TECHNIQUES D'INTÉGRATION NUMERIQUE QUADRATURES (Méthodes des trapèzes et de Simpson)

1 Généralités

L'intégration numérique est appelée aussi quadrature. Nous présentons ici deux méthodes classiques : la méthode des trapèzes et la méthode de Simpson, qui permettent d'évaluer numériquement l'intégrale d'une fonction $f(x)$ ou f est une application continue sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$ sur R.

Le but de votre travail est d'étudier les deux méthodes numériques ainsi que la commande "quad" directement intégrée dans Matlab. Vous allez aussi vérifier et/ou estimer l'ordre de convergence pour chacun des deux algorithmes en les testant sur un exemple.

2 Principe des méthodes d'intégration

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$. Nous cherchons à approcher numériquement la valeur de $I_{[a,b]} = \int_a^b f(x)dx$. Nous partageons pour cela le segment $[a,b]$ en n intervalles de longueur h. Le paramètre h est alors appelé pas de calcul. Nous définissons les n+1 nœuds : $x_0, x_1, \ldots x_n$ de ce maillage régulier par

$$x_i = a + ih, \quad 0 \le i \le n \qquad où \quad h = \frac{b-a}{n}$$

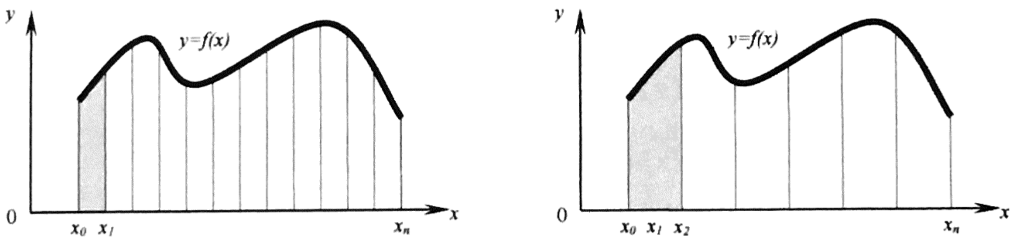

Figure 1 : découpages utilisés dans la méthode des Trapèzes (figure de gauche) et de Simpson (figure de droite).

L'intégrale de f sur l'intervalle $[a,b]$ peut se décomposer en une somme d'intégrales élémentaires (cf. figure 1)

- Sur chacun des n sous intervalles $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ c'est-à-dire:

$$I_{[a,b]} = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \quad \text{(à la base de la méthode des trapèzes)}$$

- Où sur chacun des $n/2$ sous intervalles $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \ldots, [x_{n-2}, x_n]$ (ce qui suppose que le nombre de subdivisions n soit un entier pair), c'est-à-dire:

$$I_{[a,b]} = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx \quad \text{(à la base de la méthode de Simpson).}$$

On est donc ramené au sous problème suivant : évaluer l'intégrale de *f* sur un petit intervalle. Ce calcul va être effectué au moyen de **formules approchées**, appelées formules de quadrature qui font intervenir l'utilisation de polynômes d'interpolation.

3 Formules de quadrature

3.1 Formule de quadrature des trapèzes

La méthode consiste à remplacer la fonction *f* sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ (de longueur *h*) par l'unique polynôme d'interpolation $P_1(x)$ de degré 1 passant par les deux points : $(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))$.

On calcule ensuite l'intégrale de $P_1(x)$ sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right)$$

On remplace ensuite l'intégrale de *f* sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par celle du polynôme P_1, ce qui s'écrit :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right)$$

La valeur approximative de l'intégrale correspond à l'aire sous la courbe du polynôme. Cette aire forme un trapèze qui donne son nom à cette formule de quadrature (figure 2 ci-dessous, à gauche).

3.2 Formule de quadrature de Simpson

On reprend le raisonnement utilisé ci-dessus, mais en remplaçant cette fois la fonction *f* sur l'intervalle $[x_i, x_{i+2}]$(de longueur $2h$) par l'unique polynôme d'interpolation $P_2(x)$ de degré 2 passant par les trois points $(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1})), (x_{i+2}, f(x_{i+2}))$.

On calcule ensuite l'intégrale de $P_2(x)$ sur l'intervalle $[x_i, x_{i+2}]$

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} P_2(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})\right)$$

On remplace alors l'intégrale de *f* par celle du polynôme P_2

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})\right)$$

La valeur approximative de l'intégrale correspond à l'aire sous la courbe du polynôme de degré 2 (figure 2 ci-dessous, à droite).

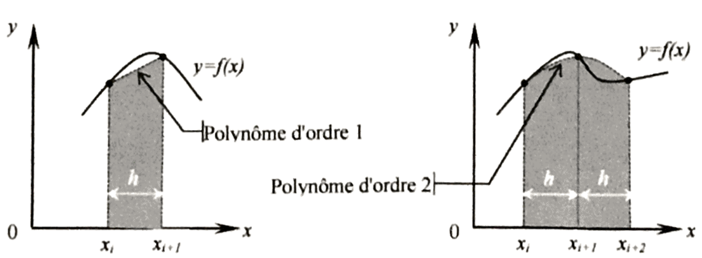

Figure 2 : A gauche: interpolation linéaire pour la méthode des trapèzes.
A droite interpolation quadratique (degré 2) pour la méthode de Simpson

4 Méthodes (composites) d'intégration numérique

4.1 Méthode (composite) des trapèzes

Sur chacun des n intervalles $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, on remplace l'intégrale $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ par la formule de quadrature des trapèzes. On obtient :

$$I_{[a,b]} = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right) = \bar{I}_h^T$$

Pour un h donné, le calcul de $\bar{I}_h^T$ conduit à effectuer $2(n\text{-}1)$ additions, une multiplication et une division, soit un nombre total d'opérations élémentaires de l'ordre de $2n$. On vérifie que $\bar{I}_h^T$ se réécrit sous la forme « plus économique» suivante :

$$\bar{I}_h^T = h\left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

Où le nombre d'opérations élémentaires est maintenant de l'ordre de n.

4.2 Méthode (composite) de Simpson

Sur chacun des intervalles $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \ldots, [x_{n-2}, x_n]$, on remplace l'intégrale $\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx$ par la formule de quadrature de Simpson (attention, n doit être pair !). On obtient

$$I_{[a,b]} = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}\left(f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})\right) = \bar{I}_h^S$$

L'intégrale $\bar{I}_h^S$ peut s'écrire sous la forme « plus économique» suivante :

$$\bar{I}_h^S = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i+1})\right)$$

5 Calcul numérique d'une intégrale avec Matlab

5.1 Algorithmes des trapèzes et de Simpson

Nous allons tester les deux méthodes d'intégration numérique : trapèzes et Simpson sur le calcul de l'intégrale suivante dont on ne connaît a priori pas la valeur exacte.

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

Travail à faire :

1. Implémenter la fonction à intégrer dans un fichier. Elle reçoit un vecteur d'abscisses x et renvoie un vecteur d'ordonnées $y = e^{-x^2}$.
2. Implémenter les deux formules composites de calcul dans deux programmes MatLab: trapeze.m et simpson.m.
3. Complétez le tableau suivant :

Calcul de l'intégrale pour différentes valeurs de n					
n	2	4	8	16	32
$\bar{I}_h^T$					
$\bar{I}_h^S$					

4. Lorsque n augmente, les valeurs $\bar{I}_h^T$, et $\bar{I}_h^S$ semblent-elles converger ? Si oui, vers quelle(s) valeur(s) ?

5.2 Utilisation de la commande "intégral"

On se propose maintenant de comparer les deux algorithmes précédents avec la commande "intégral" intégrée directement dans Matlab. Afin de manipuler convenablement cette commande, utilisez l'aide en ligne. Tapez "doc intégral ». Vous noterez qu'il existe aussi : integral2, integral3 et trapz

Travail à faire :

5. Evaluez l'intégrale en utilisant la commande quad intégrée dans Matlab. Utilisez l'affichage format long.
6. Répétez l'opération en utilisant la commande avancée quadl. Elle aussi intégrée directement dans Matlab. Utilisez encore l'affichage format long.
7. Comparez les deux valeurs obtenues entre elles, puis à celles obtenues avec les méthodes des trapèzes et Simpson.

6 Ordre de convergence des méthodes d'intégration

6.1 Ordre de convergence de la méthode des trapèzes

Propriétés de la formule de quadrature des trapèzes :

- La méthode des trapèzes donne un résultat exact si la fonction à intégrer est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. On dit que **le degré d'exactitude** de la méthode des trapèzes est égal à 1.
- On peut montrer que la méthode (composite) des trapèzes fournit un algorithme convergent.
- La convergence est d'ordre 2. Cela signifie que si l'on diminue de moitié le pas de calcul h (ou de manière équivalente si l'on double le nombre n de points), l'erreur d'intégration est par conséquent diminuée d'un facteur : 2^2. Soit E_n^T l'erreur absolue entre $\bar{I}_h^T$ et la valeur exacte on a : $\frac{E_n^T}{E_{2n}^T} = 2^\alpha$ avec $\alpha = 2$ pour la méthode des trapèzes.

Travail à faire :

On considère la nouvelle fonction $f(x) = \sin(x)$ dont l'intégrale sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est connue :

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 1$$

8. Adaptez votre programme d'intégration par la méthode des trapèzes à cette fonction.
9. Pour n = 4, 8, 16, 32, 64 et 128 calculez l'intégrale. Est-ce que la méthode (composite) des trapèzes fournit un algorithme convergent quand n augmente ?

10. Calculer l'erreur absolue E_n^T entre $\bar{I}_h^T$ et la valeur exacte, correspondant à chacune des six valeurs de n. Ranger les valeurs obtenues dans un tableau pour pouvoir ensuite calculer E_n^T / E_{2n}^T. Ecrire les résultats dans le tableau suivant :

n	E_n^T	E_n^T / E_{2n}^T
4		
8		
16		
32		
64		
128		

11. Pouviez-vous prédire les résultats de la colonne de droite?
12. Représentez graphiquement l'erreur en fonction du logarithme base 10 de n. Justifiez l'allure en $y = -\alpha \log_{10}(n) + K$. Aidez-vous du § 6.1 point 3.
13. A partir du graphe calculer la constante α .

6.2 *Ordre de convergence de la méthode de Simpson*

Comme la méthode des trapèzes, la méthode (composite) de Simpson fournit un algorithme convergent.

Travail à faire :

On considère la même fonction que précédemment sur le même intervalle.

14. Déterminer l'ordre de convergence de la formule de quadrature de Simpson. Procédez comme pour la méthode des trapèzes pour n=4, 8, 16, 32, 64 et 128. Renseigner le tableau suivant.

n	E_n^S	E_n^S / E_{2n}^S
4		
8		
16		
32		
64		
128		

15. Aux vues des valeurs du tableau précédent, quel est l'ordre de convergence de la méthode de Simpson ?