







DATA LAB \$

GUARDA AVANTI

Big Data, nuove competenze per nuove professioni.























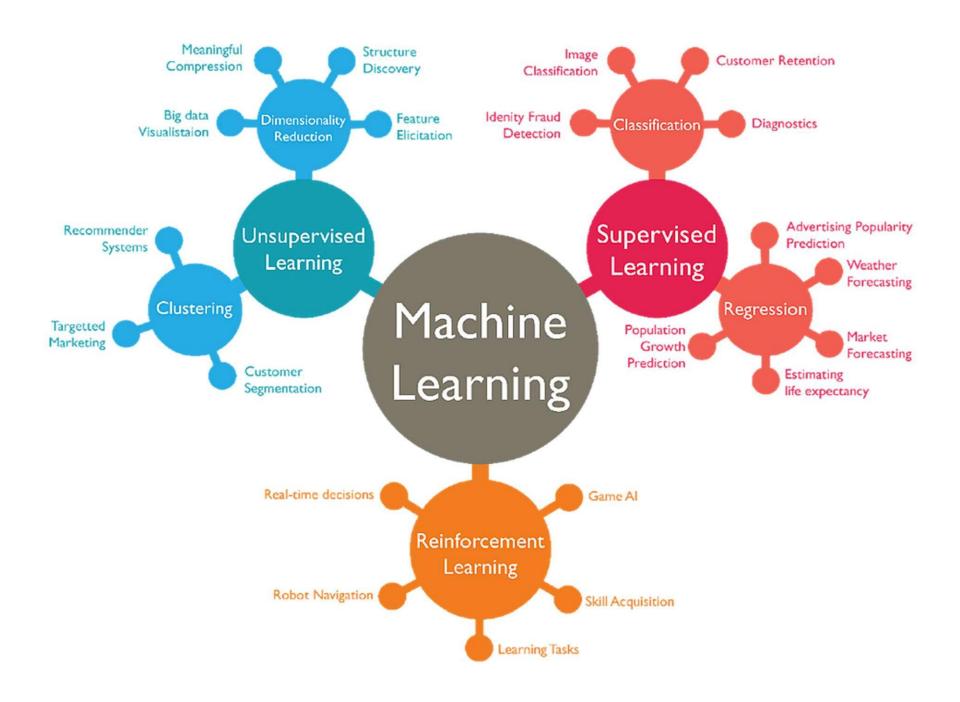
"Anticipare la crescita con le nuove competenze sui Big Data" Operazione Rif. PA 2023-19167/RER approvata con DGR n° 843 del 29 maggio 2023 e co-finanziata dal Fondo Sociale Europeo Plus 2021-2027 Regione Emilia-Romagna

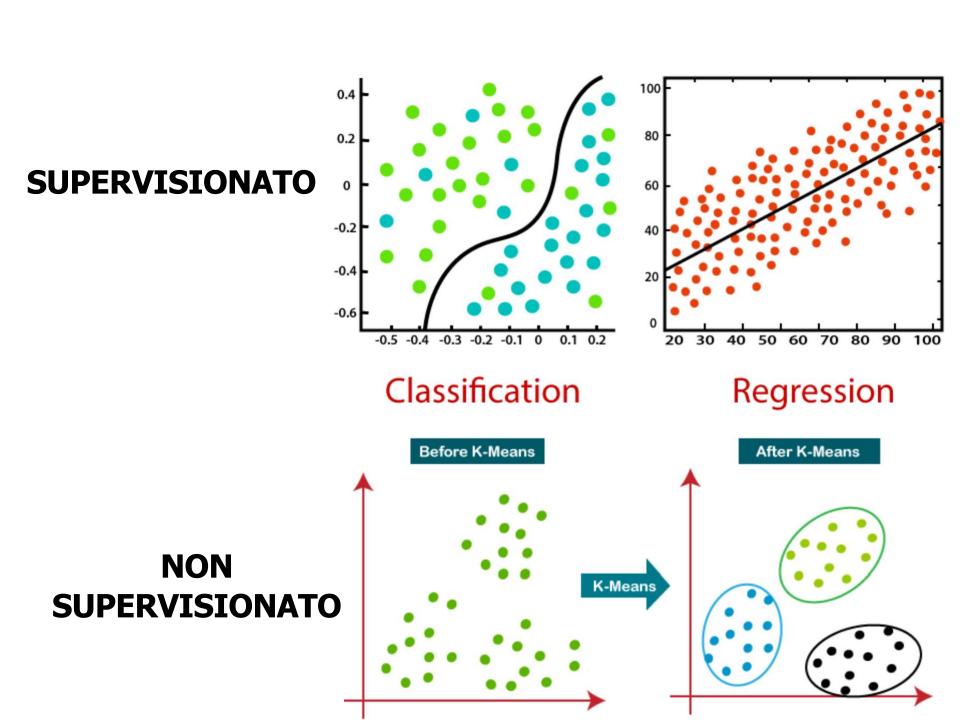


MACHINE LEARNING...









LA REGRESSIONE LINEARE



Quando tra due variabili c'è una relazione di dipendenza, si può cercare di prevedere il valore di una variabile in funzione del valore assunto dall'altra.

Questo ha significato in senso stretto quando si ipotizza una relazione di causalità tra la variabile **indipendente**, su cui si agisce, e quella **dipendente**, su cui si vuole produrre un effetto.

Volendo costruire un modello statistico per prevedere Y in funzione di X, si pone la questione di quale relazione funzionale ipotizzare tra la variabile indipendente X e la variabile dipendente Y.

Il modello più semplice di relazione tra due variabili è quello lineare di primo grado, rappresentato da una retta, la cui equazione è :

$$y = a + bx$$

Una volta determinata la retta, il modello permetterà di stimare il valore della variabile Y sulla base del valore assunto dalla X

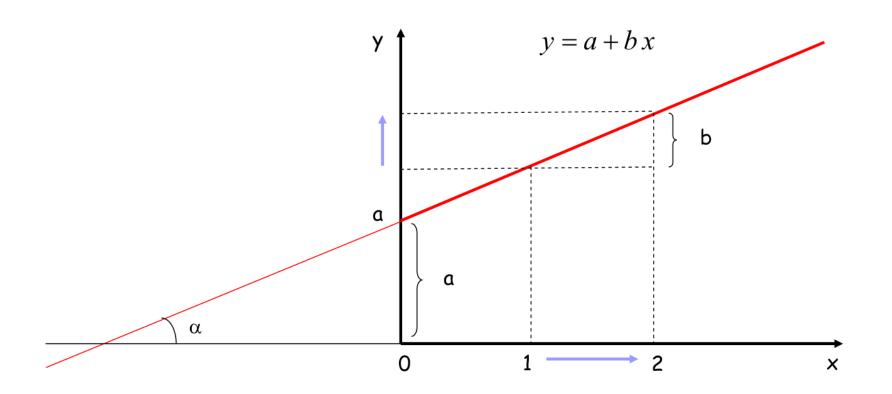
Per ottenere un buon modello, e quindi delle buone previsioni, occorre determinare la retta che meglio *descrive* i punti osservati: in pratica, si tratta di determinare i due coefficienti a e b che compaiono nell'equazione della retta: $y = a + b \times$

Ripassiamo un po' di geometria (e di trigonometria ...):

- il parametro a è l'intercetta della retta con l'asse delle ordinate
- Il parametro $\bf b$ è il **coefficiente angolare**: misura l'inclinazione della retta (è la tangente dell'angolo α formato dalla retta con l'asse delle ascisse)

In pratica:

- a ci dice quanto vale Y quando X vale 0
- b ci dice di quanto aumenta Y all'aumentare di una unità di X



- Se i punti fossero solo due, o fossero tutti allineati, determinare la retta interpolante sarebbe facile (per due punti passa una sola retta), ma sfortunatamente nella realtà i dati osservativi non sono mai esattamente allineati
- Per determinare la retta di regressione che meglio descrive i dati osservati è allora necessario stabilire un criterio statistico di valutazione della bontà del modello:

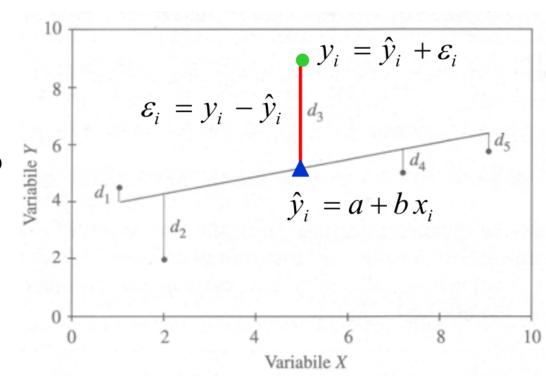
$$\widehat{y}_i = a + b x_i \quad \forall i$$

L'errore che si commette prevedendo ciascun Y osservato con il modello, può essere misurato come differenza tra il dato reale e quello previsto:

$$y_i = \hat{y}_i + \varepsilon_i$$

cioè, per ciascuna osservazione i, si commette un errore

$$\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$$



COME DETERMINARE LA SOLUZIONE MIGLIORE?

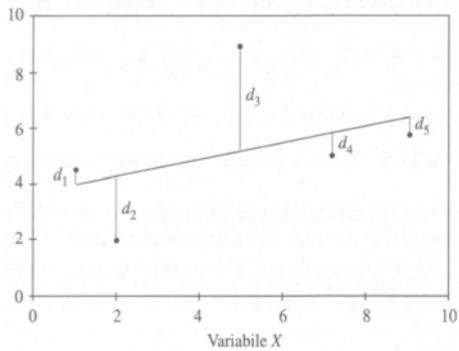
Il criterio detto dei **minimi quadrati** prevede di valutare la bontà del modello sulla base della somma dei quadrati di tutti errori di stima commessi:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b x_i)^2 = \min$$

La retta migliore, secondo questo criterio, è quella che minimizza la somma dei quadrati degli scarti dei valori stimati da quelli osservati, detti anche **residui** della regressione.

Perché proprio il quadrato dei residui?

- per evitare che residui positivi e negativi si compensino
- il valore assoluto è matematicamente più scomodo da gestire e non sempre porta ad una soluzione univoca
- il quadrato dà peso maggiore agli scarti più grandi, che sono anche quelli che ci disturbano di più: è meglio fare tanti piccoli errori che non un errore molto grosso

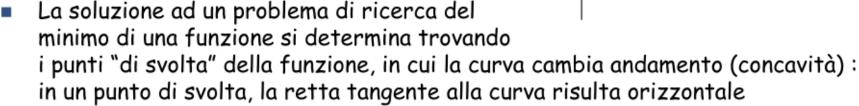


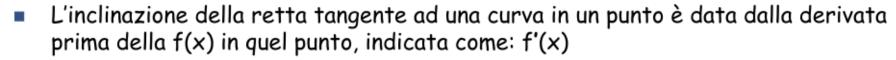
Ricerca del minimo di una funzione

 Il problema è determinare i coefficienti a e b del modello in modo da minimizzare la quantità :

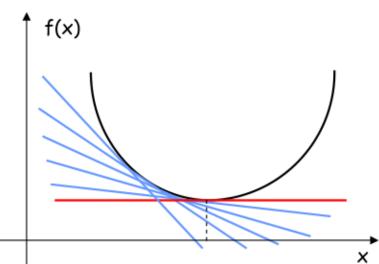
$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b x_i)^2 = \min$$

 La soluzione di questo problema in matematica è semplice: si tratta di trovare il minimo di una funzione f(x)





- Quindi nel punto di svolta la derivata prima f'(x) della funzione f(x) si annulla
- Allora per determinare i punti di minimo di una funzione f(x) è necessario imporre che valga zero la sua derivata prima rispetto a x, in questo modo si determina il punto x in cui vale: $f'(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0$



Stima dei parametri ai minimi quadrati

Nel nostro caso vogliamo minimizzare una funzione f(a,b) rispetto ad a e b:
dovremo imporre che siano nulle le *derivate prime parziali* della funzione rispetto ad a e b:

 $\sum_{i=1}^{n} (y_i - a)bx_i^2 = \min$

Derivando la funzione prima rispetto ad a e poi rispetto a b, e ponendo a zero tali derivate, si ottiene un sistema di due equazioni di primo grado in due incognite (a e b):

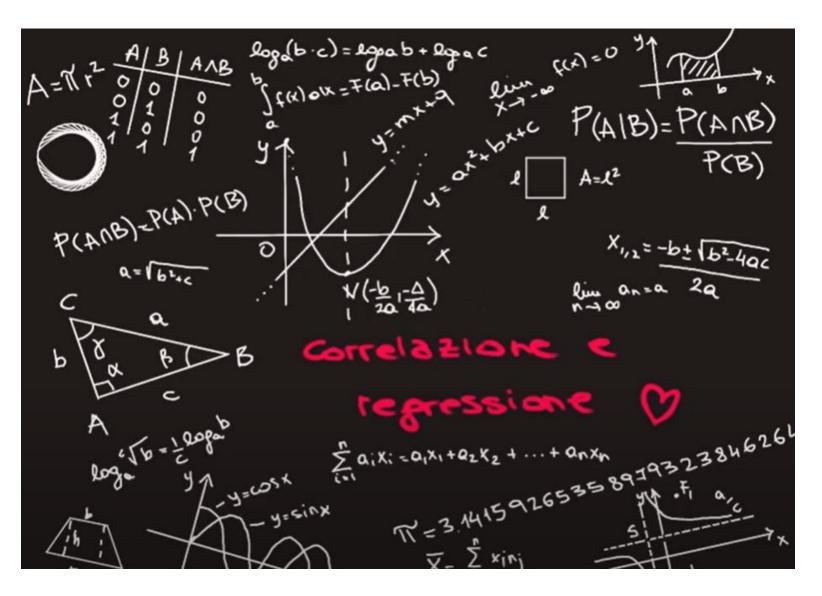
$$\begin{cases} \frac{\partial \sum (y_i - a - b x_i)^2}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \sum (y_i - a - b x_i)^2}{\partial b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\sum (y_i - a - b x_i) = 0 \\ -2\sum (y_i - a - b x_i) x_i = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum (y_i - a - b x_i) = 0 \\ \sum (y_i - a - b x_i) x_i = 0 \end{cases}$$

Sistema di equazioni normali di regressione

Risolvendo il sistema rispetto ad a e b, si determinano le stime ai minimi quadrati dei parametri della retta di regressione

ES1: RISOLVERE IL SISTEMA DI EQUAZIONI – LET'S GO

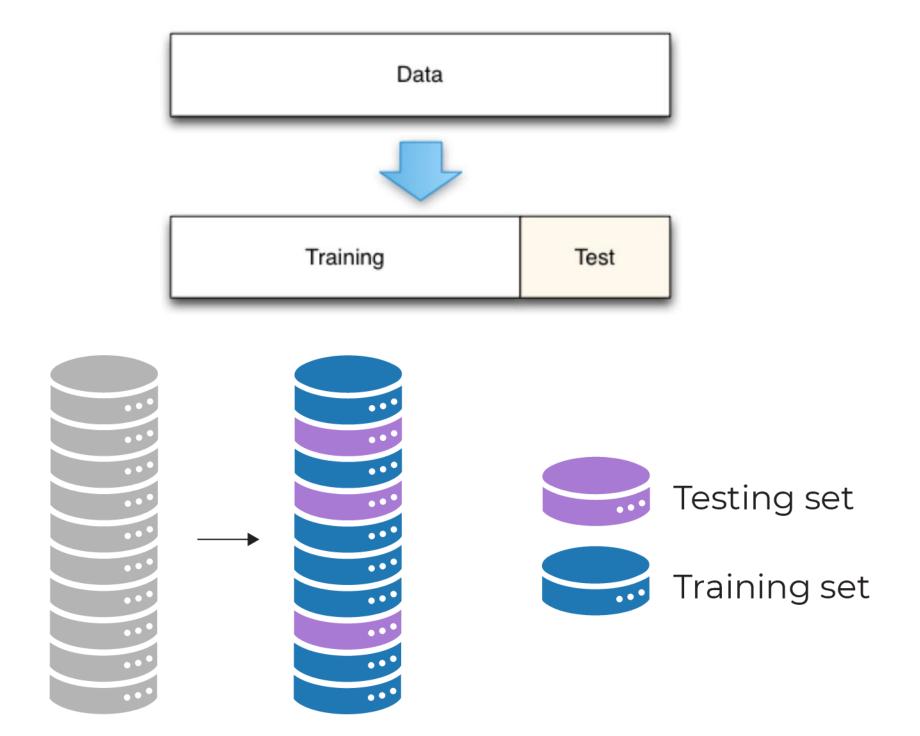




Machine Learning with Scikit-Learn

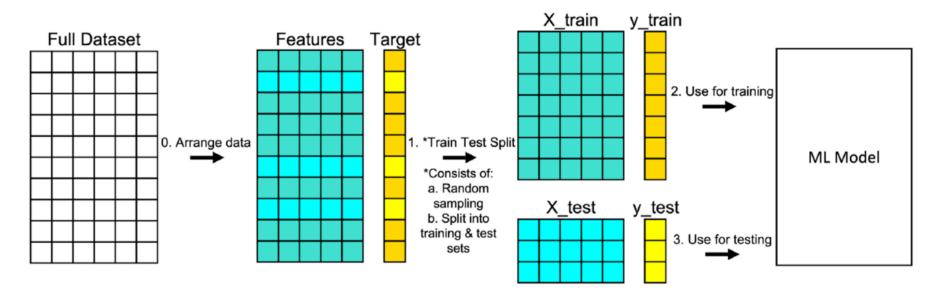
COME FACCIAMO A CAPIRE SE LE PERFORMACE DEL MIO MODELLO SARANNO OTTIMALI ANCHE CON NUOVI DATI SENZA LABEL?

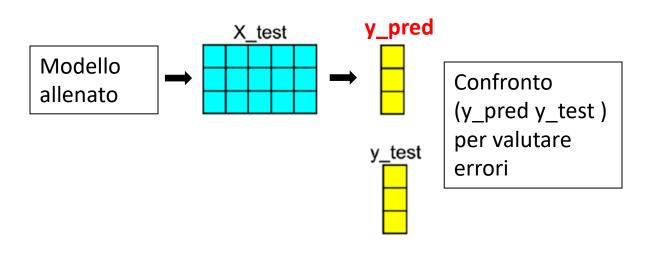




INPUT = FEATURES

OUTPUT = TARGET

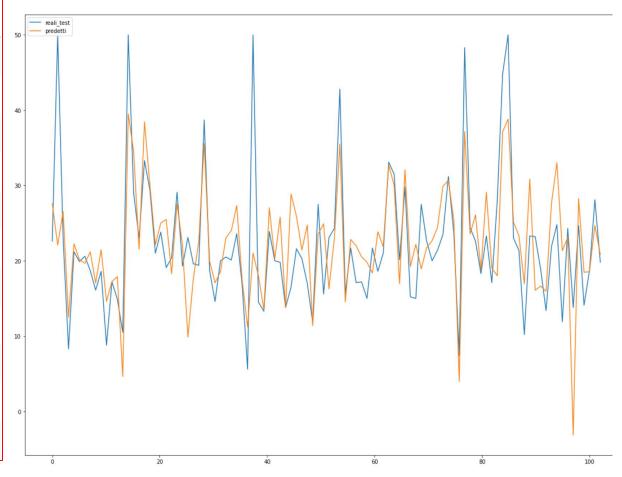


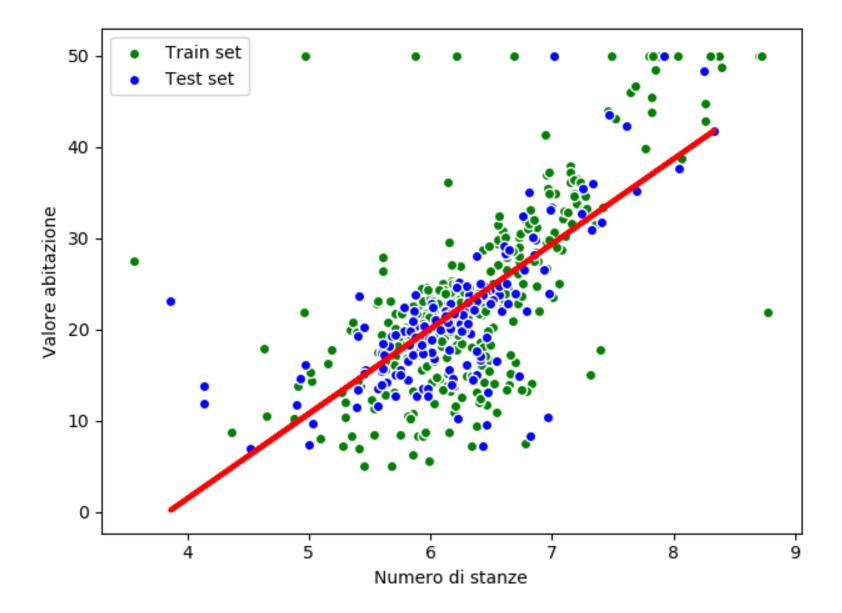


	predetti	reali_test
0	27.609031	22.6
1	22.099034	50.0
2	26.529255	23.0
3	12.507986	8.3
4	22.254879	21.2
97	28.271228	24.7
98	18.467419	14.1
99	18.558070	18.7
100	24.681964	28.1
101	20.826879	19.8



	predetti	reali_test
0	27.609031	22.6
1	22.099034	50.0
2	26.529255	23.0
3	12.507986	8.3
4	22.254879	21.2
97	28.271228	24.7
98	18.467419	14.1
99	18.558070	18.7
100	24.681964	28.1
101	20.826879	19.8





Introducendo opportune assunzioni si ottiene il modello di regressione lineare semplice.

Assunzione 1:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$
 per ogni osservazione i=1,...n

Assunzione 2:

Le \mathcal{E}_i sono variabili casuali indipendenti con valore atteso $E(\mathcal{E}_i) = 0$ e varianza costante $V(\mathcal{E}_i) = \sigma^2$ per ogni i=1,...,n

Assunzione 3:

I valori x_i della variabile esplicativa X sono noti senza errore

