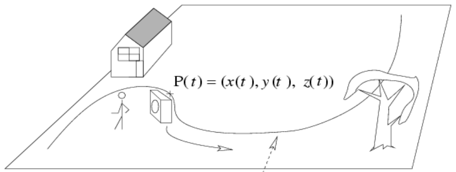
Courbes

COURBES PARAMÉTRIQUES : PRINCIPES

Les courbes paramétriques vues comme des trajectoires

- Une courbe paramétrique (paramètre t) peut être vue comme le **déplacement d'une caméra sur une scène** en fonction du temps.
- Pour simplifier, on se limitera généralement aux **courbes en 2D** (points de coordonnées ($x(t)$, $y(t)$)).
  Cependant, les courbes paramétriques s'étendent aux courbes dans l'espace :
  Les **courbes planes à points de contrôle** dans le plan s'étendent à des **courbes dans l'espace** en prenant des points de contrôle en dimension 3.

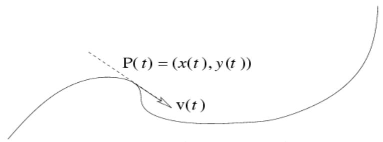


Trajectoire de déplacement
d'une caméra en fonction du temps

COURBES PARAMÉTRIQUES : VITESSE

Vitesse du déplacement

- Le **vecteur vitesse** s'obtient en calculant les dérivées des coordonnées du point en fonction du temps.
- **Équation paramétrique de la tangente** au point $P(t_0)$:
  $M(u) = P(t_0) + u \cdot v(t_0)$
- **Normale à la courbe** au point $P(t_0)$:
  $n(t_0) = v^{+}(t_0) = (-dy/dt(t_0), dx/dt(t_0))$.



$$v(t) = \frac{d\,P(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}\right)$$

COURBES PARAMÉTRIQUES : CONTINUITÉ

Classes de continuité paramétrique

Une courbe P(t) est continue paramétriquement de classe C^k sur l'intervalle [a, b]

si **les dérivées d'ordre 1 à k de P existent et sont continues** sur cet intervalle.

Classes de continuité géométrique

Pour le tracé graphique, on est plus préoccupé par la continuité géométrique :
absence de changement de direction du vecteur tangent,
mais **possibilité de changement discontinu de valeur** de la vitesse.

Une courbe P(t) est continue géométriquement de classe G^1 sur l'intervalle [a, b]
si **la dérivée d'ordre 1 de P est définie**
et il existe $k > 0$ tel que P'(c--) = k.P'(c++) sur cet intervalle.

Une courbe P(t) est continue géométriquement de classe G^2 sur l'intervalle [a, b]
si **les dérivées d'ordre 1 et 2 de P sont définies**
et il existe $k > 0$ et $k' > 0$ tels que P'(c--) = k.P'(c++) et P''(c--) = k'.P''(c++) sur cet intervalle.

COURBES PARAMÉTRIQUES POLYNOMIALES DE DEGRÉS 1 ET 2

Degré 1

La courbe d'équation $x(t) = a.t + b$ et $y(t) = c.t + d$ est une **droite** parcourue à **vitesse constante**.

Degré 2

La courbe d'équation $x(t) = a.t^2 + b.t + c$ et $y(t) = d.t^2 + e.t + f$ est une **parabole**.

ÉQUATION IMPLICITE DE DEGRÉ 2 (1/2)

Forme générale

La courbe d'équation $F(x, y) = a\,x^2 + 2.b.x.y + c.y^2 + d.x + e.y + f$ est une **conique**.

Courbes en fonction du discriminant réduit a.c - b^2

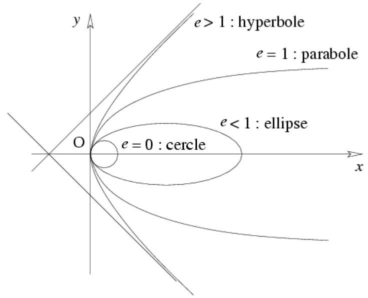
- **$a.c - b^2 > 0$** : une ellipse,
- **$a.c - b^2 = 0$** : une parabole,
- **$a.c - b^2 < 0$** : une hyperbole,

ÉQUATION IMPLICITE DE DEGRÉ 2 (2/2)

Équation des coniques à sommet commun

La courbe d'équation $y^2 = 2.p\,x - (1 - e^2)\,x^2$ est une **conique** dont un des sommets est à l'origine.
e est l'**excentricité**.

Courbes en fonction de l'excentricité e



★

FONCTIONS POLYNOMIALES RATIONNELLES 1/2

Forme générale

Fonction polynômiale rationnelle : quotient de deux polynômes de degré 2 et définie par trois points de contrôle :
$P(t) = (P_0.(1 - t)^2 + 2.w.P_1.t(1 - t) + P_2.t^2) / ((1 - t)^2 + 2.w.t(1 - t) + t^2)$

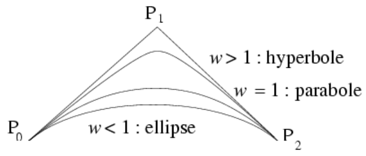
- P_0, P_1 et P_2 sont les **points de contrôle**,
  w est un **poids**.
- La courbe est une **conique** qui passe par P_0 à $t = 0$ et par P_2 à $t = 1$.

★

FONCTIONS POLYNOMIALES RATIONNELLES 2/2

Courbes en fonction du poids w

- ***w* < 1** : une ellipse,
- ***w* = 1** : une parabole,
- ***w* > 1** : une hyperbole,



★★★

TRACÉ INTERACTIF DE COURBES 1/2

Principes

Associe une courbe à un ensemble de points de contrôle :
$P(t) = f(P_1, P_2, \ldots, P_n,)$

Deux types de courbes

Courbe interpolée :

La courbe passe par les points définis en conservant une continuité.

Courbe à attracteurs :

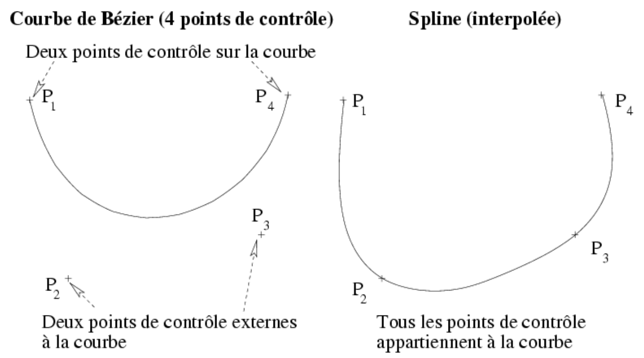
La courbe est attirée par les points de contrôle et passe par les points extrêmes.
Elle ne passe pas nécessairement par les points intermédiaires.

★★★

TRACÉ INTERACTIF DE COURBES 2/2

Exemples

- **Courbe interpolée** : *Spline* cubique interpolée.
- **Courbe à attracteurs** : Courbe de *Bézier*.

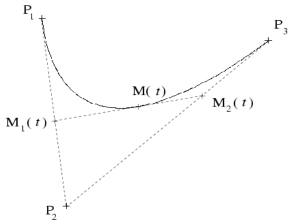


COURBE DE BÉZIER SUR 3 POINTS 1/2

Définition récursive de de Casteljau

Une courbe de Bézier peut se définir comme une **construction récursive de barycentres** dans les rapports (1 - t) et t. Le segment $[M_1(t)M_2(t)]$ est **tangent** à la courbe en $M(t)$.

- **Niveau 1 sur (P_1, P_2)** : $M_1(t) = (1 - t)\, P_1 + t\, P_2$
- **Niveau 1 sur (P_2, P_3)** : $M_2(t) = (1 - t)\, P_2 + t\, P_3$
- **Niveau 2 sur (P_1, P_2, P_3)** : $M(t) = (1 - t)\, M_1(t) + t\, M_2(t) = (1 - t)^2\, P_1 + 2\, t(1 - t)\, P_2 + t^2\, P_3$



COURBE DE BÉZIER SUR 3 POINTS 2/2

Calcul matriciel avec les polynomes de Bernstein

Les coordonnées d'un point s'obtiennent comme le produit d'une matrice de monomes du paramètre t, une matrice de coefficients et une matrice de points de contrôle P_1, P_2, P_3.

$$M(t) = (1 - t)^2\, P_1 + 2\, t(1 - t)\, P_2 + t^2\, P_3$$
$$= B^2{}_0(t)\, P_1 + B^2{}_1(t)\, P_2 + B^2{}_2(t)\, P_3$$

Points de contrôle

Polynomes de Bernstein

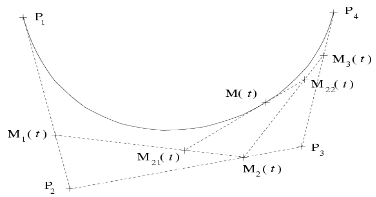
$$M(t) = \begin{bmatrix} B_0^2(t) & B_1^2(t) & B_2^2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$$M(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t^1 & t^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

COURBE DE BÉZIER SUR 4 POINTS 1/3

Définition récursive de *de Casteljau:* segment $[M_{21}(t)M_{22}(t)]$ est **tangent** à la courbe en $M(t)$.

- **Niveau 2 sur (P_1, P_2, P_3)** : $M_{21}(t) = (1 - t)\, M_1(t) + t\, M_2(t) = (1 - t)^2\, P_1 + 2\, t(1 - t)\, P_2 + t^2\, P_3$
- **Niveau 2 sur (P_2, P_3, P_4)** : $M_{22}(t) = (1 - t)\, M_2(t) + t\, M_3(t) = (1 - t)^2\, P_2 + 2\, t(1 - t)\, P_3 + t^2\, P_4$
- **Niveau 3 sur (P_1, P_2, P_3, P_4)** : $M(t) = (1 - t)\, M_{21}(t) + t\, M_{22}(t) = (1 - t)^3\, P_1 + 3\, t(1 - t)^2\, P_2 + 3\, t^2(1 - t)\, P_3 + t^3\, P_4$



COURBE DE BÉZIER SUR 4 POINTS 2/3

Calcul matriciel avec les polynomes de Bernstein

Les coordonnées d'un point s'obtiennent comme le produit d'une matrice de monomes du paramètre t, une matrice de coefficients et une matrice de points de contrôle P_1, P_2, P_3, P_4.

$$M(t) = (1 - t)^3\, P_1 + 3\, t(1 - t)^2\, P_2 + 3\, t^2(1 - t)\, P_3 + t^3\, P_4$$
$$= B^3{}_0(t)\, P_1 + B^3{}_1(t)\, P_2 + B^3{}_2(t)\, P_3 + B^3{}_3(t)\, P_4$$

Points de contrôle

Polynomes de Bernstein

$$M(t) = \begin{bmatrix} B_0^3(t) & B_1^3(t) & B_2^3(t) & B_3^3(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

$$M(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t^1 & t^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

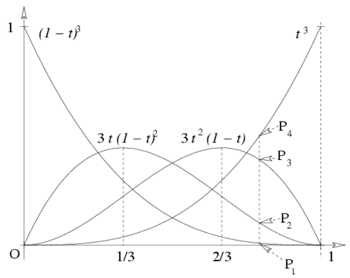
★★★

COURBE DE BÉZIER SUR 4 POINTS 3/3

Interpolation par les polynomes de Bernstein

La **pondération des points de contrôle** dans une courbe de Bézier à 4 points est donnée par les 4 **polynômes de Bernstein** suivants :
$B_0^3(t) = (1 - t)^3$, $B_1^3(t) = 3\,t(1 - t)^2$ $B_2^3(t) = 3\,t^2(1 - t)$ $B_3^3(t) = t^3$

La **somme** des polynômes de Bernstein est **égale à 1**.



★★★

COURBE DE BÉZIER SUR n POINTS 1/4

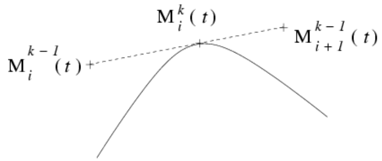
Généralisation de la définition récursive de de Casteljau

Une courbe de Bézier à *n* points de contrôle se définit ainsi comme une **construction récursive de barycentres** dans les rapports (1 - *t*) et *t*.

Le segment $[M_i^{k-1}(t)M_{i+1}^{k-1}(t)]$ est **tangent** à la courbe en $M_i^k(t)$.

$$M_i^k(t) = (1-t)\,M_i^{k-1}(t) + t\,M_{i+1}^{k-1}(t)$$

$$\begin{cases} k = 0, 1 \ldots. n \\ i = 0, 1 \ldots n-k \end{cases}$$

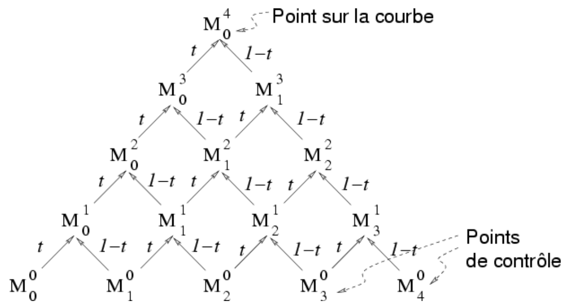


★★★

COURBE DE BÉZIER SUR n POINTS 2/4

Définition récursive de de Casteljau (suite et fin)

Treillis illustrant le calcul récursif des barycentres dans le cas d'une courbe à 5 points de contrôle.



★★★

COURBE DE BÉZIER SUR n POINTS 3/4

Généralisation des polynomes de Bernstein

Une courbe de Bézier à *n* points de contrôle se définit comme un **barycentre de ses points de contrôle**
dont les coefficients sont les **polynomes de Bernstein**.

$$M(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\, M_i$$

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$$

$$\begin{cases} B_i^n(t) \in [0,1] \quad \text{quand} \quad t \in [0,1] \\ \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1 \end{cases}$$

★★★

COURBE DE BÉZIER SUR n POINTS 4/4

Développement de la forme polynomiale

En **développant et en ordonnant par rapport aux puissances de *t***, tout point d'une courbe de Bézier se met sous la forme:

$$M(t) = \sum_{i=0}^{n} t^{i}\, P_i$$

où les coefficients P_i sont des combinaisons affines des points de contrôles.

Cette forme est utile pour faire des **calculs optimisés des coordonnées d'un point courant de la courbe**:
on utilise des **techniques différentielles** (calcul récursif jusqu'à l'ordre *n* de la différence de valeurs entre deux points).

★★★

COURBE DE BÉZIER : PROPRIÉTÉS 1/7

Propriétés géométriques

Interpolation aux points extrêmes

Toute courbe de Bézier **passe par les points de contrôle extrêmes**.
Les points de contrôle intermédiaires sont des points de contrôle externes à la courbe.

Invariance affine

La **transformée affine** d'une courbe de Bézier est la courbe passant par la transformée des points.

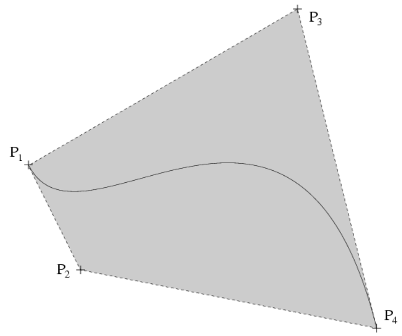
Attention ! La **projection n'est pas une transformation affine** (elle ne conserve pas les rapports des combinaisons affines), donc...
La projection d'une courbe de Bézier ne s'obtient pas à partir des projections des points de contrôle, dans le cas général.

★★★

COURBE DE BÉZIER : PROPRIÉTÉS 2/8

Enveloppe convexe

Une courbe de Bézier appartient à l'enveloppe convexe des points qui la contrôlent.



★★★

COURBE DE BÉZIER : PROPRIÉTÉS 3/8

Dérivée et tangente à la courbe

Forme générale de la dérivée

$$\vec{P'}(t) = n \sum_{k} (P_{k+1} - P_k)\, B_k^{n-1}$$

Tangente aux points extrêmes

Elle est dans la **direction de l'arête du polygône** de contrôle.
Sa longueur dans un rapport *n* (le degré de la courbe).

$$\vec{P'}(0) = n\,(P_1 - P_0) = n\,\overrightarrow{P_0P_1}$$

$$\vec{P'}(1) = n\,(P_n - P_{n-1}) = n\,\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$$

COURBE DE BÉZIER : PROPRIÉTÉS 4/8

Dérivée et tangente à la courbe (suite et fin)

Cas d'une courbe dont le paramètre varie sur [*a*,*b*]

On se ramène à un paramètre variant sur [0,1] par changement de variable (translation et homothétie):

$$T = \frac{t - a}{b - a}$$

Tangente aux points extrêmes

Elle est dans la **direction de l'arête du polygône** de contrôle.
Sa longueur dans un rapport *n*/(*b*-*a*).

$$\overrightarrow{P'}(a) = \frac{n}{b-a}(P_1 - P_0)$$

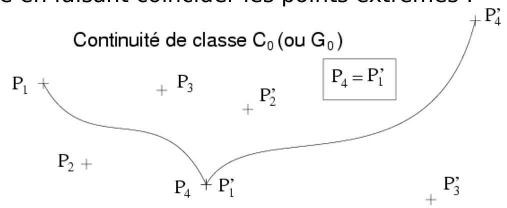
$$\overrightarrow{P'}(b) = \frac{n}{b-a}(P_n - P_{n-1})$$

COURBE DE BÉZIER : PROPRIÉTÉS 5/8

Continuité entre deux courbes de Bézier

Continuité de position

Elle est assurée en faisant coïncider les points extrêmes :

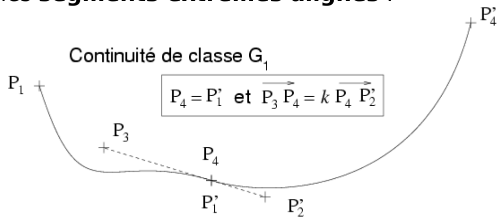


COURBE DE BÉZIER : PROPRIÉTÉS 6/8

Continuité entre deux courbes de Bézier (suite)

Continuité de classe G_1

La continuité de classe G_1 est vérifiée ssi les **points extrêmes sont confondus** et les **segments extrêmes alignés** :



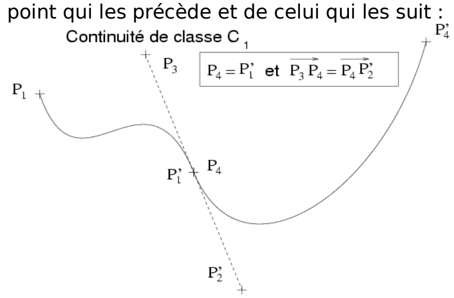
COURBE DE BÉZIER : PROPRIÉTÉS 7/8

Continuité entre deux courbes de Bézier (suite)

On se place dans le cas où les paramètres des deux courbes sont définis sur des **intervalles de même longueur**.

Continuité de classe C_1

La continuité de classe C_1 est vérifiée ssi les **points extrêmes sont confondus** et **situés au milieu** du point qui les précède et de celui qui les suit :



★★★

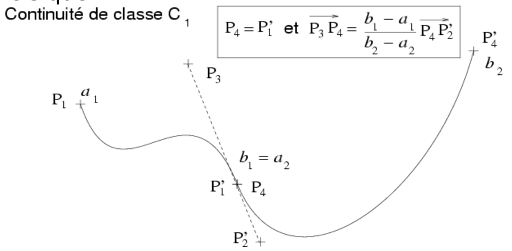
COURBE DE BÉZIER : PROPRIÉTÉS 8/8

Continuité entre deux courbes de Bézier B_1 et B_2 (suite et fin)

On se place dans le cas où t_1, le paramètre de B_1, est défini sur $[a_1,b_1]$ et t_2, le paramètre de B_2, sur $[a_2=b_1,b_2]$.

Continuité de classe C_1

La continuité de classe C_1 est vérifiée ssi les **points extrêmes sont confondus** et tels que :



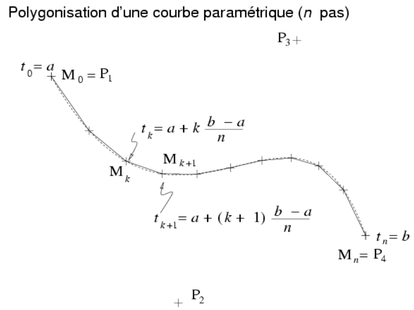
★★★

COURBE DE BÉZIER : POLYGONISATION 1/3

Approximation d'une courbe paramétrique par un polygone

Polygonisation d'une courbe de Bézier en ***n* pas** avec un paramètre *t* défini sur [*a*,*b*].

Le paramètre *t* varie de *a* à *b* avec un pas de *b-a*/*n* :



★★★

COURBE DE BÉZIER : POLYGONISATION 2/3

Raffinements

Optimisation

(1) Calculer le pas de maillage
(2) calculer toutes les valeurs par additions du pas à la valeur précédente.

Inconvénient: erreurs cumulées.

Maillage adaptatif

Intervalle de maillage **variable** dépendant d'une mesure: longueur du segment, courbure de la courbe.

★★★

COURBE DE BÉZIER : POLYGONISATION 3/3

Algorithme de polygonisation d'une courbe paramétrique

Polygonisation d'une courbe de Bézier en ***n* pas** avec un paramètre *t* défini sur [*a*,*b*].

```
// initialisation
t = a
P = Bezier( t );
pas = (b - a) / n

// boucle de traçage
Pour i = 1 ; i <= n ; i++
    t' = t + pas;
    P' = Bezier( t' );
    Segment( P , P' );

    t = t';
    P = P';
Fin pour
```

★★★

COURBE DE BÉZIER : SPÉCIFICATION

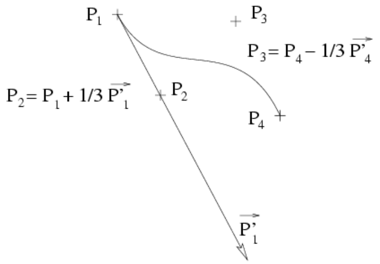
Éléments définitoires d'une courbe de Bézier à 4 points contrôle

Définition par les 4 points de contrôle

Ils peuvent ne pas être coplanaires.

Définition par les 2 points de contrôles extrêmes et leurs tangentes

Les points de contrôle internes sont obtenus en prenant le tiers des tangentes aux points extrêmes.



★★★

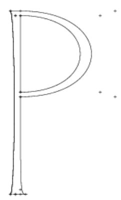
COURBE DE BÉZIER : EXEMPLES D'APPLICATIONS

Dessin interactif de courbes

Dans de nombreuses applications de **modélisation interactive** (image de synthèse, dessin vectoriel, CAO...).

Polices vectorielles

Les **polices vectorielles** postscript sont composées à partir de courbes de Bézier.
Elles sont donc grossissables sans problème d'aliasing.



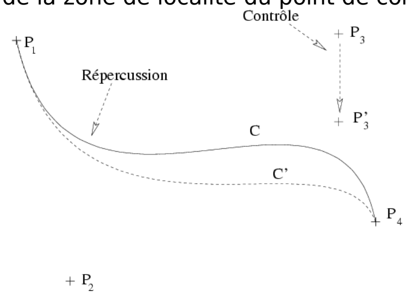
Caractère tracé à partir de 4 courbes de Bézier et 3 segments (échelles 1/1 et 5/1).

★

COURBE DE BÉZIER : PROBLÈME DU CONTRÔLE SUR N POINTS

Non localité du contrôle

Le déplacement d'un point de contrôle sur une courbe de Bézier a des répercussions au-delà de la zone de localité du point de contrôle.



★

FONCTIONS DE PONDÉRATION IDÉALES

Propriétés attendues des fonctions de pondération

- Interpolation à certains points de contrôle
- Influence locale (non étendue à l'ensemble de la zone).
- Sommation à l'unité pour toute valeur de *t*
- Bonne continuité

DÉFINTION DES COURBES SPLINE

Définition

Une **spline de degré *n*** est une fonction polynômiale par morceaux de degré *n* qui est continue de classe C^{n-1} à chaque noeud.

Une **courbe spline** est définie par *n*+1 points de contrôle et *n*+1 fonctions de pondération :

$P = P_0R_0(t) + P_1R_1(t) + ... + P_nR_n(t)$

- Les fonctions de pondérations sont définies sur des intervalles $[t_k, t_{k+1}]$.

$T=(t_0, t_1,..., t_{n+1})$ est appelé **vecteur de points nodaux**.

- Les fonctions de pondération sont des **splines d'ordre *m*** (des polynômes par morceaux continus d'ordre *m*-1 aux noeuds).

Cas particulier

- Les **courbes de Bézier** sont des courbes splines

DÉFINTION DES COURBES B-SPLINE (SPLINES DE BASE)

Définition

Une courbe **B-spline d'ordre *m*** est définie par :

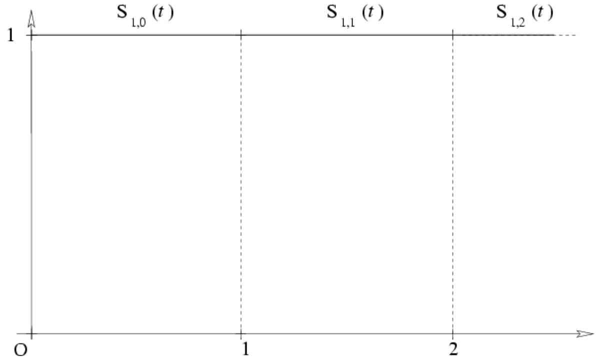
- un vecteur de noeuds $T = (t_0, t_1,..., t_{n+1})$,
- *n*+1 points de contrôle P_k
- *n*+1 fonctions de pondération $S_{m,k}$ définies récursivement sur des intervalles $[t_k, t_{k+1}]$:

$$S_{m,k}(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+m-1} - t_k} S_{m-1,k}(t) + \frac{t_{k+m} - t}{t_{k+m} - t_{k+1}} S_{m-1,k+1}(t)$$

B-SPLINE D'ORDRE 1: FONCTION DE PONDÉRATION

Fonction de pondération S_1 des B-splines d'ordre 1

$0 <= t <= 1 : S_{1,0}(t) = 1$



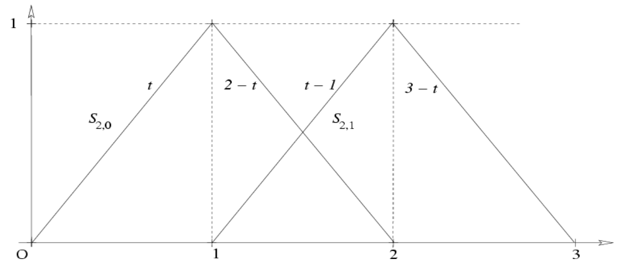
B-SPLINE D'ORDRE 2: FONCTION DE PONDÉRATION

Fonction de pondération S_2 des B-splines d'ordre 2

$0 <= t <= 1 : S_{2,0}(t) = t,$

$1 <= t <= 2 : S_{2,0}(t) = 2 - t$

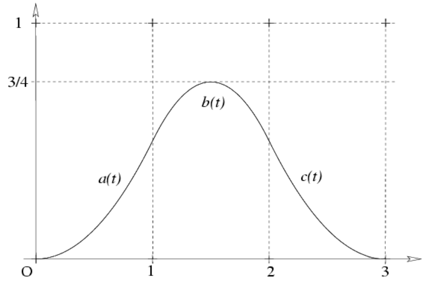
Définition récursive : $S_{2,0}(t) = (t-0)/(1-0) . S_{1,0}(t) + (2-t)/(2-1) . S_{1,1}(t)$



B-SPLINE D'ORDRE 3: FONCTION DE PONDÉRATION

Fonction de pondération S_3 des B-splines d'ordre 3

$0 <= t <= 1 : S_{3,0}(t) = a(t) = 1/2.t^2$,
$1 <= t <= 2 : S_{3,0}(t) = b(t) = 3/4 - (t - 3/2)^2$,
$2 <= t <= 3 : S_{3,0}(t) = c(t) = 1/2.(3 - t)^2$



B-SPLINE D'ORDRE 3: COMBINAISONS DES FONCTIONS DE PONDÉRATION 1/2

Construction d'une fonction de pondération à partir de splines

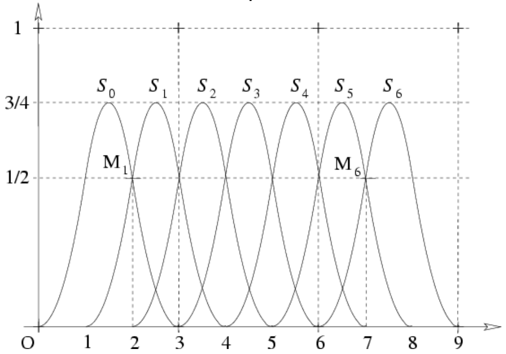
Les fonctions splines sont translatées puis combinées.

Exemple à partir de $S_{3,0}(t)$
$0 <= t <= 1 : S_{3,0}(t)$,
$1 <= t <= 2 : S_{3,0}(t)$ et $S_{3,1}(t) = S_{3,0}(t - 1)$,
$2 <= t <= 3 : S_{3,0}(t)$, $S_{3,1}(t) = S_{3,0}(t - 1)$ et $S_{3,2}(t) = S_{3,0}(t - 2)$,
$3 <= t <= 4 : S_{3,1}(t) = S_{3,0}(t - 1)$, $S_{3,2}(t) = S_{3,0}(t - 2)$ et $S_{3,3}(t) = S_{3,0}(t - 3)$...

B-SPLINE D'ORDRE 3: COMBINAISONS DES FONCTIONS DE PONDÉRATION 2/2

Propriété

Pour $t >= 2$, la somme des fonctions de pondération vaut 1.

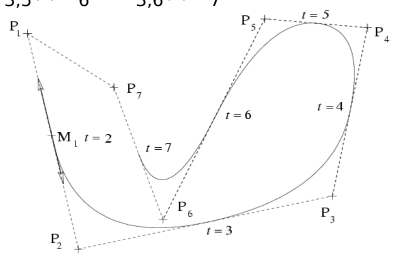


B-SPLINE D'ORDRE 3: TRACÉ D'UNE COURBE OUVERTE 1/2

Combinaison de pondérations par des fonctions splines

Chaque fonction de pondération $S_{3,k}$ est nulle hors de $[k, k + 3]$.

$2 <= t <= 7$:
$P(t) = S_{3,0}(t)\ P_1 + S_{3,1}(t)\ P_2 + S_{3,2}(t)\ P_3 + S_{3,3}(t)\ P_4 + S_{3,4}(t)\ P_5 + S_{3,5}(t)\ P_6 + S_{3,6}(t)\ P_7$



B-SPLINE D'ORDRE 3: COURBE OUVERTE 2/2

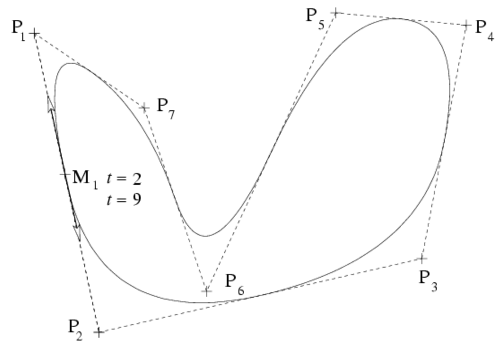
Valeurs des poids de combinaison des points de contrôle

t	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
2.0:	**0.500**	**0.500**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**
2.1:	0.405	0.590	0.005	-	-	-	-
2.2:	0.320	0.660	0.020	-	-	-	-
2.3:	0.245	0.710	0.045	-	-	-	-
2.4:	0.180	0.740	0.080	-	-	-	-
2.5:	0.125	0.750	0.125	-	-	-	-
2.6:	0.080	0.740	0.180	-	-	-	-
2.7:	0.045	0.710	0.245	-	-	-	-
2.8:	0.020	0.660	0.320	-	-	-	-
2.9:	0.005	0.590	0.405	-	-	-	-
3.0:	**-**	**0.500**	**0.500**	**-**	**-**	**-**	**-**
3.1:	-	0.405	0.590	0.005	-	-	-
3.2:	-	0.320	0.660	0.020	-	-	-

B-SPLINE D'ORDRE 3: TRACÉ D'UNE COURBE FERMÉE

Ensemble de points cycliques

On ajoute $P_8 = P_1$ et $P_9 = P_2$ à une courbe ouverte pour rendre cyclique l'ensemble des points.



B-SPLINE D'ORDRE 3: PROPRIÉTÉS

Propriétés

Point médian

La courbe passe par les points médians de $[P_k, P_{k+1}]$

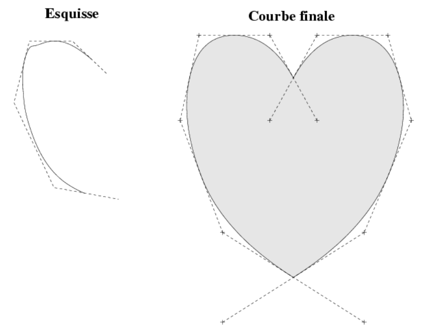
Tangente au point médian

Aux points médians, la tangente est la droite (P_k, P_{k+1}).

B-SPLINE D'ORDRE 3: EXEMPLE DE TRAÇAGE D'UNE COURBE CONTRÔLÉE

Méthode

1. Esquisse et première approximation des points de contrôle
2. Définition des points de contrôle et tracé interactif de la courbe



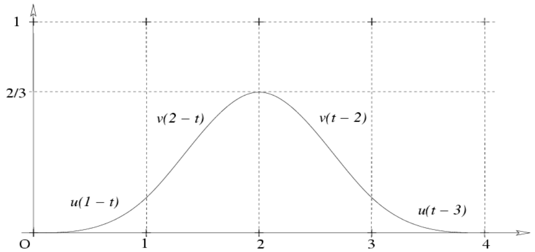
B-SPLINE D'ORDRE 4: FONCTION DE PONDÉRATION

Fonction de pondération S_4 des B-splines d'ordre 4

Soit les deux fonctions suivantes :

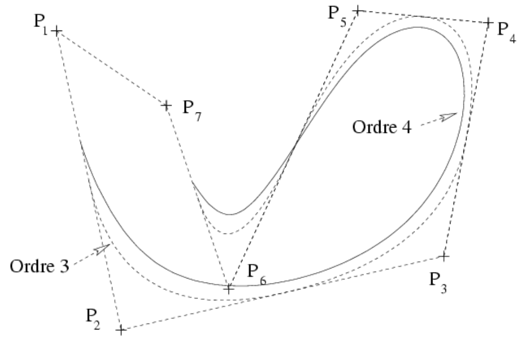
$u(t) = 1/6\ (1 - t)^3$ et $v(t) = 1/6\ (3\ t^3 - 6\ t^2 + 4)$

$0 <= t <= 1 : S_{4,0}(t) = u(1 - t)$,
$1 <= t <= 2 : S_{4,0}(t) = v(2 - t)$,
$2 <= t <= 3 : S_{4,0}(t) = v(t - 2)$,
$3 <= t <= 4 : S_{4,0}(t) = u(t - 3)$.



B-SPLINE OUVERTE D'ORDRE 4

Comparaison des B-splines d'ordre 3 et 4



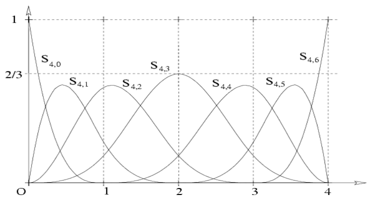
B-SPLINE D'ORDRE 4: INTERPOLATION AUX EXTRÉMITÉS 1/5

Interpolation aux extrémités via des noeuds multiples

Pour que la courbe d'ordre 4 passe par les points extrêmes, les noeuds initiaux et finaux sont d'ordre 4 :
T = ($t_0 = 0$, $t_1 = 0$, $t_2 = 0$, $t_3 = 0$, $t_4 = 1$, $t_5 = 2$,..., $t_8 = 5$, $t_9 = 6$, $t_{10} = 6$, $t_{11} = 6$, $t_{12} = 6$).

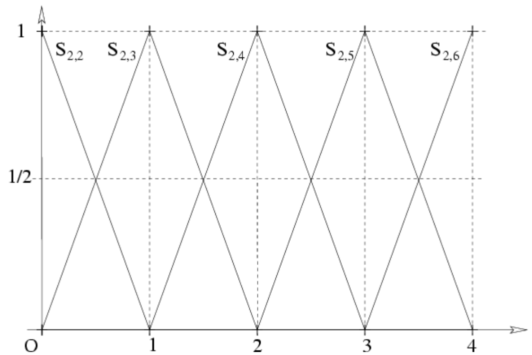
Il s'agit d'une ***NUBS*** (*Non Uniform B-Spline*). D'autres cas de variations sur la longueur des intervalles entre les points nodaux sont possibles.

Courbes des fonctions de pondération associées



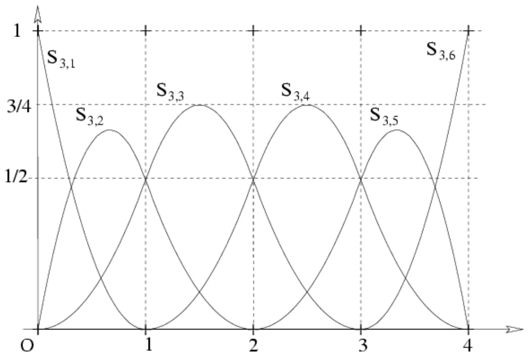
B-SPLINE D'ORDRE 4: INTERPOLATION AUX EXTRÉMITÉS 2/5

Fonctions de pondération d'ordre 2



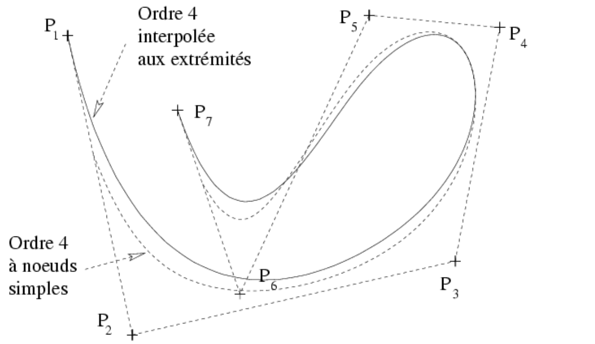
B-SPLINE D'ORDRE 4: INTERPOLATION AUX EXTRÉMITÉS 3/5

Fonctions de pondération d'ordre 3



B-SPLINE D'ORDRE 4: INTERPOLATION AUX EXTRÉMITÉS 4/5

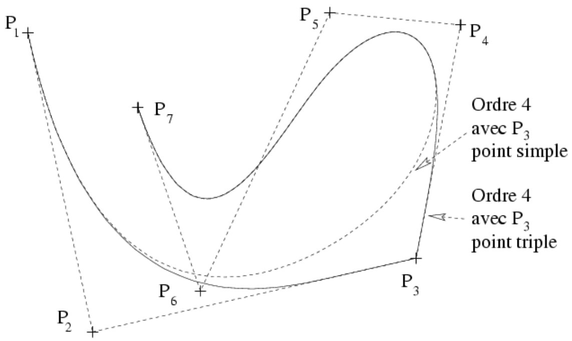
Tracé de la courbe avec des noeuds d'ordre 4 aux points P_1 et P_2



B-SPLINE D'ORDRE 4: INTERPOLATION AUX EXTRÉMITÉS 5/5

Attraction par la duplication de points

En dupliquant un point de contrôle, on attire la B-spline vers ce point.



B-SPLINES : PROPRIÉTÉS

Propriétés géométriques des Courbes B-splines

Interpolation aux points extrêmes

Toute courbe B-spline commence par un point sur la première arête du polygone de contrôle est est tangente a celui-ci (idem pour le dernier point). Les points intermédiaires sont des points de contrôle externes à la courbe.

Invariance affine

La transformée affine d'une courbe B-spline est la courbe passant par la transformée des points.

Enveloppe convexe

Une courbe B-spline appartient à l'enveloppe convexe des points qui la contrôlent.
Si elle est d'ordre *n*, elle appartient à l'enveloppe convexe de *n*-1 points consécutifs.

NURBS : DÉFINTION

Définition

Une courbe **NURBS** (Non Uniform Rational B-Splines) d'ordre m est définie par :

- un vecteur de noeuds $T = (t_0, t_1, \ldots)$,

- n+1 points de contrôle P_k

- n+1 fonctions de pondération $R_{m,k}$ déduites des fonctions de pondération des B-splines $S_{m,k}$ au moyen de n+1 **poids** w_k (généralement choisis positifs stricts) :

$$R_{m,k}(t) = \frac{w_k\, S_{m,k}(t)}{\sum_j w_j\, S_{m,j}(t)}$$

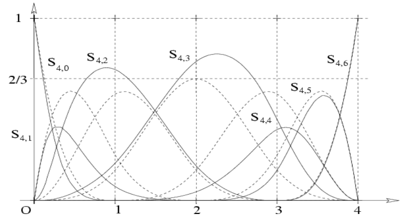
NURBS: FONCTIONS DE PONDÉRATION

Courbes des fonctions de pondération associées

Comparaison entre les fonctions de pondération

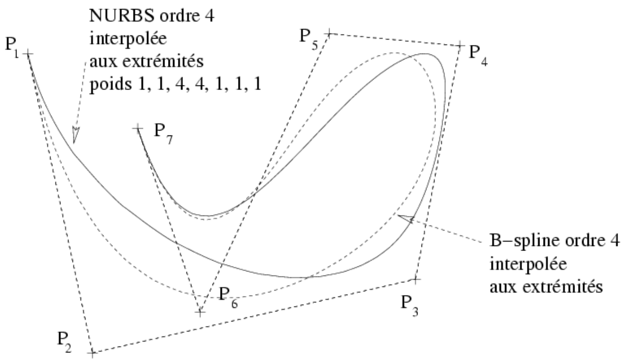
- d'une **B-spline interpolée aux extrémités**,
- et d'une **NURBS** avec les pondérations suivantes :

P_1 : 1	P_3 : 4	P_5 : 1	P_7 : 1
P_2 : 1	P_4 : 4	P_6 : 1	



NURBS: TRACÉ D'UNE COURBE

Comparaison avec une B-spline



NURBS : PROPRIÉTÉS

Propriétés géométriques des Courbes NURBS

Représentation des coniques

En choisissant correctement les points de contrôle et les poids, toute conique peut être représentée **exactement** par une NURBS.

Invariance affine

La **transformée affine d'une courbe NURBS est la courbe passant par la transformée des points**.

Invariance projective

Contrairement aux courbes B-spline, **l'image d'une courbe NURBS par une projection est la courbe NURBS passant par la projection des points**. Les poids doivent être recalculés en fonction de la matrice de projection.

En raison de ces propriétés, les NURBS sont fournies dans de nombreux logiciels d´infographie.

SPLINE CUBIQUE INTERPOLÉE : DÉFINTION

Définition

Une courbe **spline d'ordre 4 interpolée** est définie par :

- n+1 points de contrôle P_k

- n+1 fonctions de pondération cubiques $SI_{4,k}$ telles que

. **la courbe passe par les points de contrôle**,

. la courbe est de classe C_1 en ces points (elle est de classe C_2 ailleurs).

SPLINE CUBIQUE INTERPOLÉE : COEFFICIENTS

Interpolation d'Hermite : raisonne séparément sur x et y et t dans [0, 1]. On a 3 contraintes :

- Le passage par les deux points de contrôle $P_k(x_k,y_k)$ et $P_{k+1}(x_{k+1},y_{k+1})$ (deux équations).
- L'égalité de valeur de la dérivée avant et après les points de contrôle : $s_k = y'_k(0)$ en P_k et $s_{k+1} = y'_k(1)$ en P_{k+1}.

On obtient :

$$a_k = s_{k+1} + s_k - 2\,(y_{k+1} - y_k) \qquad c_k = s_k$$

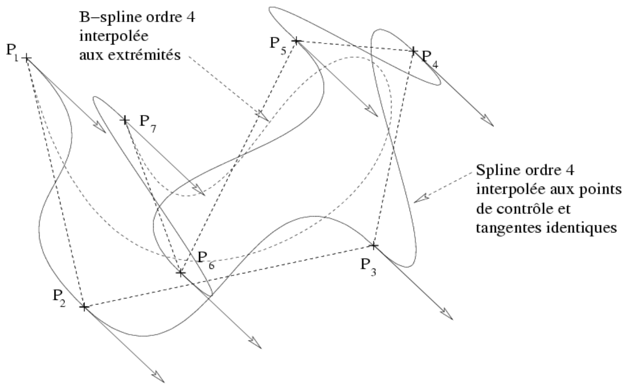
$$b_k = 3(y_{k+1} - y_k) - 2\,s_k - s_{k+1} \qquad d_k = y_k$$

[redacted]

SPLINE CUBIQUE INTERPOLÉE : COURBE 1/2

Effet de la direction de la tangente sur la forme de la courbe

Tracé de la courbe avec des tangentes identiques à tous les points d'interpolation.

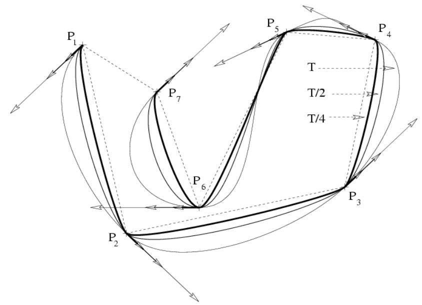


SPLINE CUBIQUE INTERPOLÉE : COURBE 2/2

Effet de la longueur de la tangente sur la forme de la courbe

Trois tracés pour des tangentes dans la même direction et dans un rapport de 2.0.

Si les **tangentes sont nulles**, la courbe se confond avec les arêtes du polygone de contrôle..

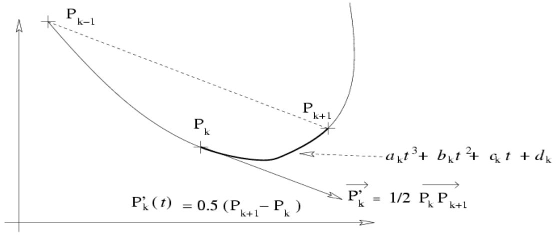


SPLINE CUBIQUE INTERPOLÉE : CATMULL-ROM 1/4

Définition

Les splines cubiques interpolées de Catmull-Rom sont celles pour lesquelles la **tangente $P'_k(t)$ au point de contrôle** P_k est **parallèle au segment $[P_{k-1}, P_{k+1}]$**.

$P'_k(t) = m\,(P_{k+1} - P_{k-1})$
On choisit fréquemment $m = 0.5$.



SPLINE CUBIQUE INTERPOLÉE : CATMULL-ROM 2/4

Calcul des coefficients

Aux contraintes intiales, on ajoute :

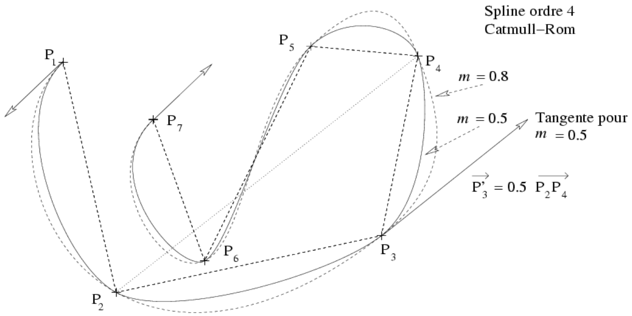
$$s_k = m\,(y_{k+1} - y_{k-1})$$

Une fois choisies s_0 et s_n, les autres valeurs de s_k se déduisent de la relation précédente.

SPLINE CUBIQUE INTERPOLÉE : CATMULL-ROM 3/4

Effet du coefficient de proportionalité m sur la forme de la courbe

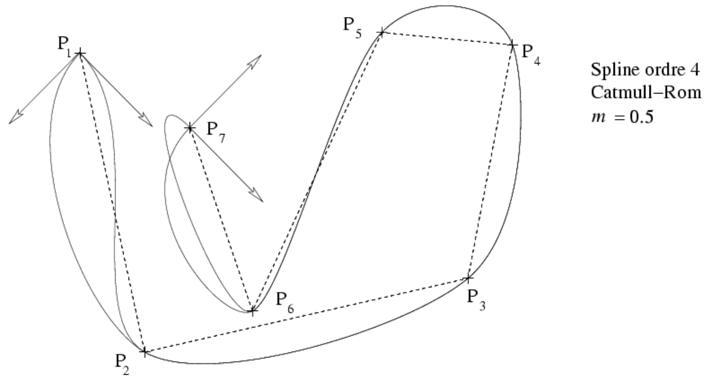
La valeur du coefficient de proportionalité se répercute dans l'ensemble de la courbe car elle influence la valeur de la tangente en chacun des points de contrôle.



SPLINE CUBIQUE INTERPOLÉE : CATMULL-ROM 4/4

Effet de la direction des tangentes intiales et finales sur la forme de la courbe

L'effet est limité aux premier et dernier segments de la courbe.



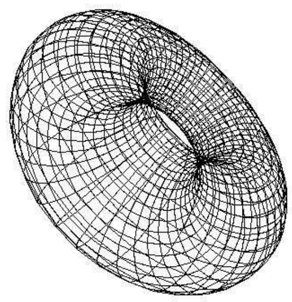
Surfaces

★★

EXEMPLE DE MAILLAGE POLYGONAL

Maillage polygonal d'un tore

Ensemble de polygones définissant l'enveloppe de ce volume.



★★

RENDU D'UN MAILLAGE POLYGONAL

Rendu continu d'un maillage polygonal

Il existe des techniques de **rendu** qui permettent de fournir une **image continue** d'un maillage polygonal
(par exemple l'ombrage de Gouraud).

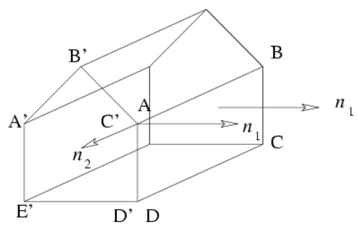
★★★

DÉFINITION D'UN MAILLAGE POLYGONAL

Éléments d'un maillage polygonal

. **Un ensemble de polygones** décrits par leurs sommets dans le sens inverse des aiguilles d'une montre en regardant l'extérieur de l'objet,

. un ensemble de **vecteurs normaux** attachés aux **surfaces** ou aux **sommets**



MAILLAGE : VECTEURS NORMAUX

Calcul naturel des vecteurs normaux au moyen du **produit vectoriel**.

$$n = (P_1 - P_2) \times (P_3 - P_2).$$

Cas délicats :

- le produit vectoriel peut être très petit si **les deux vecteurs sont presque colinéaires**,
- pas de moyennage dans le cas d'une **face polygonale non plane**,
- nécessité de moyenner les vecteurs normaux aux **sommets communs à plusieurs polygones.**

Formule de Newell : normale à un polygone non plan

Calcul sur tous les sommets du polygone (calcul cyclique) : chaque composante est égale à l´**aire signée projetée** sur le plan défini par les deux autres vecteurs du repère.

$$n_x = (y_1-y_2)(z_1+z_2) + (y_2-y_3)(z_2+z_3) +...+ (y_n-y_1)(z_n+z_1)$$
$$n_y = (z_1-z_2)(x_1+x_2) + (z_2-z_3)(x_2+x_3) +...+ (z_n-z_1)(x_n+x_1)$$
$$n_z = (x_1-x_2)(y_1+y_2) + (x_2-x_3)(y_2+y_3) +...+ (x_n-x_1)(y_n+y_1)$$

POLYÈDRES: TÉTRAÈDRE 1/2

Coordonnées

Un tétraèdre peut être **inscrit dans le cube canonique**.

Centre de gravité

L'origine est le **centre de gravité** du tétraèdre.

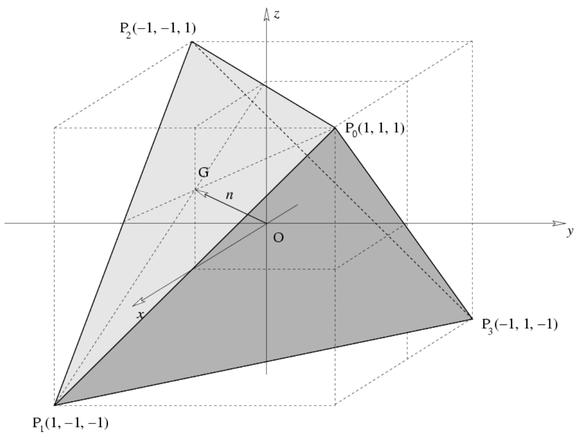
Vecteur normaux aux polyèdres réguliers dont le centre de gravité est à l'origine

Le **vecteur normal** est le vecteur joignant le **centre de gravité du tétraèdre** au centre de gravité de la face.

Dans le cas du tétraèdre, le vecteur normal à la face A B C est 1/3(A + B + C).

POLYÈDRES: TÉTRAÈDRE 2/2

Figure



POLYÈDRES: OCTAÈDRE 1/2

Définition

Le **polyèdre dual** P' d'un polyèdre P est celui obtenu en joignant les centres de gravité des faces de P.

Le **dual d'un tétraèdre** est un **tétraèdre**.

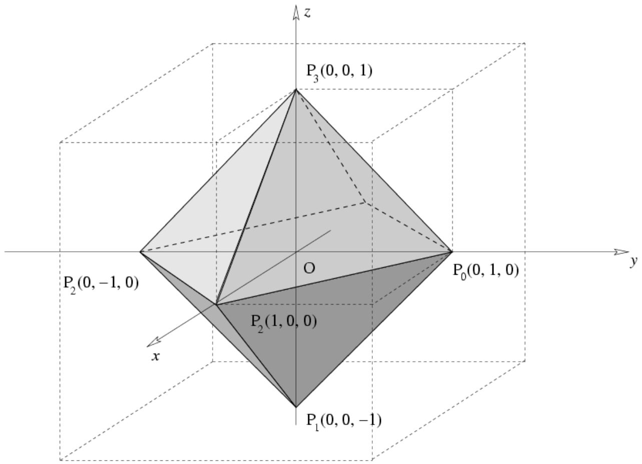
Propriété

L'**octaèdre** est le **polygone dual** du **cube** (et réciproquement).

★★

POLYÈDRES: OCTAÈDRE 2/2

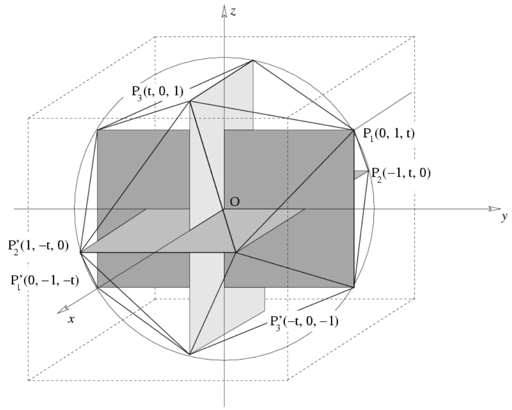
Figure



★★

POLYÈDRES: ISOCAÈDRE

L'**isocaèdre** est obtenu en s'appuyant sur les sommets des trois **triangles d'or** dont les sommets diagonaux ont pour coordonnées :
(0, 1, *t*):(0, -1, -*t*), (-1, *t*, 0):(1, -*t*, 0) et (*t*, 0, 1):(-*t*, 0, -1) avec (*t* = (rac(5) - 1)/2).



★★

POLYÈDRES: DODÉCAÈDRE 1/2

Définition

L'**isocaèdre** est le polyèdre dual du **dodécaèdre**.

Coordonnées

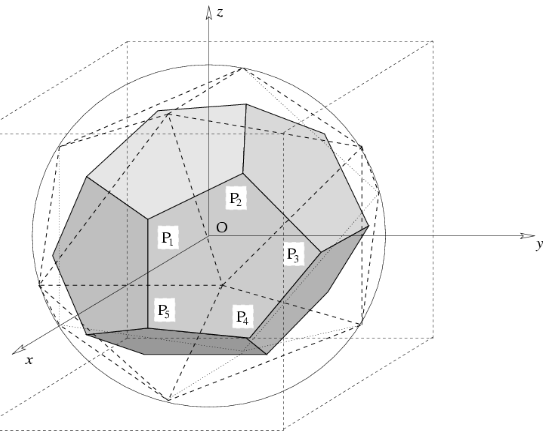
Les coordonnées des sommets du dodécaèdre s'obtiennent donc en recherchant les isobarycentres des faces de l'isocaèdre.

Par exemple, P_1((2+*t*)/3, 0, 1/3), P_2((1+*t*)/3, (1+*t*)/3, (1+*t*)/3), P_3(1/3, (2+*t*)/3, 0), P_4((1+*t*)/3, (1+*t*)/3, -(1+*t*)/3) et P_5((2+*t*)/3, 0, -1/3).

★★

POLYÈDRES: DODÉCAÈDRE 2/2

Figure



POLYÈDRES: RELATION D'EULER 1/3

Propriété

Pour tout polyèdre (non nécessairement régulier) :
Faces - Arêtes + Sommets = 2 .

Exemples

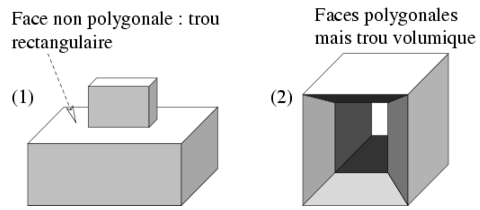
	Tétraèdre	Octaèdre	Cube	Icosaèdre	Dodécaèdre
Sommets	4	6	8	12	20
Arêtes	6	12	12	30	30
Faces	4	8	6	20	12

POLYÈDRES: RELATION D'EULER 2/3

Problème des trous

Pour que la formule d´Euler soit vérifiée, il ne doit pas y avoir de trous dans les faces ou dans le volume

Cas où la formule n´est pas vérifiée



POLYÈDRES: RELATION D'EULER 3/3

Formule d´Euler généralisée

Pour tout polyèdre (non nécessairement régulier) :
Faces - Arêtes + Sommets - Trous dans une face = 2 (1 - Trous volumiques).

Cas du solide (1) précédent

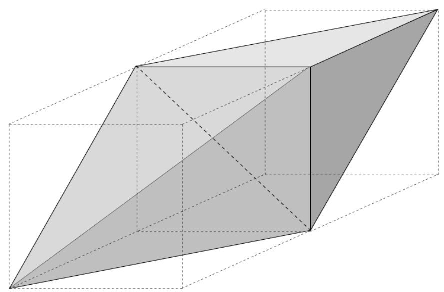
11 - 24 + 16 - 1 = 2 (1 - 0)

POLYÈDRES: POLYÈDRES COMPOSÉS

Principe

Un **polyèdre régulier composé** s'obtient en assemblant des polyèdres réguliers ayant des faces communes :
On utilise l'opération d'**union** de la géométrie constructive des solides.

Exemple : le double tétraèdre

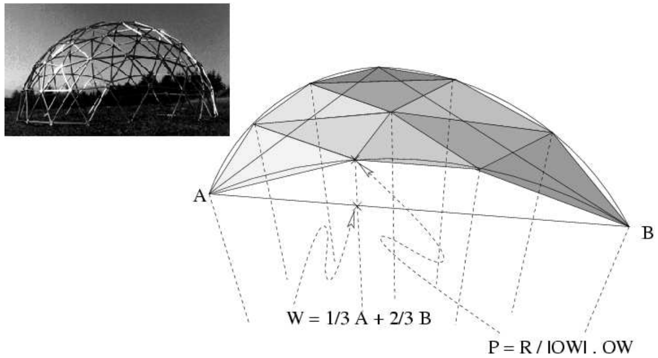


★★

POLYÈDRES: DOME GÉODÉSIQUE

Méthode

Un **dome géodésique** s'obtient par **subdivisions successives** des faces d'un polyèdre régulier (par exemple un isocaèdre).



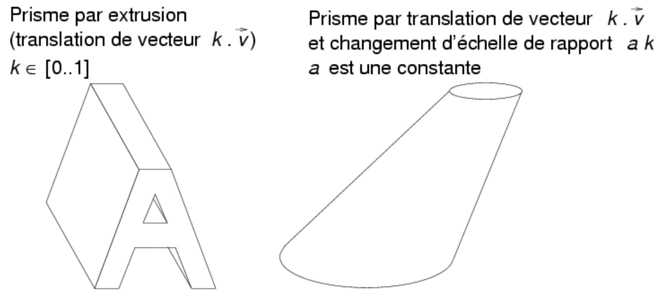
★★★

VOLUMES PAR DÉPLACEMENT DE COURBES: EXTRUSION

Construction de prismes par balayage

Un **prisme** s'obtient par **extrusion** d'une forme plane :
translation d'un **vecteur variable** $k.v$ avec k dans [0..1].

Exemples

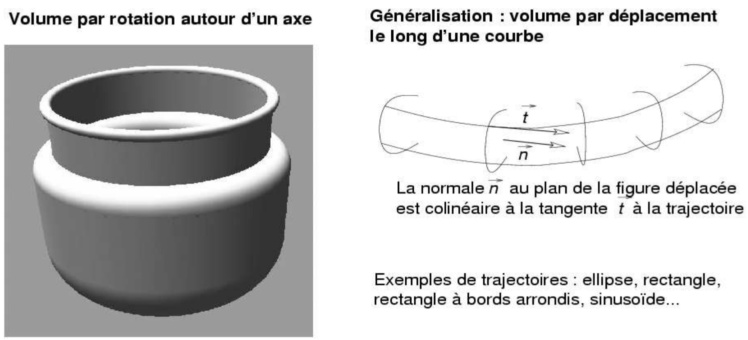


★★★

VOLUMES PAR DÉPLACEMENT DE COURBES: VOLUMES DE RÉVOLUTION

Principe

Un **volume de révolution** s'obtient par rotation d'une forme plane autour d'un axe.



★★★

ÉQUATIONS IMPLICITES : DÉFINITION

Définition

$f(x, y, z) = 0$

Propriété

Le signe de $f(x, y, z)$ donne la **position d'un point par rapport à la surface** (intérieur ou extérieur).

Vecteur normal

Le **vecteur normal** en (x_0, y_0, z_0) est le **gradient** de f en ce point :
$(df/dx, df/dy, df/dz)|_{x0,\, y0,\, z0}$

★★★

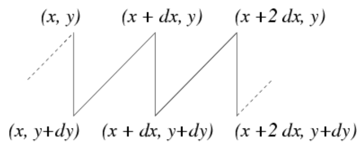
ÉQUATIONS IMPLICITES : EXEMPLE 1/2

Cas particulier z = f(x,y)

- Dans le cas où ***z* s'exprime en fonction de *x* et *y***, une équation implicite peut se mettre sous la forme:

$$z = f(x,y).$$

- La **position d'un point** est donnée par M = O + x i + y j + $f(x,y)$ k.
- Tout **maillage du plan** permet d'obtenir un maillage de la courbe par projection selon k. Par exemple, un maillage par des triangle strips: (x,y), $(x,y+dy)$, $(x+dx,y)$, $(x+dx,y+dy)$, $(x+2dx,y)$, $(x+2dx,y+dy)$, ...



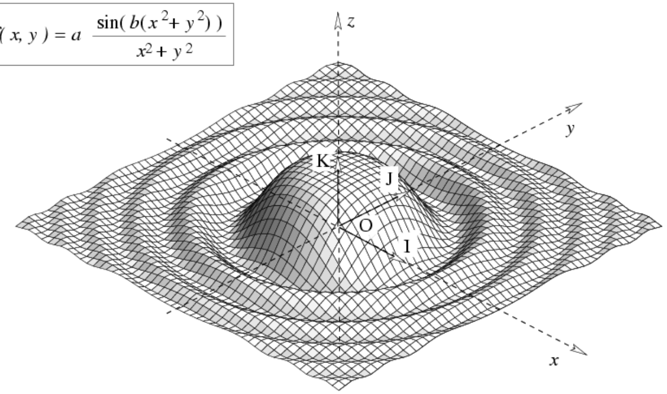
★★★

ÉQUATIONS IMPLICITES : EXEMPLE 2/2

Figure (en perspective oblique)

Exemple :

$$z = f(x, y) = a \, \frac{\sin(b(x^2 + y^2))}{x^2 + y^2}$$



★★★

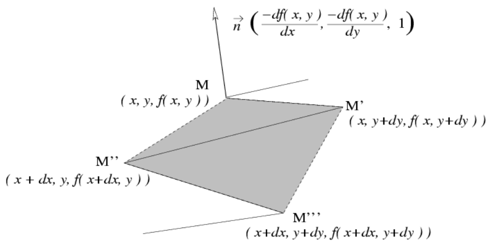
ÉQUATIONS IMPLICITES : CONSTRUCTION

Modes de construction du maillage

Dans le cas particulier $z = f(x,y)$, on peut constuire le maillage en s'appuyant sur un **maillage triangulaire du plan *xOy*.** Pour chaque position (x_o, y_o), on trouve la valeur de z telle que:

$$z_o = f(x_o, y_o)$$

La normale se calcule à partir des dérivées partielles.



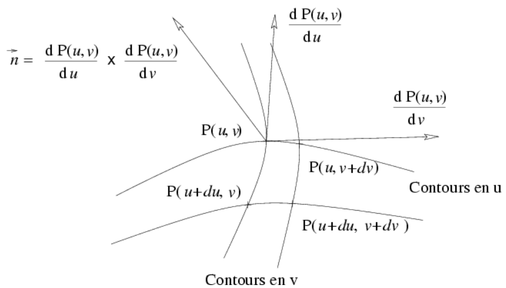
★★★

ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES

$$P(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$$

Contours: Les **contours en *u* ou en *v*** sont les courbes obtenues en fixant u ou v et en faisant varier l'autre variable.

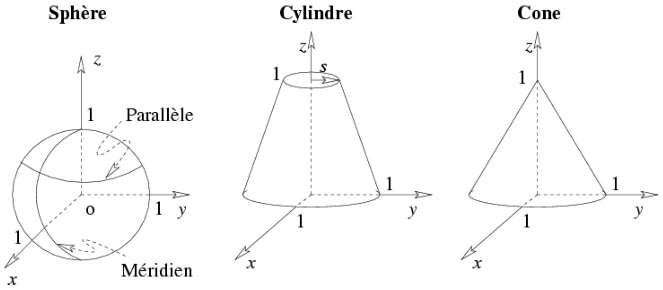
Vecteur normal: Le vecteur normal en (x_0, y_0, z_0) est le **produit vectoriel des tangentes** aux contours en u et v en ce point.



★★★

ÉQUATIONS CLASSIQUES 1/3

Trois primitives géométriques



★★★

ÉQUATIONS CLASSIQUES 2/3

Sphère

$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$
P(u, v) = (cos u cos v, sin u cos v, sin v)
Normale : OP

Cas d'une sphère de rayon R :
$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$
P(u, v) = (R cos u cos v, R sin u cos v, R sin v)

Cylindre

$x^2 + y^2 - (1 + (s - 1) z)^2 = 0$; $0 <= z <= 1$
P(u, v) = ((1 + (s - 1) v) cos u, (1 + (s - 1) v) sin u, v) ; $0 <= v <= 1$
Normale : (cos u, sin u, 1 - s)

Cas d'un cylindre de rayon R constant et de hauteur H :
$x^2 + y^2 - R^2 = 0$; $0 <= z <= H$
P(u, v) = (R cos u, R sin u, v) ; $0 <= v <= H$

★★★

ÉQUATIONS CLASSIQUES 3/3

Cone

$x^2 + y^2 - (1 - z)^2 = 0$; $0 <= z <= 1$
P(u, v) = ((1 - v) cos u, (1 - v) sin u, v) ; $0 <= v <= 1$

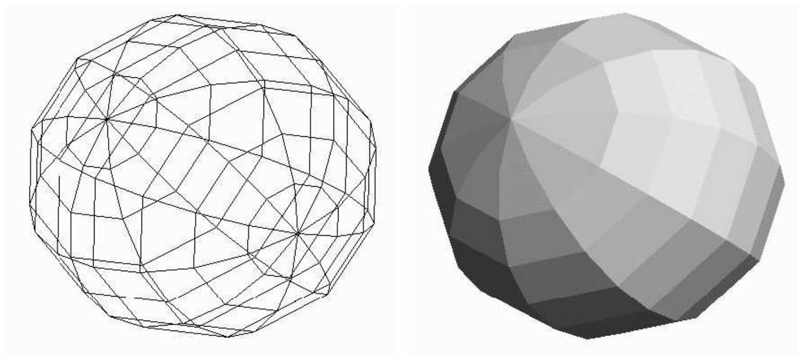
Normale : (cos u, sin u, 1)

Cas d'un cone de rayon R et de hauteur H :
$x^2 + y^2 - (R/H(H - z))^2 = 0$; $0 <= z <= H$
P(u, v) = ((R - v) cos u, (R - v) sin u, (H/R)v) ; $0 <= v <= R$

★★★

POLYGONISATION : EXEMPLE

Polugonisation d'une sphère



★★★

POLYGONISATION : DÉFINITION

Principe de la polygonisation ou tessellation

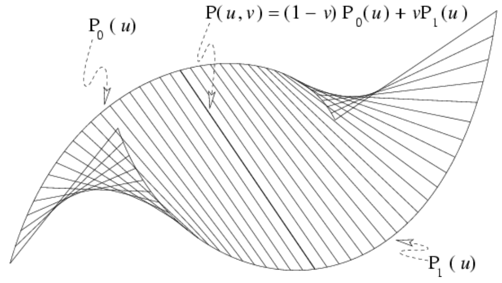
La polygonisation revient à remplacer une surface par un **ensemble de triangles et de polygones**.

On définit la valeur de **l'échantillonnage**
(pour la sphère précédente, il est de 10 en horizontal et en vertical).

★★★

SURFACE RÉGLÉE : EXEMPLE

Surface réglée s'appuyant sur deux courbes paramétriques



★★★

SURFACE RÉGLÉE : DÉFINITION

Définition

Une surface est **réglée** si et seulement si par tout point il passe au moins une droite entièrement contenue dans la surface.

Exemple: surface réglée définie par deux courbes $P_1(u)$ et $P_2(v)$ sur lesquelles s'appuient les droites de la surface.

Exemple

Le **cone** est une surface réglée dont toutes les droites (appelées **directrices**) sont concourantes au sommet.
Les directrices s'appuient sur le sommet et sur un cercle non coplanaire avec le sommet.

Le **cylindre** est une surface réglée dont toutes les droites sont parallèles à l'axe.

Patch

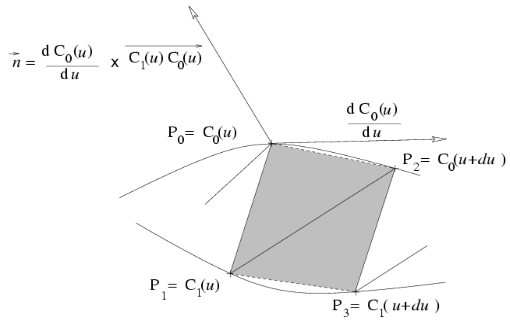
Un **patch réglé** est un morceau de surface réglée obtenu en limitant les valeurs de u et v à des intervalles finis.

★★★

SURFACE RÉGLÉE : POLYGONALISATION 1/2

Polygonisation d'une surface réglée s'appuyant sur deux courbes paramétriques

Triangle strip s'appuyant sur les deux courbes: $P_1(u)$ et $P_2(v)$, avec ***u*** et ***v*** variant dans [a,b].



★★★

SURFACE RÉGLÉE : POLYGONALISATION 2/2

Algorithme de polygonisation

Polygonisation d'une surface réglée s'appuyant sur deux courbes paramétriques en ***n* pas** avec un paramètre *u* défini sur [*a*,*b*].

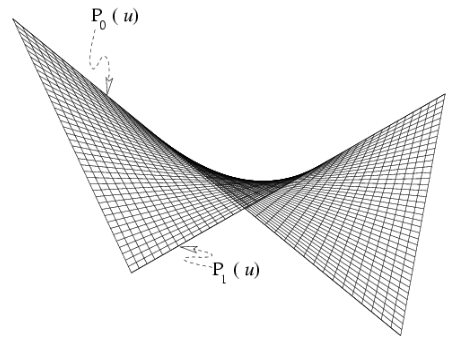
```
// initialisation
u = a
pas = (b - a) / n

// boucle de traçage
Pour i = 0 ; i <= n ; i++
    Po = Co( u );
    To = C'o( u );
    P1 = C1( u );
    T1 = C'1( u );

    Normale( To , Po - P1);
    Sommet( Po );
    Normale( T1 , Po - P1);
    Sommet( P1 );

    u += pas;
Fin pour
```


★★

SURFACE RÉGLÉE : PATCH BILINÉAIRE

Définition

Un **patch bilinéaire** est un morceau de surface réglée telle que **$P_1(u)$ et $P_2(u)$ sont des segments de droites**.

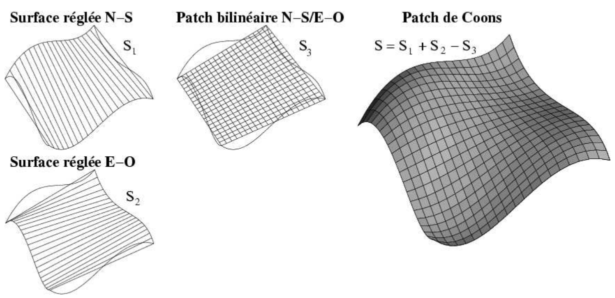


★★

SURFACE RÉGLÉE : PATCH DE COONS (EXEMPLE)

Principe

Un **patch de Coons** est une surface composée de polygones (non nécessairement plans) obtenus
en **ajoutant les surfaces réglées qui s'appuient sur les courbes frontières** et
en **retranchant le patch bilinéaire s'appuyant sur les points extrêmes**.

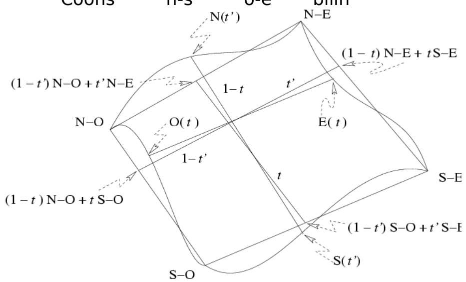


★★

SURFACE RÉGLÉE : PATCH DE COONS (DÉFINITION)

Construction d'un patch de Coons à partir de ses fontières

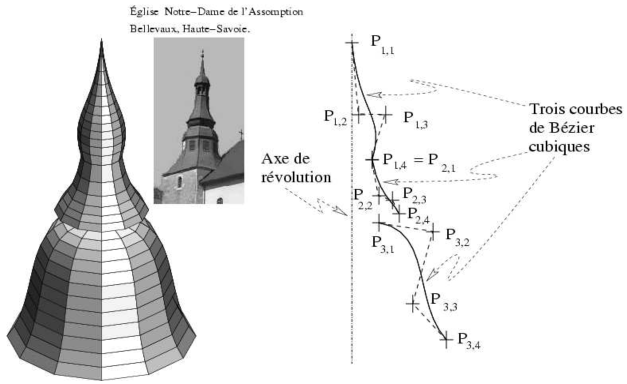
- **Surface réglée N-S** : $M_{n\text{-}s} = (1 - t)\ N(t') + t\ S(t')$
- **Surface réglée O-E** : $M_{o\text{-}e} = (1 - t')\ O(t) + t'\ E(t)$
- **Patch bilinéaire** : $M_{bilin} = (1 - t)\ ((1 - t')\ N\text{-}O + t'\ N\text{-}E) + t\ ((1 - t')\ S\text{-}O + t'\ S\text{-}E)$
- **=> Patch Coons** : $M_{Coons} = M_{n\text{-}s} + M_{o\text{-}e} - M_{bilin}$



SURFACE DE RÉVOLUTION: EXEMPLE

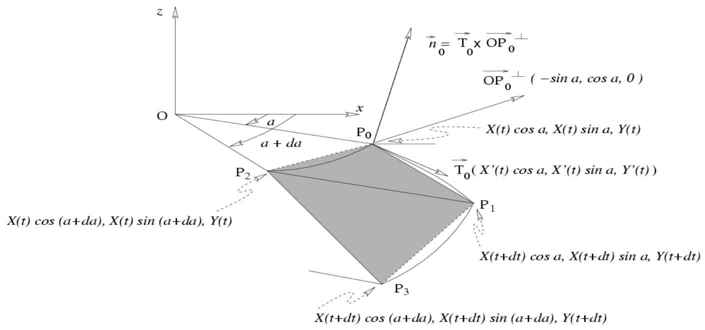
Principe

Une **surface de révolution** est une surface obtenue par rotation d'une courbe plane autour d'un axe.



SURFACE DE RÉVOLUTION: POLYGONALISATION 1/2

Polygonisation d'une surface de révolution dont la génératrice est une courbe paramétrique: **Triangle strips** dont les sommets sont obtenus en faisant varier ***t*, le paramètre de la courbe, de d*t*** et ***a*, l'angle du plan de la courbe avec *xOz* de d*a***.



SURFACE DE RÉVOLUTION: POLYGONALISATION 2/2

Algorithme de polygonisation d'une surface de révolution de génératrice paramétrique

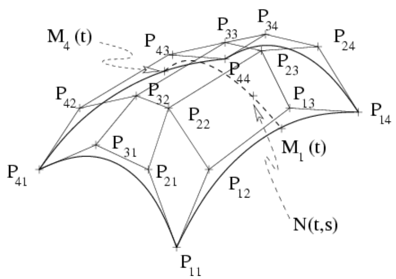
Polygonisation d'une surface révolution d'axe O*z* de génératrice paramétrique ***m.n* pas**: paramètre *u* sur [*a*,*b*] et paramètre *alpha* sur [0,2.Pi].

```
// initialisation
pasU = (b - a) / m     et     pasAlpha = 2.Pi / n
// boucle de traçage
u = a
Pour i = 0 ; i < m ; i++
  alpha = 0
  Début( triangle_strip );
    Pour j = 0 ; j <= n ; j++
        Po = M( u , alpha );
        To = M'( u , alpha );
        P1 = M( u  + pasU, alpha );
        T1 = M'( u + pasU , alpha );
        Normale( T0 , alpha );       Sommet( Po );
        Normale( T1 , alpha );       Sommet( P1 );
        alpha += pasAlpha
    Fin pour
   Fin( triangle_strip );
   u += pasU;
Fin pour
```


SURFACE DE BÉZIER : DÉFINITION RÉCURSIVE 1/2

Surface bicubique: sur 16 points

Une **surface bicubique de Bézier** est définie par 16 points de contrôle $P_{i,j}$ (*i,j* dans {1...4}x{1...4}) en calculant :
- quatre points $M_k(t)$ (*k* dans {1...4}) sur les courbes de Bézier cubiques définies par $P_{k,j}$ (*j* dans {1...4}) ,
- et le point N(*t*,*s*) sur la courbe de Bézier définie par les quatre points $M_k(t)$ précédents.



SURFACE DE BÉZIER : DÉFINITION RÉCURSIVE 2/2

Définition récursive de de Casteljau

Pour un **patch de degré *n***, on utilise $(n+1)^2$ points de contrôle $M_{i,j}^{0}$.

On construit récursivement les points du patch par **interpolation bilinéaire** sur les paramètres *u* et *v*.

Le point sur la surface est $M_{0,0}^{n}$.

$$M_{i,j}^{k}(u,v) = (1-u)(1-v)\,M_{i,j}^{k-1}(u,v) + u(1-v)\,M_{i,j+1}^{k-1}(u,v) + (1-u)\,v\,M_{i+1,j}^{k-1}(u,v) + u\,v\,M_{i+1,j+1}^{k-1}(u,v)$$

$$\begin{cases} k = 1 \ldots n \\ i = 0, 1 \ldots n-k \ \text{ et } \ j = 0, 1 \ldots n-k \end{cases}$$

SURFACE DE BÉZIER : CALCUL MATRICIEL 1/3

Calcul par produit matriciel

Courbe de Bézier

$$M_1(t) = \begin{bmatrix} B_0^3(t) & B_1^3(t) & B_2^3(t) & B_3^3(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \\ P_{14} \end{bmatrix}$$

Surface de Bézier

$$N(t,s) = B_0(s)\,M_1(t) + B_1(s)\,M_2(t) + B_2(s)\,M_3(t) + B_3(s)\,M_4(t)$$

$$N(t,s) = \begin{bmatrix} B_0^3(t) \\ B_1^3(t) \\ B_2^3(t) \\ B_3^3(t) \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{31} & P_{41} \\ P_{12} & P_{22} & P_{32} & P_{42} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} & P_{43} \\ P_{14} & P_{24} & P_{34} & P_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0^3(s) \\ B_1^3(s) \\ B_2^3(s) \\ B_3^3(s) \end{bmatrix}$$

SURFACE DE BÉZIER : CALCUL MATRICIEL 2/3

Calcul par produit matriciel (suite et fin)

$$N(t,s) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t^1 & t^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{31} & P_{41} \\ P_{12} & P_{22} & P_{32} & P_{42} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} & P_{43} \\ P_{14} & P_{24} & P_{34} & P_{44} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{bmatrix}$$

SURFACE DE BÉZIER : CALCUL MATRICIEL 3/3

Interpolation par les polynomes de Bernstein

On peut envisager d'avoir des **degrés *m* et *n* différents** pour les paramètres *u* et *v*.

$$M(u,v) = \sum_{i=0}^{m} B_i^m(u) \sum_{j=0}^{n} B_j^n(v)\ M_{i,j}$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \binom{m}{i}\binom{n}{j} u^i (1-u)^{m-i} v^j (1-v)^{n-j}\ M_{i,j}$$

On peut envisager un patch comme un **ensemble de courbes de Bézier** (en *u*) dont les points de contrôles $P_i(v)$ parcourent des courbes de Bézier (en *v*).

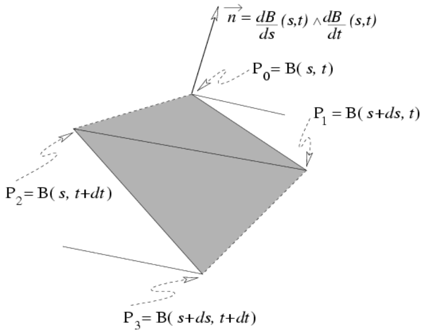
$$M(u,v) = \sum_{i=0}^{m} B_i^m(u) \sum_{j=0}^{n} B_j^n(v)\ M_{i,j}$$

$$= \sum_{i=0}^{m} B_i^m(u)\ P_i(v)$$

SURFACE DE BÉZIER : POLYGONALISATION 1/3

Polygonalisation d'une surface de Bézier

Triangle strips dont les sommets sont obtenus en faisant varier ***s* de *ds*** et ***t* de *dt***.



SURFACE DE BÉZIER : POLYGONALISATION 2/3

Algorithme de polygonisation d'une surface de Bézier

Polygonisation en ***m*.*n* pas**:
paramètre *s* sur [*a*,*b*] et paramètre *t* sur [*c*,*d*].

```
// initialisation
passS = (b - a) / m;
pasT = (d - c) / n;

// boucle de traçage
s = a;
Pour i = 0 ; i < m ; i++
  t = c;
  Début( triangle_strip );
    Pour j = 0 ; j <= n ; j++
        P0 = B( s , t );           Ts,0 = B's( s , t ); Tt,0 = B't( s , t );
        P1 = B( s + pasS , t );    Ts,1 = B's( s + pasS , t ); Tt,1 = B't( s + pasS , t );
        Normale( Ts,0 , Tt,0 );    Sommet( P0 );
        Normale( Ts,1 , Tt,1 );    Sommet( P1 );
        t += pasT;
    Fin pour
  Fin( triangle_strip );
  s += pasS
Fin pour
```


SURFACE DE BÉZIER : POLYGONALISATION 3/3

Surface de Bézier en OpenGL

Les **courbes et surfaces de Bézier** se tracent aussi en **OpenGL** au moyen d'évaluateurs **`glEvalCoord1()`** pour les courbes et **`glEvalCoord2()`** pour les surfaces.
La définition de l'évaluateur est faite avec les fonctions **`glMap1()`** pour une courbe et **`glMap2()`** une surface.
All About NURBS (Perry Newhook)

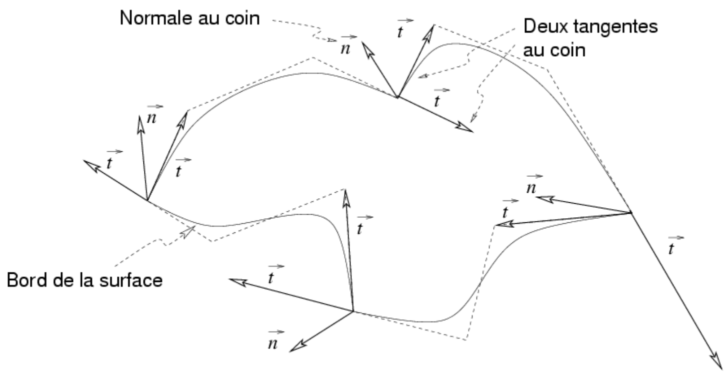
SURFACE DE BÉZIER : PROPRIÉTÉS 1/4

Propriétés aux bords

- Une surface de **Bézier passe par les quatre points de contrôles** aux coins.
- Les quatre **bords d'une surface de Bézier** sont des courbes de Bézier dont les points de contrôle sont $M_{0,j}$, $M_{m,j}$, $M_{i,0}$ ou $M_{i,n}$.
- Les **normales aux coins** de la surface sont les produits vectoriels des tangentes aux courbes des bords.

SURFACE DE BÉZIER : PROPRIÉTÉS 2/4

Propriétés aux bords (figure)



SURFACE DE BÉZIER : PROPRIÉTÉS 3/4

Propriétés affines

- Une surface de Bézier est incluse dans **l'enveloppe convexe** de ses points de contrôle.

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} B_i^m(u)\, B_j^n(v) = 1$$

- **L'image d'une surface de Bézier par une transformation affine** est la surface générée par l'image de ses points de contrôle.

SURFACE DE BÉZIER : PROPRIÉTÉS 4/4

Dérivées, tangentes et normales à une surface de Bézier

$$\frac{d\, M(u,v)}{d\,u} = m \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m-1} B_i^{m-1}(u)\, B_j^n(v)\, (M_{i+1,j} - M_{i,j})$$

$$\frac{d\, M(u,v)}{d\,v} = n \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n-1} B_i^{m}(u)\, B_j^{n-1}(v)\, (M_{i+1,j} - M_{i,j})$$

La normale est le produit vectoriel des deux dérivées partielles en *u* et *v*.

SURFACE DE BÉZIER : JONCTION 1/4

Continuité entre deux surfaces de Bézier

Continuité de position C_0 ou G_0

Les frontières communes ont les **mêmes quatre points de contrôle**
(ici A4 = B1, A8 = B5, A12 = B9 et A16 = B13),

Continuité de classe G_1

Les **points extrêmes sont confondus** et les **arêtes** initiales et finales **du polygone de contrôle au point de jonction sont colinéaires**
(ici [A3 A4, B1 B2], [A7 A8, B5 B6], [A11 A12, B9 B11] et [A15 A16, B13 B14]).

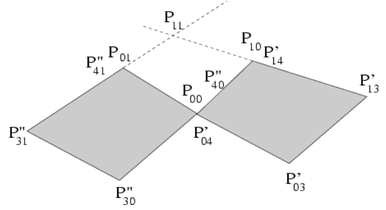
SURFACE DE BÉZIER : JONCTION 2/4

Contraintes issues de la continuité de classe G_1

La continuité de classe G_1 est une **condition forte** sur une surface de Bézier : dans le cas général, il n'est pas possible de trouver les points intérieurs si les 4 surfaces voisines sont connues.

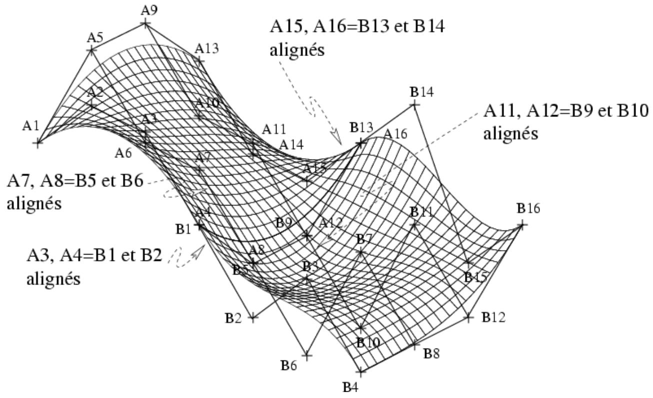
P_{01} est égal à P''_{41}, P_{10} est égal à P'_{14}, et P_{00} est égal à P''_{40} et P'_{04}

P_{11} est défini par l'intersection des droites $P''_{31}P''_{41}$ et $P'_{13}P'_{14}$ seulement si elles sont coplanaires.



SURFACE DE BÉZIER : JONCTION 3/4

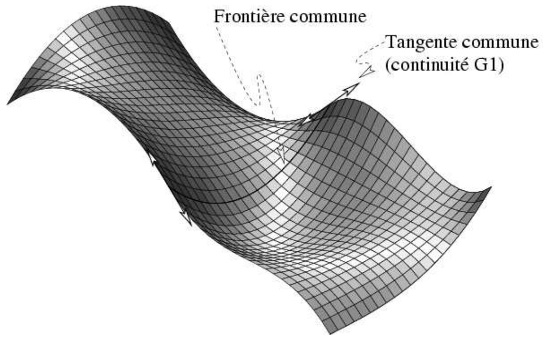
Cas de deux surfaces



SURFACE DE BÉZIER : JONCTION 4/4

En fonction des conditions précédentes...

La surface obtenue est bien de classe G^1.



SURFACE NURBS : DÉFINTION

Définition

Les surfaces **NURBS** s'obtiennent par extension de la définition des courbes NURBS :

- deux vecteurs de noeuds *T* et *S*, un pour chacune des variables *t* et *s*,

- $(m+1)\text{x}(n+1)$ points de contrôle $P_{i,k}$

- $(m+1)\text{x}(n+1)$ fonctions de pondération $R_{m,n.i,k}$ déduites des fonctions de pondération des B-splines $S_{m,k}$ au moyen de $(m+1)\text{x}(n+1)$ **poids** $w_{i,k}$:

$$R_{m,n,i,k}(t) = \frac{w_{i,k}\, S_{m,i}(t)\, S_{n,k}(s)}{\sum_{j,l} w_{j,l}\, S_{m,j}(t)\, S_{n,l}(s)}$$

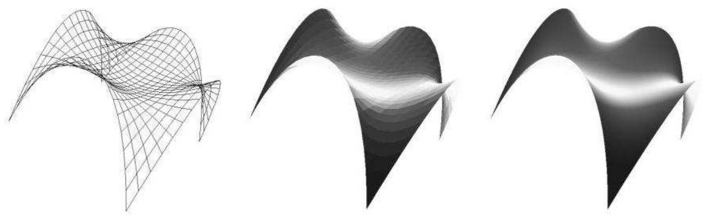
$$N(t, s) = \sum_{i,k} R_{m,n,i,k}(t)\, P_{i,k}$$

SURFACE NURBS : EXEMPLE

Exemple

Surface **NURBS** obtenue en OpenGL, rendus **fil**, **polygone** et **doux**.

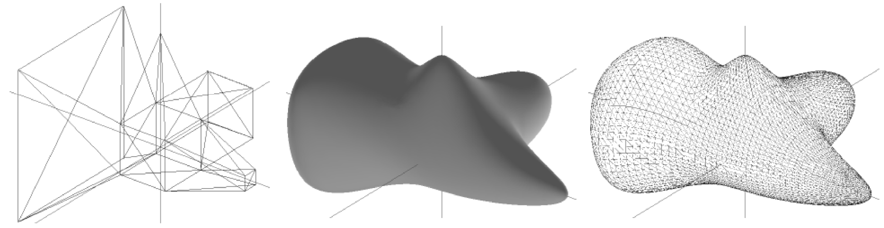
Points de contrôle :
(-3.0, -3.0, 1.0), (-3.0, -1.0, -5.0), (-3.0, 1.0, -5.0), (-3.0, 3.0, 1.0), (-1.0, -3.0, -5.0), (-1.0, -1.0, 0.0), (-1.0, 1.0, 0.0), (-1.0, 3.0, -5.0), (1.0, -3.0, -5.0), (1.0, -1.0, 0.0), (1.0, 1.0, 0.0), (1.0, 3.0, -5.0), (3.0, -3.0, 1.0), (3.0, -1.0, -5.0), (3.0, 1.0, -5.0), (3.0, 3.0, 1.0) .



SURFACE DE SUBDIVISION : DÉFINITION 1/2

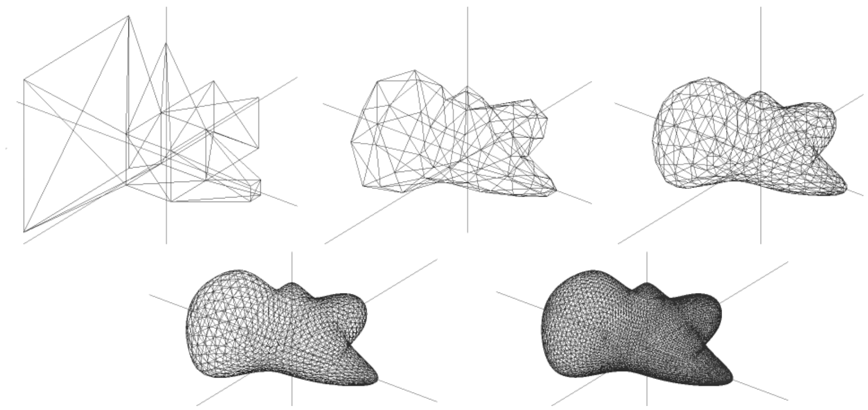
Définition et exemple d'une surface de subdivision

Une **surface de subdivision** est définie par un maillage de topologie arbitraire.



SURFACE DE SUBDIVISION : DÉFINITION 2/3

Raffinement d'une surface de subdivision



SURFACE DE SUBDIVISION : DÉFINITION 3/3

Raffinement d'une surface de subdivision (suite et fin)

Une **surface de subdivision** fournit un niveau de détail aussi fin que souhaité.

La limite est appelée *surface limite.*

Le coût du raffinement est exponentiel (4^n).

SURFACE DE SUBDIVISION : ALGORITHME

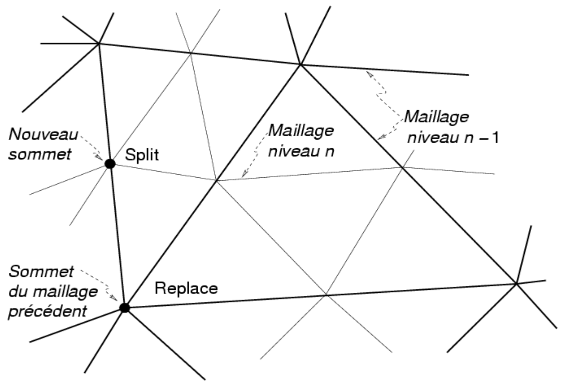
Algorithme général de création d'une surface de subdivision

Nous ne traitons que le cas de *maillages triangulaires* et de *subdivisions triangulaires*:
algorithme de **Loop** et algorithme **Modified Butterfly**,
certains algorithmes travaillent sur des maillages polygonaux.

```
Définir le maillage de départ: maillage0.

Pour niveau = 1 ; niveau <= niveauFinal ; niveau++
    maillageniveau = subdiviser( maillageniveau-1)
    lisser( maillageniveau )
fin pour
```

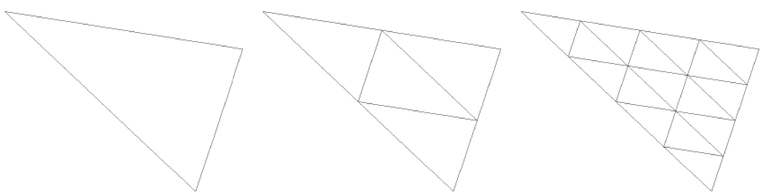

SURFACE DE SUBDIVISION : SUBDIVISION 1/2

Subdivision de maillages triangulaires



SURFACE DE SUBDIVISION : SUBDIVISION 2/2

Subdivision récursive: 3 étapes successives



SURFACE DE SUBDIVISION : ALGORITHME DE LOOP 1/5

Principes de l'algorithme

On utilise des **masques** qui définissent la position des sommets du niveau n en fonction des sommets du niveau n-1.

- un masque pour les sommets obtenus par découpage d'une arête en 2 (*split*),
- un masque pour les sommets repris du découpage précédent (*replace*).

★★★

SURFACE DE SUBDIVISION : ALGORITHME DE LOOP 2/5

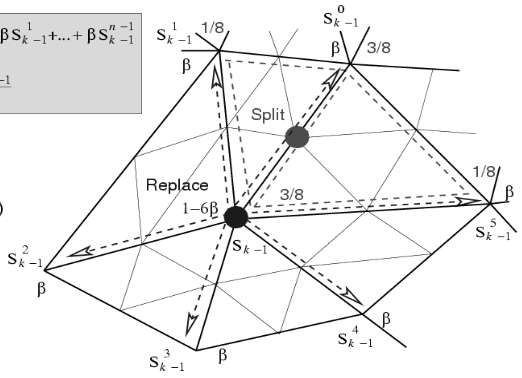
Les deux masques pour l'algorithme de Loop

$$Replace_k = (1 - n\,\beta)S_{k-1} + \beta\, S^{0}_{k-1} + \beta S^{1}_{k-1} + \ldots + \beta S^{n-1}_{k-1}$$

$$Split_k = \frac{3S_{k-1} + 3\,S^{0}_{k-1} + S^{1}_{k-1} + S^{5}_{k-1}}{8}$$

$$\beta = \frac{1}{n}\left(\frac{5}{8} - \frac{(3 + 2\cos(2\,\Pi / n))^2}{64}\right)$$

n : arité de S_{k-1} (généralement 6)



★★★

SURFACE DE SUBDIVISION : ALGORITHME DE LOOP 3/5

Méthode

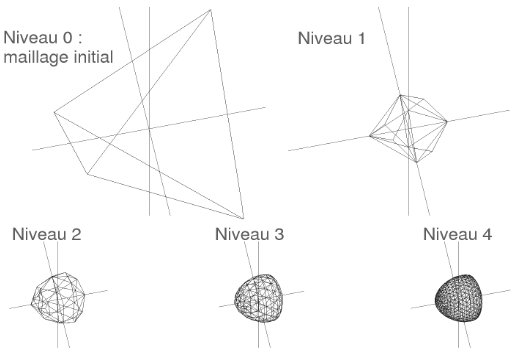
Pour chaque sommet S_{k-1} du maillage du niveau *k-1*,
on recense les *n* sommets auxquels il est connecté:
$S_{k-1}^{0}, S_{k-1}^{1} \ldots S_{k-1}^{n-1}$,

On applique les masques pour calculer la position du sommet de replacement et des découpages des arêtes issues de ce sommet.

★★★

SURFACE DE SUBDIVISION : ALGO. DE LOOP 4/5

Exemple: le cas du tétraèdre



★★★

SURFACE DE SUBDIVISION : ALGO. DE LOOP 5/5

Caractéristiques

Le schéma de subdivision de Loop est un **schéma d'approximation**;
la surface ne passe pas par les sommets du polygone initial.

Il est **juste** (*fair*), il tend à produire des formes douces.

Il **converge rapidement**.

Il **rétrécit** les formes par rapport au polygone initial (voir tétraèdre).

★★★

SURFACE DE SUBDIVISION : MODIFIED BUTTERFLY 1/8

Principes de l'algorithme

On utilise des **masques** qui définissent la position d'un sommet découpé du niveau *n*
en fonction des sommets du niveau *n*-1.

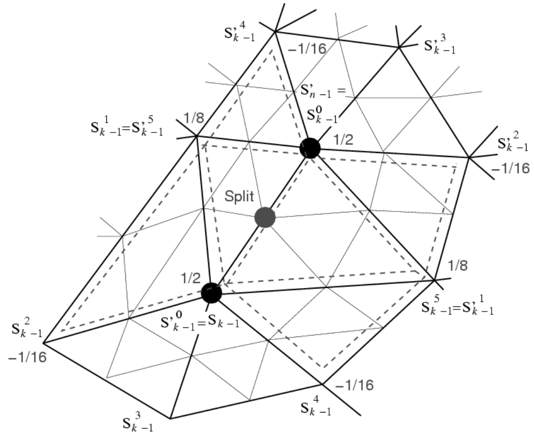
Un sommet est **régulier** s'il est d'arité 6.
On définit ainsi les masques:

- un masque pour le découpage d'un segment défini par *deux sommets réguliers,*
- un masque pour le découpage d'un segment dont *une des extrémité est irrégulière*.

★★★

SURFACE DE SUBDIVISION : MOD. BUTTERFLY 2/8

Masque de MB dans le cas de deux sommets réguliers



★★★

SURFACE DE SUBDIVISION : MODIFIED BUTTERFLY 3/8

Méthode générale

Pour chaque couple de sommets (S_{k-1}, S'_{k-1}) du maillage de niveau *k-1*,
on recense les *n* et *n*' sommets auxquels ils sont connectés:

$S_{k-1}{}^0$, $S_{k-1}{}^1 \ldots S_{k-1}{}^{n-1}$, et $S'_{k-1}{}^0$, $S'_{k-1}{}^1 \ldots S'_{k-1}{}^{n'-1}$,

Cas de deux sommets réguliers

Si les deux sommets sont réguliers (arité 6),
on applique le masque précédent pour calculer la position du découpage de l'arête joignant ces sommets.

★★★

SURFACE DE SUBDIVISION : MOD. BUTTERFLY 4/8

Cas d'un sommet régulier et d'un sommet irrégulier

Si le sommet S_{k-1} est irrégulier (arité *n* != 6),
on applique le masque ci-dessous, **centré sur le sommet irrégulier**.
Le sommet irrégulier central a une **pondération de 0.75**,
les pondérations w_j des autres sommets sont données par les formules ci-cessous.

n : arité du sommet irrégulier

$n > 4$ $\beta = 0.5$

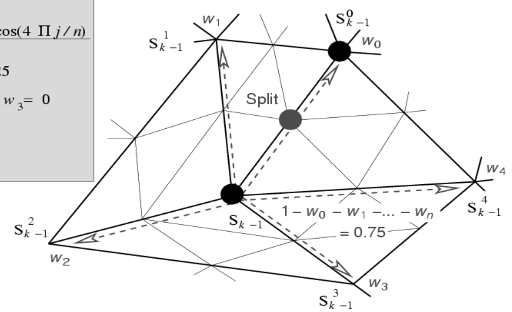
$$w_j = \frac{0.25 + \cos(2\,\Pi\, j/n) + \beta\,\cos(4\,\Pi\, j/n)}{n}$$

$n = 4$ même formule avec $\beta = 0.25$

$w_0 = \frac{3}{8}$ $w_1 = 0$ $w_2 = \frac{-1}{8}$ $w_3 = 0$

$n = 3$ même formule avec $\beta = 0$

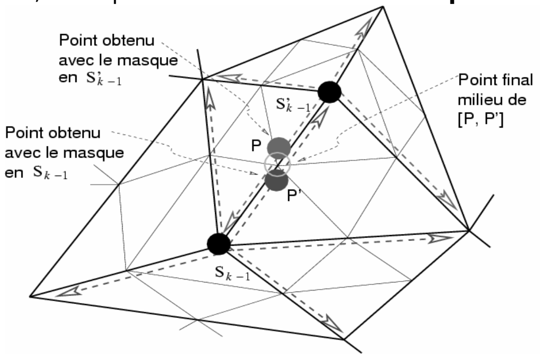
$w_0 = \frac{5}{12}$ $w_1 = \frac{-1}{12}$ $w_2 = \frac{-1}{12}$



SURFACE DE SUBDIVISION : MOD. BUTTERFLY 5/8

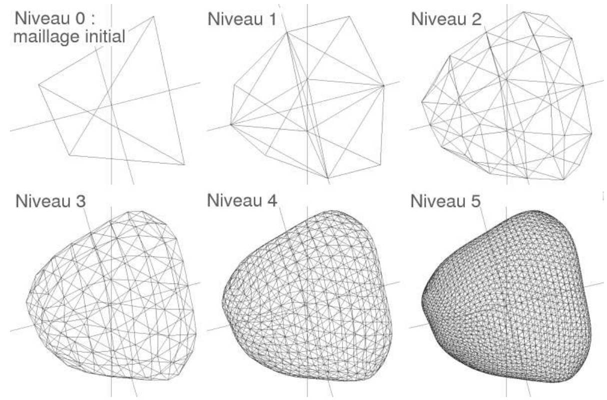
Cas de deux sommets irréguliers

Si les sommets S_{k-1} et S'_{k-1} sont irréguliers (arité *n* != 6 et *n*' != 6), on effectue le calcul **pour chacun des deux sommets irréguliers** comme dans le cas semi-régulier, et on prend le **milieu de ces deux points** comme valeur.



SURFACE DE SUBDIVISION : MOD. BUTTERFLY 6/8

Exemple: le cas du tétraèdre



SURFACE DE SUBDIVISION : MODIFIED BUTTERFLY 7/8

Caractéristiques

Le schéma de subdivision de *Modified Butterfly* est un **schéma d'interpolation**; la surface passe par les sommets du polygone initial.

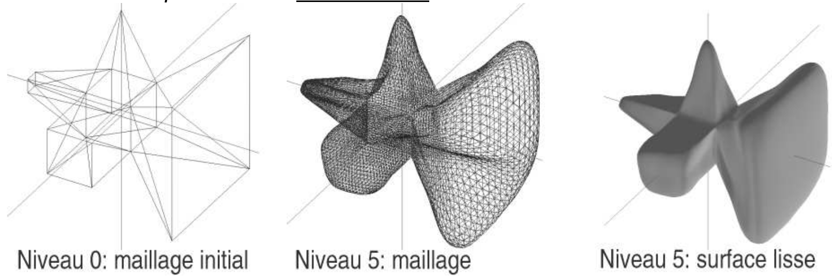
Il est moins **juste** (*fair*) qu'un schéma par approximation, et peut produire des torsions non naturelles.

Il reste **proche** de la forme du polygone initial (voir tétraèdre).

SURFACE DE SUBDIVISION : MODIFIED BUTTERFLY 8/8

Cas de déformations non naturelles

Comparer le rendu obtenu ici pour le schéma de *Modified Butterfly* avec le rendu du schéma de *Loop* donné en introduction.



Éclairement

***

LES COMPOSANTES DU RENDU D'UN VOLUME ÉCLAIRÉ 1/3

Les ingrédients du rendu réaliste de l'éclairement

1. Des **sources lumineuses** induisant des éclairement différents selon l'orientation des faces par rapport à ces sources (figure 1).
2. Un **modèle d'ombrage** fournissant un rendu lisse (figure 2).
3. Des **composantes émises ou réfléchies** de la lumière pour donner à certains objets un aspect brillant ou réfléchissant (figure 3).
4. Un ajout de **texture** sur les objets pour leur donner une apparence telle que le bois ou la pierre (figure 4).

***

LES COMPOSANTES DU RENDU D'UN VOLUME ÉCLAIRÉ 2/3

Fig. 1: Rendu plat, maillage visible

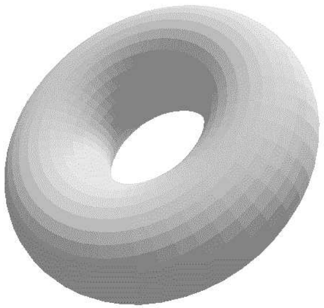
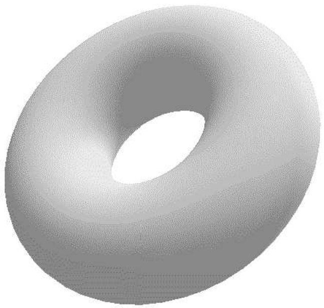


Fig. 2: Rendu doux, maillage lissé



***

LES COMPOS. DU RENDU D'UN VOL. ÉCLAIRÉ 3/3

Fig. 3: Rendu doux avec composante spéculaire

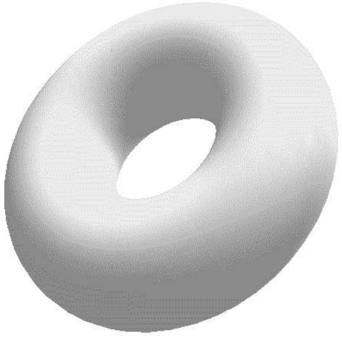
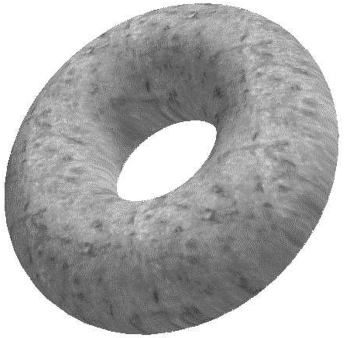


Fig. 4: Rendu doux avec texture



MODÈLES D'OMBRAGE : INTRODUCTION

Les deux composantes de la lumière

1. Une **lumière ambiante** non directionnelle.
2. Des **sources lumineuses** directionnelles, à distance finie (par exemple un spot) ou infinie (par exemple le soleil).

On ne prend pas en compte l'éclairage réciproque des objets.

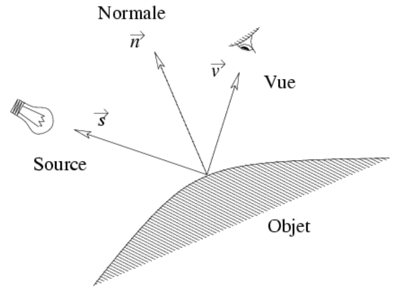
Les trois modes d'interaction entre les objets et la lumière

1. L'**absorption** de la lumière et sa conversion en chaleur (objet noir).
2. La **réflexion/diffusion** vers d'autres objets (objet brillant ou reflechissant).
3. La **transmission** de la lumière à travers l'objet (objet transparent).

MODÈLES D'OMBRAGE : INGRÉDIENTS

Les trois ingrédients géométriques pour le calcul de l'éclairement

1. Le vecteur *n* **normal** à la surface.
2. Le vecteur *v* de direction de **visualisation**.
3. Le vecteur *s* de direction de la **source lumineuse**.



LES MODES DE RÉFLEXION DE LA LUMIÈRE

Diffusion et réflexion spéculaire

1. **éparpillement diffus** (aspect poreux comme la craie, par exemple).
   - sans direction privilégiée de réémission,
   - forte interaction avec l'objet
     -> la lumière diffuse est donc fortement affectée par la couleur de la surface de l'objet.
2. **réflexion spéculaire** (aspect brillant comme le métal chromé, par exemple).
   - réflexion selon une direction privilégiée fonction de l'angle de la source avec la normale,
   - faible interaction avec l'objet
     -> la lumière réfléchie est donc proche de la lumière incidente,
     avec une composante plus ou moins importante de la couleur de l'objet.

La plupart des surfaces combinent les deux modes de réflexion de la lumière.

CALCUL DE LA LUMIÈRE DIFFUSE 1/3

Réflexion diffuse non directionnelle

- **lumière diffuse non directionnelle** donc indépendante de l'angle entre la normale et le vecteur de vue.
- **loi de Lambert** : la lumière diffuse dépend de l'angle entre la source et la normale à la surface.

Intensité de la lumière diffuse

Intensité de la composante diffuse de la source

Coefficient de réflexion diffuse du matériau

Angle source/normale

$$I_d = I_{sd}\,\rho_d\,\cos a$$

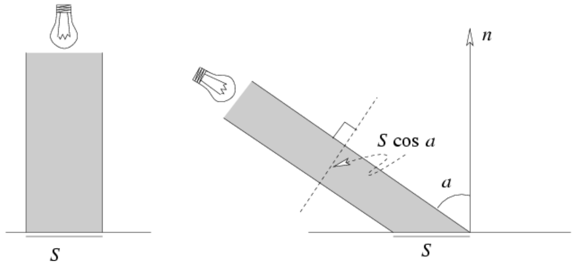
$$I_d = I_{sd}\,\rho_d\,\max\left(\frac{s\,.\,n}{|s|\,.\,|n|},\,0\right)$$

Les parties cachées ne sont pas éclairées

★★★

CALCUL DE LA LUMIÈRE DIFFUSE 2/3

Illustration de la loi de Lambert

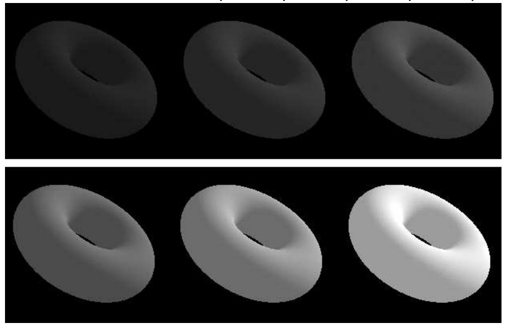


★★★

CALCUL DE LA LUMIÈRE DIFFUSE 3/3

Quatorzes vues du tore à lumière identique et à coeffcients de réflexion diffuse variable

Coefficients de réflexion diffuse : 0.12, 0.17, 0.25, 0.36, 0.52, 0.75



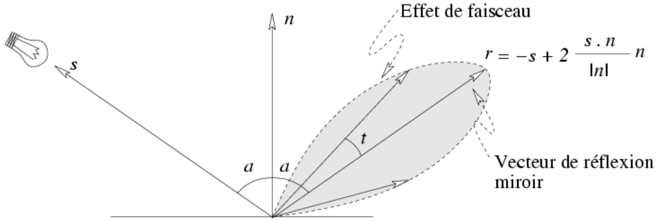
★★★

CALCUL DE LA RÉFLEXION SPÉCULAIRE 1/6

Modèle de réflexion spéculaire

Effet de faisceau pour les surfaces réfléchissantes qui ne sont pas des miroirs parfaits :

- la lumière est réfléchie maximalement dans la direction de réflexion miroir parfaite *r*,
- l'intensité de la lumière réfléchie diminue rapidement lorsqu'on s'éloigne de l'angle de réflexion.



★★★

CALCUL DE LA RÉFLEXION SPÉCULAIRE 2/6

Calcul de la réflexion spéculaire dans le modèle de Phong

Dans le **modèle de Phong**, l'intensité est une fonction $\cos^f(t)$.

Intensité de la composante spéculaire de la source

Intensité de la lumière spéculaire

Coefficient de réflexion spéculaire du matériau

Angle vue/réfléchi

$$I_s = I_{ss}\,\rho_s\,\cos^f t$$

$$I_s = I_{ss}\,\rho_s\,\max\left(\left(\frac{r\,.\,v}{|r|\,.\,|v|}\right)^f, 0\right)$$

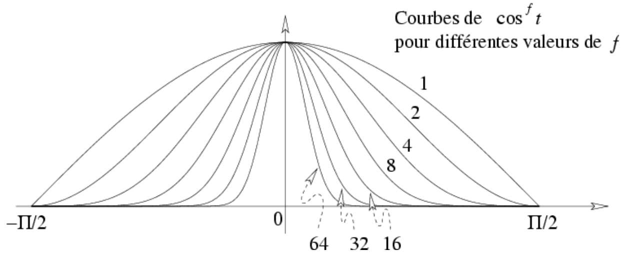
Les parties cachées ne sont pas éclairées

★★★

CALCUL DE LA RÉFLEXION SPÉCULAIRE 3/6

Rôle du paramètre f dans le modèle de Phong

Plus *f* est grand plus on est proche d'un miroir parfait.

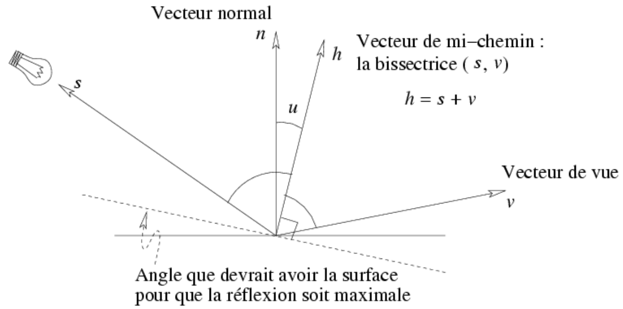


★★

CALCUL DE LA RÉFLEXION SPÉCULAIRE 4/6

Accélération du calcul par le vecteur de mi-chemin

Le **vecteur de mi-chemin** est la somme des vecteurs *s* (source) et *v* (vue).
C'est la normale à la surface qui fournirait la réflexion maximale.



★★

CALCUL DE LA RÉFLEXION SPÉCULAIRE 5/6

Nouvelle formule pour la lumière spéculaire au moyen du vecteur de mi-chemin

L'angle *u* entre la normale et le vecteur de demi-chemin fournit une **indication de la baisse de l'intensité de la lumière spéculaire**.

On peut donc définir **une nouvelle formule de Phong** basée sur le cosinus de *u* :

Angle *u* avec le vecteur de demi–distance

$$I'_s = I_{ss}\,\rho_s\,\max\left(\left(\frac{h\,.\,n}{|h|\,.\,|n|}\right)^f, 0\right)$$

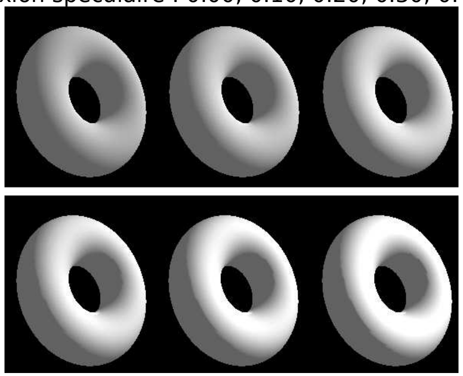
Avantage : le **vecteur *h* est constant** sur la surface (indépendant de la norme) si l'observateur et la source lumineuse sont à l'infini.

★★★

CALCUL DE LA RÉFLEXION SPÉCULAIRE 6/6

Six vues du tore à lumière identique et à coefficients de réflexion spéculaire variable

Coefficients de réflexion spéculaire : 0.00, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50



★★★

LUMIÈRE AMBIANTE 1/2

Lumière de fond uniforme

Elle produit une intensité constante qui ne dépend que du **coefficient de réflexion ambiant**.

Intensité de la lumière ambiante réfléchie

Intensité de la lumière ambiante

$$I_d = I_{sa}\ \rho_a$$

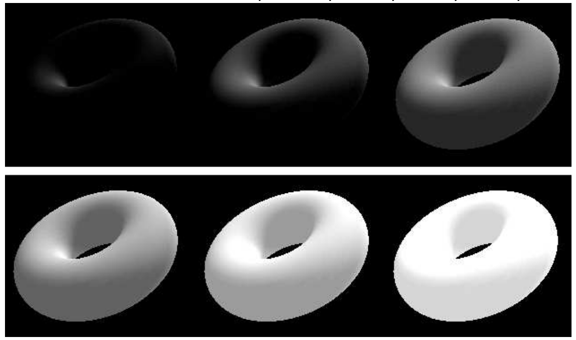
Coefficient de réflexion ambiante du matériau

★★★

LUMIÈRE AMBIANTE 2/2

Six vues du tore à lumière de sources identiques et à lumière ambiante variable

Valeurs de la lumière ambiante : -0.30, -0.15, 0.00, 0.15, 0.30, 0.45



★★★

COMBINAISON DES LUMIÈRES

Combinaison des trois modes de réflexion

Pour obtenir la luminosité total, on additionne les trois sources de réflexion lumineuses vues précédemment : **lumières ambiante, diffuse et spéculaire**.

Intensité lumineuse totale

$$I = \underbrace{I_{sa}\ \rho_a}_{\text{Lumière ambiante}} + \underbrace{I_{sd}\ \rho_d\ \max\left(\frac{s\ .\ n}{|s|\ .\ |n|}, 0\right)}_{\text{Lumière diffuse}} + \underbrace{I_{ss}\ \rho_s\ \max\left(\left(\frac{r\ .\ v}{|r|\ .\ |v|}\right)^f, 0\right)}_{\text{Lumière spéculaire}}$$

★★

GESTION COULEUR

Gestion de la couleur dans le calcul de la lumière

On additionne l'intensité lumineuse de chacune des composantes de la couleur. Dans le système R, V, B, on ajoute les **intensités rouge, verte et bleue**.

On définit alors les **caractéristiques des sources et des matériaux** pour chacune de ces trois composantes.

Intensité lumineuse totale

$$\boxed{I = I_R + I_V + I_B}$$

Intensité lumineuse pour chacune des trois composantes R, V, B

$$\begin{cases} I_R = I_{saR}\ \rho_{aR} + I_{sdR}\ \rho_{dR}\ \mathit{Lambert} + I_{ssR}\ \rho_{sR}\ \mathit{Phong}^f \\ I_V = I_{saV}\ \rho_{aV} + I_{sdV}\ \rho_{dV}\ \mathit{Lambert} + I_{ssV}\ \rho_{sV}\ \mathit{Phong}^f \\ I_B = I_{saB}\ \rho_{aB} + I_{sdB}\ \rho_{dB}\ \mathit{Lambert} + I_{ssB}\ \rho_{sB}\ \mathit{Phong}^f \end{cases}$$

SOURCES LUMINEUSES EN OpenGL

Toute source lumineuse est définie par trois vecteurs de quatre composantes (rouge, vert, bleu, alpha) :
- **lumière ambiante** (valeur par défaut <0, 0, 0, 1>),
- **lumière diffuse** (valeur par défaut <1, 1, 1, 1>),
- **lumière spéculaire** (valeur par défaut <1, 1, 1, 1>) et
- une **position** définie par quatre coordonnées homogènes (x, y, z, 1) pour une source à distance finie ou
- une **direction** définie par quatre coordonnées homogènes (x, y, z, 0) pour une source à distance infinie (vecteur orienté de l'objet vers la source lumineuse).

Atténuation

- **atténuation radiale pour les spots** : 2 paramètres **l'angle d'extinction *A*** (l'angle au-delà duquel c'est l'obscurité) et **un exposant *n*** définissant l'atténuation en fonction de l'angle a avec la direction d'émission ($\cos^n(a)$).
- **atténuation en fonction de la distance *D*** :
trois paramètres (k_1, k_2, k_3) contrôlent l'atténuation (atténuation *constante, linéaire* et *quadratique*) : atténuation = $1 / (k_1 + k_2\, D + k_3\, D^2)$

MATÉRIAUX EN OpenGL

Matériaux

Toute surface a deux faces (une face **avant** et une face **arrière**) avec leurs propres paramètres de matériau.

Toute face de matériau est définie par quatre vecteurs de quatre composantes (rouge, vert, bleu, alpha) :
- **coefficient de réflexion ambiant** (valeur par défaut <0, 0, 0, 1>),
- **coefficient de réflexion diffus** (valeur par défaut <1, 1, 1, 1>),
- **coefficient de réflexion spéculaire** (valeur par défaut <1, 1, 1, 1>),
- **coefficient d'émission** (objet luminescent) (valeur par défaut <0, 0, 0, 1>).

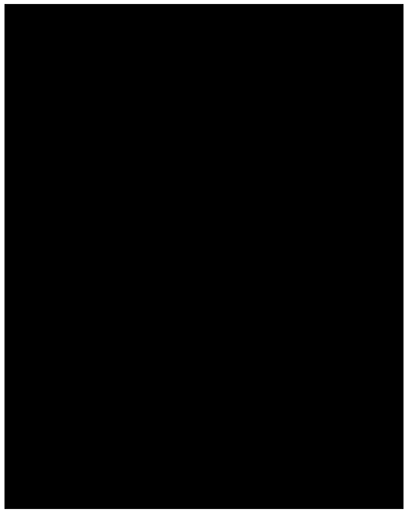
CARACTÉRISTIQUES DE CERTAINS MATÉRIAUX 1/3

Tables de caractéristiques lumineuses de certains métaux

Source : *Programming with OpenGL: Advanced Rendering,* Copyright ©1997 by Tom McReynolds and David Blythe. SIGGRAPH `97 Course .

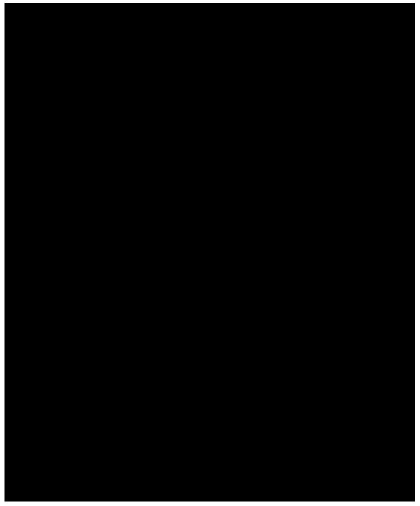
http://www.sgi.com/software/opengl/advanced97/notes/node84.html

CARACTÉRISTIQUES DE CERTAINS MATÉRIAUX 2/3



★

CARACTÉRISTIQUES DE CERTAINS MATÉRIAUX 3/3



★★★

LUMIÈRE TOTALE

Généralisation à n sources

La lumière totale s'obtient en sommant :
- le **rayonnement** *e* de l'objet,
- la réflexion de la **lumière ambiante** I_a,
- la réflexion des **trois composantes des sources lumineuses** dont l'intensité est modulée par l'effet de spot *spot* et par l'atténuation *attén.*due à la distance.

$$I = e + I_a\ \rho_a + \sum_{\text{s dans sources}} \underbrace{att\acute{e}n.}_{\frac{1}{K_1 + K_2 D + K_3\ D^2}}\ \text{x}\ \overbrace{spot}^{\cos^n \alpha \quad \text{si} \quad \alpha < A}\ \text{x}\ (I_{sa}\ \rho_a\ +\ I_{sd}\ \rho_d\ Lambert\ +\ I_{ss}\ \rho_s\ Phong^{\,f}\ )$$

★★★

OMBRAGE : INTERPOLATION

Ombrage plat

Les surfaces complexes sont représentées par des **maillages polygonaux**

La **définition d'une normale à chaque sommet** du maillage permet de fournir une valeur de la lumière en ce sommet

Si la lumière n'est pas **interpolée** d'un sommet à l'autre,
on obtient un **<u>ombrage plat</u>**, identique sur toute la face du polygone.
On prend comme **vecteur normal de face**, la **moyenne des vecteurs normaux de sommets**.

Ombrage doux

Pour obtenir un dégradé dans les ombrages et le rendu d'une surface lisse,
il existe deux techniques principales d'**<u>ombrage doux</u>** :
- **l'ombrage de Gouraud** (interpolation des **intensités**) et
- **l'ombrage de Phong** (interpolation des **normales**).

★★★

OMBRAGE DE GOURAUD 1/2

Définition de l'ombrage de Gouraud

L'ombrage de Gouraud consiste :

- sur une **arête**, à **interpoler les <u>valeurs</u> entre deux sommets**,

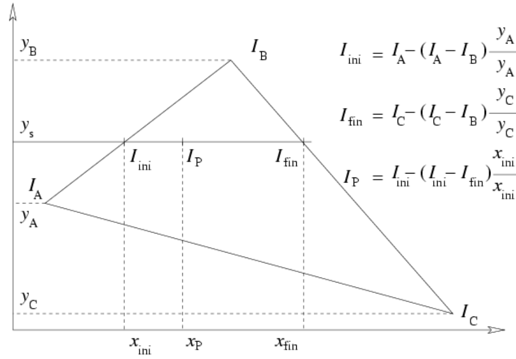
- sur une **ligne de remplissage** d'un polygone (par exemple par l'algorithme de scan-line), à **interpoler les <u>valeurs</u> entre deux arêtes**

Ce type d'interpolation a été vu à l'<u>exercice 2 du TD4</u>.

★★★

OMBRAGE DE GOURAUD 2/2

Ombrage de Gouraud : calculs



$$I_{ini} = I_A - (I_A - I_B)\frac{y_A - y_s}{y_A - y_B}$$

$$I_{fin} = I_C - (I_C - I_B)\frac{y_C - y_s}{y_C - y_B}$$

$$I_P = I_{ini} - (I_{ini} - I_{fin})\frac{x_{ini} - x_P}{x_{ini} - x_{fin}}$$

★★

OMBRAGE DE PHONG 1/2

Définition de l'ombrage de Phong

L'ombrage de Phong consiste :

- sur une **arête**, à **interpoler les <u>vecteurs normaux</u> entre deux sommets**,

- sur une **ligne de remplissage** d'un polygone (par exemple par l'algorithme de scan-line), à **interpoler les <u>vecteurs normaux</u> entre deux arêtes**

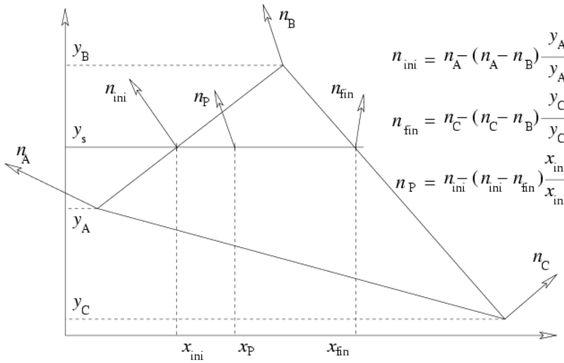
L'ombrage de Phong est de meilleur qualité que l'ombrage de Gouraud :
- l'ombrage de Gouraud approxime toute face par un **plan** alors que
- l'ombrage de Phong prend en compte la **courbure** des faces.

... **mais** l'ombrage de Phong est plus **coûteux** que l'ombrage de Gouraud.

★★

OMBRAGE DE PHONG 2/2

Ombrage de Phong : calculs



$$n_{ini} = n_A - (n_A - n_B)\frac{y_A - y_s}{y_A - y_B}$$

$$n_{fin} = n_C - (n_C - n_B)\frac{y_C - y_s}{y_C - y_B}$$

$$n_P = n_{ini} - (n_{ini} - n_{fin})\frac{x_{ini} - x_P}{x_{ini} - x_{fin}}$$

★★

MODÈLES ÉCLAIREMENT LOCAL 1/5

Autres modèles d'éclairement local

Les **modèles de Gouraud et de Phong** ne sont pas les seuls modèles de réflexion locale.

Tout modèle de réflexion locale propose une **approximation d'une réflexion parfaite** ou une **simulation d'une surface imparfaite**.

★★

MODÈLES ÉCLAIREMENT LOCAL 2/5

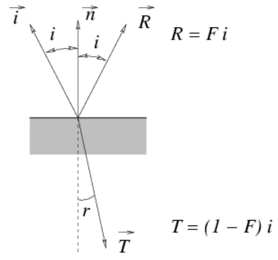
Formule de Fresnel: surface parfaite

Coefficient *F* qui relie le taux d'energie transmise et réfractée en fonction de l'angle d'incidence et des propriétés du matériau.

$$F = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} + \frac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)}\right)$$

avec $\sin r = \dfrac{\sin i}{\mu}$

μ indice de réfraction du matériau



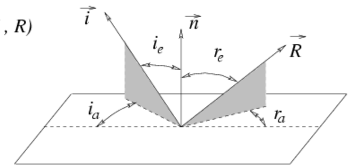
★★

MODÈLES ÉCLAIREMENT LOCAL 3/5

BRDF: fonction de distribution de la réflectance bidirectionnelle

Fonction qui relie la **lumière dans une direction incidente L** à la **lumière réfléchie dans une direction V**
exprimée en fonction des angles d'indicence et de réflexion.

$$BRDF = f(i_a, i_e, r_a, r_e) = f(I, R)$$



★★

MODÈLES ÉCLAIREMENT LOCAL 4/5

Précalcul du modèle BRDF dans le cas de surfaces anisotropes

Surfaces anisotropes: la forme du BRDF dépend de l'azimuth de l'angle d'incidence.

Un *métal brossé* est une surface **anisotrope** pour laquelle la taille du *lobe spéculaire* (la distribution de la lumière réfléchie en fonction de l'angle de réflexion) dépend de l'orientation de la lumière incidente.

★★

MODÈLES ÉCLAIREMENT LOCAL 5/5

Précalcul du modèle BRDF (suite et fin)

Modélisation (Cabral et al. 1987)

1. On modélise la surface par des microfacettes triangulaires dont les sommets ont une hauteur donnée par une bump map.
2. On subdivise la demi-sphere en cellules élémentaires.
3. Pour chaque couple de cellules (*c*,*c*'), on calcule la lumière de *c* réfléchie dans *c*' en fonction de la géométrie des facettes.

Voir également le <u>modèle de micro-facettes de Cook-Torrance</u> dans le cours sur le lancé de rayon.