第二章　矩阵代数

1 矩阵与向量

2 矩阵的代数运算

3 逆矩阵与矩阵的初等变换

4 转置矩阵与一些重要矩阵

5 分块矩阵

第一节　矩阵与向量

一、数域

二、矩阵与向量

三、线性方程组与向量

一、数域

引例 求方程 $(x^2+1)(x^2-2)=0$ 的解.

解答 显然，所给方程 $(x^2+1)(x^2-2)=0$

在有理数范围 $\mathbb{Q}$ 内无解；

在实数范围 $\mathbb{R}$ 内有两解：$x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$;

在复数范围 $\mathbb{C}$ 内有四解：

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{2},\quad x_{3,4}=\pm i.$$

提醒 对给定方程而言，其解的情况与取值范围有关.

设 $\mathbb{K}$ 是一个数集，$*$ 是定义在 $\mathbb{K}$ 上的一种运算.
称 $\mathbb{K}$ 对运算 $*$ **封闭**，如果对任意的 $a,b\in\mathbb{K}$,
总有 $a*b\in\mathbb{K}$.

定义 设复数集的子集 $\mathbb{P}$ 包含数0和1，且 $\mathbb{P}$ 对加，减，乘，除四种运算封闭，则称 $\mathbb{P}$ 为一个**数域**.

结论 整数集 $\mathbb{Z}$ 不是数域（关于除运算不封闭）；有理数集 $\mathbb{Q}$，实数集 $\mathbb{R}$，复数集 $\mathbb{C}$ 都是数域，分别称为**有理数域**，**实数域**，**复数域**.

思考 数集 $\mathbb{T}=\left\{a+\sqrt{3}b : a,b\in\mathbb{Q}\right\}$ 是数域吗？

二、矩阵和向量

1. 矩阵的引入

引例 某班级同学早餐情况

姓名	馒头	包子	鸡蛋	稀饭
周驰	4	2	2	1
柏芝	0	0	0	0
川普	4	9	8	6

姓名	馒头	包子	鸡蛋	稀饭
周驰	4	2	2	1
柏芝	0	0	0	0
川普	4	9	8	6

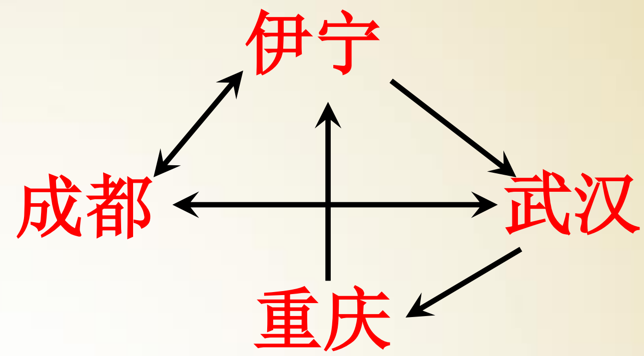
为了方便，常用下面的数表表示

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

这个数表就反映了学生的早餐情况

矩阵即一些数据的集合

引例2 某航空公司在四座城市之间的航线图



为方便，常用如下表格表示以上航线图

发站 \ 到站	成都	伊宁	武汉	重庆
成都		√	√	
伊宁	√		√	
武汉	√			√
重庆		√		

发站 \ 到站	成都	伊宁	武汉	重庆
成都	**0**	**1**	**1**	**0**
伊宁	**1**	**0**	**1**	**0**
武汉	**1**	**0**	**0**	**1**
重庆	**0**	**1**	**0**	**0**

为便于计算，把√改成1，空白处填 0 , 就得到一数表

去掉表具体含义的第一行第一列，即得如下数表

到站 发站	成都	伊宁	武汉	重庆
成都	**0**	**1**	**1**	**0**
伊宁	**1**	**0**	**1**	**0**
武汉	**1**	**0**	**0**	**1**
重庆	**0**	**1**	**0**	**0**

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

该数表反映了四城市间交通联接情况.

2. 矩阵的定义

一般地，涉及到两个集合且其元素间由某一数集相关联的场合，常常可用数表将其简洁明晰地表示出这种关联.

定义 数域$\mathbb{P}$中$s\times n$个数 $a_{ij}\,(i=1,2,\cdots,s,$ $j=1,2,\cdots,n)$排成的s行n列的长方形数表，称为数域$\mathbb{P}$上的$s\times n$**矩阵**，其中s，n分别为矩阵的行数和列数.

实矩阵或复矩阵 元素为实数或复数的矩阵.

提醒 除特别声明，本书中的矩阵均为实矩阵.

定义 若矩阵 A 与 B 有相同的行数，且列数也相同，则称矩阵 A 与 B 为**同型矩阵**.

设 $A=(a_{ij})_{s\times n}, B=(b_{ij})_{s\times n}$ 为同型矩阵，满足

$$a_{ij}=b_{ij}, \forall i=1,2,\cdots s, j=1,2,\cdots,n$$

称矩阵 A 与 B **相等**，记为 $A=B$.

负矩阵 称矩阵

$$(-a_{ij})_{s\times n}=\begin{bmatrix}-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{s1} & -a_{s2} & \cdots & -a_{sn}\end{bmatrix}$$

为矩阵 $A=(a_{ij})_{s\times n}$的负矩阵，记为 $-A$,

$$-A=(-a_{ij})_{s\times n}=\begin{bmatrix}-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{s1} & -a_{s2} & \cdots & -a_{sn}\end{bmatrix}.$$

3. 特殊矩阵

方阵 若矩阵 $A=(a_{ij})_{s\times n}$ 的行数和列数相等，

即 $s=n$，则称 A为 n 阶方阵，如

$$A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

副对角线

主对角线

$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 主对角元素

提醒 一阶方阵就是一个数！此时不加括号！

下三角阵 主对角线上方元素都为 0 的**方阵**

上三角阵 主对角线下方元素都为 0 的**方阵**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

下三角阵　　　　上三角阵

三角阵 上三角阵和下三角阵统称**三角阵**.

对角阵 既是上三角阵又是下三角阵的方阵

$$\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

主对角元素相同的对角阵称为**数量阵**

$$\begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix}$$

主对角元素都为1的对角阵称为**单位阵**

E_n

I_n

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

定义 元素全为 **0** 的矩阵称为零矩阵.

$m\times n$ 零矩阵可记作 $0_{m\times n}$ 或 0.

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=0_{2\times 3}$$

矩阵 $A\neq 0 \Longleftrightarrow$ 矩阵 A至少有一元素不为零

$\Longleftrightarrow$ 矩阵 A 至少有一行不全为零

$\Longleftrightarrow$ 矩阵 A 至少有一列不全为零

提醒 阶梯形矩阵和行最简形矩阵都是特殊矩阵.

4. 向量

向量的引入

确定小鸟的飞行状态，需要以下若干个参数：

小鸟身体的质量 m

小鸟身体的仰角 φ

小鸟鸟翼的转角 ϕ

鸟翼的振动频率 t

小鸟身体的水平转角 θ

小鸟重心在空间的位置参数 (x, y, z)

还有…

为确定小鸟的飞行状态，会产生一个有序数组

$$(m, \varphi, \phi, t, \theta, x, y, z, \cdots)$$

向量的定义 由 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 构成的有序数组称为一个 n 维向量，称 a_i 为该向量的第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 个分量.

向量的表示 常用小写希腊字母 α, β, γ 等表示.

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$ n 维**行**向量

$$\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$ n 维**列**向量

提醒 n 维行向量和 n 维列向量统称为 **n 维向量**.

5. 矩阵与向量

虽然矩阵与向量都是单独定义的，但从它们的定义可见，一个向量完全可以视作一个特殊的矩阵，具体来说，有

一个 n 维行向量可视为一个 $1\times n$ 矩阵

一个 n 维列向量可视为一个 $n\times 1$ 矩阵

而对任意一个矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 而言，

矩阵 A 的每一行都是一个 n 维行向量

矩阵 A 的每一列都是一个 m 维列向量