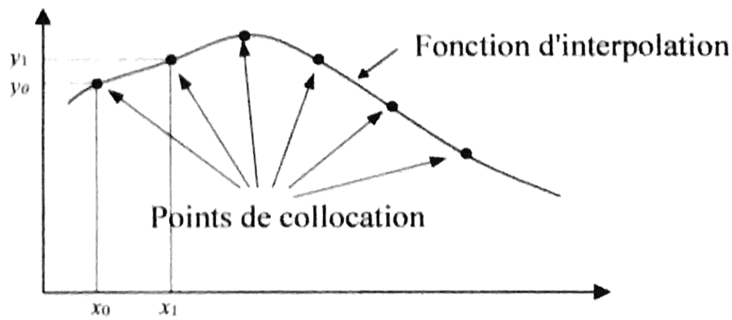
INTERPOLATION

1 Introduction

On considère uniquement le problème de l'interpolation de fonction à une variable. Il se formule ainsi :

Etant donné n+1 valeurs réelles $\{x_0,...,x_n\}$ associées respectivement à $\{y_0,...,y_n\}$ existe-t-il une fonction g telle que $y_i = g(x_i)$ $\forall i \in \{0,1,...,n\}$?

Les paires $\{x_i, f(x_i)\}$ sont appelées *points de collocation* ou *points d'interpolation.* Ces points peuvent provenir de résultats expérimentaux ou bien d'un calcul numérique, et on cherche une fonction analytique capable les représenter.



Points de collocation	
x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
...	...
x_n	y_n

2 Intérêt de l'interpolation

Connaissant cette expression analytique, il est possible de calculer la fonction en tous points dans l'intervalle des points de collocation.
On peut aussi vouloir remplacer une fonction analytique connue par une autre expression analytique plus simple dans le but de faciliter des calculs ultérieurs : dérivation, intégration etc.

3 Les différents types d'interpolation

On distingue différents types d'interpolation :

- Selon le type de la fonction g :
  Elle peut être choisie dans certaines familles de fonctions classiques : polynômes, fractions rationnelles, fonctions trigonométriques etc., on parle alors d'interpolation polynomiale, d'interpolation par fraction continue limitée etc.
- Selon les conditions imposées à g :
  - Si on impose uniquement les valeurs aux points d'interpolation : $y_i = g(x_i)$ $i = 0,1,...,n$, on parle d'interpolation de Lagrange,
  - Si de plus on impose les dérivées : $y_i' = g'(x_i), y_i'' = g''(x_i),...$ $i = 0,1,...,n$, on parle d'interpolation d'Hermite.
- Cas de l'interpolation par splines : il s'agit d'une interpolation polynomiale par morceaux dans laquelle on impose des conditions de raccord entre les dérivées des polynômes.

4 Interpolation polynomiale par les polynômes de Lagrange

4.1 Objectif

Il s'agit de trouver l'unique polynôme g tel que : $y_i = g(x_i)$ $i = 0,1,...,n$. Ce polynôme devant satisfaire n+1 équations, on le cherche de degré n ou inférieur. Pour construire ce polynôme unique, on va utiliser les polynômes de Lagrange.

4.2 Observation

Soient deux points de collocation : $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$, le polynôme unique $P_1(x)$ doit passer par ces deux points. On remarquera que dans ce cas, le polynôme est d'ordre n=1 avec 2 points de collocation (n+1=2). Il peut s'écrire : $P_1(x) = a_1 x + a_0$, et sa construction nécessite de résoudre le système suivant :

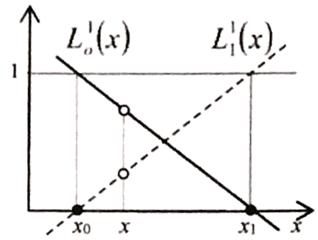
$\begin{cases} y_0 = a_1 x_0 + a_0 \\ y_1 = a_1 x_1 + a_0 \end{cases}$. En effet le polynôme doit passer par les deux points : $\begin{cases} x = x_0, & P_1(x_0) = y_0 \\ x = x_1, & P_1(x_1) = y_1 \end{cases}$

Il existe cependant un autre moyen d'obtenir le polynôme $P_1(x)$. Observez le polynôme suivant :

$$Q(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

On vérifie bien que ce polynôme est de degré 1 et qu'il passe par bien par les deux points de collocation.

4.3 Polynômes de Lagrange



Dans le polynôme précédent on observe :

- l'expression : $\dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1}$ qui vaut 0 si $x = x_1$ et 1 si $x = x_0$
- et l'expression $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$ qui vaut 0 si $x = x_0$ et 1 si $x = x_1$

Les deux expressions précédentes sont appelées ***polynômes de Lagrange***. Il y en à deux. L'un est associé au point de collocation (x_0, y_0) :

$$L_0^1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$, le polynôme de Lagrange associé au point d'abscisse x_0,.

et l'autre au point (x_1, y_1).

$$L_1^1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$ le polynôme de Lagrange associé au point d'abscisse x_1.

Le polynôme d'interpolation s'écrit : $Q(x) = P_1(x) = y_0 L_0^1(x) + y_1 L_1^1(x)$

4.4 Définition

On appel **polynôme de Lagrange** associé à la valeur x_i, prise parmi l'ensemble des valeurs $\{x_0, \ldots, x_n\}$, le polynôme de degré n qui est nul en tout point x_j sauf au point x_i (i=j) ou il vaut l'unité (voir Figure 1). On note ce polynôme $L_i^n(x)$ On constate alors, que l'on peut aisément construire le polynôme qui interpole l'ensemble des points (x_0, y_0), $(x_1, y_1) \ldots (x_n, y_n)$, par une combinaison linéaire des polynômes de Lagrange (voir exemple ci dessus).

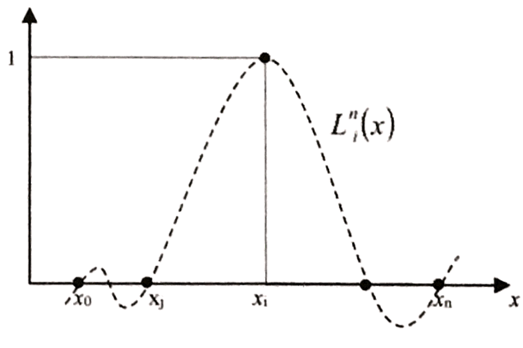


Figure 1 : Polynôme de Lagrange associé au point x_i

Le polynôme d'interpolation s'écrit alors :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i^n(x) \quad (1)$$

Et chaque polynôme de Lagrange s'écrit :

$$L_i^n(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - x_j)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)} \quad \text{pour } i = 0 \text{ à } n \quad (2)$$

4.5 Algorithme de calcul

Pour chaque point « x », où on souhaite la valeur du polynôme $P_n(x)$, il faut calculer la relation (1) qui utilise la relation (2).

1. Pour pouvoir tracer correctement le polynôme sous avons besoin de beaucoup de points. Soit nt ce nombre nous devrons donc définir un tableaux d'abscisses de taille nt. Pour calculer la valeur du polynôme $P_n(x)$, il nous faudra **une boucle d'indice *k*** sur les nt valeurs de ce tableau.

2. La relation (1) nécessite **une boucle d'indice *i*** sur les nc points de collocation

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{nc} y_i L_i^{nc}(x)$$

- x : représente un point où on souhaite calculer la valeur du polynôme
- y_i : représente l'ordonnées de chaque point de collocation

1. La relation (2) nécessite **une boucle d'indice *j*** sur les n points de collocation sauf si $j = i$

$$L_i^{nc}(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x - x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)} \quad \text{pour } i \text{ donné}$$

- nc : est le nombre de points de collocation
- x : représente un point où on souhaite calculer la valeur du polynôme
- x_i et x_j représentent les abscisses des points de collocation

D'un point de vue numérique on ne calculera pas le numérateur puis le dénominateur pour effectuer ensuite la division. On calculera les quotients $\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$ au fur et à mesure.

Nous voyons donc trois boucles imbriquées et deux accumulateur :
1 pour le signe somme $\sum_{i=0}^{nc}$ associé à la boucle sur i
1 pour le signe produit $\prod_{j\neq i}$ associé à la boucle sur j

Le squelette de l'algorithme peut être le suivant

```
[ ... ]
Pour k de 1 à nt
    [initialisation accumulateur Σ_{i=0}^{nc} ]
    Pour i de 1 à nc
        [initialisation accumulateur Π_{j≠i} ]
        Pour j de 1 à nc sauf si i=j
            [ accumulation ... ]
        FinPour
        [ accumulation ... ]
    FinPour
    [ ... ]
FinPour
```

4.6 Travail à faire :

4.6.1 On se propose d'interpoler un ensemble de points pris sur la fonction $sinus(x)$.

Q1. Ecrire un script MatLab pour tracer, en reliant les points (par défaut la couleur du trait est bleue), la fonction $sin(x)$ pour $0 < x < 2 * \pi$ avec $nt = 500$ points de tracer. Paramétrer le nombre de points avec la variable « nt ». Conserver les résultats dans deux vecteurs « x_r » et « y_r », car ce tracé servira de référence.

Q2. Définir $nc + 1$ points de collocation équirépartis entre $0\ et\ 2 * \pi$ à partir de la fonction $sinus$. Attention au nombre de piquets et d'intervalles ! Conserver les résultats dans deux vecteurs « xc » et « yc ». Paramétrer le nombre de points avec la variable « nc ». Ne pas confondre les points de représentation de la fonction et les points de collocation.

Q3. Tracer les $nc + 1$ points de collocation avec $nc = 5$, en rouge avec le symbole « cercle » et sans trait, sur le même graphe que la fonction $sinus$ de référence.

Q4. Ecrire le code permettant de calculer le polynôme d'interpolation pour toutes les abscisses contenues dans le tableau « x_r». Vous pouvez utiliser une programmation classique ou une programmation plus vectorisée.

Q5. Tracer le polynôme d'interpolation en rouge, trait continu sur le même graphe.

Q6. Vérifier la concordance avec la fonction sinus pour un nombre de points de collocations entre 2 et 9. A partir de quelle valeur de n l'interpolation de Lagrange vous semble-t-elle correcte visuellement sans faire de zoom ?

Q7. On veut maintenant évaluer la qualité de l'interpolation et en particulier voir si l'interpolation est encore meilleure quand le nombre de points d'interpolation devient grand. Augmenter le nombre de points d'interpolation. A partir de quelle nombre de points de collocation l'interpolation de Lagrange ne vous semble-t-elle plus correcte (n<100) ? Qu'observe-t-on sur les bords du domaine ?

4.6.2 Interpoler des points pris sur une fonction créneau

Soit la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = 0 & si\ |x| \geq 3 \\ f(x) = 2 & si\ |x| < 3 \end{cases}$ sur [-4,4].

Essayez les nombres de points de collocation suivants : 4, 10, 15, 50 et 100.

Q8. Tracer la fonction f avec 500 points de tracé

Q9. Tracer les points de collocation, en rouge avec le symbole « cercle » et sans trait, sur le même graphe que la fonction f

Q10. Tracer le polynôme d'interpolation en rouge, trait continu sur le même graphe. Qu'observe-t-on ?

4.6.3 Interpoler un ensemble de points issus de valeurs expérimentales

On mesure la vitesse d'un véhicule toutes les 5 secondes et on obtient ce tableau :

T(s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
V(km/h)	55	60	58	54	55	60	54	57	52	49

Q11. Stocker ces données dans deux tableaux

Q12. Calculez la vitesse moyenne du véhicule

Q13. On effectue une interpolation de Lagrange à partir de toutes les mesures de vitesse, quel est dans ce cas le degré du polynôme d'interpolation ?

On veut une estimation de la vitesse à t=2.5s qui n'a pas été mesurée.

Q14. Utiliser le polynôme d'interpolation avec tous les points de collocation pour calculer cette vitesse. Remarques.

Q15. On va maintenant se limiter aux 3 premiers points de collocation : $t = 0, 5\ et\ 10\ secondes$. Quel est dans ce cas le degré du polynôme d'interpolation ?

Q16. Modifier votre code pour tracer le polynôme d'interpolation obtenu en ne prenant que les 3 premiers points de collocation. Tracer le pour : $-5s < t < 20s$.

Q17. Recalculez la vitesse à t=2.5s avec ce polynôme. Remarques.

Q18. Essayons maintenant d'estimer la valeur de la vitesse à t=47s et t=50s. Ces deux valeurs n'étant pas comprise dans l'intervalle initial, nous devons procéder à ce que l'on appel une *extrapolation*. Utilisez le polynôme construit à partir de tous les points de collocation pour extrapoler les vitesses à t=47s et t=50s. Remarques.

Fonctions d'interpolations intégrées à MatLab

Q19. MatLab met à votre disposition une fonction pour l'interpolation : **interp1**. Utiliser cette fonction avec le paramètre "method" à "spline" pour tracer le polynôme d'interpolation en prenant toutes les données du véhicule.

Q20. Calculer avec **interp1** la vitesse à t=2.5s. Les résultats sont-ils meilleurs qu'avec Lagrange ?

4.6.4 Remarques générales sur l'interpolation par polynômes de Lagrange

Q21. Que peut-on en déduire pour la convergence de l'interpolation par polynômes de Lagrange ?

Q22. En pratique, que doit-on faire pour obtenir des résultats satisfaisants ?