A.

$f(n)$ 是一个奇怪的函数，看上去似乎并没有很好的性质。但是由于 a_i 很小，所以 $f(n)$ 也会很小，至多是 $81\log_{10} n$！这启发我们转而去枚举 $f(n) = p$ 的值（显然不会超过 2000），然后算出唯一的 $n' = k \cdot p$，直接将 n' 分解判断 $f(n')$ 是否和 p 相同。

B.

我们只需要知道答案的奇偶性，这启发我们使用位运算来加速。

我们可以枚举除数 p 和倍数 d，显然我们需要将 $[pd, pd+p)$ 的答案异或到 $[0,p)$ 上。这一个过程可以使用 'bitset' 来加速完成。根据调和级数的结论，我们需要操作的次数为 $\sum_{p=1}^{n} \frac{n}{p} = O(n\log n)$。使用 'STL' 的 'bitset'，时间复杂度为 $O(\frac{n^2\log n}{\omega})$。

但是这样太慢了，一种解决方法是手写 'bitset' 来支持 $O(\frac{r-l}{\omega})$ 的区间操作。除此之外，还有一个优美的解决方法。设 $m = n/p/2$，每次将 $[0, mp)$ 和 $[mp, np)$ 异或，也即每次长度折半，其操作次数为

$$\sum_{i=1}^{n} \log \frac{n}{i} = O(n)$$

证明可以考虑缩放，或者直接应用斯特林公式。时间复杂度为 $O(\frac{n^2}{\omega})$。

C

首先是一个经典结论：x 能被 11 整除 $\iff$ x 奇数位之和 $\equiv$ x 偶数位之和 $\pmod{11}$

发现我们需要将给定的 a_i 按照长度奇偶性分类讨论。

插入长度为偶数的 a_i 对其他数的正负性没有变化，于是我们可以把过程看做 ** 先将长度为奇数的 a_i 安排好，再将长度为偶数的 a_i 插入 **。

所以我们可以对长度为偶数和奇数的 a_i 分别 DP（奇数偶数分别有 n 和 m 个）。

对奇数长度的 DP：$f(i, j, k)$ 表示已经考虑了前 i 个数，有 j 个数贡献相反，当前模 11 余 k。转移只需要考虑新加的数是正的还是负的。最后还要考虑奇数位置和偶数位置各自可以重新排列，也就是将答案乘上阶乘。

对偶数长度的 DP：$g(i,j,k)$ 表示已经安排好了 n 个奇数和前 i 个偶数，有 j 个空位贡献是正的，当前模 11 余 k。转移只需要考虑插在 ‘贡献是正的或者负的空位里 ‘ 即可。

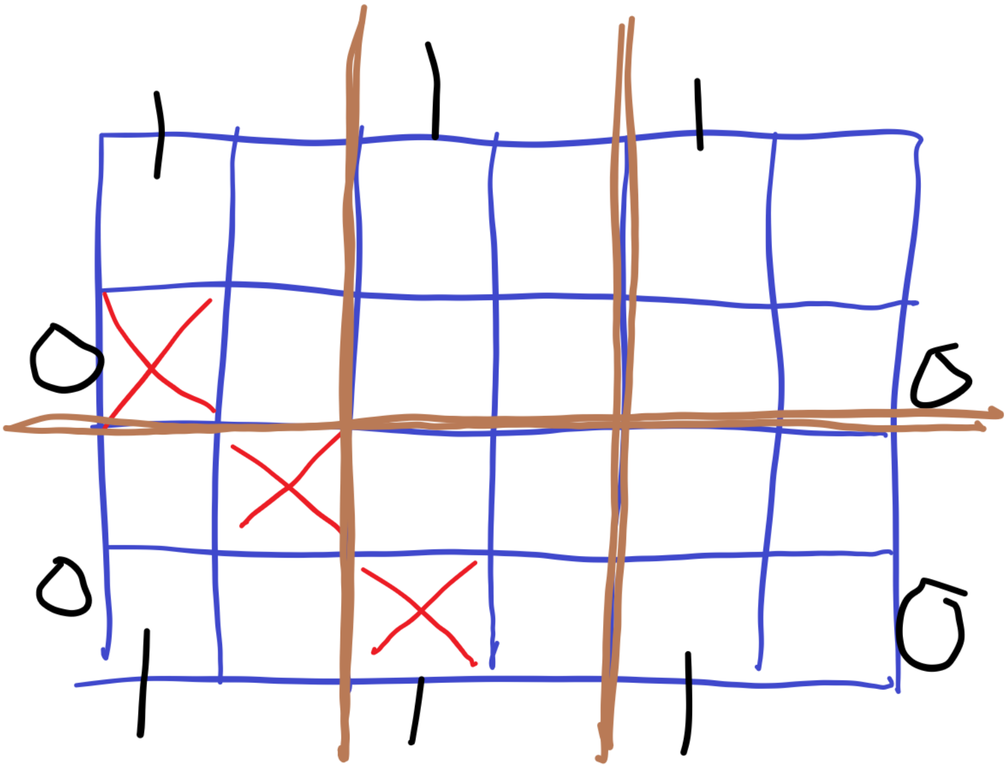
时间复杂度 $O(n^2)$，可以参考标程的代码实现。

多说几句，本题的时间复杂度瓶颈在于 DP 的处理。实际上，可以通过多项式技巧（联赛范围内不作要求）优化至 $O(n \cdot (\log n + 11) \cdot 11 \cdot \log 11)$。

DP 数组的合并可以看做二维多项式卷积。只有 11 种余数，对于每种余数，我们可以快速预处理其多项式（只和这种 a_i 的个数有关），而合并多项式的过程可以先分别 DFT 再 $O(11^2 n)$ 暴力将点值乘起来再 DFT 回去。将 11 个二维多项式启发式合并即可。

Walk on Grid

下面设 $g=\gcd(W,H), n=H/g, m=W/g$。首先考虑每条对角线，即 $(i+j)$ 相同的格子。



例如上图红色格子，同一对角线的箭头方向一定相同。我们考虑对 $2(W+H)$ 个边缘设 01 变量，表示他们是否被经过。根据每条对角线的限制，我们可以找出这些变量之间的二元关系（相等或者不同），如上图的 $0,1$ 所示。具体来说，同一行与同一列的对应变量相同；同一对角线上，不同方向的边缘对应的变量不同，同一方向的边缘对应的变量相同。

根据裴蜀定理，我们可以证明把边界每 g 个单位划成一段，一个变量 r 确定之后，每段中与 r 模 g 同余的变量都确定了，而且上下边界与左右边界的值不同。

我们使得每个网格入度出度都为 1，那么方案数就为 2^g。但是这样还不够，我们需要保证所有网格构成一个大环（即连通性）。

不妨设每段上边界中有 c $(0\le c\le g)$ 个 1，这样每段左边界都有 $g-c$ 个 1。这样上下边界都有 $L=nc$ 个 1，左右边界都有 $R=m(g-c)$ 个 1。另一个性质是，将上右边界的 1 按顺序（从左上到右下的顺序）排列成 a_i，将左下边界的 1 按顺序排列成 b_i，那么 a_i 一定会到达 b_i。

发现连通性等价于上边界和右边界的所有 1 都能到达其他的 1。根据之前的性质，现在变成这样的问题：有一个数 x 初始为 0，如果 $x<L$，那么 $x:=x+R$ 否则 $x:=x-L$，问 x 能否遍历 $[0,L+R)$ 的所有数。

发现他们都等价于 $x := (x+R) \bmod (L+R)$。那么根据裴蜀定理，合法的条件就是 $\gcd(L,R)=1$。

我们只需对于所有满足这个条件的 c，将 $\binom{g}{c}$ 求和即可。时间复杂度 $O((W+H)\log(W+H))$。