第一章　线性方程组

1 线性方程组 高斯消元法与矩阵

2 行化简和阶梯形矩阵 解的存在性与唯一性

3 线性方程组的应用

第二节 行化简和阶梯形矩阵解的存在性与唯一性

一、阶梯形矩阵与行最简形矩阵

二、方程组有无解的判定

三、使用初等行变换求解线性方程组

一、阶梯形矩阵与行最简形矩阵

引例 请思考下列增广矩阵对应的线性方程组的解的情况是怎样的？

$$A=\begin{bmatrix}1&2&5&-1\\0&1&2&4\\0&0&8&11\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1&2&5&0\\0&1&7&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&2\\0&0&1&5\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&7\end{bmatrix}$$

定义 若矩阵某一行的所有元素都为零，称这样的行为**零行**；　否则，称该行为**非零行**.
非零行中最左边的非零元素称为该行的**非零首元（或首非零元）**.

提醒 矩阵的**零列**，**非零列**可类似定义！

例题 指出如下矩阵的各非零行及非零首元.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

非零行

零行

定义 设矩阵A有 $r(r\geq 1)$个非零行. 若A满足如下两个条件:

① 矩阵 A 的所有非零行都在任意一零行（若存在）之上;

② 每一非零首元所在的列，都在上一非零行非零首元所在列的右边;

非零首元所在列数随行数增加而严格增加

称A是一个有 r 级阶梯的**阶梯形矩阵**.

提醒 阶梯形矩阵中，同一列中位于非零首元下方的所有元素均为零.

提醒 形象地说，在阶梯形矩阵中可画出一条阶梯线，线的下方全为零；每级阶梯只有一行，阶梯级数即非零行的行数；阶梯线竖线后的第一个元素即该行的非零首元.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{2j_2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{rj_r} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

切记 一横线可以越多列，但一竖线只能越一行！

定义 称具有以下特点的矩阵为**行最简形矩阵**

① 矩阵是阶梯形矩阵；

② 矩阵每个非零行的非零首元均为1；

③ 各非零首元是所在列中唯一的非零元素.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

阶梯形矩阵　　　　行最简形矩阵

例题 如下矩阵哪些是阶梯形矩阵，哪些矩阵是行最简形矩阵？

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-2&1&5\\0&0&-1&2&1\\0&0&0&5&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}1&2&0&0&5\\0&0&1&0&-2\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1&2&1&-2\\0&-2&-2&2\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&2&1&-2\\0&0&0&2\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

零矩阵 元素全为零的矩阵称为*零矩阵*.

非零矩阵 不是零矩阵的矩阵称为*非零矩阵*.

命题 任何一个非零矩阵总可经初等行变换化为阶梯形矩阵，更进一步可化为行最简形.

证明略.

定义 矩阵 A经过有限次初等*行*变换变得的阶梯形矩阵称为 A的阶梯形（矩阵），A 的阶梯形中非零首元称为 A的*主元*，所在位置称为*主元位置*，所在的列称为 A的*主元列*.

例题 用初等行变换化下列矩阵为阶梯形，行最简形，并求主元列.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

解答 $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} r_2 - 3r_1 \\ r_3 - 2r_1 \\ \longrightarrow \\ r_4 - 3r_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -20 & 15 & 9 & -13 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{4} \cdot r_4} \begin{bmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -20 & 15 & 9 & -13 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -20 & 15 & 9 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + 5r_2]{r_3 + 3r_2} \begin{bmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

阶梯形矩阵

$$\xrightarrow[r_2+2r_3]{r_1+r_3}\begin{bmatrix}1&6&-4&0&2\\0&4&-3&0&-1\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}\cdot r_2}\begin{bmatrix}1&6&-4&0&2\\0&1&-3/4&0&-1/4\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

显然，矩阵的主元列分别是第1、第2、第4列.

$$\xrightarrow{r_1-6r_2}\begin{bmatrix}1&0&1/2&0&7/2\\0&1&-3/4&0&-1/4\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

行最简形矩阵

问题 对同一矩阵而言，不同的初等行变换化得的阶梯形未必相同！

① 在这些不同的阶梯形矩阵中，主元位置相同吗？主元相同吗？主元列相同吗？

② 同一矩阵化得的行最简形矩阵唯一吗？

提醒 矩阵的阶梯形不唯一！

矩阵的行最简形矩阵必唯一！

化非零矩阵为阶梯形、行最简形的方法和步骤：

1. 从矩阵最左边的非零列开始，主元位置在该列的第一行；若该位置已有元素为零，用行对换的变换把其变为非零得到主元.

2. 用行倍加变换将主元下方的元素化为零.

3. 忽略含有主元位置的行和它上面的所有行，对余下的子矩阵应用第一步到第三步，就可以得到阶梯形矩阵.

4. 若进一步要化得行最简形，在进行第二步时，用倍加变换将主元列中主元以外的所有元化为零，并用数乘变换将主元化为1.

用化矩阵为阶梯形的方法求解线性方程组.

例题 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ -x_1 - x_2 \qquad\qquad + x_5 = -1 \\ -2x_1 - 2x_2 + \qquad +3x_5 = 1 \\ \qquad x_3 + x_4 + 3x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 4 \end{cases}$$

解答 首先用初等行变换化增广矩阵为行最简形.

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
-2 & -2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\
1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4
\end{bmatrix}
\longrightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 2 & 5 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3
\end{bmatrix}
$$

$$
\longrightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\longrightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

写出行最简形对应的原方程组的同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_3 + x_4 = -6 \\ x_5 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - x_2 \\ x_3 = -6 - x_4 \\ x_5 = 3 \end{cases}$$

只有三个方程，解出三个未知量

其中变量 x_1, x_3, x_5 与阶梯形矩阵的主元位置对应，称为基本变量或首变量．在行最简形中，这三个变量分别只在一个方程中出现，可以将其解出来，显式表示.

方程组余下的变量 x_2, x_4 可以任意取值，因此它们被称为自由变量.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - x_2 \\ x_3 = -6 - x_4 \\ x_5 = 3 \end{cases}$$

注意 此例中自由变量的出现是因为线性方程组的主元列数少于未知量个数.

主元列数为3，基本变量为3，对应于3个方程，而未知量总个数为5，剩下的两个变量就成为了自由变量.

方程组相容时，自由变量个数=总未知量个数 —主元列数

注意 此例中解有无穷多个.

令 $x_2 = k_1, x_4 = k_2$，则

$$\begin{cases} x_1 = 4 - x_2 \\ x_3 = -6 - x_4 \\ x_5 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - k_1 \\ x_2 = k_1 \\ x_3 = -6 - k_2 \\ x_4 = k_2 \\ x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 + (-1) \cdot k_1 + 0 \cdot k_2 \\ x_2 = 0 + 1 \cdot k_1 + 0 \cdot k_2 \\ x_3 = -6 + 0 \cdot k_1 + (-1) \cdot k_2 \\ x_4 = 0 + 0 \cdot k_1 + 1 \cdot k_2 \\ x_5 = 3 + 0 \cdot k_1 + 0 \cdot k_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 + (-1)\cdot k_1 + 0\cdot k_2 \\ x_2 = 0 + 1\cdot k_1 + 0\cdot k_2 \\ x_3 = -6 + 0\cdot k_1 + (-1)\cdot k_2 \\ x_4 = 0 + 0\cdot k_1 + 1\cdot k_2 \\ x_5 = 3 + 0\cdot k_1 + 0\cdot k_2 \end{cases}$$

从而方程组的解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中 k_1, k_2 为任意常数.

例题 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ -x_1-x_2+x_5=-1 \\ -2x_1-2x_2+3x_5=1 \\ x_3+x_4+3x_5=3 \\ x_1+x_2+2x_3+2x_4+4x_5=4 \end{cases}$$

解答 先用初等行变换化增广矩阵为阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

写出阶梯形矩阵对应的原方程组的同解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ x_3+x_4+2x_5=0 \\ x_5=3 \\ 0=3 \end{cases}$$

矛盾方程

矛盾方程的出现意味着方程组无解.

矛盾方程的出现实际上是因为方程组的系数矩阵的主元列数少于增广矩阵的主元列数.

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

定理 一线性方程组是相容的

$\Leftrightarrow$ 增广矩阵的最右边一列不为主元列

$\Leftrightarrow$ 系数矩阵与增广矩阵主元列数相同

$\Leftrightarrow$ 增广矩阵的阶梯形矩阵中无 $(0 \ \cdots \ 0 \ b)$ 这样的行，其中 $b \neq 0$

$\Leftrightarrow$ 线性方程组中无矛盾方程.

思考 以上定理的逆否命题是什么？

定理 当线性方程组相容时，如下结论成立.

1. 若主元列数等于未知量个数，方程组有唯一解；
2. 若主元列数少于未知量个数，方程组有无穷多解.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

齐次线性方程组

提醒 齐次线性方程组总有零解，总相容！

推论 对 $s \times n$ 齐次线性方程组而言，

1. 方程组只有零解当且仅当系数矩阵的主元列数等于未知量个数 n；
2. 方程组有非零解当且仅当系数矩阵的主元列数小于未知量个数.
3. 若 $s < n$，则方程组必有非零解.

使用初等行变换求解线性方程组的步骤:

1. 写出线性方程组的增广矩阵.
2. 对增广矩阵用初等行变换化为阶梯形矩阵. 用主元列数判断方程组是否相容. 若无解，则停止. 否则，进行下一步.
3. 继续进行初等行变换化简，得到行最简形.
4. 写出行最简形矩阵对应的线性方程组.
5. 改写第四步得到的每个非零方程，将其中的基本变量显式表示出来.

练习 求解下列方程组

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 12 \end{cases}$

1. $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{cases}$ 2. 无解

3. $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中 k_1, k_2 为任意常数.