3. 数列通项的求解

例题 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2} - 2x_{n-3}$，其中 $n > 5, x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3.$ 求数列的通项.

解答 构造线性方程组 $\begin{cases} x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2} - 2x_{n-3} \\ x_{n-1} = x_{n-1} \\ x_{n-2} = x_{n-2} \end{cases}$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ x_{n-3} \end{bmatrix}, \text{ where } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

则

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ x_{n-3} \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} x_{n-2} \\ x_{n-3} \\ x_{n-4} \end{bmatrix} = \cdots = A^{n-3} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

用求矩阵幂的对角化方法，可求得

$$A^{n-3} = \begin{bmatrix} \frac{-3+(-1)^{n-3}+2^n}{6} & \frac{1-(-1)^{n-3}}{2} & \frac{3+(-1)^{n-3}-2^{n-1}}{3} \\ \frac{3+(-1)^{n-2}+2^{n-1}}{6} & \frac{1-(-1)^{n-2}}{2} & \frac{3+(-1)^{n-2}-2^{n-2}}{3} \\ \frac{3+(-1)^{n-3}+2^{n-2}}{6} & \frac{1-(-1)^{n-3}}{2} & \frac{3+(-1)^{n-3}-2^{n-3}}{3} \end{bmatrix}.$$

从而

$$x_n = \frac{-3+(-1)^{n-3}+2^n}{6}x_3 + \frac{1-(-1)^{n-3}}{2}x_2 + \frac{3+(-1)^{n-3}-2^{n-1}}{3}x_1$$

代入 $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3$, 得

$$x_n = -\frac{3}{2} + \frac{11}{6}(-1)^{n-3} + \frac{2^n}{3}.$$

4. 种族增长问题

利用矩阵的特征值与特征向量理论，可以方便地求解种族种族增长模型，进而更好地理解种族的演化特征，从而有效地对种族进行动态调节，促进种族的良性发展.

例题 意大利数学家斐波那契提出了如下的兔子繁殖问题：设有一对兔子，出生两个月后生下一对小兔，以后每个月生下一对；新生的小兔也是这样繁殖后代. 假定每生下一对小兔必是雌雄异性，且均无死亡. 那么，从一对新生兔开始，此后每个月有多少对兔？

解答 设 x_n 为第 n 个月的兔子对数，则

$x_0=1, x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=5, x_5=8, \cdots$

注意到数列 $\{x_n\}$ 满足递推关系

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

从而有

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} x_{n-2} \\ x_{n-3} \end{bmatrix} = \cdots = A^{n-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}.$$

用求矩阵幂的对角化方法，可求得

$$A^{n-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} & -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} & -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\end{bmatrix}$$

从而

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

结论 $\{x_n\}$为一类指数增长模型，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty.$

若不对兔子的数量进行有效地控制，兔子将会泛滥成灾.