Les fonctions

Logarithme :

$Df =]0; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0} ln(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty$

$ln'(x) = \frac{1}{x}$ $ln'(u) = \frac{u'}{u}$

$ln(ab) = ln(a) + ln(b)$ $ln(\frac{a}{b}) = ln(a) - ln(b)$ $ln(1/a) = -ln(a)$

$ln(a^b) = bln(a)$

Exponentielle:

$Df =]-\infty; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} exp(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} exp(x) = +\infty$

$exp'(x) = exp(x)$ $exp'(u) = u' \, exp(u)$

$exp(a\,b) = exp(a)^b = exp(b)^a$ $exp(a-b) = \frac{exp(a)}{exp(b)}$ $exp(1/a) = 1/exp(a)$

$exp(a+b) = exp(a) + exp(b)$

Parité des fonctions :

Fonction paire $\Rightarrow$ $\forall x, f(-x) = f(x)$

Fonction impaire $\Rightarrow$ $\forall x, f(x) = -f(-x)$

Opérations sur la parité :

(Fonction paire notée P, fonction impaire notée I)

P + P = P I + I = I P - P = P I - I = I

P x P = P I x I = P P x I = I

Toutes les autres opérations donnent des fonctions quelconques.

Fonction périodique : se répète, exemple : cos, sin ont une période de 2π

Polynômes du second degré : $ax^2 + bx + c$

Résolution $ax^2 + bx + c = 0$

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$ et on distingue 3 cas :

$\Delta > 0$: 2 racines, $x1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

$\Delta = 0$: 1 racine $x = \frac{-b}{2a}$.

$\Delta > 0$: 2 racines complexes, $x1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$, $x2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

Etude du signe de $ax^2 + bx + c$: calculer $ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta > 0$ & $\Delta > 0$: sur $]-\infty; x1[\cup]x2; +\infty[$: signe de a; sur $]x1; x2[$: signe inverse de a

$\Delta = 0$: sur $]-\infty; +\infty[$ signe de a

Intégrales dérivées :

Voir plus haut pour exp et ln

Fonction	Dérivée	Intégrale
$x^{\alpha},\ \alpha \varepsilon \Re \setminus \{-1\}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$sin(x)$	$cos(x)$	$-cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$	$sin(x)$
$tan(x)$	$1+tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$	
$1/x$	$-\frac{1}{x^2}$	$ln(x)$

Développements limités :

Formule de Taylor Young :

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+(x-a)^n\epsilon(x).$$

Developpements limités usuels en 0 :

$$\boldsymbol{e^x} = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)$$

$$\boldsymbol{\sin x} = x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\boldsymbol{\cos x} = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{O}\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\boldsymbol{\tan x} = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\mathrm{O}\left(x^9\right)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{sh}\ x &= x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right) \\
\mathbf{ch}\ x &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{O}\left(x^{2n+2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right) \\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right) \\
\ln(1-x) &= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots-\frac{x^n}{n}+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right) \\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right) \\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right) \\
\sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-3)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}x^n+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right) \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2-\cdots+(-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}x^n+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Intégration par partie

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_b^a fg'$$

Comment choisir la fonction à dériver : ALPES

A : arcsin, arcos, arctan…

L : log, ln

P : polynômes et fonctions rationnelles

E : exponentielles…

S : sin, cos, sinh, cosh

On dérive en priorité les fonctions les plus difficiles à intégrer

Intégration par changement de variable

Soient f et g deux fonctions. Soit l’intégrale suivante :

$$\int_a^b f(g(x))dx$$

On peut résoudre cette intégrale par changement de variable.

On va utiliser le changement de variable u = g(x) ($x = g^{-1}(u)$) et on aura l'intégrale suivante :

$$\int^{g(b)}$$