第一章 行列式

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$;

解 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

$=2\times(-4)\times3+0\times(-1)\times(-1)+1\times1\times8$

$-0\times1\times3-2\times(-1)\times8-1\times(-4)\times(-1)$

$=-24+8+16-4=-4.$

(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;

解 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

$=acb+bac+cba-bbb-aaa-ccc$

$=3abc-a^3-b^3-c^3.$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;

解 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$=bc^2+ca^2+ab^2-ac^2-ba^2-cb^2$

$=(a-b)(b-c)(c-a).$

(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

$=x(x+y)y+yx(x+y)+(x+y)yx-y^3-(x+y)^3-x^3$

$=3xy(x+y)-y^3-3x^2y-x^3-y^3-x^3$

$=-2(x^3+y^3)$.

2. 按自然数从小到大为标准次序，求下列各排列的逆序数:

(1)1 2 3 4;

解　逆序数为 0

(2)4 1 3 2;

解　逆序数为 4:　41, 43, 42, 32.

(3)3 4 2 1;

解　逆序数为 5:　3 2, 3 1, 4 2, 4 1, 2 1.

(4)2 4 1 3;

解　逆序数为 3:　2 1, 4 1, 4 3.

(5)1 3 $\cdots$ $(2n-1)$ 2 4 $\cdots$ $(2n)$;

解　逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2}$:

3 2 (1 个)

5 2, 5 4(2 个)

7 2, 7 4, 7 6(3 个)

$\cdots\cdots$

$(2n-1)2$, $(2n-1)4$, $(2n-1)6$, $\cdots$, $(2n-1)(2n-2)$ ($n-1$ 个)

(6)1 3　$\cdots$　$(2n-1)$ $(2n)$ $(2n-2)$ $\cdots$ 2.

解　逆序数为 $n(n-1)$:

3 2(1 个)

5 2, 5 4 (2 个)

$\cdots\cdots$

$(2n-1)2$, $(2n-1)4$, $(2n-1)6$, $\cdots$, $(2n-1)(2n-2)$ ($n-1$ 个)

4 2(1 个)

6 2, 6 4(2 个)

. . . . . .

$(2n)2, (2n)4, (2n)6, \cdots, (2n)(2n-2)$ ($n-1$ 个)

3. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解 含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项的一般形式为

$$(-1)^t a_{11}a_{23}a_{3r}a_{4s},$$

其中 rs 是 2 和 4 构成的排列, 这种排列共有两个, 即 24 和 42.

所以含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项分别是

$$(-1)^t a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=(-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44},$$

$$(-1)^t a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}=(-1)^2 a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}=a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}.$$

4. 计算下列各行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$;

解 $$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \overset{c_2-c_3}{\underset{c_4-7c_3}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 3 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -10 \\ 1 & 2 & 2 \\ 10 & 3 & -14 \end{vmatrix} \times (-1)^{4+3}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -1 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 10 & 3 & 14 \end{vmatrix} \overset{c_2+c_3}{\underset{c_1+\frac{1}{2}c_3}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 9 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & -2 \\ 17 & 17 & 14 \end{vmatrix} = 0.$$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$;

解 $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \overset{c_4-c_2}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \overset{r_4-r_2}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4-r_1}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$;

解 $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} = adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix}$

$= adfbce \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4abcdef$.

(4) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \overset{r_1+ar_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 1+ab & a & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

$= (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1+ab & a & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix} \overset{c_3+dc_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1+ab & a & ad \\ -1 & c & 1+cd \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

$= (-1)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1+ab & ad \\ -1 & 1+cd \end{vmatrix} = abcd+ab+cd+ad+1.$

5. 证明:

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$;

证明

$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{c_3-c_1}{\overset{c_2-c_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & b-a & 2b-2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-a^2 \\ b-a & 2b-2a \end{vmatrix} = (b-a)(b-a) \begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (a-b)^3$.

(2) $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$;

证明

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}+b\begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$=a^2\begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix}+b^2\begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$=a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}+b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$=a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}+b^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0$;

证明

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}(c_4-c_3,\ c_3-c_2,\ c_2-c_1\text{ 得})$$

$$=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix}(c_4-c_3,\ c_3-c_2\text{ 得})$$

$$=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$

$=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$;

证明

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c(c-b)(c+b+a) & d(d-b)(d+b+a) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c(c+b+a) & d(d+b+a) \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d).$$

(5) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Lambda & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

证明 用数学归纳法证明.

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_2$，命题成立.

假设对于$(n-1)$阶行列式命题成立，即

$$D_{n-1}=x^{n-1}+a_1\,x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1},$$

则 D_n 按第一列展开，有

$$D_n = xD_{n-1} + a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$=xD_{n-1}+a_n=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\,.$$

因此，对于 n 阶行列式命题成立.

6. 设 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$，把 D 上下翻转、或逆时针旋转 90°、或依副对角线翻转，依次得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix},$$

证明 $D_1=D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$，$D_3=D$.

证明　因为 $D=\det(a_{ij})$，所以

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & \cdots & a_{3n} \end{vmatrix}=\cdots$$

$$=(-1)^{1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)}D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D\,.$$

同理可证

$$D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D^T=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D\,.$$

$$D_3=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D=(-1)^{n(n-1)}D=D\,.$$

7. 计算下列各行列式(D_k 为 k 阶行列式):

(1) $D_n=\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$，其中对角线上元素都是 a，未写出的元素都是 0;

解

$$D_n=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}(\text{按第 } n \text{ 行展开})$$

$$=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} +(-1)^{2n}\cdot a\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$=(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n}\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-2)(n-2)} +a^n=a^n-a^{n-2}=a^{n-2}(a^2-1).$$

(2) $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$;

解　将第一行乘(-1)分别加到其余各行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a-x & 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix},$$

再将各列都加到第一列上，得

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

(3) $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$;

解　根据第 6 题结果，有

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

此行列式为范德蒙德行列式.

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{n+1\ge i>j\ge 1}[(a-i+1)-(a-j+1)]$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{n+1\ge i>j\ge 1}[-(i-j)]$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot(-1)^{\frac{n+(n-1)+\cdots+1}{2}}\cdot\prod_{n+1\ge i>j\ge 1}(i-j)$$

$$=\prod_{n+1\ge i>j\ge 1}(i-j).$$

(4) $D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \unicode{x22F0} & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \unicode{x22F0} & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}$;

解

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \unicode{x22F0} & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \unicode{x22F0} & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}\text{(按第 1 行展开)}$$

$$=a_n\begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a_1 & b_1 & & & \\ & & c_1 & d_1 & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} & 0 \\ 0 & & \Lambda & & & 0 & d_n \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{2n+1}b_n\begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a_1 & b_1 & & \\ & & & c_1 & d_1 & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \\ c_n & & & & & & 0 \end{vmatrix}.$$

再按最后一行展开得递推公式

$$D_{2n}=a_nd_nD_{2n-2}-b_nc_nD_{2n-2}，即 D_{2n}=(a_nd_n-b_nc_n)D_{2n-2}.$$

于是 $\quad D_{2n}=\prod_{i=2}^{n}(a_id_i-b_ic_i)D_2$.

而 $\quad D_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}=a_1d_1-b_1c_1$,

所以 $\quad D_{2n}=\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i)$.

(5) $D=\det(a_{ij})$，其中 $a_{ij}=|i-j|$;

解 $\quad a_{ij}=|i-j|$,

$$D_n=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_2-r_3\\ \cdots}]{r_1-r_2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{c_3+c_1\\ \cdots}]{c_2+c_1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 2n-3 & 2n-4 & 2n-5 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

(6) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$，其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

解

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{c_2-c_3\\ \cdots}]{c_1-c_2}\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1^{-1} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_2^{-1} \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & a_3^{-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & a_{n-1}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1+a_n^{-1} \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_2^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & a_3^{-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1+\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1} \end{vmatrix}$$

$$=(a_1a_2\Lambda\ a_n)(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}).$$

8. 用克莱姆法则解下列方程组:

(1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2 \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2 \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0 \end{cases}$;

解　因为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix}=-142,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix}=-142, \quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix}=-284,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 11 \end{vmatrix}=-426, \quad D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=142,$$

所以　$x_1=\frac{D_1}{D}=1$，$x_2=\frac{D_2}{D}=2$，$x_3=\frac{D_3}{D}=3$，$x_4=\frac{D_4}{D}=-1$.

(2) $\begin{cases} 5x_1+6x_2 \qquad\qquad\qquad =1 \\ x_1+5x_2+6x_3 \qquad\quad =0 \\ \quad x_2+5x_3+6x_4 \quad =0 \\ \qquad x_3+5x_4+6x_5=0 \\ \qquad\qquad x_4+5x_5=1 \end{cases}$.

解　因为

$$D=\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}=665,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}=1507, \quad D_2=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}=-1145,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}5&6&1&0&0\\1&5&0&0&0\\0&1&0&6&0\\0&0&0&5&6\\0&0&1&1&5\end{vmatrix}=703,\quad D_4=\begin{vmatrix}5&6&0&1&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&0&0\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}=-395,$$

$$D_5=\begin{vmatrix}5&6&0&0&1\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&0\\0&0&0&1&1\end{vmatrix}=212,$$

所以

$$x_1=\frac{1507}{665},\quad x_2=-\frac{1145}{665},\quad x_3=\frac{703}{665},\quad x_4=\frac{-395}{665},\quad x_4=\frac{212}{665}.$$

9. 问 l, m 取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases}lx_1+x_2+x_3=0\\x_1+mx_2+x_3=0\\x_1+2mx_2+x_3=0\end{cases}$ 有非零解?

解　系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}l&1&1\\1&m&1\\1&2m&1\end{vmatrix}=m-ml\,.$$

令 D=0，得

m=0 或 l=1.

于是，当 m=0 或 l=1 时该齐次线性方程组有非零解.

10. 问 l 取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases}(1-l)x_1-2x_2+4x_3=0\\2x_1+(3-l)x_2+x_3=0\\x_1+x_2+(1-l)x_3=0\end{cases}$ 有非零解?

解　系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}1-l&-2&4\\2&3-l&1\\1&1&1-l\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-l&-3+l&4\\2&1-l&1\\1&0&1-l\end{vmatrix}$$

$$=(1-l)^3+(l-3)-4(1-l)-2(1-l)(-3-l)$$

$$=(1-l)^3+2(1-l)^2+l-3.$$

令 $D=0$，得

$$l=0,\ l=2 \text{ 或 } l=3.$$

于是，当 $l=0$，$l=2$ 或 $l=3$ 时，该齐次线性方程组有非零解.

第二章　矩阵及其运算

1. 已知线性变换:

$$\begin{cases} x_1=2y_1+2y_2+y_3 \\ x_2=3y_1+y_2+5y_3 \\ x_3=3y_1+2y_2+3y_3 \end{cases},$$

求从变量 x_1, x_2, x_3 到变量 y_1, y_2, y_3 的线性变换.

解　由已知:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} y_1=-7x_1-4x_2+9x_3 \\ y_2=6x_1+3x_2-7x_3 \\ y_3=3x_1+2x_2-4x_3 \end{cases}.$$

2. 已知两个线性变换

$$\begin{cases} x_1=2y_1+y_3 \\ x_2=-2y_1+3y_2+2y_3 \\ x_3=4y_1+y_2+5y_3 \end{cases},\quad \begin{cases} y_1=-3z_1+z_2 \\ y_2=2z_1+z_3 \\ y_3=-z_2+3z_3 \end{cases},$$

求从 z_1, z_2, z_3 到 x_1, x_2, x_3 的线性变换.

解　由已知

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 12 & -4 & 9 \\ -10 & -1 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

所以有$\begin{cases} x_1=-6z_1+z_2+3z_3 \\ x_2=12z_1-4z_2+9z_3 \\ x_3=-10z_1-z_2+16z_3 \end{cases}$.

3. 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $3AB-2A$ 及 A^TB.

解　$3AB-2A=3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$=3\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A^TB=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. 计算下列乘积:

(1)$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

解　$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\times7+3\times2+1\times1 \\ 1\times7+(-2)\times2+3\times1 \\ 5\times7+7\times2+0\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{pmatrix}$.

(2)$(1\ \ 2\ \ 3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

解　$(1\ \ 2\ \ 3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=(1\times3+2\times2+3\times1)=(10)$.

(3)$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}(-1\ \ 2)$;

解 $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}(-1\ \ 2)=\begin{pmatrix}2\times(-1) & 2\times2\\1\times(-1) & 1\times2\\3\times(-1) & 3\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\-1 & 2\\-3 & 6\end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & 0\\1 & -1 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\0 & -1 & 2\\1 & -3 & 1\\4 & 0 & -2\end{pmatrix}$;

解 $\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & 0\\1 & -1 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\0 & -1 & 2\\1 & -3 & 1\\4 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -7 & 8\\20 & -5 & -6\end{pmatrix}$.

(5) $(x_1\ \ x_2\ \ x_3)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{12} & a_{22} & a_{23}\\a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$;

解

$$(x_1\ \ x_2\ \ x_3)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{12} & a_{22} & a_{23}\\a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\quad a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\quad a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3.$$

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}$, 问:

(1) $AB=BA$ 吗?

解 $AB\neq BA$.

因为 $AB=\begin{pmatrix}3 & 4\\4 & 6\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 8\end{pmatrix}$, 所以 $AB\neq BA$.

(2) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 吗?

解 $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$.

因为 $A+B=\begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 5\end{pmatrix}$,

$$(A+B)^2=\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&14\\14&29\end{pmatrix},$$

但 $$A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix}3&8\\4&11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&8\\8&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&16\\15&27\end{pmatrix},$$

所以$(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$.

(3)$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 吗?

解 $(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$.

因为 $A+B=\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$,

$$(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&6\\0&9\end{pmatrix},$$

而 $$A^2-B^2=\begin{pmatrix}3&8\\4&11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&8\\1&7\end{pmatrix},$$

故$(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$.

6. 举反列说明下列命题是错误的:

(1)若 $A^2=0$, 则 $A=0$;

解 取 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, 则 $A^2=0$, 但 $A\neq 0$.

(2)若 $A^2=A$, 则 $A=0$ 或 $A=E$;

解 取 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, 则 $A^2=A$, 但 $A\neq 0$ 且 $A\neq E$.

(3)若 $AX=AY$, 且 $A\neq 0$, 则 $X=Y$.

解 取

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},$$

则 $AX=AY$, 且 $A\neq 0$, 但 $X\neq Y$.

7. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\l&1\end{pmatrix}$, 求 $A^2, A^3, \cdots, A^k$.

解 $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\l&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\l&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2l&1\end{pmatrix},$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\2l&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\l&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3l&1\end{pmatrix},$$

$\cdots\cdots,$

$$A^k=\begin{pmatrix}1&0\\kl&1\end{pmatrix}.$$

8. 设 $A=\begin{pmatrix}l&1&0\\0&l&1\\0&0&l\end{pmatrix}$, 求 A^k.

解　首先观察

$$A^2=\begin{pmatrix}l&1&0\\0&l&1\\0&0&l\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l&1&0\\0&l&1\\0&0&l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l^2&2l&1\\0&l^2&2l\\0&0&l^2\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}l^3&3l^2&3l\\0&l^3&3l^2\\0&0&l^3\end{pmatrix},$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}l^4&4l^3&6l^2\\0&l^4&4l^3\\0&0&l^4\end{pmatrix},$$

$$A^5=A^4\cdot A=\begin{pmatrix}l^5&5l^4&10l^3\\0&l^5&5l^4\\0&0&l^5\end{pmatrix},$$

$\cdots\cdots,$

$$A^k=\begin{pmatrix}l^k&kl^{k-1}&\frac{k(k-1)}{2}l^{k-2}\\0&l^k&kl^{k-1}\\0&0&l^k\end{pmatrix}.$$

用数学归纳法证明:

当 k=2 时, 显然成立.

假设 k 时成立，则 k+1 时，

$$A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix}l^k&kl^{k-1}&\frac{k(k-1)}{2}l^{k-2}\\0&l^k&kl^{k-1}\\0&0&l^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l&1&0\\0&l&1\\0&0&l\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} l^{k+1} & (k+1)l^{k-1} & \frac{(k+1)k}{2}l^{k-1} \\ 0 & l^{k+1} & (k+1)l^{k-1} \\ 0 & 0 & l^{k+1} \end{pmatrix},$$

由数学归纳法原理知:

$$A^k=\begin{pmatrix} l^k & kl^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}l^{k-2} \\ 0 & l^k & kl^{k-1} \\ 0 & 0 & l^k \end{pmatrix}.$$

9. 设 A, B 为 n 阶矩阵，且 A 为对称矩阵，证明 B^TAB 也是对称矩阵.

证明　因为 $A^T=A$, 所以

$$(B^TAB)^T=B^T(B^TA)^T=B^TA^TB=B^TAB,$$

从而 B^TAB 是对称矩阵.

10. 设 A, B 都是 n 阶对称矩阵，证明 AB 是对称矩阵的充分必要条件是 $AB=BA$.

证明　充分性: 因为 $A^T=A$, $B^T=B$, 且 $AB=BA$, 所以

$$(AB)^T=(BA)^T=A^TB^T=AB,$$

即 AB 是对称矩阵.

必要性: 因为 $A^T=A$, $B^T=B$, 且$(AB)^T=AB$, 所以

$$AB=(AB)^T=B^TA^T=BA.$$

11. 求下列矩阵的逆矩阵:

(1)$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;

解　$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. $|A|=1$, 故 A^{-1} 存在. 因为

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

故 $\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}$;

解 $\quad A=\begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}$. $|A|=1\neq 0$, 故 A^{-1} 存在. 因为

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{pmatrix},$$

所以 $\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$;

解 $\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. $|A|=2\neq 0$, 故 A^{-1} 存在. 因为

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -13 & 6 & -1 \\ -32 & 14 & -2 \end{pmatrix},$$

所以 $\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \mathrm{O} & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$ $(a_1 a_2\cdot\cdot\cdot a_n\neq 0)$.

解 $\quad A=\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \mathrm{O} & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$, 由对角矩阵的性质知

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

12. 解下列矩阵方程:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

解 $X=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

(2) $X\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

解 $X=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

解 $X=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

$$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

解 $X=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&3&-4\\1&0&-2\end{pmatrix}.$$

13. 利用逆矩阵解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1\\2x_1+2x_2+5x_3=2\\3x_1+5x_2+x_3=3\end{cases}$;

解 方程组可表示为

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&5\\3&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},$$

故 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&5\\3&5&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$

从而有 $\begin{cases}x_1=1\\x_2=0\\x_3=0\end{cases}.$

(2) $\begin{cases}x_1-x_2-x_3=2\\2x_1-x_2-3x_3=1\\3x_1+2x_2-5x_3=0\end{cases}.$

解 方程组可表示为

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-1&-3\\3&2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},$$

故 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-1&-3\\3&2&-5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix},$

故有 $\begin{cases}x_1=5\\x_2=0\\x_3=3\end{cases}.$

14. 设 $A^k=O$ (k 为正整数), 证明 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

证明　因为 $A^k=O$，所以 $E-A^k=E$. 又因为

$$E-A^k=(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}),$$

所以　$$(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=E,$$

由定理 2 推论知 $(E-A)$ 可逆, 且

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$

证明　一方面, 有 $E=(E-A)^{-1}(E-A)$.

另一方面, 由 $A^k=O$, 有

$$E=(E-A)+(A-A^2)+A^2-\cdots-A^{k-1}+(A^{k-1}-A^k)$$
$$=(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})(E-A),$$

故　$$(E-A)^{-1}(E-A)=(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})(E-A),$$

两端同时右乘 $(E-A)^{-1}$, 就有

$$(E-A)^{-1}(E-A)=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$

15. 设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=O$, 证明 A 及 $A+2E$ 都可逆, 并求 A^{-1} 及 $(A+2E)^{-1}$.

证明　由 $A^2-A-2E=O$ 得

$$A^2-A=2E, \text{ 即 } A(A-E)=2E,$$

或　$$A\cdot\frac{1}{2}(A-E)=E,$$

由定理 2 推论知 A 可逆, 且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$.

由 $A^2-A-2E=O$ 得

$$A^2-A-6E=-4E, \text{ 即 } (A+2E)(A-3E)=-4E,$$

或　$$(A+2E)\cdot\frac{1}{4}(3E-A)=E$$

由定理 2 推论知$(A+2E)$可逆，且$(A+2E)^{-1}=\frac{1}{4}(3E-A)$.

证明　由 $A^2-A-2E=O$ 得 $A^2-A=2E$，两端同时取行列式得

$$|A^2-A|=2,$$

即 $$|A||A-E|=2,$$

故 $$|A|\neq 0,$$

所以 A 可逆，而 $A+2E=A^2$，$|A+2E|=|A^2|=|A|^2\neq 0$，故 $A+2E$ 也可逆.

由 $$A^2-A-2E=O \Rightarrow A(A-E)=2E$$

$$\Rightarrow A^{-1}A(A-E)=2A^{-1}E \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E),$$

又由 $$A^2-A-2E=O \Rightarrow (A+2E)A-3(A+2E)=-4E$$

$$\Rightarrow (A+2E)(A-3E)=-4E,$$

所以 $$(A+2E)^{-1}(A+2E)(A-3E)=-4(A+2E)^{-1},$$

$$(A+2E)^{-1}=\frac{1}{4}(3E-A).$$

16. 设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=\frac{1}{2}$，求$|(2A)^{-1}-5A^*|$.

解　因为 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，所以

$$|(2A)^{-1}-5A^*|=|\frac{1}{2}A^{-1}-5|A|A^{-1}|=|\frac{1}{2}A^{-1}-\frac{5}{2}A^{-1}|$$

$$=|-2A^{-1}|=(-2)^3|A^{-1}|=-8|A|^{-1}=-8\times 2=-16.$$

17. 设矩阵 A 可逆，证明其伴随阵 A^* 也可逆，且 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

证明　由 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，得 $A^*=|A|A^{-1}$，所以当 A 可逆时，有

$$|A^*|=|A|^n|A^{-1}|=|A|^{n-1}\neq 0,$$

从而 A^* 也可逆.

因为 $A^*=|A|A^{-1}$，所以

$$(A^*)^{-1}=|A|^{-1}A.$$

又 $A=\frac{1}{|A^{-1}|}(A^{-1})^*=|A|(A^{-1})^*$，所以

$$(A^*)^{-1}=|A|^{-1}A=|A|^{-1}|A|(A^{-1})^*=(A^{-1})^*.$$

18. 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^*，证明:

(1)若$|A|=0$，则$|A^*|=0$;

(2)$|A^*|=|A|^{n-1}$.

证明

(1)用反证法证明．假设$|A^*|\neq 0$，则有 $A^*(A^*)^{-1}=E$，由此得

$$A=A\,A^*(A^*)^{-1}=|A|E(A^*)^{-1}=O\ ,$$

所以 $A^*=O$，这与$|A^*|\neq 0$ 矛盾，故当$|A|=0$ 时，有$|A^*|=0$.

(2)由于 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，则 $AA^*=|A|E$，取行列式得到

$$|A||A^*|=|A|^n.$$

若$|A|\neq 0$，则$|A^*|=|A|^{n-1}$;

若$|A|=0$，由(1)知$|A^*|=0$，此时命题也成立.

因此$|A^*|=|A|^{n-1}$.

19. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $AB=A+2B$，求 B.

解　由 $AB=A+2E$ 可得$(A-2E)B=A$，故

$$B=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

20. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且 $AB+E=A^2+B$，求 B.

解　由 $AB+E=A^2+B$ 得

$$(A-E)B=A^2-E,$$

即　　$(A-E)B=(A-E)(A+E)$.

因为$|A-E|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-1\neq 0$，所以$(A-E)$可逆，从而

$$B=A+E=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}.$$

21. 设 $A=\mathrm{diag}(1, -2, 1)$, $A^*BA=2BA-8E$，求 B.

解　由 $A^*BA=2BA-8E$ 得

$$(A^*-2E)BA=-8E,$$

$$B=-8(A^*-2E)^{-1}A^{-1}$$

$$=-8[A(A^*-2E)]^{-1}$$

$$=-8(AA^*-2A)^{-1}$$

$$=-8(|A|E-2A)^{-1}$$

$$=-8(-2E-2A)^{-1}$$

$$=4(E+A)^{-1}$$

$$=4[\mathrm{diag}(2, -1, 2)]^{-1}$$

$$=4\mathrm{diag}(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$$

$$=2\mathrm{diag}(1, -2, 1).$$

22. 已知矩阵 A 的伴随阵 $A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$,

且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，求 B.

解　由$|A^*|=|A|^3=8$，得$|A|=2$.

由 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$ 得

$$AB=B+3A,$$

$$B=3(A-E)^{-1}A=3[A(E-A^{-1})]^{-1}A$$

$$=3(E-\frac{1}{2}A^*)^{-1}=6(2E-A^*)^{-1}$$

$$=6\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}.$$

23. 设 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 $P=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$，求 A^{11}.

解　由 $P^{-1}AP=\Lambda$，得 $A=P\Lambda P^{-1}$，所以 $A^{11}=A=P\Lambda^{11}P^{-1}$.

$$|P|=3,\ P^*=\begin{pmatrix}1&4\\-1&1\end{pmatrix},\ P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&4\\-1&-1\end{pmatrix},$$

而
$$\Lambda^{11}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}^{11}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2^{11}\end{pmatrix},$$

故
$$A^{11}=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&2^{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2731&2732\\-683&-684\end{pmatrix}.$$

24. 设 $AP=P\Lambda$，其中 $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}$，

求 $j(A)=A^8(5E-6A+A^2)$.

解　$j(\Lambda)=\Lambda^8(5E-6\Lambda+\Lambda^2)$

$=\mathrm{diag}(1,1,5^8)[\mathrm{diag}(5,5,5)-\mathrm{diag}(-6,6,30)+\mathrm{diag}(1,1,25)]$

$=\mathrm{diag}(1,1,5^8)\mathrm{diag}(12,0,0)=12\mathrm{diag}(1,0,0)$.

$j(A)=Pj(\Lambda)P^{-1}$

$$=\frac{1}{|P|}Pj(\Lambda)P^*$$

$$=-2\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-3&0&3\\-1&2&-1\end{pmatrix}$$

$$=4\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

25. 设矩阵 A、B 及 $A+B$ 都可逆，证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆，并求其逆阵.

证明　因为

$$A^{-1}(A+B)B^{-1}=B^{-1}+A^{-1}=A^{-1}+B^{-1},$$

而 $A^{-1}(A+B)B^{-1}$ 是三个可逆矩阵的乘积，所以 $A^{-1}(A+B)B^{-1}$ 可逆，即 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆.

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=[A^{-1}(A+B)B^{-1}]^{-1}=B(A+B)^{-1}A.$$

26. 计算 $\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&2&-1\\0&0&-2&3\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$.

解　设 $A_1=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}$, $B_1=\begin{pmatrix}3&1\\2&-1\end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix}-2&3\\0&-3\end{pmatrix}$,

则 $$\begin{pmatrix}A_1&E\\O&A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&B_1\\O&B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&A_1B_1+B_2\\O&A_2B_2\end{pmatrix},$$

而 $$A_1B_1+B_2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&3\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2\\2&-4\end{pmatrix},$$

$$A_2B_2=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&3\\0&-9\end{pmatrix},$$

所以 $$\begin{pmatrix}A_1&E\\O&A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&B_1\\O&B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&A_1B_1+B_2\\O&A_2B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&5&2\\0&1&2&-4\\0&0&-4&3\\0&0&0&-9\end{pmatrix},$$

即 $$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&2&-1\\0&0&-2&3\\0&0&0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&5&2\\0&1&2&-4\\0&0&-4&3\\0&0&0&-9\end{pmatrix}.$$

27. 取 $A=B=-C=D=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, 验证 $\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}\neq\begin{vmatrix}|A|&|B|\\|C|&|D|\end{vmatrix}$.

解 $$\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{vmatrix}=\left|\begin{array}{cc:cc}2&0&0&0\\0&2&0&0\\\hdashline -1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{array}\right|=\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=4,$$

而 $$\begin{vmatrix}|A|&|B|\\|C|&|D|\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0,$$

故 $$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} |A| & |B| \\ |C| & |D| \end{vmatrix}.$$

28. 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & & \\ 4 & -3 & & \\ & & 2 & 0 \\ & & 2 & 2 \end{pmatrix}$，求 $|A^8|$ 及 A^4.

解 令 $A_1=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$，

则 $$A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix},$$

故 $$A^8=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}^8=\begin{pmatrix} A_1^8 & O \\ O & A_2^8 \end{pmatrix},$$

$$|A^8|=|A_1^8||A_2^8|=|A_1|^8|A_2|^8=10^{16}.$$

$$A^4=\begin{pmatrix} A_1^4 & O \\ O & A_2^4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5^4 & 0 & & \\ 0 & 5^4 & & \\ & & 2^4 & 0 \\ & & 2^6 & 2^4 \end{pmatrix}.$$

29. 设 n 阶矩阵 A 及 s 阶矩阵 B 都可逆，求

(1) $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}$；

解 设 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AC_3 & AC_4 \\ BC_1 & BC_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_s \end{pmatrix}.$$

由此得 $$\begin{cases} AC_3=E_n \\ AC_4=O \\ BC_1=O \\ BC_2=E_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3=A^{-1} \\ C_4=O \\ C_1=O \\ C_2=B^{-1} \end{cases},$$

所以 $$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}.$$

(2) $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}$.

解　设$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AD_1 & AD_2 \\ CD_1+BD_3 & CD_2+BD_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_s \end{pmatrix}.$$

由此得 $\begin{cases} AD_1=E_n \\ AD_2=O \\ CD_1+BD_3=O \\ CD_2+BD_4=E_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1=A^{-1} \\ D_2=O \\ D_3=-B^{-1}CA^{-1} \\ D_4=B^{-1} \end{cases}$,

所以 $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$.

30. 求下列矩阵的逆阵:

(1)$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$;

解　设$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, 则

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix},\quad B^{-1}=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

于是 $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix}$.

(2)$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

解　设$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

第三章　矩阵的初等变换与线性方程组

1. 把下列矩阵化为行最简形矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$;

解　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$(下一步: $r_2+(-2)r_1$, $r_3+(-3)r_1$.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$(下一步: $r_2\div(-1)$, $r_3\div(-2)$.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$(下一步: r_3-r_2.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$(下一步: $r_3\div 3$.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$(下一步: r_2+3r_3.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$(下一步: $r_1+(-2)r_2$, r_1+r_3.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}$;

解 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}$(下一步: $r_2\times 2+(-3)r_1$, $r_3+(-2)r_1$.)

$\sim\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$(下一步: r_3+r_2, r_1+3r_2.)

$\sim\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$(下一步: $r_1\div 2$.)

$\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

解 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$(下一步: r_2-3r_1, r_3-2r_1, r_4-3r_1.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -10 \end{pmatrix}$(下一步: $r_2\div(-4)$, $r_3\div(-3)$, $r_4\div(-5)$.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$(下一步: r_1-3r_2, r_3-r_2, r_4-r_2.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

解 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$(下一步: r_1-2r_2, r_3-3r_2, r_4-2r_2.)

$\sim\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -8 & 8 & 9 & 12 \\ 0 & -7 & 7 & 8 & 11 \end{pmatrix}$(下一步: r_2+2r_1, r_3-8r_1, r_4-7r_1.)

$\sim\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$(下一步: $r_1\leftrightarrow r_2$, $r_2\times(-1)$, r_4-r_3.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$(下一步: r_2+r_3.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. 设$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, 求 A.

解 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$是初等矩阵 $E(1, 2)$, 其逆矩阵就是其本身.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$是初等矩阵 $E(1, 2(1))$, 其逆矩阵是

$$E(1, 2(-1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. 试利用矩阵的初等变换，求下列方阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

解 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 7/2 & 2 & -9/2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7/6 & 2/3 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

故逆矩阵为 $\begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

解 $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10\end{pmatrix}$$

故逆矩阵为$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 3 & 6\\ 2 & 1 & -6 & -10\end{pmatrix}$.

4. (1)设$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, 求 X 使 $AX=B$;

解　因为

$$(A, B)=\begin{pmatrix}4 & 1 & -2 & 1 & -3\\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2\\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 10 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -15 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 12 & 4\end{pmatrix},$$

所以　　$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}10 & 2\\ -15 & -3\\ 12 & 4\end{pmatrix}$.

(2)设$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ -3 & 3 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$, 求 X 使 $XA=B$.

解　考虑 $A^TX^T=B^T$. 因为

$$(A^T, B^T)=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 2 & -3\\ 1 & 3 & -4 & 3 & 1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & -4\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4\end{pmatrix},$$

所以　　$X^T=(A^T)^{-1}B^T=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & 7\\ -1 & 4\end{pmatrix}$,

从而 $$X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-4&7&4\end{pmatrix}.$$

5. 设$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$, $AX=2X+A$, 求 X.

解 原方程化为$(A-2E)X=A$. 因为

$$(A-2E, A)=\begin{pmatrix}-1&-1&0&1&-1&0\\0&-1&-1&0&1&-1\\-1&0&-1&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&1&-1&0\end{pmatrix},$$

所以 $$X=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}.$$

6. 在秩是 r 的矩阵中,有没有等于 0 的 $r-1$ 阶子式? 有没有等于 0 的 r 阶子式?

解 在秩是 r 的矩阵中, 可能存在等于 0 的 $r-1$ 阶子式, 也可能存在等于 0 的 r 阶子式.

例如, $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$, $R(A)=3$.

$\begin{vmatrix}0&0\\0&0\end{vmatrix}$是等于 0 的 2 阶子式, $\begin{vmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}$是等于 0 的 3 阶子式.

7. 从矩阵 A 中划去一行得到矩阵 B, 问 A, B 的秩的关系怎样?

解 $R(A)\geq R(B)$.

这是因为 B 的非零子式必是 A 的非零子式, 故 A 的秩不会小于 B 的秩.

8. 求作一个秩是 4 的方阵, 它的两个行向量是

$$(1, 0, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0, 0).$$

解 用已知向量容易构成一个有 4 个非零行的 5 阶下三角矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此矩阵的秩为 4, 其第 2 行和第 3 行是已知向量.

9. 求下列矩阵的秩, 并求一个最高阶非零子式:

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$;

解 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$(下一步: $r_1 \leftrightarrow r_2$.)

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$(下一步: r_2-3r_1, r_3-r_1.)

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \end{pmatrix}$(下一步: r_3-r_2.)

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

矩阵的秩为2, $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$ 是一个最高阶非零子式.

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix}$;

解 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix}$(下一步: r_1-r_2, r_2-2r_1, r_3-7r_1.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -5 \\ 0 & -21 & 33 & 27 & -15 \end{pmatrix}$(下一步: r_3-3r_2.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

矩阵的秩是 2, $\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{vmatrix} = \mathbf{-7}$**是一个最高阶非零子式**.

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

解 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$(下一步: r_1-2r_4, r_2-2r_4, r_3-3r_4.)

$\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$(下一步: r_2+3r_1, r_3+2r_1.)

$\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$(下一步: $r_2\div 16r_4$, r_3-16r_2.)

$\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

矩阵的秩为 3, $\begin{vmatrix}0&7&-5\\5&8&0\\3&2&0\end{vmatrix}=70\neq0$是一个最高阶非零子式.

10. 设 A、B 都是 $m\times n$ 矩阵, 证明 $A\sim B$ 的充分必要条件是 $R(A)=R(B)$.

证明　根据定理 3, 必要性是成立的.

充分性. 设 $R(A)=R(B)$, 则 A 与 B 的标准形是相同的. 设 A 与 B 的标准形为 D, 则有

$$A\sim D,\ D\sim B.$$

由等价关系的传递性, 有 $A\sim B$.

11. 设$A=\begin{pmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{pmatrix}$, 问 k 为何值, 可使

(1)$R(A)=1$; (2)$R(A)=2$; (3)$R(A)=3$.

解　$A=\begin{pmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&k\\0&k-1&k-1\\0&0&-(k-1)(k+2)\end{pmatrix}$.

(1)当 $k=1$ 时, $R(A)=1$;

(2)当 $k=-2$ 且 $k\neq1$ 时, $R(A)=2$;

(3)当 $k\neq1$ 且 $k\neq-2$ 时, $R(A)=3$.

12. 求解下列齐次线性方程组:

(1)$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3-x_4=0\\2x_1+x_2+x_3-x_4=0\\2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0\end{cases}$;

解　对系数矩阵 A 进行初等行变换, 有

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\2&1&1&-1\\2&2&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&3&-1\\0&0&1&-4/3\end{pmatrix},$$

于是 $\begin{cases} x_1=\dfrac{4}{3}x_4 \\ x_2=-3x_4 \\ x_3=\dfrac{4}{3}x_4 \\ x_4=x_4 \end{cases}$,

故方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} \dfrac{4}{3} \\ -3 \\ \dfrac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}(k\text{ 为任意常数}).$$

(2) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0 \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0 \end{cases}$;

解　对系数矩阵 A 进行初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是 $\begin{cases} x_1=-2x_2+x_4 \\ x_2=x_2 \\ x_3=0 \\ x_4=x_4 \end{cases}$,

故方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}(k_1, k_2\text{ 为任意常数}).$$

(3) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0 \\ 3x_1+x_2+2x_3-7x_4=0 \\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0 \\ x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0 \end{cases}$;

解　对系数矩阵 A 进行初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix}2&3&-1&5\\3&1&2&-7\\4&1&-3&6\\1&-2&4&-7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

于是 $\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3=0\\x_4=0\end{cases}$,

故方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3=0\\x_4=0\end{cases}.$$

(4) $\begin{cases}3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0\\2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0\\4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0\\7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0\end{cases}$.

解　对系数矩阵 A 进行初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix}3&4&-5&7\\2&-3&3&-2\\4&11&-13&16\\7&-2&1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{17}&\frac{13}{17}\\0&1&-\frac{19}{17}&\frac{20}{17}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是 $\begin{cases}x_1=\frac{3}{17}x_3-\frac{13}{17}x_4\\x_2=\frac{19}{17}x_3-\frac{20}{17}x_4\\x_3=x_3\\x_4=x_4\end{cases}$,

故方程组的解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}\frac{3}{17}\\\frac{19}{17}\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-\frac{13}{17}\\-\frac{20}{17}\\0\\1\end{pmatrix}(k_1,\ k_2\text{ 为任意常数}).$$

13. 求解下列非齐次线性方程组:

(1) $\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=2\\3x_1-1x_2+2x_3=10\\11x_1+3x_2=8\end{cases}$;

解　对增广矩阵 B 进行初等行变换, 有

$$B=\begin{pmatrix}4&2&-1&2\\3&-1&2&10\\11&3&0&8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&-3&-8\\0&-10&11&34\\0&0&0&-6\end{pmatrix},$$

于是 $R(A)=2$, 而 $R(B)=3$, 故方程组无解.

(2) $\begin{cases}2x+3y+z=4\\x-2y+4z=-5\\3x+8y-2z=13\\4x-y+9z=-6\end{cases}$;

解　对增广矩阵 B 进行初等行变换, 有

$$B=\begin{pmatrix}2&3&1&4\\1&-2&4&-5\\3&8&-2&13\\4&-1&9&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是 $\begin{cases}x=-2z-1\\y=z+2\\z=z\end{cases}$,

即 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$($k$ 为任意常数).

(3) $\begin{cases}2x+y-z+w=1\\4x+2y-2z+w=2\\2x+y-z-w=1\end{cases}$;

解　对增广矩阵 B 进行初等行变换, 有

$$B=\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\4&2&-2&1&2\\2&1&-1&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1/2&-1/2&0&1/2\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是 $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{2}z+\dfrac{1}{2} \\ y=y \\ z=z \\ w=0 \end{cases}$,

即 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (k_1, k_2 为任意常数).

(4) $\begin{cases} 2x+y-z+w=1 \\ 3x-2y+z-3w=4 \\ x+4y-3z+5w=-2 \end{cases}$.

解　对增广矩阵 B 进行初等行变换，有

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/7 & -1/7 & 6/7 \\ 0 & 1 & -5/7 & 9/7 & -5/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{7}z+\dfrac{1}{7}w+\dfrac{6}{7} \\ y=\dfrac{5}{7}z-\dfrac{9}{7}w-\dfrac{5}{7} \\ z=z \\ w=w \end{cases}$,

即 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} \dfrac{1}{7} \\ \dfrac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} \dfrac{1}{7} \\ -\dfrac{9}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \dfrac{6}{7} \\ -\dfrac{5}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (k_1, k_2 为任意常数).

14. 写出一个以

$$\boldsymbol{x}=c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

为通解的齐次线性方程组.

解　根据已知，可得

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2\\4\\0\\1\end{pmatrix},$$

与此等价地可以写成

$$\begin{cases}x_1=2c_1-c_2\\x_2=-3c_1+4c_2\\x_3=c_1\\x_4=c_2\end{cases},$$

或 $$\begin{cases}x_1=2x_3-x_4\\x_2=-3x_3+4x_4\end{cases},$$

或 $$\begin{cases}x_1-2x_3+x_4=0\\x_2+3x_3-4x_4=0\end{cases},$$

这就是一个满足题目要求的齐次线性方程组.

15. l取何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases}lx_1+x_2+x_3=1\\x_1+lx_2+x_3=l\\x_1+x_2+lx_3=l^2\end{cases}.$$

(1)有唯一解; (2)无解; (3)有无穷多个解?

解 $$B=\begin{pmatrix}l&1&1&1\\1&l&1&l\\1&1&l&l^2\end{pmatrix}$$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&l&l^2\\0&l-1&1-l&l(1-l)\\0&0&(1-l)(2+l)&(1-l)(l+1)^2\end{pmatrix}.$$

(1)要使方程组有唯一解，必须 $R(A)=3$. 因此当$l\neq1$ 且$l\neq-2$时方程组有唯一解.

(2)要使方程组无解，必须 $R(A)<R(B)$，故

$$(1-l)(2+l)=0,\ (1-l)(l+1)^2\neq0.$$

因此$l=-2$ 时，方程组无解.

(3)要使方程组有有无穷多个解，必须 $R(A)=R(B)<3$，故

$$(1-l)(2+l)=0,\ (1-l)(l+1)^2=0.$$

因此当 $l=1$ 时，方程组有无穷多个解.

16. 非齐次线性方程组

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=-2\\ x_1-2x_2+x_3=l\\ x_1+x_2-2x_3=l^2\end{cases}$$

当 l 取何值时有解？并求出它的解.

解　$B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1 & l\\ 1 & 1 & -2 & l^2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & l\\ 0 & 1 & -1 & -\frac{2}{3}(l-1)\\ 0 & 0 & 0 & (l-1)(l+2)\end{pmatrix}$.

要使方程组有解，必须 $(1-l)(l+2)=0$，即 $l=1$，$l=-2$.

当 $l=1$ 时,

$$B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

方程组解为

$$\begin{cases}x_1=x_3+1\\ x_2=x_3\end{cases}\text{或}\begin{cases}x_1=x_3+1\\ x_2=x_3\\ x_3=x_3\end{cases},$$

即　$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$（$k$ 为任意常数).

当 $l=-2$ 时,

$$B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

方程组解为

$$\begin{cases}x_1=x_3+2\\x_2=x_3+2\end{cases} 或 \begin{cases}x_1=x_3+2\\x_2=x_3+2,\\x_3=x_3\end{cases}$$

即 $$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}(k 为任意常数).$$

17. 设 $$\begin{cases}(2-l)x_1+2x_2-2x_3=1\\2x_1+(5-l)x_2-4x_3=2\\-2x_1-4x_2+(5-l)x_3=-l-1\end{cases}.$$

问 l 为何值时，此方程组有唯一解、无解或有无穷多解？并在有无穷多解时求解.

解 $$B=\begin{pmatrix}2-l & 2 & -2 & 1\\2 & 5-l & -4 & 2\\-2 & -4 & 5-l & -l-1\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}2 & 5-l & -4 & 2\\0 & 1-l & 1-l & 1-l\\0 & 0 & (1-l)(10-l) & (1-l)(4-l)\end{pmatrix}.$$

要使方程组有唯一解，必须 $R(A)=R(B)=3$，即必须

$$(1-l)(10-l)\neq 0,$$

所以当 $l\neq 1$ 且 $l\neq 10$ 时，方程组有唯一解.

要使方程组无解，必须 $R(A)<R(B)$，即必须

$$(1-l)(10-l)=0 \text{ 且} (1-l)(4-l)\neq 0,$$

所以当 $l=10$ 时，方程组无解.

要使方程组有无穷多解，必须 $R(A)=R(B)<3$，即必须

$$(1-l)(10-l)=0 \text{ 且} (1-l)(4-l)=0,$$

所以当 $l=1$ 时，方程组有无穷多解.此时，增广矩阵为

$$B\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + x_3 + 1 \\ x_2 = \ \ x_2 \\ x_3 = \qquad\ \ x_3 \end{cases},$$

或 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (k_1, k_2\text{为任意常数}).$$

18. 证明 $R(A)=1$ 的充分必要条件是存在非零列向量 $\boldsymbol{a}$ 及非零行向量 $\boldsymbol{b}^T$, 使 $A=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T$.

证明　必要性. 由 $R(A)=1$ 知 A 的标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0, \cdots, 0),$$

即存在可逆矩阵 P 和 Q, 使

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0, \cdots, 0), \text{ 或 } A = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0, \cdots, 0) Q^{-1}.$$

令 $\boldsymbol{a} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}^T=(1, 0, \cdots, 0)Q^{-1}$, 则 $\boldsymbol{a}$ 是非零列向量, $\boldsymbol{b}^T$ 是非零行向量, 且 $A=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T$.

充分性. 因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}^T$ 是都是非零向量, 所以 A 是非零矩阵, 从而 $R(A)\geq 1$.

因为

$$1 \leq R(A) = R(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T) \leq \min\{R(\boldsymbol{a}), R(\boldsymbol{b}^T)\} = \min\{1, 1\} = 1,$$

所以 $R(A)=1$.

19. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, 证明

(1)方程 $AX=E_m$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=m$;

证明　由定理 7, 方程 $AX=E_m$ 有解的充分必要条件是

$$R(A)=R(A, E_m),$$

而$|E_m|$是矩阵(A, E_m)的最高阶非零子式，故 $R(A)=R(A, E_m)=m$. 因此，方程 $AX=E_m$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=m$.

(2)方程 $YA=E_n$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=n$.

证明　注意，方程 $YA=E_n$ 有解的充分必要条件是 $A^TY^T=E_n$ 有解. 由(1) $A^TY^T=E_n$ 有解的充分必要条件是 $R(A^T)=n$. 因此，方程 $YA=E_n$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=R(A^T)=n$.

20. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，证明：若 $AX=AY$，且 $R(A)=n$，则 $X=Y$.

证明　由 $AX=AY$，得 $A(X-Y)=O$. 因为 $R(A)=n$，由定理 9，方程 $A(X-Y)=O$ 只有零解，即 $X-Y=O$，也就是 $X=Y$.

第四章　向量组的线性相关性

1. 设 $\boldsymbol{v}_1=(1, 1, 0)^T$，$\boldsymbol{v}_2=(0, 1, 1)^T$，$\boldsymbol{v}_3=(3, 4, 0)^T$，求 $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$ 及 $3\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_3$.

解　$\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2=(1, 1, 0)^T-(0, 1, 1)^T$

$$=(1-0, 1-1, 0-1)^T$$

$$=(1, 0, -1)^T.$$

$$3\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_3=3(1, 1, 0)^T+2(0, 1, 1)^T-(3, 4, 0)^T$$

$$=(3\times1+2\times0-3, 3\times1+2\times1-4, 3\times0+2\times1-0)^T$$

$$=(0, 1, 2)^T.$$

2. 设 $3(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a})=5(\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a})$，求 $\boldsymbol{a}$，其中 $\boldsymbol{a}_1=(2, 5, 1, 3)^T$，$\boldsymbol{a}_2=(10, 1, 5, 10)^T$，$\boldsymbol{a}_3=(4, 1, -1, 1)^T$.

解　由 $3(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a})=5(\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a})$整理得

$$\boldsymbol{a}=\frac{1}{6}(3\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2-5\boldsymbol{a}_3)$$

$$=\frac{1}{6}[3(2, 5, 1, 3)^T+2(10, 1, 5, 10)^T-5(4, 1, -1, 1)^T]$$

$=(1, 2, 3, 4)^T$.

3. 已知向量组

A: $\boldsymbol{a}_1=(0, 1, 2, 3)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(3, 0, 1, 2)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(2, 3, 0, 1)^T$;

B: $\boldsymbol{b}_1=(2, 1, 1, 2)^T$, $\boldsymbol{b}_2=(0, -2, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{b}_3=(4, 4, 1, 3)^T$,

证明 B 组能由 A 组线性表示, 但 A 组不能由 B 组线性表示.

证明 由

$$(A, B)=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 20 & 5 & -15 & 25 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

知 $R(A)=R(A, B)=3$, 所以 B 组能由 A 组线性表示.

由

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

知 $R(B)=2$. 因为 $R(B)\neq R(B, A)$, 所以 A 组不能由 B 组线性表示.

4. 已知向量组

A: $\boldsymbol{a}_1=(0, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(1, 1, 0)^T$;

B: $\boldsymbol{b}_1=(-1, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{b}_2=(1, 2, 1)^T$, $\boldsymbol{b}_3=(3, 2, -1)^T$,

证明 A 组与 B 组等价.

证明 由

$$(B, A)=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知 $R(B)=R(B, A)=2$. 显然在 A 中有二阶非零子式, 故 $R(A)\geq 2$, 又

$R(A)\le R(B, A)=2$, 所以 $R(A)=2$, 从而 $R(A)=R(B)=R(A, B)$. 因此 A 组与 B 组等价.

5. 已知 $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=2$, $R(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)=3$, 证明

(1) $\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性表示;

(2) $\boldsymbol{a}_4$ 不能由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性表示.

证明 (1)由 $R(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)=3$ 知 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ 线性无关, 故 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 也线性无关. 又由 $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=2$ 知 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性相关, 故 $\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 线性表示.

(2)假如 $\boldsymbol{a}_4$ 能由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性表示, 则因为 $\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性表示, 故 $\boldsymbol{a}_4$ 能由 $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 线性表示, 从而 $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ 线性相关, 矛盾. 因此 $\boldsymbol{a}_4$ 不能由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性表示.

6. 判定下列向量组是线性相关还是线性无关:

(1) $(-1, 3, 1)^T, (2, 1, 0)^T, (1, 4, 1)^T$;

(2) $(2, 3, 0)^T, (-1, 4, 0)^T, (0, 0, 2)^T$.

解 (1)以所给向量为列向量的矩阵记为 A. 因为

$$A=\begin{pmatrix}-1&2&1\\3&1&4\\1&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&7&7\\0&2&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $R(A)=2$ 小于向量的个数, 从而所给向量组线性相关.

(2)以所给向量为列向量的矩阵记为 B. 因为

$$|B|=\begin{vmatrix}2&-1&0\\3&4&0\\0&0&2\end{vmatrix}=22\neq 0,$$

所以 $R(B)=3$ 等于向量的个数, 从而所给向量组线性相无关.

7. 问 a 取什么值时下列向量组线性相关?

$\boldsymbol{a}_1=(a, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(1, a, -1)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(1, -1, a)^T$.

解　以所给向量为列向量的矩阵记为 A. 由

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}=a(a-1)(a+1)$$

知，当 $a=-1$、0、1 时, $R(A)<3$, 此时向量组线性相关.

8. 设 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ 线性无关, $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}$ 线性相关，求向量 $\boldsymbol{b}$ 用 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ 线性表示的表示式.

解　因为 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}$ 线性相关，故存在不全为零的数 l_1, l_2 使

$$l_1(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b})+l_2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b})=0,$$

由此得　$\boldsymbol{b}=-\frac{l_1}{l_1+l_2}\boldsymbol{a}_1-\frac{l_2}{l_1+l_2}\boldsymbol{a}_2=-\frac{l_1}{l_1+l_2}\boldsymbol{a}_1-(1-\frac{l_1}{l_1+l_2})\boldsymbol{a}_2$,

设 $c=-\frac{l_1}{l_1+l_2}$，则

$$\boldsymbol{b}=c\boldsymbol{a}_1-(1+c)\boldsymbol{a}_2,\ c\in\mathbf{R}.$$

9. 设 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ 线性相关, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ 也线性相关，问 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2$ 是否一定线性相关？试举例说明之.

解　不一定.

例如，当 $\boldsymbol{a}_1=(1, 2)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(2, 4)^T$, $\boldsymbol{b}_1=(-1, -1)^T$, $\boldsymbol{b}_2=(0, 0)^T$ 时，有

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1=(1, 2)^T+\boldsymbol{b}_1=(0, 1)^T,\ \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2=(2, 4)^T+(0, 0)^T=(2, 4)^T,$$

而 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2$ 的对应分量不成比例，是线性无关的.

10. 举例说明下列各命题是错误的:

(1)若向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 是线性相关的，则 $\boldsymbol{a}_1$ 可由 $\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性表示.

解　设 $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{e}_1=(1, 0, 0, \cdots, 0)$, $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_3=\cdots=\boldsymbol{a}_m=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots,$

$\boldsymbol{a}_m$线性相关，但$\boldsymbol{a}_1$不能由$\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$线性表示.

(2)若有不全为 0 的数$l_1, l_2, \cdots, l_m$使

$$l_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+l_m\boldsymbol{a}_m+l_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+l_m\boldsymbol{b}_m=0$$

成立，则$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$线性相关, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m$亦线性相关.

解　有不全为零的数$l_1, l_2, \cdots, l_m$使

$$l_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+l_m\boldsymbol{a}_m+l_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+l_m\boldsymbol{b}_m=\boldsymbol{0},$$

原式可化为

$$l_1(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1)+\cdots+l_m(\boldsymbol{a}_m+\boldsymbol{b}_m)=\boldsymbol{0}.$$

取$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{e}_1=-\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{e}_2=-\boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{e}_m=-\boldsymbol{b}_m$，其中$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m$为单位坐标向量，则上式成立，而$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$和$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m$均线性无关.

(3)若只有当$l_1, l_2, \cdots, l_m$全为 0 时，等式

$$l_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+l_m\boldsymbol{a}_m+l_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+l_m\boldsymbol{b}_m=0$$

才能成立，则$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$线性无关, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m$亦线性无关.

解　由于只有当$l_1, l_2, \cdots, l_m$全为 0 时，等式

$$由\ l_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+l_m\boldsymbol{a}_m+l_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+l_m\boldsymbol{b}_m=\boldsymbol{0}$$

成立，所以只有当$l_1, l_2, \cdots, l_m$全为 0 时，等式

$$l_1(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1)+l_2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2)+\cdots+l_m(\boldsymbol{a}_m+\boldsymbol{b}_m)=\boldsymbol{0}$$

成立．因此$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m+\boldsymbol{b}_m$线性无关.

取$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2=\cdots=\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$，取$\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$为线性无关组，则它们满足以上条件，但$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$线性相关.

(4)若$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$线性相关, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m$亦线性相关，则有不全为 0 的数, $l_1, l_2, \cdots, l_m$使

$$l_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+l_m\boldsymbol{a}_m=0,\ l_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+l_m\boldsymbol{b}_m=0$$

同时成立.

解　$\boldsymbol{a}_1=(1, 0)^T, \boldsymbol{a}_2=(2, 0)^T, \boldsymbol{b}_1=(0, 3)^T, \boldsymbol{b}_2=(0, 4)^T$,

$$l_1\boldsymbol{a}_1+l_2\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}\Rightarrow l_1=-2l_2,$$

$$l_1\boldsymbol{b}_1+l_2\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{0}\Rightarrow l_1=-(3/4)l_2,$$

$\Rightarrow l_1=l_2=0$, 与题设矛盾.

11. 设 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_4=\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_1$, 证明向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ 线性相关.

证明　由已知条件得

$$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{b}_3-\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{b}_4-\boldsymbol{a}_1,$$

于是　$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{a}_3$

$=\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3-\boldsymbol{a}_4$

$=\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3-\boldsymbol{b}_4+\boldsymbol{a}_1$,

从而　$\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3-\boldsymbol{b}_4=\boldsymbol{0}$,

这说明向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ 线性相关.

12. 设 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_r$, 且向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 线性无关, 证明向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

证明　已知的 r 个等式可以写成

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r)=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

上式记为 $B=AK$. 因为 $|K|=1\neq 0$, K 可逆, 所以 $R(B)=R(A)=r$, 从而向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

13. 求下列向量组的秩, 并求一个最大无关组:

(1)$\boldsymbol{a}_1=(1, 2, -1, 4)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(9, 100, 10, 4)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(-2, -4, 2, -8)^T$;

解　由

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 2 & 100 & -4 \\ -1 & 10 & 2 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 0 & 82 & 0 \\ 0 & 19 & 0 \\ 0 & -32 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知 $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=2$. 因为向量 $\boldsymbol{a}_1$ 与 $\boldsymbol{a}_2$ 的分量不成比例, 故 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 线性无关, 所以 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 是一个最大无关组.

(2)$\boldsymbol{a}_1^T=(1, 2, 1, 3)$, $\boldsymbol{a}_2^T=(4, -1, -5, -6)$, $\boldsymbol{a}_3^T=(1, -3, -4, -7)$.

解　由

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -5 & -4 \\ 3 & -6 & -7 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & -5 \\ 0 & -9 & -5 \\ 0 & -18 & -10 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知 $R(\boldsymbol{a}_1^T, \boldsymbol{a}_2^T, \boldsymbol{a}_3^T)=R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=2$. 因为向量 $\boldsymbol{a}_1^T$ 与 $\boldsymbol{a}_2^T$ 的分量不成比例, 故 $\boldsymbol{a}_1^T, \boldsymbol{a}_2^T$ 线性无关, 所以 $\boldsymbol{a}_1^T, \boldsymbol{a}_2^T$ 是一个最大无关组.

14. 利用初等行变换求下列矩阵的列向量组的一个最大无关组:

(1)$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$;

解　因为

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \underset{r_4-r_1}{\overset{\substack{r_2-3r_1 \\ r_3-3r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \underset{r_3-r_2}{\overset{r_4-r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以第 1、2、3 列构成一个最大无关组.

(2) $\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}$.

解　因为

$$\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}\underset{r_4-r_1}{\overset{r_3-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&-2&-1&-5&1\\0&0&-2&2&-2\end{pmatrix}\underset{r_3\leftrightarrow r_4}{\overset{r_3+r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&-2&2&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以第 1、2、3 列构成一个最大无关组.

15. 设向量组

$$(a, 3, 1)^T, (2, b, 3)^T, (1, 2, 1)^T, (2, 3, 1)^T$$

的秩为 2，求 a, b.

解　设 $\boldsymbol{a}_1=(a, 3, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(2, b, 3)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(1, 2, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_4=(2, 3, 1)^T$.

因为

$$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)=\begin{pmatrix}1&2&a&2\\2&3&3&b\\1&1&1&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&a-1&-1\\0&1&1&b-6\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&a-1&-1\\0&0&2-a&b-5\end{pmatrix},$$

而 $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)=2$，所以 $a=2$, $b=5$.

16. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 是一组 n 维向量，已知 n 维单位坐标向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 能由它们线性表示，证明 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关.

证法一　记 $A=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$, $E=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$. 由已知条件知，存在矩阵 K，使

$$E=AK.$$

两边取行列式，得

$$|E|=|A||K|.$$

可见$|A|\neq 0$，所以$R(A)=n$，从而$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性无关.

证法二　因为$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$能由$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性表示，所以

$$R(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\leq R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n),$$

而$R(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)=n$, $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)\leq n$，所以$R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)=n$，从而$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性无关.

17. 设$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$是一组$n$维向量，证明它们线性无关的充分必要条件是：任一$n$维向量都可由它们线性表示.

证明　必要性：设$\boldsymbol{a}$为任一n维向量. 因为$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性无关，而$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}$是$n+1$个$n$维向量，是线性相关的，所以$\boldsymbol{a}$能由$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性表示，且表示式是唯一的.

充分性：已知任一n维向量都可由$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性表示，故单位坐标向量组$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$能由$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性表示，于是有

$$n=R(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\leq R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)\leq n,$$

即$R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)=n$，所以$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性无关.

18. 设向量组$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$线性相关，且$\boldsymbol{a}_1\neq\boldsymbol{0}$，证明存在某个向量$\boldsymbol{a}_k$ $(2\leq k\leq m)$，使$\boldsymbol{a}_k$能由$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{k-1}$线性表示.

证明　因为$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$线性相关，所以存在不全为零的数$l_1, l_2, \cdots, l_m$，使

$$l_1\boldsymbol{a}_1+l_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0},$$

而且$l_2, l_3, \cdots, l_m$不全为零. 这是因为，如若不然，则$l_1\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{0}$，由$\boldsymbol{a}_1\neq\boldsymbol{0}$知$l_1=0$，矛盾. 因此存在$k(2\leq k\leq m)$，使

$$l_k\neq 0,\ l_{k+1}=l_{k+2}=\cdots=l_m=0,$$

于是

$$l_1\boldsymbol{a}_1+l_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+l_k\boldsymbol{a}_k=\mathbf{0},$$

$$\boldsymbol{a}_k=-(1/l_k)(l_1\boldsymbol{a}_1+l_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+l_{k-1}\boldsymbol{a}_{k-1}),$$

即 $\boldsymbol{a}_k$ 能由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{k-1}$ 线性表示.

19. 设向量组 B: $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 能由向量组 A: $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性表示为

$(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r)=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s)K$, 其中 K 为 $s\times r$ 矩阵, 且 A 组线性无关. 证明 B 组线性无关的充分必要条件是矩阵 K 的秩 $R(K)=r$.

证明　令 $B=(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r)$, $A=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s)$, 则有 $B=AK$.

必要性: 设向量组 B 线性无关.

由向量组 B 线性无关及矩阵秩的性质, 有

$$r=R(B)=R(AK)\le\min\{R(A), R(K)\}\le R(K),$$

及 $$R(K)\le\min\{r, s\}\le r.$$

因此 $R(K)=r$.

充分性: 因为 $R(K)=r$, 所以存在可逆矩阵 C, 使 $KC=\begin{pmatrix}E_r\\O\end{pmatrix}$为 K 的标准形. 于是

$$(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r)C=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s)KC=(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r).$$

因为 C 可逆, 所以 $R(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r)=R(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r)=r$, 从而 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

20. 设

$$\begin{cases} b_1 = \quad\ a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ b_2 = a_1 \quad\ + a_3 + \cdots + a_n \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} \end{cases},$$

证明向量组$a_1, a_2, \cdots, a_n$与向量组$b_1, b_2, \cdots, b_n$等价.

证明　将已知关系写成

$$(b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

将上式记为 $B=AK$. 因为

$$|K| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1) \neq 0,$$

所以K可逆, 故有$A=BK^{-1}$. 由$B=AK$和$A=BK^{-1}$可知向量组$a_1, a_2, \cdots, a_n$与向量组$b_1, b_2, \cdots, b_n$可相互线性表示. 因此向量组$a_1, a_2, \cdots, a_n$与向量组$b_1, b_2, \cdots, b_n$等价.

21. 已知 3 阶矩阵 A 与 3 维列向量 $\boldsymbol{x}$ 满足 $A^3\boldsymbol{x}=3A\boldsymbol{x}-A^2\boldsymbol{x}$, 且向量组 $\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x}$ 线性无关.

(1)记 $P=(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x})$, 求 3 阶矩阵 B, 使 $AP=PB$;

解　因为

$$\begin{aligned} AP &= A(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x}) \\ &= (A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x}, A^3\boldsymbol{x}) \\ &= (A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x}, 3A\boldsymbol{x}-A^2\boldsymbol{x}) \\ &= (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

所以$B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

(2)求$|A|$.

解　由$A^3\boldsymbol{x}=3A\boldsymbol{x}-A^2\boldsymbol{x}$，得$A(3\boldsymbol{x}-A\boldsymbol{x}-A^2\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$. 因为$\boldsymbol{x}$，$A\boldsymbol{x}$，$A^2\boldsymbol{x}$线性无关，故$3\boldsymbol{x}-A\boldsymbol{x}-A^2\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，即方程$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$有非零解，所以$R(A)<3$, $|A|=0$.

22. 求下列齐次线性方程组的基础解系:

(1)$\begin{cases}x_1-8x_2+10x_3+2x_4=0\\2x_1+4x_2+5x_3-x_4=0\\3x_1+8x_2+6x_3-2x_4=0\end{cases}$;

解　对系数矩阵进行初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix}1&-8&10&2\\2&4&5&-1\\3&8&6&-2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&4&0\\0&1&-3/4&-1/4\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是得

$$\begin{cases}x_1=-4x_3\\x_2=(3/4)x_3+(1/4)x_4\end{cases}.$$

取$(x_3, x_4)^T=(4, 0)^T$，得$(x_1, x_2)^T=(-16, 3)^T$;

取$(x_3, x_4)^T=(0, 4)^T$，得$(x_1, x_2)^T=(0, 1)^T$.

因此方程组的基础解系为

$$x_1=(-16, 3, 4, 0)^T, x_2=(0, 1, 0, 4)^T.$$

(2)$\begin{cases}2x_1-3x_2-2x_3+x_4=0\\3x_1+5x_2+4x_3-2x_4=0\\8x_1+7x_2+6x_3-3x_4=0\end{cases}$.

解　对系数矩阵进行初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix}2&-3&-2&1\\3&5&4&-2\\8&7&6&-3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2/19&-1/19\\0&1&14/19&-7/19\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是得

$$\begin{cases} x_1=-(2/19)x_3+(1/19)x_4 \\ x_2=-(14/19)x_3+(7/19)x_4 \end{cases}.$$

取$(x_3, x_4)^T=(19, 0)^T$，得$(x_1, x_2)^T=(-2, 14)^T$;

取$(x_3, x_4)^T=(0, 19)^T$，得$(x_1, x_2)^T=(1, 7)^T$.

因此方程组的基础解系为

$x_1=(-2, 14, 19, 0)^T$, $x_2=(1, 7, 0, 19)^T$.

(3)$nx_1+(n-1)x_2+\cdots+2x_{n-1}+x_n=0$.

解　原方程组即为

$$x_n=-nx_1-(n-1)x_2-\cdots-2x_{n-1}.$$

取 $x_1=1, x_2=x_3=\cdots=x_{n-1}=0$，得 $x_n=-n$;

取 $x_2=1, x_1=x_3=x_4=\cdots=x_{n-1}=0$，得 $x_n=-(n-1)=-n+1$;

$\cdots$;

取 $x_{n-1}=1, x_1=x_2=\cdots=x_{n-2}=0$，得 $x_n=-2$.

因此方程组的基础解系为

$x_1=(1, 0, 0, \cdots, 0, -n)^T$,

$x_2=(0, 1, 0, \cdots, 0, -n+1)^T$,

$\cdots$,

$x_{n-1}=(0, 0, 0, \cdots, 1, -2)^T$.

23. 设$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$，求一个 4×2 矩阵 B，使 $AB=\mathbf{0}$，且 $R(B)=2$.

解　显然 B 的两个列向量应是方程组 $AB=\mathbf{0}$ 的两个线性无关的解．因为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & -5/8 & -11/8 \end{pmatrix},$$

所以与方程组 $AB=\mathbf{0}$ 同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = (1/8)x_3 - (1/8)x_4 \\ x_2 = (5/8)x_3 + (11/8)x_4 \end{cases}.$$

取$(x_3, x_4)^T=(8, 0)^T$, 得$(x_1, x_2)^T=(1, 5)^T$;

取$(x_3, x_4)^T=(0, 8)^T$, 得$(x_1, x_2)^T=(-1, 11)^T$.

方程组 $AB=\mathbf{0}$ 的基础解系为

$$x_1=(1, 5, 8, 0)^T, x_2=(-1, 11, 0, 8)^T.$$

因此所求矩阵为 $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 11 \\ 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

24. 求一个齐次线性方程组, 使它的基础解系为

$$x_1=(0, 1, 2, 3)^T, x_2=(3, 2, 1, 0)^T.$$

解　显然原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 即}\begin{cases} x_1 = 3k_2 \\ x_2 = k_1 + 2k_2 \\ x_3 = 2k_1 + k_2 \\ x_4 = 3k_1 \end{cases}, (k_1, k_2 \in \mathbf{R}),$$

消去 k_1, k_2 得

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases},$$

此即所求的齐次线性方程组.

25. 设四元齐次线性方程组

$$\text{I: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}, \text{ II: } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

求: (1)方程 I 与 II 的基础解系; (2) I 与 II 的公共解.

解　(1)由方程 I 得 $\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = x_4 \end{cases}$.

取$(x_3, x_4)^T=(1, 0)^T$, 得$(x_1, x_2)^T=(0, 0)^T$;

取$(x_3, x_4)^T=(0, 1)^T$，得$(x_1, x_2)^T=(-1, 1)^T$.

因此方程 I 的基础解系为

$$x_1=(0, 0, 1, 0)^T, x_2=(-1, 1, 0, 1)^T.$$

由方程 II 得$\begin{cases} x_1=-x_4 \\ x_2=x_3-x_4 \end{cases}$.

取$(x_3, x_4)^T=(1, 0)^T$，得$(x_1, x_2)^T=(0, 1)^T$;

取$(x_3, x_4)^T=(0, 1)^T$，得$(x_1, x_2)^T=(-1, -1)^T$.

因此方程 II 的基础解系为

$$x_1=(0, 1, 1, 0)^T, x_2=(-1, -1, 0, 1)^T.$$

(2) I 与 II 的公共解就是方程

$$\text{III:}\quad \begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2-x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}$$

的解. 因为方程组 III 的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以与方程组 III 同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1=-x_4 \\ x_2=x_4 \\ x_3=2x_4 \end{cases}.$$

取 $x_4=1$，得$(x_1, x_2, x_3)^T=(-1, 1, 2)^T$，方程组 III 的基础解系为

$$x=(-1, 1, 2, 1)^T.$$

因此 I 与 II 的公共解为 $\boldsymbol{x}=c(-1, 1, 2, 1)^T, c\in \mathbf{R}$.

26. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=A$, E 为 n 阶单位矩阵，证明

$$R(A)+R(A-E)=n.$$

证明　因为 $A(A-E)=A^2-A=A-A=\mathbf{0}$，所以 $R(A)+R(A-E)\leq n$.

又 $R(A-E)=R(E-A)$，可知

$$R(A)+R(A-E)=R(A)+R(E-A)\ge R(A+E-A)=R(E)=n,$$

由此 $R(A)+R(A-E)=n$.

27. 设 A 为 n 阶矩阵($n\ge 2$), A^*为 A 的伴随阵，证明

$$R(A^*)=\begin{cases} n & 当R(A)=n \\ 1 & 当R(A)=n-1 \\ 0 & 当R(A)\le n-2 \end{cases}.$$

证明　当 $R(A)=n$ 时, $|A|\ne 0$，故有

$$|AA^*|=||A|E|=|A|\ne 0,\ |A^*|\ne 0,$$

所以 $R(A^*)=n$.

当 $R(A)=n-1$ 时, $|A|=0$，故有

$$AA^*=|A|E=\mathbf{0},$$

即 A^*的列向量都是方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解．因为 $R(A)=n-1$，所以方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系中只含一个解向量，即基础解系的秩为 1．因此 $R(A^*)=1$.

当 $R(A)\le n-2$ 时, A 中每个元素的代数余子式都为 0，故 $A^*=O$，从而 $R(A^*)=0$.

28. 求下列非齐次方程组的一个解及对应的齐次线性方程组的基础解系:

(1) $\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=1 \\ 5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3 \end{cases}$;

解　对增广矩阵进行初等行变换，有

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

与所给方程组同解的方程为

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - 8 \\ x_2 = \ \ x_3 + 13 \\ x_4 = \qquad 2 \end{cases}.$$

当 $x_3=0$ 时，得所给方程组的一个解 $h=(-8, 13, 0, 2)^{\mathrm{T}}$.

与对应的齐次方程组同解的方程为

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = \ \ x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

当 $x_3=1$ 时，得对应的齐次方程组的基础解系 $x=(-1, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$.

(2) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = -6 \end{cases}$.

解　对增广矩阵进行初等行变换，有

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9/7 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/7 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

与所给方程组同解的方程为

$$\begin{cases} x_1 = -(9/7)x_3 + (1/2)x_4 + 1 \\ x_2 = (1/7)x_3 - (1/2)x_4 - 2 \end{cases}.$$

当 $x_3=x_4=0$ 时，得所给方程组的一个解

$$h=(1, -2, 0, 0)^{\mathrm{T}}.$$

与对应的齐次方程组同解的方程为

$$\begin{cases} x_1 = -(9/7)x_3 + (1/2)x_4 \\ x_2 = (1/7)x_3 - (1/2)x_4 \end{cases}.$$

分别取 $(x_3,\ x_4)^T=(1,\ 0)^T$，$(0,\ 1)^T$，得对应的齐次方程组的基础解系

$$x_1=(-9, 1, 7, 0)^T.\ x_2=(1, -1, 0, 2)^T.$$

29. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，已知h_1，h_2，h_3是它的三个解向量．且

$$h_1=(2, 3, 4, 5)^T,\ h_2+h_3=(1, 2, 3, 4)^T,$$

求该方程组的通解.

解　由于方程组中未知数的个数是 4，系数矩阵的秩为 3，所以对应的齐次线性方程组的基础解系含有一个向量，且由于h_1，h_2，h_3均为方程组的解，由非齐次线性方程组解的结构性质得

$$2h_1-(h_2+h_3)=(h_1-h_2)+(h_1-h_3)= (3, 4, 5, 6)^T$$

为其基础解系向量，故此方程组的通解:

$$\boldsymbol{x}=k(3, 4, 5, 6)^T+(2, 3, 4, 5)^T,\ (k\in\mathbf{R}).$$

30. 设有向量组A: $\boldsymbol{a}_1=(a, 2, 10)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(-2, 1, 5)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(-1, 1, 4)^T$, 及 $\boldsymbol{b}=(1, b, -1)^T$，问$a$, b为何值时

(1)向量 $\boldsymbol{b}$ 不能由向量组 A 线性表示;

(2)向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示，且表示式唯一;

(3)向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示，且表示式不唯一，并求一般表示式.

解　$$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}-1 & -2 & a & 1\\ 1 & 1 & 2 & b\\ 4 & 5 & 10 & -1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-1 & -2 & a & 1\\ 0 & -1 & 1+a & b+1\\ 0 & 0 & 4+a & -3b\end{pmatrix}.$$

(1)当$a=-4$, $b\neq 0$ 时, $R(A)\neq R(A, \boldsymbol{b})$，此时向量$\boldsymbol{b}$不能由向量组$A$线性表示.

(2)当$a\neq -4$ 时, $R(A)=R(A, \boldsymbol{b})=3$，此时向量组 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 线性无关，而向量组 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{b}$ 线性相关，故向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示，且表示式唯一.

(3)当$a=-4$, $b=0$ 时, $R(A)=R(A, \boldsymbol{b})=2$，此时向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示，且表示式不唯一.

当$a=-4$, $b=0$ 时,

$$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 10 & -1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

方程组$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2c+1 \\ -3c-1 \\ c \end{pmatrix}, c\in \mathbf{R}.$$

因此 $\boldsymbol{b}=(2c+1)\boldsymbol{a}_3+(-3c-1)\boldsymbol{a}_2+c\boldsymbol{a}_1$,

即 $\boldsymbol{b}= c\boldsymbol{a}_1+(-3c-1)\boldsymbol{a}_2+(2c+1)\boldsymbol{a}_3$, $c\in \mathbf{R}$.

31. 设 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)^T$, $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)^T$, $\boldsymbol{c}=(c_1, c_2, c_3)^T$, 证明三直线

$$\begin{aligned} &l_1: a_1x+b_1y+c_1=0, \\ &l_2: a_2x+b_2y+c_2=0, \quad (a_i^2+b_i^2\neq 0, i=1, 2, 3) \\ &l_3: a_3x+b_3y+c_3=0, \end{aligned}$$

相交于一点的充分必要条件为: 向量组 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 线性无关, 且向量组 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 线性相关.

证明　三直线相交于一点的充分必要条件为方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} a_1x+b_1y=-c_1 \\ a_2x+b_2y=-c_2 \\ a_3x+b_3y=-c_3 \end{cases}$$

有唯一解. 上述方程组可写为 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$. 因此三直线相交于一点的充分必要条件为 $\boldsymbol{c}$ 能由 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 唯一线性表示, 而 $\boldsymbol{c}$ 能由 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 唯一线性表示的充分必要条件为向量组 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 线性无关, 且向量组 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 线性相关.

32. 设矩阵$A=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$, 其中 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$线性无关, $\boldsymbol{a}_1=2\boldsymbol{a}_2-$

$\boldsymbol{a}_3$. 向量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$, 求方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解　由 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$ 知 $h=(1, 1, 1, 1)^T$ 是方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个解.

由 $\boldsymbol{a}_1=2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$ 得 $\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$, 知 $x=(1, -2, 1, 0)^T$ 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个解.

由 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ 线性无关知 $R(A)=3$, 故方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 所对应的齐次方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中含一个解向量. 因此 $x=(1, -2, 1, 0)^T$ 是方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=c(1, -2, 1, 0)^T+(1, 1, 1, 1)^T, c\in \mathbf{R}.$$

33. 设 h^* 是非齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个解, $x_1, x_2, \cdots, x_{n-r}$,是对应的齐次线性方程组的一个基础解系, 证明:

(1) $h^*, x_1, x_2, \cdots, x_{n-r}$ 线性无关;

(2) $h^*, h^*+x_1, h^*+x_2, \cdots, h^*+x_{n-r}$ 线性无关.

证明　(1)反证法, 假设 $h^*, x_1, x_2, \cdots, x_{n-r}$ 线性相关. 因为 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-r}$ 线性无关, 而 $h^*, x_1, x_2, \cdots, x_{n-r}$ 线性相关, 所以 h^* 可由 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-r}$ 线性表示, 且表示式是唯一的, 这说明 h^* 也是齐次线性方程组的解, 矛盾.

(2)显然向量组 $h^*, h^*+x_1, h^*+x_2, \cdots, h^*+x_{n-r}$ 与向量组 $h^*, x_1, x_2, \cdots, x_{n-r}$ 可以相互表示, 故这两个向量组等价, 而由(1)知向量组 $h^*, x_1, x_2, \cdots, x_{n-r}$ 线性无关, 所以向量组 $h^*, h^*+x_1, h^*+x_2, \cdots, h^*+x_{n-r}$ 也线性无关.

34. 设 $h_1, h_2, \cdots, h_s$ 是非齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的 s 个解, k_1,

$k_2, \cdots, k_s$ 为实数，满足 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$. 证明

$$\boldsymbol{x}=k_1 h_1+k_2 h_2+\cdots+k_s h_s$$

也是它的解.

证明　因为 $h_1, h_2, \cdots, h_s$ 都是方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解，所以

$$Ah_i=\boldsymbol{b}\ (i=1, 2, \cdots, s),$$

从而

$$A(k_1 h_1+k_2 h_2+\cdots+k_s h_s)=k_1 Ah_1+k_2 Ah_2+\cdots+k_s Ah_s$$

$$=(k_1+k_2+\cdots+k_s)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}.$$

因此 $\boldsymbol{x}=k_1 h_1+k_2 h_2+\cdots+k_s h_s$ 也是方程的解.

35. 设非齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵的秩为 r, $h_1, h_2, \cdots, h_{n-r+1}$ 是它的 $n-r+1$ 个线性无关的解. 试证它的任一解可表示为

$$\boldsymbol{x}=k_1 h_1+k_2 h_2+\cdots+k_{n-r+1} h_{n-r+1},\ (\text{其中 } k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1).$$

证明　因为 $h_1, h_2, \cdots, h_{n-r+1}$ 均为 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解，所以 $x_1=h_2-h_1$, $x_2=h_3-h_1, \cdots, x_{n-r}=h_{n-r+1}-h_1$ 均为 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解.

用反证法证: $x_1, x_2, \cdots, x_{n-r}$ 线性无关.

设它们线性相关，则存在不全为零的数 $l_1, l_2, \cdots, l_{n-r}$，使得

$$l_1 x_1+l_2 x_2+\cdots+l_{n-r} x_{n-r}=\boldsymbol{0},$$

即

$$l_1(h_2-h_1)+l_2(h_3-h_1)+\cdots+l_{n-r}(h_{n-r+1}-h_1)=\boldsymbol{0},$$

亦即

$$-(l_1+l_2+\cdots+l_{n-r})h_1+l_1 h_2+l_2 h_3+\cdots+l_{n-r} h_{n-r+1}=\boldsymbol{0},$$

由 $h_1, h_2, \cdots, h_{n-r+1}$ 线性无关知

$$-(l_1+l_2+\cdots+l_{n-r})=l_1=l_2=\cdots=l_{n-r}=0,$$

矛盾. 因此 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-r}$ 线性无关. $x_1, x_2, \cdots, x_{n-r}$ 为 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个基础解系.

设 $\boldsymbol{x}$ 为 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的任意解，则 $\boldsymbol{x}-h_1$ 为 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，故 $\boldsymbol{x}-h_1$ 可由 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-r}$ 线性表出，设

$$\boldsymbol{x}-h_1=k_2x_1+k_3x_2+\cdots+k_{n-r+1}x_{n-r}$$
$$=k_2(h_2-h_1)+k_3(h_3-h_1)+\cdots+k_{n-r+1}(h_{n-r+1}-h_1),$$
$$\boldsymbol{x}=h_1(1-k_2-k_3\cdots-k_{n-r+1})+k_2h_2+k_3h_3+\cdots+k_{n-r+1}h_{n-r+1}.$$

令 $k_1=1-k_2-k_3\cdots-k_{n-r+1}$，则 $k_1+k_2+k_3\cdots-k_{n-r+1}=1$，于是

$$\boldsymbol{x}=k_1h_1+k_2h_2+\cdots+k_{n-r+1}h_{n-r+1}.$$

36. 设

$$V_1=\{\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_1, \cdots, x_n\in \mathbf{R} \text{ 满足 } x_1+x_2+\cdots+x_n=0\},$$
$$V_2=\{\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_1, \cdots, x_n\in \mathbf{R} \text{ 满足 } x_1+x_2+\cdots+x_n=1\},$$

问 V_1, V_2 是不是向量空间？为什么？

解　V_1 是向量空间，因为任取

$$a=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T\in V_1,\ b=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^T\in V_1,\ l\in\in\mathbf{R},$$

有　$a_1+a_2+\cdots+a_n=0$,

$b_1+b_2+\cdots+b_n=0$,

从而　$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)=0$,

$la_1+la_2+\cdots+la_n=l(a_1+a_2+\cdots+a_n)=0$,

所以　$a+b=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)^T\in V_1$,

$la=(la_1, la_2, \cdots, la_n)^T\in V_1$.

V_2 不是向量空间，因为任取

$$a=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T\in V_1,\ b=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^T\in V_1,$$

有　$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$,

$b_1+b_2+\cdots+b_n=1$,

从而　$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)=2$,

所以　$a+b=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)^T\notin V_1$.

37. 试证：由 $\boldsymbol{a}_1=(0, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(1, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(1, 1, 0)^T$ 所生成的向量空间就是 $\mathbf{R}^3$.

证明　设 $A=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$，由

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-2\neq 0,$$

知 $R(A)=3$，故 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 是三维空间 $\mathbf{R}^3$ 的一组基，因此由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 所生成的向量空间就是 $\mathbf{R}^3$.

38. 由 $\boldsymbol{a}_1=(1, 1, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(1, 0, 1, 1)^T$ 所生成的向量空间记作 V_1,由 $\boldsymbol{b}_1=(2, -1, 3, 3)^T$, $\boldsymbol{b}_2=(0, 1, -1, -1)^T$ 所生成的向量空间记作 V_2, 试证 $V_1=V_2$.

证明　设 $A=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, $B=(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$. 显然 $R(A)=R(B)=2$，又由

$$(A, B)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知 $R(A, B)=2$，所以 $R(A)=R(B)=R(A, B)$，从而向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 与向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ 等价. 因为向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 与向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ 等价，所以这两个向量组所生成的向量空间相同，即 $V_1=V_2$.

39. 验证 $\boldsymbol{a}_1=(1, -1, 0)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(2, 1, 3)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(3, 1, 2)^T$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，并把 $\boldsymbol{v}_1=(5, 0, 7)^T$, $\boldsymbol{v}_2=(-9, -8, -13)^T$ 用这个基线性表示.

解　设 $A=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$. 由

$$|(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}=-6\neq 0,$$

知 $R(A)=3$，故 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

设 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+x_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{v}_1$，则

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=5\\-x_1+x_2+x_3=0\\3x_2+2x_3=7\end{cases},$$

解之得 $x_1=2, x_2=3, x_3=-1$，故线性表示为 $\boldsymbol{v}_1=2\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$.

设 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+x_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{v}_2$，则

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=-9\\-x_1+x_2+x_3=-8\\3x_2+2x_3=-13\end{cases},$$

解之得 $x_1=3, x_2=-3, x_3=-2$，故线性表示为 $\boldsymbol{v}_2=3\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3$.

40. 已知 $\mathbf{R}^3$ 的两个基为

$\boldsymbol{a}_1=(1, 1, 1)^T, \boldsymbol{a}_2=(1, 0, -1)^T, \boldsymbol{a}_3=(1, 0, 1)^T,$

$\boldsymbol{b}_1=(1, 2, 1)^T, \boldsymbol{b}_2=(2, 3, 4)^T, \boldsymbol{b}_3=(3, 4, 3)^T.$

求由基 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 到基 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ 的过渡矩阵 P.

解　设 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 是三维单位坐标向量组，则

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1},$$

于是　$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{pmatrix},$$

由基 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 到基 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ 的过渡矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}.$$

第五章　相似矩阵及二次型

1. 试用施密特法把下列向量组正交化:

(1) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$;

解　根据施密特正交化方法,

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1-\frac{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2]}\boldsymbol{b}_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

(2) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

解　根据施密特正交化方法,

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1-\frac{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2]}\boldsymbol{b}_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}.$$

2. 下列矩阵是不是正交阵:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$;

解　此矩阵的第一个行向量非单位向量, 故不是正交阵.

(2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$.

解　该方阵每一个行向量均是单位向量, 且两两正交, 故为正交阵.

3. 设 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维列向量, $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}=1$, 令 $H=E-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T$, 证明 H 是对称的正交阵.

证明　因为

$$\begin{aligned} H^T &= (E-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T)^T = E-2(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T)^T = E-2(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T)^T \\ &= E-2(\boldsymbol{x}^T)^T\boldsymbol{x}^T = E-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T, \end{aligned}$$

所以 H 是对称矩阵.

因为

$$\begin{aligned} H^TH = HH &= (E-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T)(E-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T) \\ &= E-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T+(2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T)(2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T) \\ &= E-4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T+4\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}^T \\ &= E-4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T+4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \\ &= E, \end{aligned}$$

所以 H 是正交矩阵.

4. 设 A 与 B 都是 n 阶正交阵, 证明 AB 也是正交阵.

证明　因为 A, B 是 n 阶正交阵, 故 $A^{-1}=A^T$, $B^{-1}=B^T$,

$$(AB)^T(AB)=B^TA^TAB=B^{-1}A^{-1}AB=E,$$

故 AB 也是正交阵.

5. 求下列矩阵的特征值和特征向量:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

解 $|A-lE|=\begin{vmatrix} 2-l & -1 & 2 \\ 5 & -3-l & 3 \\ -1 & 0 & -2-l \end{vmatrix}=-(l+1)^3$,

故 A 的特征值为 $l=-1$(三重).

对于特征值 $l=-1$，由

$$A+E=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得方程$(A+E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{p}_1=(1, 1, -1)^T$，向量 $\boldsymbol{p}_1$ 就是对应于特征值 $l=-1$ 的特征值向量.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$;

解 $|A-lE|=\begin{vmatrix} 1-l & 2 & 3 \\ 2 & 1-l & 3 \\ 3 & 3 & 6-l \end{vmatrix}=-l(l+1)(l-9)$,

故 A 的特征值为 $l_1=0$，$l_2=-1$，$l_3=9$.

对于特征值 $l_1=0$，由

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{p}_1=(-1, -1, 1)^T$，向量 $\boldsymbol{p}_1$ 是对应于特征值 $l_1=0$ 的特征值向量.

对于特征值 $l_2=-1$，由

$$A+E=\begin{pmatrix}2&2&3\\2&2&3\\3&3&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&2&3\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得方程$(A+E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系$\boldsymbol{p}_2=(-1, 1, 0)^T$，向量$\boldsymbol{p}_2$就是对应于特征值$l_2=-1$的特征值向量.

对于特征值$l_3=9$，由

$$A-9E=\begin{pmatrix}-8&2&3\\2&-8&3\\3&3&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得方程$(A-9E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系$\boldsymbol{p}_3=(1/2,\ 1/2,\ 1)^T$，向量$\boldsymbol{p}_3$就是对应于特征值$l_3=9$的特征值向量.

(3)$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$.

解　$$|A-lE|=\begin{vmatrix}-l&0&0&1\\0&-l&1&0\\0&1&-l&0\\1&0&0&-l\end{vmatrix}=(l-1)^2(l+1)^2,$$

故A的特征值为$l_1=l_2=-1$，$l_3=l_4=1$.

对于特征值$l_1=l_2=-1$，由

$$A+E=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

得方程$(A+E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系$\boldsymbol{p}_1=(1, 0, 0, -1)^T$, $\boldsymbol{p}_2=(0, 1, -1, 0)^T$，向量$\boldsymbol{p}_1$和$\boldsymbol{p}_2$是对应于特征值$l_1=l_2=-1$的线性无关特征值向量.

对于特征值$l_3=l_4=1$，由

$$A-E=\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\0&-1&1&0\\0&1&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

得方程$(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系$\boldsymbol{p}_3=(1, 0, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{p}_4=(0, 1, 1, 0)^T$，向量$\boldsymbol{p}_3$和$\boldsymbol{p}_4$是对应于特征值$l_3=l_4=1$的线性无关特征值向量.

6. 设A为n阶矩阵，证明A^T与A的特征值相同.

证明　因为

$$|A^T-lE|=|(A-lE)^T|=|A-lE|^T=|A-lE|,$$

所以A^T与A的特征多项式相同，从而A^T与A的特征值相同.

7. 设n阶矩阵A、B满足$R(A)+R(B)<n$，证明A与B有公共的特征值，有公共的特征向量.

证明　设$R(A)=r$, $R(B)=t$，则$r+t<n$.

若$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-r}$是齐次方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系，显然它们是$A$的对应于特征值$l=0$的线性无关的特征向量.

类似地，设$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{n-t}$是齐次方程组$B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系，则它们是$B$的对应于特征值$l=0$的线性无关的特征向量.

由于$(n-r)+(n-t)=n+(n-r-t)>n$，故$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-r}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{n-t}$必线性相关. 于是有不全为0的数$k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}, l_1, l_2, \cdots, l_{n-t}$，使

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{a}_{n-r}+l_1\boldsymbol{b}_1+l_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+l_{n-r}\boldsymbol{b}_{n-r}=\boldsymbol{0}.$$

记　$$g=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{a}_{n-r}=-(l_1\boldsymbol{b}_1+l_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+l_{n-r}\boldsymbol{b}_{n-r}),$$

则$k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$不全为0，否则$l_1, l_2, \cdots, l_{n-t}$不全为0，而

$$l_1\boldsymbol{b}_1+l_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+l_{n-r}\boldsymbol{b}_{n-r}=\boldsymbol{0},$$

与$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{n-t}$线性无关相矛盾.

因此，$g\neq\boldsymbol{0}$, g是A的也是B的关于$l=0$的特征向量，所以A与B有公共的特征值，有公共的特征向量.

8. 设$A^2-3A+2E=O$，证明A的特征值只能取1或2.

证明　设l是A的任意一个特征值，$\boldsymbol{x}$是A的对应于l的特征

向量，则

$$(A^2-3A+2E)\boldsymbol{x}=l^2\boldsymbol{x}-3l\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}=(l^2-3l+2)\boldsymbol{x}=0.$$

因为 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $l^2-3l+2=0$，即 l 是方程 $l^2-3l+2=0$ 的根，也就是说 $l=1$ 或 $l=2$.

9. 设 A 为正交阵，且 $|A|=-1$，证明 $l=-1$ 是 A 的特征值.

证明　因为 A 为正交矩阵，所以 A 的特征值为 -1 或 1.

因为 $|A|$ 等于所有特征值之积，又 $|A|=-1$，所以必有奇数个特征值为 -1，即 $l=-1$ 是 A 的特征值.

10. 设 $l\neq 0$ 是 m 阶矩阵 $A_{m\times n}B_{n\times m}$ 的特征值，证明 l 也是 n 阶矩阵 BA 的特征值.

证明　设 $\boldsymbol{x}$ 是 AB 的对应于 $l\neq 0$ 的特征向量，则有

$$(AB)\boldsymbol{x}=l\boldsymbol{x},$$

于是 $$B(AB)\boldsymbol{x}=B(l\boldsymbol{x}),$$

或 $$BA(B\boldsymbol{x})=l(B\boldsymbol{x}),$$

从而 l 是 BA 的特征值，且 $B\boldsymbol{x}$ 是 BA 的对应于 l 的特征向量.

11. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1, 2, 3，求 $|A^3-5A^2+7A|$.

解　令 $j(l)=l^3-5l^2+7l$，则 $j(1)=3$，$j(2)=2$，$j(3)=3$ 是 $j(A)$ 的特征值，故

$$|A^3-5A^2+7A|=|j(A)|=j(1)\cdot j(2)\cdot j(3)=3\times2\times3=18.$$

12. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1, 2, −3，求 $|A^*+3A+2E|$.

解　因为 $|A|=1\times2\times(-3)=-6\neq0$，所以 A 可逆，故

$$A^*=|A|A^{-1}=-6A^{-1},$$

$$A^*+3A+2E=-6A^{-1}+3A+2E.$$

令 $j(l)=-6l^{-1}+3l^2+2$，则 $j(1)=-1$，$j(2)=5$，$j(-3)=-5$ 是 $j(A)$ 的特征值，故

$$|A^*+3A+2E|=|-6A^{-1}+3A+2E|=|j(A)|$$

$$=j(1)\cdot j(2)\cdot j(-3)=-1\times5\times(-5)=25.$$

13. 设 A、B 都是 n 阶矩阵，且 A 可逆，证明 AB 与 BA 相似.

证明　取 $P=A$，则

$$P^{-1}ABP=A^{-1}ABA=BA,$$

即 AB 与 BA 相似.

14. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 可相似对角化，求 x.

解　由

$$|A-lE|=\begin{vmatrix} 2-l & 0 & 1 \\ 3 & 1-l & x \\ 4 & 0 & 5-l \end{vmatrix}=-(l-1)^2(l-6),$$

得 A 的特征值为 $l_1=6$，$l_2=l_3=1$.

因为 A 可相似对角化，所以对于 $l_2=l_3=1$，齐次线性方程组 $(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有两个线性无关的解，因此 $R(A-E)=1$. 由

$$(A-E)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & x \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

知当 $x=3$ 时 $R(A-E)=1$，即 $x=3$ 为所求.

15. 已知 $\boldsymbol{p}=(1, 1, -1)^T$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

(1)求参数 a, b 及特征向量 $\boldsymbol{p}$ 所对应的特征值;

解　设 l 是特征向量 $\boldsymbol{p}$ 所对应的特征值，则

$$(A-lE)\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}，即 \begin{pmatrix} 2-l & -1 & 2 \\ 5 & a-l & 3 \\ -1 & b & -2-l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

解之得 $l=-1, a=-3, b=0$.

(2)问 A 能不能相似对角化？并说明理由.

解　由

$$|A-lE|=\begin{vmatrix} 2-l & -1 & 2 \\ 5 & -3-l & 3 \\ -1 & 0 & -2-l \end{vmatrix}=-(l-1)^3,$$

得 A 的特征值为 $l_1=l_2=l_3=1$.

由

$$A-E=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

知 $R(A-E)=2$，所以齐次线性方程组$(A-E)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系只有一个解向量. 因此 A 不能相似对角化.

16. 试求一个正交的相似变换矩阵，将下列对称阵化为对角阵:

(1)$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

解　将所给矩阵记为 A. 由

$$|A-lE|=\begin{vmatrix} 2-l & -2 & 0 \\ -2 & 1-l & -2 \\ 0 & -2 & -l \end{vmatrix}=(1-l)(l-4)(l+2),$$

得矩阵 A 的特征值为 $l_1=-2$，$l_2=1$，$l_3=4$.

对于 $l_1=-2$，解方程$(A+2E)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，即

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0,$$

得特征向量$(1, 2, 2)^T$，单位化得 $\boldsymbol{p}_1=(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$.

对于 $l_2=1$，解方程$(A-E)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，即

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0,$$

得特征向量$(2, 1, -2)^T$，单位化得 $\boldsymbol{p}_2=(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})^T$.

对于$l_3=4$，解方程$(A-4E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0,$$

得特征向量$(2, -2, 1)^T$，单位化得 $\boldsymbol{p}_3=(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T$.

于是有正交阵 $P=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$，使 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(-2, 1, 4)$.

(2)$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

解　将所给矩阵记为 A. 由

$$|A-lE|=\begin{vmatrix} 2-l & 2 & -2 \\ 2 & 5-l & -4 \\ -2 & -4 & 5-l \end{vmatrix}=-(l-1)^2(l-10),$$

得矩阵 A 的特征值为 $l_1=l_2=1$，$l_3=10$.

对于$l_1=l_2=1$，解方程$(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得线性无关特征向量$(-2, 1, 0)^T$和$(2, 0, 1)^T$，将它们正交化、单位化得

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)^T,\quad \boldsymbol{p}_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}(2, 4, 5)^T.$$

对于$l_3=10$，解方程$(A-10E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得特征向量$(-1, -2, 2)^T$，单位化得 $\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{3}(-1,-2,2)^T$.

于是有正交阵 $P=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$，使 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1, 1, 10)$.

17. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$与 $\Lambda=\begin{pmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & y \end{pmatrix}$相似，求 x，y；并求一个正交阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

解　已知相似矩阵有相同的特征值，显然 $l=5$，$l=-4$，$l=y$ 是 Λ的特征值，故它们也是 A 的特征值．因为 $l=-4$ 是 A 的特征值，所以

$$|A+4E|=\begin{vmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & x+4 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix}=9(x-4)=0,$$

解之得 $x=4$.

已知相似矩阵的行列式相同，因为

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & -4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix}=-100,\quad |\Lambda|=\begin{vmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & y \end{vmatrix}=-20y,$$

所以$-20y=-100$, $y=5$.

对于 $l=5$，解方程$(A-5E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得两个线性无关的特征向量$(1, 0, -1)^T$, $(1, -2, 0)^T$．将它们正交化、单位化得

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T,\quad \boldsymbol{p}_2=\frac{1}{3\sqrt{2}}(1,-4,1)^T.$$

对于 $l=-4$，解方程$(A+4E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量$(2, 1, 2)^T$，单位化得 $\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{3}(2,1,2)^T$.

于是有正交矩阵$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

18. 设3阶方阵A的特征值为$l_1=2$，$l_2=-2$，$l_3=1$；对应的特征向量依次为$\boldsymbol{p}_1=(0, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{p}_2=(1, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{p}_3=(1, 1, 0)^T$，求$A$.

解　令$P=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$，则$P^{-1}AP=\text{diag}(2, -2, 1)=\Lambda$, $A=P\Lambda P^{-1}$.

因为

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

所以　$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

19. 设3阶对称阵A的特征值为$l_1=1$，$l_2=-1$，$l_3=0$；对应l_1、l_2的特征向量依次为$\boldsymbol{p}_1=(1, 2, 2)^T$, $\boldsymbol{p}_2=(2, 1, -2)^T$，求$A$.

解　设$A=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$，则$A\boldsymbol{p}_1=2\boldsymbol{p}_1$, $A\boldsymbol{p}_2=-2\boldsymbol{p}_2$，即

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=1 \\ x_2+2x_4+2x_5=2 \\ x_3+2x_5+2x_6=2 \end{cases}, \text{---}①$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3=-2 \\ 2x_2+x_4-2x_5=-1 \\ 2x_3+x_5-2x_6=2 \end{cases}. \text{---}②$$

再由特征值的性质，有

$$x_1+x_4+x_6=l_1+l_2+l_3=0. \text{---}③$$

由①②③解得

$$x_1=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x_6,\quad x_2=\frac{1}{2}x_6,\quad x_3=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}x_6,$$

$$x_4=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x_6,\quad x_5=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}x_6.$$

令 $x_6=0$，得 $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=0$，$x_3=\frac{2}{3}$，$x_4=\frac{1}{3}$，$x_5=\frac{2}{3}$.

因此 $$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&2\\2&2&0\end{pmatrix}.$$

20．设 3 阶对称矩阵 A 的特征值 $l_1=6$，$l_2=3$，$l_3=3$，与特征值 $l_1=6$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(1, 1, 1)^T$，求 A.

解　设 $A=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_2&x_4&x_5\\x_3&x_5&x_6\end{pmatrix}$.

因为 $l_1=6$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(1, 1, 1)^T$，所以有

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}，即\begin{cases}x_1+x_2+x_3=6\\x_2+x_4+x_5=6\\x_3+x_5+x_6=6\end{cases}\quad ---①.$$

$l_2=l_3=3$ 是 A 的二重特征值，根据实对称矩阵的性质定理知 $R(A-3E)=1$．利用①可推出

$$A-3E=\begin{pmatrix}x_1-3&x_2&x_3\\x_2&x_4-3&x_5\\x_3&x_5&x_6-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\x_2&x_4-3&x_5\\x_3&x_5&x_6-3\end{pmatrix}.$$

因为 $R(A-3E)=1$，所以 $x_2=x_4-3=x_5$ 且 $x_3=x_5=x_6-3$，解之得

$$\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{x}_5=1,\ \boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_4=\boldsymbol{x}_6=4.$$

因此 $$A=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}.$$

21．设 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$, $a_1\neq 0$, $A=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T$.

(1)证明 $l=0$ 是 A 的 $n-1$ 重特征值;

证明　设 l 是 A 的任意一个特征值, $\boldsymbol{x}$ 是 A 的对应于 l 的特征向量，则有

$$A\boldsymbol{x}=l\boldsymbol{x},$$

$$l^2\boldsymbol{x}=A^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}A\boldsymbol{x}=l\,\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}\boldsymbol{x},$$

于是可得 $l^2=l\,\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}$，从而 $l=0$ 或 $l=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}$.

设 l_1，l_2，$\cdots$，l_n 是 A 的所有特征值，因为 $A=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T$ 的主对角线性上的元素为 $a_1^2, a_2^2, \cdots, a_n^2$，所以

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}=l_1+l_2+\cdots+l_n,$$

这说明在 l_1，$l_2, \cdots$，l_n 中有且只有一个等于 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}$，而其余 $n-1$ 个全为 0，即 $l=0$ 是 A 的 $n-1$ 重特征值.

(2)求 A 的非零特征值及 n 个线性无关的特征向量.

解　设 $l_1=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}$，$l_2=\cdots=l_n=0$.

因为 $A\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}=l_1\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{a}$ 是对应于 $l_1=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}$ 的特征向量.

对于 $l_2=\cdots=l_n=0$，解方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 因为 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}=0$，即 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$，其线性无关解为

$$\boldsymbol{p}_2=(-a_2, a_1, 0, \cdots, 0)^T,$$
$$\boldsymbol{p}_3=(-a_3, 0, a_1, \cdots, 0)^T,$$
$$\cdots,$$
$$\boldsymbol{p}_n=(-a_n, 0, 0, \cdots, a_1)^T.$$

因此 n 个线性无关特征向量构成的矩阵为

$$(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n)=\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 0 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

22. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，求 A^{100}.

解　由

$$|A-lE|=\begin{vmatrix} 1-l & 4 & 2 \\ 0 & -3-l & 4 \\ 0 & 4 & 3-l \end{vmatrix}=-(l-1)(l-5)(l+5),$$

得 A 的特征值为 $l_1=1$，$l_2=5$，$l_3=-5$.

对于 $l_1=1$，解方程 $(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{p}_1=(1, 0, 0)^T$.

对于 $l_1=5$，解方程 $(A-5E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{p}_2=(2, 1, 2)^T$.

对于 $l_1=-5$，解方程 $(A+5E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{p}_3=(1, -2, 1)^T$.

令 $P=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$，则

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1, 5, -5)=\Lambda,$$

$$A=P\Lambda P^{-1},$$

$$A^{100}=P\Lambda^{100}P^{-1}.$$

因为

$$\Lambda^{100}=\mathrm{diag}(1, 5^{100}, 5^{100}),$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 0 & -5\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix},$$

所以

$$A^{100}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 5^{100} & \\ & & 5^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0 & -5\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5^{100}-1\\ 0 & 5^{100} & 0\\ 0 & 0 & 5^{100}\end{pmatrix}.$$

23. 在某国，每年有比例为 p 的农村居民移居城镇，有比例为 q 的城镇居民移居农村，假设该国总人口数不变，且上述人口迁移的规律也不变. 把 n 年后农村人口和城镇人口占总人口的比例依次记为 x_n 和 $y_n(x_n+y_n=1)$.

(1)求关系式 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$ 中的矩阵 A;

解　由题意知

$$x_{n+1}=x_n+qy_n-px_n=(1-p)x_n+qy_n,$$

$$y_{n+1}=y_n+px_n-qy_n=px_n+(1-q)y_n,$$

可用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

因此 $$A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}.$$

(2)设目前农村人口与城镇人口相等，即$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$，求$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

解　由$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$可知$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. 由

$$|A-lE| = \begin{vmatrix} 1-p-l & q \\ p & 1-q-l \end{vmatrix} = (l-1)(l-1+p+q),$$

得 A 的特征值为 $l_1=1$，$l_2=r$，其中 $r=1-p-q$.

对于 $l_1=1$，解方程$(A-E)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{p}_1=(q, p)^T$.

对于 $l_1=r$，解方程$(A-rE)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{p}_2=(-1, 1)^T$.

令 $P=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)=\begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix}$，则

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1, r)=\Lambda,$$

$$A=P\Lambda P^{-1},$$

$$A^n=P\Lambda^n P^{-1}.$$

于是 $$A^n = \begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -p & q \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q+pr^n & q-qr^n \\ p-pr^n & p+qr^n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q+pr^n & q-qr^n \\ p-pr^n & p+qr^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2(p+q)}\begin{pmatrix}2q+(p-q)r^n\\2p+(q-p)r^n\end{pmatrix}.$$

24. (1)设 $A=\begin{pmatrix}3&-2\\-2&3\end{pmatrix}$，求 $j(A)=A^{10}-5A^9$;

解　由

$$|A-lE|=\begin{vmatrix}3-l&-2\\-2&3-l\end{vmatrix}=(l-1)(l-5),$$

得 A 的特征值为 $l_1=1$，$l_2=5$.

对于 $l_1=1$，解方程 $(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得单位特征向量 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$.

对于 $l_1=5$，解方程 $(A-5E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得单位特征向量 $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^T$.

于是有正交矩阵 $P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$，使得 $P^{-1}AP=\text{diag}(1, 5)=\Lambda$,

从而 $A=P\Lambda P^{-1}$, $A^k=P\Lambda^k P^{-1}$. 因此

$$\begin{aligned}j(A)&=Pj(\Lambda)P^{-1}=P(\Lambda^{10}-5\Lambda^9)P^{-1}\\&=P[\text{diag}(1, 5^{10})-5\text{diag}(1, 5^9)]P^{-1}\\&=P\text{diag}(-4, 0)P^{-1}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&0\\0&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2&-2\\-2&-2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(2)设 $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，求 $j(A)=A^{10}-6A^9+5A^8$.

解　求得正交矩阵为

$$P=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1&-\sqrt{3}&\sqrt{2}\\-1&\sqrt{3}&\sqrt{2}\\2&0&\sqrt{2}\end{pmatrix},$$

使得 $P^{-1}AP=\text{diag}(-1, 1, 5)=\Lambda$, $A=P\Lambda P^{-1}$. 于是

$$j(A)=Pj(\Lambda)P^{-1}=P(\Lambda^{10}-6\Lambda^9+5\Lambda^8)P^{-1}$$

$=P[\Lambda^8(\Lambda-E)(\Lambda-5E)]P^{-1}$

$=P\mathrm{diag}(1, 1, 5^8)\mathrm{diag}(-2, 0, 4)\mathrm{diag}(-6, -4, 0)P^{-1}$

$=P\mathrm{diag}(12, 0, 0)P^{-1}$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2}\\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\\ 2 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$=2\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{pmatrix}.$$

25. 用矩阵记号表示下列二次型:

(1) $f=x^2+4xy+4y^2+2xz+z^2+4yz$;

解 $f=(x, y, z)\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$

(2) $f=x^2+y^2-7z^2-2xy-4xz-4yz$;

解 $f=(x, y, z)\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ -1 & 1 & -2\\ -2 & -2 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$

(3) $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3-2x_1x_4+6x_2x_3-4x_2x_4$.

解 $f=(x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 3 & -2\\ 2 & 3 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}.$

26. 写出下列二次型的矩阵:

(1) $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$;

解 二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

(2) $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$.

解　二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$.

27. 求一个正交变换将下列二次型化成标准形:

(1) $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^3+4x_2x_3$;

解　二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$. 由

$$|A-lE|=\begin{vmatrix}2-l&0&0\\0&3-l&2\\0&2&3-l\end{vmatrix}=(2-l)(5-l)(1-l),$$

得 A 的特征值为 $l_1=2$, $l_2=5$, $l_3=1$.

当 $l_1=2$ 时, 解方程 $(A-2E)x=\mathbf{0}$, 由

$$A-2E=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得特征向量 $(1, 0, 0)^T$. 取 $\boldsymbol{p}_1=(1, 0, 0)^T$.

当 $l_2=5$ 时, 解方程 $(A-5E)x=\mathbf{0}$, 由

$$A-5E=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得特征向量 $(0, 1, 1)^T$. 取 $\boldsymbol{p}_2=(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

当 $l_3=1$ 时, 解方程 $(A-E)x=\mathbf{0}$, 由

$$A-E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得特征向量 $(0, -1, 1)^T$. 取 $\boldsymbol{p}_3=(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

于是有正交矩阵 $T=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$ 和正交变换 $\boldsymbol{x}=T\boldsymbol{y}$, 使

$$f=2y_1^2+5y_2^2+y_3^2.$$

(2) $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$.

解　二次型矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 由

$$|A-lE|=\begin{vmatrix} 1-l & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1-l & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-l & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1-l \end{vmatrix}=(l+1)(l-3)(l-1)^2,$$

得 A 的特征值为 $l_1=-1$, $l_2=3$, $l_3=l_4=1$.

当 $l_1=-1$ 时，可得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_1=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$.

当 $l_2=3$ 时，可得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_2=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^T$.

当 $l_3=l_4=1$ 时，可得线性无关的单位特征向量

$$\boldsymbol{p}_3=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T,\quad \boldsymbol{p}_4=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^T .$$

于是有正交矩阵 $T=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4)$和正交变换 $\boldsymbol{x}=T\boldsymbol{y}$，使

$$f=-y_1^2+3y_2^2+y_3^2+y_4^2.$$

28. 求一个正交变换把二次曲面的方程

$$3x^2+5y^2+5z^2+4xy-4xz-10yz=1$$

化成标准方程.

解　二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ -2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

由 $|A-lE|=\begin{vmatrix} 3-l & 2 & -2 \\ 2 & 5-l & -5 \\ -2 & -5 & 5-l \end{vmatrix}=-l(l-2)(l-11)$，得 A 的特征值为 $l_1=2$, $l_2=11$, $l_3=0$, .

对于 $l_1=2$，解方程 $(A-2E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $(4,\ -1,\ 1)^T$，单位化得 $\boldsymbol{p}_1=(\frac{4}{3\sqrt{2}},-\frac{1}{3\sqrt{2}},\frac{1}{3\sqrt{2}})$.

对于 $l_2=11$，解方程 $(A-11E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $(1, 2, -2)^T$，单位

化得 $\boldsymbol{p}_2=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$.

对于 $\lambda_3=0$，解方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量$(0, 1, 1)^T$，单位化得 $\boldsymbol{p}_3=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$.

于是有正交矩阵 $P=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$，使 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(2, 11, 0)$，从而有正交变换

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} & 0\\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix},$$

使原二次方程变为标准方程 $2u^2+11v^2=1$.

29. 明：二次型 $f=\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}$ 在$\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时的最大值为矩阵 A 的最大特征值.

证明　A 为实对称矩阵，则有一正交矩阵 T，使得

$$TAT^{-1}=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)=\Lambda$$

成立，其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的特征值，不妨设 λ_1 最大.

作正交变换 $\boldsymbol{y}=T\boldsymbol{x}$，即 $\boldsymbol{x}=T^T\boldsymbol{y}$，注意到 $T^{-1}=T^T$，有

$$f=\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^TTAT^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^T\Lambda\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

因为 $\boldsymbol{y}=T\boldsymbol{x}$ 正交变换，所以当$\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时，有

$$\|\boldsymbol{y}\|=\|\boldsymbol{x}\|=1，即 y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=1.$$

因此

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\leq\lambda_1,$$

又当 $y_1=1, y_2=y_3=\cdots=y_n=0$ 时 $f=\lambda_1$，所以 $f_{\max}=\lambda_1$.

30. 用配方法化下列二次形成规范形，并写出所用变换的矩

阵.

(1) $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$;

解 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$

$=(x_1+x_2-2x_3)^2+4x_2x_3+2x_2^2+x_3^2$

$=(x_1+x_2-2x_3)^2-2x_2^2+(2x_2+x_3)^2$.

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2-2x_3 \\ y_2=\sqrt{2}x_2 \\ y_3=2x_2+x_3 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x_1=y_1-\dfrac{5}{\sqrt{2}}y_2+2y_3 \\ x_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2 \\ x_3=-\sqrt{2}y_2+y_3 \end{cases}$，

二次型化为规范形

$$f=y_1^2-y_2^2+y_3^2,$$

所用的变换矩阵为

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{5}{\sqrt{2}} & 2 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+2x_3^2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

解 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+2x_3^2+2x_1x_3+2x_2x_3$

$=(x_1+x_3)^2+x_3^2+2x_2x_3$;

$=(x_1+x_3)^2-x_2^2+(x_2+x_3)^2$.

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_3 \\ y_2=x_2 \\ y_3=x_2+x_3 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2-y_3 \\ x_2=y_2 \\ x_3=-y_2+y_3 \end{cases}$，

二次型化为规范形

$$f=y_1^2-y_2^2+y_3^2,$$

所用的变换矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}.$$

(3) $f(x_1, x_2, x_3)=2x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+4x_3^{\ 2}+2x_1x_2-2x_2x_3$.

解　$f(x_1, x_2, x_3)=2x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+4x_3^{\ 2}+2x_1x_2-2x_2x_3$.

$$=2(x_1+\frac{1}{2}x_2)^2+\frac{1}{2}x_2^2+4x_3^2-2x_2x_3$$

$$=2(x_1+\frac{1}{2}x_2)^2+\frac{1}{2}(x_2-2x_3)^2+2x_3^2.$$

令 $\begin{cases}y_1=\sqrt{2}(x_1+\frac{1}{2}x_2)\\y_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2-2x_3)\\y_3=\sqrt{2}x_3\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_2-\frac{1}{\sqrt{2}}y_3\\x_2=\sqrt{2}y_2+\frac{2}{\sqrt{2}}y_3\\x_3=\frac{1}{\sqrt{2}}y_3\end{cases}$，

二次型化为规范形

$$f=y_1^{\ 2}+y_2^{\ 2}+y_3^{\ 2},$$

所用的变换矩阵为

$$C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&2&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

31.　设

$$f=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+5x_3^{\ 2}+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$$

为正定二次型，求 a.

解　二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&a&-1\\a&1&2\\-1&2&5\end{pmatrix}$，其主子式为

$$a_{11}=1,\ \begin{vmatrix}1&a\\a&1\end{vmatrix}=1-a^2,\ \begin{vmatrix}1&a&-1\\a&1&2\\-1&2&5\end{vmatrix}=-a(5a+4).$$

因为 f 为正主二次型，所以必有 $1-a^2>0$ 且 $-a(5a+4)>0$，解之得 $-\frac{4}{5}<a<0$.

32. 判别下列二次型的正定性:

(1) $f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$;

解　二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -6 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$. 因为

$$a_{11}=-2<0,\ \begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -6\end{vmatrix}=11>0,\ |A|=-38<0,$$

所以 f 为负定.

(2) $f=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+19x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4-6x_2x_4-12x_3x_4$.

解　二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 0 & -3\\ 2 & 0 & 9 & -6\\ 1 & -3 & -6 & 19\end{pmatrix}$. 因为

$$a_{11}=1>0,\ \begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=4>0,\ \begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 9\end{vmatrix}=6>0,\ |A|=24>0,$$

所以 f 为正定.

33. 证明对称阵 A 为正定的充分必要条件是: 存在可逆矩阵 U, 使 $A=U^TU$, 即 A 与单位阵 E 合同.

证明　因为对称阵 A 为正定的, 所以存在正交矩阵 P 使

$$P^TAP=\mathrm{diag}(l_1, l_2, \cdots, l_n)=\Lambda,\ 即\ A=P\Lambda P^T,$$

其中 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 均为正数.

令 $\Lambda_1=\mathrm{diag}(\sqrt{l_1}, \sqrt{l_2}, \cdots, \sqrt{l_n})$, 则 $\Lambda=\Lambda_1\Lambda_1$, $A=P\Lambda_1\Lambda_1{}^TP^T$.

再令 $U=\Lambda_1{}^TP^T$, 则 U 可逆, 且 $A=U^TU$.

第六章　线性空间与线性变换

1. 验证所给矩阵集合对于矩阵的加法和乘数运算构成线性空间, 并写出各个空间的一个基.

(1) 2 阶矩阵的全体 S_1;

解　设 A, B 分别为二阶矩阵，则 $A, B\in S_1$. 因为

$$(A+B)\in S_1,\ kA\in S_1,$$

所以 S_1 对于矩阵的加法和乘数运算构成线性空间.

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

是 S_1 的一个基.

(2)主对角线上的元素之和等于 0 的 2 阶矩阵的全体 S_2;

解　设 $A=\begin{pmatrix}-a&b\\c&a\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-d&e\\f&d\end{pmatrix}$, $A, B\in S_2$. 因为

$$A+B=\begin{pmatrix}-(a+d)&c+b\\c+a&a+d\end{pmatrix}\in S_2,$$

$$kA=\begin{pmatrix}-ka&kb\\kc&ka\end{pmatrix}\in S_2,$$

所以 S_2 对于矩阵的加法和乘数运算构成线性空间.

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

是 S_2 的一个基.

(3) 2 阶对称矩阵的全体 S_3.

解　设 $A, B\in S_3$, 则 $A^T=A, B^T=B$. 因为

$$(A+B)^T=A^T+B^T=A+B,\ (A+B)\in S_3,$$
$$(kA)^T=kA^T=kA,\ kA\in S_3,$$

所以 S_3 对于加法和乘数运算构成线性空间.

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

是 S_3 的一个基.

2. 验证: 与向量$(0, 0, 1)^T$不平行的全体 3 维数组向量, 对于数组向量的加法和乘数运算不构成线性空间.

解　设 $V=\{$与向量$(0, 0, 1)^T$ 不平行的全体三维向量$\}$, 设

$r_1=(1, 1, 0)^T$, $r_2=(-1, 0, 1)^T$, 则 $r_1, r_2\in V$, 但 $r_1+r_2=(0, 0, 1)^T\notin V$, 即 V 不是线性空间.

3. 设 U 是线性空间 V 的一个子空间, 试证: 若 U 与 V 的维数相等, 则 $U=V$.

证明　设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为 U 的一组基, 它可扩充为整个空间 V 的一个基, 由于 $\dim(U)=\dim(V)$, 从而 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 也为 V 的一个基, 则: 对于 $x\in V$ 可以表示为 $x=k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_re_r$. 显然, $x\in U$, 故 $V\subseteq U$, 而由已知知 $U\subseteq V$, 有 $U=V$.

4. 设 V_r 是 n 维线性空间 V_n 的一个子空间, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 是 V_r 的一个基. 试证: V_n 中存在元素 $\boldsymbol{a}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n$, 使 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 成为 V_n 的一个基.

证明　设 $r<$n, 则在 V_n 中必存在一向量 $\boldsymbol{a}_{r+1}\notin V_r$, 它不能被 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 线性表示, 将 $\boldsymbol{a}_{r+1}$ 添加进来, 则 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{r+1}$ 是线性无关的. 若 $r+1=n$, 则命题得证, 否则存在 $\boldsymbol{a}_{r+2}\notin L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{r+1})$, 则 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{r+2}$ 线性无关, 依此类推, 可找到 n 个线性无关的向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$, 它们是 V_n 的一个基.

5. 在 $\mathbf{R}^3$ 中求向量 $a=(3, 7, 1)^T$ 在基 $a_1=(1, 3, 5)^T$, $a_2=(6, 3, 2)^T$, $a_3=(3, 1, 0)^T$ 下的坐标.

解　设 e_1, e_2, e_3 是 $\mathbf{R}^3$ 的自然基, 则

$$(a_1, a_2, a_3)=(e_1, e_2, e_3)A,$$

$$(e_1, e_2, e_3)=(a_1, a_2, a_3)A^{-1},$$

其中 $A=\begin{pmatrix}1&6&3\\3&3&1\\5&2&0\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&6&-3\\5&-15&8\\-9&28&-15\end{pmatrix}$.

因为 $$a=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}=(a_1,a_2,a_3)A^{-1}\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}$$

$$=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}-2&6&-3\\5&-15&8\\-9&28&-15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}$$

$$=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}33\\-82\\154\end{pmatrix},$$

所以向量a在基a_1, a_2, a_3下的坐标为$(33, -82, 154)^T$.

6. 在 $\mathbf{R}^3$ 取两个基

$a_1=(1, 2, 1)^T$, $a_2=(2, 3, 3)^T$, $a_3=(3, 7, 1)^T$;

$b_1=(3, 1, 4)^T$, $b_2=(5, 2, 1)^T$, $b_3=(1, 1, -6)^T$.

试求坐标变换公式.

解　设e_1, e_2, e_3是 $\mathbf{R}^3$ 的自然基, 则

$(b_1, b_2, b_1)=(e_1, e_2, e_3)B$,

$(e_1, e_2, e_3)=(b_1, b_2, b_1)B^{-1}$,

$(a_1, a_2, a_1)=(e_1, e_2, e_3)A=(b_1, b_2, b_1)B^{-1}A$,

其中 $$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&7\\1&3&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{pmatrix}.$$

设任意向量a在基a_1, a_2, a_3下的坐标为$(x_1, x_2, x_3)^T$, 则

$$a=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(b_1, b_2, b_3)B^{-1}A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

故a在基b_1, b_2, b_3下的坐标为

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=B^{-1}A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&19&\frac{181}{4}\\-9&-13&-\frac{63}{2}\\7&10&\frac{99}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

7. 在 $\mathbf{R}^4$ 中取两个基

$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,0)^T$, $\boldsymbol{e}_2=(0,1,0,0)^T$, $\boldsymbol{e}_3=(0,0,1,0)^T$, $\boldsymbol{e}_4=(0,0,0,1)^T$;

$a_1=(2,1,-1,1)^T$, $a_2=(0,3,1,0)^T$, $a_3=(5,3,2,1)^T$, $a_3=(6,6,1,3)^T$.

(1)求由前一个基到后一个基的过渡矩阵;

解　由题意知

$$(a_1,a_2,a_3,a_4)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

从而由前一个基到后一个基的过渡矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2)求向量$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$在后一个基下的坐标;

解　因为

$$a=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=(a_1,a_2,a_3,a_4)A^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

向量a在后一个基下的坐标为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 12 & 9 & -27 & -33 \\ 1 & 12 & -9 & -23 \\ 9 & 0 & 0 & -18 \\ -7 & -3 & 9 & 26 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

(3)求在两个基下有相同坐标的向量.

解　令

$$\frac{1}{27}\begin{pmatrix}12 & 9 & -27 & -33\\ 1 & 12 & -9 & -23\\ 9 & 0 & 0 & -18\\ -7 & -3 & 9 & 26\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},$$

解方程组得$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$($k$ 为常数).

8. 说明 xOy 平面上变换$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$的几何意义，其中

(1) $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

解　因为

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix},$$

所以在此变换下 $T(a)$与a关于 y 轴对称.

(2) $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

解　因为

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix},$$

所以在此变换下 $T(a)$是a在 y 轴上的投影.

(3) $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$;

解　因为

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix},$$

所以在此变换下 $T(a)$与a关于直线 $y=x$ 对称.

(4) $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

解　因为

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix},$$

所以在此变换下 $T(a)$是将a顺时针旋转$\frac{p}{2}$.

9. n 阶对称矩阵的全体 V 对于矩阵的线性运算构成一个$\frac{n(n+1)}{2}$维线性空间. 给出 n 阶矩阵 P, 以 A 表示 V 中的任一元素, 变换 $T(A)=P^TAP$ 称为合同变换. 试证合同变换 T 是 V 中的线性变换.

证明　设 $A, B\in V$, 则 $A^T=A, B^T=B$.

$$T(A+B)=P^T(A+B)P=P^T(A+B)^TP$$
$$=[(A+B)P]^TP=(AP+BP)^TP$$
$$=(P^TA+P^TB)P=P^TAP+P^TBP=T(A)+T(B),$$
$$T(kA)=P^T(kA)P=kP^TAP=kT(A),$$

从而, 合同变换 T 是 V 中的线性变换.

10. 函数集合

$$V_3=\{\, a=(a_2x^2+a_1x+a_0)e^x \mid a_2, a_1, a_0\in \mathbf{R}\}$$

对于函数的线性运算构成 3 维线性空间, 在 V_3 中取一个基

$$a_1=x^2e^x,\ a_2=xe^x,\ a_3=e^x.$$

求微分运算 D 在这个基下的矩阵.

解　设

$$b_1=D(a_1)=2xe^x+x^2e^x=2a_2+a_1,$$
$$b_2=D(a_2)=e^x+xe^x=a_3+a_2,$$
$$b_3=D(a_3)=e^x=a_3.$$

易知b_1, b_2, b_3线性无关, 故为一个基.

由 $$(b_1, b_2, b_3)=(a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

知即 D 在基 a_1, a_2, a_3 下的矩阵为 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.

11. 2 阶对称矩阵的全体

$$V_3=\{A=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_2&x_3\end{pmatrix}|x_1,x_2,x_3\in R\}$$

对于矩阵的线性运算构成 3 维线性空间. 在 V_3 中取一个基

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

在 V_3 中定义合同变换

$$T(A)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},$$

求 T 在基 A_1, A_2, A_3 下的矩阵.

解　因为

$$T(A_1)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=A_1+A_2+A_3,$$

$$T(A_2)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}=A_2+2A_3,$$

$$T(A_3)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=A_3,$$

故 $$(T(A_1),T(A_2),T(A_3))=(A_1, A_2, A_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix},$$

从而, T 在基 A_1, A_2, A_3 下的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$.