Указания по выполнению курсовых работ по дисциплине «Дополнительные главы вычислительной математики»

Общие указания

Все варианты работ выполняются в виде программы в среде Matlab или Octave.

В отчете должны быть отражены:

1. Постановка задачи на вычисление
2. Теоретические выкладки метода решения
3. Описание реализации решения (перечисление реализованных и использованных функций, выполняемых ими задач, принцип работы)
4. Графики поверхности, описываемой искомой функцией на заданной области, полученные в результате работы программы (функции meshgrid+mesh)
5. Приложение: исходные тексты программы

Каждый студент выбирает себе вариант по вкусу и утверждает его у преподавателя. Одинаковые варианты не утверждаются, поэтому кто раньше озадачится, тому больше свободы. Принесенные в конце семестра работы по неутвержденным вариантам имеют все шансы быть непринятыми и обязательно будут непринятыми, если вариант будет повторяться с уже сданным или утвержденным.

Не лишним будет напомнить, что смотреть «одним глазком» чужие работы не стоит, поскольку в этом случае работы станут похожими. Из нескольких похожих работ нормальную оценку получает лишь первая, остальные – не выше тройки. И на этот раз мне просто лениво будет что-либо объяснять и обосновывать, а также по многу раз приходить и читать новые варианты курсовиков. Если я посчитаю нужным поставить три балла, я это делаю сразу и без разговоров о том, как не хочется портить зачетку.

Варианты курсовых работ

Все варианты курсовых работ предполагают решение двумерного интегрального уравнения или двумерного дифференциального уравнения в частных производных на квадрате $Q = \{0 \le x_1 \le 1; 0 \le x_2 \le 1\}$.

В случае дифференциальных уравнений решается задача Дирихле с заданными значениями искомой функции на границе квадрата $\widetilde{Q}$. Решение выполняется с помощью запрограммированного самостоятельно многосеточного метода с кусочно-постоянными операторами перехода. В зависимости от варианта выполняется W-цикл (начало от приближения на качественной сетке, на каждом цикле по два вложенных решения с коррекцией) или F-цикл (full multigrid, начало от приближения на грубой сетке и постепенное возвышение к качественной).

Решение интегральных уравнений в зависимости от варианта выполняется путем дискретизации либо заменой конечной суммой, либо методом Бубнова-Галеркина. В первом случае на основе разностного ядра уравнения строится теплицева матрица, на ее основе строится циркулянтная матрица, после чего реализуется быстрое умножение на вектор с помощью дискретной свертки и вычисления БПФ. В случае метода Бубнова-Галеркина изначально выполняется аналитическая подготовка (берутся интегралы в общем виде), полученные в результате выражения используются в программе для построения матрицы и вектора свободных коэффициентов.

Вариант №1

Дифференциальное уравнение $\langle \nabla, x_1(x_2+1)\nabla \rangle u(x) = x_1 x_2, \quad x \in Q.$

Условия на границе: $u(x) = \begin{cases} x_2, & x_1 = 0 \\ x_1, & x_2 = 0 \\ 1, & x_1 = 1 \vee x_2 = 1 \end{cases} \qquad x \in \widetilde{Q}.$

Пятиточечная аппроксимация. Решение многосеточным методом через W-цикл.

Вариант №2

Дифференциальное уравнение $\langle \nabla, (x_1+1)x_2\nabla \rangle u(x) = x_1 x_2, \quad x \in Q.$

Условия на границе: $u(x) = \begin{cases} 1-x_2, & x_1 = 0 \\ 1-x_1, & x_2 = 0 \\ 0, & x_1 = 1 \vee x_2 = 1 \end{cases} \qquad x \in \widetilde{Q}.$

Пятиточечная аппроксимация. Решение многосеточным методом через W-цикл.

Вариант №3

Дифференциальное уравнение $\langle \nabla, (x_1+1)(x_2+1)\nabla \rangle u(x) = x_1 x_2, \quad x \in Q.$

Условия на границе: $u(x) = \begin{cases} 1-x_2, & x_1 = 1 \\ 1-x_1, & x_2 = 1 \\ 1, & x_1 = 0 \vee x_2 = 0 \end{cases} \qquad x \in \widetilde{Q}.$

Пятиточечная аппроксимация. Решение многосеточным методом через W-цикл.

Вариант №4

Дифференциальное уравнение $\langle \nabla, x_1(x_2+1)\nabla \rangle u(x) = x_1 x_2, \quad x \in Q.$

Условия на границе: $u(x) = \begin{cases} 1-x_2, & x_1 = 0 \\ 1-x_1, & x_2 = 0 \\ 0, & x_1 = 1 \vee x_2 = 1 \end{cases} \qquad x \in \widetilde{Q}.$

Пятиточечная аппроксимация. Решение многосеточным методом через F-цикл.

Вариант №5

Дифференциальное уравнение $\left\langle \nabla, (x_1+1)x_2\nabla \right\rangle u(x) = x_1 x_2, \quad x \in Q.$

Условия на границе: $u(x) = \begin{cases} 1 - x_2, & x_1 = 1 \\ 1 - x_1, & x_2 = 1 \\ 1, & x_1 = 0 \vee x_2 = 0 \end{cases} \qquad x \in \widetilde{Q}.$

Пятиточечная аппроксимация. Решение многосеточным методом через F-цикл.

Вариант №6

Дифференциальное уравнение $\left\langle \nabla, (x_1+1)(x_2+1)\nabla \right\rangle u(x) = x_1 x_2, \quad x \in Q.$

Условия на границе: $u(x) = \begin{cases} x_2, & x_1 = 0 \\ x_1, & x_2 = 0 \\ 1, & x_1 = 1 \vee x_2 = 1 \end{cases} \qquad x \in \widetilde{Q}.$

Пятиточечная аппроксимация. Решение многосеточным методом через F-цикл.

Вариант №7

Интегральное уравнение с разностным ядром

$$u(x) - \int_Q \tan\left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 - \frac{1}{2} \right) \cdot u(y)dy = x_1 + x_2, \quad x \in Q.$$

Дискретизация путем замены конечной суммой. Итерационный метод с быстрым умножением через БПФ.

Вариант №8

Интегральное уравнение с разностным ядром

$$u(x) - \int_Q \frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}{1 + \left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right)^2} \cdot u(y)dy = x_1 + x_2, \quad x \in Q.$$

Дискретизация путем замены конечной суммой. Итерационный метод с быстрым умножением через БПФ.

Вариант №9

Интегральное уравнение с разностным ядром

$$u(x) - \int_Q \sin\left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right) \cdot u(y)dy = x_1 + x_2, \quad x \in Q.$$

Дискретизация путем замены конечной суммой. Итерационный метод с быстрым умножением через БПФ.

Вариант №10

Интегральное уравнение с разностным ядром

$$u(x)-\int_Q \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\frac{1}{4}}\cdot u(y)dy = x_1+x_2, \quad x\in Q.$$

Дискретизация путем замены конечной суммой. Итерационный метод с быстрым умножением через БПФ.

Вариант №11

Интегральное уравнение $u(x)-\frac{1}{2}\int_Q (x_1+y_2)\cdot u(y)dy = x_1+x_2, \quad x\in Q.$

Дискретизация методом Бубнова-Галеркина с базисом $\varphi_{pq} = x_1{}^p x_2{}^q;\ p,q=0,...,n-1$.

Вариант №12

Интегральное уравнение $u(x)-\frac{1}{2}\int_Q (x_2+y_1)\cdot u(y)dy = x_1 x_2, \quad x\in Q.$

Дискретизация методом Бубнова-Галеркина с базисом $\varphi_{pq} = x_1{}^p x_2{}^q;\ p,q=0,...,n-1$.

Вариант №13

Интегральное уравнение $u(x)-\frac{1}{2}\int_Q \exp(x_1+y_2)\cdot u(y)dy = x_1+x_2, \quad x\in Q.$

Дискретизация методом Бубнова-Галеркина с базисом $\varphi_{pq} = \exp\left(\frac{i2\pi}{n}px_1\right)\exp\left(\frac{i2\pi}{n}qx_2\right);\ p,q=0,...,n-1$.

Вариант №14

Интегральное уравнение $u(x)-\frac{1}{2}\int_Q \exp(x_2+y_1)\cdot u(y)dy = x_1 x_2, \quad x\in Q.$

Дискретизация методом Бубнова-Галеркина с базисом $\varphi_{pq} = \exp\left(\frac{i2\pi}{n}px_1\right)\exp\left(\frac{i2\pi}{n}qx_2\right);\ p,q=0,...,n-1$.

Пример программы

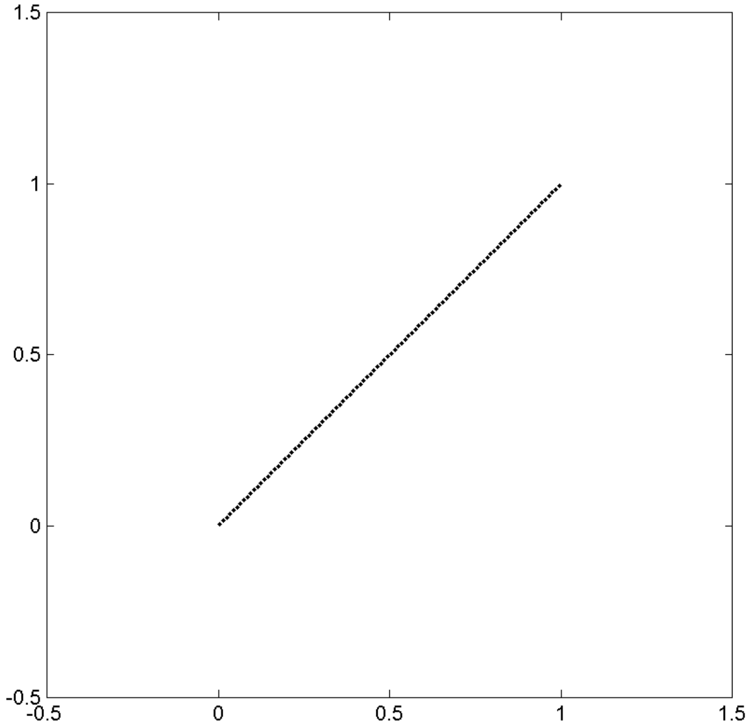
Ниже приведен текст программы на языке Matlab, осуществляющей численное решение следующего одномерного интегрального уравнения:

$$u(x)-\int_0^1 xy\cdot u(y)dy = \frac{2}{3}x, \quad x\in[0,1].$$

Пример очень прост (случай одномерный, дискретизация заменой конечной суммой, прямое умножение матрицы на вектор), поэтому программа довольно коротка:

```
% решение интегрального уравнения
% u(x) - int(0, 1, x * y * u(y), dy) = 2/3 * x
% путем сведения к конечной сумме

% исходные данные
a = 0;
b = 1;
n = 100;

% шаг
h = (b - a) / n;

% матрица аппроксимации ядра
[y, x] = meshgrid(a + h/2 : h : b);
k = x .* y * h;

% вектор свободных коэффициентов
x = (a + h/2 : h : b)';
f = 2/3 .* x;

% простые итерации до достижения малой относительной невязки
u = f;
while norm(u - k * u - f) / norm(f) > eps
    u = k * u + f;
end

% вывод результатов
plot(x, u, 'k.');
axis('equal');
xlim([-1/2 3/2]);
ylim([-1/2 3/2]);
% сохранение в файл
print('-dpng','result.png');
```

Приведенная программа осуществляет дискретизацию уравнения (построение матрицы аппроксимации ядра и вектора аппроксимации свободной функции), после чего выполняет простые итерации до тех пор, пока относительная невязка СЛАУ не станет достаточно мала. После этого выводится следующий график значений полученного вектора:


1.5
1
0.5
0
-0.5
-0.5
0
0.5
1
1.5