 19\end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow B^TA^T=(AB)^T=\begin{bmatrix}2 & 16 & 28\\ 1 & 11 & 19\end{bmatrix}.$$

二、对称与反对称矩阵

定义 设矩阵 A 为方阵.

(1) 若 $A^T = A$, 称 A 为**对称矩阵**;

(2) 若 $A^T = -A$, 称 A 为**反对称矩阵**.

提醒 设方阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 则

A 对称 $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}, \ \forall\, i, j = 1, 2, \cdots, n.$

A 反对称 $\Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji}, \ \forall\, i, j = 1, 2, \cdots, n.$

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & -3 \\ 6 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$ 三阶对称阵

对称矩阵的一般形式为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

<u>对角阵特点</u> 关于主对角线对称

$$B=\begin{bmatrix} 0 & -5 & 6 \\ 5 & 0 & -3 \\ -6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$ 三阶反对称阵

反对称矩阵的一般形式为

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

反对称阵特点 主对角元素必全为零.

关于主对角线反对称!

对称矩阵和反对称矩阵的性质

1）对称阵的和，数乘，任意次幂仍为对称矩阵.

2）反对称矩阵的和，数乘仍为反对称矩阵.

3）对任意方阵 $A, A^T+A, A+A^T$ 总对称,

$A-A^T, A^T-A$ 总反对称;

对任意矩阵 A, A^TA, AA^T 总对称.

4）任意对角阵都是对称阵.

5）任何方阵总可以表示为一个对称阵与一个反对称矩阵的和.

6）反对称矩阵的奇次幂仍为反对称矩阵;
反对称矩阵的偶次幂却为对称矩阵.

练习 设 A, B 皆为 n 阶方阵且

$$A^T = -A,\ B^T = B,\ C = AB + BA,$$

用转置运算的性质证明 C 为反对称阵.

例题 设 A, B 是两个 n 阶对称阵. 证明：

矩阵 A 与 B 可交换当且仅当 AB 是对称的.

例题 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为一个实矩阵且 $A \neq 0.$

证明：AA^T 为实对称矩阵且 $AA^T \neq 0.$

证明 易证 AA^T 为实对称阵.

因 $A \neq 0$, 则 A 至少有一行不全为零，不妨

设第 i 行元素 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ 不全为零，

则 AA^T 的主对角线上的第 i 个元素为

$$(AA^T)_{ii} = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \neq 0,$$

所以 $AA^T \neq 0$.

提醒 矩阵 AA^T 或 $A^T A$ 主对角元素的特殊性！

例题 设 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 满足 $X^TX=1$，

E 为 n 阶单位矩阵，且 $H=E-2XX^T$.

证明： H 是对称矩阵，且 $HH^T=E$.

证明

$$H^T=\left(E-2XX^T\right)^T=E^T-2\left(XX^T\right)^T$$
$$=E-2XX^T=H$$

$\Rightarrow H$是对称矩阵.

$$HH^T=H^2=\left(E-2XX^T\right)^2$$
$$=E-4XX^T+4\left(XX^T\right)\left(XX^T\right)$$
$$=E-4XX^T+4X\left(X^TX\right)X^T$$
$$=E-4XX^T+4XX^T=E.$$