第四章 向量空间

第四章 向量空间

第二节 向量组的线性相关性

一、线性相关和线性无关的定义

二、线性相关和线性无关的性质

三、向量组线性相关性的判定

一、线性相关和线性无关的定义

若向量 β 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的线性组合，则向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta$ 之间有线性关系.

例如　(1) $\alpha_4 = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3$

向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 之间有线性关系；

(2) $\xi_1 = (1,0,0)^T, \xi_2 = (0,1,0)^T, \xi_3 = (0,0,1)^T$

因 ξ_1, ξ_2, ξ_3 中任一向量都不能表为其余向量的线性组合，故 ξ_1, ξ_2, ξ_3 之间没有线性关系.

显然，这两个向量组有着本质的区别，为此，本节将讨论这两种不同类型的向量组.

问题 如何判定向量组有否线性关系呢？

对给定向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n,$ 考虑关系式

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ 时，上式对任意向量组必定成立！

此时，不能判定向量组有否线性关系！

<u>观察发现</u> 对向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,$ 还可取不全为零的$k_1=1,k_2=-2,k_3=3,k_4=-1$ 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$$

成立！而对 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,$ 找不到不全为零的 k_1,k_2,k_3 使得

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3=0$$

成立！

<u>启发</u> 判定向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是否有线性关系，应考虑：是否存在不全为零的$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$成立？

定义 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为一向量组，若存在一组不全零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0,$$

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关；

否则，称该向量组线性无关.

定理 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关（线性无关）的充要条件是：齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$$

有非零解（仅有零解）.

例题 令 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

(1) 判断 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性相关性；

(2) 若向量组线性相关，求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 之间的一个非平凡线性关系.

解答 考虑如下方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$

$$\Leftrightarrow x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

对其增广矩阵进行初等行变换，有

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

因系数矩阵的主元列数少于未知量个数，故以上齐次线性方程组必有**非零**解，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **线性相关**；

为确定 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性关系，化为行最简形矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

原方程组同解于 $\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

令自由变量 $x_3 = k,$ 得原方程组的解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k \\ -k \\ k \end{bmatrix}, \; k \text{ 为任意常数;}$$

从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性关系为 $2k\alpha_1 - k\alpha_2 + k\alpha_3 = 0$

k 为任意常数;

于是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的非平凡线性关系为

$$2k\alpha_1 - k\alpha_2 + k\alpha_3 = 0, \quad k \neq 0 \text{ 为任意常数;}$$

令 $k = 2,$ 得 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个非平凡线性关系为

$$4\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0.$$

提醒 给定矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则

$$AX=0 \Leftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_n\alpha_n=0.$$

矩阵 A 的列向量组线性相关（无关）

$\Leftrightarrow AX=0$ 有非零解（只有零解）

提醒 矩阵 A 的行向量组线性相关（无关）

$\Leftrightarrow A^T$ 的列向量组线性相关（无关）

$\Leftrightarrow A^TX=0$ 有非零解（只有零解）

提醒 矩阵A的列向量组之间的每个非平凡线性关系对应于 $AX=O$ 的一个非零解.

矩阵A的行向量组之间的每个非平凡线性关系对应于$A^TX=O$ 的一个非零解.

提醒 矩阵 A 的列或行向量组的线性相关性简称为矩阵 A的列线性相关性或行线性相关性.

例题 判断 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 4\\ 1 & 2 & -1\\ 5 & 8 & 0\end{bmatrix}$ 的列线性相关性.

解答 对 A 进行初等行变换化为阶梯形矩阵,

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 4\\ 1 & 2 & -1\\ 5 & 8 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 12\end{bmatrix}$$

显然可见, $AX=O$仅有零解, 因此

矩阵 A 列线性无关.

例题 判断 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 4\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -9\end{bmatrix}$ 的行线性相关性.

解答 对A^T进行初等行变换化为阶梯形矩阵，

$$A^T=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 4 & -1 & -9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

显然可见， $A^TX=O$ 有非零解，因此矩阵 A 行线性相关.

特殊向量组的线性相关性

① 含有零向量的向量组必线性相关.

② 若向量组中仅含有一个向量 $\Sigma:\alpha,$ 则

向量组 Σ 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha = 0.$

向量组 Σ 线性无关 $\Leftrightarrow \alpha \neq 0.$

③ 若向量组中仅含有两个向量 $\Sigma:\alpha,\beta,$ 则

向量组 Σ 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha = s\beta \text{ or } \beta = t\alpha,$

即：两向量对应分量成比例.

几何意义

① 两向量线性相关：两向量共线.

② 三向量线性相关：三向量共面.

证明 只证明第三个结论.

必要性 因 α, β 线性相关，则存在不全为零的数 k, l，使得 $k\alpha + l\beta = 0.$

若 $k \neq 0$，则 $\alpha = -\frac{l}{k}\beta = s\beta;$

若 $l \neq 0$，则 $\beta = -\frac{k}{l}\alpha = t\alpha.$

充分性 不妨设 $\alpha = s\beta$，则

$$(-1)\alpha + s\beta = 0.$$

因 $-1, s$ 不全为零，故 α, β 线性相关.

常用结论 若向量组 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 线性无关，且

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_n\xi_n = 0,$$

则必有 $k_1 = 0, k_2 = 0, \cdots, k_n = 0.$

定理 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta\,(\Diamond)$ 线性相关，则 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，且表示法唯一.

证明 因向量组$(\Diamond)$线性相关，故存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s,k$, 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s+k\beta=0 \qquad (1)$$

又 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则可断定 $k\neq 0.$

反证 若 $k=0$, 则 $k_1,k_2,\cdots,k_s$不全为零使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0.$$

从而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，矛盾，故 $k\neq 0.$

由 $k \neq 0$及(1)式，可得

$$\beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \frac{k_2}{k}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_s}{k}\alpha_s,$$

这表明，β 可由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示.

再证明表示法的唯一性．若

$$\beta = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \cdots t_s\alpha_s = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots l_s\alpha_s$$
$$\Rightarrow (t_1 - l_1)\alpha_1 + (t_2 - l_2)\alpha_2 + \cdots (t_s - l_s)\alpha_s = 0.$$

又$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，故

$$t_i - l_i = 0 \Rightarrow t_i = li,\ i = 1, 2, \cdots, s,$$

这表明β由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的两种线性表示法是相同的，故表示法唯一.

课堂练习 判定以下命题是否正确?

1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，则存在不为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0.$$

2. 因 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 都为零时，

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0,$$

故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

3. 只有当 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 都为零时，才有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0,$$

则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

二、线性相关和线性无关的性质

性质1 设 $\Sigma:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\,(s>1)$ 为一向量组，则

Σ线性相关 $\Leftrightarrow$ Σ中至少有一个向量可由其余$s-1$个向量线性表示

Σ 线性无关$\Leftrightarrow$ Σ 中任一个向量都不能由其余$s-1$个向量线性表示

证明 只证明第一个结论.

必要性 因向量组 Σ 线性相关，故存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0.$$

不妨设 $k_1 \neq 0$, 则有

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_n}{k_1}\alpha_n,$$

即 α_1 可由其余 $s-1$ 个向量线性表出.

充分性 不妨设 $\alpha_s = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{s-1}\alpha_{s-1}$ ，则存在不全为零的数 $k_1, \cdots, k_{s-1}, k_s(=-1)$ 使得

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{s-1}\alpha_{s-1} + k_s\alpha_s = 0.$$

从而向量组 Σ 线性相关.

性质2 若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\,(s>1)\,(*)$ 的任何一个部分组线性相关，则向量组$(*)$线性相关.

若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\,(s>1)\,(*)$ 线性无关，则 $(*)$ 的任何一个部分组线性无关.

部分相关，整体相关
整体无关，部分无关

证明 证明很简单，请同学们自己完成证明.

性质3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\ (*)$ 为 n 维向量组，则

$$\boxed{(*)\ \text{线性相关} \Leftrightarrow |A| = 0}$$

$$\boxed{(*)\ \text{线性无关} \Leftrightarrow |A| \neq 0}$$

其中当$(*)$为列向量组时，

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n);$$

当$(*)$为行向量组时，$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$.

提醒 性质3中的向量组要求向量个数与维数相同.

性质4 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\,(*)$ 为一向量组，则

增维性质

① 若 $(*)$ 线性无关，则在 $(*)$ 中的每个向量的相同位置添加 t 个分量之后所得的向量组也线性无关；

减维性质

② 若 $(*)$ 线性相关，则在 $(*)$ 中的每个向量去掉相同位置的 k 个分量之后所得的向量组也线性相关.

本身相关，减维相关；本身无关，增维无关

例题 行阶梯形矩阵的非零行构成一个线性无关的行向量组. 例如

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 4 & -6\\ 0 & 2 & 0 & 6 & 1\\ 0 & 0 & 5 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

提醒 行阶梯形矩阵的非零行构成一个线性无关的行向量组.

行阶梯形矩阵的主元列构成一个线性无关的列向量组.

例题 判断下列向量组是否线性相关？

$$(1)\ \ \alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\4\end{bmatrix},\ \ \alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\5\end{bmatrix},\ \ \alpha_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\4\end{bmatrix}.$$

解答 取所给向量组的前三个分量，得向量组为

$$\alpha_1'=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \ \alpha_2'=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ \ \alpha_3'=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

因行列式 $|(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3')|\neq 0$，故 $\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3'$ 线性无关，从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 也线性无关；

$$(2)\ \beta_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\2\end{bmatrix},\ \beta_2=\begin{bmatrix}0\\2\\2\\4\end{bmatrix},\ \beta_3=\begin{bmatrix}1\\3\\2\\6\end{bmatrix},\ \beta_4=\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\-5\end{bmatrix}.$$

解答 法一：因行列式 $|(\beta_2,\beta_2,\beta_3,\beta_4)|=0,$

故向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关.

法二：经观察，有 $\beta_1+\beta_2=\beta_3,$

则 β_1,β_2,β_3 线性相关，故

$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 也线性相关.

部分相关，整体相关

课堂练习 不定项选择

设 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关.

A $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$

$\Leftrightarrow k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0.$

B $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$ 只有零解.

C 矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 可逆.

D 行列式 $|(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)| \neq 0.$

三、向量组线性相关性的判断

抽象向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关的判断

先假设

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0, \quad (*)$$

再由已知条件判断方程组 $(*)$ **有否非零解**?

此处的 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是未知量.

① 若 $(*)$ 无非零解，即 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 必须全为零，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关;

② 若 $(*)$ 有非零解，即 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 可以不全为零，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关.

例题 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，判断向量组

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$$

的线性相关性.

解答 考虑齐次线性方程组

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \alpha_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (k_1 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 = 0$$

因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，故 $\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$

该方程组只有零解，即 $k_1 = k_2 = k_3 = 0,$

所以向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

例题 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关. 判断α_1 能否由 α_2,α_3 线性表示?
并证明你的结论.

解答 因$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，故α_2,α_3线性无关;
又 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，故α_1 能由 α_2,α_3
线性表示.

问题 α_1能否由向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示?

例题 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三维列向量组，A 为三阶方阵. 若 $A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$ 线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 也线性无关，且 A 可逆.

例题 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 n 维向量， A为 n 阶方阵. 若 $A\alpha_1=\alpha_1\neq 0, A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2, A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$ 则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

例题 已知 α 是一个 n 维向量， A 为 n 阶方阵. 若 $A^{k-1}\alpha\neq 0,\ A^k\alpha=0,$ 则 $\alpha, A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 线性无关.