# 第四章 向量空间

# 第七节 线性方程组有解的条件及解的结构

一、齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构

二、非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

# 一、齐次方程组有解的条件及解的结构

**定理** 设 $A$ 是 $m\times n$ 矩阵，则

$$AX=0\text{有非零解}\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A)<n.$$

**证明** 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则

$AX=0$ 有非零解

$\Leftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关

$\Leftrightarrow \operatorname{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)<n$

$\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A)<n.$

**定义** 齐次线性方程组$AX=O$的解空间的一组基称为方程组$AX=O$的一个**基础解系**.

**提醒** 若向量组$\Sigma: X_1, X_2, \cdots, X_t$为齐次线性方程组$AX=0$的一个**基础解系**，则满足

① 向量组$\Sigma$中的每个向量均为齐次线性方程组$AX=0$的解；

② 向量组$\Sigma$线性无关；

③ 方程组$AX=0$的每个解均可由向量组$\Sigma$线性表示.

**提醒** 当 $X_1, X_2, \cdots, X_t$ 为 $AX=0$ 的基础解系时，$AX=0$ 的解空间为

$$S=\{k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_tX_t : k_i\in\mathbb{R}\}$$
$$=\mathrm{Span}\,\{X_1, X_2, \cdots, X_t\}=\mathrm{Nul}A.$$

称 $k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_tX_t$ 为 $AX=0$ 的**通解**，其中 $k_1, k_2, \cdots, k_t$ 是任意常数.

**提醒** 求 $AX=O$的基础解系的问题实际上就是求 $A$ 的零空间的一组基.

**推论** 设 $A$ 为 $s \times n$ 矩阵且 $\mathrm{r}(A) = r < n$，则

① $AX = 0$ 的每个基础解系都含有 $n - r$ 个解向量；

② $AX = 0$ 的任意 $t(t > n - r)$ 个解向量构成的向量组线性相关；

③ $AX = 0$ 的任意 $n - r$ 个线性无关的解向量均构成 $AX = 0$ 的基础解系.

**例题** 已知 $\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 是$AX=0$的基础解系，则以下（　　）也是 $AX=0$ 的基础解系.

$A.\quad \xi_1,\xi_1+\xi_2,\xi_1+\xi_2+\xi_3$

$B.\quad \xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$

$C.\quad \xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$

$D.\quad \xi_1+\xi_2+\xi_3,\xi_1-\xi_2-\xi_3$

**答案：** $A,B$

**定理** 设 $A$是 $m\times n$ 矩阵. 若$\operatorname{rank}(A)=r<n$, 则齐次线性方程组 $AX=O$ 存在基础解系，且基础解系含 $n-r$ 个解向量.

**例题** 求下列齐次方程组的通解.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

**解答** 经初等行变换，化系数矩阵为行最简形

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

原方程组同解于 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4/5 = 0 \\ x_3 + 3x_4/10 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4/5 \\ x_3 = -3x_4/10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4/5 \\ x_3 = -3x_4/10 \end{cases}$$

**法1：** 先求通解，再求基础解系

令 $x_2 = k_1, x_4 = 10k_2$ 得方程组通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix},$$

其中 $k_1, k_2$ 为任意常数.

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}$$ 为一个基础解系.

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4/5 \\ x_3 = -3x_4/10 \end{cases}$$

**法2：** 先求基础解系，再求通解.

令 $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 得解 $\xi_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

令 $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$ 得解 $\xi_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}$;

$\xi_1, \xi_2$ 为方程组的一个基础解系；

则通解为 $X = k_1\xi_1 + k_2\xi_2, \quad k_1, k_2$ 为任意常数.

**例题** 求下列齐次方程组的通解.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 10x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

**解答** 经初等行变换，化系数矩阵为行最简形

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 10 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因 $\mathrm{r}(A) = 3 = n$, 故方程组只有零解.

# 二、非齐次方程组有解的条件及解的结构

**定义** 与非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的系数矩阵相同的齐次线性方程组 $AX=0$ 称为非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 所**对应的齐次线性方程组**，也称**导出组**.

$$\begin{cases} -x_1+2x_2+3x_3+4x_4=4 \\ x_1-4x_2-5x_3-2x_4=0 \\ 2x_1-5x_2+3x_3-6x_4=8 \end{cases}$$

非齐次线性方程组

$$\begin{cases} -x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0 \\ x_1-4x_2-5x_3-2x_4=0 \\ 2x_1-5x_2+3x_3-6x_4=0 \end{cases}$$

导出组

# 非齐次方程组有解的条件及解的结构

**定理** 设$s\times n$矩阵$A$是线性方程组$AX=\beta$的系数矩阵，$\widetilde{A}=(A,\beta)$为相应的增广矩阵，则

① $AX=\beta$有解$\Leftrightarrow \mathrm{rank}(\widetilde{A})=\mathrm{rank}(A)$;

② $\mathrm{r}(\widetilde{A})=\mathrm{r}(A)=n$时，$AX=\beta$有唯一解;

③ $\mathrm{r}(\widetilde{A})=\mathrm{r}(A)<n$时，$AX=\beta$有无穷多解；其全部解可表为$w=p+v_h$，其中$p$是$AX=\beta$的一个解，称为**特解**；$v_h$为齐次线性方程组为$AX=0$的全部解.

非齐次通解 = 非齐次特解＋齐次(导出组)通解

**证明** ① $AX=\beta$有解 $\Leftrightarrow \beta \in \mathrm{Col}A$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Col}A=\mathrm{Col}(A,\beta)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{rank}(\widetilde{A})=\mathrm{rank}\,(A)\,;$$

② $\mathrm{r}(\widetilde{A})=\mathrm{r}\,(A)=n$ 时，$AX=\beta$有解，且 $AX=0$ 只有零解.

设 $p$ 是 $AX=\beta$ 的一个解，有 $Ap=\beta$.

对于 $AX=\beta$ 的任意解 $w$，有

$$A(w-p)=Aw-Ap=\beta-\beta=0,$$

$w-p$ 是 $AX=0$ 的解，则 $w-p=0$,

即 $w=p$, 这表明 $p$ 是 $AX=\beta$的唯一解.

③ $\mathrm{r}(\widetilde{A}) = \mathrm{r}(A) < n$时，$AX = 0$有无穷多解.

由②， $w - p$是$AX = 0$的解.

反之，对于$AX = 0$的任意解 $v_h$，有

$$A(p + v_h) = Ap + Av_h = \beta + 0 = \beta,$$

这表明$p + v_h$是 $AX = \beta$的解.

**例题** 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & -2x_2 & -3x_3 & & = & 2 \\ 4x_1 & -2x_2 & -7x_3 & -4x_4 & = & -2 \end{cases}$$

**解答** 经初等行变换，化增广矩阵为行最简形

$$\tilde{A} \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1/2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

因 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(\tilde{A}) = 2 < 4$, 方程组有穷多解.

原方程组同解于 $\begin{cases} x_1 - 2x_3 - 2x_4 = -2 \\ x_2 - 1/2x_3 - 2x_4 = -3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 + 2x_4 - 2 \\ x_2 = 1/2x_3 + 2x_4 - 3 \end{cases}$$

取自由变量 $x_3 = 2k_1, x_4 = k_2$, 方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4k_1 + 2k_2 - 2 \\ k_1 + 2k_2 - 3 \\ 2k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中 $k_1, k_2$ 是任意常数.

**例题** $k$ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + kx_3 = 18 - 5k \\ x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

有唯一解，无穷多解或无解？

有无穷多解时求出通解.

**解答** 法1：经初等行变换，有

$$(A,b) = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & k & 18-5k \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 2 & k & 18-5k \\ k & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & k & 18-5k \\ 3k & 3 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & k & 18-5k \\ 0 & 3-2k & 3-k^2 & 15-18k+5k^2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & k & 18-5k \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3-2k & 3-k^2 & 15-18k+5k^2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & k & 18-5k \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -k^2+4k-3 & 5k^2-14k+9 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 3 & 2 & k & 18-5k \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -(k-1)(k-3) & (k-1)(5k-9) \end{bmatrix}$$

(1) 当 $k \neq 1$ 且 $k \neq 3$ 时，$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A, b) = 3 = n$，

方程组有唯一解；

(2) 当 $k = 3$ 时，$\mathrm{r}(A) \neq \mathrm{r}(A, b)$，方程组无解；

(3) 当 $k = 1$ 时，$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A, b) = 2 < 3 = n$，

方程组有无穷多解. 此时，经初等行变换有

$$(A, b) \to \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

原方程组同解于 $\begin{cases} x_1 = x_3 + 3 \\ x_2 = -2x_3 + 2 \end{cases}$

令自由变量 $x_3 = k,$ 得方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+3 \\ -2k+2 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中 $k$ 为任意常数.

**法2：** 利用Cramer法则. 因系数行列式

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 3 & 2 & k \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(k-1)(k-3),$$

(1) 当 $k \neq 1$ 且 $k \neq 3$ 时，因系数行列式不为零，方程组有唯一解；

(2) 当 $k=3$ 时，经初等行变换，有

$$(A,b)=\left[\begin{array}{ccc|c}3&1&1&5\\3&2&3&3\\0&1&2&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}3&1&1&5\\0&1&2&-2\\0&0&0&4\end{array}\right]$$

因 $\mathrm{r}(A)\neq\mathrm{r}(A,b)$，方程组无解；

(3) 当 $k=1$ 时，经初等行变换，有

$$(A,b)=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&5\\3&2&1&13\\0&1&2&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc}1&0&-1&3\\0&1&2&2\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

因 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A,b)=2<3=n$，方程组有无穷多解.

此时，方程组同解于 $\begin{cases} x_1 - x_3 = 3 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + 3 \\ x_2 = -2x_3 + 2 \end{cases}$$

令自由变量 $x_3 = k$, 得方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+3 \\ -2k+2 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中 $k$ 为任意常数.

**例题** 已知非齐次方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + px_3 + 7x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = t \end{cases}$$

讨论参数 $p, t$ 取何值时，方程组有解，无解；当有解时，试用其导出组的基础解系表示通解.

**解答** 对增广矩阵作初等行变换，得

$$\widetilde{A} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+2 \end{bmatrix}$$

**I.** 当 $t \neq -2$ 时， $\mathrm{r}(\widetilde{A}) \neq \mathrm{r}(A)$， 无解；

**II.** 当 $t = -2$ 时， $\mathrm{r}(\widetilde{A}) = \mathrm{r}(A)$， 有解；

① 当 $p = -8$ 时， $\mathrm{r}(\widetilde{A}) = \mathrm{r}(A) = 2 < 4$，

原方程组有无穷多解；

原方程组同解于

$$\begin{cases} x_1 = 4x_3 - x_4 - 1 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 1 \end{cases},$$

令 $x_3 = k_1, x_4 = k_2$，得通解为

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中 $k_1, k_2$ 为任意常数，向量组

$$X_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

为导出组的基础解系；

② 当 $p \neq -8$ 时，$\mathrm{r}(\widetilde{A}) = \mathrm{r}(A) = 3 < 4,$

原方程组有无穷多解，同解于

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 - 1 \\ x_2 = -2x_4 + 1 \\ x_3 = 0 \end{cases},$$

令 $x_4 = k$, 得通解为

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

其中 $k$为任意常数，向量组 $X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

为导出组的基础解系.

**命题** 若 $\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_t$ 都是 $AX=\beta$ 的解，则

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_t\eta_t$$

是 $AX=(k_1+k_2+\cdots+k_t)\beta$ 的解.

特别地，

① 当 $k_1+k_2+\cdots+k_t=1$ 时，

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_t\eta_t$$

为 $AX=\beta$ 的解；

② 当 $k_1+k_2+\cdots+k_t=0$ 时，

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_t\eta_t$$

为 $AX=0$ 的解.

**例题** 设 $AX=b$为四元非齐次线性方程组，

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为其解向量且 $\mathrm{r}(A)=3$,

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\0\\2\\1\end{bmatrix},\ \alpha_2+2\alpha_3=\begin{bmatrix}4\\0\\4\\1\end{bmatrix},$$

求方程组的通解.

**解答** 因$\mathrm{r}(A)=3$，故导出组的基础解系含有

$4-3=1$个向量.

由以上命题知，向量

$$2(\alpha_1-\alpha_3)+(\alpha_1-\alpha_2)=3\alpha_1-(\alpha_2+2\alpha_3)$$

$$=3\begin{bmatrix}2\\0\\2\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4\\0\\4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\2\\0\end{bmatrix}$$

为 $AX=0$ 的非零解（因系数之和为零），

这一个向量构成了导出组的基础解系.

故$AX=b$的通解为

$$X=\alpha_1+k\beta=\begin{bmatrix}2\\0\\1\\2\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}2\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

其中$k$为任意常数.

**提醒** 当齐次线性方程组的基础解系中只有一个向量，则该齐次线性方程组的任何一个非零解都构成一个基础解系.

**例题** 下列命题中，正确的有 (　　　　).

(A) $AX=b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow |A|\neq 0.$

(B) $AX=0$ 只有零解，则 $AX=b$ 有唯一解

(C) $AX=0$ 有非零解，则 $AX=b$ 有无穷多解

(D) $AX=b$ 有两不同解，则 $AX=0$ 有无穷多解

**例题** $A_{m\times n}X=b$ 有解的充分条件是(　　　　).

(A) $\mathrm{r}(A)=m$　　(B) $A$ 的行向量组线性相关

(C) $\mathrm{r}(A)=n$　　(D) $A$ 的列向量组线性相关

answer : D, A

**例题** $A_{4\times 5}$ 的行向量组线性无关，则错误的有( ).

(A) $A^TX=0$ 只有零解

(B) $A^TAX=0$ 必有非零解

(C) 对$\forall b, AX=b$必有无穷多解

(D) 对$\forall b, AX=b$必有唯一解

**例题** 若$r(A_{4\times 5})=2$，且$AX=b$ 有解，则$AX=b$ 的解集中线性无关解向量的个数为( ).

(A)2　　(B)3　　(C)4　　(D)5

answer : D, C

**例题** 设$A,B,C$均为$n$阶方阵，若$AB=C$且$B$可逆，则(　　).

(A) $C$的行向量组与$A$的行向量组等价

(B) $C$的列向量组与$A$的列向量组等价

(C) $C$的行向量组与$B$的行向量组等价

(D) $C$的列向量组与$B$的列向量组等价

**例题** 设$A_{4\times 4}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4),\alpha_i\neq 0,i=1,2,3,4.$ 若$AX=0$有一基础解系为$(1,0,-2,0)^T$，则$A^*X=0$的基础解系有(　　).

(A) $\alpha_1,\alpha_2$　　(B) $\alpha_1,\alpha_3$

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

answer : B, D

**例题** 设 $A, B$分别为 $s \times n, t \times n$矩阵，若齐次方程组 $AX=0$ 的解总是 $BX=0$ 的解，则

$$\mathrm{r}(A) \geq \mathrm{r}(B).$$

**例题** 四阶方阵 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关， $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3, \beta = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4,$ 求$AX=\beta$的通解.

**例题** 设 $A = \alpha\alpha^T + \beta\beta^T$, $\alpha, \beta$ 是三维列向量.

(1) 证明：$\mathrm{r}(A) \leq 2.$

(2) 若$\alpha, \beta$线性相关，则 $\mathrm{r}(A) < 2.$

**例题** 设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示为

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)K,$$

其中 $K$ 为 $s\times r$ 矩阵, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

证明: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(K)=r$.

**证明** 令 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_r)^T$, 则

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_r\beta_r=0$$

$$\Longleftrightarrow (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)X=0$$

$$\Longleftrightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)KX=0$$

$$\xLeftrightarrow[\text{线性无关}]{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s} KX=0$$

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_r\beta_r = 0 \Leftrightarrow KX = 0$$

从而有

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r \text{ 线性无关}$$

$$\Leftrightarrow x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_r\beta_r = 0 \text{ 只有零解}$$

$$\Leftrightarrow KX = 0 \text{ 只有零解}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{rank}(K) = r.$$