TD statistique (les réponses sont en « texte masqué »)

1) *Probabilités*

Exercice 1.1) A une question de QCM, quatre réponses sont possibles, une seule est correcte. Si l'étudiant a travaillé, il est sûr de donner la bonne réponse, sinon il répond au hasard. Le QCM comporte 50 questions, l'étudiant en a travaillé 30.
L'étudiant ayant répondu correctement à la question posée, quelle est la probabilité pour qu'il ait travaillé cette question ?

Exercice 1.2) Une machine fabrique des objets. A la sortie de la machine, un objet est "bon" (événement B) ou n'est "pas bon" (événement $\overline{B}$). Pour améliorer la qualité, les objets sortants de la machine passent un test rapide. Après ce test, les objets sont "acceptés" (événement A) ou "non acceptés" (événement $\overline{A}$). Une étude en laboratoire du procédé de fabrication et du test rapide montre que la probabilité qu'un objet soit "bon" est $P(B) = 0{,}9$. Sachant qu'un objet est bon, la probabilité pour qu'il soit "accepté" est $P(A/B) = 0{,}8$, et sachant qu'un objet "n'est pas bon", la probabilité pour qu'il soit "non accepté" est $P(\overline{A}/\overline{B}) = 0{,}7$.
Répondre au QCM :
(A) La probabilité pour qu'un objet soit "bon" et "accepté" est $P(A \cap B) = 0{,}72$
(B) La probabilité pour qu'un objet soit "pas bon" et "non accepté" est $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}7$
(C) La probabilité pour qu'un objet soit "accepté" est $P(A) = 0{,}75$
(D) La probabilité pour qu'un objet soit "bon" sachant qu'il a été "accepté" est $P(B/A) = 0{,}72$
(E) La probabilité pour qu'un objet soit "pas bon" sachant qu'il est "non accepté" est $P(\overline{B}/\overline{A}) = 0{,}72$

Exercice 1.3) Votre entreprise achète le même type de pièce auprès de 2 fournisseurs F1 et F2. Les quantités habituelles commandées auprès de F1 représentent 85% des quantités totales et celles commandées auprès de F2 15% des quantités totales. Les contrôles de qualité font apparaître les résultats suivants :

	% de pièces bonnes	% de pièces défectueuses
F1	98	2
F2	90	10

1) Tracer l'arbre de tous les cas possibles.
2) Quelle est la probabilité pour qu'une pièce qui est défectueuse provienne de F1?
3) Quelle est la probabilité qu'une pièce tirée au hasard parmi toutes celles qui sont achetées soit défectueuse?

Exercice 1.4) Un étudiant se propose de ranger ses 6 livres de statistiques sur une étagère. Combien de possibilités lui sont offertes ?

Exercice 1.5)
1) Combien peut-on écrire de nombres différents de 4 chiffres?
2) Combien peut-on écrire de nombres de 4 chiffres différents ?
(Aide: penser à éliminer les nombres commençant par un 0 qui sont alors en fait des nombres à 3 chiffres et non pas 4)

Exercice 1.6)
En étudiant une population, on a remarqué que, durant un mois 40% des individus sont allés au cinéma (C), 25% sont allés au théâtre (T) et 12.5% sont allés au cinéma et au théâtre ($C \cap T$).
Calculer la probabilité que durant 1 mois, un individu:
1) aille au cinéma ou au théâtre
2) n'aille pas au cinéma
3) n'aille ni au cinéma, ni au théâtre

4) aille au cinéma mais pas au théâtre
5) Sachant qu'il est allé au cinéma, aille aussi au théâtre
6) Sachant qu'il n'est pas allé au théâtre, n'aille pas au cinéma
7) C et P sont-ils indépendants ?

Exercice 1.7) loto foot ou loto ?
1) loto foot: principe: 13 matchs, à chaque fois trois choix possibles (1/N/2). On considère qu'il y a équiprobabilité entre ces 3 choix.
Calculer la probabilité de cocher les 13 bonnes cases et de remporter la cagnotte.
2) loto: principe: Cocher les 6 boules qui vont sortir parmi 49 (sans ordre)
Calculer la probabilité de gagner au loto.

Exercice 1.8) On dispose des 6 premières lettres de l'alphabet
1) Combien de sigles de 6 lettres distinctes peut-on former ?
2) Combien de sigles de 4 lettres distinctes peut-on former ?
3) Combien de sigles de 4 lettres peut-on former ?

Exercice 1.9) Lors d'un recrutement pour 4 postes de travail identiques se présentent 8 hommes et 6 femmes
1) Combien de recrutements distincts sont possibles ?
2) Combien de recrutements distincts sont possibles sachant que l'on embauche 2 hommes et 2 femmes ?

Exercice 1.10) Donner la *formule utilisée* puis la valeur numérique obtenue
1) Une classe de 20 élèves doit désigner en son sein un bureau comprenant un président, un trésorier et un secrétaire, nul ne pouvant cumuler deux postes. De combien de manières la classe peut-elle répartir les postes ?
2) La classe doit désigner trois représentants (non distinguables) au conseil de l'IUT. De combien de manières la classe peut-elle choisir ses représentants?
3) Les trois représentants au conseil de l'IUT ne peuvent être membre du bureau. De combien de manières la classe peut-elle choisir son bureau et ses représentants?

2) Variable aléatoire discrète

Exercice 2.1) On joue au jeu suivant : on parie sur un nombre compris entre 1 et 6, puis on lance trois dés et on gagne 3 euros si le nombre sort 3 fois, 2 euros s'il sort deux fois , 1 euro s'il sort une fois. On perd 1 euro s'il ne sort pas. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable X représentant le nombre de sortie du nombre choisi puis celle du gain Y.

Exercice 2.2) On joue au jeu suivant : on lance trois dés et on gagne 3 euros si on a un triplet, 2 euros si on a un doublet. On perd 1 euro s'il n'y a ni triplet, ni doublet. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable gain Y.

Exercice 2.3) On jette un dé numéroté de 1 à 6. On mise 10 € qui sont perdus si le résultat est 1, 2, 3 ou 4. Si le 5 sort, on restitue la mise. Si le 6 tombe, le gain est de 45 € (dont les 10€ de la mise).
On considère la v.a.r. X *:"gain sur un tirage avec mise 10€"*
1) Quelle est la nature de X?
2) Donner les différentes valeurs de X ainsi que leur probabilité.
3) On veut connaître le gain moyen sur un jeu, quel paramètre doit-on considérer?
4) Calculer la variance du gain sur un jeu.
5) On joue une mise 10 fois plus grande, quelle somme en moyenne va-t-on perdre ou gagner? Quelle est alors la variance et l'écart type du gain? Quelles propriétés utilise-t-on pour ces calculs?
6) On joue 10 fois de suite à ce jeu, quelle somme en moyenne va-t-on perdre ou gagner? Quelle est alors la variance et l'écart type du gain? Quelles propriétés utilise-t-on pour ces calculs?

3) *Loi de probabilité discrète*

Exercice 3.1) Un appareil comporte 3 cartes électroniques identiques ayant chacune une probabilité de panne p de 10%. On appelle X = "nombre de cartes en panne". Les possibilités de panne des cartes sont indépendantes.
1) Identifier cette loi discrète.
2) Calculer les probabilités de cette loi discrète.
3) Calculer l'espérance et la variance de cette loi discrète.

Exercice 3.2) Sur une ligne d'autobus, si on est contrôlé sans avoir de ticket, l'amende coûte 150€. La probabilité d'être contrôlé un certain jour est de 1/10. Le fait d'être contrôlé un certain jour est indépendante du fait de l'être un autre jour.
Répondre au QCM :

(A) La probabilité d'être contrôlé tous les jours pendant 5 jours consécutifs est de $\frac{1}{50}$

(B) La probabilité d'être contrôlé exactement une fois pendant 5 jours consécutifs est de $\frac{5\times 9^4}{10^5}$

(C) Un fraudeur qui n'achète jamais de ticket paye en moyenne, avec les amendes qu'il a de temps en temps, 15€ par jour
(D) Sur 80 jours consécutifs, un passager est contrôlé en moyenne 8 fois.
(E) Sur 80 jours consécutifs, la probabilité de ne jamais être contrôlé vaut 0.

Exercice 3.3) On lance quatre fois une pièce équilibrée et on note X le nombre de Face obtenus.
Tracer la courbe de la fonction de répartition.
On considère Y le nombre de lancés nécessaires pour avoir Face, quelle est la loi de Y. Calculer $P(Y<3)$

Exercice 3.4) Les fautes d'impression d'un quotidien ont été analysées. On en compte, en moyenne, une tous les 800 mots. Ce taux ne dépend pas de la page considérée dans le journal. Soit X la variable aléatoire qui associe le nombre de fautes par page (2 500 mots)
1) Quelle est la loi suivie par X
2) Calculer $P(X=0)$; $P(X=1)$ et $P(X \geq 3)$

4) *Lecture de la table de la loi normale*

Exercice 4.1) Le temps moyen nécessaire à l'assemblage d'un PC est de 15 minutes avec une variance de 4. En supposant que cette variable suive une loi normale
1) Quelle est la probabilité qu'un employé assemble un PC en moins de 13 minutes ?
2) En combien de temps se fera l'assemblage dans 90 % des cas?
3) 50 % des PC sont assemblés en moins de combien de temps ? (réponse souhaitée en moins de 10 secondes)

Exercice 4.2)
1) Quelle est la probabilité pour qu'une variable suivant une loi Normale se trouve dans l'intervalle $\mu \pm \sigma$?
2) Quelle est la probabilité pour qu'une variable suivant une loi Normale se trouve dans l'intervalle $\mu \pm 2\sigma$?

Exercice 4.3)
La consommation journalière de chocolat d'un étudiant suit une loi Normale de moyenne 40g et d'écart type 30g.
1) Calculer la probabilité qu'un étudiant consomme plus de 60g par jour
2) Calculer le poids de chocolat maximum consommé par un étudiant dans 80% des cas
3) Combien de chocolat doit-on prévoir pour 1 étudiant qui part 5 jours en randonnée et avoir une probabilité inférieure à 10% de manquer de chocolat.
4) Un groupe de 5 étudiants part 1 jour en randonnée. Combien de chocolat doivent-ils amener pour avoir une probabilité inférieure à 10% de manquer de chocolat.
5) Un groupe de 5 étudiants part 3 jours en randonnée. Combien de tablette de 100g de chocolat doivent-ils amener pour avoir une probabilité inférieure à 10% de manquer de chocolat.

Exercice 4.4)
La phosphorémie chez l'homme suit une loi normale. Soit X la v.a. correspondant à une mesure de la phosphorémie (en mg/L) chez l'homme. Déterminer les paramètres de la loi suivie par X sachant que $P(X > 60) = 0.20$ et $P(X < 35) = 0.30$

Formulaire de probabilités

Soient A et B deux évènements:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
A et B incompatibles si $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	Probabilité conditionnelle: $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Evènements indépendants: $P(B/A) = P(B)$ ou $P(A/B) = P(A)$	A et B indépendants: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
Théorème de Bayes: $P(A/B) = P(B/A)\dfrac{P(A)}{P(B)}$	

p tirages parmi n objets	Sans remise	Avec remise
Avec ordre	A_n^p	n^p
Sans ordre (combinaison)	C_n^p	C_{n+p-1}^p

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!}$$

p objets sur n cases	un objet par case	sans limitation du nombre d'objets par case
Objets discernables (ordre)	A_n^p	n^p
Objets non discernables (sans ordre)	C_n^p	C_{n+p-1}^p

Loi discrète : Espérance $E(X) = \sum_{i=1}^{n} k_i\, P(X = k_i)$; Variance $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E\left(X^2\right) - E(X)^2$

Loi binomiale $\mathcal{B}$(n;p): $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ pour tout k de 0 à n; E(X)=n p; V(X)=n p(1-p);

Loi géométrique de paramètre p : $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$; $P(X > k) = (1-p)^k$;
E(X)=1/p ; V(X)=(1-p)/p^2

Loi Pascal (binomiale négative) de paramètre r et p : $P(X = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$;
E(X)=r/p; V(X)=r(1-p)/p^2

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$: $P(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$; E(X)=λ ; V(X)= λ;

Approximation: loi binomiale => loi de Poisson: si n>50 et p≤0,1 et np <17, on remplace la loi binomiale $\mathcal{B}$(n;p) par la loi de Poisson $\mathcal{P}$(np).

Loi Normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$: $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$; E(X)=$\mu$; V(X)= σ^2;

Approximation: loi binomiale => loi Normale sous une des conditions :

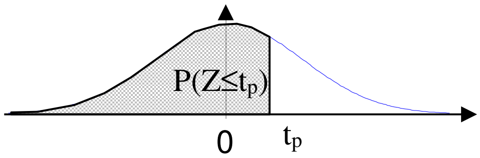
- si n>5 et $\left|\sqrt{\dfrac{p}{1-p}} - \sqrt{\dfrac{1-p}{p}}\right| \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 0{,}3$
- n≥30 et (n p>10) et (n(1-p)>10)
- np(1-p)>9

on remplace la loi binomiale $\mathcal{B}$(n,p) par la loi $\mathcal{N}(np,\ np(1-p))$

Approximation: loi de Poisson => loi Normale: si λ>18 alors on remplace la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi $\mathcal{N}(\lambda,\lambda)$.

Loi Normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$

Détermination de t_p pour $p=P(Z\leq t_p)$ connue



P<0,5	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009		
0,00		3,090	2,878	2,748	2,652	2,576	2,512	2,457	2,409	2,366	2,326	0,99
0,01	2,326	2,290	2,257	2,226	2,197	2,170	2,144	2,120	2,097	2,075	2,054	0,98
0,02	2,054	2,034	2,014	1,995	1,977	1,960	1,943	1,927	1,911	1,896	1,881	0,97
0,03	1,881	1,866	1,852	1,838	1,825	1,812	1,799	1,787	1,774	1,762	1,751	0,96
0,04	1,751	1,739	1,728	1,717	1,706	1,695	1,685	1,675	1,665	1,655	1,645	0,95
0,05	1,645	1,635	1,626	1,616	1,607	1,598	1,589	1,580	1,572	1,563	1,555	0,94
0,06	1,555	1,546	1,538	1,530	1,522	1,514	1,506	1,499	1,491	1,483	1,476	0,93
0,07	1,476	1,468	1,461	1,454	1,447	1,440	1,433	1,426	1,419	1,412	1,405	0,92
0,08	1,405	1,398	1,392	1,385	1,379	1,372	1,366	1,359	1,353	1,347	1,341	0,91
0,09	1,341	1,335	1,329	1,323	1,317	1,311	1,305	1,299	1,293	1,287	1,282	0,90
0,10	1,282	1,276	1,270	1,265	1,259	1,254	1,248	1,243	1,237	1,232	1,227	0,89
0,11	1,227	1,221	1,216	1,211	1,206	1,200	1,195	1,190	1,185	1,180	1,175	0,88
0,12	1,175	1,170	1,165	1,160	1,155	1,150	1,146	1,141	1,136	1,131	1,126	0,87
0,13	1,126	1,122	1,117	1,112	1,108	1,103	1,098	1,094	1,089	1,085	1,080	0,86
0,14	1,080	1,076	1,071	1,067	1,063	1,058	1,054	1,049	1,045	1,041	1,036	0,85
0,15	1,036	1,032	1,028	1,024	1,019	1,015	1,011	1,007	1,003	0,999	0,994	0,84
0,16	0,994	0,990	0,986	0,982	0,978	0,974	0,970	0,966	0,962	0,958	0,954	0,83
0,17	0,954	0,950	0,946	0,942	0,938	0,935	0,931	0,927	0,923	0,919	0,915	0,82
0,18	0,915	0,912	0,908	0,904	0,900	0,896	0,893	0,889	0,885	0,882	0,878	0,81
0,19	0,878	0,874	0,871	0,867	0,863	0,860	0,856	0,852	0,849	0,845	0,842	0,80
0,20	0,842	0,838	0,834	0,831	0,827	0,824	0,820	0,817	0,813	0,810	0,806	0,79
0,21	0,806	0,803	0,800	0,796	0,793	0,789	0,786	0,782	0,779	0,776	0,772	0,78
0,22	0,772	0,769	0,765	0,762	0,759	0,755	0,752	0,749	0,745	0,742	0,739	0,77
0,23	0,739	0,736	0,732	0,729	0,726	0,722	0,719	0,716	0,713	0,710	0,706	0,76
0,24	0,706	0,703	0,700	0,697	0,693	0,690	0,687	0,684	0,681	0,678	0,674	0,75
0,25	0,674	0,671	0,668	0,665	0,662	0,659	0,656	0,653	0,650	0,646	0,643	0,74
0,26	0,643	0,640	0,637	0,634	0,631	0,628	0,625	0,622	0,619	0,616	0,613	0,73
0,27	0,613	0,610	0,607	0,604	0,601	0,598	0,595	0,592	0,589	0,586	0,583	0,72
0,28	0,583	0,580	0,577	0,574	0,571	0,568	0,565	0,562	0,559	0,556	0,553	0,71
0,29	0,553	0,550	0,548	0,545	0,542	0,539	0,536	0,533	0,530	0,527	0,524	0,70
0,30	0,524	0,522	0,519	0,516	0,513	0,510	0,507	0,504	0,502	0,499	0,496	0,69
0,31	0,496	0,493	0,490	0,487	0,485	0,482	0,479	0,476	0,473	0,470	0,468	0,68
0,32	0,468	0,465	0,462	0,459	0,457	0,454	0,451	0,448	0,445	0,443	0,440	0,67
0,33	0,440	0,437	0,434	0,432	0,429	0,426	0,423	0,421	0,418	0,415	0,412	0,66
0,34	0,412	0,410	0,407	0,404	0,402	0,399	0,396	0,393	0,391	0,388	0,385	0,65
0,35	0,385	0,383	0,380	0,377	0,375	0,372	0,369	0,366	0,364	0,361	0,358	0,64
0,36	0,358	0,356	0,353	0,350	0,348	0,345	0,342	0,340	0,337	0,335	0,332	0,63
0,37	0,332	0,329	0,327	0,324	0,321	0,319	0,316	0,313	0,311	0,308	0,305	0,62
0,38	0,305	0,303	0,300	0,298	0,295	0,292	0,290	0,287	0,285	0,282	0,279	0,61
0,39	0,279	0,277	0,274	0,272	0,269	0,266	0,264	0,261	0,259	0,256	0,253	0,60
0,40	0,253	0,251	0,248	0,246	0,243	0,240	0,238	0,235	0,233	0,230	0,228	0,59
0,41	0,228	0,225	0,222	0,220	0,217	0,215	0,212	0,210	0,207	0,204	0,202	0,58
0,42	0,202	0,199	0,197	0,194	0,192	0,189	0,187	0,184	0,181	0,179	0,176	0,57
0,43	0,176	0,174	0,171	0,169	0,166	0,164	0,161	0,159	0,156	0,154	0,151	0,56
0,44	0,151	0,148	0,146	0,143	0,141	0,138	0,136	0,133	0,131	0,128	0,126	0,55
0,45	0,126	0,123	0,121	0,118	0,116	0,113	0,111	0,108	0,105	0,103	0,100	0,54
0,46	0,100	0,098	0,095	0,093	0,090	0,088	0,085	0,083	0,080	0,078	0,075	0,53
0,47	0,075	0,073	0,070	0,068	0,065	0,063	0,060	0,058	0,055	0,053	0,050	0,52
0,48	0,050	0,048	0,045	0,043	0,040	0,038	0,035	0,033	0,030	0,028	0,025	0,51
0,49	0,025	0,023	0,020	0,018	0,015	0,013	0,010	0,008	0,005	0,003	0,000	0,50
		0,009	0,008	0,007	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,001	0,000	p≥0,5

p	0,9991	0,9992	0,9993	0,9994	0,9995	0,9996	0,9997	0,9998	0,9999
t_p	3,1214	3,1559	3,1947	3,2389	3,2905	3,3528	3,4316	3,5401	3,7190