第二章　矩阵代数

第二节　矩阵的代数运算

一、矩阵的加法与数乘

二、矩阵的乘法

一、矩阵的加法与数乘

定义 设有同型矩阵 $A=(a_{ij})_{s\times n}$, $B=(b_{ij})_{s\times n}$,

$$A+B \triangleq (a_{ij})_{s\times n}+(b_{ij})_{s\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{s\times n}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1}+b_{s1} & a_{s2}+b_{s2} & \cdots & a_{sn}+b_{sn} \end{bmatrix}$$

提醒 只有同型矩阵方能相加，和与原矩阵同型.

矩阵的加法本质上是数的加法，交换律成立.

矩阵的减法运算

提醒 由加法和负矩阵可定义矩阵的减法如下：

$$\text{If}\quad A=(a_{ij})_{s\times n},\ B=(b_{ij})_{s\times n},\ \text{then}$$

$$A-B=A+(-B)=(a_{ij}-b_{ij})_{s\times n}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1}-b_{s1} & a_{s2}-b_{s2} & \cdots & a_{sn}-b_{sn} \end{bmatrix}$$

数与矩阵的乘法：数乘

定义 设有矩阵 $A=(a_{ij})_{s\times n}$，k 为数，则

$$kA=k(a_{ij})_{s\times n}=(ka_{ij})_{s\times n}$$

$$=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \end{bmatrix}$$

提醒 数量矩阵即可表为 kE 的矩阵.

提醒 因向量是特殊的矩阵，故向量的加法和数乘也遵循矩阵的加法和数乘的运算规则.

思考 设 k 为一个数，$A=(a_{ij})_{s\times n}$，以下结论是否正确？

(1) $kA=0 \Rightarrow k=0 \text{ or } A=0.$

(2) $kA=Ak.$

提醒 我们定义了一个数乘一个矩阵，但没有定义一个矩阵乘一个数，因此，一般情况下，矩阵乘一个数 Ak 是没有意义的！

提醒 矩阵的数乘与加法运算统称为**线性运算**.

矩阵的线性运算规律

设 A, B, C 为同型矩阵，k, l 为数，则

1. $A + B = B + A$ **交换律**
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ **结合律**
3. $A + 0 = A$
4. $A + (-A) = 0$
5. $1A = A$
6. $(kl)A = k(lA)$
7. $k(A + B) = kA + kB$
8. $(k + l)A = kA + lA$

提醒 向量的线性运算规律与以上类似.

由矩阵和向量的线性运算，n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases}$$

可表为如下形式，称为线性方程组的**向量形式**

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta,$$

其中 $\beta=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_s \end{bmatrix},\ \alpha_j=\begin{bmatrix} a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{sj} \end{bmatrix},\ j=1,2,\cdots,n.$

二、矩阵的乘法

矩阵理论之所以能得到迅速的发展和应用，最重要的原因就是对矩阵赋予了乘法运算.

引例 四工厂生产三种产品的产量如下表所示：

产品 / 产量 / 工厂	P_1	P_2	P_3
F_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
F_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
F_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}
F_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

产品	价格	单位利润
P_1	b_{11}	b_{12}
P_2	b_{21}	b_{22}
P_3	b_{31}	b_{32}

产品的单价和单位利润

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

工厂	总收入	总利润
F_1	c_{11}	c_{12}
F_2	c_{21}	c_{22}
F_3	c_{31}	c_{32}
F_4	c_{41}	c_{42}

各厂的总收入及总利润

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix}$$

经计算可知矩阵 A,B,C 的元素之间有如下关系：

对任意的 $i=1,2,3,4,\ j=1,2$，有

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{kj}$$

即矩阵 C 的 (i,j) 元素为 A 的第 i 行与 B 的第 j 列对应元素的乘积之和.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \boxed{b_{11}} & b_{12} \\ \boxed{b_{21}} & b_{22} \\ \boxed{b_{31}} & b_{32} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ \boxed{c_{21}} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix}$$

矩阵的乘法

定义 设 $A=(a_{ij})_{s\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times m}$, c_{ij}表 A的第 i行与 B的第 j列对应元素的乘积之和，

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj},$$

$$i=1,2,\cdots,s,\ \ j=1,2,\cdots,m$$

称 $C=(c_{ij})_{s\times m}$为 A与 B的乘积，记作

$C=AB$, 读成 A左乘 B或者 B右乘 A.

提醒 由引例可见，矩阵乘法的定义是有着明显的实际背景的，意义重大.

提醒 矩阵可乘的条件，法则，结果

① 条件：左边矩阵的列数与右边矩阵的行数相等；

② 法则：左行乘右列；

③ 结果：乘积矩阵的 (i,j) 元素为左边矩阵的第 i 行与右边矩阵的第 j 列对应元素的乘积之和；乘积矩阵的行数为左边矩阵的行数，列数为右边矩阵的列数.

例题 设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$,

计算 AB, BA.

解答 $$AB=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

$$BA = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

$$= \begin{bmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_na_1 & b_na_2 & \cdots & b_na_n \end{bmatrix}$$

提醒 一行乘一列为一个数！
一列乘一行为一矩阵，未必是方阵！

提醒 矩阵乘法无交换律！

一般而言：$AB \neq BA$!

矩阵 A与B 可乘，B与 A 未必可乘！

即使 AB与 BA均有意义，它们未必同型！

即使 AB与 BA均有意义且同型，未必相等！

思考 可以表示为一列乘一行的矩阵有何特点？

什么样的矩阵可表示为一列乘一行？

例题 $A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0&1\\-1&2\\1&0\end{bmatrix}\Rightarrow AB=?$

解答 $AB=\begin{bmatrix}\boxed{1\quad -1\quad 0}\\\boxed{2\quad 1\quad -1}\\\boxed{-1\quad 0\quad 1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}0\\-1\\1\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}1\\2\\0\end{matrix}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\-2&4\\1&-1\end{bmatrix}.$

$r_2\rightarrow(2,\ 1,\ -1)\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\leftarrow c_1$

$=1\times 0+(-1)\times(-1)+0\times 1=1$

$=2\times 0+1\times(-1)+(-1)\times 1=-2$

例题 设$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix},$

计算$AB, AC, BA.$

提醒 矩阵乘法与数的乘法的不同之处有

- 矩阵乘法无消去律

$$AB = AC \ \text{ and } \ A \neq 0 \not\Rightarrow B = C$$

- 一般而言

$$AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \text{ or } B = 0$$

课堂练习 计算下列矩阵的乘积

(1) $$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa & xb & xc & xd \\ ye & yf & yg & yh \\ zi & zj & zk & zl \end{bmatrix}$$

(2) $$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa & yb & zc & ud \\ xe & yf & zg & uh \\ xi & yj & zk & ul \end{bmatrix}$$

思考 在以上计算中，关于对角阵右乘或左乘一个矩阵，有何规律？

思考 将以上对角阵换为单位阵，结果如何？

$$A_{s\times n}E_n = E_sA_{s\times n} = A$$

矩阵乘法的运算规律

设 A, B, C 是使下列各式都有意义的矩阵，则

1. 乘法结合律 $(AB)C = A(BC)$

2. 对加法的分配律 $A(B+C) = AB + AC$

$(A+B)C = AC + BC$

3. 数乘 $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

4. $A_{s\times n}E_n = E_s A_{s\times n} = A$

5. $A_{s\times n}0_{n\times r} = 0_{s\times r},\quad 0_{m\times s}A_{s\times n} = 0_{m\times n}$

证明 仅证明**结合律** $(AB)C = A(BC)$.

不妨设 $A=(a_{ij})_{s\times n}, B=(b_{ij})_{n\times m}, C=(c_{ij})_{m\times p}$.

(1) 易见 $(AB)C$ 与 $A(BC)$ 同型；

(2) 记 $(AB)C$ 与 $A(BC)$ 的 (i,t) 元素分别为

$[(AB)C]_{it}$，$[A(BC)]_{it}$，则

$$[(AB)C]_{it} = (AB\text{ 第 } i \text{ 行})(C \text{ 第 } t \text{ 列})$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{j1}, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{j2}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jm}\right)\begin{bmatrix} c_{1t} \\ c_{2t} \\ \vdots \\ c_{mt} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kt} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kt}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_{ij}b_{jk}c_{kt}\text{（双重连加号交换次序）}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\sum_{k=1}^{m}b_{jk}c_{kt}=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=1}^{m}b_{1k}c_{kt}\\ \sum\limits_{k=1}^{m}b_{2k}c_{kt}\\ \vdots\\ \sum\limits_{k=1}^{m}b_{nk}c_{kt}\end{bmatrix}$$

$$=(A\text{第 }i\text{ 行})(BC\text{ 第 }t\text{ 列})$$

$$=[A(BC)]_{it},(i=1,2,..,s;t=1,2,..,p)$$

综上知，$(AB)C=A(BC)$.

提醒 由矩阵乘法的定义，线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

可改写如下形式：

$AX = \beta$ 线性方程组的矩阵形式

其中 $A = (a_{ij})_{s\times n}$， $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{bmatrix}.$

例题 若变量 $z_1, z_2, \cdots, z_s$ 为 $y_1, y_2, \cdots, y_k$ 的线性函数

$$\begin{cases} z_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1k}y_k \\ z_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2k}y_k \\ \qquad \vdots \\ z_s = a_{s1}y_1 + a_{s2}y_2 + \cdots + a_{sk}y_k \end{cases}$$

用矩阵形式可写为 $Z = AY$ 或

$$\underbrace{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_s \end{bmatrix}}_{Z} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sk} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}}_{Y}$$

变量 $y_1, y_2, \cdots, y_k$ 又是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性函数

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n \\ y_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_k = b_{k1}x_1 + b_{k2}x_2 + \cdots + b_{kn}x_n \end{cases}$$

用矩阵形式可写为 $Y = BX$ 或

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Y B X

则变量 $z_1, z_2, \cdots, z_s$ 与 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的关系为

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

即 $Z = AY = ABX.$

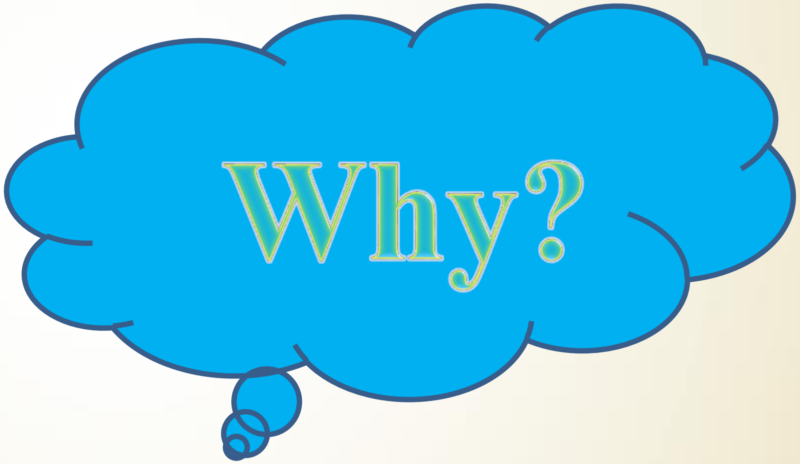
思考 设k为一个数，$A=(a_{ij})_{s\times n}$, 则kA是有意义的，那 Ak 有意义吗？

思考 设k为一个数，$\alpha=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$，则$\alpha k$有意义吗？

若 αk有意义，则 αk 与 $k\alpha$ 有何关系？

可交换矩阵

定义 若矩阵 A, B 满足 $AB = BA$，则称 A 与 B **可交换**.



提醒 若 A 与 B 可交换，则 A 与 B 必为同阶方阵.

单位阵与任何与它同阶的方阵均可交换！

例题 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，求所有与 A 可交换的矩阵.

解答 设与 A 可交换的矩阵为 X；因 A 为二阶方阵，则 X 也必为二阶方阵，故设

$$X=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}.$$

A 与 X 可交换 $\Leftrightarrow AX=XA$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 2x_1+x_3 & 2x_2+x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+2x_2 & x_2 \\ x_3+2x_4 & x_4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 + 2x_2 \\ x_2 = x_2 \\ 2x_1 + x_3 = x_3 + 2x_4 \\ 2x_2 + x_4 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_3 & x_1 \end{bmatrix}$，其中 x_1, x_3 为任意常数；

或 $X = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$，其中 a, b 为任意常数.

例题 求所有与 $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$ 可交换的矩阵.

解答 可采用上例的方法求解，但本题中的 A 具有特殊性，可考虑更简单的方法.

设与 A 可交换的矩阵为 X；则 A 为三阶方阵，故设 $X=(x_{ij})_{3\times3}$.

显然可见，$A=E+2B$，其中

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

于是，

A与X可交换 $\Leftrightarrow AX = XA$

$$\Leftrightarrow (E+2B)X = X(E+2B)$$

$$\Leftrightarrow BX = XB$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x_{11} & x_{12} \\ 0 & x_{21} & x_{22} \\ 0 & x_{31} & x_{32} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{21} = 0, x_{22} = x_{11}, x_{23} = x_{12} \\ x_{31} = 0, x_{32} = x_{21}, x_{33} = x_{22} \\ 0 = 0, 0 = x_{31}, 0 = x_{32} \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 & x_{11} \end{bmatrix}, x_{11}, x_{12}, x_{13}\text{为任意常数.}$$

方阵的幂

对于 n 阶方阵 A 而言，自乘 AA 是有意义的，由此引入方阵乘幂的概念，规定

$$A^0 = E_n, \quad A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k\text{ 个}} \qquad k \in \mathbb{N}$$

<u>**提醒**</u> 1. 一般矩阵的幂无意义，除了方阵.

2. 此处的 k 只能是自然数，特殊情况下可以是负整数.

矩阵乘幂的运算规律

设 A, B 均为 n 阶方阵，$k, k_1, k_2 \in \mathbb{N}.$

(1) $A^{k_1} \cdot A^{k_2} = A^{k_1+k_2}$

(2) $\left(A^{k_1}\right)^{k_2} = A^{k_1 k_2}$

(3) $(\lambda A)^k = \lambda^k A^k$

(4) $E^k = E$

(5) $A^k = AA^{k-1} = A^2 A^{k-2} = \cdots = A^{k-1}A$

(6) $(AB)^k = A(BA)^{k-1}B$

课堂思考 如下结论是否成立？

(1) $(A+B)^2 \overset{?}{=} A^2+2AB+B^2$

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$$

(2) $(A+B)^3 \overset{?}{=} A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= A^3+A^2B+ABA+BA^2\\ &\quad +AB^2+B^2A+BAB+B^3\end{aligned}$$

(3) $(A+B)^n \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k},\quad n=2,3,\cdots$

(4) $(AB)^k \overset{?}{=} A^k B^k$ $\qquad (AB)^k=A(BA)^{k-1}B$

(5) $(A+B)(A-B) \overset{?}{=} A^2-B^2$

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2+BA-AB$$

结论 若A与 B可交换，则以下结论成立

$$(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kA^kB^{n-k},\quad n=2,3,\cdots$$

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$$

$$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$

$$(AB)^k=A^kB^k=B^kA^k,k=1,2,\cdots$$

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

思考 下式是否成立？

√

$$(A+tE)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kt^{n-k}A^k,\quad n=2,3,\cdots$$

例题 $Q=(2,-1,2), P=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, A=PQ, A^{100}=?$

解答 $A=PQ=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}(2,-1,2)$

$$=\begin{bmatrix}2&-1&2\\4&-2&4\\2&-1&2\end{bmatrix}.$$

法一 $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix} = 2A,$

$$\begin{aligned} A^{100} &= (2A)^{50} = 2^{50}A^{50} = 2^{50}(A^2)^{25} \\ &= 2^{50}(2A)^{25} = 2^{75}(A^2)^{12}A \\ &= \cdots \\ &= 2^{98}A^2 = 2^{98}\cdot 2A = 2^{99}A \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{100} & -2^{99} & 2^{100} \\ 2^{101} & -2^{100} & 2^{101} \\ 2^{100} & -2^{99} & 2^{100} \end{bmatrix}$$

法二 $QP = [2, -1, 2]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2$

$$\Rightarrow A^{100} = (PQ)^{100} = P(QP)^{99}Q$$

$$= P(2^{99})Q = 2^{99}PQ = 2^{99}A$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{100} & -2^{99} & 2^{100} \\ 2^{101} & -2^{100} & 2^{101} \\ 2^{100} & -2^{99} & 2^{100} \end{bmatrix}$$

启发 当矩阵可表为一列乘一行时，求其幂就可用以上方法.

思考 设 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & 4 & -6\\ 3 & -6 & 9\end{bmatrix}$, 如何求 A^n.

例题 设 $A=\begin{bmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, 计算 $A^2, A^3, \cdots A^k$.

解答 $A^2=\begin{bmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\lambda\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}1 & 2\lambda\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\lambda\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

猜想 $A^k=\begin{bmatrix}1 & k\lambda\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

大胆猜想，小心求证

下用数学归纳法证明.

当 $n=2$ 时，等式显然成立.

假设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$$A^k=\begin{bmatrix}1 & \lambda\\0 & 1\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}1 & k\lambda\\0 & 1\end{bmatrix}\quad(k=1,\ 2\ ,\cdots)$$

要证 $n=k+1$ 时成立，此时有

$$A^{k+1}=A^kA=\begin{bmatrix}1 & k\lambda\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \lambda\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & (k+1)\lambda\\0 & 1\end{bmatrix}$$

等式成立. 所以猜想正确.

例题 设 $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\0 & \lambda & 1\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$，求 A^k.

解答 令 $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，则 $A=\lambda E+B$. 经计算知

$$B^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ B^3=B^4=\cdots=0.$$

从而

$$A^k=(\lambda E+B)^k=\sum_{i=0}^{k}\mathrm{C}_k^i B^i(\lambda E)^{k-i}$$

$$=\mathrm{C}_k^0 B^0(\lambda E)^k+\mathrm{C}_k^1 B^1(\lambda E)^{k-1}+\mathrm{C}_k^2 B^2(\lambda E)^{k-2}$$

$$=\lambda^k E+k\lambda^{k-1}B+\mathrm{C}_k^2\lambda^{k-2}B^2$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^k & 0 & 0\\ 0 & \lambda^k & 0\\ 0 & 0 & \lambda^k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & k\lambda^{k-1} & 0\\ 0 & 0 & k\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & \mathrm{C}_k^2\lambda^{k-2}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \mathrm{C}_k^2\lambda^{k-2}\\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^k\end{bmatrix}(k\geq 2).$$

例题 设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{bmatrix},$

求 $AB.$

提醒 既可以看成对角阵 B 右乘 A，也可以看成是对角阵 A 左乘 B，结果相同！

提醒 两个同阶对角阵必可交换！

进一步 例题中换 B 为 A，会得到什么？
关于对角阵的幂，有什么结果？

方阵多项式

设有多项式 $f(x)=a_m x^m+\cdots+a_1 x+a_0$,

A为一个 n阶方阵，那么

$$a_m A^m+\cdots+a_1 A+a_0 E_n$$

有意义且仍为一个n阶方阵，记为$f(A)$，即

$$f(A)=a_m A^m+\cdots+a_1 A+a_0 E_n,$$

称为 **A 的矩阵多项式**.

提醒 矩阵 A 的方阵多项式**不**是

$$f(A)=a_m A^m+\cdots+a_1 A+a_0$$

例题 已知矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}$，多项式

$f(x)=3x^2+6x-2$, 求矩阵多项式$f(A)$.

解答 $$A^2=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & -3 & -1\\ -1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$f(A) = 3A^2 + 6A - 2E_3$$

$$= 3\begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$-2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -15 & 9 \\ -3 & 22 & 9 \\ -6 & 3 & -11 \end{bmatrix}.$$

课堂思考

已知 $f(x), h(x)$为两个多项式，A, B为同阶方阵，

请问：矩阵 $f(A)$与$h(A)$ 可交换吗？

请问：矩阵 $f(A)$ 与$h(B)$ 可交换吗？

例题 设n阶矩阵A满足$2A^2-3A-3E=0$.

证明：存在矩阵B使得$(A-2E)B=E$.

证明

$$2A^2-3A-3E=0$$

$$\Rightarrow (A-2E)(2A+E)-E=0$$

$$\Rightarrow (A-2E)(2A+E)=E$$

$$\Rightarrow (A-2E)B=E\ (B=2A+E)$$

课堂练习

已知方阵 A 满足 $A^2-2021A+2022E=0$.
证明：存在矩阵 B，使得 $B(A-E)=E$.

拓展练习

已知方阵 A 满足 $A^3=2A$.
证明：存在矩阵 B，使得 $(A^2-E)B=E$.

思考 如何用矩阵乘法表示一个 $m\times n$矩阵的每行元素和以及每列元素和.

思考 前面用语言定义了三角形矩阵，如何用数学语言严谨地定义三角形矩阵?

命题 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$为n 阶方阵，则

A为上三角阵$\Leftrightarrow a_{ij}=0,\forall i,j=1,2,\cdots,n,i>j.$

A为下三角阵$\Leftrightarrow a_{ij}=0,\forall i,j=1,2,\cdots,n,i<j.$

例题 已知 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$ 均为 n 阶上三角阵，证明：AB 也为上三角阵.

证明 对任意的 $i,j=1,2,\cdots,n$, 记 AB 的 (i,j) 元素为 $[AB]_{ij}$.

当 $i>j$ 时，因 A,B 为上三角阵，则

$$a_{ik}=0,\forall k=1,2,\cdots,i-1;$$

$$b_{kj}=0,\forall k=i,i+1,\cdots,n;$$

$$[AB]_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

$$=0+0=0,$$

所以 AB 也为上三角阵.

练习

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\begin{bmatrix}1/3 & 1 & 0\\ 0 & 1/3 & 1\\ 0 & 0 & 1/3\end{bmatrix}^n$ 2. 求 $\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 6 & 4 & 2\\ 9 & 6 & 3\end{bmatrix}^n$

3. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

(1) 证明：当 $n \geq 3$ 时，$A^n = A^{n-2} + A^2 - E$;

(2) 求 A^{100}.