Analyse I - Notes et Résumés

Faustine Flicoteaux

Semestre d'automne 2024

Contents

Introduction

Ce qui suit est mes propres notes et explications. Évidemment, tout ça ne me vient pas par l'opération du Saint-Esprit, mais du cours de ma professeure, Prof. Anna Lachowska, et de vidéos et cours en ligne.

J'explique principalement des concepts que je ne comprends pas totalement, c'est donc à prendre avec des pincettes. Si vous remarquez une erreur (mathématique ou de langue), n'hésitez pas à m'en faire part à mon adresse e-mail `faustine.flicoteaux@epfl.ch`.

Le dernier fichier LaTeXet le PDF correspondant peuvent être trouvés sur mon dépôt GitHub `https://github.com/FocusedFaust/LectureNotes`.

Chapter 1

Suites et séries

1.1 Limites

1.1.1 Liminf et Limsup

Si $\lim_{n\to+\infty}(a_n)$ existe, alors $\lim_{n\to+\infty}(a_n) = \liminf_{n\to+\infty}(a_n) = \limsup_{n\to+\infty}(a_n)$. Lorsqu'on cherche lim sup ou lim inf d'une suite, alors on peut essayer de calculer la limite de cette suite.

L'inverse est vrai aussi, et si $\limsup_{n\to+\infty}(a_n) = \liminf_{n\to+\infty}(a_n) = l$, alors (a_n) converge vers l.

Dans le cas d'une suite dont les bornes dépendent d'oscillations ($(-1)^n$), il peut être utile de diviser la suite en deux sous-suites et de les étudier séparément.

1.1.2 Calcul des limites

Lorsqu'on veut évaluer une fonction en un point $x = a$ ou à l'infini, il y a plusieurs méthodes.

Limite en un point Si notre limite est indéterminée ($\infty - \infty$,0/0, ∞/∞,...) il y a là encore plusieurs méthodes. On peut utiliser le théorème de Bernoulli-L'Hospital (en vérifiant d'abord les conditions, bien sûr).

On peut également tirer avantage d'un conjugué ($(a+b)(a-b) = a^2 + b^2$) et simplifier notre fonction le plus possible.

Enfin, on peut calculer les limites à gauche et à droite, qui existent forcément. Si elles sont égales, la limite existe et $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$. Sinon ou si les limites latérales sont infinies, la limite n'existe pas.

Limite à l'infini Pour une limite à l'infini ($x \to +\infty$), on étudie la stabilité du comportement de la fonction (convergence vers une valeur finir, comportement oscillatoire, ...). Si une fonction élémentaire bornée est multiplié par une autre fonction qui tend vers 0, alors la limite générale tend vers 0.

Sinon, on peut tirer avantage de la "factorisation forcée", ce qui veut dire extraire la variable qui tend à l'infini, particulièrement dans le cas de fractions.

Par exemple,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x+\sqrt{3x+\sqrt{5x}}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{2+\underbrace{\frac{\sqrt{3x+\sqrt{5x}}}{x}}_{\to 0}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1.1.3 Existence des limites

Une limite n'existe pas si ses limites latérales n'existent pas (i.e. $\lim_{x\to a^+} \neq \lim_{x\to a^-}$). Cependant, une limite latérale existera toujours (ce qui ne veut pas dire qu'elle converge).

1.1.4 Limite des suites récurrentes

Soit (a_n), une suite définie par récurrence. On peut calculer si la suite converge en remplaçant les termes de la suite par la limite, car à l'infini, deux termes sont infiniment proches. On trouve alors des racines de l'équation des limites, Si il y en a plusieurs (de racines), on peut éliminer celles qui sont positives/négatives selon l'évolution de la suite((dé)croissante).

Par exemple, soit $a_n = a_{n-1}^2 - 2$ et $a_0 = 2$, alors on a l'équation $l = l^2 - 2 \Rightarrow l^2 - l - 2 = (x+1)(x-2) = 0$. On sait que a_n est croissante, sa limite est donc 2.

1.1.5 Limites à l'infini à retenir

- $\lim_{n\to\infty} a_0 r^n = \begin{cases} 0 & |r| < 1 \\ a_0 & r = 1 \\ diverge & |r| > 1 \text{ ou } r = -1 \end{cases}$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pour tout $a > 1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p}$ pour tout $p > 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{sin(1/n)}{1/n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{p^n}{n!} = 0$ pour tout $p > 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{n\log(n)} = +\infty$ pour $\alpha > 1$ parce que α^n grandit plus vite que $n\log(n)$

1.2 Ordre de croissance de quelques fonctions

L'ordre de croissance est utile lorsque nous étudions la limite à l'infini d'une fonction rationnelle. Si le dénominateur croît plus vite que le numérateur, la limite vaudra 0. Lorsque $x \to \infty$, on a donc :

$$\cos(x) \prec \ \ln(x) \prec \ \ln(x)^\alpha \prec x \prec x^2 \prec x^{\alpha>2} \prec \alpha^x \sim e^x \prec x^x$$

La notation est telle que $\prec$ signifie "croît moins vite que" et $\succ$ signifie "croît plus vite que".

1.3 Séries divergentes à retenir

Les séries suivantes sont divergentes et utiles pour le critère de comparaison.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (série harmonique)
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$ si $\alpha \leq 1$
- $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ si $r \geq 1$

1.4 Séries convergentes à retenir

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ et, plus généralement, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \zeta(\alpha)$ si $\alpha > 1$ (fonction zêta de Riemann)
- $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} = \frac{1}{e}$
- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \ln(2)$ (série harmonique alternée)
- $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$ si et seulement si $|r| < 1$ (série géométrique)
- $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot r^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$ si et seulement si $|r| < 1$ (série géométrique dérivée)

1.5 Limites de quelques fonctions

Toujours utiles à savoir et souvent présentes en examen ou en exercice.

	$x \to -\infty$	$x \to 0$	$x \to +\infty$
e^x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	$\nexists$	$-\infty$	$+\infty$
$1/x$	0	$\nexists$	0
0^x	$\nexists$	1	0

1.6 Quelques suites célèbres

Les suites dont je parle ici n'ont pas été étudiées en cours et ne sont pas au programme mais je les ai trouvées intéressantes et/ou amusantes.

Suite de Conway Cette suite consiste à énoncer le nombre de chiffres du terme précédent. Elle est qualifiée de suite "audioactive" ou "Look and Tell sequence" en anglais.

$a_0 = 1$ (terme initial)
$a_1 = 11$ (une fois 1)
$a_2 = 21$ (deux fois 1)
$a_3 = 12\ 11$
$a_4 = 11\ 12\ 21$
$a_5 = 31\ 22\ 11$
$a_6 = 13\ 11\ 22\ 21$
... et ainsi de suite

Chapter 2

Nombres complexes

2.1 Forme cartésienne to forme polaire

Soit $z = a + ib$. Alors $z = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{i\phi}$ où $\phi = arctan(b/a)$.

2.2 Relation entre forme polaire et trigo

2.2.1 Formule d'Euler et dérivées

La formule d'Euler nous donne la relation suivante :

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\ \sin(\phi)$$

qui nous permet de passer de la forme polaire à la forme cartésienne d'un nombre complexe. La même formule est applicable pour le conjugué :

$$e^{-i\phi} = \cos(\phi) - i\ \sin(\phi)$$

car le cosinus est pair et le cosinus impair. Si on additionne maintenant les deux formes, on a

$$e^{i\phi} + e^{-i\phi} = (\cos(\phi) + i\ \sin(\phi)) + (\cos(\phi) - i\ \sin(\phi)) = 2\ \cos(\phi)$$

De manière similaire, on a une formule pour le sinus :

$$e^{i\phi} - e^{-i\phi} = 2i\ \sin(\phi)$$

Il ne faut pas confondre ces égalités avec les définitions des sinus et cosinus hyperboliques, ici la puissance des exponentielles est bien complexe et non pas réelle.

2.3 Équations dans les complexes

Pour toute équation dans les complexes, il est plus simple de les ramener à leur forme polaire. Ensuite, il lors du calcul de l'angle, il faut bien penser au $+2k\pi$. C'est-à-dire $a\phi = b\phi + 2k\pi \Rightarrow \phi = \frac{2k\pi}{a-b}$ pour $k = \{0, 1, ..., (a + b) - 1\}$.

Chapter 3

Intégration

3.1 Techniques d'intégration vues en cours

3.1.1 Relation de Chasles

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c trois réels de I.

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Cette égalité permet de séparer en plusieurs parties une intégrale, par exemple pour une valeur de b particulière et permettant d'utiliser d'autres techniques.

3.2 Techniques d'intégrations pas vues en cours

3.2.1 La technique des "2I"

Souvent, on désigne l'intégrale que l'on étudie par I, d'où le nom de cette méthode.

Lorsque l'on trouve une égalité pour une intégrale, c'est-à-dire deux intégrales qui sont égales mais ne sont pas exactement les mêmes, grâce par exemple, aux autres méthodes listées ici, on peut les additionner pour élimer des termes et simplifier l'expression. On a alors une intégrale plus facile à manipuler. Il ne faut pas oublier cependant de diviser par 2 à la fin de notre calcul, car on a additionné l'intégrale avec elle-même ($2I$).

En gros, si on a $I = \int f(x)dx = \int g(x)dx$, on sait que $2I = \int f(x)+g(x)dx$, ce qui peut parfois être simplifié.

3.2.2 Formule du roi

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\int_b^a f(x)dx = \int_b^a f(a+b-x)dx$$

On a un résultat analogue pour les sommes : $\sum_{k=a}^{b} f(k) = \sum_{k=a}^{b} f(a+b-k)$. Il semble alors logique que les deux soient reliés, puisqu'on peut voir une intégrale comme une somme, notamment à travers la somme des rectangles sous une fonction.

On prouve cette formule par un changement de base que je ne détaillerai pas ici mais dont l'intuition est que $x = a + b - u$.

Il est alors intéressant de noter que $\int_0^{\pi/2} cos(x)dx = \int_0^{\pi/2} cos(\frac{\pi}{2} - x)dx = \int_0^{\pi/2} sin(x)dx$

Cette méthode peut être utile dans les cas où $a + b$ vaut une valeur remarquable, par exemple un multiple de π dans le cas d'une intégration d'une formule trigonométrique. C'est aussi utile lorsque $a + b = 0$, car on remplace x par $-x$.[1]

3.2.3 Formule de la reine

Pour une intégrale définie sur l'intervalle $[0, 2a]$, on sait que

$$\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^{a} f(x) + f(2a - x)dx$$

Ici, le changement de variable pour démontrer la formule est $x = 2a - u$, combiné à la relation de Chasles.

Contrairement à la formule du roi, celle-ci est beaucoup plus situationnelle. Elle est sensée tirer parti de la symétrie d'une fonction, mais je n'ai pas réussi à trouver d'explication satisfaisante.

3.2.4 Formule du valet

Pour une fonction T-périodique $f(x)$, sur un intervalle $[0, nT]$, on a

$$\int_0^{nT} f(x)dx = n\int_0^{T} f(x)dx$$

ce qui fait sens car une fonction périodique aura toujours la même valeur pour une intégrale avec un intervalle égal à sa période, si on le décale de n périodes. L'intégrale de n périodes est donc égale à n intégrales de la période.

[1] Ces explications sont tirées d'une vidéo par Axel Arno, `https://www.youtube.com/watch?v=a5wgeZ78U_A`.

Chapter 4

Astuces et reminders pour l'examen

4.1 Identités trigonométriques

$\cos(x) \cdot \sin(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$

4.2 Contres-exemples courants

Il est utile de tester les propositions données avec des contres exemples typiques. Pour les fonctions, on a :

- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = e^x$ et son inverse, $g(x) = \ln(x)$
- Une fonction constante, par exemple lorsque $f_k(x) \neq x,\ \forall x \in [0, k]$ ou toute équation semblable.
- Particulièrement pour la continuité, les fonctions par parties.

Pour les suites :

- Les suites alternées, c'est-à-dire contenant $(-1)^n$

4.3 Continuité, bijectivité et monotonie

Une fonction f bijective et continue est strictement monotone. Cependant, une fonction strictement monotone n'est pas forcément bijective, on prendra par exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f = e^x$. L'exponentielle est strictement croissante mais pas bijective sur R. Elle l'est seulement sur R^+.

$$\text{bijection continue} \overset{\rightarrow}{\not\leftarrow} \text{monotonie stricte}$$

Le domaine de définition de l'inverse d'une fonction est l'image de cette fonction.
$f^{-1}(x) = a \Leftrightarrow f(a) = x$

4.4 Et à l'examen

Penser à prendre de grandes respirations, et prendre son temps pour vérifier les calculs. Une erreur de signe est si vite arrivée.

Et finalement, May the force be with you!