

Analyse I - Notes et Résumés

Faustine Flicoteaux

Semestre d'automne 2024

Contents

Introduction

Ce qui suit est mes propres notes et explications. Évidemment, tout ça ne me vient pas par l'opération du Saint-Esprit, mais du cours de ma professeure, Prof. Anna Lachowska, et de vidéos et cours en ligne.

J'explique principalement des concepts que je ne comprends pas totalement, c'est donc à prendre avec des pincettes. Si vous remarquez une erreur (mathématique ou de langue), n'hésitez pas à m'en faire part à mon adresse e-mail `faustine.flicoteaux@epfl.ch`.

Le dernier fichier \LaTeX et le PDF correspondant peuvent être trouvés sur mon dépôt GitHub <https://github.com/FocusedFaust/LectureNotes>.

Chapter 1

Suites et séries

1.1 Limites à retenir

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n = \begin{cases} 0 & |r| < 1 \\ a_0 & r = 1 \\ \text{diverge} & |r| > 1 \text{ ou } r = -1 \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pour tout $a > 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p}$ pour tout $p > 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 - (\frac{1}{n})^2} = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n}{n!} = 0$ pour tout $p > 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n}{n \log(n)} = +\infty$ pour $\alpha > 1$ parce que α^n grandit plus vite que $n \log(n)$

1.2 Ordre de croissance de quelques fonctions

L'ordre de croissance est utile lorsque nous étudions la limite à l'infini d'une fonction rationnelle. Si le dénominateur croît plus vite que le numérateur, la limite vaudra 0. Lorsque $x \rightarrow \infty$, on a donc :

$$\cos(x) \prec \ln(x) \prec \ln(x)^\alpha \prec x \prec x^2 \prec x^{\alpha > 2} \prec \alpha^x \sim e^x \prec x^x$$

La notation est telle que \prec signifie "croît moins vite que" et \succ signifie "croît plus vite que".

1.3 Séries divergentes à retenir

Les séries suivantes sont divergentes et utiles pour le critère de comparaison.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (série harmonique)
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = +\infty$ si $\alpha \leq 1$
- $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ si $r \geq 1$

1.4 Séries convergentes à retenir

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ et, plus généralement, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = \zeta(\alpha)$ si $\alpha > 1$ (fonction zêta de Riemann)
- $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} = \frac{1}{e}$
- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \ln(2)$ (série harmonique alternée)
- $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$ si et seulement si $|r| < 1$ (série géométrique)
- $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot r^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$ si et seulement si $|r| < 1$ (série géométrique dérivée)

1.5 Limites de quelques fonctions

Toujours utiles à savoir et souvent présentes en examen ou en exercice.

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow +\infty$
e^x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	\nexists	$-\infty$	$+\infty$
$1/x$	0	\nexists	0

1.6 Quelques suites célèbres

Les suites dont je parle ici n'ont pas été étudiées en cours et ne sont pas au programme mais je les ai trouvées intéressantes et/ou amusantes.

Suite de Conway Cette suite consiste à énoncer le nombre de chiffres du terme précédent. Elle est qualifiée de suite "audioactive" ou "Look and Tell sequence" en anglais.

$a_0 = 1$ (terme initial)

$a_1 = 11$ (une fois 1)

$a_2 = 21$ (deux fois 1)

$a_3 = 12\ 11$

$a_4 = 11\ 12\ 21$

$a_5 = 31\ 22\ 11$

$a_6 = 13\ 11\ 22\ 21$

... et ainsi de suite

Chapter 2

Nombres complexes

2.1 Relation entre forme polaire et trigo

2.1.1 Formule d'Euler et dérivées

La formule d'Euler nous donne la relation suivante :

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$$

qui nous permet de passer de la forme polaire à la forme cartésienne d'un nombre complexe. La même formule est applicable pour le conjugué :

$$e^{-i\phi} = \cos(\phi) - i \sin(\phi)$$

car le cosinus est pair et le sinus impair. Si on additionne maintenant les deux formes, on a

$$e^{i\phi} + e^{-i\phi} = (\cos(\phi) + i \sin(\phi)) + (\cos(\phi) - i \sin(\phi)) = 2 \cos(\phi)$$

De manière similaire, on a une formule pour le sinus :

$$e^{i\phi} - e^{-i\phi} = 2i \sin(\phi)$$

Il ne faut pas confondre ces égalités avec les définitions des sinus et cosinus hyperboliques, ici la puissance des exponentielles est bien complexe et non pas réelle.

Chapter 3

Intégration

3.1 Techniques d'intégration vues en cours

3.1.1 Relation de Chasles

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c trois réels de I .

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Cette égalité permet de séparer en plusieurs parties une intégrale, par exemple pour une valeur de b particulière et permettant d'utiliser d'autres techniques.

3.2 Techniques d'intégrations pas vues en cours

3.2.1 La technique des "2I"

Souvent, on désigne l'intégrale que l'on étudie par I , d'où le nom de cette méthode.

Lorsque l'on trouve une égalité pour une intégrale, c'est-à-dire deux intégrales qui sont égales mais ne sont pas exactement les mêmes, grâce par exemple, aux autres méthodes listées ici, on peut les additionner pour éliminer des termes et simplifier l'expression. On a alors une intégrale plus facile à manipuler. Il ne faut pas oublier cependant de diviser par 2 à la fin de notre calcul, car on a additionné l'intégrale avec elle-même ($2I$).

En gros, si on a $I = \int f(x)dx = \int g(x)dx$, on sait que $2I = \int f(x) + g(x)dx$, ce qui peut parfois être simplifié.

3.2.2 Formule du roi

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\int_b^a f(x)dx = \int_b^a f(a+b-x)dx$$

On a un résultat analogue pour les sommes : $\sum_{k=a}^b f(k) = \sum_{k=a}^b f(a+b-k)$. Il semble alors logique que les deux soient reliés, puisqu'on peut voir une intégrale

comme une somme, notamment à travers la somme des rectangles sous une fonction.

On prouve cette formule par un changement de base que je ne détaillerai pas ici mais dont l'intuition est que $x = a + b - u$.

Il est alors intéressant de noter que $\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = \int_0^{\pi/2} \cos(\frac{\pi}{2} - x) dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx$

Cette méthode peut être utile dans les cas où $a + b$ vaut une valeur remarquable, par exemple un multiple de π dans le cas d'une intégration d'une formule trigonométrique. C'est aussi utile lorsque $a + b = 0$, car on remplace x par $-x$.¹

3.2.3 Formule de la reine

Pour une intégrale définie sur l'intervalle $[0, 2a]$, on sait que

$$\int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^a f(x) + f(2a - x) dx$$

Ici, le changement de variable pour démontrer la formule est $x = 2a - u$, combiné à la relation de Chasles.

Contrairement à la formule du roi, celle-ci est beaucoup plus situationnelle. Elle est sensée tirer parti de la symétrie d'une fonction, mais je n'ai pas réussi à trouver d'explication satisfaisante.

3.2.4 Formule du valet

Pour une fonction T -périodique $f(x)$, sur un intervalle $[0, nT]$, on a

$$\int_0^{nT} f(x) dx = n \int_0^T f(x) dx$$

ce qui fait sens car une fonction périodique aura toujours la même valeur pour une intégrale avec un intervalle égal à sa période, si on le décale de n périodes. L'intégrale de n périodes est donc égale à n intégrales de la période.

¹Ces explications sont tirées d'une vidéo par Axel Arno, https://www.youtube.com/watch?v=a5wgeZ78U_A.

Chapter 4

Astuces et reminders pour l'examen

4.1 Contres-exemples courants

Il est utile de tester les propositions données avec des contres exemples typiques.
Pour les fonctions, on a :

- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = e^x$ et son inverse, $g(x) = \ln(x)$

Pour les suites :

- Les suites alternées, c'est-à-dire contenant $(-1)^n$