第二章　矩阵代数

1 矩阵与向量

2 矩阵的代数运算

3 逆矩阵与矩阵的初等变换

4 转置矩阵与一些重要矩阵

5 分块矩阵

第五节　分块矩阵

一、分块矩阵

二、分块矩阵的运算

三、准对角阵

一. 分块矩阵的定义及分块法

定义 用**贯穿**整个矩阵的水平线或垂直线（通常不画出来）将矩阵分成若干个小矩阵，每一个小矩阵称为该矩阵的**子块**，以子块为元素按原先的顺序构成的矩阵称为**分块矩阵**.

将矩阵分割成分块矩阵的方法称为**矩阵的分块法**.

例题 $A=\left[\begin{array}{cc|cc}3 & 5 & 1 & 0\\ 2 & 8 & 0 & 1\\ \hline 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right] \longrightarrow A=\begin{bmatrix}A_{11} & E_2\\ 0_{2\times 2} & 2E_2\end{bmatrix}$

其中 $A_{11}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 2 & 8\end{bmatrix}$.

矩阵的一般分块方式

$$\begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\
A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{tr}
\end{bmatrix} & \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{matrix} \\
\begin{matrix} \quad n_1 & \quad n_2 & \quad \cdots & \quad n_r \end{matrix} &
\end{array}$$

其中 A_{ij} 为 $s_i \times n_j$ 矩阵 $,i=1,2,\cdots,t,j=1,2,\cdots,r.$

$s_1+s_2+\cdots+s_t=s,\ \ n_1+n_2+\cdots+n_r=n.$

矩阵的常用分块方式

1. 行分块法

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hdashline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hdashline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$$

$$\text{where } \alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),$$

$$\forall i=1,2,\cdots,m$$

2 列分块法

$$A=\left[\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right]=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$$

$$\text{where } \beta_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},\ j=1,2,\cdots,n.$$

二. 分块矩阵的运算

矩阵的分块原则

1. 在适当分块后，在矩阵运算中，可将子块当作“数”，象普通的以数为元素的矩阵一样运算.

2. 尽量使运算能简单方便. 在运算可行的情况下，适当照顾特殊矩阵：零矩阵，单位阵，数量阵、对角阵、三角阵等.

1. 分块矩阵的加法运算

将同型矩阵 A 与 B 按同样的方法分块

$$A=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1r}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2r}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{t1}&A_{t2}&\cdots&A_{tr}\end{bmatrix}&\begin{matrix}s_1\\s_2\\\vdots\\s_t\end{matrix}\\\begin{matrix}n_1&\quad n_2&\quad\cdots&\quad n_r\end{matrix}&\end{array}$$

$$B=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}&\cdots&B_{1r}\\B_{21}&B_{22}&\cdots&B_{2r}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\B_{t1}&B_{t2}&\cdots&B_{tr}\end{bmatrix}&\begin{matrix}s_1\\s_2\\\vdots\\s_t\end{matrix}\\\begin{matrix}n_1&\quad n_2&\quad\cdots&\quad n_r\end{matrix}&\end{array}$$

此时，对任意 i, j, A_{ij}与B_{ij}是同型矩阵，则

$$A+B=(A_{ij})_{t\times r}+(B_{ij})_{t\times r}=(A_{ij}+B_{ij})_{t\times r}$$

$$=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2r}+B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{t1}+B_{t1} & A_{t2}+B_{t2} & \cdots & A_{tr}+B_{tr} \end{bmatrix}$$

2. 分块矩阵的数乘运算

$$kA = k(A_{ij})_{t\times r} = (kA_{ij})_{t\times r}$$

$$= \begin{bmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1r} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ kA_{t1} & kA_{t2} & \cdots & kA_{tr} \end{bmatrix}$$

3. 分块矩阵的乘法运算

思考 要使得两个分块矩阵的乘法运算也与以数为元素的普通矩阵的乘法运算类似，两矩阵的分块方式应满足什么条件呢？

$$AB\text{的}(i,j)\text{子块} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots A_{is}B_{sj}$$

$$A_{ik}\text{ 的列数} = B_{kj}\text{的行数}$$

A的第 k列子块的列数 $=$ B的第 k行子块的行数

$$\forall k = 1, 2, \cdots, s.$$

左边矩阵列的分块法与右边矩阵行的分块法相同

若 $A_{s\times n}$的列的分块法与 $B_{n\times l}$ 的行的分块法一致:

$$A=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{tr} \end{bmatrix} & \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{matrix} \\ \boxed{\begin{matrix} n_1 & n_2 & \cdots & n_r \end{matrix}} & \end{array}$$

$$B=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1q} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rq} \end{bmatrix} & \boxed{\begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_r \end{matrix}} \\ \begin{matrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_q \end{matrix} & \end{array}$$

则矩阵 A 与 B 的乘积为

$$C = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{t1} & C_{t2} & \cdots & C_{tr} \end{bmatrix} & \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{matrix} \\ \begin{matrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_q \end{matrix} & \end{array}$$

其中 $C_{ij} = \sum_{k=1}^{r} A_{ik}B_{kj}, \forall i = 1, 2, \cdots, t;$

$$j = 1, 2, \cdots, q.$$

思考 设 $A=(a_{ij})_{s\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times t}$.

(1) 若$AB=O$, 则 B 的每一列都是线性方程组 $AX=O$ 的解吗？为什么？

(2) 经列分块，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 则 $AB=(\alpha_1 B,\alpha_2 B,\cdots,\alpha_n B)$对吗？为什么？

(3) 将 A 行分块为 $\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_s\end{bmatrix}$, 则$AB=\begin{bmatrix}\alpha_1 B\\ \alpha_2 B\\ \vdots\\ \alpha_s B\end{bmatrix}$ 对吗？为什么？

例题 设 $A=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_4 \end{bmatrix}$, 其中 A 的列分块法与 B 的行分块法一致，求 AB.

解答 由分块矩阵的乘法得

$$AB=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1B_1 & A_1B_2+A_2B_4 \\ 0 & A_4B_4 \end{bmatrix}$$

例题 设

$$A=\begin{bmatrix}-1&2&1&0&0\\4&1&0&1&0\\0&5&0&0&1\\3&0&0&0&0\\0&3&0&0&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0&0&0&2\\0&0&0&3\\2&1&-3&0\\1&-2&1&0\\0&1&4&0\end{bmatrix},$$

利用分块矩阵计算 AB.

解答 将 A,B 如下分块

$$A=\left[\begin{array}{cc:ccc}-1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1\\ \hdashline 3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}A_{11} & E\\ 3E & O\end{bmatrix},$$

$$B=\left[\begin{array}{ccc:c}0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ \hdashline 2 & 1 & -3 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}O & B_{12}\\ B_{21} & O\end{bmatrix}.$$

则有 $A_{11}B_{12}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & 1\\ 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 11\\ 15\end{bmatrix}$,

故有 $AB=\begin{bmatrix}A_{11} & E\\ 3E & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}O & B_{12}\\ B_{21} & O\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}B_{21} & A_{11}B_{12}\\ O & 3B_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -3 & 4\\ 1 & -2 & 1 & 11\\ 0 & 1 & 4 & 15\\ 0 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 9\end{bmatrix}.$$

4. 分块矩阵的转置运算

$$A^T = \left(A_{ji}^T\right)^T{}_{r\times t} = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{t1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{t2}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & A_{2r}^T & \cdots & A_{tr}^T \end{bmatrix}$$

特点：大转 + 小转

5. 分块矩阵的逆矩阵

例题 已知 A, B, C 分别为 m 阶方阵，n 阶方阵，$m \times n$ 矩阵，$M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$. 若 A, B 可逆，则 M 可逆，试求 M 的逆矩阵.

解答 按 M 的分块方式将 M^{-1}, E_{m+n} 分块得

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}, \quad E_{m+n} = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix}.$$

于是

$$M^{-1}M = E_{m+n}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X_1A & X_1C+X_2B \\ X_3A & X_3C+X_4B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1A = E_m \\ X_1C + X_2B = 0 \\ X_3A = 0 \\ X_3C + X_4B = E_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = A^{-1} \\ X_2 = -A^{-1}CB^{-1} \\ X_3 = 0 \\ X_4 = B^{-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

重要结论 $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$

思考 若 A, B 分别为 m, n 阶可逆方阵，下列矩阵可可逆吗？若可逆，逆矩阵是什么？

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = ? \qquad \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = ? \qquad \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & C \end{bmatrix}^{-1} = ? \qquad \begin{bmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

例题 问 $A=\begin{bmatrix}2&5&0&0\\1&8&0&0\\0&0&7&2\\0&0&4&2\end{bmatrix}$是否可逆？

若 A 可逆，求出 A 的逆矩阵.

练习 问 $A=\begin{bmatrix}0&1&2\\0&3&4\\5&6&7\end{bmatrix}$是否可逆？

若 A 可逆，求出 A 的逆矩阵.

三. 分块对角矩阵或准对角矩阵

定义 称形为 $A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{bmatrix}$ 的分块矩阵为分块对角矩阵或准对角阵，其中主对角线上的子块 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 均为方阵.

问题 如下分块法下的分块矩阵是准对角阵吗？

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

准对角阵？

准对角阵的乘法

设A与 B 为同型准对角阵，采用相同的分块法，

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{bmatrix},$$

则 $$AB=\begin{bmatrix} A_1B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_sB_s \end{bmatrix}.$$

准对角阵的幂

若$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{bmatrix}$为准对角阵，则

$$A^k = \begin{bmatrix} A_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s^k \end{bmatrix}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

准对角阵的逆矩阵

若每个子块 A_i 可逆，则 $\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{bmatrix}$可逆，

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s^{-1} \end{bmatrix}$$

思考 若子块 A_i 都可逆，$\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_s & & & \end{bmatrix}$ 可逆吗？

若可逆，其逆矩阵是什么？

$$\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_s & & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$$

例题 设 $A=\left[\begin{array}{cc|cc}3 & 4 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{array}\right]$, 求 A^4.

分块技巧
零 矩 阵
单位矩阵
对 角 阵

分析 采用分块矩阵法.

解答 将原矩阵分块为 $A=\begin{bmatrix}B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{bmatrix}$,

其中 $B_1=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{bmatrix}$, $B_2=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 2 & 2\end{bmatrix}$.

则有

$$B_1^2=\begin{bmatrix}3&4\\4&-3\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}5^2&0\\0&5^2\end{bmatrix},\quad B_1^4=\begin{bmatrix}5^4&0\\0&5^4\end{bmatrix},$$

$$B_2^2=\begin{bmatrix}2&0\\2&2\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}2^2&0\\2^3&2^2\end{bmatrix},\qquad B_2^4=\begin{bmatrix}2^4&0\\2^6&2^4\end{bmatrix}.$$

所以 $A^4=\begin{bmatrix}B_1^4&0\\0&B_2^4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5^4&0&0&0\\0&5^4&0&0\\0&0&2^4&0\\0&0&2^6&2^4\end{bmatrix}.$

练习 设 $A=\begin{bmatrix}2&2&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&1&-2&3\\0&0&-2&4&-6\\0&0&3&-6&9\end{bmatrix}$，求 $A^n(n\geq 2)$.

提醒 由于矩阵的加法和数乘比较简单，一般不需要分块．而矩阵的乘法比较繁复，所以分块计算有较大的实际意义.

练习 设 A 矩阵为 $m\times n$ 矩阵，对任意的 n 维列向量 X，有 $AX=O$. 证明：$A=O$.

练习 设 A,B 为 $m\times n$矩阵，对任意的 n 维列向量X, 有$AX=BX$. 证明：$A=B$.