第二章　矩阵代数

第三节　逆矩阵与矩阵的初等变换

一、逆矩阵

二、矩阵的初等变换

三、用矩阵的初等变换求逆矩阵

一、可逆矩阵

1. 可逆矩阵的引入背景

① **数** 当数 $a \neq 0$ 时，存在数 b，使得

$$ab = ba = 1,$$

则 $b = a^{-1}$ 称为 a **的倒数**（或**逆**）.

② **矩阵** 若 A 为一给定矩阵，存在矩阵 B 使得

$$AB = BA = E,$$

则 B 称为 A **的逆矩阵**（或**逆**）.

提醒 矩阵与其逆矩阵可交换，故必为**同阶方阵**.
只有**方阵**才能谈可逆与否问题！

2. 逆矩阵的概念和性质

定义 设 A 为 n 阶矩阵，若存在 n 阶矩阵 B, 使得

$$AB = BA = E,$$

则称 A 是**可逆**的，称 B 为 A 的**逆矩阵**或**逆**.

提醒 定义中的 B 也可逆，矩阵 A 为 B 的逆矩阵，即 A 与 B 均可逆，且互为逆矩阵.

定理 若 A 是可逆矩阵，则 A 的逆矩阵是**唯一**的.

证明 设 B 和 C 均为 A 的逆矩阵，则有

$$AB = BA = E,\quad AC = CA = E$$

$$\Rightarrow B = EB \;= (CA)B \;= C(AB) \;= CE \;= C$$

$\Rightarrow A$ 的逆矩阵是唯一的.

提醒 若 A 可逆，则 A 有唯一的逆矩阵，记为 A^{-1}.

A 的逆矩阵**不可记作** $\dfrac{1}{A}$.

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E \qquad\qquad (A^{-1})^{-1} = A$$

提醒 若 A 为一阶可逆方阵， 则 A 的逆矩阵就是 A 的倒数，逆矩阵就是倒数概念的推广.

思考 若 A 为一可逆方阵， 有否

$$AB = E \overset{?}{\Leftrightarrow} BA = E$$

思考 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，则

$AB = E,\ BA \neq E,$ 与上一思考矛盾吗？

例题 求 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$的逆矩阵.

解答 设 $B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$使得$AB=E$，则

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a+c & 2b+d\\ -a & -b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}.$$ 经验证知 $BA=E.$

由定义知 $A^{-1}=B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}.$

例题 求 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$的逆.

解答 设$B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 使得 $AB=BA=E$，则

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ a & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

显然，这样的 B不存在，即 A 不可逆！

启示 非零是方阵可逆的必要非充分条件！

判断 如下说法正确吗？

可逆矩阵一定没有零行，也无零列.

性质 设方阵 A 可逆.

(1) A^{-1} 可逆且 $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) 若 $\lambda \neq 0$，则 λA 可逆，且

$$(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}.$$

定理 设 A 为 n 阶可逆矩阵.

(1) 对任意的矩阵 $B_{n\times m}$，矩阵方程 $AX = B$ 有唯一解 $X = A^{-1}B$.

(2) 对任意的矩阵 $B_{m\times n}$，矩阵方程 $XA = B$ 有唯一解 $X = BA^{-1}$.

定理 若同阶方阵 A, B 都可逆，则 AB 可逆且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

推论1 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为同阶可逆矩阵，则 $A_1A_2\cdots A_n$ 也可逆，且

$$(A_1A_2\cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

推论2 若 A 为可逆矩阵，n 为任意自然数，则 A^n 也可逆，且 $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

思考 推论2中的任意自然数能否改为任意整数？

例题 设矩阵A满足$A^2-2022A+2023E=0$，证明：$A-E$可逆，并求其逆.

证明 $A^2-2022A+2023E=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} (A-E)\left[-\frac{1}{2}(A-2021E)\right]=E \\ \left[-\frac{1}{2}(A-2021E)\right](A-E)=E \end{cases}$$

$\Rightarrow (A-E)$可逆且

$$(A-E)^{-1}=-\frac{1}{2}(A-2021E)=-\frac{1}{2}A+\frac{2021}{2}E.$$

思考 设矩阵 A 满足 $A^2-5A+6E=0$, 则 k 取何值时，$A+kE$一定可逆？

提示 $A^2-5A+6E=0$

$\Rightarrow (A+kE)[A-(k+5)E]=-(k+2)(k+3)E$

$\Rightarrow k\neq -2$且$k\neq -3$时，有

$$(A+kE)\left\{\frac{-1}{(k+2)(k+3)}[A-(k+5)E]\right\}=E$$

$\Rightarrow k\neq -2$且$k\neq -3$时，$A+kE$ 必可逆，且

$$(A+kE)^{-1}=\frac{-1}{(k+2)(k+3)}[A-(k+5)E]$$

二、初等变换和初等矩阵

初等变换的定义

1 对矩阵施行的以下变换称为矩阵的初等行变换

① 互换两行的位置； 行对换变换

② 用一非零数乘以某行； 行数乘变换

③ 将某行的倍数加到另一行. 行倍加变换

2 类似地可以定义矩阵的初等列变换；

列对换变换 列数乘变换 列倍加变换

3 矩阵的初等行、列变换统称矩阵的初等变换.

初等变换的记法及其逆变换

$$A \underset{r_i \leftrightarrow r_j}{\overset{\mathrm{r}_i \leftrightarrow \mathrm{r}_j}{\rightleftarrows}} B \qquad A \underset{1/k \cdot r_i}{\overset{k \cdot r_i}{\rightleftarrows}} B \qquad A \underset{r_j - k \cdot r_i}{\overset{r_j + k \cdot r_i}{\rightleftarrows}} B$$

$$k \neq 0$$

$$A \underset{c_i \leftrightarrow c_j}{\overset{c_i \leftrightarrow c_j}{\rightleftarrows}} B \qquad A \underset{1/k \cdot c_i}{\overset{k \cdot c_i}{\rightleftarrows}} B \qquad A \underset{c_j - k \cdot c_i}{\overset{c_j + k \cdot c_i}{\rightleftarrows}} B$$

对换变换的逆变换是对换变换本身！

数乘变换的逆变换仍是数乘变换！

倍加变换的逆变换仍是倍加变换！

初等变换的逆变换仍为初等变换，且类型相同.

定义 若矩阵 A 经过有限次初等变换变为矩阵 B，则称矩阵 A 与 B **等价**，记作 $A \cong B$.

提醒 矩阵的等价关系具有以下三条性质

① 反身性：矩阵与自身等价 $A \cong A$

② 对称性： $A \cong B \Rightarrow B \cong A$

③ 传递性： $A \cong B, B \cong C \Rightarrow A \cong C$

定义 若矩阵 A 经过有限次初等**行变换**化 B，则称矩阵 A 与 B **行等价**；若矩阵 A 经过有限次**列变换**化为 B，称 A 与 B **列等价**.

初等矩阵的定义

定义 对单位矩阵施行一次初等变换后得到的矩阵称为**初等矩阵**.

对应于矩阵的三类初等变换，初等矩阵有以下三类：

对换初等矩阵　数乘初等矩阵　倍加初等矩阵

① 对换初等矩阵

$$E \xrightarrow[c_i \leftrightarrow c_j]{r_i \leftrightarrow r_j} \begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 &&&& 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 &&&& 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{bmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow r_i \\ \\ \\ \\ \leftarrow r_j \\ \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & c_i & & & & c_j & & &
\end{array}
&
\end{array}
= P(i,j)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ x & y & u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & u & v \\ e & f & g & h \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{P}(1,3)A = B \qquad A \xrightarrow{\mathrm{r}_1 \leftrightarrow \mathrm{r}_3} B$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ x & y & u & v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & b & a & d \\ g & f & e & h \\ u & y & x & v \end{bmatrix}$$

$$A\mathrm{P}(1,3) = C \qquad A \xrightarrow{\mathrm{c}_1 \leftrightarrow \mathrm{c}_3} C$$

用初等对换矩阵左乘与行对换变换的关系：

$$
P(i,j)A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \mathrm{r}_i \\ \\ \mathrm{r}_j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}
$$

$P(i,j)$ 左乘 A $=$ 对 A 作初等行变换 $\mathrm{r}_i \leftrightarrow \mathrm{r}_j$

用初等对换矩阵右乘与列对换变换的关系：

$$A\,P(i,j)=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & c_i & & c_j & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sj} & \cdots & a_{si} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix} \end{array}$$

用 $P(i,j)$ 右乘 A

‖

对 A 作初等列变换 $c_i \leftrightarrow c_j$

② 数乘初等矩阵 $k \neq 0$

$$E \xrightarrow[k\mathrm{c}_i]{k\mathrm{r}_i} \mathrm{P}(i(k)) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \leftarrow \mathrm{r}_i \\ \uparrow \mathrm{c}_i & \end{array}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & k & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b & c & d\\ e & f & g & h\\ x & y & u & v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & b & c & d\\ ke & kf & kg & kh\\ x & y & u & v\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{P}(2(k))A = B \qquad A \xrightarrow{k\cdot \mathrm{r}_2} B$$

$$\begin{bmatrix}a & b & c & d\\ e & f & g & h\\ x & y & u & v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & k & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & kb & c & d\\ e & kf & g & h\\ x & ky & u & v\end{bmatrix}$$

$$A\mathrm{P}(2(k)) = C \qquad A \xrightarrow{k\cdot \mathrm{c}_2} C$$

用初等数乘矩阵左乘与行数乘变换的关系：

$$\mathrm{P}(i(k))\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \to \mathrm{r}_i \\ \\ \\ \end{matrix}$$

用 $\mathrm{P}(i(k))$ 左乘 A

‖

对 A 作初等行变换 $k\mathrm{r}_i$

用初等数乘矩阵**右乘**与**列**数乘变换的关系：

$$
AP(i(k)) = \begin{array}{ccccc} & & \mathrm{c}_i & & \\ \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & \cdots & k\,a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & k\,a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right. & & & & \left.\right] \end{array}
$$

用 $\mathrm{P}(i(k))$ **右乘** A

‖

对 A 作**初等列变换** $k\mathrm{c}_i$

$$
E \xrightarrow{r_i + k r_j}
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & \cdots & k & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & 0 & \cdots & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l}
\\
\\
\to r_i \\
\\
\to r_j \\
\\
\\
\end{array}
$$

③ 倍加初等矩阵$P(i,j(k))$

$$
E \xrightarrow{c_j + k c_i}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc}
 & & c_i & & c_j & & \\
\end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & \cdots & k & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & 0 & \cdots & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&k\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c\\e&f&g\\x&y&u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b&c\\e+kx&f+ky&g+ku\\x&y&u\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{P}(2,3(k))A=B \qquad A\xrightarrow{\mathrm{r}_2+k\mathrm{r}_3}B$$

$$\begin{bmatrix}a&b&c\\e&f&g\\x&y&u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&k\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b&c+kb\\e&f&g+kf\\x&y&u+ky\end{bmatrix}$$

$$A\mathrm{P}(2,3(k))=C \qquad A\xrightarrow{\mathrm{c}_3+k\mathrm{c}_2}C$$

用倍加初等矩阵左乘与行倍加变换的关系：

$$\mathrm{P}(i,j(k))\ A = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{r}_i \\ \\ \mathrm{r}_j \\ \\ \\ \end{array}$$

用 $\mathrm{P}(i,j(k))$ 左乘 A **=** 对 A 作初等行变换 $\mathrm{r}_i + k\mathrm{r}_j$

用倍加初等矩阵右乘与列倍加变换的关系：

$$
\begin{array}{c}
 \\
AP(i,j(k)) =
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \quad & c_i & \quad & c_j & \quad \end{array} \\
\begin{bmatrix} \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j}+ka_{1i} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{si} & \cdots & a_{sj}+ka_{si} & \cdots \end{bmatrix}
\end{array}
$$

用 $P(i,j(k))$ 右乘 A = 对 A 作初等列变换 $c_j + kc_i$

定理 对矩阵 $A_{s\times n}$ 施行一次初等行变换相当于用一个相应的初等矩阵（即由 s 阶单位阵作相同的初等行变换后的初等矩阵）左乘 A;

对矩阵 $A_{s\times n}$ 施行一次初等列变换相当于用一个相应的初等矩阵（即由 n 阶单位阵作相同的初等列变换后的初等矩阵）右乘 A.

课堂回答 $P(2,3)\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}P(1,3)=?$

A $P(2,3)$　B E　C $P(3,2)$　D $P(1,3)$

课堂练习 计算如下矩阵的乘积

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}^{2022}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2023}.$$

$$
\begin{tikzcd}
\text{初等变换} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{初等矩阵} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\text{初等逆变换} \arrow[r] & \text{初等逆矩阵}
\end{tikzcd}
$$

初等矩阵的性质

$$A \mathrel{\underset{r_i \leftrightarrow r_j}{\overset{r_i \leftrightarrow r_j}{\rightleftarrows}}} B \qquad A \mathrel{\underset{c_i \leftrightarrow c_j}{\overset{c_i \leftrightarrow c_j}{\rightleftarrows}}} B \qquad [P(i,j)]^{-1} = P(i,j)$$

$$A \mathrel{\underset{1/k \cdot r_i}{\overset{k \cdot r_i}{\rightleftarrows}}} B \qquad A \mathrel{\underset{1/k \cdot c_i}{\overset{k \cdot c_i}{\rightleftarrows}}} B \qquad [P(i(k)]^{-1} = P(i(1/k))$$

$$A \mathrel{\underset{r_i - k \cdot r_j}{\overset{r_i + k \cdot r_j}{\rightleftarrows}}} B \qquad A \mathrel{\underset{c_j - k \cdot c_i}{\overset{c_j + k \cdot c_i}{\rightleftarrows}}} B \qquad [P(i,j(k))]^{-1} = P(i,j(-k))$$

性质 初等矩阵为可逆矩阵，且逆矩阵为同类型的初等矩阵.

三、用初等变换求逆矩阵

定理 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则以下命题等价.

(1) A可逆.

(2) $AX=0$只有零解.

(3) A 的主元列数等于方阵 A的阶数 n.

(4) A 与单位阵行等价.

(5) A 可表为若干初等矩阵的乘积.

证明 我们将采用循环证明法.

$(1)\Rightarrow(2)$ 因 A 可逆，则 A^{-1} 存在．于是

$$AX=0\Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}0\Rightarrow X=0,$$

这表明 $AX=0$只有零解.

$$\boxed{\text{齐次方程组只有零解}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\boxed{\text{系数矩阵的主元列数}=\text{未知量个数}}$$

$(2)\Rightarrow(3)$ 因 $AX=0$ 只有零解，故 A 的主元列数等于未知量个数，即方阵 A 的阶数 n.

$(3)\Rightarrow(4)$ 因 A 的主元列数等于自己的阶数，则 A 的 n 个主元必然位于主对角线上，从而 A 的行最简形矩阵必为单位阵，故 A 与单位阵行等价.

$(4)\Rightarrow(5)$ A与单位阵行等价，则 A 能经多次行行变换化为单位阵，即存在多个初等矩阵 $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\cdots,\mathrm{P}_k$ 使得

$$\mathrm{P}_k\cdots\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1A=E.$$

因初等矩阵可逆，从而有

$$\mathrm{P}_k\cdots\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1A=E$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{P}_1^{-1}\mathrm{P}_2^{-1}\cdots\mathrm{P}_k^{-1}\mathrm{P}_k\cdots\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1A$$

$$=\mathrm{P}_1^{-1}\mathrm{P}_2^{-1}\cdots\mathrm{P}_k^{-1}E$$

$$\Rightarrow A=\mathrm{P}_1^{-1}\mathrm{P}_2^{-1}\cdots\mathrm{P}_k^{-1}$$

因 $\mathrm{P}_1^{-1},\mathrm{P}_2^{-1},\cdots,\mathrm{P}_k^{-1}$为初等矩阵，故 A能表为若干初等矩阵的乘积.

$(5) \Rightarrow (1)$ 由于初等矩阵是可逆矩阵，可逆矩阵的乘积是可逆矩阵，所以，若 A 能表为若干初等矩阵的乘积，则 A 可逆.

思考 以上命题的逆否命题是什么？

$\boxed{A \text{ 可逆} \Leftrightarrow AX=0 \text{ 只有零解}}$

$\Leftrightarrow$ A 的主元列数小于方阵 A 的阶数 n.

$\Leftrightarrow$ A 不与单位阵行等价.

$\Leftrightarrow$ A 不能表为若干初等矩阵的乘积.

推论 设 A, B 均为 n 阶方阵且满足 $AB = E$, 则 A与B 均可逆，且互为逆矩阵，$BA = E$.

证明 方阵 A, B 满足 $AB = E$, 可断定 B 可逆.

反证 若 B 不可逆，则存在 $X \neq 0$, 使得 $BX = 0$. 因 $AB = E$, 故

$$X = EX = (AB)X = A(BX) = A0 = 0,$$

这与 $X \neq 0$矛盾，所以B 可逆.

则 $A = A(BB^{-1}) = (AB)B^{-1} = EB^{-1} = B^{-1}$

也可逆；且 A 与 B 互为逆矩阵，$BA = E$.

推论 设 A, B均为n阶方阵且 A与B 行等价，则 A可逆 $\Leftrightarrow$ B可逆.

对角阵和副对角阵的可逆性问题

思考 设 $A=\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} & & & b_1 \\ & & b_2 & \\ & \iddots & & \\ b_n & & & \end{bmatrix}$.

A, B 可逆吗？若可逆，它们的逆是什么？

回答 A 可逆 $\Leftrightarrow a_i \neq 0, \forall i=1,2,\cdots,n$

B 可逆 $\Leftrightarrow b_i \neq 0, \forall i=1,2,\cdots,n$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1} \end{bmatrix}, \quad B^{-1}=\begin{bmatrix} & & & b_n^{-1} \\ & & \iddots & \\ & b_2^{-1} & & \\ b_1^{-1} & & & \end{bmatrix}.$$

利用初等变换求逆矩阵的理论依据和方法

当 A 可逆时，由 $\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k-1}\cdots\mathrm{P}_1A=E$ 有

$$A^{-1}=\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k-1}\cdots\mathrm{P}_1=\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k-1}\cdots\mathrm{P}_1E$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k-1}\cdots\mathrm{P}_1(A\vdots E)$$

$$=(\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k-1}\cdots\mathrm{P}_1A\vdots\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k-1}\cdots\mathrm{P}_1E)$$

$$=(E\vdots A^{-1})$$

即：对 $n\times 2n$矩阵 $(A\vdots E)$ 施行初等行变换，当把 A 化为 E 时，则原来的 E 就化为了 A^{-1}.

例题 求 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -2\end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

解答 $(A|E)=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-3r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 3 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -5 & 3 & -3 & 1 & 0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3+5r_2]{r_1-2r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{12}r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/12 & -5/12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_2+3r_3]{r_1-5r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/12 & 1/12 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/12 & -5/12 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} -1/6 & 5/12 & 1/12 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ -1/6 & -1/12 & -5/12 \end{bmatrix}.$$

利用初等变换求解矩阵方程

初等行变换法不但可以求逆矩阵，还可求 $A^{-1}B$.

$$A^{-1}(A \vdots B) = (A^{-1}A \vdots A^{-1}B) = (E \vdots A^{-1}B)$$

对$(A \vdots B)$施行初等行变换，当把 A化为E 时，则原来的E 就化为了$A^{-1}B$.

因 $A^{-1}B$ 是矩阵方程 $AX = B$的解，这意味着初等行变换法可用于求解矩阵方程 $AX = B$.

提醒 必须全程行变换，一次列变换也不能有！

提醒 求逆矩阵 A^{-1}就是求解矩阵方程 $AX = E$.

例题 解矩阵方程 $AX+B=X$，其中

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{bmatrix}.$$

解答 $AX+B=X\Rightarrow(E-A)X=B$

$$E-A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\1&0&2\end{bmatrix}$$

$$(E-A,B)=\left[\begin{array}{ccc|cc}1&-1&0&1&-1\\1&0&-1&2&0\\1&0&2&5&-3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[1/3 \cdot r_3]{-1 \cdot r_2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 + r_3} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

用矩阵的初等列变换求逆阵

可以证明，n 阶矩阵 A 可逆的充要条件为 A 可经一系列初等列变换化为单位阵；且同样的初等列变换将单位阵化为 A^{-1}. 于是得用初等列变换求逆矩阵的方法.

对矩阵 $\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix}$ 施行初等列变换，当 A 变成了 E 时，原来的 E 就变成 A^{-1}，即

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} E \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$

提醒 必须全程列变换，一次行变换也不能有！

初等列变换法不仅可求逆矩阵，还可以求 BA^{-1}.

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} A^{-1} = \begin{bmatrix} AA^{-1} \\ BA^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ BA^{-1} \end{bmatrix}$$

对矩阵 $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ 施行初等列变换，当 A 化为 E 时，

则原来的 B 就化为了 BA^{-1}.

因 BA^{-1} 就是矩阵方程 $XA = B$ 的解，这意味着可用初等列变换法求解矩阵方程 $XA = B$.

提醒 求 A^{-1} 相当于求解矩阵方程 $XA = E$.

例题 解矩阵方程 $XA=B$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&1&3\\4&3&2\\1&2&5\end{bmatrix}.$$

解答

$$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\\1&1&3\\4&3&2\\1&2&5\end{bmatrix}\xrightarrow[c_3+c_2]{c_1-c_2}\left[\begin{array}{ccc}0&1&0\\1&1&1\\2&-1&0\\\hline 0&1&4\\1&3&5\\-1&2&7\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[c_2 - c_3]{c_1 - c_3} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline -4 & -3 & 4 \\ -4 & -2 & 5 \\ -8 & -5 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}c_1} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline -2 & -3 & 4 \\ -2 & -2 & 5 \\ -4 & -5 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{c_1 + c_2} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -5 & 4 \\ -2 & -4 & 5 \\ -4 & -9 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -5 & 4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -9 & 7 & -4 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -9 & 7 & -4 \end{bmatrix}.$$

由第一章知识知，任何一个非零矩阵总可以只作行变换化为阶梯形（不唯一），再作行变换可进一步化为行最简形（唯一）.

$$A=\begin{bmatrix}3&2&0&5&0\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\1&6&-4&-1&4\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\cdots\rightarrow\begin{bmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&4&-3&-2&3\\0&0&0&-1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=B \text{ 阶梯形矩阵}$$

对 B 作进一步的初等行变换，得

$$A \to B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C$$

此处 C 就是行最简形矩阵，与 A, B 行等价！

对 C 再作行变换，结构不能变得更简单！

但是，若对 C 再作列变换，则有

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此处矩阵 D 就是规范型矩阵，与 A, B, C 等价！

定义 若一个矩阵具有如下特征：

① 位于左上角的子块是一个 r 阶单位阵；

② 其余的子块（若存在）都是零矩阵；

则称这样的矩阵为规范型矩阵.

规范型矩阵也称标准型矩阵.

提醒 规范型矩阵有如下四种具体形式：

$$E, \quad (E,O), \quad \begin{bmatrix} E \\ O \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} E & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

定义 若规范型矩阵 A 与矩阵 B 等价，则称 A 为矩阵 B 的等价标准型.

命题 任何一个非零矩阵都与一个规范型矩阵等价.

提醒 可逆矩阵的规范型矩阵必为单位阵！

命题 设 A 为 n 阶方阵，则

$$\boxed{A\text{可逆} \quad \Leftrightarrow A \cong E}$$

可逆矩阵的等价标准型矩阵就是单位阵.

命题 设 A, B 均为 $m\times n$ 矩阵，则

等价 $A \cong B \Leftrightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵 P，n 阶可逆矩阵 Q，使得 $PAQ = B.$

行等价 $A \overset{\text{row}}{\cong} B \Leftrightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵 P，使得 $PA = B.$

列等价 $A \overset{\text{col}}{\cong} B \Leftrightarrow$ 存在 n 阶可逆矩阵 Q，使得 $AQ = B.$

练习一：

1. 求$A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&5\end{bmatrix}$的逆.

$$\begin{bmatrix}1/3&0&0\\0&1/4&0\\0&0&1/5\end{bmatrix}$$

2. 求$A=\begin{bmatrix}0&0&3\\0&4&0\\5&0&0\end{bmatrix}$的逆.

$$\begin{bmatrix}0&0&1/5\\0&1/4&0\\1/3&0&0\end{bmatrix}$$

3. 求$\begin{bmatrix}&&&a_1\\&&a_2&\\&\iddots&&\\a_n&&&\end{bmatrix}$的逆.

$$\begin{bmatrix}&&&a_n^{-1}\\&&\iddots&\\&a_2^{-1}&&\\a_1^{-1}&&&\end{bmatrix}$$

练习二：

1\. 求$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$的逆. $\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$

2\. 求解$AX=B$，其中$A=\begin{bmatrix}3&5&5\\2&4&3\\-2&-2&-3\end{bmatrix}$,

$$B=\begin{bmatrix}1&2\\-2&1\\1&3\end{bmatrix}.\quad \begin{bmatrix}-21/2&-11\\-1/2&2\\7&5\end{bmatrix}$$

练习三：已知 $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\2&0&2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$

若 X 满足 $AX+2B=BA+2X$, 求 X^4.

提示

$$AX+2B=BA+2X$$

$$\Rightarrow X=(A-2E)^{-1}B(A-2E)$$

$$\Rightarrow X^4=(A-2E)^{-1}B^4(A-2E)$$

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A-2E=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\2&0&0\end{bmatrix},(A-2E)^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1/2\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$