un des cinq sujets qui peuvent tomber au DS

SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

1 Systèmes d'équations linéaires

D'une manière générale, un système d'équations linéaires est un ensemble de m **équations** dans lesquelles n **inconnues** sont combinées linéairement. Il se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}\,x_n & = b_1 \\ \vdots & = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}\,x_n & = b_m \end{cases}$$

2 Quelques exemples

disp a ⟺ faire un echo a

a) Système à 1 inconnue et une équation

$$2x_1 - 4 = 0 \quad ou \quad 2x_1 = 4 \quad ou \quad x_1 = 2$$

b) Système à 2 inconnues et une équation

$$2x_1 + 3x_2 = 4$$

Il y a une infinité de solutions : pour chaque valeur de x_1 on peut trouver la valeur de x_2 satisfaisant l'équation

disp(['a = ' num2str(a)]) → affiche a=2.

c) Système carrés à 2 inconnues et 2 équations

a. Avec second membre

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

b. Avec second membre nul

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

d) Système à 2 inconnues et 3 équations

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 6 \end{cases}$$

e) Système à 3 inconnues et 2 équations

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

3 Représentation matricielle des systèmes d'équations linéaires

Les systèmes d'équations linéaires peuvent se mettre sous forme matricielle. MatLab est donc tout indiqué pour les résoudre.

Le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ \vdots \quad = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}\,x_n = b_m \end{cases}$$

Peut s'écrire

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ou encore

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad ou \quad Ax = b$$

- A est appelé matrice des coefficients de dimension $m \times n$, ou m est le nombre de lignes et n est le nombre d'inconnues et de colonnes
- x est le vecteur des inconnues ou vecteur solution de dimension n
- b est le second membre de dimension m

Exemple : Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

La forme matricielle est la suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad avec \quad m = 2 \, et \, n = \, 3$$

4 Résidu

Définition : On appel résidu le vecteur tel que :

$$r = \; Ax - b$$

Si le résidu est le vecteur nul alors x est la solution du système d'équations.

5 Cas particulier des systèmes tels que $m = n$

Définition : si $m = n$, A est une matrice carrée.

5.1 *Solution des systèmes carrés non homogènes*

Définition : Un système est dit non homogène si au moins un des b_i est non nul

5.1.1 Si le déterminant de A est non nul

La matrice A est alors inversible. La solution est obtenue dès que l'on a pu écrire : $x = \cdots$. Ceci peut être obtenu en multipliant A GAUCHE les deux membres de l'équation par la matrice inverse de A.

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

En effet le résultat de $A^{-1}A$ est la matrice identité et nécessairement on a :

$$A^{-1}Ax = Id.x = x = A^{-1}b$$

Exemple : avec un matrice carrée 3x3

Le matrice identité est : $Id = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et le vecteur solution peut s'écrire : $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

On obtient donc : $Id \times x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x$

Finalement une méthode pour obtenir la solution du système d'équation consiste à calculer :

1. La matrice inverse A^{-1}
2. $x = A^{-1}b$

5.1.2 Si le déterminant de A est nul

Dans ce cas le système n'a pas de solution.

5.2 *Solution des systèmes carrés homogènes*

Définition : Un système est dit homogène si tous les $\{b_i, i = 1, n\}$ sont nuls.

Exemple avec $m = n = 2$:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

5.2.1 Si le déterminant et non nul

Compte tenu qu'un système homogène a un second membre identiquement nul, la solution ne peut être que le vecteur nul car $x = A^{-1}b$

5.2.2 Si le déterminant est nul

Dans ce cas il existe une infinité de solutions.

6 Systèmes tels que $m < n$

Exemple avec $m = 2, n = 3$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ \quad 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

Ce système dit <u>sous-déterminé</u> si les équations sont indépendantes. On constate qu'il a plus d'inconnues que d'équations, il a donc une infinité de solutions.

7 Systèmes tels que $m > n$

Exemple avec $m = 4, n = 3$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x - 3 = 5 \end{cases}$$

Ce système dit <u>surdéterminé</u> si les équations sont indépendantes. On constate qu'il a plus d'équations que d'inconnues et il n'a pas de solution.

8 Le théorème de Rouché-Fontené

Ce théorème d'algèbre linéaire qui fournit le nombre de solutions d'un système d'équations linéaires connaissant le rang de sa matrice augmentée et de la matrice des coefficients.

Théorème : Un système d'équations linéaires à n variables, de la forme $Ax = b$, possède une solution si et seulement si le rang de la matrice des coefficients A est égal à celui de la matrice augmentée $[A\ b]$. Si $n = rang(A)$, la solution est unique sinon il existe une infinité de solutions.

En conséquence, si la matrice des coefficients A et la matrice augmentée $[A\ b]$ ont le même rang le système possède une solution.

9 Systèmes mal conditionnés

Un système est mal conditionné si de faibles variations dans les données du système produisent d'importantes variations sur la solution. Il existe un indicateur que l'on appelle le « nombre de conditionnement » qui permet de savoir si un système est bien ou mal conditionné.

Plus ce nombre est proche de 1, meilleurs est le conditionnement. Dans le cas contraire la résolution est sujette aux erreurs d'arrondi.

10 Solutions des systèmes d'équations linéaires avec Matlab

Matlab dispose d'un opérateur spécial « \ » appelé « division à gauche ». Le choix de ce symbole rappelle l'opération qui consiste à multiplier la matrice A à sa gauche par son inverse A^{-1}, donc à « diviser à gauche » par A.

10.1 Extrait de la documentation Matlab

- Syntaxe

  $x = A\backslash B$

  $x = mldivide(A,B)$

- Description

$x = A\backslash B$ résout le système d'équations linéaires $A * x = B$. Les matrices A et B doivent avoir le même nombre de lignes. MATLAB® affiche un message d'avertissement si la matrice est mal conditionnée ou si elle est singulière, mais effectue un calcul dans tous les cas.

- o Si A est un scalaire, alors $A\backslash B$ est équivalent à $A.\backslash B$
- o Si A est une matrice carrée de dimension n et si B est une matrice de n lignes, alors $x = A\backslash B$ est la solution de l'équation $A * x = B$, si elle existe.
- o Si A est une matrice carrée $m \times n$ telle que $m \neq n$, et si B est un vecteur de m lignes, alors $A\backslash B$ retourne une solution au sens des moindres carrés.

Cet opérateur donne donc **systématiquement un résultat**.

11 Exercices

Exercice 1. Soit le système :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

Q1. Vérifier graphiquement si une solution existe. On peut tracer les deux droites $x_2 = f(x_1)$ pour : $-10 < x_1 < 10$.

Q2. Calculer le déterminant 0

Q3. En déduire la solution théorique du système d'équations aucune

Q4. Calculer cette solution avec Matlab solutions infinies donc aucune.

Exercice 2. Soit le système :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 2 \\ x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

Q5. Vérifier graphiquement si une solution existe dans le domaine : $-10 < x_1 < 10$ graphique il existe

Q6. Calculer le déterminant — 2

Q7. La solution est-elle unique ? oui (−4 ; −1).

Q8. Calculer cette solution avec Matlab

Exercice 3. Soit le système :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

Q9. Quel est le type de ce système ?

Q10. Calculez le déterminant

Q11. En déduire la solution théorique du système d'équations

Q12. Calculez la solution avec Matlab

Exercice 4. Soit le système :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

Q13. Quel est le type de ce système ?

Q14. Calculez le déterminant

Q15. En déduire la solution théorique du système d'équations

Q16. Calculez la solution avec Matlab

Exercice 5. Soit le système :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

Q17. Quel est le type de ce système ?

Q18. Existe-t-il une solution ?

Q19. Matlab donne-t-il une solution

Q20. Vérifiez si cette solution est bien une solution du système

Exercice 6. Soit le système :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 5 \\ 6x_1 - x_2 = -5 \end{cases}$$

Q21. Quel est le type de ce système ?

Q22. Montrer graphiquement qu'il n'y a pas de solution. On prendra : $-2 < x_1 < 6$

Q23. Déterminer la solution Matlab

Q24. Vérifier si c'est la solution du système

Q25. Tracer le point solution donné par Matlab sur la figure précédente

Exercice 7.

Q26. Créer une matrice A de dimension 10x10 avec la fonction « magic »

Q27. Créer un vecteur second membre b contenant les valeurs de 1 à 10

Q28. Résoudre le système $Ax = b$

Q29. Notez le message de Matlab

Q30. Avec le fonction « cond » déterminer le nombre de conditionnement de A

Q31. Modifier la dernière composante de b : b(10)=10.0001

Q32. Résoudre le nouveau système $Ax = b$

Q33. Comparer les solutions des deux systèmes

Q34. Modifier b et A : $b(10) = 10$ et $A(10,10) = 59.001$

Q35. Résoudre à nouveau le système $Ax = b$ et comparer les solutions

12 Méthode des moindres carrés

On voit que dans l'exercice 6 que bien que le système d'équations linéaires n'ait pas de solution, l'opérateur « \ » de Matlab fourni quand même une réponse !?

12.1.1 Comment est construite cette réponse ?

Lorsque le système est surdéterminé l'opérateur « \ » va rechercher le vecteur x tel que le résidu $r = Ax - b$ soit le plus petit possible. Une manière de rendre le résidu le plus petit possible consiste à utiliser la méthode des moindres carrés.

12.1.2 Méthode des moindres carrés

D'une manière générale la méthode des moindres carrés consiste à rechercher les conditions pour lesquelles une somme de carrés sera la plus petite possible. Pour notre problème, la somme des carrés est la norme du résidu au carré

$$||r||^2 = \sum_{i=1}^{n} r^2 = \sum_{i=1}^{n} (b - Ax)^2$$

Théorème : Supposons que A soit une matrice à m lignes et n colonnes (avec $m > n$) alors il existe un et seul vecteur x minimisant la norme du résidu $\| b - Ax \|$. De plus, ce vecteur x est donné comme la solution du système ${}^{t}A\,A\,x = {}^{t}A\,b$.

Exercice 8. Soit le système :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 15 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 13 \\ 10x_1 + 9x_2 + 8x_3 = 17 \end{cases}$$

Q36. Calculer la solution Matlab

Q37. Calculer la solution à l'aide du théorème ci-dessus X2 = (A' * A)\A' * B

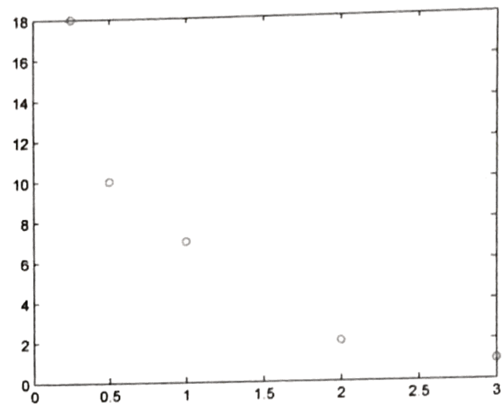
Q38. Comparer les deux solutions mêmes solutions

12.1.3 Curve fitting à l'aide de la méthode des moindres carrés

Le « curve fitting » ou « ajustement de courbe » est une technique utilisée en particulier dans le domaine expérimental. Elle consiste à construire une courbe pour se rapprocher « au mieux » d'une série de mesures expérimentales en utilisant des fonctions mathématiques dont on ajuste les paramètres.

Exercice 9. Soit la série de données suivantes : $t = [0.25\ 0.5\ 1\ 2\ 3]$ et $y(t) = [18\ 10\ 7\ 2\ 1]$
On cherche la droite $y = at + b$ qui passe « au mieux » dans ce nuage de points.
Supposons maintenant que les 5 points soient réellement alignés, on pourrait écrire le système de 5 équations à 2 inconnues ci-dessous, ou a et b seraient les coefficients de la droite cherchée.

$$\begin{cases} 0.25\,a + b = 18 \\ 0.5\,a + b = 10 \\ 1\,a + b = 7 \\ 2\,a + b = 2 \\ 3\,a + b = 1 \end{cases}$$



Bien entendu les points ne sont pas alignés donc ce système n'a pas de solution. Mais il est possible de rechercher les valeurs de a et b qui minimisent la norme du résidu au carré ce que sait faire Matlab avec son opérateur « \ ».

Q39. Tracer les points plot

Q40. Construire la matrice et le second membre du système à résoudre

$$\begin{bmatrix} 0,25 & 1 \\ 0,5 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 18 \\ 10 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Q41. Résoudre le système

Q42. Tracer la droite sur la même figure

Exercice 10. Avec la même série de données on veut construire la courbe $y(t) = a + be^{-t}$. Le système est le suivant :

$$\begin{cases} a + be^{-0.25t} = 18 \\ a + be^{-0.5t} = 10 \\ a + be^{-t} = 7 \\ a + be^{-2t} = 2 \\ a + be^{-3t} = 1 \end{cases}$$

Q43. Construire la matrice et le second membre du système

$$\begin{bmatrix} 1 & e^{-0,25t} \\ 1 & e^{-0,5t} \\ 1 & e^{-t} \\ 1 & e^{-2t} \\ 1 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \quad \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 18 \\ 10 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Q44. Résoudre le système

Q45. Tracer la courbe sur la même figure